UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Gleydson Chaves Ricarte

Teoria de regularidade para equações elípticas totalmente não-lineares com potenciais singulares e problemas de fronteira livre assintóticos

Fortaleza-Ce
2010

Gleydson Chaves Ricarte

TEORIA DE REGULARIDADE PARA EQUAÇÕES ELÍPTICAS TOTALMENTE NÃO-LINEARES COM POTENCIAIS SINGULARES E PROBLEMAS DE FRONTEIRA LIVRE ASSINTÓTICOS.

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração:
Análise Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Eduardo Vasconcelos Oliveira Teixeira.

Fortaleza-Ce
2010

Ricarte, Gleydson Chaves

R676t Teoria de regularidade para equações elípticas totalmente não lineares com potenciais singulares e problemas de fronteira livre assintóticos / Gleydson Chaves Ricarte – Fortaleza: 2010.
155f.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Vasconcelos Oliveira Teixeira.

Área de concentração: Matemática

Tese (doutorado)- Universidade Federal do Ceará;

Departamento de Matemática, 2010

1. Análise Matemática

CDD 515

Dedico este trabalho a Shirley, minha linda e maravilhosa esposa. A meus lindos filhos, Matheus e Gabriel.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus. Gostaria de agradecer ao Eduardo Teixeira pela orientação e oportunidade que me deu de trabalhar com os temas que apresento nesta tese e também pelas várias sugestões e incentivos. Agradeço também à Universidade Federal do Ceará e ao CNPq por terem me propiciado a oportunidade de realizar este trabalho. Agradeço também aos Professores Djairo de Figueiredo, Hermano Frid, Elves Silva e ao Professor José Fábio Bezerra Montenegro que, junto com o meu orientador, fizeram a revisão desta Tese de Doutorado e integraram a banca examinadora. As suas inúmeras sugestões moldaram este trabalho, tornando-o acessível a um leitor cujo conhecimento de análise corresponda ao que é adquirido em um curso de Equações Diferenciais, pelo que sou muito grato. Agradecimentos especiais são dirigidos a:

1. Meu pai e minha mãe, por serem bons pais, por sempre ter considerado a educação de seus filhos uma prioridade.

2. Shirley, minha esposa, por ter sido sempre a líder da torcida. meus lindos filhos Matheus e Gabriel, a paz que eles transmitem para mim pode ser comparada à felicidade de estarmos juntos.

3. A família, porque me fizeram sentir parte dela.

4. Os funcionários da secretaria da pós-graduação, especialmente Andréa Costa Dantas, por sua eficiência e prestatividade.

5. A todos aqueles que estiveram presentes no dia de minha defesa.

Finalmente, gostaria de agradecer a todos aqueles que contribuíram para a minha formação matemática: aos meus maravilhosos colegas do curso de Matemática, Sibério, Carpegiani, Fabrício, Paulo César (PC), Felipe, Isaac, Jobson, Jorge Hinojosa, Jânio Kleo, Henrique Fernandes, Ivy, Darlan, Marcos (peruano), Jonathan, David, Damião, Michel, Luiz e todos que não citei aqui um grande abraço; ao professor Levi Lima, por ter acreditado e me incentivado a continuar no curso de pós-graduação em Matemática; todos os meus professores da graduação e da pós-graduação.

“Nenhuma investigação feita pelo homem pode ser chamada realmente de ciência se não puder ser demonstrada matematicamente.”

Leonardo da Vinci (1452-1519).

Sumário

Resumo

Nosso trabalho tem como objetivo desenvolver uma nova técnica para pro-blema de fronteira livre para equações totalmente não-lineares

$$F(D^2 u_\varepsilon, Du_\varepsilon, x) = \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) \tag{0.0.1}$$

obtida quando $\varepsilon \to 0$, onde $\beta_\varepsilon \to \delta_0 \int \beta$, δ_0 função Delta Dirac.

Sobre o problema (0.0.1), inicialmente utilizamos o método da menor supersolução para construir soluções adequadas para obtenção de algumas propriedades geométricas, uniformes em ε, das superfícies de nível. Isto permite provar que a fronteira livre tem a geometria fraca (no sentido da teoria geométrica da medida) adequada para nossos objetivos. Dentre elas, citamos a estimativa uniforme e ótima do gradiente das soluções de (0.0.1) e não-degenerescência.

Para problema governado por operadores côncavos, estabelecemos importantes propriedades geométricas fracas, uniforme em ε, das superfícies de nível aproximadas. Estudamos também uma análise aprofundada do problema de fronteira livre limite quando $\varepsilon \to 0$. Provamos que a função limite $u_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon$ é solução de

$$F(D^2 u(x), Du(x), u(x), x) = 0$$

no conjunto de positividade $\Omega_0 := \{u_0 > 0\}$ e que u_0 satisfaz as condições geométricas adequadas. Neste caso, a função u_0 é forte candidata para a solução do nosso problema de fronteira livre. Finalmente, provaremos que a condição de fronteira livre vale no sentido da viscosidade de Caffarelli, o qual envolve uma hipótese natural de homogeneização do operador totalmente não-linear F. Em particular, para operadores invariantes por rotações, $F(D^2 u)$, vamos mostrar que a derivada normal da função limite u_0 é constante ao longo da fronteira livre. Provamos que, para operadores com coeficientes constantes, a fronteira livre é de classe $C^{1,\alpha}$.

Abstract

In this work we develop a fully nonlinear theory for singularly perturbed elliptic equations problems with high energy activation potentials, $\beta_\varepsilon(u)$ with $\beta_\varepsilon \to \delta_0 \cdot \int \beta$. We establish uniform and optimal gradient estimates of solutions and prove that minimal solutions are non-degenerated. For problems governed by concave equations, we establish uniform weak geometric properties of approximating level surfaces. We also provide a thorough analysis of the free boundary problem obtained as a limit as the ε-parameter term goes to zero. We find the precise jumping condition of limiting solutions through the phase transi-tion, which involves a subtle homogenization process of the governing fully nonlinear operator. In particular, for rotational invariant operators, $F(D^2u)$, we show the normal derivative of limiting function is constant along the interface. Smoothness properties of the free boundary are also addressed.

NOTAÇÕES:
Em todo trabalho N denotará a dimensão do espaço $\mathbb{R}^N$,

- Ω é um domínio, isto é, um conjunto aberto, limitado, conexo de $\mathbb{R}^N$.
- $\Omega' \Subset \Omega$ significa que o fecho do conjunto $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$ e $\overline{\Omega'}$ é compacto.
- $\varepsilon \ll 1$ significa que ε é suficientemente pequeno ($\varepsilon \gg 1$ é suficientemente grande).
- $|S|$ representa a medida N-dimensional de Lebesgue do conjunto S.
- $\mathcal{H}^{N-1}$ indica a medida $(N-1)$-dimensional de Hausdorff.
- $\mathcal{N}_\delta(E) := \{x \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(x, E) < \delta\}$, $E \subset \mathbb{R}^N$.
- $B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^N ; |x - x_0| < r\}$.
- $\langle ., . \rangle$ produto escalar de $\mathbb{R}^N$.
- $u^+ = \max(u, 0)$, $u^- = \max(-u, 0)$.
- χ_S função característica de um conjunto S.
- $\gamma \otimes \gamma$ representa a matriz $(\gamma_i \gamma_j)_{i,j}$.
- $\displaystyle ⨍_{B_r(x_0)} u(x)dx = \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, dx.$
- Como usual $Du = (\frac{\partial u}{\partial x_i})$ e $D^2 u = (\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j})$ denotam o gradiente e a Hessiana de u, respectivamente.
-

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{A perturbação} \quad \{\beta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \quad \text{é uma aproximação da Delta Dirac} \quad \delta_0 \\ \text{medida no seguinte sentido:} \quad \beta_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon}\beta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right), \quad \text{onde o suporte de} \\ \beta \quad \text{está em} \quad [0,1], \quad \beta \quad \text{é positiva em} \quad (0,1) \quad \text{e} \quad \int_0^1 \beta(s)ds = \text{T}. \end{array} \right. \tag{0.0.2}$$

- A expressão $a_{ij}(x)D_{ij}u(x) + b_i(x)D_i u + c(x)u$ representará o operador linear elíptico

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)D_{ij}u(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)D_i u + c(x)u.$$

Introdução

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domínio limitado com $\partial\Omega$ uma hipersuperfície compacta suave em $\mathbb{R}^N$, $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ função não-negativa e $Q : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ função positiva. Uma questão importante em Matemática Aplicada é saber se podemos encontrar outro domínio Ω' com $\partial\Omega' \subset \Omega$, hipersuperfície compacta, tal que seja possível resolver o problema superdeterminado

$$\left\{ \begin{array}{rcll} F(D^2u, x) & = & 0 & \text{em} \quad \Omega \setminus \Omega' \\ u & = & \varphi & \text{em} \quad \partial\Omega \\ u = 0, u_\nu & = & Q & \text{em} \quad \partial\Omega' \end{array} \right. \tag{0.0.3}$$

onde ν é o fetor normal interior a $\partial\Omega'$, $F : \mathcal{S}(N) \times \Omega \to \mathbb{R}$ é um operador totalmente não linear e $\mathcal{S}(N)$ denota o espaço das matrizes simétricas de ordem N.

Versões variacionais do problema acima estão em conexão com o trabalho monumental de Alt e Caffarelli [30]. De fato, para problemas regidos pelo Laplaciano, soluções de (0.0.3) podem ser obtidas como mínimos do funcional

$$\mathcal{J}(v) := \int_\Omega (|\nabla v|^2 + Q^2(x)\chi_{\{x_1>0\}})dx, \tag{0.0.4}$$

dentre funções $H^1(\Omega)$ com $v = \varphi$ em $\partial\Omega$. De fato é possível mostrar (vide [30]) que um mínimo do funcional (0.0.4) satisfaz $u_\nu = Q$ no conjunto $\partial\{u > 0\}$ (veja Figura 1). Inicialmente a equação é entendida em um sentido bastante fraco. Isto se deve ao fato de não ser possível, em princípio, garantir regularidade suficiente para u (observe que o potencial $\mathcal{J}$ é descontínuo: portanto a teoria do cálculo das variações não se aplica) muito menos suavidade da fronteira livre $\partial\{u > 0\}$.

Infelizmente, para problemas governados por operadores que não admitem um funcional de Euler-Lagrange, por exemplo, operadores da forma não divergentes ou totalmente não-lineares, ou ainda equações com termos de transporte, $\Delta u + \langle b(x), \nabla u\rangle$, a teoria variacional de Alt-Caffarelli não pode ser empregada neste caso e, portanto, foi necessário desenvolver novas técnicas para solucionar o problema de fronteira livre (0.0.3) para operadores não-variacionais.

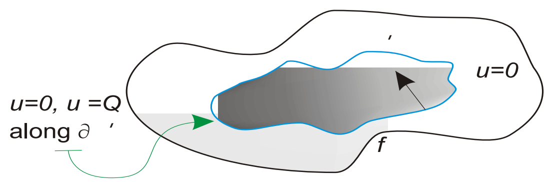


Figura 1: Motivação para o Laplaciano

Uma possível abordagem para tais problemas na ausência de uma caracterização variacional baseia-se em técnicas de perturbação singulare. A ideia básica é a seguinte: uma possível solução para o problema de fronteira livre (0.0.3) será obtida como limite de soluções do problema regularizado

$$\begin{cases} F(D^2u, x) & = & \beta_\varepsilon(u) & \text{em } \Omega \\ u & = & \varphi & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.0.5}$$

onde β_ε é uma aproximação da função δ_0 de Dirac. Para cada $\varepsilon > 0$ fixado, (0.0.5) mo-dela problemas de difusão com ativação de alta energia. São importantes para este campo de pesquisa, obtermos estimativas e propriedades geométricas uniformes em ε. Com relação ao nosso problema superdeterminado acima, (0.0.3), estimativas uniformes em ε são, então, transportadas para o problema de fronteira livre original.

Métodos regularizantes de perturbação singular para estudar (0.0.4), sua equação de Euler-Lagrange, bem como versões parabólica têm recebido grande atenção nas duas últimas décadas, veja por exemplo [6, 11, 12, 13, 31] entre outros. A equação da forma $F(D^2u_\varepsilon, x) = \Delta u_\varepsilon = \beta_\varepsilon(u_\varepsilon)$ foi estudada nos anos 80 por Lawy-Stampacchia, Nirenberg, Caffarelli, dentre outros. O estudo da equação (0.0.5) para operadores elípticos mais gerais é, hoje em dia, um tópico de grande interesse científico. De fato, Berestycki, Caffarelli e Nirenberg, em [31], iniciaram o estudo da equação (0.0.5) para operadores lineares da forma $Lu = a_{ij}(x)D_{ij}u + b_iD_iu + cu$, com coeficientes C^1. Eduardo Teixeira em [21] (veja também [37]) fornece uma análise detalhada do problema aproximado (0.0.5) governado pelo operador $Lu = \operatorname{div}(a_{ij}(x)Du) + b_iu_i + cu$, com coeficientes meramente Hölder contínuos. Permita-nos ainda citar os trabalhos de Caffarelli, Lederman e Wolanski [12] e [13], para problemas com duas fases, e o trabalho de Danielli, Petrosyan e Shahgholian, que estuda o problema (0.0.5) governado pelo p-Laplaciano (veja [16]). Com a analogia sugerida acima, métodos de perturbação singular proporcionam uma abordagem alternativa para a teoria Alt-Caffarelli. Ela permite o desenvolvimento de uma teoria não-variacional através de uma análise assintótica da equação regularizada não-variacional. Embora os trabalhos citados contemplem uma variedade grande de problemas elípticos não-variacionais de relevância física, as técnicas desenvolvidas nestes trabalhos ainda são de cunho variacional e dificilmente seriam adaptáveis a problemas totalmente não-lineares e não-variacionais. De fato, a análise de problemas inevitavelmente não-variacionais exigem novas abordagens em praticamente todas as etapas do trabalho. O desenvolvimento destas soluções foi o tema central desta Tese de doutorado.

No Capítulo 2, obteremos para cada $\varepsilon > 0$ fixado, resultados de existência e regularidade Lipschitz de soluções minimais para a equação (0.0.5). No capítulo 3, será provado que a família de soluções minimais $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ possui crescimento linear e é uniformemente não-degenerada. Vale a pena observar que essas propriedades não são válidas para qualquer tipo de solução do problema (0.0.5). No Capítulo 4, mostraremos que, a menos de subsequencia, $u_\varepsilon \to u_0$ localmente uniforme e a função limite satisfaz a equação diferencial $F(D^2u_0, Du_0, x) = 0$ no conjunto de positividade $\Omega_0 := \{u_0 > 0\}$, no sentido da viscosidade. Ademais, u_0 possui crescimento linear ao longo da fronteira livre $\mathfrak{F}(u_0) := \partial\{u_0 > 0\}$ e será fortemente não-degenerada. Mostraremos também uma estimativa local para a medida de Hausdorff da fronteira livre. Em seguida, listamos todos resultados obtidos nessa primeira parte do trabalho.

- Para cada $\varepsilon > 0$ fixado, a equação (0.0.5) possui uma solução minimal.
- Fixado um subdomínio $\Omega' \Subset \Omega$, existe constante $C = C(\Omega') > 0$, independente de $\varepsilon > 0$, tal que $|\nabla u_\varepsilon| < C$ em Ω'. Ou seja, u_ε são localmente uniformemente Lipschitz contínuas. Esta regularidade é ótima.
- A família $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ é uniformemente fortemente não-degenerada, ou seja, vale a seguinte estimativa por baixo: $\sup_{B_r} u_\varepsilon \geq Cr$. Tal degenerescência é ótima.
- A menos de subsequencia, u_ε converge local uniformemente para uma função Lipschitz contínua u_0 que satisfaz $F(D^2u_0, Du_0, x) = 0$ no conjunto Ω_0, no sentido da viscosidade. Ademais, $u_0(x) \sim \operatorname{dist}(x, \partial\{u_0 > 0\})$, para todo $x \in \{u_0 > 0\}$.
- Para qualquer bola B centrada na fronteira livre, vale $\mathcal{H}^{N-1}(B \cap \partial\{u_0 > 0\}) \sim r^N$.

A listagem dos resultados acima (propriedades da geometria fraca relevantes ao problema) nos coloca em posição favorável para a investigação da regularidade da fronteira livre. Neste tocante, destacamos a necessidade de provarmos condições de fronteira livre adequadas. Neste caso, demonstramos com sucesso a regularidade $C^{1,\alpha}$ da fronteira livre $\partial\{u_0 > 0\}$, a menos de um conjunto de medida de Hausdorff $N-1$ nulo.

No Capítulo 5, trataremos da condição de fronteira livre, isto é, o comportamento do gradiente ao longo da fronteira livre $\mathfrak{F}(u_0)$, o qual é uma questão bastante delicada. Foi conjecturado que a condição de fronteira livre do problema $F(D^2u) = \beta_\varepsilon(u)$ está intrinsecamente relacionada com a homogeneização do operador totalmente não-linear:

$$F^\star(M) := \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon F\left(\frac{1}{\varepsilon}M\right). \tag{0.0.6}$$

O resultado que obtivemos foi o seguinte: suponhamos que o operador $F : \mathcal{S}(N) \to \mathbb{R}$ seja invariante por rotações, isto é,

$$F(O^T M O) = F(M),$$

para qualquer transformação ortogonal $O \in \mathcal{O}(N)$ (geometricamente isto significa que F depende apenas dos autovalores da Hessiana), então, se $u_0 = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon$,

$$(u_0)_\nu \equiv \lambda, \quad \text{em qualquer parte } C^1 \text{ da fronteira livre} \quad \partial\{u_0 > 0\}, \tag{0.0.7}$$

para alguma constante λ a ser determinado. A prova destes resultados foi dividida em duas etapas:

1. Inicialmente provamos que a condição de fronteira livre (0.0.7) é válida num sentido fraco, que não exija regularidade a priori da fronteira livre (neste ponto obtemos tal condição para operadores que possuem dependência na variável x, isto é, operadores da forma $F(M, x)$). A estratégia foi considerar a homogenização

   $$F^\star(M, x) := \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon F\left(\frac{1}{\varepsilon}M, x\right). \tag{0.0.8}$$

   Com isso, obtemos condições necessárias e suficientes para a existência de homogeneização de operadores elípticos totalmente não-lineares (veja Proposição 5.6).

   Nosso principal objetivo é o seguinte: para problemas isotrópicos governados por operadores invariantes por rotações, existe um operador elípticos $F^\star$ para o qual a seguinte condição de fronteira livre é válida:

   $$F^\star(\nabla u_0(z) \otimes \nabla u_0(z), z) = 2\int \beta, \quad \text{para } z \in \mathfrak{F}(u_0).$$

   Nossa abordagem envolve uma análise crítica e linearização da equação acima. Provamos que a equação acima vale no sentido da teoria geométrica da medida, bem como no sentido da viscosidade de Caffarelli. Este último garante que u_0 possui o seguinte desenvolvimento assintótico

$$u_0(x) = \sqrt{\frac{2\int \beta}{F^\star(\nu \otimes \nu, x_0)}}\langle x - x_0, \nu\rangle^+ + \mathrm{o}(|x - x_0|),$$

próximo a pontos da fronteira livre. Observe que existem duas informações importantes sobre a afirmação acima. Primeiro é o comportamento linear assintótico das soluções Lipschitz e não-degeneradas em torno de pontos regulares. Segundo é o valor exato do coeficiente linear, a saber, u_0 comporta-se linearmente em torno de pontos regulares da fronteira livre e seu coeficiente é dado pela expressão

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\int \beta}{F^\star(\nu \otimes \nu, x_0)}}.$$

2. Uma vez provado isto, nos restringimos a operadores da forma $F(D^2u)$ e, usando ferramentas da teoria geométrica da medida, provamos que, de fato, a fronteira livre será de classe $C^{1,\gamma}$ e, portanto, a condição (0.0.7) será válida num sentido clássico.

Esta tese possui ainda dois apêndices. No Apêndice A, estudaremos alguns fatos relevantes sobre a Teoria Geométrica da Medida. No Apêndice B, trataremos do problema de duas fases e a versão evolutiva do problema de perturbação singular.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Neste capítulo, faremos uma breve descrição dos resultados básicos necessários para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes. Embora não incluamos detalhes das provas desses resultados, colocamos as referências onde esses detalhes podem ser encontradas. A principal dificuldade em definir solução fraca de equações totalmente não-lineares é a ausência de estrutura divergente. O procedimento usual para definir solução fraca de equações não-lineares em forma divergente consiste de multiplicar a equação por uma função teste suave e integrar por partes (esta é a ideia de solução distribucional). Veremos que, na definição de solução no sentido da viscosidade, também faremos uso de funções teste suaves e de um procedimento para fazer as derivadas que aparecem na equação incidirem sobre as funções teste. Entretanto, este procedimento será não-linear, em contraste com o procedimento linear de integração por partes. A definição de solução no sentido da viscosidade é inspirada no princípio do máximo para equações elípticas.

1.1 Soluções no sentido da viscosidade

A noção de solução de viscosidade foi introduzida por M. Crandall e P.L. Lions em 1983 [35], tendo sido colocada na forma atual por M. Crandall, L.C. Evans e P.L. Lions em 1984 [33]. Posteriormente, esta noção foi estendida a problemas fortemente não-lineares de segunda ordem por R. Jensen [39] em 1988. Desde então, esta idéia de solução no sentido da viscosidade teve impacto marcante na literatura recente em equações diferenciais parciais não-lineares, especialmente no que tange a problemas totalmente não-lineares de natureza elíptica e parabólica.O leitor pode consultar [34], que contém uma descrição do desenvolvimento recente desta teoria.

1.1.1 Definições básicas e apresentação de resultados

Para efeito da teoria a ser desenvolvida nos próximos capítulos, é conveniente tratar equações diferenciais parciais mais gerais do que equações lineares. Nesta seção vamos seguir as ideias do artigo [42] e do célebre livro [7]. Estudaremos resultados relacionados à teoria de existência e regularidade para soluçoes “fracas”de equações elípticas totalmente não-lineares da forma

$$\begin{cases} G(D^2u(x), Du(x), u(x), x) &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ u &= g \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

onde $G(M, p, z, x)$ é uma função a valores reais definida em $\Gamma = \mathcal{S}(N) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega$. Vamos assumir que G é um operador uniformemente elíptico, isto é, existem constantes positivas $\lambda \leq \Lambda$, tais que

$$G(M + P, p, z, x) \leq G(M, p, z, x) + \Lambda\|P^+\| - \lambda\|P^-\|$$

para todo $(M, p, z, x) \in \Gamma$, e $M, P \in \mathcal{S}(N)$, onde $\|P^+\|$ representa máximo da parte positiva dos autovalores de P, e $\|P^-\| = \|(-P)^+\|$. Agora vamos definir o que vem a ser uma solução fraca da equação.

Definição 1.1. *Uma função contínua $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é chamada uma subsolução no sentido da viscosidade da equação*

$$G(D^2u(x), Du(x), u(x), x) = 0$$

se para toda função $\varphi \in C^2(\Omega)$ e para todo máximo local x_0 de $u - \varphi$, temos

$$G(D^2\varphi(x_0), D\varphi(x_0), u(x_0), x_0) \geq 0. \tag{1.1.2}$$

A função u é chamada uma supersolução no sentido da viscosidade de (1.1.1) se para toda $\varphi \in C^2(\Omega)$ e para todo mínimo local x_0 de $u - \varphi$, temos

$$G(D^2\varphi(x_0), D\varphi(x_0), u(x_0), x_0) \leq 0. \tag{1.1.3}$$

Uma função u é uma solução no sentido da viscosidade (ou solução de Perron) de (1.1.1) se for uma subsolução e uma supersolução.

Diremos que $G(D^2u(x), Du(x), u(x), x) \geq 0 \quad$ (respec. $\leq, =$) no sentido da viscosidade em Ω quando u é subsolução (respec. supersolução, solução) no sentido da viscosidader do problema (1.1.3).

- O operador G é positivamente homogêneo de grau 1, se para todo $(M, p, z, x) \in \Gamma$

$$G(\alpha M, p, z, x) = \alpha G(M, p, z, x), \quad \text{para todo} \quad \alpha > 0.$$

Definição 1.2. *Dizemos que P é um paraboloide de abertura M quando*

$$P(x) = \ell_0 + \ell(x) \pm \frac{M}{2}|x|^2$$

onde M é uma constante positiva, ℓ_0 é uma constante e ℓ é uma função linear. O paraboloide é convexo (ou côncavo) quando for $+$ (ou $-$).

Definição 1.3. *Dados duas funções contínuas u e v definidas num aberto $A \subset \mathbb{R}^N$ e um ponto $x_0 \in A$, diremos que v* **toca** *u por cima em x_0 em A quando*

$$u(x) \leq v(x) \quad \forall\, x \in A$$

$$u(x_0) = v(x_0).$$

O próximo resultado estabelece uma forma alternativa para definir solução no sentido da viscosidade para o problema (1.1.3). Ao leitor interessado na prova, sugerimos [7].

Proposição 1.1. *As seguintes condições são equivalentes:*

(1) u é subsolução no sentido da viscosidade de (1.1.3) em Ω;

(2) Se $x_0 \in \Omega$, A é vizinhança aberta de x_0, $\varphi \in C^2(A)$,

$$u \leq \varphi \quad \text{em} \quad A \quad \text{e} \quad u(x_0) = \varphi(x_0), \tag{1.1.4}$$

então $G(D^2\varphi(x_0), D\varphi(x_0), u(x_0), x_0) \geq 0$;

(3) Vale a mesma conclusão que (2) trocando φ por um paraboloide.

A terminologia adotada é a seguinte: dizemos que φ toca u por cima em x_0 se existe uma vizinhança aberta A de x_0 tal que (1.1.4) vale.

Antes de continuarmos a seção, vale a pena observar que esta nova noção de solução no sentido da viscosidade é compatível com o conceito de solução clássica. De fato, se u for solução clássica e $u - \varphi$ possui um máximo local em x_0, então $D^2u(x_0) \leq D^2\varphi(x_0)$ e, portanto, pela monotonicidade de G, segue que

$$G(D^2\varphi(x_0), D\varphi(x_0), u(x_0), x_0) \geq G(D^2u(x_0), Du(x_0), u(x_0), x_0) = 0.$$

Reciprocamente, se uma solução no sentido da viscosidade u é de classe C^2, então ela é solução clássica. Portanto, podemos enunciar o seguinte resultado:

Proposição 1.2 (veja [7]). *Suponha* $u \in C^2(\Omega)$. u *é uma subsolução de* (1.1.3) *em* Ω *se, e somente se,* $G(D^2u(x), Du(x), u(x), x) \geq 0$*, para todo* $x \in \Omega$.

Observação 1.1. *Note que se* u *é uma supersolução no sentido da viscosidade de* (1.1.3) *em* Ω*, então* $v = -u$ *é uma subsolução no sentido da viscosidade de*

$$L(D^2v(x), Dv(x), v(x), x) = 0 \quad \textit{em} \quad \Omega,$$

onde $L(M, q, p, x) := -G(-M, -q, -p, x)$. *Note que* L *possui mesmas constantes de elipticidade de* G. *Portanto, todos os resultados que valem para supersoluções serão válidos para subsolução e vice-versa.*

O próximo resultado segue imediatamente da definição de subsoluções no sentido da viscosidade. Deixamos a prova para o leitor.

Proposição 1.3. *Suponha que* u *e* v *são subsoluções no sentido da viscosidade de* (1.1.3) *em* Ω. *Então* $\sup(u, v)$ *é também uma subsolução no sentido da viscosidade de* (1.1.3) *em* Ω.

Soluções no sentido da viscosidade são estáveis com respeito à convergência uniforme no seguinte sentido: se $\{u_m\} \subset C^0(\Omega)$, $\{G_m\} \subset C^0(\Gamma)$ convergem uniformemente para u e G, respectivamente, e $G_m(u_m) \geq 0$, (≤ 0), no sentido da viscosidade, então $G(u) \geq 0\,(\leq 0)$, no sentido da viscosidade. Temos assim o seguinte resultado:

Proposição 1.4 (veja [7]). *Seja* $\{G_m\}_{m\geq 1}$ *sequência de operadores uniformemente elípticos com constantes* λ *e* Λ*, e seja* $\{u_m\}_{m\geq 1} \subset C(\Omega)$ *tal que*

$$G_m(D^2u_m(x), Du_m(x), u_m(x), x) \geq 0$$

no sentido da viscosidade em Ω. *Suponha que* G_m *converge uniformemente em subconjuntos compactos de* Γ *para* G*, e que* u_m *converge uniformemente em subconjuntos compactos de* Ω *para* u. *Então*

$$G(D^2u(x), Du(x), u(x), x) \geq 0$$

no sentido da viscosidade em Ω.

1.1.2 Operadores extremais de Pucci e estimativa ABP

Nesta seção, vamos definir de uma forma fraca a classe de “todas soluções para equações elípticas”. Para isto, vamos introduzir os **operadores extremais de Pucci**. A ideia é substituir qualquer equação particular por certas desigualdades dadas pelas constantes de elipticidade.

Para todo $M \in \mathcal{S}(N)$ denotaremos os operadores minimal e maximal respectivamente de Pucci:

$$\mathfrak{M}^+(M, \lambda, \Lambda) := \Lambda \sum_{e_i > 0} e_i + \lambda \sum_{e_i < 0} e_i$$

e

$$\mathfrak{M}^-(M, \lambda, \Lambda) := \lambda \sum_{e_i > 0} e_i + \Lambda \sum_{e_i < 0} e_i$$

onde $e_i's$ são os autovalores de M.

Seja agora A uma matriz simétrica cujos autovalores pertencem ao intervalo $[\lambda, \Lambda]$, isto é, $\lambda|\xi|^2 \leq A_{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$. Usaremos a seguinte notação $A \in \mathfrak{A}_{\lambda,\Lambda}$. Defina um funcional linear $\mathcal{L}_A$ por

$$\mathcal{L}_A M := A_{ij}M_{ij} = \operatorname{tr}(AM), \quad M \in \mathcal{S}(N).$$

Como $M = ODO^t$, onde $D_{ij} = e_i\delta_{ij}$ (e_i são os autovalores de M) e O é uma matriz ortogonal, é possível mostrar que

$$\mathfrak{M}^-(M, \lambda, \Lambda) = \inf_{A \in \mathfrak{A}_{\lambda,\Lambda}} \mathcal{L}_A M$$

$$\mathfrak{M}^+(M, \lambda, \Lambda) = \sup_{A \in \mathfrak{A}_{\lambda,\Lambda}} \mathcal{L}_A M$$

Os operadores extremais de Pucci satisfazem as seguintes propriedades:

Lema 1.1 (Veja [7])**.**

(1) $\mathfrak{M}^-(M, \lambda, \Lambda) \leq \mathfrak{M}^+(M, \lambda, \Lambda)$;

(2) se $\lambda' \leq \lambda \leq \Lambda \leq \Lambda'$ então,

$$\mathfrak{M}^-(M, \lambda', \Lambda') \leq \mathfrak{M}^-(M, \lambda, \Lambda) \quad \text{e} \quad \mathfrak{M}^+(M, \lambda', \Lambda') \geq \mathfrak{M}^+(M, \lambda, \Lambda);$$

(3) $\mathfrak{M}^-(M, \lambda, \Lambda) = -\mathfrak{M}^+(-M, \lambda, \Lambda)$;

(4) $\mathfrak{M}^\pm(\alpha M, \lambda, \Lambda) = \alpha\mathfrak{M}^\pm(M, \lambda, \Lambda)$, se $\alpha \geq 0$;

(5) $\mathfrak{M}^+(M) + \mathfrak{M}^-(N) \leq \mathfrak{M}^+(M+N) \leq \mathfrak{M}^+(M) + \mathfrak{M}^+(N)$;

(6) $\mathfrak{M}^-(M) + \mathfrak{M}^-(N) \leq \mathfrak{M}^-(M+N) \leq \mathfrak{M}^-(M) + \mathfrak{M}^+(N)$;

(7) $N \geq 0$ então, $\lambda\|P\| \leq \mathfrak{M}^-(P) \leq \mathfrak{M}^+(P) \leq N\Lambda\|P\|$;

(8) $\mathfrak{M}^+$ e $\mathfrak{M}^-$ são uniformemente elípticas com constantes de elipticidades λ e $N\Lambda$.

Definição 1.4. *Sejam $\lambda \leq \Lambda$ duas constantes positivas. Vamos denotar $\underline{S}(\lambda, \Lambda)$ o espaço das funções contínuas u em Ω tais que $\mathfrak{M}^+(D^2u, \lambda, \Lambda) \geq 0$ no sentido da viscosidade. Similarmente, $\overline{S}(\lambda, \Lambda)$ denota o espaço das funções contínuas u em Ω tal que $\mathfrak{M}^-(D^2u, \lambda, \Lambda) \leq 0$ no sentido da viscosidade em Ω. Definimos também*

$$S(\lambda, \Lambda) := \underline{S}(\lambda, \Lambda) \cap \overline{S}(\lambda, \Lambda).$$

Um ponto bastante importante diz respeito à relação entre operadores de Pucci com soluções no sentido da viscosidade para (1.1.3)

Proposição 1.5. *Suponha que u satisfaça*

$$G(D^2u(x), Du(x), u(x), x) \geq 0 \quad [\textit{respec.} \quad G(D^2u(x), Du(x), u(x), x) \leq 0]$$

no sentido da viscosidade em Ω e que $G(0, p, z, x) = 0$. Então

$$\mathfrak{M}^+\left(D^2u\frac{\lambda}{N}, \Lambda\right) \geq 0 \quad \left[\textit{respec.} \quad \mathfrak{M}^-\left(D^2u\frac{\lambda}{N}, \Lambda\right) \leq 0\right].$$

Demonstração. De fato, seja $\varphi \in C^2$ tocando u por cima em x_0. Então,

$$\begin{aligned} 0 &\leq G(D^2\varphi(x_0), D\varphi(x_0), \varphi(x_0), x_0) \\ &\leq G(0,0,0,x_0) + \Lambda\|[D^2\varphi(x_0)]^+\| - \lambda\|[D^2\varphi(x_0)]^-\| \\ &\leq \Lambda \sum_{e_i>0} e_i + \frac{\lambda}{N}\sum_{e_i<0} e_i \\ &= \mathfrak{M}^+\left(D^2\varphi(x_0), \frac{\lambda}{N}, \Lambda\right). \end{aligned}$$

$\square$

Vamos enunciar agora a versão geral do Princípio do Máximo de Aleksandrov-Bakelman-Pucci (ABP) [45] para soluções no sentido da viscosidade.

Definição 1.5. *Seja v função contínua num aberto convexo A. O envelope convexo de v em A é definido por*

$$\begin{aligned}\Gamma(v)(x) &:= \sup_w \{w(x) : w \leq v \text{ em } A,\, w \text{ convexa em } A\} \\ &= \sup_L \{L(x) : L \leq v \text{ em } A, L \text{ é função afim}\}.\end{aligned}$$

para $x \in A$.

Temos que $\Gamma(v)$ é uma função convexa em A. O conjunto $\{v = \Gamma(v)\}$ é chamado de conjunto contato de v.

Teorema 1.1 (veja [45]). *Seja u subsolução de*

$$G(D^2u(x), Du(x), u(x), x) = f(x)$$

em B_d, onde B_d é uma bola aberta de raio d em $\mathbb{R}^N$ com $u \geq 0$ em ∂B_d. Então

$$\sup_{B_d}(u^-) \leq Cd \left(\int_{B_d \cap \{u = \Gamma_u\}} (f^+)^N \right)^{\frac{1}{N}}$$

onde C só depende das constantes de elipticidade λ, Λ. Aqui estendemos u como sendo zero fora de B_d, e portanto $-u^-$ é contínua em B_{2d}; Γ_u é o envelope convexo em B_{2d} de $-u^-$.

O próximo resultado é baseado na decomposição de Caldéron-Zygmund. Vamos denotar por $Q_\ell(x_0)$ o cubo aberto de $\mathbb{R}^N$ centrado em x_0, de aresta ℓ, isto é,

$$Q_\ell(x_0) := \prod_{i=1}^{N} \left(x_0^i - \frac{\ell}{2}, x_0^i + \frac{\ell}{2} \right)$$

e $Q_\ell = Q_\ell(0)$. Seja Q_1 o cubo unitário. Começe dividindo Q_1 em 2^N cubos adjacentes de lado $1/2$. Cada subcubo, dividimos sobre 2^N cubos, e assim por diante. Os cubos obtidos nesses processos são chamados cubos diáticos. No que segue Q_1 é um cubo unitário e Q um cubo diático (veja [7]).

Lema 1.2. *Sejam $A \subset B \subset Q_1$ conjuntos mensuráveis e $0 < \delta < 1$ tais que*

(a) $|A| \leq \delta$ e

(b) Se Q é um cubo diático tal que $|A \cap Q| > \delta |Q|$, então $\tilde{Q} \subset B$.

Então $|A| \leq \delta|B|$.

Com o Teorema 1.1 e lema 1.2, obtemos a desigualdade de Harnack (veja [7])

Teorema 1.2. *Seja* u *solução do problema*

$$G(D^2u(x), Du(x), u(x), x) = f(x) \quad \textit{em} \quad B_1,$$

onde f *é contínua e limitada em* Q_1*. Então*

$$\sup_{B_{1/2}} u \leq C(\inf_{B_{1/2}} u + \|f\|_{L^N(B_1)})$$

onde C *é universal.*

1.1.3 Regularidade de soluções

Nosso objetivo aqui é verificar que soluções no sentido da viscosidade de equações totalmente não-lineares são continuamente diferenciáveis com derivadas primeiras Hölder contínuas. Utilizando a abordagem de Perron de Ishii [23, 24, 25], seremos capazes de inferir teoremas de existência para soluções continuamente diferenciáveis do problema de Dirichlet. O operador G está sujeito inicialmente às seguintes condições:

(F1) (Elipticidade uniforme)

$$\lambda \mathrm{tr}(N) \leq G(M+N, p, z, x) - G(M, p, z, x) \leq \Lambda \mathrm{tr}(N)$$

(F2) $|G(0, p, z, x)| \leq \mu_0 + \mu_1|p|$

(F3) $|G(M, p, z, x) - G(M, q, t, y)| \leq \mu_0 + \mu_1(|p| + |q|) + \omega(|x-y| + |z-t|)\|M\|$

para todo $x, y \in \Omega$, $|z|, |t| \leq K_0$, $p, q \in \mathbb{R}^N$, $M, N \in \mathcal{S}(N)$ com $N \geq 0$, $K_0 > 0$, onde $\lambda, \Lambda, \mu_0, \mu_1$, são constantes positivas (dependendo possivelmente de K_0), e ω é uma função não-decrescente em $\mathbb{R}^+$ com $\omega(a) \to 0$ quando $a \to 0$. Para as afirmações sobre regularidade vamos exigir que ω seja uma função potência, isto é

$$\omega(a) = \mu_2 a^\tau \tag{1.1.5}$$

para constantes positivas μ_2 e τ. Observe que a condição $(F1)$ implica continuidade Lipschitz de G com respeito a M e, portanto, podemos expressá-la equivalentemente da seguinte forma:

$$\lambda I \leq G_M \leq \Lambda I.$$

As condições estruturais $(F1)$, $(F2)$ e $(F3)$ devem ser vistas em conexão com um exemplo importante, a Equação de Isaac da teoria dos jogos estocásticos.

Exemplo 1. *Seja $\{L_{\alpha\beta}\}$ família de operadores lineares, indexada por dois parâmetros $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{B}$, dados por*

$$L_{\alpha\beta}u := a^{ij}_{\alpha\beta}D_{ij}u + b^{i}_{\alpha\beta}D_iu + c_{\alpha\beta}u \tag{1.1.6}$$

onde $a^{ij}_{\alpha\beta}$, $b^{i}_{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta}$, $f_{\alpha\beta} \in C^0(\Omega)$. A equação de Isaac correspondente e,

$$G[u] := \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \sup_{\beta\in\mathcal{B}}(L_{\alpha\beta}u - f_{\alpha\beta}) \tag{1.1.7}$$

satisfará as condições $(F1)$, $(F2)$ e $(F3)$ se o operador for uniformemente elíptico com relação a α e β, isto é,

$$\lambda I \leq [a^{ij}_{\alpha\beta}] \leq \Lambda I.$$

para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{B}$ para constantes fixadas λ e Λ, e os coeficientes $a^{ij}_{\alpha\beta}$ são uniformemente contínua (Hölder contínua também para satisfazer (1.1.5)) com os coeficientes $b^{i}_{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta}$ e $f_{\alpha\beta}$ uniformemente limitados. Quando os conjuntos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ coincidem, obtemos os chamados operadores de Bellman.

Podemos agora enunciar um resultado de regularidade.

Teorema 1.3 ([42], Teorema 2.1)**.** *Seja u solução no sentido da viscosidade da equação (1.1.1) num domínio Ω, onde G satisfaz as condições estruturais $(F1), (F2)$ e $(F3)$, juntamente com (1.1.5). Então u é continuamente diferenciável em Ω, com primeira derivada localmente Hölder contínua com expoente α dependendo somente de N, $\frac{\Lambda}{\lambda}$ e τ.*

Teorema 1.4 ([42], Teorema 2.3)**.** *Seja $u \in C^0(\bar{\Omega})$ solução no sentido da viscosidade do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} G(D^2u, Du, u, x) &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ u &= g \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1.8}$$

onde G satisfaz as condições estruturais $(F1), (F2)$ e $(F3)$, $\partial\Omega \in C^{1,\tau}$ e $g \in C^{1,\tau}(\bar{\Omega})$, para algum $\tau > 0$. Então $u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ para alguma constante positiva α dependendo somente de $N, \Lambda/\lambda$ e τ, e temos a seguinte estimativa

$$|u|_{1,\alpha;\Omega} \leq C$$

onde C depende de $N, \Lambda/\lambda, \tau, \mu_0/\lambda, \mu_1/\lambda, \mu_2/\lambda$, $|g|_{1,\tau}$, $|u|_{0;\Omega}$ e Ω.

Observação 1.2. *Se apenas as condições* $(F1)$ *e* $(F2)$ *são satisfeitas e* u *é uma solução no sentido da viscosidade da equação (1.1.1) num domínio* Ω*, segue que* u *é duas vezes diferenciável para quase todo ponto de* Ω*, veja [43]. Agora, se adicionarmos a* $(F1)$*,* $(F2)$ *e* $(F3)$*, a hipótese de convexidade ou concavidade do operador* G *com respeito à variável* M*, então segue que* $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ *para todo* $\alpha < 1$*. Finalmente, se assumirmos também que:*

(F4) $|G(M,p,z,x) - G(M,q,t,y)| \leq \omega\left(|x-y| + |z-t| + |p-q|\right)(1 + \|M\|)$,

para todo $x, y \in \Omega$*,* $|z|, |t|, |p|, |q| \leq K_0$*,* $M \in \mathcal{S}(N)$*, onde* ω *é como (1.1.5), então* $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ *para algum* $\alpha > 0$ *dependendo somente de* $N, \frac{\Lambda}{\lambda}, \tau$*. Se* $\partial\Omega \in C^{2,\tau}$*,* $g \in C^{2,\tau}(\bar{\Omega})$ *e* u *solução de viscosidade de (1.1.8), então* $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$*; (*$C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ *para todo* $\alpha < 1$ *se* $(F4)$ *não for assumido). Estas últimas afirmações seguem por considerações de quociente diferencial de segunda ordem; (veja [44]).*

1.1.4 Existência de soluções viscosas

Esta seção tem como objetivo ampliar a discussão sobre a questão de existência de soluções no sentido da viscosidade para equações totalmente não-lineares. Existem várias abordagens utilizadas na literatura para obter resultados de existência de soluções no sentido da viscosidade para os problemas, principalmente o problema de Dirichlet, para equações elípticas totalmente não-lineares da forma (1.1.1) (veja [42] ou [25]).

Um desses métodos é o chamado método de Perron, que consiste em encontrar soluções de viscosidade como supremos de famílias de subsoluções. A ideia é baseada no método de Perron clássico para obter existência de solução para a equação de Laplace. A formulação deste método para equações totalmente não-lineares é devida a H. Ishii [23], [24] e [25]. Sob as hipóteses $(F1)$, $(F2)$ e $(F3)$, vários teoremas de existência podem ser formulados dependendo do tipo de comportamento da fronteira e limitação *a priori* das soluções. Uma condição padrão é a seguinte:

$$\begin{aligned} &\lambda \mathrm{tr}(N) \leq G(M+N,p,z,x) - G(M,p,z,x) \\ &(\mathrm{sign}(z))G(0,p,z,x) \leq \mu_0 + \mu_1|p|. \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

para todo $(M,p,z,x) \in \Gamma$, $N \in \mathcal{S}(N)$, $N \geq 0$, onde agora λ, μ_0, μ_1 são constantes fixadas. Para dados de fronteira suave, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.5 ([42], Teorema 3.1)**.** *Seja* $G \in C^0(\Gamma)$ *satisfazendo as condições estruturais* $(F1)$*,* $(F2)$*,* $(F3)$ *juntamente com (1.1.9). Então, se* $\partial\Omega \in C^{1,\tau}$*,* $g \in C^{1,\tau}(\bar{\Omega})$ *para algum*

$\tau > 0$, existe uma solução no sentido da viscosidade $u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ do seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} G(D^2u, Du, u, x) & = & 0 & \textit{em } \Omega \\ u & = & g & \textit{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

para algum $\alpha > 0$, dependendo somente de $N, \Lambda/\lambda$ e τ.

A prova do teorema anterior combina a existência de soluções contínuas de Ishii [25] com a regularidade comentada na observação 1.2. O trabalho de Ishii envolve dois estágios, ou seja, uma abordagem do método de Perron para soluções de viscosidade e um princípio de comparação para inferir sua continuidade. Como indicado acima, o primeiro estágio requer hipóteses mínimas. Para qualquer função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ definimos seu envelope semicontínuo superior (inferior) $u^\star : \bar{\Omega} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ por

$$u^\star(x) := \limsup_{r \downarrow 0} \{u(y) : y \in B_r(x) \cap \Omega\} \quad \text{para} \quad x \in \bar{\Omega},$$

e $u_\star : \bar{\Omega} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ por

$$u_\star(x) := \limsup_{r \downarrow 0} \{u(y) : y \in B_r(x) \cap \Omega\} \quad \text{para} \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Obviamente que $u^\star \geq u \geq u_\star$ em Ω e que $u_\star = (-u)^\star$. Vamos descrever rapidamente aqui o método de Perron de Ishii. Segundo Ishii, uma função u em Ω é chamada uma subsolução de viscosidade (supersolução) de (1.1.1) em Ω se $u^\star(y) < \infty$, para $x \in \bar{\Omega}$ (resp. $u_\star(x) > -\infty$) e se seu envelope semicontínuo superior (inferior) $u^\star(u_\star)$, corresponde à definição de solução de viscosidade dada anteriormente, isto é, para toda $\varphi \in C^2(\Omega)$, $y \in \Omega$ e $(u^\star - \varphi)(y) = \max_\Omega(u^\star - \varphi)$,

$$G(D^2\varphi(y), D\varphi(y), u^\star(y), y) \leq 0$$

(para toda $\varphi \in C^2(\Omega)$, $y \in \Omega$ e $(u_\star - \varphi)(y) = \min_\Omega(u_\star - \varphi)$,

$$G(D^2\varphi(y), D\varphi(y), u^\star(y), y) \geq 0).$$

Como antes, u é uma solução de viscosidade, se for tanto subsolução e supersolução. A existência de tais soluções de viscosidade generalizada é garantida pelos resultados abaixo

Proposição 1.6 (Veja [25])**.** *Seja G função contínua em Γ. Seja S família não-vazia de subsolução de viscosidade de* (1.1.1)*. Defina uma função u em Ω por*

$$u(x) := \sup_{v \in S} v(x), \quad x \in \Omega.$$

Suponha que $u^\star(x) < \infty$ para $x \in \bar{\Omega}$. Então u é uma subsolução de viscosidade de (1.1.1).

Proposição 1.7 (Veja [25]). *Seja $G \in C^0(\Gamma)$ elíptica não-degenerada e suponha que existam uma supersolução de viscosidade u_1 e subsolução de viscosidade u_2 de (1.1.1) em Ω com $u_1, u_2 \in C^0(\bar{\Omega})$ e $u_1 \leq u_2$. Então existe uma solução no sentido da viscosidade de (1.1.1) em Ω satisfazendo $u_1 \leq u \leq u_2$.*

Para o princípio de comparação, devemos trocar a condição $(F3)$ por

$$(F5) \quad \left\{ \begin{array}{l} G \text{ é monótona crescente com respeito a variável } \quad z \\ |G(M,p,z,x) - G(M,q,z,y)| \leq \omega(|x-y|) + \mu(|x-y|\|M\| + |q-p|), \end{array} \right. \tag{1.1.10}$$

para $x, y \in \Omega$, $|z| \leq K_0$, $p, q \in \mathbb{R}^N$, $M \in \mathcal{S}(N)$, onde ω é como em $(F3)$ e μ é uma constante positiva. Então temos,

Lema 1.3 (veja [25]). *Seja $u, v \in L^\infty(\Omega)$ respectivamente subsolução e supersolução de viscosidade da equação (1.1.1) em Ω com $u^\star \leq v_\star$ em $\partial\Omega$, e suponha G satisfazendo $(F1)$ (ou pelo menos a primeira desigualdade) e $(F5)$. Então $u^\star \leq v_\star$ em Ω.*

Combinando os Lemas 1.7 e 1.3, deduzimos existência de uma única solução de viscosidade do problema de Dirichlet

$$\left\{ \begin{array}{rcll} G(D^2u, Du, u, x) & = & 0 & \text{em } \Omega \\ u & = & g & \text{em } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

quando (1.1.9) e $(F5)$ são válidos, $g \in C^0(\bar{\Omega})$ e $\partial\Omega$ satisfaz, por exemplo, a condição de barreira. Se juntarmos as condições $(F1)$, $(F2)$ e $(F3)$, obtemos uma única solução $u \in C^{1,\alpha}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, como consequência do Teorema 1.5. A remoção da condição $(F5)$ pode ser obtida por aproximação e utilização do Teorema de Leray-Schauder, ([17], Capítulo 11).

Destacamos que a solução do problema de Dirichlet no Teorema 1.5 será única se $(F5)$ vale com $|x-y|$ trocada por $|x-y|^{1/2}$, bem como o princípio de comparação, Lema 1.3, pode ser estendida se as funções $u, v \in C^{0,1}(\Omega)$, [41].

Exemplo 2. *Considere a equação de Isaac* (1.1.6) *com conjuntos de índices enumeráveis $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tal que $c_{\alpha\beta} \leq 0\ \forall\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{B}$. Nestes termos, a condição* (1.1.9) *é satisfeita, além disso também são válidas elipticidade uniforme e continuidade dos coeficientes como formulado na seção anterior. Sob estas condições, podemos enunciar o seguinte resultado de existência: Para $\partial\Omega \in C^{1,\tau}$ existe uma solução de viscosidade $u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ para algum $\alpha > 0$, do problema de Dirichlet para a equação de Isaac* (1.1.7)

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \sup_{\beta\in\mathcal{B}} (L_{\alpha\beta}u - f_{\alpha\beta}) & = & 0 & \textit{em } \Omega \\ u & = & g & \textit{em } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

a qual é única se $a^{ij}_{\alpha\beta} \in C^{1/2}(\Omega)$, uniforme com relação a $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$.

Vamos agora nos concentrar nas estimativas $W^{2,p}$ para soluções no sentido da viscosidade para equações da forma (veja [45] ou [7])

$$F(D^2u, x) = f(x),$$

e estimativas $C^{1,\alpha}$ (segundo Caffarelli) para equações mais gerais da forma

$$G(D^2u(x), Du(x), u(x), x) = f(x),$$

num domínio Ω (veja [45]). Com relação à estimativa $W^{2,p}$, segue o seguinte resultado.

Teorema 1.6. *Seja u solução no sentido da viscosidade de*

$$G(D^2u(x), x) = f(x)$$

com $|u| < 1$, e seja

$$S(x) = \sup_M \frac{|G(M, x) - G(M, 0)|}{\|M\| + 1}$$

onde o supremo é tomado no espaço das matrizes simétricas $\mathbb{S}(N)$. Se a equação

$$G(D^2v + M, 0) = P,$$

para M, P na superfície $G(M, 0) = P$, possui estimativa $C^{1,1}$:

$$\|D^2v\|_{L^\infty(B_r)} \leq \frac{C}{r^2}\|v\|_{L^\infty(B_{2r})} \tag{1.1.11}$$

e

$$\|S(x)\|_{L^\infty(B_1)} \leq \delta_0(\lambda, \Lambda),$$

então, para $p > N$, $u \in W^{2,p}(B_{1/2})$ e

$$\|u\|_{W^{2,p}(B_{1/2})} \leq C(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^p(B_1)}).$$

Temos o seguinte lema, cuja prova baseia-se num argumento de compacidade. Esse resultado desempenha um papel central e é a verdadeira razão pela qual somos capazes de desenvolver um método totalmente não-linear, sem linearização.

Lema 1.4 (veja [45]). *Seja u solução no sentido da viscosidade de*

$$F(D^2u(x), Du(x), x) = f(x) \quad \textit{em} \quad B_1$$

com $|u| \leq 1$. *Seja*

$$S_h(x) := \sup_{|q| \leq h} \frac{|F(M, p+q, x) - G(M, p, 0)|}{\|M\| + 1}$$

onde o supremo é tomado sobre M, p, q. *Então, para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta(\varepsilon, \lambda, \Lambda)$ *e* $h(\varepsilon, \lambda, \Lambda)$ *tal que, se*

$$\begin{cases} G(D^2 v, 0, 0) &= 0 \quad \text{em } B_{1/2} \\ v &= u \quad \text{em } \partial B_{1/2}, \end{cases}$$

então

$$\|u - v\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq \varepsilon,$$

desde que a condição de pequena oscilação

$$\|S_h\|_{L^n(B_1)} + \|f\|_{L^N(B_1)} \leq \delta(\varepsilon, \lambda, \Lambda),$$

para $h \geq h(\varepsilon, \lambda, \Lambda)$, *seja satisfeita.*

Vamos comentar agora resultados sobre estimativas $C^{1,\alpha}$ para soluções no sentido da viscosidade. Em adição ao argumento de compacidade descrito acima, a prova deste lema depende do teorema de unicidade de Jensen [40] e do teorema 1.6 para operadores maximais de Pucci [15]. Deste lema, obtemos estimativas de Schauder $C^{1,\alpha}$ e $W^{2,p}$ para equações totalmente não-lineares gerais. Por exemplo, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.7. *Seja* u *solução no sentido da viscosidade de*

$$F(D^2 u, Du, x) = f(x) \quad \text{em} \quad B_1.$$

(a) Suponha que a equação

$$F(D^2 v, P, 0) = 0$$

possui estimativa $C^{1,\beta}$ *(similar a (1.1.11)). Então existe* $\delta_0 = \delta_0(\beta, \lambda, \Lambda)$ *tal que, se*

$$\overline{lim}_{r \to 0} \left(\overline{lim}_{h \to 0} \left(\fint_{B_r} |S_h|^N dx \right)^{1/N} \right) + \|u\|_\infty \leq \delta_0,$$

então u *é* $C^{1,\alpha}$ *em* $x = 0$ *para* $\alpha < \beta$, *quando*

$$\left(\fint_{B_r} |f|^N dx \right)^{1/N} \leq C r^{-1+\alpha}$$

(b) Suponha que a equação

$$F(D^2v, Dv + P, 0) = 0$$

possui estimativa $C^{1,\beta}$. Então existe $\delta_0 = \delta_0(\beta, \lambda, \Lambda)$ tal que, se

$$\overline{lim}_{r\to 0}\left(\fint_{B_r} |S_\infty|^N dx\right)^{1/N} \leq \delta_0,$$

então u é $C^{1,\alpha}$ em $x = 0$ para $\alpha < \beta$, quando

$$\left(\fint_{B_r} |f|^N dx\right)^{1/N} \leq Cr^{-1+\alpha}.$$

Teorema 1.8. *Seja u solução de*

$$F(D^2u, x) = f(x).$$

Se a equação

$$F(D^2v + C, 0) = D,$$

para C, D na superfície $F(C, 0) = D$, possui estimativa $C^{2,\beta}$ (similar a (1.1.11)*),*

$$\left(\fint_{B_r} |S|^N dx\right)^{1/N} \leq Cr^\alpha$$

e

$$\left(\fint_{B_r} |f(x) - f(0)|^N dx\right)^{1/N} \leq Cr^\alpha,$$

então $u \in C^{2,\alpha}$ em 0 para $\alpha < \beta$.

Observação 1.3. *Com uma combinação dos resultados acima, é possível obter teoria de regularidade para operadores da forma*

$$G(D^2u(x), Du(x), u(x), x) = f(x)$$

Por exemplo, veja em [45].

Capítulo 2

Existência e regularidade

Neste capítulo estudaremos existência e regularidade de solução para a equação

$$F(D^2u, Du, x) = \beta_\varepsilon(u)$$

onde $F : \mathcal{S}(N) \times \mathbb{R}^N \times \Omega \to \mathbb{R}$ é um operador totalmente não-linear, $\mathcal{S}(N)$ é o espaço das matrizes simétricas $N \times N$, e F satisfaz as seguintes condições estruturais:

(C1) (Elipticidade uniforme) Existem constantes $0 < \lambda \leq \Lambda$ tais que

$$F(M+P, p, x) \leq F(M, p, x) + \Lambda\|P^+\| - \lambda\|P^-\|, \ \forall M, P \in \mathcal{S}(N), \ \forall (p, x) \in \mathbb{R}^N \times \Omega.$$

(C2) (Hölder continuidade) Existem constantes $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ e módulo de Hölder continuidade $\omega(r) = \mu_0 r^\beta$ tais que

$$\begin{aligned} |F(M, p, x) - F(M, q, y)| \ &\leq \ \min\big(\omega(|x-y|) + \mu_1(|x-y|||M|| + |q-p|), \\ &\quad \mu_1 + \mu_2(|p| + |q|) + \omega(|x-y|)||M||\big) \end{aligned}$$

(C3) (Normalização) Para todo $(p, x) \in \mathbb{R}^N \times \Omega$, vale

$$F(0, p, x) = 0.$$

Vamos considerar também o problema de Dirichlet associado

$$(E_\varepsilon) \left\{ \begin{array}{rcll} F(D^2u, Du, x) & = & \beta_\varepsilon(u) & \text{em } \Omega \\ u & = & \varphi & \text{em } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

no qual a condição de fronteira φ é não-negativa num domínio Lipschitz $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Neste caso, diremos que o problema é de uma fase. Caso φ mude de sinal, diremos que o problema é de duas fases. O termo de perturbação β_ε é construído da seguinte forma: fixado uma função suave não-negativa β satisfazendo

$(\beta 1)$ $\beta > 0$ em $(0, 1)$ e o suporte de β está contido em $[0, 1]$.

$(\beta 2)$ β é crescente em $[0, 1/2)$ e decrescente em $(1/2, 1]$.

O termo de perturbação é definido da seguinte forma:

$$\beta_\varepsilon(u) := \frac{1}{\varepsilon}\beta\left(\frac{u}{\varepsilon}\right).$$

Note que, se chamarmos

$$\mathrm{T} := \int_0^1 \beta(s)ds,$$

então β_ε aproxima-se de T vezes a massa Dirac δ_0. O objetivo principal deste trabalho é analisar o comportamento das soluções quando fazemos $\varepsilon \to 0^+$.

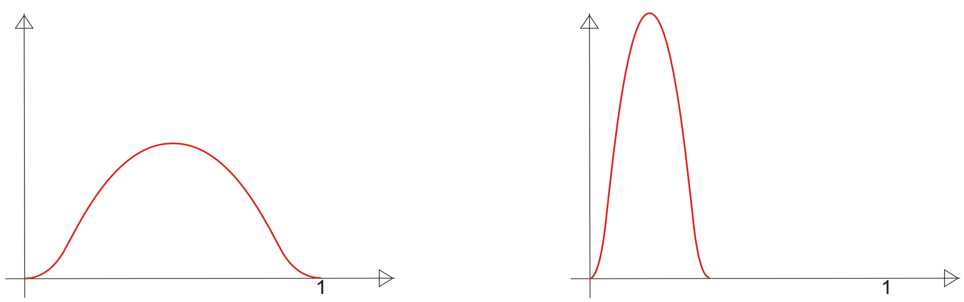


Figura 2.1: Gráfico das funções β_ε

2.1 Existência de soluções minimais

Um desafio típico no estudo de problemas de fronteira livre para operadores não-lineares consiste em escolher uma solução para o problema (E_ε) que seja ampla o bastante para permitir certas propriedades geométricas para o problema. Nosso primeiro objetivo é mostrar que a equação (E_ε) possui pelo menos uma solução no sentido da viscosidade. De fato, nós não só provamos a existência de solução, mas também proporcionamos uma técnica para selecionar soluções especiais (as quais chamaremos de soluções minimais) da equação (E_ε). Essas soluções selecionadas nos proporcionarão, nos capítulos seguintes, importantes propriedades geométricas, por exemplo, propriedade de crescimento linear, para esta família de soluções.

Observe que, devido à falta de monotonicidade da equação (E_ε) com relação à variável u, o método de Perron clássico não pode ser diretamente empregado. Nosso primeiro resultado de cunho não-variacional que provamos foi uma adaptação do método de Perron para soluções no sentido da viscosidade. Vamos mostrá-lo de uma forma um pouco mais geral para futuras referências.

Teorema 2.1. *Seja g uma função limitada, Lipschitz definida na reta real $\mathbb{R}$. Suponha F satisfazendo as condições estruturais (C1), (C2) e que a equação*

$$F(D^2u, Du, x) = g(u)$$

admita uma subsolução Lipschitz no sentido da viscosidade $u_\star$ e uma supersolução Lipschitz no sentido da viscosidade $u^\star$ tais que $u_\star = u^\star = \varphi \in C(\partial\Omega)$. Defina o conjunto de funções,

$$\mathcal{S} := \left\{ w \in C(\overline{\Omega});\ \ u_\star \leq w \leq u^\star \text{ e } w \text{ supersolução de } F(D^2u, Du, x) = g(u) \right\}.$$

Então,

$$v(x) := \inf_{w \in \mathcal{S}} w(x)$$

é uma solução contínua no sentido da viscosidade de

$$\begin{cases} F(D^2u, Du, x) &= g(u) \quad \text{em } \Omega \\ u &= \varphi \quad\ \ \ \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Demonstração. Seja $\mu > 0$ tal que $|Dg| < \mu/2$ e $h(z) = \mu z - g(z)$. Para $f \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$, defina o seguinte operador uniformemente elíptico,

$$G_f[u] = G_f(D^2u, Du, u, x) = F(D^2u, Du, x) - \mu u + f(x).$$

Então o operador G_f satisfaz as condições $(F1), (F2), (F3), (1.1.9)$ e $(F5)$ do capítulo 1, com constantes dependendo de f. Portanto, satisfaz o princípio de comparação. O método de Perron clássico fornece uma solução contínua no sentido da viscosidade para o problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} G_f(D^2u, Du, u, x) &= 0 \text{ em } \Omega \\ u &= \varphi \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Além disso, essa solução é única e, pela teoria clássica de regularidade elíptica, existe uma constante universal $\gamma = \gamma(\beta, N, \lambda, \Lambda) \in (0,1)$ tal que

$$u \in C^{1,\gamma}(\Omega) \ \ \text{e } ||u||_{C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C$$

onde $C = C(\Omega, N, \Gamma/\gamma, \beta, \mu_0/\lambda, \mu_2/\lambda, ||\varphi||_{C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})}, ||u||_{L^\infty(\Omega)}, ||f||_{C^{0,1}(\overline{\Omega})})$.

Vamos agora reproduzir um argumento iterativo como segue: sejam $u_0 := u_\star$ e u_{k+1} única solução para o problema

$$\begin{cases} G_{f_k}(D^2u, Du, u, x) &= 0 \text{ em } \Omega \\ u &= \varphi \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

onde $f_k(x) = h(u_k(x))$. O princípio de comparação produz a seguinte cadeia de desigualdades:

$$u_\star = u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_k \leq u_{k+1} \leq \cdots \leq u^\star \tag{2.1.3}$$

De fato, observe inicialmente que

$$G_{f_0}[u] = F(D^2u, Du, x) - \mu u + h(u_0) = F(D^2u, Du, x) - h(u) + h(u_0) - g(u) \tag{2.1.4}$$

$$G_{f_k}[u] = F(D^2u, Du, x) - \mu u + h(u_k) = G_{f_{k-1}}[u] + h(u_k) - h(u_{k-1}), \quad k \geq 1 \tag{2.1.5}$$

$$G^\star[u] := F(D^2u, Du, x) - \mu u + h(u^\star) = F(D^2u, Du, x) - h(u) + h(u^\star) - g(u) \tag{2.1.6}$$

$$G^\star[u] := F(D^2u, Du, x) - \mu u + h(u^\star) = G_{f_k}[u] + h(u^\star) - h(u_k), \quad k \geq 0 \tag{2.1.7}$$

Portanto, de (2.1.4), $G_{f_0}[u_1] = 0 \leq G_{f_0}[u_0]$ no sentido da viscosidade. Pelo princípio de comparação, temos que $u_0 \leq u_1$ em Ω. Suponha indutivamente que $u_{k-1} \leq u_k$ em Ω. Como h é crescente, por (2.1.5), $G_{f_k}[u_{k+1}] = 0 \leq G_{f_k}[u_k]$ no sentido da viscosidade. Portanto, aplicando novamente o princípio de comparação, obtemos $u_k \leq u_{k+1}$ em Ω. Por (2.1.6) e (2.1.7) com $k = 0$, $G^\star[u_1] \geq 0 \geq G^\star[u^\star]$ no sentido da viscosidade, também $u_1 \leq u^\star$ em Ω. Suponha verificado que $u_k \leq u^\star$ em Ω por (2.1.7), $G^\star[u_{k+1}] \geq 0 \geq G^\star[u^\star]$ no sentido da viscosidade. Portanto, pelo princípio de comparação $u_{k+1} \leq u^\star$ em Ω.

De (2.1.3), podemos definir o limite pontual

$$v(x) := \lim_{k\to\infty} u_k(x).$$

Segue de (2.1.5) que existe uma constante $C = C(\mu, ||u_\star||_{L^\infty(\Omega)}, ||u^\star||_{L^\infty(\Omega)})$ tal que $|F(D^2u_k, Du_k, x)| \leq C$, no sentido da viscosidade, para todo $k \geq 1$. Pela teoria de regularidade elíptica, esta sequência é localmente uniformemente Hölder contínua. Pelo teorema de Ascoli-Arzela, a menos de subsequência, ela converge localmente uniforme em Ω. Passando para uma subsequência se necessário, podemos assumir que G_{f_k} converge localmente uniforme para $G[u] = F(D^2u, Du, x) - \mu u + h(u)$. Conclusão, v é solução no sentido da viscosidade de

$$F(D^2u, Du, x) = g(u)$$

Para finalizar, vamos verificar que v é a menor supersolução entre $u_\star$ and $u^\star$. Para isto, seja $w \in \mathcal{S}$. Temos,

$$\begin{aligned} G_{f_k}[u] &= F(D^2u, Du, x) - \mu u - h(u_k) \\ &= F(D^2u, Du, x) - h(w) + h(u_k) - g(w), \quad k \geq 0 \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Tomando $k = 0$ em (2.1.8), obtemos $G_{f_0}[u_1] = 0 \geq G_{f_0}[w]$ no sentido da viscosidade. Aplicando o princípio de comparação obtemos $w \geq u_1$ em Ω. Verificado que $w \geq u_k$, temos por (2.1.8), $G_{f_k}[u_{k+1}] = 0 \geq G_{f_k}[w]$ no sentido da viscosidade, o qual implica $w \geq u_{k+1}$ em Ω. Passando o limite quando $k \to \infty$, concluímos que

$$v(x) = \inf_{w \in \mathcal{S}} w(x),$$

e a prova do Teorema 2.1 está concluída. $\square$

Vamos agora retornar ao problema de existência de soluções (minimais) para o problema de Dirichlet (E_ε). Escolha $u_\star = u_\star(\varepsilon)$ e $u^\star = u^\star(\varepsilon)$ soluções para os seguintes problemas de Dirichlet

$$\begin{cases} F(D^2u_\star, Du_\star, x) &= \wp \text{ em } \Omega \\ u_\star &= \varphi \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} F(D^2u^\star, Du^\star, x) &= 0 \text{ em } \Omega \\ u^\star &= \varphi \text{ em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\wp := \sup \beta_\epsilon$. A existência de tais soluções é consequência padrão do método de Perron (veja, por exemplo [25]). Por construção, $u_\star$ é subsolução no sentido da viscosidade de (E_ε) e $u^\star$ é uma supersolução no sentido da viscosidade de (E_ε). Além disso, $u^\star, u_\star \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$. Portanto, uma aplicação direta do teorema 2.1 assegura o seguinte Teorema de existência:

Teorema 2.2 (Existência de Soluções Mínimas)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *domínio Lipschitz e* $\varphi \in C(\partial\Omega)$ *condição de fronteira não-negativa. Então, para cada* $\varepsilon > 0$*, o problema*

$$\begin{cases} F(D^2u_\epsilon, Du_\varepsilon, x) &= \beta_\epsilon(u_\epsilon) \text{ em } \Omega \\ u_\epsilon &= \varphi \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

possui pelo menos uma solução mínima (no sentido da viscosidade) $u_\epsilon \in C(\bar{\Omega})$ *tal que*

$$u_\star \leq u_\varepsilon \leq u^\star.$$

Como mencionado anteriormente, mais importante do que garantir a existência de uma solução para (E_ε), o Teorema 2.2 fornece uma escolha particular dessas soluções. Em comparação com problemas variacionais de perturbações singular, esta escolha é um substituto para a escolha de minimizantes do funcional de Euler-Lagrange (ver, por e-xemplo, [37] para mais detalhes). Portanto, salvo indicação em contrário, sempre que falarmos solução no sentido da viscosidade para (E_ε), queremos dizer soluções minimais fornecida pelo Teorema 2.2. A abordagem pelo método da menor supersolução é usado para construir soluções para (E_ε), cujos conjuntos de nível satisfazem algumas propriedades geométricas que são preservadas por passagem ao limite.

2.2 Regularidade Lipschitz

Nosso objetivo nesta seção é provar que, se u_ε são soluções do problema (E_ε), então Du_ε são uniformemente limitados em ε. Veremos que essa é a regularidade ótima que podemos esperar (uniforme no parâmetro ε). Nossa estratégia é inspirada por um argumento devido a Caffarelli. Inicialmente, vamos mostrar que a família de soluções minimais são uniformemente limitadas.

Lema 2.1. *Seja u_ε qualquer solução (no sentido da viscosidade) da Equação (E_ε). Então $0 \le u_\varepsilon \le \|\varphi\|_\infty$ em Ω.*

Demonstração. Observe inicialmente que $\beta_\varepsilon \ge 0$. Defina $\tilde{u}_\varepsilon := u_\varepsilon - \|\varphi\|_\infty$. Note que $\tilde{u}_\varepsilon \le 0$ em $\partial\Omega$ e

$$F(D^2\tilde{u}_\varepsilon, D\tilde{u}_\varepsilon, x) = F(D^2u_\varepsilon, Du_\varepsilon, x) \ge 0.$$

A estimativa por cima segue imediatamente aplicando a estimativa ABP (Alexandroff-Bakelman-Pucci) adaptada para soluções de viscosidade (veja, [3] ou [7]). Vamos provar agora a não-negatividade de u_ε. Suponha, por contradição, que a região

$$A_\varepsilon := \{x \in \Omega : u_\varepsilon(x) < 0\}$$

é não vazia. Como β_ε possui suporte em $[0, \varepsilon]$,

$$F(D^2u_\varepsilon, Du_\varepsilon, x) = 0 \text{ em } A_\varepsilon,$$

no sentido da viscosidade. Contudo, como $u_\varepsilon \ge 0$ em $\partial\Omega$, temos $u_\varepsilon \ge 0$ em ∂A_ε, portanto, aplicando novamente a estimativa Alexandroff-Bakelman-Pucci adaptada para soluções de viscosidade, concluímos $u_\varepsilon \ge 0$ em A_ε, levando a uma contradição. □

Vamos agora mostrar que as soluções do problema (E_ε) são localmente uniformemente Lipschitz, isto é, as soluções u_ε são localmente Lipschitz e a constante Lipschitz independe de ε. Uma observação importante é que a mesma técnica mostra que, no caso de problemas de duas fases (veja [12]-[13]) podemos deduzir limitação do gradiente para a parte não-negativa da solução, se já sabemos que a parte não-positiva da solução é Lipschitz.

Observação 2.1. *Em [14], L. Caffarelli aplica as fórmulas de monotonicidade para deduzir limitação do gradiente para a solução do problema de perturbação singular de duas fases para o Laplaciano; veja também [8]. Na ausência da fórmula de monotonicidade, não somos capazes de provar um resultado semelhante ao que está em [14]. É evidente que uma nova técnica deverá ser desenvolvida para lidar com a mudança de sinal da solução u_ε no caso de problemas de perturbação singular para operadores totalmente não-lineares. Este problema continua em aberto e é muito tentador para o desenvolvimento da teoria.*

Lema 2.2 (Renormalização Lipschitz)**.** *Seja $u \in C(B_r(x_0))$ solução de viscosidade de*

$$F(D^2u, Du, x) = \beta_\varepsilon(u). \tag{2.2.1}$$

Defina $w : B_{r/\varepsilon}(0) \to \mathbb{R}$, como

$$w(y) := \frac{1}{\varepsilon}u(x_0 + \varepsilon y).$$

Então, $w \in C(B_{r/\varepsilon}(0))$ é solução de viscosidade de

$$F_\varepsilon(D^2w, Dw, x) = \beta(w),$$

onde os operadores $F_\varepsilon(M, p, x) := \varepsilon F\left(\frac{1}{\varepsilon}M, p, x\right)$ são uniformemente elípticos com as mesmas constantes de elipticidade de F. Além disso, se u é diferenciável em 0, então $\nabla w(0) = \nabla u(x_0)$.

Demonstração. De fato, seja $P(y)$ um paraboloide tocando w, em algum ponto z_0, por baixo. Defina

$$\tilde{P}(x) := \varepsilon P\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right).$$

Então, $\tilde{P}$ toca u por baixo em $x_1 := x_0 + \varepsilon z_0$. Como u é uma solução de viscosidade de (2.2.1), temos que

$$F\left(D^2\tilde{P}(x_1), D\tilde{P}(x_1), x_1\right) \leq \beta_\varepsilon(u_\varepsilon(x_1)). \tag{2.2.2}$$

Além disso, cálculos diretos nos mostram que

$$\begin{array}{rcl} \partial_i\tilde{P}(x_1) & = & \partial_i P(z_0) \\ \partial_{ij}\tilde{P}(x_1) & = & \dfrac{1}{\varepsilon}\partial_{ij}P(z_0) \\ \zeta_\varepsilon(u_\varepsilon(x_1)) & = & \frac{1}{\varepsilon}\zeta(v(z_0)). \end{array} \tag{2.2.3}$$

Combinando (2.2.2) e (2.2.3), ficamos com

$$\varepsilon F\left(\frac{1}{\varepsilon}D^2P(z_0), DP(z_0), x_0+\varepsilon z_0\right) \leq \beta(v(z_0)).$$

Tomando agora um paraboloide tocando w por cima e argumentando de forma similar, concluímos que w é uma solução de viscosidade de

$$\varepsilon F\left(\frac{1}{\varepsilon}D^2w, Dw, x_0+\varepsilon x\right) = \beta(w) \text{ em } B_{r/\varepsilon}. \tag{2.2.4}$$

Se definirmos, como acima,

$$F_\varepsilon\left(M,p,x\right) := \varepsilon F\left(\frac{1}{\varepsilon}M, p, x\right),$$

temos que F_ε é uniformemente elíptico com mesma constante de elipticidade de F. De fato,

$$\begin{aligned}
F_\varepsilon(M+P,p,x) &= \varepsilon F\left(\frac{1}{\varepsilon}M+\frac{1}{\varepsilon}P, p, x\right)\\
&\leq \varepsilon\left[F\left(\frac{1}{\varepsilon}M,p,x\right)+\Lambda\left\|\left(\frac{P}{\varepsilon}\right)^+\right\|-\lambda\left\|\left(\frac{P}{\varepsilon}\right)^-\right\|\right]\\
&= F_\varepsilon(M,p,x)+\Lambda\|P^+\|-\lambda\|P^-\|.
\end{aligned}$$

$\square$

É interessante observar que a renormalização acima não altera as constantes de elipticidade de F. Isto significa que esta renormalização não afeta as constantes que aparecem nas estimativas, bem como nas desigualdades de Harnack. A família de operadores F_ε pode ser considerada como um só operador F.

Lema 2.3. *Seja $w \in C^{1,\alpha}(B_1(0))$ solução de viscosidade de*

$$F(D^2w, Dw, x) = g(x), \quad \|g\|_{L^\infty(B_1(0))} \leq D.$$

Se $w(0) \leq 1$, então existe uma constante universal $C_0 > 0$ tal que:

$$|\nabla w(0)| \leq C_0.$$

Demonstração. De fato, da estimativa $C^{1,\alpha}$ de Caffarelli para soluções de viscosidade (veja Capítulo 1 ou [3]), existe constante C, dependendo somente de λ, Λ e da dimensão N, tal que

$$|\nabla w(0)| \leq C\left\{\|w\|_{L^\infty(B_{1/2})}+\|g\|_{L^n(B_{1/2})}\right\}. \tag{2.2.5}$$

Usando a desigualdade de Harnack (veja, por exemplo, [7] ou capítulo 1) existe uma constante universal $\bar{C}$ tal que

$$\|v\|_{L^\infty(B_{1/2})} \le \bar{C}. \tag{2.2.6}$$

Combinando (2.2.5) e (2.2.6), temos finalmente a seguinte estimativa:

$$|\nabla w(0)| \le C_0.$$

□

Agora, podemos afirmar e provar um lema interessante por si só, que pode ser aplicado em muitas situações

Lema 2.4. *Seja* $0 \in \partial\Omega$*, e* $v \in C^{1,\alpha}(\Omega \cap B_1(0))$ *solução de viscosidade não-negativa de*

$$F(D^2 v, Dv, x) = 0 \quad \textit{em} \quad \Omega \cap B_1(0).$$

Suponha também que em $\Upsilon = \partial\Omega \cap B_1(0)$*,* $v = 0$ *e* $|\nabla v|$ *é limitada. Então, existe uma constante universal* $C > 0$ *tal que:*

(1) $\|v\|_{L^\infty(B_{1/2}(0)\cap\Omega)} \le C\textit{dist}(x, \partial\Omega) \sup\limits_{\Upsilon} |\nabla v|$*;*

(2) $\|\nabla v\|_{L^\infty(B_{1/2}(0)\cap\Omega)} \le C \sup\limits_{\Upsilon} |\nabla v|$.

Demonstração. Vamos começar provando (1). Considere $x_0 \in B_{1/2}(0) \cap \Omega$. Considere os números $h := \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$, $A := \sup\limits_{\Upsilon} |\nabla v|$, $v(x_0) = \tau h$. Vamos mostrar que $\tau \le C\,A$, para alguma constante universal $C > 0$. Considere a renormalizando de v com relação à distância h, isto é,

$$w(y) := \frac{1}{h} u_\varepsilon(x_0 + hy).$$

Então, $w(0) = \tau$ e do Lema 2.2, w é solução de viscosidade de

$$F_h(D^2 w, Dw, x) = 0 \quad \text{em} \quad B_1(0).$$

Como $h = \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$, existe $y_1 \in \partial B_1(0)$, tal que $w(y_1) = 0$. Além disso, como

$$\nabla w(y) = \nabla v(x_0 + hy), y \in B_1(0),$$

temos que $|\nabla w(y_1)| \le A$. Agora, pela desigualdade de Harnack em $B_{1/2}(0)$, existe uma constante universal $c > 0$ tal que:

$$w(y) \ge c\tau \quad \text{em} \quad B_{1/2}(0).$$

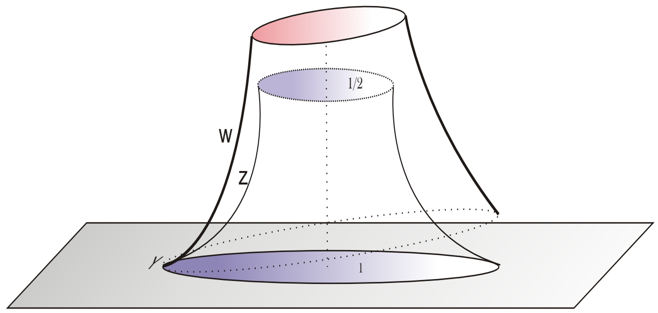


Figura 2.2: Barreira

A ideia agora é construir uma barreira tocando w por baixo em y_1. Seja z solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} F_h(D^2z, Dz, y) &= 0 \text{ em } R = B_1 \setminus \overline{B_{1/2}} \\ z\Big|_{\partial B_1} = 0, & z\Big|_{\partial B_{1/2}} = 1. \end{cases} \tag{2.2.7}$$

Tal solução pode ser obtida usando o método de Perron de Ishii discutido no Capítulo 1. Temos que, $z \geq 0$, $z \in C^{1,\alpha}(\bar{R})$. Definindo agora

$$Z_h(y) = c\tau z(y), \quad y \in \bar{R},$$

então

$$Z_h = 0 \leq w \quad \text{em} \quad \partial B_1(0) \quad \text{em} \quad Z_h \leq c\tau \leq w \quad \text{em} \quad \partial B_{1/2}(0).$$

Isto diz que,

$$F_h(D^2w, Dw, y) = F_h(D^2Z_h, DZ_h, y) \quad \text{em} \quad R, \quad \text{e} \quad w \geq Z_h \quad \text{em} \quad \partial R,$$

pelo princípio do máximo para soluções de viscosidade,

$$w \geq Z_h \quad \text{em} \quad R \quad \text{e} \quad w(y_1) = Z_h(y_1).$$

Em particular,

$$\partial_\nu w(y_1) \geq \partial_\nu Z_h(y_1),$$

onde ν é a normal unitária interior a $B_1(0)$ em y_1. Aplicando o Lema de Hopf, se tomarmos $\delta_h := \inf_{\partial B_1(0)} \partial_\nu z$,

$$\partial_\nu Z_h \geq c\tau\delta_h > 0.$$

A função z é $C^{1,\alpha}$ até a fronteira, donde concluímos que

$$\inf_{0\leq h\leq 1/2} \delta_h \geq \delta > 0,$$

onde δ independe de h. Então

$$A \geq |\nabla w(y_1)| \geq \partial_\nu w(y_1) \geq c\tau\delta,$$

provando a primeira parte do Lema. A segunda parte segue da estimativa $C^{1,\alpha}$ e aplicando a desigualdade de Harnack,

$$|\nabla w(0)| \leq \bar{C}\frac{1}{\text{dist}(x_0, \partial\Omega)}\|u\|_{L^\infty(B_{1/2}(0))} \leq \frac{\bar{C}C}{\text{dist}(x_0, \partial\Omega)} w(0) \leq \bar{C}CA.$$

□

Vamos agora provar a regularidade Lipschitz das soluções de (E_ε). Antes, é conveniente introduzirmos algumas notações que serão úteis para simplificar as demonstrações dos teoremas no decorrer do trabalho

$$\begin{array}{rcl} \Omega_\alpha & := & \left\{x \in \Omega \,\middle|\, 0 \leq u_\epsilon(x) \leq \alpha\right\}. \\ \Omega_\alpha^+ & := & \left\{x \in \Omega \,\middle|\, u_\epsilon(x) > \alpha\right\}. \\ d_\alpha(x) & := & \text{dist}(x, \Omega_\alpha). \end{array}$$

Daqui por diante, vamos considerar $\Omega' \Subset \Omega$, $\Delta = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

Teorema 2.3 (Regularidade Lipschitz). *Dado um subconjunto $\Omega' \Subset \Omega$, existe uma constante C dependendo de $\|\varphi\|_\infty$, $\|\beta\|_\infty$, Ω', dimensão, elipticidade e da norma C^μ de $F(M, p, \cdot)$, mas independente de ε, tal que, qualquer família de soluções de viscosidade, $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, da Equação (E_ε) é C-Lipschitz contínua em Ω', isto é*

$$\sup_{x\in\Omega'} |\nabla u_\varepsilon(x)| \leq C.$$

Em particular, a família $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ é localmente uniformemente Lipschitz.

Demonstração. Seja $x_0 \in \Omega'$ e considere $\varepsilon < \Delta = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. A prova se baseia na obtenção de estimativas pontuais do gradiente dependendo de onde x_0 está localizado.

(A) **Caso 1:** $x_0 \in \Omega_\varepsilon$.
Como $B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$ podemos considerar a renormalização Lipschitz $w = w_\varepsilon$ de u_ε nesta bola,

$$w(y) = \frac{1}{\varepsilon}u_\varepsilon(x_0 + \varepsilon y), \quad y \in B_1(0).$$

Pelo Lema 2.2, $\nabla w(0) = \nabla u_\varepsilon(x_0)$, e w é uma solução de viscosidade de

$$F_\varepsilon(D^2 w, Dw, x) = \beta(w) \quad \text{em} \quad B_1(0).$$

Segue agora do Lema 2.3 que

$$|\nabla w(0)| \leq C_0$$

onde C_0 é universal.

(B) **Caso 2:** $x_0 \in \Omega_\varepsilon^+$ e $d_\varepsilon(x_0) < \frac{\Delta}{3}$.
Da hipótese, temos que $3d_\varepsilon(x_0) < \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Seja $y_0 \in \partial\Omega_\varepsilon$ satisfazendo as seguintes condições: $d_\varepsilon(x_0) = |x_0 - y_0|$ e $d = \text{dist}(y_0, \partial\Omega)$. Agora, vamos definir a renormalização Lipschitz de u_ε em $\Omega_\varepsilon^+ \cap B_d(x_0)$, isto é,

$$w(y) = \frac{u_\varepsilon(y_0 + dy) - \varepsilon}{d}, \quad y \in B_1(0) \cap D_\varepsilon,$$

onde $D_\varepsilon = T^{-1}(\Omega_\varepsilon^+)$, $T(y) = y_0 + dy$.

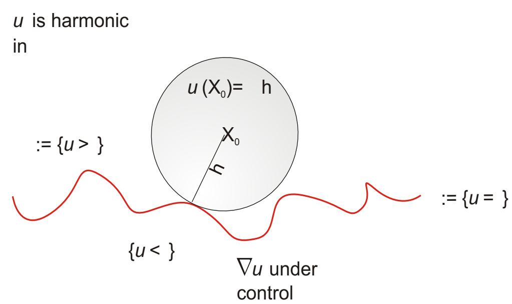


Figura 2.3: Limitação do Gradiente

Como $w = 0$ e $|\nabla w|$ é limitada ao longo de $B_1(0) \cap \partial D_\varepsilon$, usando o Caso 1, e o fato de que

$$F_d(D^2 w, Dw, x) = 0 \quad \text{em} \quad B_1(0) \cap D_\varepsilon$$

concluímos, usando o Lema 2.4, que

$$\|\nabla w\|_{L^\infty(B_{1/2}(0) \cap D_\varepsilon)} \leq C.$$

A estimativa acima, traduzida em termos de u_ε, é equivalente a:

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(B_{d/2}(y_0)\cap\Omega_\varepsilon^+)} \leq C.$$

Para concluir este caso, é suficiente mostrar que, $x_0 \in B_{d/2}(y_0)$. De fato,

$$2|x_0 - y_0| = 2d_\varepsilon(x_0) < \text{dist}(x_0, \partial\Omega) - d_\varepsilon(x_0) \leq \text{dist}(y_0, \partial\Omega) = d.$$

(C) **Caso 3:** $x_0 \in \Omega_\varepsilon^+$ e $d_\varepsilon(x_0) \geq \frac{\Delta}{3}$.
Temos

$$F(D^2u, Du, x) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega_\varepsilon^+$$

e

$$\Omega'' = \Omega' \cap \{x \in \Omega : d_\varepsilon(x) \geq \frac{\Delta}{3}\} \Subset \Omega_\varepsilon^+, \quad \text{com} \quad \text{dist}(\Omega'', \partial\Omega_\varepsilon^+) \geq \frac{\Delta}{3}.$$

Então usando estimativa $C^{1,\alpha}$, existe constante universal $C > 0$ tal que:

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega'')} \leq C$$

onde $C = C(\Delta/3)$, concluindo assim a prova do Teorema.

$\square$

Observação 2.2. *Vale a pena destacar que a prova da regularidade Lipschitz é válida para qualquer solução do problema* (E_ε) *(não necessariamente soluções minimais).*

Observação 2.3. *Como* $|\nabla u_\varepsilon|$ *é localmente limitada por uma constante que independe de* ε*, temos que o conjunto* $\{u_\varepsilon\}$ *é equicontínuo e totalmente limitado. Portanto, pelo teorema de Ascoli-Arzelá, existe uma função* $u_0 \in \text{Lip}_{\text{loc}}(\Omega)$*, tal que, a menos de subsequencia,* $u_\varepsilon \to u_0$ *uniformemente em subconjuntos compactos de* Ω*, quando* $\varepsilon \to 0$*. Nosso objetivo é mostrar que* u_0 *é a solução do nosso problema de fronteira livre citado na introdução do trabalho.*

Capítulo 3

Crescimento linear e não-degenerescência

Neste capítulo, iremos destacar algumas propriedade geométricas importantes dos conjuntos de nível $\{u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon\}$, das soluções minimais do problema

$$(E_\varepsilon)\begin{cases} F(D^2u_\epsilon, Du_\varepsilon, x) &= \beta_\epsilon(u_\epsilon) \text{ em } \Omega \\ u_\epsilon &= \varphi \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

A primeira informação geométrica importante que queremos é a não-degenerescência uniforme, a qual permite uma compreensão mais profunda da regularidade da fronteira livre.

O método da menor supersolução possui uma propriedade bastante interessante, ele nos permite provar que soluções minimais u_ε de (E_ε) possuem uma taxa de crescimento linear e uniforme ao longo das ε-superfícies de nível. Versões variacionais dessa propriedade estão em conexão com vários trabalhos recentes, por exemplo, em um recente artigo (veja [37]), E. Teixeira e D. Moreira provaram que solução para equações da forma divergente (abordagem variacional) $\mathcal{L}[u] = \operatorname{div}(A(x)Du)$ possuem a propriedade de crescimento linear. Neste capítulo generalizamos este resultado para operadores totalmente não-lineares e, portanto, uma abordagem não-variacional.

3.1 Crescimento linear

Nesta seção, discutiremos alguns aspectos geométricos das soluções minimais para o problema (E_ε). Provaremos que soluções minimais deste problema possuem crescimento linear ao longo das superfícies de nível ε. Devido à limitação do gradiente, provada no capítulo anterior, o crescimento linear é a taxa ideal de crescimento uniforme no parâmetro ε.

Em geral, essas propriedades não são válidas para qualquer tipo de solução da equação (E_ε). De fato, para equações variacionais, essas propriedades são válidas para minimizantes do funcional de Euler-Lagrange (veja [21]). A abordagem utilizada nesta seção é puramente não-variacional e pode ser usadas para lidar com classes mais gerais de problemas de EDPs elípticas singulares da forma variacional ou não variacional.

Para simplificar a afirmação dos resultados, usaremos as notações do capítulo anterior. Dado um número positivo α, denote

$$\begin{array}{rcl} B^\star_\alpha & := & B_{\delta_\varepsilon}(x_\varepsilon), \quad \text{onde} \quad u_\varepsilon(x_\varepsilon)=\alpha \quad \text{e} \quad \delta_\varepsilon = \frac{1}{2}\text{dist}(x_\varepsilon,\partial\Omega) \\ \Omega_\alpha & := & \left\{x\in\Omega \;\middle|\; 0\le u_\epsilon(x)\le\alpha\right\}. \\ \Omega^+_\alpha & := & \left\{x\in\Omega \;\middle|\; u_\epsilon(x)>\alpha\right\}. \\ d_\alpha(x) & := & \text{dist}(x,\Omega_\alpha). \end{array}$$

Nossa estratégia para provar o crescimento linear é baseada no princípio de comparação. De fato, a ideia da prova é construir uma supersolução no sentido da viscosidade para a equação (E_ε), cujos valores num disco rígido interno são menores que seus valores na fronteira. Depois, vamos provar que, se compararmos essa função com a nossa solução (mínima), obtemos um crescimento linear limitando por baixo u_ε em termos da distância do ponto a ε-superfície de nível $\partial\Omega^+_\varepsilon\cap\Omega$.

Proposição 3.1. *Suponha que $0\in\Omega$. Dado $0<\eta<\text{dist}(0,\partial\Omega)$, existem uma função simétrica radial $\Theta_\epsilon\in C^{1,1}(\Omega)$ e constantes universais $0<\kappa_2$ e $0<\kappa_1<1$ tais que*

i) $\Theta_\varepsilon\equiv\frac{\varepsilon}{4}$ *em* $B_{\kappa_1\eta}$

ii) $\Theta_\varepsilon\ge\kappa_2\eta$ *em* $\Omega\setminus B_\eta$

iii) Para $\varepsilon\ll 1$, Θ_ε é uma supersolução no sentido da viscosidade para

$$F(D^2u,Du,x)=\beta_\varepsilon(u) \quad \textit{em} \quad \Omega.$$

Demonstração. Vamos inicialmente estudar o caso $\varepsilon=1$. A supersolução simétrica radial (no sentido da viscosidade) Θ_ε será construída, baseado num argumento de reescalonamento, a partir de Θ_1. Observe inicialmente que existe constante $\tau_0>0$ tal que

$$\zeta(t)\ge\tau_0 \text{ para } t\in[1/4,3/4], \tag{3.1.1}$$

portanto, daqui em diante, vamos denotar a seguinte constante universal

$$A_0 := \frac{\tau_0}{4N\Lambda}. \tag{3.1.2}$$

Começaremos nossa construção escolhendo um número $L \geq \frac{8}{\sqrt{2A_0}}$. Considere a constante universal

$$\alpha := \max\left\{1, (N-1)\frac{\Lambda}{\lambda} - 1\right\} \tag{3.1.3}$$

e defina

$$\bar{\Theta}(r) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{para} \quad 0 \leq r \leq L \\ G(r) = A_0(r-L)^2 + \frac{1}{4}, & \text{para} \quad L \leq r \leq L + \frac{1}{\sqrt{2A_0}} \\ \phi(r) := M_1 - M_2 r^{-\alpha}, & \text{para} \quad r \geq L + \frac{1}{\sqrt{2A_0}}. \end{cases} \tag{3.1.4}$$

As constantes positivas M_1 e M_2 são escolhidas de tal modo que

$$\phi\left(L + \frac{1}{\sqrt{2A_0}}\right) = \frac{3}{4} \quad \text{e} \quad \phi_r\left(L + \frac{1}{\sqrt{2A_0}}\right) = \sqrt{2A_0}.$$

De fato, podemos escolher

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2A_0}}{\alpha}\left(L + \frac{1}{\sqrt{2A_0}}\right) - \frac{\sqrt{2A_0}}{\alpha}\left(L + \frac{1}{\sqrt{2A_0}}\right)^{\alpha+1} r^{-\alpha} \\ &:= K_L - f(r). \end{aligned}$$

Observe que para todo $\kappa > 0$ satisfazendo

$$\kappa^{-\alpha} < \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^{\alpha+1},$$

vale

$$\frac{\sqrt{2A_0}}{\alpha}\left(\frac{9}{8}\right)^{\alpha+1} \kappa^{-\alpha} L \leq \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2A_0}}{\alpha}\left(L + \frac{1}{\sqrt{2A_0}}\right)$$

Em termos de K_L e $f(r)$, temos

$$f(\kappa_3 L) \leq \frac{1}{2}K_L, \text{ para } \kappa_3^{-\alpha} = \frac{1}{4}\left(\frac{8}{9}\right)^{\alpha+1} < 1.$$

Em particular, como ϕ é crescente

$$\phi(r) > \frac{1}{2}K_L \geq \kappa_4 L$$

para $r \geq \kappa_3 L$, onde

$$\kappa_4 = \frac{\sqrt{2A_0}}{2\alpha L}.$$

Definimos, então, a seguinte função simétrica

$$\Theta(x) := \bar{\Theta}(|x|).$$

Podemos calcular a hessiana de Θ dentro da faixa $L \leq |x| \leq L + \frac{1}{\sqrt{2A_0}}$ e estimar em termos da ordem da matriz da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 0 \leq D_{ij}\Theta(x) &= 2A_0\left(1 - \frac{L}{|x|}\right)\delta_{ij} + 2A_0 L\frac{x_i x_j}{|x|^3} \\ &\leq 4A_0\delta_{ij}. \end{aligned}$$

Lembre-se que dentro da faixa $L \leq |x| \leq L + \frac{1}{\sqrt{2A_0}}$, temos $\frac{1}{4} \leq \Theta(x) \leq \frac{3}{4}$. Portanto, pela elipticidade e (3.1.1), estimamos

$$F(D^2\Theta, D\Theta, x) \leq 4NA_0 = \tau_0 \leq \beta(\Theta(x)).$$

Isto é, Θ é supersolução na faixa $L \leq |x| \leq L + \frac{1}{\sqrt{2A_0}}$. Vamos, agora, nos concentrar na região $|x| \geq L + \frac{1}{\sqrt{2A_0}}$. Nos pontos da forma $\overline{x} = (|x|, 0, \ldots, 0)$, obtemos

$$\begin{array}{lcll} D_{ij}\Theta(\overline{x}) & = & 0 & \text{se } i \neq j \\ D_{11}\Theta(\overline{x}) & = & -M_2\alpha(1+\alpha)|x|^{-\alpha-2} & \\ D_{ii}\Theta(\overline{x}) & = & M_2\alpha|x|^{-\alpha-2} & \text{para } i > 1. \end{array}$$

Por simetria rotacional e definição de α, temos, para $|x| \geq L + \frac{1}{\sqrt{2A_0}}$, que

$$\begin{aligned} F(D^2\Theta, D\Theta, x) &\leq \mathfrak{M}^+\left(D^2\phi, \frac{\lambda}{N}, \Lambda\right) \\ &= M_2\alpha\left[\Lambda(N-1) - \frac{\lambda}{N}(\alpha+1)\right]|x|^{-\alpha-2} \\ &\leq 0 \\ &\leq \beta(\Theta), \end{aligned}$$

devido à nossa escolha conveniente do expoente α em (3.1.3). Agora, note que, pela renormalização do operador, $F(D^2\Theta, D\Theta, x) = 0 \leq \beta(\Theta)$ para $0 \leq |x| \leq L$. Verificamos, assim, que Θ é uma supersolução da equação totalmente não-linear

$$F(D^2\psi, D\psi, x) = \beta(\psi).$$

Além disso, por construção, $\Theta(x) := \bar{\Theta}(|x|) \in C^{1,1}(\Omega)$. Note que as constantes acima são universais, isto é, nosso argumento fornece uma supersolução Θ para qualquer equação elíptica totalmente não-linear $G(D^2\psi, D\psi, x) = \beta(\psi)$, quando G possui a mesma constante de elipticidade de F.

Para fornecer a supersolução desejada para qualquer ε pequeno, argumentamos da seguinte forma: dado $\eta > 0$, para $\varepsilon < \frac{\eta}{\kappa_3 L}$, achamos, como acima, uma função Θ, a qual satisfaz, para q.t.p. $x \in B_\eta$, a desigualdade diferencial

$$\varepsilon F(\varepsilon^{-1} D^2\Theta(x), D\Theta, x) \leq \beta(\Theta(x)).$$

Vale a pena observar que o operador escalonado $F_\varepsilon(M, p, x) := \varepsilon F(\varepsilon^{-1} M, p, x)$ possui a mesma constante de elipticidade de F. Defina

$$\Theta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon}\Theta\left(\varepsilon x\right).$$

Assim $\Theta_\varepsilon \in C^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ e ela é uma supersolução para a equação $F(D^2\psi, D\Psi, x) = \beta_\varepsilon(\psi)$. As condições desejadas $i)$ e $ii)$ estão satisfeitas tomando $\kappa_1 = \frac{1}{\kappa_3}$ e $\kappa_2 = \frac{\kappa_4}{\kappa_3}$. A prova está completa. $\square$

Finalmente, usando a construção da função simétrica radial e a existência de soluções minimais de (E_ε), obtemos

Teorema 3.1 (Crescimento Linear)**.** *Seja $\{u_\varepsilon\}$ família de soluções minimais de (E_ε). Dado $C_1 > 1$, existe uma constante universal $c_2 > 0$, dependendo de C_1, tal que, se $x_0 \in B_\varepsilon^\star$ e $u_\varepsilon(x_0) \geq C_1\varepsilon$, então*

$$u_\varepsilon(x_0) \geq c_2 d_\varepsilon(x_0).$$

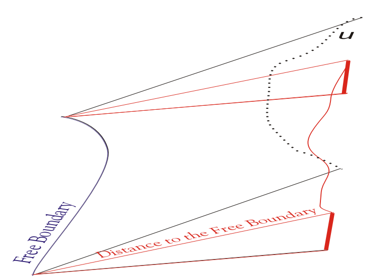


Figura 3.1: Crescimento Linear

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que $x_0 = 0$. Vamos denotar

$$d_\varepsilon(0) = \text{dist}(0, \{u_\varepsilon \le \varepsilon\}) =: 2\gamma.$$

Em $B_{2\gamma}$, u_ε satisfaz $F(D^2 u_\varepsilon, Du_\varepsilon, x) = 0$ portanto, pela desigualdade de Harnack, temos

$$u_\varepsilon \le C u_\varepsilon(0) \quad \text{in} \quad B_\gamma,$$

para alguma constante universal C. Seja Θ_ε a supersolução, no sentido da viscosidade, dada pela Proposição 3.1 em B_γ. Portanto

a) $\Theta_\varepsilon = \frac{1}{4}\varepsilon < u_\varepsilon(0) \quad \text{em} \quad B_{\kappa_1 \gamma}$,

b) $\Theta_\varepsilon \ge \kappa_2 \gamma$ em $\Omega \setminus B_\gamma$,

c) Para ε suficientemente pequeno, Θ_ε é uma supersolução de viscosidade para

$$F(D^2 u, Du, x) = \beta_\varepsilon(u) \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Afirmação 1. *Existe um ponto $z \in \partial B_\gamma$ tal que*

$$\Theta_\varepsilon(z) < u_\varepsilon(z).$$

De fato, suponha que $\Theta_\varepsilon \ge u_\varepsilon$ em ∂B_γ. Defina a seguinte função

$$\bar{w}_\varepsilon = \begin{cases} \min\{u_\varepsilon, \Theta_\varepsilon\}, & \text{em} \quad \overline{B_\gamma} \\ u_\varepsilon, & \text{em} \quad \Omega \setminus \overline{B_\gamma}. \end{cases}$$

Então, por b) e c), $\bar{w}_\varepsilon \in \mathcal{S}$. Além disso por a), temos que

$$\bar{w}_\varepsilon \equiv \Theta_\varepsilon \equiv \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon < u_\varepsilon \quad \text{em} \quad B_{\kappa_1 \gamma},$$

e $B_{\kappa_1 \gamma} \subset B_\gamma$, uma contradição, pois u_ε é solução minimal para a Equação (E_ε). Portanto, para algum $z \in \partial B_\gamma$,

$$\kappa\gamma \le \Theta_\varepsilon(z) < u_\varepsilon(z) \le C u_\varepsilon(0),$$

e a prova está completa. □

Uma consequência imediata do teorema 3.1 é o seguinte corolário.

Colorário 3.1 (Crescimento linear ao longo das superfícies de nível)**.** *Dado um subdomínio $\Omega' \Subset \Omega$, existe constante universal $C = C(\Omega')$, independente de ε, tal que, se $x_0 \in \Omega' \cap \{u_\varepsilon \ge C_1 \varepsilon\}$, $d_\varepsilon(x_0) \le \frac{\Delta}{4}$,*

$$c_2 d_\varepsilon(x_0) \le u_\varepsilon(x_0) \le C d_\varepsilon(x_0).$$

Demonstração. A primeira desigualdade segue do teorema 3.1, apenas observando que se $d_\varepsilon(x_0) < \frac{\Delta}{3}$, então $x_0 \in B_\varepsilon^\star$, como no caso 2 do teorema 2.3. Aplicando o mesmo Teorema, estimativa uniformemnte Lipschitz, deduzimos a outra desigualdade. □

3.2 Propriedade de não-degenerescência forte

Vamos provar agora que soluções minimais são fortemente não-degeneradas ao longo das ε-superfícies de nível $\partial\Omega_\varepsilon \cap \Omega$. Ser fortemente não-degenerada significa que $\max u_\varepsilon$ na fronteira de uma bola B_r contida em Ω_ε^+ é da ordem de r. É um controle mais preciso sobre a taxa de crescimento de u_ε ao longo das ε-superfícies de nível. É uma característica geométrica importante que vai nos permitir investigar corretamente, via análise blow-up, o problema de fronteira livre limite obtido fazendo $\varepsilon \searrow 0^+$.

Em analogia com os trabalhos [19], [21], [30] ou [37], a falta de funcional de Euler-Lagrange para operadores totalmente não-lineares nos impede de adaptar a prova da propriedade de não-degenerescência forte para o caso aqui estudado. Em [21], Teixeira fornece uma propriedade de não-degenerescência forte para operadores com termos de transporte. A equação é não-variacional, porém, ele fornece um princípio variacional para resolver tal problema. Nesta seção desenvolvemos uma técnica não-variacional para o problema acima citado. O próximo lema é um passo fundamental no nosso esquema de iteração. Vamos escrever de uma forma geral para futuras referências.

Lema 3.1. *Seja v função contínua e lipschitziana em Ω satisfazendo*

$$F(D^2v, Dv, x) = 0 \quad \textit{em} \quad \{v > \varepsilon\}$$

no sentido da viscosidade, para um número fixado $\varepsilon > 0$. Suponha que existam constantes positivas $c > 0$ e $\bar{C} > 1$ tais que

$$v(x) \geq c \cdot \operatorname{dist}(x, \partial\{v > \varepsilon\}),$$

quando $v(x) > \bar{C}\varepsilon$ e $d(x) := \operatorname{dist}(x, \partial\{v > \varepsilon\}) < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Então existe $\delta_0 > 0$, dependendo somente de c e $\bar{C}$, tal que

$$\sup_{B_{d(x)}(x)} v \geq (1 + \delta_0)v(x).$$

para todo $x \in \{v > \bar{C}\varepsilon\}$ com $d(x) < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que existam sequências $\delta_k \to 0$ e pontos no conjunto $x_k \in \{v > \bar{C}\varepsilon\}$ com $d_k := \operatorname{dist}(x_k, \partial\{v > \varepsilon\}) < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(x_k, \partial\Omega)$ e

$$\sup_{B_{d_k}(x_k)} v \leq (1 + \delta_k)v(x_k).$$

Considere a função $w_k \colon B_2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$w_k(x) := \frac{v(x_k + d_k x)}{v(x_k)}.$$

Segue da definição de w_k que

1. $\max\limits_{\bar{B}_1} w_k \leq (1+\delta_k)$;

2. $w_k > 0$ e $w_k(0) = 1$,

3. Para algum operador uniformemente elíptico F_k, com mesmas constantes de elipticidade que F, temos que

$$F_k\left(D^2 w_k, Dw_k, x\right) = 0 \quad \text{em } B_1$$

no sentido da viscosidade.

Podemos estimar a norma Lipschitz de w_k em B_2 como segue

$$\|\nabla w_k\|_{L^\infty(B_2)} \leq \|\nabla v\|_{L^\infty(\Omega)} \frac{d_k}{v(x_k)} \leq \frac{L}{c}.$$

Aqui usamos o fato de que $x_k \in \{v > \bar{C}\varepsilon\}$ e, portanto, por hipótese, $v(x_k) \geq Cd_k$. Por equicontinuidade de $\{w_k\}$, podemos assumir que, a menos de subsequência, $w_k \to w$ localmente uniforme em B_2. Aplicando a desigualdade de Harnack para a função positiva $(1+\delta_k) - w_k$ em B_1, obtemos

$$0 \leq (1+\delta_k) - w_k \leq C_r(1+\delta_k) - w_k(0) = C_r\delta_k, \quad \text{para } |x| \leq r < 1.$$

A constante C_r depende somente da elipticidade e de r. Passando ao limite, achamos

$$w \equiv 1 \quad \text{em } \bar{B}_1.$$

Finalmente, seja $y_k \in \partial\{u_k > \varepsilon_k\}$ tal que $|x_k - y_k| = d_k$ e defina $z_k = \frac{y_k - x_k}{d_k}$. Agora, usando argumento de compacidade, podemos supor que $z_k \to \bar{z} \in \partial B_1$. Como $w_k \to 1$ uniformemente, sabemos $w_k(z_k) \to 1$. Portanto,

$$1 + \mathrm{o}(1) = w_k(z_k) = \frac{\varepsilon}{v(x_k)} \leq \frac{1}{\bar{C}} < 1,$$

o que nos leva a uma contradição e o lema está provado. $\square$

Provaremos agora que soluções minimais da Equação (E_ε) são fortemente não-degeneradas. Nossa estratégia é utilizar o Lema 3.1 e seguir o raciocínio feito em [5].

Teorema 3.2. *Seja $\Omega' \Subset \Omega$ fixado e suponha $v \geq 0$ uma função localmente Lipschitz em Ω satisfazendo*

$$F(D^2 v, Dv, x) = 0 \quad \textit{em} \quad \Omega \cap B_R(\xi)$$

no sentido da viscosidade tal que $v \equiv \delta$ em $\partial\Omega \cap B_R(\xi)$, $0 \in \partial\Omega$. Suponha que existam constantes $c > 0$ e $\bar{C} > 1$ tais que

$$v(x) \geq c \cdot \operatorname{dist}(x, \partial\{v > \varepsilon\}),$$

quando $x \in \{v > \bar{C}\varepsilon\} \cap B_{R/2}(\xi)$. Então, existe constante positiva $c_0 = c_0(\bar{C}, Lip(v))$ tal que, para todo $0 < r \leq \frac{R}{4}$, vale

$$\sup_{B_r(x_0)} v \geq c_0 r,$$

com $x_0 \in B_{R/2}(\xi)$ e $v(x_0) \geq \bar{C}\delta > 0$.

Demonstração. Seja $B_\rho(x)$ a maior bola contida $\{v > \delta\}$. Considere $y \in \partial B_\rho(x_0)$ tal que $\rho = |x - y|$, com $v(y) = \delta$. Por hipótese, $B_\rho(x) \subset \Omega \cap B_R(\xi)$. O Lema 3.1 assegura a existência de um número positivo δ_0 e um ponto $x_1 \in \partial B_\rho(x)$ tais que

$$v(x_1) \geq (1 + \delta_0) v(x).$$

A ideia agora é construir uma poligonal ao longo da qual v cresce linearmente, começando de x_0 (veja figura). Iterando esse processo, obtemos uma sequencia de pontos $\{x_n\}_{n \geq 0}$ tal que:

A1) $v(x_n) \geq (1 + \delta_0)^n v(x_0)$

A2) $|x_n - x_{n-1}| = \operatorname{dist}(x_{n-1}, \partial\{v > \varepsilon\})$

A3) $v(x_n) - v(x_0) \geq c|x_n - x_0|$ e $v(x_n) - v(x_{n-1}) \geq c|x_n - x_{n-1}|$.

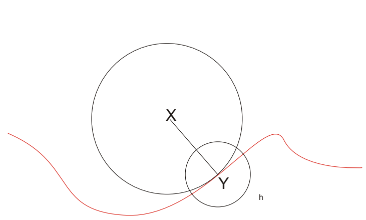
Como $v(x_n) \to \infty$ quando $n \to \infty$ (por (A1)), o processo é, no máximo finito, isto é, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} \in B_r(x_0)$ e $x_{n_0+1} \notin B_r(x_0)$.

Afirmação 1. *Existe constante $\gamma > 0$ (sob controle) tal que*

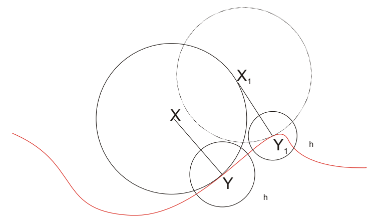
$$|x_{n_0} - x_0| \geq \gamma r.$$

De fato, por (A3)

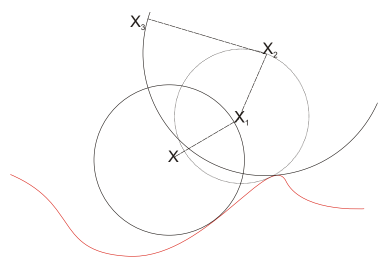
$$|x_{n_0} - x_0| \geq \frac{1}{Lip(v)} (v(x_{n_0}) - v(x_0)) \geq \sum_{k=1}^{n_0} c|x_k - x_{k-1}| \geq c|x_{n_0} - x_{n_0-1}|.$$



(a) Primeira Interação



(b) Segunda Interação



(c) Terceira Interação

Figura 3.2: Conjunto de figuras

Usando (A2), concluímos que

$$\mathrm{dist}(x_{n_0}, \partial\Omega) \leq 2|x_{n_0} - x_{n_0-1}| \leq \frac{2Lip(v)}{c}|x_{n_0} - x_0|.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} r \leq |x_{n_0+1} - x_0| &\leq |x_{n_0+1} - x_{n_0}| + |x_{n_0} - x_0| \leq \mathrm{dist}(x_{n_0}, \partial\Omega) + |x_{n_0} - x_0| \\ &\leq \left(1 + \frac{2Lip(v)}{c}\right)|x_{n_0} - x_0|. \end{aligned}$$

Segue daí que

$$\sup_{B_r(x_0)} v \geq v(x_{n_0}) \geq v(x_0) + c|x_{n_0} - x_0| \geq \gamma r,$$

e a prova está completa. $\square$

Usando, portanto, o Teorema 3.1 e Teorema 3.2, temos finalmente o seguinte resultado de não-degenerescência forte para soluções minimais $\{u_\varepsilon\}$.

Teorema 3.3 (Não-degenerescência forte)**.** *Seja* $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *família de soluções minimais de* (E_ε)*. Existe constante* $C = C(\Omega')$ *tal que:*

$$\sup_{B_r(x_0)} u_\varepsilon \geq c_0 r \quad \textit{para} \quad 0 < r \leq \frac{\Delta}{12}$$

se $x_0 \in \Omega' \cap \{u_\varepsilon \geq C_1\varepsilon\}$ *com* $\operatorname{dist}(x_0, \partial\{u_\varepsilon \leq \varepsilon\}) < \frac{\Delta}{6}$, $C_1 \gg 1$.

Demonstração. Devemos verificar as configurações do Teorema 3.2. De fato, seja x_0 ponto satisfazendo as condições acima e $x_\varepsilon \in \Omega_\varepsilon$ tal que $d_\varepsilon(x_0) = |x_0 - x_\varepsilon|$. Se denotarmos $\delta_\varepsilon = \operatorname{dist}(x_\varepsilon, \partial\Omega)$, temos,

$$\frac{2\Delta}{3} = \Delta - \frac{\Delta}{3} < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega) - d_\varepsilon(x_0) \leq \delta_\varepsilon.$$

Portanto,

$$x_0 \in \frac{1}{2} B_{\frac{\Delta}{3}}(x_\varepsilon) \subset B_{\frac{\Delta}{3}}(x_\varepsilon) \subset \frac{1}{2} B_{\delta_\varepsilon}(x_\varepsilon) = B_\varepsilon^\star. \tag{3.2.1}$$

Além disso,

$$\bigcup B_{\frac{\Delta}{3}}(x_\varepsilon) \subset \mathcal{N}_{\frac{\Delta}{2}}(\Omega') \Subset \Omega \tag{3.2.2}$$

A inclusão (3.2.1), juntamente com Teorema 3.2.2, nos diz que podemos finalmente aplicar o Teorema 3.1, e a inclusão (3.2.2) nos diz que podemos tomar constante uniformemente Lipschitz para todas as bolas, provando o Teorema. □

Notação: No que segue, vamos assumir $C_1 \gg 1$ tal que vale a propriedade de não-degenerescência forte.

Como usual, regularidade ótima e não-degenerescência forte implica pequenas restrições na oscilação das superfícies de nível. Em particular, podemos obter densidade positiva uniforme ao longo dos conjuntos de nível de soluções minimais para a Equação (E_ε).

Colorário 3.2 (Densidade positiva uniforme ao longo das superfícies de nível)**.** *Dado um subdomínio* $\Omega' \Subset \Omega$*, existem constantes* $C_3 = C_3(\Omega') > 1$, $C_4 = C_4(\Omega')$ *tais que, se* $x_0 \in \Omega'$, $d_\varepsilon(x_0) \leq \frac{\Delta}{6}$*, com*

$$u_\varepsilon(x_0) = \mu \geq C_1\varepsilon, \quad C_3\mu \leq \rho \leq \frac{\Delta}{6},$$

então, para $\mu, \varepsilon > 0$ *suficientemente pequenos,*

$$\frac{|B_\rho(x_0) \cap \{u_\varepsilon > \mu\}|}{|B_\rho(x_0)|} \geq C_4.$$

Demonstração. Pela propriedade de não-degenerecência forte, temos

$$\sup_{B_{\rho/2}(x_0)} u_\varepsilon \geq C\rho.$$

Assim, existe $y_0 \in \overline{B_{\rho/2}(x_0)}$, tal que

$$u_\varepsilon(y_0) \geq \frac{C}{2}\rho.$$

Pela regularidade Lipschitz, para ε suficientemente pequeno,

$$d_\varepsilon(y_0) \geq \frac{\tilde{C}}{2}\rho,$$

Portanto, podemos escolher $C_4 > 0$ suficientemente pequeno, tal que

$$B_{\rho C_4}(y_0) \subset B_{\frac{\tilde{C}\rho}{2}}(y_0) \cap B_\rho(x_0).$$

Agora, pela desigualdade de Harnack

$$u_\varepsilon(x) \geq \bar{C}u_\varepsilon(y_0) \geq \bar{C}C\frac{\rho}{2} \geq \frac{\bar{C}CC_3\mu}{2} > \mu \quad \text{em} \quad B_{C_4\rho}(y_0),$$

desde que $C_3 > 1$ seja suficientemente grande, de modo que $\frac{\bar{C}CC_3}{2} > 1$. Como consequência,

$$B_{C_4\rho}(y_0) \subset B_\rho(x_0) \cap \{u_\varepsilon > \mu\}.$$

Portanto,

$$|B_\rho(x_0) \cap \{u_\varepsilon > \mu\}| \geq |B_{\kappa\rho}(y_0)| = c\rho^N,$$

para uma constante $c > 0$ sob controle. □

3.3 Propriedades geométricas para operadores côncavos

Nesta seção, provaremos algumas propriedades geométricas adicionais sobre soluções minimais das ε-superfícies de nível. Tais propriedades serão úteis futuramente para obtermos regula-ridade da fronteira livre. Iremos explorar algumas propriedades da teoria geométrica da medida para a fronteira livre que, em última análise, implica finitude da sua medida de Hausdorff $\mathcal{H}^{N-1}$ (veja Apêndice A). De agora em diante, em toda seção, assumiremos as seguintes hipóteses padrão sobre o operador totalmente linear F:

(C1) (Elipticidade Uniforme) Existem constantes $0 < \lambda \leq \Lambda$, tais que

$$F(M+P, p, x) \leq F(M, p, x) + \Lambda\|P^+\| - \lambda\|P^-\|, \ \forall M, P \in \mathcal{S}(N), \ \forall (p, x) \in \mathbb{R}^N \times \Omega.$$

(C2) (Transporte linear e continuidade) $F(M, p, x) = F(M, x) + \mathbf{b}(x) \cdot p$, para uma limitação C^μ do campo vetorial $\mathbf{b}$. A aplicação $M \mapsto F(M, x)$ é C^1, e a aplicação $x \mapsto D_2F(0, x)$ pertence a $C^\mu \cap W^{1,N}$.

(C3) (Normalização) Para todo $(p, x) \in \mathbb{R}^N \times \Omega$, vale $F(0, p, x) = 0$.

(C4) (Concavidade) Para cada (p, x) fixada, o operador totalmente não-linear

$$M \mapsto F(M, p, x)$$

é côncavo.

Vale a pena destacar que, com as hipóteses (C1)-(C4), segue do teorema de Evans-Krylov e da teoria regularidade de Caffarelli, que cada solução mínima u_ε para Equação (E_ε) é duas vezes diferenciável e resolve a equação totalmente não-linear pontualmente.

3.3.1 Estimativa para a medida de Hausdorff

Vamos agora estimar a medida dos conjuntos de nível $\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}$, onde $\Omega^+_{C_1\varepsilon} := \{u_\varepsilon > C_1\varepsilon\}$. Para isto, precisamos de dois lemas.

Lema 3.2. *Fixado um subdomínio $\Omega' \Subset \Omega$, existe constante universal $C = C(\Omega') > 0$ tal que, se $x_0 \in \Omega' \cap \partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}$ e $\mu > 3C_1\varepsilon$, com $C_1 > 1$ escolhida universalmente, então*

$$\int_{\{C_1\varepsilon < u_\varepsilon < \mu\} \cap B_\rho(x_0)} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx \leq C\mu\rho^{N-1},$$

para q.t.p. $0 < \rho \leq \frac{\Delta}{6}$.

Demonstração. Recorde que u_ε é solução mínima para a equação

$$F(D^2u_\varepsilon, Du_\varepsilon, x) = \beta_\varepsilon(u_\varepsilon)$$

e F satisfaz (C1)-(C4). Por concavidade, o operador linear

$$\mathrm{L}v := \mathrm{tr}\,(F_{ij}(0,x)D_{ij}v) \geq F(D^2v, x).$$

Na expressão acima, F_{ij} representa a derivada de F com respeito a (i,j)-ésima direção no espaço $\mathcal{S}(N)$. Vamos denotar $F_{ij}(0,x) = a_{ij}(x)$. É simples verificar que

$$\lambda \mathrm{Id} \leq a_{ij} \leq \Lambda \mathrm{Id}.$$

Além disso, por hipótese, $a_{ij}(x) \in C^\mu \cap W^{1,N}$. Vamos considerar a seguinte função truncamento

$$\phi = C_1\varepsilon + \min\{(u_\varepsilon - C_1\varepsilon)^+, \mu - C_1\varepsilon\}.$$

Por elipticidade e não-negatividade do termo de reação β_ε, temos, para q.t.p., $\rho > 0$ e

$$\begin{aligned} 0 \;&\leq\; \int_{B_\rho(x_0)} \phi \mathrm{L}u_\varepsilon dx = \frac{1}{\rho}\int_{\partial B_\rho(x_0)} \phi a_{ij}(x) D_j u_\varepsilon \cdot (x^i - x_0^i)\, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &-\; \int_{B_\rho(x_0)} a_{ij}(x) D_i u_\varepsilon D_j u_\varepsilon dx - \int_{B_\rho(x_0)} \phi\left[D_j(a_{ij}(x)) - b_i(x)\right] D_i u_\varepsilon dx \end{aligned}$$

Usando elipticidade uniforme, estimativa Lipschitz de u_ε e controle $W^{1,N}$ de a_{ij}, da desigualdade acima, temos a seguinte estimativa

$$\int\limits_{B_\rho(x_0)\cap\{C_1\varepsilon < u_\varepsilon < \mu\}} a_{ij}(x) D_i u_\varepsilon D_j u_\varepsilon dx \leq C\mu\rho^{N-1} + C\mu\rho^N \leq C\mu\rho^{N-1},$$

para uma constante universal C. Da elipticidade novamente, obtemos

$$\lambda \int\limits_{B_\rho(x_0)\cap\{C_1\varepsilon < u_\varepsilon < \mu\}} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \leq \int\limits_{B_\rho(x_0)\cap\{C_1\varepsilon < u_\varepsilon < \mu\}} a_{ij}(x) D_i u_\varepsilon D_j u_\varepsilon dx \leq C\mu\rho^{N-1},$$

e o lema está provado. □

Vamos relembrar a seguinte notação: para qualquer conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$,

$$\mathcal{N}_\delta(E) := \{x \in \mathbb{R}^N \;\big|\; \mathrm{dist}(x, E) < \delta\}.$$

Vamos agora estabelecer uma estimativa chave no estudo da limitação uniforme para a medida de Hausdorff $\mathcal{H}^{N-1}$ das ε-superfícies de nível.

Lema 3.3. *Fixado um subdomínio $\Omega' \Subset \Omega$, seja $x_0 \in \Omega' \cap \partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}$, $d_\varepsilon(x_0) \leq \frac{\Delta}{6}$ e $\mu > 3C_1\varepsilon$. Existe constante $C^* = C^*(\Omega')$, tal que, se $C^*\mu \leq 2\rho \leq \frac{\Delta}{16}$ então, para $\mu, \varepsilon > 0$ suficientemente pequenos, $3C_1\varepsilon < \mu \ll \rho$, temos*

$$|\{C_1\varepsilon < u_\varepsilon < \mu\} \cap B_\rho(x_0)| \leq \bar{C}\mu\rho^{N-1}$$

onde $\bar{C} = \bar{C}(\Omega')$ é uma constante universal.

Demonstração. Seja $\{B_j\}$ uma cobertura finita por bolas de centro em pontos do conjunto $\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon} \cap B_{2\rho}(x_0)$ e raios $C^\star\mu$. Vamos escolher uma constante universal suficientemente grande $C^\star$ *a posteriori*. Do Lema de Heine-Borel existe uma constante dimensional m tal que

$$\sum \chi_{B_j} \leq m.$$

Vamos definir

$$w_\varepsilon = \min\{(u_\varepsilon - C_1\varepsilon)^+, \mu - C_1\varepsilon\} + C_1\varepsilon,$$

isto é,

$$w_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_1\varepsilon & \text{in} \quad 0 \leq u_\varepsilon(x) \leq C_1\varepsilon \\ u_\varepsilon(x) & \text{in} \quad C_1\varepsilon < u_\varepsilon(x) < \mu \\ \mu & \text{in} \quad u_\varepsilon(x) \geq \mu. \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Vamos denotar $\delta := \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Note que

$$\bigcup_j B_j \subset \mathcal{N}_{\delta/8}(\Omega') \cap B_{4\rho}(x_0).$$

Afirmamos que é possível encontrar uma família de bolas $\{B^1_j\}$ e $\{B^2_j\}$, ambas contidas em $\{B_j\}$, satisfazendo as seguintes condições:

(1) Os raios de $B^1_j, B^2_j \sim \mu$ (por constantes dependendo de Ω')

(2) $w_\varepsilon \geq \frac{3}{4}\mu$ em B^1_j e $w_\varepsilon \leq \frac{2}{3}\mu$ em B^2_j

Para provarmos esta afirmação, observe inicialmente que, pela não-degenerescência forte, podemos encontrar um ponto $x_1 \in \frac{1}{4}\bar{B}_j$ tal que

$$u_\varepsilon(x_1) = \sup_{\frac{1}{4}B_j} u_\varepsilon \geq C\frac{C^\star\mu}{4},$$

para uma constante universal $C = C(\Omega')$. Agora, se μ é suficientemente pequeno, podemos escolher $C^\star$ suficientemente grande de modo que

$$C^\star C > 4, \quad \text{e} \quad K := \sup_{\mathcal{N}_{\frac{\delta}{8}}(\Omega')} |\nabla u_\varepsilon| > \frac{1}{C^\star}.$$

Tomando $r_j^1 = \frac{1}{8K}\mu$ e $r_j^2 = \frac{1}{3K}\mu$ temos,

$$u_\varepsilon \geq \frac{3}{4}\mu > C_1\varepsilon \ \text{ em } B_j^1 = B_{r_j^1}(x_1)$$

e

$$u_\varepsilon \leq \frac{2}{3}\mu < \mu \text{ em } B_j^2 = B_{r_j^2}(x_0)$$

e a afirmação está provada.

Vamos agora definir a seguinte quantidade:

$$m_j = \frac{1}{|B_j|}\int_{B_j} w_\varepsilon.$$

Da construção acima, $|w_\varepsilon - m_j| > \sigma\mu$ em pelo menos uma das sub-bolas B_j^1, B_j^2, com $\sigma > 0$ universal. De fato, caso contrário, existiria sequência $x_n \in B_j^1, \quad y_n \in B_j^2$ tal que,

$$\frac{|w_\varepsilon(x_n) - m_j|}{\mu} < \frac{1}{n} \quad \frac{|w_\varepsilon(y_n) - m_j|}{\mu} < \frac{1}{n} \quad \forall n.$$

Portanto,

$$\frac{|w_\varepsilon(x_n) - w_\varepsilon(y_n)|}{\mu} \to 0,$$

o que gera uma contradição com a propriedade (2) acima. Agora, pela deisgualdade de Poincaré clássica

$$\sigma^2\mu^2 \leq \frac{1}{|B_j|}\int_{B_j} |w_\varepsilon - m_j|^2 dx \leq C\mu^2 \frac{1}{|B_j|}\int_{B_j} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx.$$

Segue da estimativa acima, que

$$\int\limits_{B_j \cap \{C_1\varepsilon < u_\varepsilon < \mu\}} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx = \int_{B_j} |\nabla w_\varepsilon|^2 dx \geq c|B_j|.$$

Pela não-degenerescência, como $\mu \ll \rho$, podemos escrever

$$B_\rho(x_0) \cap \{C_1\varepsilon < u_\varepsilon < \mu\} \subset \mathcal{N}_{\mu/C_2}(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon} \cap B_{2\rho}(x_0)),$$

para constantes universais. Portanto, se C^* é tomado suficientemente grande,

$$B_\rho(x_0) \cap \{C_1\varepsilon < u_\varepsilon < \mu\} \subset \bigcup 2B_j \subset B_{4\rho}(x_0)$$

Finalmente, aplicando o Lema 3.2, temos a estimativa

$$
\begin{aligned}
C\mu\rho^{N-1} \geq \int_{B_{4\rho}(x_0)\cap\{C_1\varepsilon<u_\varepsilon<\mu\}} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx &\geq \int_{\bigcup 2B_j\cap\{C_1\varepsilon<u_\varepsilon<\mu\}} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \\
&\geq \frac{1}{m}\sum \int_{2B_j\cap\{C_1\varepsilon<u_\varepsilon<\mu\}} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \\
&\geq \frac{c}{m}\sum |B_j| \\
&\geq \frac{c}{m}|B_\rho(x_0)\cap\{C_1\varepsilon<u_\varepsilon<\mu\}|,
\end{aligned}
$$

e a prova do lema está completa. □

Vamos agora discutir a propriedade de δ-densidade das superfícies de nível das soluções minimais u_ε da Equação (E_ε). Para este fim, lembramos a seguinte definição:

Definição 3.1. *Seja A um subconjunto de um domínio Ω. Diremos que A possui a propriedade de δ-densida-de ($0<\delta<1$) se existe $\tau>0$ tal que*

$$\frac{|B_\delta(x)\cap A|}{|B_\delta(x)|} \geq \tau, \quad \forall x \in \partial A\cap\Omega. \tag{3.3.2}$$

Se (3.3.2) vale para todo $0<\delta<1$, diremos que A possui densidade uniforme em Ω ao longo de ∂A.

Abaixo, provaremos um lema que fornece informações sobre propriedades de δ-densidade. A prova segue por argumentos padrões e será omitida.

Lema 3.4 (Propriedade de Densidade)**.** *Seja $A \Subset \Omega$. Então,*

(a) Se existe δ tal que A possui a propriedade de δ-densidade, então existe uma constante $C=C(\tau,N)$ de modo que:

$$|\mathcal{N}_\delta(\partial A)\cap B_\rho(x_0)| \leq \frac{1}{2^n\tau}|\mathcal{N}_\delta(\partial A)\cap B_\rho(x_0)\cap A| + C\delta\rho^{N-1}$$

quando $x_0\in\partial A\cap\Omega$ e $\delta \ll \rho$.

(b) Se A possui densidade uniforme em Ω ao longo de ∂A então $|\partial A\cap\Omega|=0$.

Um comentário sobre a prova do lema anterior: a propriedade (a) segue por argumento de cobertura, e (b) é consequência do teorema de diferenciação de Lebesgue. Vamos agora provar um importante resultado sobre a geometria fraca das ε-superfícies de nível.

Teorema 3.4. *Dado um subdomínio $\Omega' \Subset \Omega$, existe constante universal $C_5 = C_5(\Omega')$ tal que*

$$|\mathcal{N}_\mu(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}) \cap B_\rho(x_0)| \leq C\mu\rho^{n-1},$$

quando $x_0 \in \Omega' \cap \partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}$, $d_\varepsilon(x_0) \leq \frac{\Delta}{16}$ e $\rho \gg \mu > 3C_1\varepsilon$ e $C^\star\mu \leq 2\rho \leq \frac{\Delta}{16}$. Em particular,

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon} \cap B_\rho(x_0)) \leq C\rho^{n-1}.$$

Demonstração. Como $C_3 > 1$ (C_3 como no Corolário 3.2), temos

$$\mathcal{N}_\mu(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon} \cap B_\rho(x_0)) \subset \mathcal{N}_{C_3\mu}(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon} \cap B_\rho(x_0))$$

Tomando $\delta = C_3\mu$ no Corolário 3.2

$$\frac{|B_\delta(x) \cap \Omega^+_{C_1\varepsilon}|}{|B_\delta(x)|} \geq C_4 \quad \text{se } x \in \partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}.$$

Além disso, para $C > 1$ como no Corolário 3.2,

Pelo Lema 3.3, existe constante $M = M(C_4, N)$ tal que

$$|\mathcal{N}_\delta(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}) \cap B_\rho(x_0)| \leq \frac{1}{2^N C_4}|\mathcal{N}_\delta(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}) \cap B_\rho(x_0) \cap \Omega^+_{C_1\varepsilon}| + M\delta\rho^{n-1}$$

Pela continuidade Lipschitz, existe $D = D(C_3, \mathrm{Lip}(u_\varepsilon|_{\mathcal{N}_{\Delta/8}(\Omega')}))$ tal que

$$\mathcal{N}_\delta(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}) \cap B_\rho(x_0) \cap \Omega^+_{C_1\varepsilon} \subset \{C_1\varepsilon < u_\varepsilon < D\mu\} \cap B_\rho(x_0)$$

Para $\mu \ll \rho$, invocamos o Lema 3.3 mais uma vez para concluir que

$$|\mathcal{N}_\delta(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}) \cap B_\rho(x_0) \cap \Omega^+_{C_1\varepsilon}| \leq \bar{C}D\delta\rho^{n-1},$$

e o teorema está provado. □

Capítulo 4

O problema de fronteira livre limite

Neste capítulo, iniciaremos a análise do problema de fronteira livre obtida fazendo o parâmetro $\varepsilon \to 0$ no problema de Dirichlet

$$(E_\varepsilon) \begin{cases} F(D^2u, Du, x) &= \beta_\varepsilon(u) \quad \text{em } \Omega \\ u &= \varphi \quad\quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $\varphi \geq 0$ em $\partial\Omega$. Empiricamente, iremos encontrar

$$\begin{aligned} F(D^2u, Du, x) &= \delta_0(u) \\ u_\nu &= f(x) \text{ ao longo } \partial\{u > 0\}, \end{aligned}$$

para uma função f a ser determinada. Contudo, como estamos trabalhando com operadores não-variacionais, não está disponível na literatura a linguagem teórica adequada para interpretar a equação acima. Retornaremos com esta questão nas seções posteriores.

4.1 Problema limite

Dedicamos esta seção para estabelecer os primeiros resultados sobre a função limite $u_0 := \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon$, onde u_ε são soluções minimais para o problema (E_ε). Em particular, estamos interessados nas propriedades geométricas fracas da fronteira livre $\partial\{u_0 > 0\} \cap \Omega$.

Inicialmente, como $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq \sup_{\bar{\Omega}} \varphi$ e Du_ε é uniformemente limitado (Teorema 2.3), existe função localmente Lipschitz u_0 tal que, a menos de subsequência,

(1) $u_\varepsilon \to u_0$ localmente na topologia C^α para todo $\alpha < 1$;

(2) $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ fraco em $H^1(\Omega)$.

A função u_0 é nossa candidata natural para resolver o problema (0.0.3). Vamos introduzir as seguintes notações:

$$\Omega_0 := \{x \in \Omega \mid u_0(x) > 0\} \quad \text{e} \quad \mathfrak{F}(u_0) := \partial\Omega_0 \cap \Omega.$$

Em toda a seção, vamos fixar um subdomínio $\Omega' \Subset \Omega$ e denotar $\Delta := \mathrm{dist}(\Omega', \Omega)$.

Teorema 4.1. *Seja $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ família de soluções minimais para o problema (E_ε) e u_0 seu limite. Então $u_0 \in C^{0,1}_{loc}(\Omega)$ e satisfaz*

$$F(D^2u_0, Du_0, x) = 0 \text{ em } \Omega_0 \tag{4.1.1}$$

no sentido da viscosidade. Além disso, existe constante universal $\bar{C}$ dependendo de Ω', tal que, para todo $x \in \Omega' \cap \Omega_0$ com $\mathrm{dist}(x, \{u_0 = 0\}) \leq \frac{\Delta}{4}$ vale

$$C_2 \mathrm{dist}(x_0, \{u_0 \equiv 0\}) \leq u_0(x) \leq \bar{C} \mathrm{dist}(x_0, \{u_0 \equiv 0\}),$$

onde C_2 é a constante universal que aparece no Corolário 3.1.

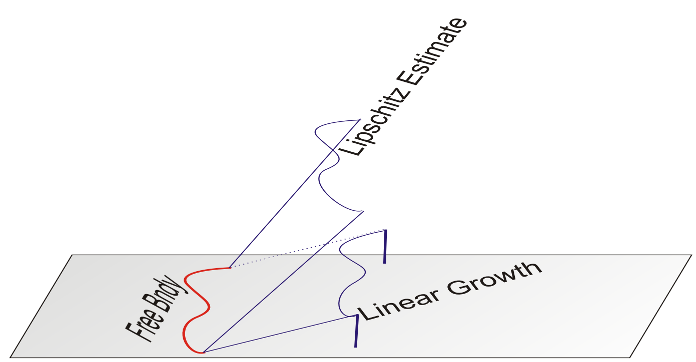


Figura 4.1: Crescimento Linear (linear Growth)

Demonstração. Da convergência uniforme e continuidade uniformemente Lipschitz de u_ε, concluímos que u_0 é localmente Lipschitz em Ω. Fixe um ponto $x_0 \in \Omega_0$ e considere o seguinte número $u_0(x_0) = \gamma > 0$. Por continuidade, $u_0 \geq \frac{1}{2}\gamma$ em $B_\kappa(x_0)$ para algum raio suficientemente pequeno $\kappa > 0$. Como $u_\varepsilon \to u_0$ uniformemente sobre compactos, para

$\varepsilon \ll 1$, $u_\varepsilon \geq \frac{1}{4}\gamma$ em $B_\kappa(x_0)$. Portanto, como o termo de reação β_ε está suportado em $[0,\varepsilon]$, se $\varepsilon \leq \frac{1}{8}\gamma$, as soluções minimais u_ε para a Equação (E_ε) resolve

$$F(D^2 u_\varepsilon, Du_\varepsilon, x) = 0 \quad \text{em } B_{\frac{1}{2}\kappa}(x_0).$$

Portanto, segue da estabilidade de soluções de viscosidade sob limites uniformes (veja Capítulo 1 ou Proposição 2.9 em [7]), que u_0 é solução de (4.1.1) .

Quanto ao crescimento linear, segue da seguinte forma: nas condições acima, seja $u_0(x_0) = \delta$. Para $\varepsilon \ll 1$, $u_\varepsilon(x_0) \geq \frac{\delta}{2} \geq C_1\varepsilon$. Portanto, $d_\varepsilon(x_0) \leq \frac{\Delta}{8}$ e, pelo crescimento linear ao longo das superfícies de nível (Corolário 3.1), temos que

$$u_\varepsilon(x_0) \geq C_2 d_\varepsilon(x_0). \tag{4.1.2}$$

Seja $y_\varepsilon \in \partial\Omega_\varepsilon$ tal que $|y_\varepsilon - x_0| = d_\varepsilon(x_0)$. Passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que $y_\varepsilon \to y_0$. Como $u_\varepsilon(y_\varepsilon) = \varepsilon$, então $u_0(y_0) = 0$. Tomando o limite em (4.1.2), concluímos que:

$$u_0(x_0) \geq C_2|x_0 - y_0| \geq C_2 \mathrm{dist}(x, \{u_0 \equiv 0\}).$$

A estimativa por cima segue da regularidade Lipschitz de u_0. $\square$

Vamos agora estabelecer propriedade de não-degenerescência forte para u_0 ao longo do conjunto de positividade.

Teorema 4.2 (Não-degenerescência forte)**.** *A função limite u_0 é fortemente não-degenerada, isto é, para qualquer ponto $x_0 \in \Omega' \cap (\Omega_0 \cup \mathfrak{F}(u_0))$, dist$(x_0, \mathfrak{F}(u_0)) \leq \frac{\Delta}{6}$ existe constante universal $c_0 = c_0(\Omega')$ tal que*

$$\sup_{B_r(x_0)} u_0 \geq c_0 r, \quad r \leq \frac{\Delta}{12}.$$

Demonstração.

(1) Sejam $x_0 \in \Omega' \cap \Omega_0$ e $y_0 \in \mathfrak{F}(u_0)$, tais que

$$|x_0 - y_0| = \mathrm{dist}(x_0, \mathfrak{F}(u_0)) \leq \frac{\Delta}{6}.$$

Assuma que $u_0(x_0) = \delta$. Como $\varepsilon \to 0$, para $\varepsilon \ll 1$, $u_\varepsilon(x_0) \geq \frac{\delta}{2} \geq C_1\varepsilon$. Usando o fato de que $u_0(y_0) = 0$ e convergência pontual, para $\varepsilon \ll 1$, $u_\varepsilon(y_0) < \varepsilon$. Por continuidade, existe $y_\varepsilon \in (x_0, y_0)$ tal que $u_\varepsilon(y_\varepsilon) = \varepsilon$. Assim, $d_\varepsilon(x_0) < \frac{\Delta}{6}$. Agora, pelo Teorema 3.3, existe constante $c_0 = c_0(\Omega')$ (independe de ε) tal que:

$$\sup_{B_r(x_0)} u_\varepsilon \geq c_0 r \quad \text{para} \quad r \leq \frac{\Delta}{12}.$$

Como $u_\varepsilon \to u_0$ uniformemente em $B_r(x_0)$, obtemos:

$$\sup_{B_r(x_0)} u_0 \geq c_0 r \quad \text{para} \quad r \leq \frac{\Delta}{12}.$$

(2) Se $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0)$, usaremos o resultado anterior. Seja r a especificar. Tomando $y_0 \in \partial B_{r/4}(x_0) \cap \Omega_0$, $K = \mathcal{N}_{\Delta/12}(\Omega')$ e aplicando (1) a K, garantimos a existência de uma constante universal $c_0 = c_0(\Omega')$ tal que:

$$\sup_{B_r(x_0)} u_0 \geq \sup_{B_{r/4}(y_0)} u_0 \geq c_0 \frac{r}{4}.$$

$\square$

4.2 Propriedades geométricas da solução limite

Listamos agora propriedades geométricas adicionais que u_0 herda das funções aproximadas u_ε, as soluções minimais do problema (E_ε).

Definição 4.1. *Dizemos que uma sequência de conjuntos $\{A_k\}_{k\geq 1}$ converge (localmente) para um conjunto A na distância Hausdorff se, dado um compacto K e um $\delta > 0$, existe um $\kappa_0 = \kappa_0(\delta, K) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $\kappa > \kappa_0$, vale*

$$K \cap A_k \subset \mathcal{N}_\delta(A) \cap K$$

$$K \cap A \subset \mathcal{N}_\delta(A_k) \cap K.$$

Teorema 4.3 (Propriedades geométricas da função limite)**.** *Seja u_0 o limite das soluções minimais para o problema (E_ε). Então vale o seguinte:*

a) O conjunto de positividade $\Omega_0 := \{u_0 > 0\}$ é limite, na métrica Hausdorff, do conjunto $\Omega_{C_1\varepsilon} := \{u_\varepsilon > C_1\varepsilon\}$, para todo $C_1 > 1$. Isto é, dado $\delta > 0$, para ε suficientemente pequeno,

$$\Omega' \cap \Omega_{C_1\varepsilon} \subset \mathcal{N}_\delta(\Omega_0) \cap \Omega'$$

e

$$\Omega' \cap \Omega_0 \subset \mathcal{N}_\delta(\Omega_{C_1\varepsilon}) \cap \Omega'$$

b) O conjunto de positividade Ω_0 possui densidade positiva uniforme ao longo da fronteira livre $\mathfrak{F}(u_0)$, isto é, existe constante universal $\tau = \tau(\Omega')$ tal que para $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0) \cap \Omega'$ vale

$$\frac{|B_\rho(x_0) \cap \Omega_0|}{|B_\rho(x_0)|} \geq \tau.$$

Em particular, $|\mathfrak{F}(u_0)| = 0$.

c) Existe constante universal $C = C(\Omega') > 0$ tal que para todo $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0)$,

$$C^{-1}\rho \leq ⨏_{\partial B_\rho(x_0)} u_0(y) d\mathcal{H}^{N-1}(y) \leq C\rho.$$

Demonstração. Para verificar a), suponha por contradição que a primeira inclusão não seja satisfeita. Assim, existiriam uma sequência de pontos $\{x_\varepsilon\}$ e um número real positivo $\alpha > 0$, satisfazendo

(1) $\operatorname{dist}(x_\varepsilon, \Omega_0) \geq \alpha$;

(2) $x_\varepsilon \in \Omega_{C_1\varepsilon} \cap \Omega'$;

(3) $x_\varepsilon \to x_0$ com $\operatorname{dist}(x_0, \Omega_0) \geq \alpha$.

De (3) e convergência uniforme, concluímos que $u_0(x_0) = 0$. De fato, por (2) temos que, $u_\varepsilon(x_\varepsilon) \geq C_1\varepsilon$ portanto, fazendo $\varepsilon \to 0$, $u_0(x_0) \geq 0$. Se fosse $u_0(x_0) > 0$, então $x_0 \in \Omega_0$ e portanto $\operatorname{dist}(x_0, \Omega_0) = 0$ o que não ocorre por (3). Assim $u_0(x_0) = 0$. Pela não-degenerescência forte, podemos encontrar $z_\varepsilon \in \overline{B_\rho(x_\varepsilon)}$ com

$$u_\varepsilon(z_\varepsilon) = \sup_{B_\rho(x_\varepsilon)} u_\varepsilon \geq C\rho,$$

para uma constante C independente de $\varepsilon > 0$. Quando $|x_\varepsilon - x_0| < \frac{\rho}{8}$, para $\delta = \frac{\rho}{8}$, $B_\delta(x_\varepsilon) \subset B_{\rho/2}(x_0)$ e (a menos de subsequência) $z_\varepsilon \to z^\star \in B_\rho(x_0)$. Como vale a convergência $u_\varepsilon(z_\varepsilon) \to u_0(z^\star)$, concluímos que

$$0 = \sup_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} u_0 \geq u_0(z^\star) = \lim u_\varepsilon(z_\varepsilon) \geq C\frac{\alpha}{2},$$

levando a uma contradição. Logo

$$\Omega' \cap \Omega_{C_1\varepsilon} \subset \mathcal{N}_\delta(\Omega_0) \cap \Omega'.$$

Para a outra inclusão, suponha que

$$\Omega' \cap \Omega_0 \subsetneq \mathcal{N}_\delta(\Omega_{C_1\varepsilon}) \cap \Omega'.$$

Então existiria sequência $\{z_\varepsilon\} \subset \Omega_0 \cap \Omega'$ tal que $\operatorname{dist}(x_\varepsilon, \Omega_{C_1\varepsilon} \cap \Omega') \geq \alpha$. Isto implica que $u_\varepsilon(x) \leq C_1\varepsilon$ para $x \in B_{\alpha/2}(z_\varepsilon)$. Suponha $z_\varepsilon \to z^\star$, então quando $|z_\varepsilon - z^\star| < \alpha/8$, $B_{\alpha/8}(z^\star) \subset B_{\alpha/2}(z_\varepsilon)$ e portanto, $B_{\alpha/8}(z^\star) \subset \Omega \setminus \Omega_0$ o que é um absurdo.
Para provarmos b), densidade uniforme do conjunto de positividade Ω_0, usaremos a mesma ideia feita no Corolário 3.2. De fato, pela não-degenerescência (teorema anterior), temos

$$\sup_{B_{\rho/2}(x_0)} u_0 \geq C\rho.$$

De modo que existe $y_0 \in \overline{B_{\rho/2}(x_0)}$, tal que

$$u_0(y_0) \geq \frac{C\rho}{2}.$$

Então, pela continuidade Lipschitz,

$$\mathrm{dist}(y_0, \{u_0 \equiv 0\}) \geq \frac{\bar{C}\rho}{2}.$$

Isto diz que, se tomarmos τ suficientemente pequeno de modo que

$$B_{\tau\rho}(y_0) \subset B_{\bar{C}\rho/2}(y_0) \cap B_\rho(x_0),$$

pela desigualdade de Harnack, achamos:

$$u_0(x) \geq C^\star u_0(y_0) \geq \frac{C^\star C\rho}{2} > 0 \quad \text{em} \quad B_{\tau\rho}(y_0).$$

Isto nos permite concluir que $B_{\tau\rho}(y_0) \subset B_\rho(x_0) \cap \Omega_0$ e isto finaliza a prova do item. Para a propriedade $c)$, seja $\Delta := \mathrm{dist}(\Omega', \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$ e defina o conjunto $K = \mathcal{N}_{\frac{\Delta}{4}}(\Omega')$ então, $\overline{B_\rho(x_0)} \subset K$ para $\rho \leq \frac{\Delta}{12}$. Pela continuidade Lipschitz,

$$u_0(x) \leq \left(\frac{Lip(u_0|_K)}{12}\right)\rho \quad \text{em} \quad B_\rho(x_0).$$

segue imediatamente que

$$\fint_{B_\rho(x_0)} u_0 dx \leq C_1\rho.$$

Para provarmos a outra desigualdade, observe inicialmente que pela propriedade de não-degenerescência e continuidade Lipschitz verificamos imediatamente essa estimativa para a média de volume, ou seja, existem constantes $C_1 = C_1(\Omega^{'}) > 0$ tal que,

$$\fint_{B_\rho(x_0)} u_0 dx \geq C_1^{-1}\rho. \tag{4.2.1}$$

De fato, como u_0 é fortemente não-degenerada, existe $x_1 \in \overline{B_{\rho/2}(x_0)}$ tal que

$$u_0(x_1) \geq \frac{C\rho}{4}.$$

Pela regularidade Lipschitz, se $\tau \leq \frac{1}{3}$, como $B_{\rho\tau}(x_1) \subset\subset B_\rho(x_0) \subset K$

$$u_0 \geq \left(\frac{C}{4} - Lip(u_0|_K)\tau\right)\rho \quad \text{em} \quad B_{\rho\tau}(x_1).$$

Tomando τ suficientemente pequeno, $u_0 \geq \frac{C\rho}{8} > 0$ em $B_{\rho\tau}(x_1)$ e portanto,

$$\fint_{B_\rho(x_0)} u_0 dx \geq \fint_{B_{\rho\tau}(x_1)} u_0 dx \geq \frac{\tau^N C}{8}\rho.$$

Vamos mostrar que vale a mesma conclusão para média da área. De fato, suponha por contradição, que este não é o caso. Então, existiria sequência $\{x_m\}_{m\geq 1} \subset \mathfrak{F}(u_0) \cap \Omega'$ tal que

$$\frac{1}{\rho_m}\fint_{\partial B_{\rho_m}(x_m)} u_0 d\mathcal{H}^{N-1} = \mathrm{o}(1) \quad \text{quando } m \to \infty. \tag{4.2.2}$$

Vamos agora considerar a sequência de funções reescalonada,

$$v_m(x) := \frac{1}{\rho_m} u_0(x_m + \rho_m x),$$

a qual, a menos de subsequencia, converge uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$, para uma função Lipschitz $V \geq 0$. Além disso, $F(D^2V, DV, x) = 0$ em $\{V > 0\}$. Note que para todo $0 < r < 1$,

$$\frac{1}{\rho_m}\fint_{\partial B_{r\rho_m}(x_m)} u_0(x) d\mathcal{H}^{N-1} = \mathrm{o}(1).$$

Por outro lado

$$\frac{1}{\rho_m}\fint_{\partial B_{r\rho_m}(x_m)} u_0(x) d\mathcal{H}^{N-1} = \fint_{\partial B_r(0)} v_m(y) d\mathcal{H}^{N-1}$$

Portanto, quando $m \to \infty$, obtemos para todo $0 < r \leq 1$ fixado

$$\begin{aligned}
\fint_{\partial B_r(0)} V(y) d\mathcal{H}^{N-1}(y) &= \lim_{m\to\infty} \fint_{\partial B_r(0)} v_m(y) d\mathcal{H}^{N-1}(y) \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\rho_m}\fint_{\partial B_{r\rho_m}(x_m)} u_0(x) d\mathcal{H}^{N-1}(x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\fint_{\partial B_r(0)} V(y) d\mathcal{H}^{N-1} = 0, \quad \forall\, r \in (0, 1].$$

Integrando a expressão acima de $r = 0$ até $r = 1$ obtemos

$$\int_{B_1(0)} V(x) dx = 0.$$

Além disso, da não-degenerescência,

$$\fint_{B_1(0)} V(x)dx = \fint_{B_1(0)} v_m(x)dx + \mathrm{o}(1) \geq c > 0,$$

o que gera uma contradição. $\square$

Observação 4.1. *Observe que a constante Lipschitz é invariante sob reescalonamentos $v_m(x) = \frac{1}{\rho_m} u_0(x_m + \rho_m x)$. Além disso, $v_m(0) = 0$ para todo $m \geq 1$. Assim, obtemos a função V descrita na prova do teorema anterior pelo teorema de Ascoli-Arzelá. Como as v_m resolvem uma EDP homogênea, a mesma conclusão vale para a função limite V.*

4.3 Estimativas para a medida de Hausdorff

Nesta seção mostraremos estimativas da medida de Hausdorff para operadores côncavos. O resultado central é uma estimativa local para a medida de Hausdorff do conjunto $\partial\{u_0 > 0\}$.

Teorema 4.4. *Suponha F satisfazendo as condições (C1)-(C4) da seção 3.3 e seja u_0 o limite das soluções mínimas para a Equação (E_ε). Então, existe constante universal $C = C(\Omega') > 0$ tal que*

$$|\mathcal{N}_\delta(\mathfrak{F}(u_0)) \cap B_\rho(x_0)| \leq C\delta\rho^{N-1}$$

para todo $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0) \cap \Omega'$ e $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Em particular,

$$\mathcal{H}^{N-1}(\mathfrak{F}(u_0) \cap B_\rho(x_0)) \leq C\rho^{N-1}.$$

Demonstração. O resultado segue do item $a)$ do Teorema 4.3 combinado com o Teorema 3.4. De fato, da convergência na distância Hausdorff, para ε suficientemente pequeno, temos (assumindo usualmente, $\varepsilon \ll \delta \ll \rho \ll \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$)

$$\mathcal{N}_\delta(\mathfrak{F}(u_0)) \cap B_\rho(x_0) \subset \mathcal{N}_{4\delta}(\partial\Omega^+_{C_1\varepsilon}) \cap B_{2\rho}(x_0).$$

Estamos, portanto, nas hipóteses do Teorema 3.4, o qual prova a estimativa apropriada para medida de Lebesgue da $\delta-$vizinhança. Vamos provar agora a estimativa da medida de Hausdorff $\mathcal{H}^{n-1}$. Seja $\{B_j\}$ cobertura de $\mathfrak{F}(u_0) \cap B_\rho(x_0)$ por bolas centradas em $\mathfrak{F}(u_0) \cap B_\rho(x_0)$ e raio δ. Certamente

$$\bigcup B_j \subset \mathcal{N}_\delta(F(u_0)) \cap B_{\rho+\delta}(x_0).$$

Portanto, existe $\bar{C} = \bar{C}(N)$ tal que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\delta^{N-1}(F(u_0) \cap B_\rho(x_0)) &\leq \bar{C} \sum \text{Area}(\partial B_j) = \frac{\bar{C}}{\delta} \sum |B_j| \leq \frac{\bar{C}}{\delta} |\mathcal{N}_\delta(F(u_0)) \cap B_{\rho+\delta}(x_0)| \\
&\leq \bar{C}C(\rho+\delta)^{n-1} = \bar{C}C\rho^{n-1} + \text{o}(1).
\end{aligned}$$

Fazendo $\delta \to 0$, finalizamos a prova do teorema. $\square$

Colorário 4.1. *Suponha F satisfazendo as condições (C1)-(C4) da seção 3.3 e seja u_0 o limite das soluções mínimas para a Equação (E_ε). Então*

$$\mathcal{H}^{N-1}(\Omega' \cap \partial\{u_0 > 0\}) < \infty$$

para qualquer $\Omega' \Subset \Omega$.

Demonstração. De fato, pelo Teorema 4.4 e pelo Teorema 4.5.11 de [26], o conjunto $\mathfrak{F}(u_0) := \Omega \cap \partial\{u_0 > 0\}$ possui perímetro localmente finito. $\square$

Observação 4.2. *Como vimos, o conjunto $\mathfrak{F}(u_0) := \Omega \cap \partial\{u_0 > 0\}$ possui perímetro localmente finito. Isto significa que*

$$\mu_{u_0} = -\nabla\chi_D$$

é uma medida de Borel, e a variação total $|\mu_{u_0}|$ é uma medida de Radon. Além disso, os resultados do Capítulo 4 de [26] nos dão uma caracterização de μ_{u_0}. Para exibirmos essa caracterização, definimos a fronteira livre reduzida de $A \subset R^N$ como sendo o conjunto

$$\partial_{\text{red}}A := \{x \in \Omega : |\nu_{u_0}(x)| = 1\},$$

onde $\nu_{u_0}(x)$ é o vetor unitário tal que

$$\int_{B_r(x)} |\chi_A - \chi_{\{y \,|\, \langle y-y, \nu_{u_0}(x)\rangle < 0\}}| dy = o(r^N).$$

Então os resultados do Capítulo 4 de [26] implicam que

$$\mu_{u_0} = \nu_{u_0}\mathcal{H}^{N-1}\lfloor\partial_{\text{red}}\{u_0 > 0\},$$

onde $\mathcal{H}^{N-1}\lfloor A(B) := \mathcal{H}^{N-1}(A \cap B)$, para todo $B \subset \mathbb{R}^N$. Em [38], o autor prova que, no caso da fronteira livre originada por mínimos de um funcional, tem-se

$$\mathcal{H}^{N-1}(\mathfrak{F}(u_0) \setminus \mathfrak{F}(u_0)_{\text{red}}) = 0.$$

Entretanto, no caso de uma soluções minimais, não sabemos ainda dizer se isto é verdade. Veremos mais adiante como obter tal resultado.

Capítulo 5

Condição de fronteira livre

Nos capítulos anteriores, provamos algumas propriedades acerca da função limite u_0 do problema

$$(E_\varepsilon)\begin{cases} F(D^2u, Du, x) &= \beta_\varepsilon(u) \quad \text{em } \Omega \\ u &= \varphi \quad\quad \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

as quais são: u_0 é não-negativa, $F(D^2u_0, Du_0, x) = 0$ no seu conjunto de positividade, u_0 é localmente Lipschitz, possui crescimento linear ao longo da fronteira livre $\mathfrak{F}(u_0)$ e é fortemente não-degenerada. Surge, portanto, uma questão interessante: que condição é válida ao longo da fronteira livre? Estamos interessados em encontrar um certo tipo de "fluxo de equilíbrio" que envolve a derivada normal ao longo da fronteira livre. O ponto principal neste caso é que a função limite u_0 é apenas Lipschitz e, portanto, $\partial\{u_0 > 0\}$ não é, necessariamente, uma superfície. Para solucionar esse problema, devemos interpretar em que sentido tal condição será satisfeita. Esta condição é conhecida como condição de fronteira livre. A compreensão dessa condição de fronteira livre é fundamental para futuras investigações sobre a regularidade do conjunto $\mathfrak{F}(u_0)$. Na lite-ratura, temos, por exemplo, os artigos de Berestycki, Caffarelli e Niremberg (veja [31]), que analisaram a condição de fronteira livre para operadores elípticos lineares da forma não-divergente

$$\mathcal{L}u = a_{ij}(x)D_{ij}u + b_i(x)D_iu + c(x)u$$

com coeficientes C^1. Em um trabalho recente, [37] D. Moreira e E. Teixeira obtiveram uma descrição completa da condição de fronteira livre, para equações lineares na forma divergente

$$\mathcal{L}u = \operatorname{div}(a_{ij}(x)\nabla u) = g^2(x)\beta_\varepsilon(u),$$

com coeficientes Hölder contínuos. Ficou demonstrado que a função limite u_0, obtida como o limite de minimizantes da equação de Euler-Lagrange

$$E_\varepsilon(v) := \int_\Omega \frac{1}{2}\langle a_{ij}(x)\nabla v, \nabla v\rangle + g^2(x)B_\varepsilon(v)dx,$$

onde $B_\varepsilon(s) = \int_0^s \beta_\varepsilon(s)\, ds$, satisfaz $\mathcal{L}u_0 = 0$ no conjunto $\{u_0 > 0\}$ e

$$(u_0)_\nu = g\sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{\langle a_{ij}\nu, \nu\rangle}}$$

ao longo de $\partial\{u_0 > 0\} \cap \Omega$. Por outro lado, E. Teixeira em [21] obteve uma condição de fronteira livre para equações não-variacionais com termos de transporte,

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j}\partial_j(a_{ij}(x)D_i u) + \sum_i b_i(x)D_i u + c(x)u = \beta_\varepsilon(u).$$

Permita-nos ainda citar os trabalhos de Caffarelli, Lederman e Wolanski [12], [13] para problemas com duas fases, e o trabalho de Danielli, Petrosyan e Shahgholian [16], que estudaram o problema de fronteira livre pelo operador p-laplaciano.

Nosso objetivo neste capítulo é estender esses resultados para operadores totalmente não-lineares. Vamos determinar precisamente o comportamento linear da função limite u_0 próximo à fronteira livre $\mathfrak{F}(u_0)$. Nosso objetivo principal é verificar, em algum sentido, essa condição de fronteira livre. Na realidade, provaremos que a condição de fronteira livre vale no sentido da viscosidade introduzido por Caffarelli nos célebres artigos [3], [4] e [5]. Esta noção é formulada em termos do desenvolvimento assintótico em torno de pontos regulares da fronteira livre, isto é, pontos onde a fronteira livre tem uma bola que toca um dos dois lados (fases) da função u_0. Foi conjecturado que a condição de fronteira livre do problema $F(D^2u, x) = \beta_\varepsilon(u)$ está intrinsecamente relacionado com a homogeneização do operador totalmente não-linear:

$$F^\star(M, x) := \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon F\left(\frac{1}{\varepsilon}M, x\right).$$

Em um recente artigo, E. Teixeira em [18] obteve uma condição de fronteira livre para operadores elípticos totalmente não-lineares em dimensão 1. No presente trabalho, obtemos uma extensão dos resultados obtidos por E. Teixeira para operadores totalmente não-lineares em dimensões arbitrárias. Em resumo, o resultado que obtemos nesse trabalho é o seguinte: suponha que o operador $F : \mathcal{S}(N) \times \Omega \to \mathbb{R}$ é invariante por rotações com respeito a M. Isto é uma condição geométrica bastante natural e se lê da seguinte forma

$$F(M, x) = F(OMO^{-1}, x), \quad \text{para todo} O \in \mathrm{O}(N). \tag{5.0.1}$$

Isso significa que F depende apenas dos autovalores da hessiana, e a equação pode ser escrita como

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n, x) = \beta_\varepsilon(u).$$

Então, provaremos a existência de um operador elíptico $F^\star$ para o qual a seguinte condição de fronteira livre é satisfeita, em algum sentido apropriado a ser especificado

$$F^\star(\nabla u_0(z) \otimes \nabla u_0(z), z) = 2\mathrm{T}, \quad z \in \mathfrak{F}(u_0).$$

Lembre que T denota a massa total de β. Utilizaremos a teoria de viscosidade de Caffarelli para dar uma interpretação de solução fraca para nosso problema descrita da seguinte forma: seja u_0 o limite uniforme das soluções minimais u_ε. Então, u_0 possui desenvolvimento assintótico

$$u_0(x) = \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^\star(\nu \otimes \nu, x_0)}} \langle x - x_0, \nu \rangle^+ + \mathrm{o}(|x - x_0|),$$

próximo a um ponto regular da fronteira livre $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0)$. Aqui ν é a normal unitária a $\partial B_\rho(y_0)$ apontando para dentro de $\Omega_0 := \{u_0 > 0\}$, $B_\rho(y_0) \subset \Omega_0$ e além disso $B_\rho(y_0) \cap \mathfrak{F}(u_0) = \{x_0\}$. No último capítulo, iremos abordar a questão da regularidade da fronteira livre. Uma vez estabelecida a suavidade $C^{1,\alpha}$ da fronteira livre, mostraremos que soluções limite (mínimas) resolvem o problema de fronteira livre proposto no início do trabalho

$$\left\{ \begin{array}{rcll} F(D^2 u, x) & = & 0 & \text{in} \quad \{u_0 > 0\} \cap \Omega \\ u & = & \varphi & \text{on} \quad \partial\Omega \\ F^\star(\nabla u_0(z) \otimes \nabla u_0(z), z) & = & 2\mathrm{T} & \text{on} \quad \partial\{u_0 > 0\} \cap \Omega, \end{array} \right. \tag{5.0.2}$$

no sentido clássico. Em todo o capítulo, iremos assumir as seguintes hipóteses sobre o operador $F : \mathcal{S}(N) \times \Omega \to \mathbb{R}$:

(H1) (Hölder continuidade) Existem constante $\mu_1 > 0$ e módulo de Hölder continuidade $\omega(r) = \mu_0 r^\beta$, $\beta \in (0, 1]$, tais que

$$\begin{array}{rcl} |F(M, x) - F(M, y)| & \leq & \min\big(\omega(|x - y|) + \mu_1(|x - y|||M||), \\ & & \mu_1 + \omega(|x - y|)||M||\big) \end{array}$$

(H2) Para toda $M, N \in \mathcal{S}(N)$ e $x, y \in \Omega$

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{M}^-(M - N, \lambda, \Lambda) & - & \omega(|x - y|)(\|M\| + \|N\|) \leq F(M, x) - F(N, y) \\ & \leq & \mathfrak{M}^+(M - N, \lambda, \Lambda) + \omega(|x - y|)(\|M\| + \|N\|), \end{array}$$

onde ω é uma função contínua não-decrescente satisfazendo $\omega(0) = 0$, e $\|M\|$ denota a norma-(L^2, L^2) de M (i.e. $\|M\| = \sup_{|x|=1} |Mx|$). Em particular, F é um operador uniformemente elíptico.

(H3) F possui estimativa *a priori* $C^{2,\alpha}$, isto é, existem constantes $0 < \bar{\alpha} < 1$ e $c_e > 0$ tais que para toda matriz simétrica M com $F(M,0) = 0$ e toda $w_0 \in C(\partial B_1)$, existe $w \in C^2(B_1) \cap C(\bar{B}_1) \cap C^{2,\bar{\alpha}}(B_{1/2})$ que satisfaz

$$\begin{cases} F(D^2 w(x) + M, 0) &= 0 \quad \text{in} \quad B_1 \\ w &= w_0 \quad \text{on} \quad \partial B_1 \end{cases}$$

e

$$\|w\|_{C^{2,\bar{\alpha}}(B_{1/2})} \leq c_e \|w\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Observação 5.1. *No capítulo 8 de [7], os autores consideram a função*

$$\tilde{\beta}(x) = \tilde{\beta}_F(x) = \sup_{M \in \mathcal{S}(N)} \frac{|F(M,x) - F(M,0)|}{\|M\| + 1},$$

a qual mede a oscilação de F em x próximo a origem. Além disso, no Teorema 8.1 de [7] eles assumem a seguinte hipótese para regularidade: Suponha que $0 < \alpha < \bar{\alpha}$, $r_0 > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$,

$$\left(\frac{1}{r^N} \int_{B_r(0)} \tilde{\beta}^N \right)^{1/N} \leq C_1 r_0^{-\alpha} r^\alpha. \tag{5.0.3}$$

No nosso caso

$$\tilde{\beta}(x) \leq \sup_{M \in \mathcal{S}(N) \setminus \{0\}} \frac{|F(M,x) - F(M,0)|}{\|M\|} \leq 2\omega(|x|).$$

Portanto, a condição (5.0.3) *é satisfeita.*

Observação 5.2. *Pelo Teorema 6.6 de [7], qualquer operador $F : \mathcal{S}(N) \times \Omega \to \mathbb{R}$ côncavo (ou convexo) em $\mathcal{S}(N)$ satisfaz a hipótese de estimativa $C^{2,\bar{\alpha}}$.*

5.1 Processo de homogeneização

Nesta seção, estamos interessados em tomar o limite de operadores elípticos de maneira semelhante feita na aproximação para uma função δ_0. Para fazer isso, nós definimos a seguinte notação

Definição 5.1. *Seja $F : \mathcal{S}(n) \times \Omega \to \mathbb{R}$ um operador totalmente não-linear uniformemente elíptico, e defina para cada $\varepsilon > 0$,*

$$F_\varepsilon(M,x) := \varepsilon F\left(\frac{1}{\varepsilon} M, x\right) \quad \forall \quad x \in \Omega.$$

Além disso, defina

$$F^\star(M,x) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} F_\varepsilon(M,x),$$

caso o limite exista.

As próximas proposições mostram propriedades elementares de $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ e $F^\star$. Em particular, mostraremos que $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ possui as mesmas constantes de elipticidade de F, que se F é homogênea então $F^\star$ existe e de fato, $F^\star = F$ e uma espécie de recíproca que se $F^\star$ existe, então ela é positivamente homogênea de grau 1.

Proposição 5.1. *F_ε é uniformemente elíptico com as mesmas constantes de elipticidade de F.*

Demonstração. Para matrizes M, N como acima, temos:

$$\begin{aligned}
F_\varepsilon(M+N,x) - F_\varepsilon(M,x) &= \varepsilon F\left(\frac{1}{\varepsilon}(M+N),x\right) - \varepsilon F\left(\frac{1}{\varepsilon}M,x\right) \\
&= \varepsilon\left[F\left(\frac{1}{\varepsilon}(M+N),x\right) - F\left(\frac{1}{\varepsilon}M,x\right)\right] \\
&\leq \varepsilon\left[\Lambda\left\|\frac{1}{\varepsilon}N^+\right\| - \lambda\left\|\frac{1}{\varepsilon}N^-\right\|\right] \\
&= \Lambda\|N^+\| - \lambda\|N^-\|.
\end{aligned}$$

□

Proposição 5.2. *Suponha que F é homogênea de grau 1 para múltiplos positivos em $\mathcal{S}(n)$, isto é, $F(kM,x) = kF(M,x)$ para todo $k \in \mathbb{R}^+$. Então $F^\star$ existe e, de fato, $F^\star = F$.*

Demonstração. Considere F_ε para todo $\varepsilon > 0$. Usando o fato de que F é homogênea temos:

$$F_\epsilon(M,x) = \varepsilon F\left(\frac{1}{\varepsilon}M,x\right) = F(M,x).$$

Portanto, como isso vale para todo ε temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} F_\varepsilon(M,x) = F^\star(M,x).$$

□

Proposição 5.3. *Se $F^\star$ existe, então $F^\star$ é homogênea de grau 1 para múltiplos positivos*

Demonstração. Seja $M \in \mathcal{S}(n)$ e fixe $\alpha \geq 0$. Como $F_\varepsilon(M,x) \to F^\star(M,x)$ quando $\varepsilon \to 0^+$, segue que

$$F_{\alpha\varepsilon}(M,x) \to F^\star(M,x) \quad \text{quando} \quad \alpha\varepsilon \to 0^+. \tag{5.1.1}$$

Agora, aplicando F_ε em $\frac{M}{\alpha}$, temos:

$$F_\varepsilon\left(\frac{1}{\alpha}M,x\right) \to F^\star\left(\frac{1}{\alpha}M,x\right) \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0^+.$$

Assim,

$$\alpha F_\varepsilon\left(\frac{1}{\alpha}M,x\right) \to \alpha F^\star\left(\frac{1}{\alpha}M,x\right) \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0^+.$$

Agora, observe que:

$$\begin{aligned} \alpha F_\varepsilon\left(\frac{1}{\alpha}M,x\right) &= \alpha\varepsilon F\left(\frac{1}{\alpha\varepsilon}M,x\right) \\ &= F_{\alpha\varepsilon}(M,x) \to \alpha F^\star\left(\frac{1}{\alpha}M,x\right) \quad \text{quando} \quad \alpha\varepsilon \to 0^+ \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

Comparando (5.1.1) e (5.1.2), temos, pela unicidade do limite, que

$$F^\star(M,x) = \alpha F^\star\left(\frac{1}{\alpha}M,x\right).$$

Isto mostra que $F^\star$ é homogênea de grau 1. □

Proposição 5.4. *F e F_ε são continuamente Lipschitz com constante Lipschitz Λ.*

Demonstração. Pela Proposição 5.1, temos que F_ε é uniformemente elíptica com constantes $\lambda \leq \Lambda$. Isto implica que, para duas matrizes simétricas quaisquer M, P,

$$\|F_\varepsilon(M,x) - F_\varepsilon(P,x)\| \leq \Lambda\|M - P\|.$$

De fato, sejam $M, P, Q \in \mathcal{S}(N)$ tais que $M = P + Q$, além disso $\|M - P\| = \|Q\|$. Então,

$$\begin{aligned} F(P+Q,x) - F(P,x) &\leq \Lambda\|Q^+\| - \lambda\|Q^-\| \\ &\leq \Lambda\|Q^+\| \\ &\leq \Lambda\|Q\|. \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} F(P,x) - F(P+Q,x) &= F((P+Q)-Q,x) - F(P+Q,x) \\ &\leq \Lambda\|Q^-\| - \lambda\|Q^+\| \\ &\leq \Lambda\|Q^-\| \\ &\leq \Lambda\|Q\| \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

Por (5.1.3) e (5.1.4), segue que $\|F(M,x) - F(P,x)\| \leq \Lambda\|M-P\|$. $\square$

Proposição 5.5. *Se F é convexa em $\mathcal{S}(N)$, então existe $F^\star$ tal que $F_\varepsilon \to F^\star$ quando $\varepsilon \to 0^+$.*

Demonstração. De fato, fixado $M \in \mathcal{S}(N)$, como F é convexa, $F(\lambda M, x) \leq \lambda F(M,x)$ para todo $\lambda \in [0,1]$. Se $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, então

$$F_{\varepsilon_2}(M,x) = \varepsilon_2 F\left(\frac{1}{\varepsilon_2}M, x\right) = \varepsilon_2 F\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{1}{\varepsilon_1}M, x\right) \leq \varepsilon_1 F\left(\frac{1}{\varepsilon_1}M, x\right) = F_{\varepsilon_1}(M,x).$$

Portanto, a sequência $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ é não-decrescente quando $\varepsilon \to 0^+$. Além disso, o conjunto $\{F_\varepsilon(M,x)\}$ é limitado, pois F é continuamente lipschitz:

$$\|F_\varepsilon(M,x)\| = \|F_\varepsilon(M,x) - F_\varepsilon(0,x)\| \leq K\|M\|.$$

Concluímos que $F_\varepsilon(M,x)$ é uma sequência monótona e limitada e, portanto, convergente. $\square$

Podemos agora enunciar o resultado principal:

Teorema 5.1. *Se $F_\varepsilon(M,x) \to F^\star(M,x)$ pontualmente quando $\varepsilon \to 0^+$, então $F_\varepsilon \to F^\star$ uniformemente em subconjuntos compactos.*

Demonstração. Seja $K \subset \mathcal{S}(N)$ um compacto e $S = \{F_{\varepsilon_n}\}$. Pela Proposição 5.1, temos que S é equicontínua e pontualmente limitada em K. De fato, para toda $M \in \mathcal{S}(N)$ e um dado $\eta > 0$, considere $B_\eta(M) = \{X \in \mathcal{S}(N) : \|X - M\| < \eta\}$. Então, para toda $B \in B_\eta(M)$

$$\|F_\varepsilon(M,x) - F_\varepsilon(B,x)\| \leq \Lambda\|M - B\|,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Isto prova a equicontinuidade, e a mesma desigualdade com $B = 0$ mostra que $\{F_\varepsilon\}$ é pontualmente limitada. Agora, pelo Teorema de Ascoli-Arzelá, toda sequência $\{F_n\} \subset S$ possui subsequência que converge uniformemente em K. Mas convergência uniforme garante convergência pontual, e como $F_n \to F^\star$, o limite de qualquer subsequência ainda deve ser $F^\star$.

Para concluir a prova, devemos mostrar que qualquer sequência $\{F_n\} \subset S$ converge uniformemente para $F^\star$ em K. Seja F_n uma sequência e suponha, por contradição, que ela não converge uniformemente para $F^\star$ em K. Então existe $\eta > 0$, tal que

$$\|F_n - F^\star\| > \eta$$

para todo $\eta > 0$, onde a norma acima é $\|F\| := \sup_{M \in K} \|F(M,x)\|$. Mas $\{F_n\}$ possui subsequência convergente para $F^\star$, e portanto existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$

$$\|F_n - F^\star\| < \eta$$

o que contradiz o fato acima. $\square$

5.1.1 Homogeneização do problema

Iniciaremos a seção discutindo o problema de homogeneização envolvido no problema

$$(E_\varepsilon) \begin{cases} F(D^2u, Du, x) &= \beta_\varepsilon(u) \quad \text{em } \Omega \\ u &= \varphi \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sejam $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ família de soluções minimais do problema (E_ε) e x_0 um ponto interior de Ω. Se definirmos

$$\upsilon_\varepsilon(y) := \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon(x_0 + \varepsilon y),$$

verifica-se, como temos feito anteriormente, que υ_ε satisfaz a seguinte equação elíptica totalmente não-linear

$$F_\varepsilon(D^2\upsilon_\varepsilon, y) = \beta(\upsilon_\varepsilon),$$

onde

$$F_\varepsilon(M,y) = \varepsilon F(\varepsilon^{-1}M, y).$$

Vale a pena observar que F_ε é uma famíla de operadores uniformemente elípticos com mesma constante de elipticidade de F. Nesta seção, estamos interessados em mostrar a existência de um operador elíptico “homogeneizado” $F^\star$, obtido como limite pontual de F_ε quando $\varepsilon \to 0$, isto é

$$F^\star(M,x) = \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(M,x).$$

Ressaltamos que esse limite pode deixar de existir para alguns operadores elipticos, como mostra um exemplo simples em 1D. Veremos ainda que esse limite sempre existe para uma classe muito especial de operadores elípticos totalmente não-lineares. De fato, vamos olhar um pouco mais atentamente para a hipótese, a qual assumiremos a partir de agora, de que para cada $i, j = 1, \ldots, N$,

$$\exists \lim_{\|M\|\to\infty} F_{ij}(M, x) := F^{\star}_{ij}(x). \tag{5.1.5}$$

Aqui $F_{ij}(M, x) = \frac{\partial F}{\partial m_{ij}}(M, x)$. A próxima proposição desempenha um papel fundamental no que diz respeito à condição de fronteira livre que será estabelecida. Vamos agora listar algumas propriedades dos operadores elípticos totalmente não-linear que satisfazem a hipótese (5.1.5).

Proposição 5.6. *Seja $F(M, x)$ um operador elíptico. As seguintes afirmações são válidas:*

(i) Se $F^{\star}(M, x) = \lim_{\varepsilon\to 0} F_{\varepsilon}(M, x)$ existe, então $F^{\star}$ é homogênea de grau um para um múltiplo positivo. Além disso, a convergência é uniforme em qualquer subconjunto compacto de $\mathcal{S}(N)$.

(ii) Sob a hipótese (5.1.5)*, o limite $F^{\star}(M, x) = \lim_{\varepsilon\to 0} F_{\varepsilon}(M, x)$ existe e*

$$F^{\star}(M, x) = \mathrm{tr}(F^{\star}_{ij}(x)M).$$

(iii) Se F é convexo ou côncavo,a condição (5.1.5) *é satisfeita.*

Demonstração. Com efeito, (i) segue da Proposição 5.3 e do Teorema 5.1. A propriedade (ii) segue do teorema da convergência dominada. De fato, se

$$\lim_{\|M\|\to\infty} F_{ij}(M, x) = F^{\star}_{ij}(x)$$

então,

$$\begin{aligned} F_{\varepsilon}(M, x) &= \varepsilon F\left(\frac{M}{\varepsilon}, x\right) = \varepsilon \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{d}{dt} F(tM, x) dt \\ &= \varepsilon \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \sum_{i,j=1}^{N} F_{ij}(tM, x)\, m_{ij} dt = \int_0^1 \sum_{i,j=1}^{N} F_{ij}\left(\frac{zM}{\varepsilon}, x\right) m_{ij} dz. \end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, temos que, para cada $i, j = 1, \ldots N$

$$\int_0^1 F_{ij}\left(\frac{zM}{\varepsilon}, x\right) m_{ij} dz \to \int_0^1 F^{\star}_{ij}(x)\, m_{ij} dt.$$

Portanto,

$$F^{\star}(M, x) = \sum_{i,j=1}^{N} \int_0^1 F^{\star}_{ij}(x)\, m_{ij} = \mathrm{tr}(F^{\star}_{ij}(x)M).$$

Finalmente, se F é convexo (ou côncavo), então D^2F deve ir a zero quando $|M| \to \infty$, pois DF é limitada . O resultado segue por considerações clássicas. $\square$

5.1.2 Controle pontual de soluções minimais

Para a prova do teorema principal do trabalho, necessitamos de alguns resultados que conectam a questão da homogeneização com o nosso problema de fronteira livre quando $\varepsilon \to 0$. Heuristicamente, o operador governado sente a oscilação próximo à fronteira livre e passa por um processo de homogeneização. O próximo resultado foi o ponto chave para o desenvolvimento dessa conexão. Necessitamos de um fino controle assintótico pontual de soluções minimais sobre pontos da fronteira livre.

Lema 5.1. *Sejam u_ε uma família de soluções minimais para a equação (E_ε), u_0 seu limite uniforme e x_0 um ponto da fronteira livre, isto é, $x_0 \in \partial\{u_0 > 0\} \cap \Omega$. Então*

$$\beta_\varepsilon(u_\varepsilon(x_0)) \to +\infty, \tag{5.1.6}$$

quando $\varepsilon \to 0$. Mais precisamente, temos o seguinte controle pontual: existem constantes universais $0 < \tau_1 \leq \tau_2 < 1$ de modo que

$$\tau_1 \leq \frac{u_\varepsilon(x_0)}{\varepsilon} \leq \tau_2,$$

para $\varepsilon \ll 1$.

Demonstração. Vamos inicialmente verificar que

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{u_\varepsilon(x_0)}{\varepsilon} \geq \tau_1 > 0. \tag{5.1.7}$$

Para isto, suponha por contradição que, $\frac{u_\varepsilon(x_0)}{\varepsilon} = \mathrm{o}(1)$, quando $\varepsilon \to 0$. Defina $v_\varepsilon \colon B_1 \to \mathbb{R}$ como

$$v_\varepsilon(Y) := \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon(\varepsilon Y + x_0).$$

Por hipótese de contradição

$$v_\varepsilon(0) = \mathrm{o}(1). \tag{5.1.8}$$

Pela não-degenerescência, para todo $r > 0$, vale

$$\sup_{B_r} v_\varepsilon \geq cr,$$

para uma constante universal $c > 0$. Em particular,

$$|\nabla v_\varepsilon(0)| = |\nabla u_\varepsilon(x_0)| \geq c > 0. \tag{5.1.9}$$

Por definição de v_ε, verificamos que

$$F_\varepsilon(D^2 v_\varepsilon, Y) = \beta(v_\varepsilon),$$

onde $F_\varepsilon(M, Y) := \varepsilon F(\varepsilon^{-1}M, x_0 + \varepsilon Y)$. Pela desigualdade de Harnack,

$$v_\varepsilon(Y) \leq C, \quad \text{in } B_{1/2}.$$

Agora a teoria de regularidade $W^{2,p}$ de Caffarelli assegura que, a menos de subsequência, $v_\varepsilon \to V$ na topologia $C^{1,\alpha}$, para todo $\alpha < 1$. Em particular, de (5.1.9) temos

$$|\nabla V(0)| = |\nabla v_\varepsilon(0)| + \mathrm{o}(1) > 0. \tag{5.1.10}$$

Contudo, $V \geq 0$ em B_1 e de (5.1.8), $V(0) = 0$, isto é, 0 é um ponto de mínimo interior para V, portanto

$$\nabla V(0) = 0,$$

o que contradiz a não-degenerescência declarada em (5.1.10).

Vamos agora voltar nossa atenção para a estimativa por cima. Inicialmente, vamos verificar que, para qualquer ponto da fronteira livre ξ, vale

$$u_\varepsilon(\xi) \leq \varepsilon, \tag{5.1.11}$$

para $\varepsilon \ll 1$. Vamos provar que para todo $\delta > 0$ fixado,

$$\inf_{B_\delta(\xi)} u_\varepsilon < \varepsilon. \tag{5.1.12}$$

A estimativa (5.1.11) segue de (5.1.12) e da continuidade uniforme de u_ε. Para mostrar (5.1.12) vamos assumir por contradição que $u_\varepsilon \geq \varepsilon$ em $B_\delta(\xi)$. Se assim for, teríamos

$$F(D^2 u_\varepsilon, x) = 0 \quad \text{in } B_\delta(\xi).$$

Pela não-degenerescência, existiria um ponto $Y_\varepsilon \in B_{\delta/4}(x_0)$ tal que

$$u_\varepsilon(Y_\varepsilon) \geq c\delta.$$

Pela convergência uniforme $u_\varepsilon \to u_0$ (note $u_0(\xi) = 0$) e desigualdade de Harnack,

$$\mathrm{o}(1) = u_\varepsilon(\xi) \geq c'\delta,$$

que levaria a uma contradição, se $\varepsilon \ll 1$.

Agora, vamos considerar novamente a sequência blow-up $v_\varepsilon \colon B_1 \to \mathbb{R}$ como

$$v_\varepsilon(Y) := \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon(\varepsilon Y + x_0).$$

Como argumentado antes, $v_\varepsilon \to V$ na topologia $C^{1,\alpha}$, e

$$F^\star(D^2 V, x) = \beta(V), \quad \text{in } B_1. \tag{5.1.13}$$

Pela regularidade Lipschitz e (5.1.11), obtemos que $u_\varepsilon(\varepsilon Y + x_0) \leq \mathrm{O}(\varepsilon)$. Se aplicarmos os mesmos argumentos acima para os pontos $\varepsilon Y + x_0$, concluímos que

$$V(Y) \leq 1, \quad \text{in } B_1. \tag{5.1.14}$$

Se $V(0) = 1$, V atingiria seu ponto máximo no interior. Como V satisfaz (5.1.13), conclui-se do princípio do máximo que

$$V \equiv 1,$$

e, novamente, contradiz a não-degenerescência, como

$$0 < c \leq |\nabla v_\varepsilon(0)| = |\nabla V(0)| + \mathrm{o}(1).$$

Isto finaliza a prova. Portanto, devemos ter $V(0) < 1$ e para $\varepsilon \ll 1$, $\frac{u_\varepsilon(x_0)}{\varepsilon} \leq \tau_2 < 1$. □

Estamos agora em condições de estabelecer o principal resultado acerca da condição de fronteira livre. Como veremos na próxima seção, uma tal condição de fronteira livre deverá ser forte suficiente para assegurar suavidade da fronteira livre. Antes faremos uma observação útil para o desenvolvimento do trabalho.

Observação 5.3 (Regularidade)**.** *Seja $F(M, x)$ satisfazendo as condições $(H1), (H2)$ e $(H3)$. Então, $F(D^2 u_0, x) = 0$ em Ω_0 no sentido clássico. De fato, seja $y_0 \in \Omega_0$ satisfazendo $u_0(y_0) = \delta > 0$. Como u_0 é contínua, $u_0 \geq \frac{\delta}{2} \geq \varepsilon$ em $B = B_\rho(y_0) \Subset \Omega_0$. Desta forma,*

$$F(D^2 u_\varepsilon, x) = 0 \quad \text{em} \quad B.$$

Pela regularidade $C^{2,\alpha}$ de Caffarelli, $\|u_\varepsilon\|_{C^{2,\alpha}(B)} \leq C$, onde C independe de ε. Segue daí, que, a menos de subsequência, $D^2 u_\varepsilon \to D^2 u_0$ uniformemente em B e, portanto,

$$F(D^2 u_0, x) = 0 \quad \text{em} \quad B.$$

Isto conclui a observação.

Lema 5.2. *Suponha F satisfazendo $(H1)$, $(H2)$, $(H3)$ e (5.1.5). Seja a_{ij}^{ε} uma família de matrizes uniformenete elípticas*

$$a_{ij}^{\varepsilon}(x) := \int_0^1 F_{ij}(tD^2u_{\varepsilon}(x), x)dt,$$

onde u_{ε} são soluções minimais para a equação (E_{ε}). Então a matriz $a_{ij}^{\varepsilon}(x)$ converge, pontualmente, para uma matriz uniformemente elíptica $b_{ij}(x)$, com

$$b_{ij}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 F_{ij}(tD^2u_0(x), x)dt & \textit{se} \quad x \in \Omega_0 \\ F_{ij}^{\star}(x) & \textit{se} \quad x \in \mathfrak{F}(u_0), \end{cases}$$

onde $\Omega_0 = \{u_0 > 0\}$ e $\mathfrak{F}(u_0)$ é a fronteira livre. Além disso, a convergência em Ω_0 vale na topologia C^1_{loc}.

Demonstração. Seja y_0 um ponto arbitrário no conjunto de positividade Ω_0, digamos $u_0(y_0) = \delta > 0$. Pela continuidade Lipschitz, existe um $\rho > 0$ pequeno tal que para $\varepsilon \ll 1$,

$$\inf_{B_\rho(y_0)} u_{\varepsilon} > \frac{\delta}{3} \gg \varepsilon.$$

Em particular,

$$F(D^2u_{\varepsilon}, x) = 0 \quad \text{em } B_\rho(y_0).$$

Como F satisfaz $(H1)$, $(H2)$ e $(H3)$, por estimativa *a priori* $C^{2,\alpha}$, podemos assegurar, da teoria clássica de regularidade de Schauder, que D^3u_{ε} converge uniformemente para D^3u_0 em $B_\rho(y_0)$ e, portanto,

$$a_{ij}^{\varepsilon}(x) := \int_0^1 F_{ij}(tD^2u_{\varepsilon}(x), x)dt \to \int_0^1 F_{ij}(tD^2u_0(x), x)dt$$

localmente na topologia $C^1(\Omega_0)$.

Vejamos agora o que ocorre com a convergência ao longo da fronteira livre. Para isto, seja x_0 um ponto arbitrário da fronteira livre. Do Lema 5.1 e elipticidade, temos a estimativa

$$\left\|D^2u_{\varepsilon}(x_0)\right\| \geq \left\|\left[D^2u_{\varepsilon}(x_0)\right]^+\right\| \geq \frac{1}{\Lambda}F(x_0, D^2u_{\varepsilon}(x_0)) \sim \beta_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}(x_0)) \to +\infty. \quad (5.1.15)$$

Portanto, para todo $0 < t \leq 1$, $\|tD^2u_{\varepsilon}(x_0)\| \to +\infty$. Usando a hipótese (5.1.5) e o teorema da convergência dominada, obtemos

$$a_{ij}^{\varepsilon}(x) := \int_0^1 F_{ij}(tD^2u_{\varepsilon}(x), x)dt \to \int_0^1 F_{ij}^{\star}(x)dt = F_{ij}^{\star}(x).$$

A prova do lema está completada. □

Observação 5.4. *Como vimos, operadores convexos ou côncavos satisfazem a condição* (5.1.5)*. Portanto, tais operadores constituem uma classe de exemplos para a teoria a ser desenvolvida.*

Para justificar ainda mais nossa abordagem, ressaltamos que se u_ε resolve

$$F(D^2u_\varepsilon, x) = \beta_\varepsilon(u_\varepsilon),$$

então podemos escrever

$$\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) = F(D^2u_\varepsilon, x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}F(tD^2u_\varepsilon(x), x)dt = a_{ij}^\varepsilon(x)D_{ij}u_\varepsilon =: \mathrm{L}^\varepsilon u_\varepsilon. \qquad (5.1.16)$$

isto é, uma solução para $F(x, D^2u_\varepsilon) = \beta_\varepsilon(u_\varepsilon)$ satisfaz $\mathrm{L}^\varepsilon u_\varepsilon = \beta_\varepsilon(u^\varepsilon)$. Em geral, as matrizes a_{ij} são meramente limitadas, mensuráveis e elípticas, nenhuma suavidade adicional dos coeficientes pode ser assegurada em ε. Contudo, usando as hipóteses $(H1)$, $(H2)$, $(H3)$ e a teoria de regularidade (veja [7]), obtemos mais regularidade nos coeficientes. O sucesso da teoria que aqui apresentamos baseia-se no fato de que, ao longo da fronteira livre, as matrizes a_{ij}^ε se aproximam de um operador elíptico Hölder contínuo. Lembramos que queremos utilizar a condição de fronteira livre no sentido da viscosidade de Caffarelli para dar uma interpretação de solução fraca para nosso problema de fronteira livre. A grande vantagem dessa teoria baseia-se em seu caráter não-variacional, portanto, é apropriado para os nossos propósitos. Lembre-se que o principal resultado deste trabalho é mostrar que o limite uniforme u_0 das soluções minimais u_ε possui o seguinte desenvolvimento assintótico:

$$u_0(x) = \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^\star(\nu\otimes\nu, x_0)}}\langle x - x_0, \nu\rangle^+ + \mathrm{o}(|x - x_0|),$$

próximo a um ponto da fronteira livre $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0)$. Aqui ν é a normal unitária a $\partial B_\rho(y_0)$ apontando para dentro de $\Omega_0 := \{u_0 > 0\}$, e $B_\rho(y_0) \subset \Omega_0$, $B_\rho(y_0) \cap \mathfrak{F}(u_0) = \{x_0\}$. De acordo com a teoria de viscosidade de Caffarelli (veja Seção 6.1), tal desenvolvimento assintótico só precisa ser verificado para pontos regulares da fronteira livre, isto é, pontos na fronteira livre que pode tocar a bola por dentro de Ω_0. O operador $F^\star$ é dado pelo limite assintótico

$$F^\star(M, x) := \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon F(\varepsilon^{-1}M, x).$$

Agora observe que, por linearização, $F^\star(\nu\otimes\nu, x_0)(x) = \mathrm{tr}(b_{ij}(x_0)\nu_i\nu_j)$, onde a matriz b_{ij} é dada como no Lema 5.2.

Para finalizarmos nossos comentários, notemos que em qualquer parte C^1 da fronteira livre, temos

$$F^\star(\nu \otimes \nu, x_0) = F^\star\left(\frac{\nabla u_0}{|\nabla u_0|} \otimes \frac{\nabla u_0}{|\nabla u_0|}, x_0\right) \quad = \quad \frac{1}{|\nabla u_0|^2} F^\star(\nabla u_0 \otimes \nabla u_0, x_0)$$

Portanto, ao longo de uma parte suave da fronteira livre, teremos

$$F^\star(\nabla u_0 \otimes \nabla u_0, x_0) = |\nabla u_0|^2 \langle \mathrm{B}(x_0)\nu, \nu\rangle.$$

e o problema de fronteira livre (5.0.2) pode ser representado como

$$\left\{\begin{array}{rcll} F(D^2 u_0, x) & = & 0 & \text{em} \quad \{u_0 > 0\} \cap \Omega \\ u_0 & = & \varphi & \text{em} \quad \partial\Omega \\ |\nabla u_0|^2 & = & \frac{2\mathrm{T}}{\langle \mathrm{B}(z)\nu, \nu\rangle} & \text{em} \quad \partial\{u_0 > 0\} \cap \Omega. \end{array}\right. \tag{5.1.17}$$

5.2 Resultados técnicos de convergência

Nesta seção, iremos incorporar os principais instrumentos técnicos de que precisamos para nossa análise assintótica. A seguir, F será um operador côncavo, u_ε denota a família de soluções minimais para (E_ε) e u_0 seu limite uniforme.

Lema 5.3. *Seja F satisfazendo $(H1)$, $(H2)$ e $(H3)$. Para qualquer subconjunto fixado $\Omega' \Subset \Omega$, $u_\varepsilon \to u_0$ forte em $H^1(\Omega')$.*

Demonstração. Fixe um subconjunto $\Omega' \Subset \Omega$. Com a notação acima, segue de (5.1.16) que cada u_ε satisfaz

$$\mathrm{L}^\varepsilon u_\varepsilon = a_{ij}^\varepsilon(x) D_{ij} u_\varepsilon = \beta_\varepsilon(u_\varepsilon). \tag{5.2.1}$$

Pela regularidade Lipschitz, a menos de subsequência, u_ε converge fraco para u_0 em $H^1(\Omega')$. Para notação conveniente, vamos escrever v para representar u_ε. Vamos mostrar que

$$\ell := \limsup_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{\Omega'} a_{ij}^\varepsilon(x) \cdot [\nabla v \otimes \nabla v]\, dx\right) \leq \int_{\Omega'} b_{ij}(x) \cdot [\nabla u_0 \otimes \nabla u_0]\, dx. \tag{5.2.2}$$

Multiplicando a equação (5.2.1) por v, integrando sobre Ω' e usando o fato de que o produto $v\beta_\varepsilon \geq 0$, ficamos com

$$0 \leq \int_{\Omega'} a_{ij}^\varepsilon v\, v_{ij} dx = \int_{\partial\Omega'} v a_{ij}^\varepsilon v_i \eta_j d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\Omega'} D_j(a_{ij}^\varepsilon v) v_i dx,$$

de onde obtemos a seguinte estimativa

$$\int_{\Omega'} a^{\varepsilon}_{ij} v_i v_j dx \leq \int_{\partial\Omega'} v a^{\varepsilon}_{ij} v_i \eta_j d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\Omega'} v D_j(a^{\varepsilon}_{ij}) v_i dx,$$

onde η_j denota o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega'$, o qual podemos assumir ser suave. Fazendo $\varepsilon \to 0$, vemos que o lado direito converge para

$$\mathcal{I} := \int_{\partial\Omega' \cap \{u_0 > 0\}} u_0 b_{ij}(x)(u_0)_i \eta_j d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\Omega' \cap \{u_0 > 0\}} u_0 D_j(b_{ij}(x)) D_i u_0 dx. \qquad (5.2.3)$$

Agora, para todo $\delta > 0$ fixado, seja $u^{\delta} := \max\{u_0 - \delta, 0\}$. Combinando o Teorema de Green e o fato de que $\mathrm{L}^0 u_0 := \mathrm{tr}(b_{ij}(x) D_{ij} u_0) = 0$ sobre $\Omega_0 := \{u_0 > 0\}$ (veja Observação 5.5), concluímos que

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\Omega' \cap \{u_0 > \delta\}} u^{\delta} \mathrm{L}^0 u_0 \, dx &= \int_{\partial\Omega' \cap \{u_0 > \delta\}} u^{\delta} b_{ij}(u_0)_i \eta_j \, dS - \int_{\Omega' \cap \{u_0 > \delta\}} b_{ij}(u_0)_i (u_0)_j \, dx \\ &- \int_{\Omega' \cap \{u_0 > \delta\}} u^{\delta} D_j(b_{ij})(u_0)_i \, dx. \end{aligned}$$

Fazendo $\delta \to 0$ achamos

$$\int_{\Omega' \cap \{u_0 > 0\}} b_{ij}(x)(u_0)_i (u_0)_j dx = \mathcal{I},$$

e (5.2.2) está verificada. Claramente, do Lemma 5.2 e da regularidade Lipschitz,

$$\int_{\Omega'} \left(a^{\varepsilon}_{ij}(x) - b_{ij}(x)\right) \nabla u_{\varepsilon}(x) \otimes \nabla u_{\varepsilon}(x) dx = \mathrm{o}(1). \qquad (5.2.4)$$

Finalmente, combinando (5.2.2) e (5.2.4) concluímos

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{\Omega'} b_{ij}(x) \cdot [\nabla u_{\varepsilon}(x) \otimes \nabla u_{\varepsilon}(x)] \, dx \right) \leq \int_{\Omega'} b_{ij}(x) \cdot [\nabla u_0(x) \otimes \nabla u_0(x)] \, dx.$$

Elipticidade dos b_{ij} e considerações de análise funcional clássicas finalmente implicam

$$u_{\varepsilon} \to u$$

forte em $H^1(\Omega')$ e o lema está provado. $\square$

Observação 5.5. *Pela Observação 5.3 e F nas hipóteses do lema acima, segue que u_0 é solução de* $\operatorname{tr}(b_{ij}(x)D^2u_0) = 0$ *em* $\{u_0 > 0\}$. *De fato,*

$$\begin{aligned} 0 = F(D^2u_0, x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}[F(tD^2u_0, x)]dt &= \sum_{i,j}\left(\int_0^1 F_{ij}(tD^2u_0, x)dt\right)D_{ij}u_0 \\ &= \operatorname{tr}(b_{ij}(x)D^2u_0). \end{aligned}$$

Nosso próximo lema estabelece convergências do blow-Up. A prova é clássica, sendo apresentada a seguir

Lema 5.4. *Seja $\{u_{\varepsilon_j}\}$ família de soluções do problema (E_ε) em Ω tal que $u_{\varepsilon_j} \to u_0$ uniformemente em subconjuntos compactos de Ω e $\varepsilon_j \to 0$. Sejam $x_0, x_n \in \Omega \cap \partial\{u_0 > 0\}$ pontos da fronteira livre com $x_n \to x_0$ quando $n \to \infty$. Para toda sequência positiva $\lambda_n \to 0$, defina*

$$(u_0)_{\lambda_n}(x) := \frac{1}{\lambda_n}u_0(x_n + \lambda_n x) \quad \textit{and} \quad (u_{\varepsilon_j})_{\lambda_n}(x) := \frac{1}{\lambda_n}u_{\varepsilon_j}(x_n + \lambda_n x).$$

Suponha $(u_0)_{\lambda_n} \to U$ quando $n \to \infty$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$. Então, existe $j(n) \to \infty$ tal que para todo $j_n \geq j(n)$ vale que $\varepsilon_{j_n}\lambda_n^{-1} \to 0$ e

1. *$(u_\varepsilon)_{\lambda_n} \to U$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$;*
2. *$\nabla(u_\varepsilon)_{\lambda_n} \to \nabla U$ em $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$;*
3. *$\nabla(u_0)_{\lambda_n} \to \nabla U$ em $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Para simplificar vamos assumir que $x_n = x_0$. A prova no caso geral é análoga. Vamos achar a sequência $j(n)$. Temos que

$$\begin{aligned} (u^{\epsilon_{j_n}})(x) - U(x) &= \left(\frac{1}{\lambda_n}u^{\epsilon_j}(x_0 + \lambda_n x) - \frac{1}{\lambda_n}u(x_0 + \lambda_n x)\right) + (u_{\lambda_n}(x) - U(x)) \\ &= I + II \end{aligned}$$

Fixe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \Subset \Omega$. Seja $k > 0$ fixado e $\delta > 0$ arbitrária. Temos inicialmente que $|II| < \delta$ em $B_k(0)$ se $n \geq n(k, \delta)$. Vamos limitar

$$|I| = \left|\frac{1}{\lambda_n}[u^{\epsilon_{j_n}}(x_0 + \lambda_n x) - u(x_0 + \lambda_n x)]\right|.$$

Para cada n, existe $j(n)$ tal que se $j \geq j(n)$,

$$|(u^{\epsilon_{j_n}})(x) - u(x)| \leq \frac{\lambda_n}{n} \quad \text{para} \quad x \in B_r(x_0).$$

Portanto, se $j \geq j(n)$ com n grande de modo que $\lambda_n \leq \frac{r}{k}$, então,

$$|I| \leq \frac{1}{n} \quad \text{para} \quad x \in B_k(0).$$

portanto, se $j \geq j(n)$ e n grande,

$$|(u^{\epsilon_{j_n}})_{\lambda_n}(x) - U(x)| < \delta + \frac{1}{n} \quad \text{para} \quad x \in B_k(0).$$

Portanto, se $j_n \geq j(n)$, então $(u^{\epsilon_{j_n}})_{\lambda_n} \to U$ uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$, e o item (1) está provado.

Para provar (2), observe que $(u^{\epsilon_{j_n}})_{\lambda_n}$ são soluções de $(E_{\frac{\epsilon_j}{\lambda_n}})$ em B_k, onde k é um número positivo fixado. Pelo Lema 5.3, existe subsequencia, a qual vamos denotar por j_n, tal que $\nabla(u^{\epsilon_{j_n}})_{\lambda_n} \to \nabla U$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Para (3), seja $\delta > 0$ e considere

$$|\nabla u_{\lambda_n} - \nabla U|_{L^2(B_k)} \leq |\nabla u_{\lambda_n} - \nabla(u^{\epsilon_j})_{\lambda_n}|_{L^2(B_k)} + |\nabla(u^{\epsilon_j})_{\lambda_n} - \nabla U|_{L^2(B_k)} = I + II.$$

Por (2), temos que $II < \delta$ se $j \geq j_n$ e n suficientemente grande. Além disso, em virtude do Lema 5.3 vale:

$$I^2 = \int_{B_k} |\nabla u - \nabla u^{\epsilon_j}|^2(x_0 + \lambda_n x)dx = \frac{1}{\lambda_n^N} \int_{B_{\lambda_n k}(x_0)} |\nabla u - \nabla u^{\epsilon_j}|^2(x)\, dx < \delta^2$$

se j e n forem suficientemente grandes. Isto prova (3). $\square$

Em seguida, provaremos um resultado de convergência para

$$B_\varepsilon(u_\varepsilon) := \int_0^{u_\varepsilon} \beta_\varepsilon(s)ds = \int_0^{u_\varepsilon/\varepsilon} \beta(s)ds$$

dentro da fase zero.

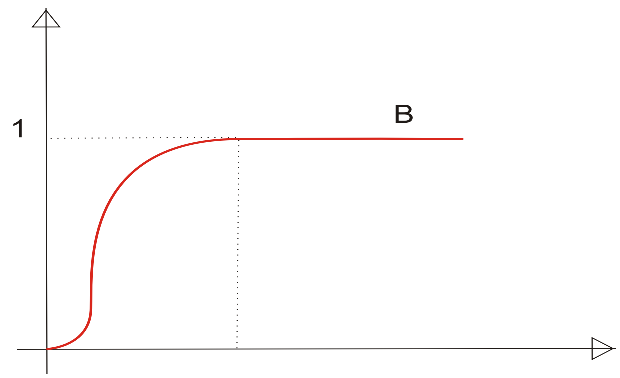


Figura 5.1: Gráfico

Lema 5.5. *Seja u_ε família de soluções minimais do problema (E_ε) e suponha que u_ε converge para v em $H^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Seja $\sigma \subset \Omega$ uma hipersuperfície suave (conexa) contendo 0, onde v se anula, e tal que em B_r, v é positiva de uma lado de σ, e zero do outro lado. Sejam $G = B_r \cap \{v > 0\}$ e $B_\varepsilon(u_\varepsilon) \to M(x)$ fraco em $L^2(B_r)$. Então,*

$$M(x) = \mathrm{T}\chi_{\{v>0\}} + \bar{\mathrm{T}}\chi_{\{v<0\}},$$

onde $\bar{\mathrm{T}} \in \{0, \mathrm{T}\}$.

Demonstração. Seja $\Psi \in C_c^\infty(\Omega)$ (vamos escrever u para u_ε e $a^\varepsilon_{ij}(x)$ para $a_{ij}(x)$). Além disso, iremos omitir os índices do somatório). Multiplicando a equação (E_ε) por $\partial_k u\Psi$ e integrando, obtemos

$$\int_\Omega (\Psi\partial_k u a_{ij}\partial_{ij}u)\, dx = \int_\Omega \Psi\partial_k u\zeta_\varepsilon(u)dx = -\int_\Omega \partial_k\Psi B_\varepsilon(u)dx.$$

Aplicando o Teorema de Green no lado direito da expressão acima obtemos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Psi a_{ij}(x)\partial_i u\partial_{jk}u\, dx \quad &- \quad \int_\Omega (\partial_j\Psi)a_{ij}(x)\partial_i u\partial_k u\, dx - \int_\Omega \Psi\partial_j(a_{ij})\partial_i u\partial_k u dx \\ &= \quad -\int_\Omega \partial_k\Psi B_\varepsilon(u)\, dx \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Da simetria assegurada por (5.0.1), $a_{ij} = a_{ji}$; portanto

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega a_{ij}(x)\partial_i u \partial_{jk} u \Psi dx &= -\frac{1}{2}\int_\Omega (a_{ij}(x)\partial_{ik} u \partial_j u \Psi + a_{ij}(x)\partial_{kj} u \partial_i u \Psi)\, dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega a_{ij}(x)\partial_k(\partial_i u \partial_j u)\Psi dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_k(\Psi a_{ij}(x))\partial_i u \partial_j u\, dx \\
&= \int_\Omega \frac{1}{2}\left(a_{ij}(x)\partial_i u \partial_j u \partial_k \Psi + \partial_k a_{ij}(x)\partial_i u \partial_j u \Psi\right). \quad (5.2.6)
\end{aligned}$$

Substituindo (5.2.6) em (5.2.5), achamos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\frac{1}{2}a_{ij}(x)\partial_i u \partial_j u \partial_k \Psi &+ \frac{1}{2}\partial_k(a_{ij}(x))\partial_i u \partial_j u \Psi - a_{ij}(x)\partial_i u \partial_k u \partial_j \Psi \\
&- \partial_j a_{ij}(x)\partial_i u \partial_k u \Psi)dx = -\int_\Omega B_\varepsilon(u)\partial_k \Psi dx. \quad (5.2.7)
\end{aligned}$$

Quando $\varepsilon \to 0$, a menos de subsequência, podemos supor que $B_\varepsilon(u) \rightharpoonup M(x)$ fraco em $L^2(B_r)$, $0 \leq M(x) \leq \mathrm{T}$. Usando o fato de que $B_\varepsilon(u_\varepsilon) = \mathrm{T}$ para $u_\varepsilon \geq \varepsilon$, temos que $M(x) = \mathrm{T}$ em G. Agora, fazendo $\varepsilon \to 0$ e usando $u_\varepsilon \to v$ em $H^1(B_r)$ e $a_{ij}(x) \to b_{ij}(x)$ pontualmente, teremos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\frac{1}{2}b_{ij}(x)\partial_i v \partial_j v \partial_k \Psi &+ \frac{1}{2}\partial_k b_{ij}(x)\partial_i v \partial_j v \Psi - b_{ij}(x)\partial_i v \partial_k v \partial_j \Psi \\
&- \partial_j b_{ij}(x)\partial_i v \partial_k v \Psi)dx = -\int_\Omega M(x)\partial_k \Psi dx. \quad (5.2.8)
\end{aligned}$$

Usando novamente o Teorema de Green e o fato de que $\mathrm{tr}(b_{ij}(x)D^2 v) = 0$ em $\{v > 0\}$, achamos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{B\cap\{v>0\}} \Psi v_k b_{ij} v_{ij}\, dx = \int_{\sigma\cap B}\left(\Psi v_k b_{ij} v_i \eta_j - \frac{1}{2}\Psi v_i v_j \eta_k\right) dS \\
&+ \text{ Lado esquerdo de (5.2.8)} \quad (5.2.9)
\end{aligned}$$

Agora em σ, onde $v = 0$ temos, como $v > 0$ em G,

$$v_i = -\nu_i |\nabla v|.$$

Portanto, de (5.2.8) e (5.2.9) conclui-se que

$$\frac{1}{2}\int_{B\cap\{v>0\}} \Psi b_{ij}\nu_i\nu_j|\nabla v|^2\nu_k\, dS = \int_B M(x)\Psi_k\, dx. \tag{5.2.10}$$

Em (5.2.10), se tomarmos Ψ para ser suportado no interior de $B_r \setminus G$, então, para $k = 1, \dots, N$

$$\int_{B_r\setminus G} M(x)\Psi_k = 0,$$

e, portanto, $\nabla M(x) \equiv 0$ em $\mathcal{D}'(B_r \setminus G)$. Concluímos, assim, que existe $\bar{\mathrm{T}} \in [0, \mathrm{T}]$ tal que $M(x) = \bar{\mathrm{T}}$ em $B_r \setminus G$. Para finalizar, vamos mostrar a seguinte afirmação:

Afirmação 2. *Nas condições acima,* $\bar{\mathrm{T}} \in \{0, \mathrm{T}\}$.

De fato, argumentamos como segue: mostraremos que para todo $x_0 \in \{u_0 \equiv 0\}^\circ$

$$B_\varepsilon(u_\varepsilon(x_0)) \to 0 \quad (\text{ou} \quad \mathrm{T}).$$

e, portanto, por unicidade, $\bar{\mathrm{T}} \in \{0, \mathrm{T}\}$. Com efeito, pelo Teorema 4.3-(a) $\Omega_\varepsilon \to \Omega_0$ na métrica Hausdorff, isto é, dado $\delta > 0$, para ε suficientemente pequeno,

$$\Omega_\varepsilon \subset \mathcal{N}_\delta(\Omega_0)$$

e

$$\Omega_0 \subset \mathcal{N}_\delta(\Omega_\varepsilon)$$

Com isso, se $x_0 \in \{v \equiv 0\}^\circ$, então existe $\delta > 0$ tal que $x_0 \notin \mathcal{N}_\delta(\Omega_\varepsilon)$. Portanto, $u_\varepsilon(x_0) \leq \varepsilon$. Defina $v_\varepsilon : B_1 \to \mathbb{R}$ como

$$v_\varepsilon(y) := \frac{1}{\varepsilon}u_\varepsilon(x_0 + \varepsilon y).$$

Então, para $\varepsilon \ll 1$, $x_0 + \varepsilon y \in \{v \equiv 0\}^\circ$. Portanto, $v_\varepsilon(y) \leq 1$ em B_1, $v_\varepsilon \to V$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$, $0 \leq V \leq 1$ e $F_\varepsilon(D^2v_\varepsilon, x) = \beta(v_\varepsilon)$ em B_1. Pela teoria de regularidade $C^{1,\alpha}$ de Caffarelli, a menos de subsequência, $v_\varepsilon \to V$ na topologia $C^{1,\alpha}$ para todo $\alpha < 1$ e

$$F^\star(D^2V, x) = \beta(V) \quad \text{em} \quad B_1. \tag{5.2.11}$$

Em particular, $\nabla v_\varepsilon(y) \to \nabla V(y)$. Por outro lado, pelo Lema 5.4,

$$\nabla v_\varepsilon(y) = \nabla u_\varepsilon(x_0 + \varepsilon y) \to 0 \quad \text{em} \quad L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$$

Segue que $V = C$ para alguma constante $C \geq 0$. Além disso, por (5.2.11), $\zeta(V) = 0$ e, portanto, $V \equiv 0$ ou $V \equiv 1$. Se $V \equiv 1$, teríamos $\frac{u_\varepsilon(x_0)}{\varepsilon} \to 1$ e

$$B_\varepsilon(u_\varepsilon(x_0)) = \int_0^{\frac{u_\varepsilon(x_0)}{\varepsilon}} \beta(s)ds \to \mathrm{T}.$$

Neste caso, teremos $\bar{\mathrm{T}} = \mathrm{T}$. Agora, se $V \equiv 0$, teríamos $\frac{u_\varepsilon(x_0)}{\varepsilon} \to 0$ e, como consequência,

$$B_\varepsilon(u_\varepsilon(x_0)) = \int_0^{\frac{u_\varepsilon(x_0)}{\varepsilon}} \beta(s)ds \to 0.$$

Neste caso, $\bar{\mathrm{T}} = 0$. Assim fica provado o lema. □

Em seguida, vamos estimar a inclinação das soluções de um lado de um hiperplano. Mais precisamente, vamos mostrar que no caso da fase negativa ser degenerada, a inclinação da parte positiva é, no máximo, o valor determinado pela esperada condição de fronteira livre.

Proposição 5.7. *Seja u_ε família de soluções minimais de (E_ε) num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que u_ε converge uniformemente em subconjuntos compactos de Ω para*

$$u_0 = \alpha\langle x - x_0, \nu\rangle^+,$$

com $\alpha > 0$, $x_0 \in \Omega \cap \partial\{u_0 > 0\}$ quando $\varepsilon \to 0$. Então, existe um operador elíptico $F^\star$ tal que

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^\star(\nu \otimes \nu, x_0)}}.$$

Demonstração. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $x_0 = 0$ e $\nu = e_1$. Seja $\Psi \in C_c^\infty(\Omega)$ (vamos escrever u para u_ε, e $a_{ij}^\varepsilon(x)$ para $a_{ij}(x)$). Multiplicando a equação (5.1.16) por $\partial_1 u\Psi$ e integrando, obtemos

$$\int_\Omega (\Psi\partial_1 u a_{ij}\partial_{ij}u)\, dx = \int_\Omega \Psi\partial_1 u\zeta_\varepsilon(u)dx = -\int_\Omega \partial_1\Psi B_\varepsilon(u)dx.$$

Aplicando o Teorema de Green no lado direito da expressão acima, obtemos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \Psi a_{ij}(x)\partial_i u\partial_{j1}u\, dx \quad &- \quad \int_\Omega (\partial_j\Psi)a_{ij}(x)\partial_i u\partial_1 u\, dx - \int_\Omega \Psi\partial_j(a_{ij})\partial_i u\partial_1 u dx \\
&= \quad -\int_\Omega \partial_1\Psi B_\varepsilon(u)\, dx
\end{aligned} \qquad (5.2.12)$$

Da simetria assegurada por (5.0.1), $a_{ij} = a_{ji}$; portanto

$$\begin{aligned} -\int_\Omega a_{ij}(x)\partial_i u \partial_{j1} u \Psi dx &= -\frac{1}{2}\int_\Omega (a_{ij}(x)\partial_{i1} u \partial_j u \Psi + a_{ij}(x)\partial_{1j} u \partial_i u \Psi)\, dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega a_{ij}(x)\partial_1(\partial_i u \partial_j u)\Psi dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_1(\Psi a_{ij}(x))\partial_i u \partial_j u\, dx \\ &= \int_\Omega \frac{1}{2}(a_{ij}(x)\partial_i u \partial_j u \partial_1 \Psi + \partial_1 a_{ij}(x)\partial_i u \partial_j u \Psi) \quad (5.2.13) \end{aligned}$$

Substituindo (5.2.13) em (5.2.12), achamos

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\frac{1}{2}a_{ij}(x)\partial_i u \partial_j u \partial_1 \Psi + \frac{1}{2}\partial_1 a_{ij}(x)\partial_i u \partial_j u \Psi &- a_{ij}(x)\partial_i u \partial_1 u \partial_j \Psi - \partial_j a_{ij}(x)\partial_i u \partial_1 u \Psi)dx \\ &= -\int_\Omega B_\varepsilon(u)\partial_1 \Psi dx. \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

Agora, pelo Lemma 5.3

$$\nabla u \to \alpha \chi_{\{x_1>0\}} e_1 \quad \text{in} \quad L^2_{\text{loc}}(\Omega). \tag{5.2.15}$$

e pelo Lema 5.5

$$B_\varepsilon(u) \overset{\star}{\rightharpoonup} \mathrm{T}\chi_{\{x_1>0\}} + \bar{\mathrm{T}}\chi_{\{x_1<0\}} \quad \text{em} \quad L^\infty(\Omega), \tag{5.2.16}$$

onde $\bar{\mathrm{T}} \in \{0, \mathrm{T}\}$ (Aqui $\overset{\star}{\rightharpoonup}$ significa convergência na topologia fraca-$\star$). Passando o limite quando $\varepsilon \to 0$ em (5.2.14), levando em conta (5.2.15), (5.2.16) e Lema 5.2, teremos

$$\int_{\{x_1>0\}} \left[\frac{\alpha^2}{2}\partial_{x_1}(b_{11}\Psi) - \alpha^2 \sum_{j=1}^N \partial_j(b_{1j}\Psi)\right] dx = (\bar{\mathrm{T}} - \mathrm{T})\int_{\{x_1=0\}} \Psi\, dx'.$$

Portanto, usando o teorema da divergência na expressão acima, obtemos,

$$-\frac{\alpha^2}{2}\int_{\{x_1=0\}} \langle F^\star_{11} e_1, e_1\rangle \Psi dx = -(\mathrm{T} - \bar{\mathrm{T}})\int_{\{x_1=0\}} \Psi\, dx'.$$

Como $\Psi \in C^\infty_c(\Omega)$ é arbitrário,

$$\alpha^2 = \frac{2(\mathrm{T} - \bar{\mathrm{T}})}{F^\star(e_1 \otimes e_1, 0)}.$$

Agora, como $\alpha > 0$ segue que $\mathrm{T} \neq \bar{\mathrm{T}}$ e, portanto, $\bar{\mathrm{T}} \equiv 0$. Logo

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^{\star}(e_1 \otimes e_1, 0)}}.$$

□

Observação 5.6. *Heuristicamente, a proposição anterior nos diz que a função limite u_0 atinge o conjunto de nível zero com um declive preescrito e positivo.*

5.3 Condição de fronteira livre

Esta seção é dedicada ao estudo da condição de fronteira livre. Provaremos que a condição vale em dois sentidos e, no próximo capítulo, provaremos a regularidade $C^{1,\gamma}$ da fronteira livre. A saber, provaremos a condição de fronteira livre no sentido da teoria geométrica da medida e no sentido da viscosidade introduzida por Caffarelli nos célebres e agora clássicos artigos [3], [4] e [5].

5.3.1 Condição no sentido da teoria geométrica da medida

Começamos a seção com algumas definições clássicas

Definição 5.2. *Um vetor unitário $\nu \in \mathbb{R}^N$ é dito ser normal unitário interior no sentido da teoria geométrica da medida para a fronteira livre $\partial\{u_0 > 0\}$ em um ponto da fronteira livre $x_0 \in \partial\{u_0 > 0\}$ se*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^N} \int_{B_r(x_0)} |\chi_{\{u_0>0\}} - \chi_{\{x|\langle x-x_0,\nu\rangle>0\}}|\, dx = 0. \tag{5.3.1}$$

Definição 5.3. *Seja v uma função contínua no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Diremos que v é não-degenerado num ponto $x_0 \in \Omega \cap \{v = 0\}$ se existem $c, r_0 > 0$ tal que*

$$\frac{1}{r^N} \int_{B_r(x_0)} v dx \geq cr \quad \textit{para todo} \quad r \in (0, r_0). \tag{5.3.2}$$

Observação 5.7. *Pelo Teorema 4.3-(e), u_0 satisfaz (5.3.2).*

Definição 5.4. *Sejam $E, \Gamma \subset \mathbb{R}^N$. Diremos que E possui densidade positiva uniforme em Γ se existem $c, r_0 > 0$ tais que*

$$\frac{|E \cap B_r(x)|}{|B_r(x)|} \geq c, \quad \textit{para} \quad 0 < r < r_0, x \in \Gamma.$$

Vamos, agora, estabelecer a condição de fronteira livre, no sentido da teoria geométrica da medida, sob a hipótese natural de densidade positiva uniforme da fase zero, dada pelo conjunto $\Omega_0^c := \{u_0 \equiv 0\}$. Em particular, ao longo da fronteira livre reduzida. Na verdade, é bem estabelecido que, a fim de investigar as propriedades de suavidade da fronteira livre, deve-se evitar comportamentos como $|x|$ próximo à fronteira livre.

Observação 5.8. *Vale a pena mencionar que, para problemas com estruturas variacional, argumentos baseados em perturbações de energia garantem densidade positiva uniforme da fase zero (veja, por exemplo, o Teorema 5.5 em [21]). Mais precisamente, para problemas variacionais, por exemplo $F(D^2u, x) = \Delta u(x)$, mostra-se que u_0 é um mínimo para o funcional de Euler-Lagrange $E_0 : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$*

$$E_0(\xi, \mathcal{O}) := \int_{\mathcal{O}} \left(\frac{1}{2} |\nabla \xi(x)|^2 + \chi_{\xi > 0} \right) dx.$$

e que para cada $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0)$, existe constante $\tau > 0$ tal que

$$\frac{|\Omega_0^c \cap B_\rho(x_0)|}{|B_\rho(x_0)|} \geq \tau$$

para todo $0 < \rho < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Como nosso problema é totalmente não-variacional, uma adaptação dessa técnica não será possível. Mencionamos ainda que, para problemas regidos por equações côncavas, provamos que $\Omega_0 := \{u_0 > 0\}$ é localmente um conjunto de perímetro finito; portanto para todo ponto z_0 da fronteira livre reduzida (veja Lema 5.5.4 pg 236 de [48]), vale que

$$\liminf_{r \searrow 0} \frac{|\Omega_0^C \cap B_r(z_0)|}{r^N} \geq c > 0.$$

Observação 5.9. *Lembramos, ainda, que um ponto x pertence a $\mathfrak{F}(u_0)_\star$, a fronteira no sentido da teoria geométrica da medida, se*

$$\lim_{r \to 0} \frac{|B_r(x) \cap \Omega_0|}{r^N} > 0 \quad e \quad \lim_{r \to 0} \frac{|B_r(x) \cap \Omega_0^c|}{r^N} > 0.$$

Pelo Lema A.4, temos que

$$\mathcal{H}^{N-1}(\mathfrak{F}_\star(u_0) \setminus \mathfrak{F}(u_0)_{red}) = 0.$$

Porém, sob a hipótese de que o conjunto $\{u_0 \equiv 0\}$ possui densidade positiva uniforme, temos que $\mathfrak{F}_\star(u_0) = \mathfrak{F}(u_0)$ e, portanto,

$$\mathcal{H}^{N-1}(\mathfrak{F}(u_0) \setminus \mathfrak{F}(u_0)_{red}) = 0.$$

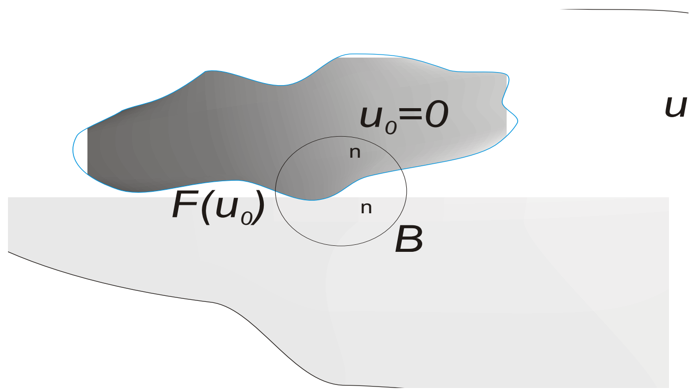


Figura 5.2: Densidade positiva da fase zero

Este resultado será extremamente importante para a teoria de regularidade para a fronteira livre. Vale a pena observar que é possível obter tal resultado para operadores com coeficientes constantes da forma $F(M)$ (veja Teorema 4.2 abaixo). Na ausência de funcionais de Euler-Lagrange, é evidente que uma nova técnica deverá ser desenvolvida para lidar com a densidade positiva uniforme do conjunto $\{u_0 \equiv 0\}$. Este problema continua em aberto e é muito tentador para o desenvolvimento da teoria.

Teorema 5.2. *Suponha $F(M)$ côncavo em M. Dado um subdomínio $\Omega' \Subset \Omega$, existe uma constante positiva universal $C = C(\Omega')$, tal que para qualquer bola $B_\rho(x_0)$ centrada num ponto da fronteira livre $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0)$, vale*

$$C^{-1}\rho^{N-1} \leq \mathcal{H}^{N-1}(\mathfrak{F}(u_0)_{\mathrm{red}} \cap B_\rho(x_0)) \leq C\rho^{N-1}.$$

Em particular,

$$\mathcal{H}^{N-1}(\mathfrak{F}(u_0) \setminus \mathfrak{F}(u_0)_{\mathrm{red}}) = 0.$$

Demonstração. A estimativa por cima já foi estabelecida, em grande generalidade, no Teorema 4.3, item (d). Vamos verificar a estimativa por baixo. Por uma argumento de escalonamento, podemos tomar $\rho = 1$ e $x_0 = 0$. Sejam u_ε soluções aproximadas de u_0 satisfazendo $F(D^2 u_\varepsilon) = \beta_\varepsilon(u_\varepsilon)$. Defina o operador uniformemente elíptico

$$\mathrm{L}v := \mathrm{tr}\left(F_{ij}(0) D_{ij} v\right),$$

onde F_{ij} representa a derivada de F com relação à (i,j)-ésima direção no espaço $\mathcal{S}(N)$. Por conveniência de notação, vamos escrever $F_{ij}(0) =: a_{ij}$. Como antes, é simples verificar que $\lambda \mathrm{Id} \leq a_{ij} \leq \Lambda \mathrm{Id}$. Por concavidade, $\mathrm{L}u_\varepsilon \geq 0$. Vamos construir uma função barreira especial. Para isto, seja ψ uma função suave não-negativa em B_1, com $\psi \equiv 1$ em $B_{1/5}$ e $\psi \equiv 0$ fora de $B_{1/4}$. Considere Φ solução de

$$\begin{cases} \mathrm{L}\Phi &= -\psi \quad \text{em} \quad B_1 \\ \Phi &= 0 \quad \text{em} \quad \partial B_1. \end{cases}$$

Segue da teoria de regularidade elíptica que Φ é suave e,

$$\|\Phi\|_{C^\alpha(B_{1/2})} \leq C, \tag{5.3.3}$$

para uma constante universal C. Além disso, pelo princípio do máximo $\Phi > 0$ em B_1 e pelo princípio do máximo de Hopf,

$$a_{ij}\partial_i\Phi\nu_j \geq c > 0, \quad \text{ao longo de } \partial B_1, \tag{5.3.4}$$

onde ν_j é a j-ésima coordenada do vetor normal exterior a ∂B_1. Lembre que o conjunto $\Omega_0 := \{u_0 > 0\}$ e $\mathfrak{F}(u_0)_{\text{red}}$ é a fronteira livre reduzida. Aplicando a fórmula generalizada Gauss-Green, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0\cap B_1} \{\Phi \mathrm{L}u_\varepsilon - u_\varepsilon \mathrm{L}\Phi\}\, dx &= \int_{\mathfrak{F}(u_0)_{\text{red}}\cap B_1} \{\Phi a_{ij}\partial_i u_\varepsilon - u_\varepsilon a_{ij}\partial_i \Phi\}\, \eta_j d\mathcal{H}^{N-1} \\ &- \int_{\Omega_0\cap\partial B_1} u_\varepsilon a_{ij}\partial_i\Phi\nu_j d\mathcal{H}^{N-1}. \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Como $\Phi \mathrm{L}u_\varepsilon \geq 0$, temos

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_0\cap B_1} \{\Phi \mathrm{L}u_\varepsilon - u_\varepsilon \mathrm{L}\Phi\}\, dx \geq \int_{B_1} \psi u_0 dx \geq \int_{B_{1/5}} u_0 dx. \tag{5.3.6}$$

Além disso, da limitação uniforme do gradiente de u_ε, elipticidade e (5.3.3), temos a estimativa

$$\left| \int_{\mathfrak{F}(u_0)_{\text{red}}\cap B_1} \Phi a_{ij}\partial_i u_\varepsilon \eta_j d\mathcal{H}^{N-1} \right| \leq C\mathcal{H}^{N-1}(\mathfrak{F}(u_0)_{\text{red}} \cap B_1) \tag{5.3.7}$$

para uma constante universal C independente de ε. Em adição

$$\int_{\mathfrak{F}^*(u_0)\cap B_1} u_\varepsilon a_{ij}\partial_i\Phi\eta_j\, d\mathcal{H}^{N-1} = \mathrm{o}(1), \tag{5.3.8}$$

quando $\varepsilon \to 0$ e por (5.3.4)

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_0\cap\partial B_1} u_\varepsilon a_{ij}\partial_i\Phi\nu_j d\mathcal{H}^{N-1} &= \int_{\partial B_1} u_0 a_{ij}\partial_i\Phi\nu_j d\mathcal{H}^{N-1} \\ &\geq 0. \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

Combinando (5.3.5), (5.3.6), (5.3.7), (5.3.8) e (5.3.9), deduzimos

$$\int_{B_{1/5}} u_0 dx \leq C\mathcal{H}^{N-1}(\mathfrak{F}(u_0)_{\text{red}} \cap B_1). \tag{5.3.10}$$

Por outro lado, pela não-degenerescência (item (c) do Teorema 4.3),

$$\fint_{B_{1/5}} u_0 dx \geq c_0. \tag{5.3.11}$$

para uma constante universal c_0. Finalmente, de (5.3.10) e (5.3.11), concluímos

$$\mathcal{H}^{N-1}(\mathfrak{F}(u_0)_{\text{red}} \cap B_1) \geq \tau_0,$$

para uma constante universal τ_0 e a estimativa por baixo está provada.

$\square$

Antes de obtermos o resultado principal, precisamos de dois resultados preliminares. O primeiro resultado é o seguinte lema:

Lema 5.6. *Seja $U \in Lip(\bar{B}_1^+)$ e suponha que U é não negativa em B_1^+,*

$$F(D^2U, x) = 0 \quad \textit{em} \quad \{U > 0\}$$

e $U \equiv 0$ em $\partial B_1^+ \cap \{x_1 = 0\}$. Então, em B_1^+, U possui desenvolvimento assintótico

$$U(x) = \alpha x_1 + o(|x|)$$

com $\alpha \geq 0$

Demonstração. Seja

$$\ell_k := \inf\{\ell : U(x) \leq \ell x_1 \quad \text{em} \quad B_{2^{-k}}^+\}.$$

Como ℓ_k é uma sequência não-crescente de números finitos não-negativos, existe

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \ell_k.$$

Então

$$U(x) \leq \alpha x_1 + o(|x|) \quad \text{em} \quad B_1^+.$$

Se $\alpha = 0$, a conclusão do lema segue. Suponha portanto que $\alpha > 0$. Então existe sequência $x_k \in B_1^+$ com $r_k = |x^k| \to 0$ tal que

$$U(x^k) \leq \alpha x_1^k - \delta_0 r_k,$$

para algum $\delta_0 > 0$. Note que x^k pertence ao cone $\mathcal{C} = \{|x| \leq \frac{\alpha}{\delta_0} x_1\}$ e, portanto, podemos assumir que $\nu_k := \frac{x^k}{r_k}$ converge para algum $\nu_0 \in \partial B_1^+ \cap \mathcal{C}$. Agora, seja

$$U^k(x) := \frac{U(r_k x)}{r_k}.$$

Como $\{U^k\}$ são uniformemente Lipschitz, podemos assumir que U^k converge uniformemente em $\bar{B}_1^+$ para uma função não-negativa V. Por construção, temos

$$V(x) \leq \alpha x_1 \quad \text{em} \quad B_1^+$$

em adição

$$V(x) \leq \alpha x_1 - \frac{\delta_0}{2} \quad \text{e} \quad U^k(x) \leq \ell_k x_1 - \frac{\delta_0}{2} \quad \text{em} \quad \partial B_1^+ \cap B_\varepsilon(\nu_0)$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e k grande.

Seja agora $w : B_1^+ \to \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{cases} F(D^2 w, x) = 0 & \text{em} \quad B_1^+ \\ w = x_1 & \text{in} \quad \partial B_1^+ - B_{\varepsilon/2}(\nu_0) \\ w = x_1 - \frac{\delta_0}{4\alpha} & \text{em} \quad \partial B_1^+ \cap B_{\varepsilon/4}(\nu_0) \\ x_1 - \frac{\delta_0}{4\alpha} \leq w \leq x_1 & \text{em} \quad \partial B_1^+ \cap B_{\varepsilon/2}(\nu_0) \end{cases}$$

Então w anula-se na fronteira flat $\{x_1 = 0\} \cap B_1$, é $C^{1,\sigma}$ até $\{x_1 = 0\} \cap B_1$, e pelo princípio do máximo de Hopf

$$w(x) \leq (1-\mu) x_1 \quad \text{em} \quad B_\gamma^+$$

para alguns μ, γ .

Agora, do princípio de comparação, teremos $U^k \leq \ell_k w$ em B_1^+ para k grande, e, consequentemente, $U^k \leq \ell_k (1-\mu) x_1$ em B_γ^+. Isto implica $\alpha \leq (1-\mu)\alpha$, o qual contradiz a hipótese de que $\alpha > 0$. O lema está provado. $\square$

A prova do Teorema 5.4 usa fortemente o seguinte resultado.

Teorema 5.3. *Suponha F satisfazendo $(H1)$, $(H2)$ e $(H3)$ e (5.1.5). Seja $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ família de soluções minimais de (E_ε) num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tal que $u_\varepsilon \to u_0$ uniformemente em subconjuntos compactos de Ω quando $\varepsilon \to 0$. Suponha que $\{u_0 \equiv 0\}$ possui densidade positiva uniforme positiva próximo à x_0. Então, existe operador elíptico $F^\star$ tal que*

$$\limsup_{x \to x_0} |\nabla u_0(x)| \leq \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^\star(\nu \otimes \nu, x_0)}},$$

se $x_0 \in \Omega \cap \partial\{u_0 > 0\}$, onde ν é a normal unitária a $\Omega \cap \partial\{u_0 > 0\}$.

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que $x_0 = 0$ e $\nu = e_1$. Seja

$$\alpha := \limsup_{x \to 0} |\nabla u_0(x)|.$$

Como $u_0 \in \mathrm{Lip}(\Omega)$, claramente $\alpha < \infty$. Se $\alpha = 0$, o resultado segue. Assuma, portanto, $\alpha > 0$. Existe uma sequência $x_n \to 0$ tal que $|\nabla u_0(x_n)| \to \alpha$ e $u_0(x_n) > 0$. Seja $z_n \in \Omega \cap \partial\{u_0 > 0\}$ tal que $d_n = |z_n - x_n| = \mathrm{dist}(x_n, \partial\{u_0 > 0\})$. Defina

$$(u_0)_{d_n}(x) := \frac{1}{d_n} u_0(z_n + d_n x).$$

Como $u_0 \in \mathrm{Lip}(\Omega)$ e $(u_0)_{d_n}(0) = 0$ para todo n, $\{(u_0)_{d_n}\}$ é uniformemente limitada em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$ e, portanto, a menos de subsequência (a qual vamos continuar denotando por d_n), $(u_0)_{d_n} \to v$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$, onde $v \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, $v(0) = 0$ e $F(D^2 v, x) = 0$ in $\{v > 0\}$.

Agora, seja $\bar{x}_n := \frac{x_n - z_n}{d_n} \in \partial B_1$. Podemos escolher a subsequência d_n de modo que $\bar{x}_n \to \bar{x} \in \partial B_1$. Então v satisfaz $F(D^2 v, x) = 0$ em $B_1(\bar{x})$, além disso, é não-negativa em $B_1(\bar{x})$. Considere agora a sequência

$$\nu_n = \frac{\nabla (u_0)_{d_n}(\bar{x}_n)}{|\nabla (u_0)_{d_n}(\bar{x}_n)|} = \frac{\nabla u_0(x_n)}{|\nabla u_0(x_n)|}.$$

Passando a uma subsequência e após uma rotação, podemos assumir que $\nu_n \to e_1$. Neste ponto, observe que $B_{2/3}(\bar{x}) \subset B_1(\bar{x}_n)$ para n suficientemente grande e, portanto, a função $(u_0)_{d_n}$ satisfaz $F(D^2 (u_0)_{d_n}, x) = 0$ em $B_{2/3}(\bar{x})$. Como F satisfaz $(H1) - (H3)$, pela estimativa interior do gradiente,

$$(u_0)_{d_n} \to v \quad \text{em} \quad C^{1,\sigma}(B_{1/2}(\bar{x}))$$

para algum $\sigma > 0$. Isto é suficiente para mostrar que $\nabla (u_0)_{d_n} \to \nabla v$ uniformemente em $B_{1/3}(\bar{x})$ e, portanto, como $\nabla u_0(x_n) = \nabla (u_0)_{d_n}(\bar{x}_n) \to \nabla v(\bar{x})$ e $\nabla u_0(x_n) \to |\nabla u_0(x_n)| e_1$, segue que $|\nabla u_0(x_n)| \to \partial_{x_1} v(\bar{x})$. Em particular,

$$\partial_{x_1} v(\bar{x}) = \alpha.$$

De fato, usando o fato de que $\nu_n \to e_1$ e $\frac{\nabla u_0(x_n)}{|\nabla u_0(x_n)|} \to \frac{\nabla v(\bar{x})}{\alpha}$, temos que $\nabla v(\bar{x}) = \alpha e_1$ e, portanto, $\partial_{x_1} v(\bar{x}) = \alpha$.

Afirmação 2. $|\nabla v| \leq \alpha$ *em* $\mathbb{R}^N$.

De fato, seja $R > 1$, $\delta > 0$. Então existe $\tau_0 > 0$ tal que

$$|\nabla u_0(x)| \leq \alpha + \delta \quad \text{para todo} \quad x \in B_{\tau_0 R}(0).$$

Note que $|x_n| < \frac{\tau_0 R}{2}$ e $d_n < \frac{\tau_0}{2}$ implica $B_{d_n R}(x_n) \subset B_{\tau_0 R}(0)$ e, portanto,

$$|\nabla (u_0)_{d_n}(x)| \leq \alpha + \delta \quad \text{em} \quad B_R$$

para n suficientemente grande. Em particular,

$$\nabla (u_0)_{d_n} \to \nabla v \quad \star - fraco \quad \text{em} \quad L^\infty(B_R).$$

Assim, $|\nabla v| \leq \alpha + \delta$ em B_R. Como δ e R são arbitrários, temos

$$|\nabla v| \leq \alpha \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Seja $w = \partial_{x_1} v$. Vemos que w é uma solução de uma equação elíptica em $B_1(\bar{x})$, pois v é uma solução de uma equação elíptica neste conjunto. De fato, diferenciando com relação à variável x_1 a equação $F(D^2 v, x) = 0$ em $B_1(\bar{x})$, temos

$$F_{ij}(\cdot) v_{x_1 x_1 x_i x_j} + F_{ij,kl}(\cdot) v_{x_i x_j x_1} u_{x_k x_\ell x_1} + 2F_{ij,x_1}(\cdot) v_{x_i x_j x_1} + F_{x_1 x_1}(\cdot) = 0.$$

Portanto, v é solução da equação

$$F_{ij}(\cdot) w_{x_1 x_i x_j} + F_{ij,kl}(\cdot) w_{x_i x_j} w_{x_k x_\ell} + 2F_{ij,x_1}(\cdot) w_{x_i x_j} + F_{x_1 x_1}(\cdot) = 0,$$

onde $F_{ij}(M,x) = \frac{\partial F}{\partial m_{ij}}(M,x)$ e $F_{ij,kl}(M,x) = \frac{\partial^2 F}{\partial m_{ij} \partial m_{kl}}$. Seja agora $\bar{w} = \alpha - w$. Então, $\bar{w} \geq 0$ em $B_1(\bar{x})$, isto é, $w \leq \alpha$ em $B_1(\bar{x})$, $\bar{w}(\bar{x}) = 0$. Pelo pricípio do máximo, concluímos que $\bar{w} \equiv 0$. Portanto, $w \equiv \alpha$ em $B_1(\bar{x})$.

Com isso, $\nabla v = \alpha e_1$ e temos, $v(x) = \alpha(x_1 - y_1)$ em $B_1(\bar{x})$ para algum $y \in \mathbb{R}^N$. Como $v(0) = 0$, vale que $y_1 = 0$ e

$$v(x) = \alpha x_1 \quad \text{em} \quad \{x_1 \geq 0\}.$$

Por outro lado, como $v \geq 0$, $F(D^2 v, x) = 0$ em $\{v > 0\}$, e $v = 0$ em $\{x_1 = 0\}$, temos, pelo Lema 5.6, que

$$v(x) = -\gamma x_1 + o(|x|) \quad \text{em} \quad \{x_1 < 0\}$$

para algum $\gamma \geq 0$. Defina, para $\lambda > 0$,

$$v_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} v(\lambda x).$$

Existem uma sequência $\lambda_n \to 0$ e uma função $u_{00} \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^N)$ tais que $v_{\lambda_n} \to u_{00}$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$. Além disso, temos

$$u_{00}(x) = \alpha x_1^+ + \gamma x_1^- \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Afirmação 3. *Nas condições acima, $\gamma = 0$.*

De fato, denote por $B_\delta^-(0) := B_\delta(0) \cap \{x_1 < 0\}$. Como o conjunto $\{u_0 = 0\}$ possui densidade localmente uniforme positiva em $\Gamma \cap B_\delta(0)$, segue que

$$0 < c \leq \frac{|\{u_0 \equiv 0\} \cap B_{d_n r}^-(z_n)|}{|B_{d_n r}^-(z_n)|}$$

para $r > 0$ e n suficientemente grande. Uma mudança de variáveis nos fornece

$$c \leq \frac{|\{(u_0)_{d_n} \equiv 0\} \cap B_r^-|}{|B_r^-|}$$

e, portanto, passando o limite quando $n \to \infty$, obtemos

$$c \leq \frac{|\{v \equiv 0\} \cap B_r^-|}{|B_r^-|}.$$

Reescalonando e fazendo $k \to \infty$, temos

$$c \leq \frac{|\{u_{00} \equiv 0\} \cap B_1^-|}{|B_1^-|}.$$

Isto implica que $\gamma = 0$.

Pelo Lema 5.4, existe sequência $\varepsilon_k^0 \to 0$ tal que $u^{\varepsilon_k^0}$ é uma solução para $(E_{\varepsilon_k^0})$ e $u^{\varepsilon_k^0} \to v$ uniformemente em subconjuntos compactos de B_1. Aplicando o Lema 5.4 mais uma vez, achamos sequência $\varepsilon_k^{00} \to 0$ e soluções $u^{\varepsilon_k^{00}}$ para $(E_{\varepsilon_k^{00}})$ convergindo uniformemente em subconjuntos compactos de B_1 para $u_{00}(x) = \alpha x_1^+$. Finalmente, podemos aplicar a Proposição 5.7, para concluir que existe operador uniformemente elíptico $F^\star$ tal que $\alpha = \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^\star(e_1 \otimes e_1, 0)}}$. □

Finalmente, provaremos o resultado principal do capítulo, que é o seguinte teorema:

Teorema 5.4. *Suponha F satisfazendo as condições $(H1)-(H3)$ e (5.1.5). Seja u_ε família de soluções minimais de (E_ε) num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tal que $u_\varepsilon \to u_0$ uniformemente em subconjuntos compactos de Ω quando $\varepsilon \to 0$. Seja $x_0 \in \Omega \cap \partial\{u_0 > 0\}$ tal que $\partial\{u_0 > 0\}$ possui uma normal unitária interior ν no sentido da teoria da medida em x_0. Suponha que $\{u_0 \equiv 0\}$ possui densidade uniforme positiva próximo a x_0. Então existe um operador elíptico $F^\star$ tal que*

$$u_0(x) = \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^\star(\nu \otimes \nu, x_0)}}\langle x - x_0, \nu\rangle^+ + o(|x - x_0|).$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, vamos supor que $x_0 = 0$ e $\nu = e_1$. Defina, para $\lambda > 0$,

$$(u_0)_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} u_0(\lambda x),$$

e seja $\rho > 0$ tal que $B_\rho \Subset \Omega$. Como $(u_0)_\lambda \in \mathrm{Lip}(B_{\frac{\rho}{\lambda}})$ uniforme em λ e $(u_0)_\lambda(0) = 0$, existem subsequência $\lambda_k \to 0$ e uma função $U \in Lip(\mathbb{R}^N)$ tal que $(u_0)_{\lambda_k} \to U$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$. Dos Lemas 5.3 e 5.4, segue que

$$F(D^2(u_0)_\lambda, x) = 0 \quad \text{em} \quad \{(u_0)_\lambda > 0\}.$$

Agora, relembrando (5.3.1), vemos que, para todo $k > 0$ fixado,

$$|\{(u_0)_\lambda > 0\} \cap \{x_1 < 0\} \cap B_k| \to 0, \quad \text{quando} \quad \lambda \to 0.$$

Portanto, U é não negativa em $\{x_1 > 0\}$, $F(D^2U, x) = 0$ em $\{U > 0\}$, e anula-se em $\{x_1 \leq 0\}$. Pelo Lema 5.6, existe $\alpha \geq 0$ tais que

$$U(x) = \alpha x_1^+ + o(|x|) \quad \text{em} \quad \{x_1 > 0\}.$$

Pelo Lema 5.4, podemos encontrar uma sequência $\varepsilon_k \to 0$ e soluções u^{ε_k} para (E_ε) tais que $u^{\varepsilon_k} \to U$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$ quando $k \to \infty$.

Por outro lado, se definirmos

$$U_\lambda(x) := \frac{1}{\lambda} U(\lambda x),$$

$U_\lambda \to \alpha x_1^+$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$ quando $\lambda \to 0$. Aplicando o Lema 5.4 novamente, obtemos sequência $\sigma_k \to 0$ e soluções u^{σ_k} de (E_{σ_k}) tais que

$$u^{\sigma_k} \to \alpha x_1^+$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$ e pelo Lema 5.3,

$$\nabla u^{\sigma_k} \to \alpha \chi_{\{x_1 > 0\}} e_1 \quad \text{em} \quad L^2_{loc}(\mathbb{R}^N). \tag{5.3.12}$$

Procedendo como na prova da Proposição 5.7, obtemos a seguinte convergência:

$$B_{\sigma_k}(u^{\sigma_k}) \to \mathrm{T}\chi_{\{x_1>0\}} + \bar{\mathrm{T}}\chi_{\{x_1<0\}} \quad \text{fraco} - \star \quad \text{em} \quad L^\infty(\Omega).$$

Além disso, $\alpha^2 = \frac{2(\mathrm{T} - \bar{\mathrm{T}})}{F^\star(e_1 \otimes e_1, 0)}$. Agora note que $\alpha > 0$. De fato, pela não-degenerescência de u_0 em 0, para todo $r > 0$ e k suficientemente grande,

$$\frac{1}{r^N} \int_{B_r} (u_0)_{\lambda_k} \geq cr,$$

e passando o limite quando $k \to \infty$,

$$\frac{1}{r^N} \int_{B_r} U \geq cr.$$

Certamente, isto força $\alpha > 0$ e, como consequência, $\mathrm{T} \neq \bar{\mathrm{T}}$. Portanto, pelo Lema 5.5, $\bar{\mathrm{T}} = 0$ e, finalmente, $\alpha = \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^\star(e_1 \otimes e_1, 0)}}$. Temos, portanto, demonstrado que

$$U(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^\star(e_1 \otimes e_1, 0)}} x_1^+ + o(|x|) & \text{em} \quad \{x_1 > 0\} \\ 0, & \text{em} \quad \{x_1 \leq 0\} \end{cases} \tag{5.3.13}$$

Agora, segue do Teorema 5.3 que

$$\limsup_{x \to x_0} |\nabla u_0(x)| \leq \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^\star(\nu \otimes \nu, x_0)}}.$$

Seja $R, \sigma > 0$ fixo então,

$$|\nabla u_0(x)| \leq \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^\star(e_1 \otimes e_1, 0)}} + \sigma, \quad \forall\, x \in B_{\lambda R},\, \lambda \leq \lambda_0.$$

Fazendo um reescalonamento, obtemos

$$|\nabla (u_0)_\lambda(x)| \leq \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^\star(e_1 \otimes e_1, 0)}} + \sigma,\, x \in B_R \quad k >> 1.$$

Portanto, $\nabla (u_0)_{\lambda_k} \overset{\star}{\rightharpoonup} \nabla U$ em $L^\infty(B_R)$. Concluímos assim que

$$|\nabla U| \leq \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^\star(e_1 \otimes e_1, 0)}} + \sigma,\, \forall\, x \in B_R.$$

Como σ e R são arbitrários, obtemos que

$$|\nabla U| \leq \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^\star(e_1 \otimes e_1, 0)}}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Neste ponto, basta observar que $U \equiv 0$ em $\{x_1 = 0\}$ para concluir que

$$U \leq \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^\star(e_1 \otimes e_1, 0)}} x_1 \quad \text{em} \quad \{x_1 > 0\}.$$

Aplicando o princípio da fronteira de Hopf para a função

$$v(x) = U(x) - \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^\star(e_1 \otimes e_1, 0)}}x_1$$

vemos necessariamente que

$$U(x) = \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^\star(e_1 \otimes e_1, 0)}}x_1 \quad \text{em} \quad \{x_1 > 0\}.$$

Como consequência, obtemos finalmente

$$u_0(x) = \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^\star(e_1 \otimes e_1, 0)}}x_1^+ + o(|x|)$$

e a prova está completa.

□

5.3.2 Solução no sentido da viscosidade

Nesta seção, provaremos a condição de fronteira livre no sentido da viscosidade. Esta noção é formulada em termos do desenvolvimento assintótico em torno de pontos regulares da fronteira livre, isto é, pontos nos quais a fronteira livre possui uma bola que toca a partir de ambos os lados (fases) da função u_0 (veja seção 6.1). No nosso caso, em que a função limite $u_0 \geq 0$, a condição de fronteira livre é, portanto, interpretada da seguinte forma: Próximo a qualquer ponto regular $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0)$, u_0 possui o comportamento linear

$$u_0(x) = \sqrt{\frac{2M}{F^\star(\nu \otimes \nu, x_0)}}\,\langle x - x_0, \nu\rangle^+ + o(|x - x_0|),$$

onde ν é a normal a ∂B em x_0, interior a Ω_0. Por esta razão, precisamos da proposição a seguir, que descreve o comportamento assintótico das funções que são soluções de equações diferenciais da forma $F(D^2u, x) = 0$ em Ω.

Proposição 5.8. *Suponha u função não-negativa, Lipschitz satisfazendo $F(D^2u, x) = 0$ no sentido da viscosidade num domínio Ω tal que $u \equiv 0$ em $B_r(x_0) \cap \partial\Omega$ para algum $x_0 \in \partial\Omega$ e $r > 0$*

(1) Se existe uma bola $B = B_\rho(y_0) \subset \Omega$ tal que $B \cap \partial\Omega = \{x_0\}$, então o seguinte desenvolvimento assintótico vale em B

$$u(x) = \theta\langle x - x_0, \nu\rangle^+ + o(|x - x_0|)$$

com $\theta \geq 0$, onde ν é a normal unitária a ∂B interior a Ω.

(2) Se existe uma bola $B = B_\rho(y_0) \subset \Omega^c$ tal que $B \cap \partial\Omega = \{x_0\}$, então estendendo u como sendo zero fora de Ω, vale o seguinte desenvolvimento assintótico

$$u(x) = \theta\langle x - x_0, \nu\rangle^+ + o(|x - x_0|),$$

com $\theta \geq 0$, onde ν é a normal unitária a ∂B interior a Ω. Além disso, se $\theta > 0$, então B é tangente a $\partial\Omega$ em x_0.

Demonstração. Sem perda de generalidade, vamos supor que $x_0 = 0$ e $\nu = e_1$. Vamos começar provando (1). Seja $B = B_\rho(y_0)$ uma bola tocante. Defina indutivamente a sequência $\{\alpha_k\}$ por

$$\alpha_0 := sup\{l : u(x) \geq lx_1, \quad \text{em} \quad B_1 \cap B\}$$

e

$$\alpha_k := sup\{l : u(x) \geq lx_1, \quad \text{em} \quad B_{2^{-k}} \cap B\}.$$

A sequência $\{\alpha_k\}$ é não-decrescente e limitada pela norma Lipschitz de u. Portanto, existe

$$\alpha := \lim_{k\to\infty} \alpha_k.$$

Então, da definição de α, temos

$$u(x) \geq \alpha x_1 + o(|x|) \quad \text{em} \quad B.$$

Se $\alpha = 0$, a conclusão do resultado é direta. Admita $\alpha > 0$. Suponha, por contradição que $u(x) \neq \alpha x_1 + o(|x|)$ em B. Em outras palavras, existe sequência $x^k \in B$ com $r_k = |x^k| \to 0$ tal que

$$u(x^k) \geq \alpha x_1^k + \delta_0 r_k$$

para algum $\delta_0 > 0$. Note que cada x^k está no conjunto $C := \{|x| \geq \frac{\alpha}{\delta_0} x_1\}$. Podemos assumir, a menos de subsequência, que

$$\frac{x^k}{r_k} \to \nu_0 \in \mathbb{S}^{n-1} \cap C.$$

Considere a sequência blow-up

$$u^k(x) := \frac{u(r_k x)}{r_k}.$$

Pela continuidade Lipschitz, u^k converge uniformemente para a função positiva

$$v : B_1^+ \to \mathbb{R}$$

tal que $F(D^2 v, x) = 0$ no sentido da viscosidade em B_1^+. Claramente, $v(0) = 0$ e, por construção de α, $v(x) \geq \alpha x_1$ em B_1^+. Além disso,

$$v(x) \geq \alpha x_1 + \frac{\delta_0}{2} \quad \text{em} \quad \partial B_1^+ \cap B_\epsilon(\nu_0), \quad \text{para} \quad \epsilon > 0 \quad \text{pequeno.}$$

Seja $\Psi : B_1^+ \to \mathbb{R}$ solução de

$$\begin{cases} F(D^2\Psi, x) = 0 & \text{em} \quad B_1^+ \\ \Psi = x_1 & \text{em} \quad \partial B_1^+ - B_{\epsilon/2}(\nu_0) \\ \Psi = x_1 + \frac{\delta_0}{4\alpha} & \text{em} \quad \partial B_1^+ \cap B_{\epsilon/4}(\nu_0) \\ x_1 \leq \Psi \leq x_1 + \frac{\delta_0}{4\alpha} & \text{em} \quad \partial B_1^+ \cap B_{\epsilon/2}(\nu_0). \end{cases}$$

Note que tal barreira é suave até a fronteira. Aplicando o princípio de comparação duas vezes, obtemos

$$v(x) \geq \alpha\Psi(x) \geq \alpha(1 + 2\mu)x_1 \quad \text{em} \quad B_{1/2}^+$$

para $\mu > 0$ universal. Então, se tomarmos k suficientemente grande,

$$u^k(x) \geq \alpha(1 + \mu)x_1 \quad \text{em} \quad B_{1/4}^+,$$

e isto implica que $\alpha_k > (1 + \mu)\alpha$, o qual nos leva uma contradição pela definição de α.

Para (2), estenda u por zero fora de Ω. Então u é subsolução no sentido da viscosidade de $F^*(D^2 u, x) = 0$ em B_1^+, onde $F^*(M, x) = -F(-M, x)$. Defina

$$\beta_k := \{m : m x_1 \geq u(x), \quad \text{em} \quad B_{2^{-k}} \cap B^c\}.$$

Como a sequência é decrescente, existe o número não-negativo

$$\beta := \lim_{k\to\infty} \beta_k.$$

De modo que, próximo de 0,

$$u(x) \leq \beta x_1^+ + o(|x|).$$

Para mostrar a igualdade, ao longo de qualquer região não-tangencial, proceda como (1). □

Antes de indicar o teorema principal, vamos introduzir o conceito de pontos regulares para o nosso problema de fronteira livre.

Definição 5.5. *Seja $x_0 \in F(u_0) := \partial\{u_0 > 0\} \cap \Omega$. Dizemos que x_0 é um ponto regular a direita (ou do lado não-negativo) se existe uma bola $B_\rho(y_0) \subset \Omega_0 := \{u_0 > 0\}$ e $B_\rho(y_0) \cap F(u_0) = \{x_0\}$. Se $B_\rho(y_0) \subset \Omega_0^c$ e $B_\rho(y_0) \cap F(u_0) = \{x_0\}$, dizemos que x_0 é regular à esquerda (ou do lado não-positivo). Diremos que x_0 é ponto regular se ambas as condições acima valem, isto é, um ponto $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0)$ é dito regular se existe uma bola $B_\rho(y_0)$, $x_0 \in \partial B_\rho(y_0)$ e $B_\rho(y_0)$ está contida ou em Ω_0 ou em $(\Omega \setminus \Omega_0)^\circ$.*

A condição de fronteira livre no sentido da viscosidade deve ser entendida como

$$(u_0)_\nu^2 = \frac{2M}{F^\star(\nu \otimes \nu, x_0)} \quad \text{ao longo de} \quad \mathfrak{F}(u_0)$$

onde ν é a norma unitária a $\partial B_\rho(y_0)$ apontando para dentro de Ω_0.

Teorema 5.5 (Condição de fronteira livre no sentido da viscosidade)**.** *Suponha que o operador totalmente não-linear F satisfaz as condições $(H1) - (H3)$ e (5.1.5). Assuma que $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0)$ é um ponto regular e $B = B_\rho(y_0)$ a bola tocante correspondente, então existe um operador elíptico $F^\star$ tal que*

$$u_0(x) = \sqrt{\frac{2M}{F^\star(\nu \otimes \nu, x_0)}} \quad \langle x - x_0, \nu\rangle^+ + o(|x - x_0|)$$

onde ν é a normal unitária a $\partial B_\rho(y_0)$ apontando para o interior de Ω_0. Isto é,

$$(u_0)_\nu^2 = \frac{2M}{F^\star(\nu \otimes \nu, x_0)} \quad \textit{ao longo de} \quad \mathfrak{F}(u_0)$$

vale no sentido da viscosidade de Caffarelli.

Demonstração. Seja $B_\rho(y_0) \subset \Omega_0$ (ou Ω_0^c), tal que $\mathfrak{F}(u_0) \cap B_\rho(y_0) = \{x_0\}$. Pela Proposição 5.8, concluímos que

$$u_0(x) = \theta_0 \langle x - x_0, \nu \rangle^+ + o(|x - x_0|)$$

com $\theta_0 \geq 0$. Isto implica, em particular, que qualquer sequência blow-up $\frac{u_0(x_0+\rho_k x)}{\rho_k}$, com $\rho_k \to 0$, converge uniformemente em subconjuntos compactos para

$$u_\infty(x) = \theta_0 \langle x, \nu \rangle^+.$$

Agora, pela Proposição 5.4,

$$u_\infty(x) = \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^\star(\nu \otimes \nu, x_0)}}\, \langle x, \nu \rangle^+,$$

concluímos:

$$\theta_0 = \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^\star(\nu \otimes \nu, x_0)}}.$$

$\square$

Capítulo 6

Regularidade da fronteira livre

Neste capítulo, mostraremos que a fronteira livre reduzida $\partial_{\text{red}}\{u_0 > 0\} := \mathfrak{F}(u_0)_{\text{red}}$ é localmente o gráfico de uma função $C^{1,\alpha}$. Em particular, para os pontos da fronteira livre, vale a seguinte condição de fronteira livre

$$F(\nabla u_0 \otimes \nabla u_0) = 2\int \beta$$

no sentido clássico. Iniciaremos o capítulo fazendo um apanhado dos principais resultados sobre a teoria de regularidade para operadores totalmente não-lineares obtidos por Roberto Argiolas e Fausto Ferrari em [27], e Fausto Ferrari em [28] que utilizaremos para obter a regularidade desejada da fronteira livre.

6.1 Teoria de viscosidade da fronteira livre

Nesta seção, faremos um apanhado dos principais resultados a respeito da regularidade da fronteira livre. Vale a pena observar que os argumentos utilizados obtidos neste trabalho seguem com algumas alterações para problemas de duas fases, com exceção da continuidade Lipschitz. Iremos seguir as referências [27] e [28]. Um problema de fronteira livre de duas fases geral que gostaríamos de resolver é o seguinte:

Problema de fronteira livre 2. Dado um domínio D em $\mathbb{R}^N$ e uma função φ definida em ∂D, achar uma função $u : D \to \mathbb{R}$, tomando φ como dado de fronteira e satisfazendo:

(1) $F(D^2u, x) = 0$ em $\Omega^+(u) := \{u > 0\}$ e em $\Omega^-(u) := \text{Int}(\{u < 0\})$.

(2) $G(u_\nu^+, u_\nu^-, x, \nu) = 0$ em $\mathfrak{F}(u) := \partial\{u > 0\} \cap D$.

Aqui u_ν^+ e u_ν^- denotam as derivadas normais a $\Omega^+(u)$ e $\Omega^-(u)$, respectivamente. Em particular, esses valores são não negativos. A condição (2) representa um fluxo de equlíbrio ou uma condição de transição de uma fase para outra. A teoria de viscosidade para problemas de fronteira livre consiste de um programa bem posto. Descrevemos o programa a seguir:

- construção de um conceito bastante fraco de soluções generalizadas,
- mostrar que a fronteira livre de tais soluções possui a geometria fraca apropriada,
- provar que, próximo a pontos "planos", a fronteira livre é gráfico de uma função Lipschitz,
- estabelecer um resultado que diz que fronteiras livres lipschitz são na realidade $C^{1,\alpha}$.

Esta teoria foi criada para operadores da forma $F(D^2u, x) = \mathrm{tr}(D^2u)$ e desenvolvida em torno de três artigos de Luis A. Caffarelli [3], [4] e [5]. Porém, Fausto Ferrari e Robeto Argiolas (veja [27] e [28]), generalizaram para operadores totalmente não-lineares $F(D^2u, x)$. No que segue, faremos um levantamento das principais características para obtenção da regularidade do nosso problema de fronteira livre e para futura condição de fronteira livre para problema de duas fases.

Antes de definirmos formalmente a solução no sentido da viscosidade de Caffarelli para nosso problema de fronteira livre, diremos que a condição de fronteira livre

$$G(u_\nu^+, u_\nu^-, x, \nu) = 0$$

é elíptica, se G é estritamente crescente com relação a u_ν^+ e estritamente decrescente com relação a u_ν^-. Por causa do princípio do máximo de Hopf, estas hipóteses em G previnem que a fronteira livre $\mathfrak{F}(u)$ e $\mathfrak{F}(v)$ de duas soluções do problema de fronteira livre (problema 2) a tocar em um ponto da fronteira livre. Vamos, daqui por diante, sempre assumir, que G é continuamente Lipschitz com relação a todos os argumentos e que o operador $F : \mathcal{S}(N) \times \Omega \to \mathbb{R}$ satisfaça a seguinte hipótese:

(H2) Para todo $M, N \in \mathcal{S}(N)$ e $x, y \in \Omega$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^-(M-N,\lambda,\Lambda) \;&-\; \omega(|x-y|)(\|M\|+\|N\|) \leq F(M,x) - F(M,y) \\ &\leq\; \mathcal{M}^+(N-N,\lambda,\Lambda) + \omega(|x-y|)(\|M\|+\|N\|) \end{aligned}$$

onde $\omega(s) = \bar{C}s^a$ com $a \in (0,1]$ e $\bar{C} > 0$.

juntamente com as hipóteses

(H4) O operador F é homogêneo positivo de grau 1, i,e,

$$F(\alpha M, x) = \alpha F(M, x)$$

para todo $\alpha > 0$, $M \in \mathcal{S}(N)$ e todo $x \in \Omega$.

(H5) F possui estimativa $C^{1,1}$: existe constante positiva c_e tal que para todo $x_0 \in \Omega$, todo $r > 0$ tal que a bola $B_r(x_0) \subset \Omega$, e toda $w \in C(\partial B_r(x_0))$, existe solução $\tilde{h} \in C^2(B_r(x_0)) \cap C(\bar{B}_r(x_0))$ do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} F(D^2\tilde{h}(x), x_0) &= 0 \quad \text{em} \quad B_r(x_0) \\ \tilde{h}(x) &= w \quad \text{em} \quad \partial B_r(x_0) \end{cases}$$

que satisfaz a estimativa

$$\|\tilde{h}\|_{C^{1,1}(B_{r/2}(x_0))} \leq c_e r^{-2} \|\tilde{h}\|_{L^\infty(B_r(x_0))}.$$

Observe que a hipótese $(H5)$ pode ser trocada pela hipótese de convexidade (ou concavidade) do operador F, com a hipótese adicional de regularidade (Lipschitz) da fronteira de Ω e dependência (C^α) em x. Assumindo elipticidade de G, a saber, a monotonicidade acima explicada, a definição de solução no sentido da viscosidade para nosso problema de fronteira livre é, então, baseado no comportamento assintótico de funções u tais que $F(D^2u, x) = 0$ próximos a pontos regulares do seguinte modo:

Definição 6.1. *Seja $u : D \to \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$F(D^2u, x) = 0 \quad \textit{em} \quad \Omega^+(u) := \{u > 0\} \quad \textit{e em} \quad \Omega^-(u) := \mathrm{Int}(\{u < 0\}).$$

Dizemos que u satisfaz a condição de fronteira livre $G(u_\nu^+, u_\nu^-, x, \nu) = 0$ no conjunto $\mathfrak{F}(u) := \partial\{u > 0\} \cap D$ no sentido da viscosidade se, dado $x_0 \in \mathfrak{F}(u) \cap D$ existir uma bola B tal que $x_0 \in \partial B$ e $B \subset \Omega^+(u)$ (ou em $\Omega^-(u)$), então u possui o desenvolvimento assintótico

$$u(x) = \alpha\langle x - x_0, \nu\rangle^+ - \beta\langle x - x_0, \nu\rangle^- + o(|x - x_0|) \tag{6.1.1}$$

e vale a relação $G(\alpha, \beta, x_0, \nu) = 0$.

A ideia chave na definição acima é que os coeficientes α e β que aparecem no desenvolvimento assintótico (6.1.1) possam ser trocados naturalmente pelas derivadas normais u_ν^+ e u_ν^-, respectivamente.

6.1.1 Fronteira livre Lipschitz são $C^{1,\alpha}$

Vamos assumir que a fronteira livre $\mathfrak{F}(u)$, no **Problema 2** seja localmente um gráfico Lipschitz, digamos, com relação a direção e_N. Em outras palavras, se $0 \in \mathfrak{F}(u)$ então,

$$\mathfrak{F}(u) \cap (B'_\rho \times (-1,1)) = (x', f(x'))$$

para alguma função Lipschitz $f : B'_\rho \to \mathbb{R}$. Aqui $B'_\rho \subset \mathbb{R}^{N-1}$ e $x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N$. Iremos denotar por L a norma Lipschitz de f. O primeiro resultado nessa direção é o seguinte lema:

Lema 6.1 (Veja [28], Lema 2.8)**.** *Seja $u \in C(B_1)$ não-negativa satisfazendo*

$$F(D^2u, x) = 0 \quad \textit{em} \quad \{u > 0\}.$$

Suponha que $B_{3/4} \cap \partial\{u > 0\}$ é gráfico de uma função continuamente Lipschitz f, na direção e_N, com norma Lipschitz L. Então, existem δ e θ dependendo da dimensão N e de L, tais que, para todo $\tau \in \Gamma(\theta, e_N)$ (cone com eixo e_N e abertura θ)

$$D_\tau u \geq 0 \quad \textit{em} \quad \Omega_\delta := \{|x'| \leq 1/2,\ f(x') < x_N < \delta L\}.$$

É interessante notar que o lema acima, em particular, diz que todos os conjuntos de nível de u são uniformemente continuamente Lipschitz durante todo o percurso até a fronteira livre. Vamos denotar

$$\mathcal{C}_N := \left\{|x'| \leq \frac{1}{2^N},\ f(x') < x_N < \delta^N L\right\}.$$

A estratégia é mostrar que, em correspondência com $\mathcal{C}_N$, existem cones de monotonicidade $\Gamma_N = \Gamma(\theta_N, \nu_N)$, satisfazendo

1. $\Gamma_N \subset \Gamma_{N+1}$
2. Se $\delta_N := \frac{\pi}{2} - \theta_N$, então existem constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$, dependendo somente da dimensão e de L, tal que $\delta_N \leq C\lambda^N$ e $|\nu_{N+1} - \nu_N| \leq \delta_N - \delta_{N+1}$.

Uma vez estabelecidas as condições acima, a regularidade $C^{1,\alpha}$ de $\mathfrak{F}(u)$ segue. O procedimento para estabelecer a existência destes cones de monotonicidade é o seguinte:

(i) melhorar a norma Lipschitz de f fora da fronteira livre. Isto é obtido através da utilização da desigualdade de Harnack.

(ii) transportar parte desse ganho para a fronteira livre. Para isso, uma deformação contínua do lema é necessária. Mais precisamente, se uma função positiva ϕ de classe C^2 satisfaz

$$\mathfrak{M}^-(D^2\phi, \lambda, \Lambda) - C\frac{(|\nabla\phi(x)| + \omega(\phi(x)))^2}{\phi(x)} \geq 0,$$

então

$$w(x) := \sup_{|\sigma|=1} u(x + \phi(x)\sigma)$$

é subsolução no sentido da viscosidade de $F(D^2w(x), x) = 0$ em $\{w > 0\}$ (veja [28], Teorema 3.1).

(iii) Reescalonamento e aplicando-se os resultados (i) e (ii) indutivamente segue o resultado.

O Teorema pode ser precisamente demonstrado como se segue

Teorema 6.1 (Lipschitz implica $C^{1,\alpha}$)**.** *Seja u solução no sentido da viscosidade do nosso problema de fronteira livre (**problema 2**) e considere que $0 \in \mathfrak{F}(u)$ e:*

1. *as condições estruturais $(H2)$ e $(H4)$ são satisfeitas com $\omega(s) = Cs^a$, $a \in (0, 1]$;*
2. *a condição $(H5)$ tamém seja válida;*
3. *$\Omega^+(u) = \{(x', x_N) : x_N > f(x')\}$ onde f é uma função continuamente Lipschitz com $\mathrm{Lip}(f) = L$*
4. *$G = G(z)$ é contínua, estritamente crescente e para algum $\kappa > 0$, $z^{-\kappa}G(z)$ é decrescente em $(0, \infty)$.*

Então, em $B'_{1/2} \subset \mathbb{R}^{N-1}$, f é uma função de classe $C^{1,\alpha}$ com $\alpha = \alpha(N, \kappa, L, \lambda, \Lambda, a)$.

6.1.2 Flatness implica Lipschitz

O pricípio heurístico explorado no artigo [27] pode ser vagamente descrito da seguinte forma: se a fronteira livre é uniformemente fechada o suficiente para um bom perfil assintótico, então ela é suave. Esta estratégia é motivada pela teoria das superfícies mínimas.

A hipótese de estar perto de uma "boa configuração assintótica" é garantida quando a dilatação

$$u_\lambda(x) := \frac{1}{\lambda}u(x_0 + \lambda x) \tag{6.1.2}$$

em torno de um ponto diferenciável da fronteira livre x_0 converge para uma solução

$$u_\lambda(x) \to \alpha\langle x, \nu\rangle^+ - \beta\langle x, \nu\rangle^- \tag{6.1.3}$$

para constantes não-negativas α e β, e vetor normal unitário ν (recordo que estamos estudando aqui problema de duas fases). Para a teoria de viscosidade para problema de fronteira livre, a noção de "planeza" é agradavelmente expressada pela ideia de ε-vizinhança ao longo de cones de direção suficientemente grandes $\Gamma(\theta_0, e)$. Mais precisamente

Definição 6.2. *Uma função u é dita ser ε-monótona na direção ν se*

$$u(x + \lambda\nu) \geq u(x)$$

para todo $\lambda \geq \varepsilon$. Diremos também que uma função positiva u é ε-monótona crescente com constante $\lambda > 0$ num domínio D, ao longo da direção ν, se

$$u(x + \varepsilon'\nu) - u(x) \geq \lambda\varepsilon u(x)$$

para todo $x \in D$ e todo $\varepsilon' \geq \varepsilon$.

Note que, se u é ε-monótona em toda direção $\nu \in \Gamma(\theta, e)$, então as superfícies de nível de u, $\partial\{u > t\}$, estão todas contidas numa $(1 - sen(\theta))\varepsilon$ vizinhança do gráfico de uma função Lipschitz, com constante Lipschitz $cotg(\theta)$. De fato, se V for a união dos cones $x + \varepsilon e + \Gamma(\theta, e)$, para $x \in \partial\{u > t\}$, então $V \subset \{u > t\}$ e ∂V é o gráfico de uma função Lipschitz com constante Lipschitz $cotg(\theta)$. Além disso, dist$(y, \partial\{u > t\}) \leq (1 - sen(\theta))\varepsilon$ quando $y \in \partial V$.

Vamos agora enunciar um lema interessante relativo a funções u soluções de

$$F(D^2u, x) = 0$$

e a noção de ε-monotonicidade.

Lema 6.2 (veja Lema 3.3 de [27])**.** *Seja u solução positiva no sentido da viscosidade de $F(D^2u, x) = 0$ em $B_{4R\varepsilon} = B_{4R\varepsilon}(0)$ tal que*

$$u(x + \varepsilon'\nu) - u(x) \geq \lambda\varepsilon u(x)$$

em $B_{4R\varepsilon}$, para algum $\lambda > 0$ e todo $\varepsilon' \geq \varepsilon$. Existe constante positiva $\tilde{m} = \tilde{m}(N, a)$ tal que para todo $m \geq \tilde{m} + 4$, existe $R = R(N)$ e constantes positivas C, c tais que, se $\varepsilon^{(m-2)/(m+2)} \leq c\lambda$ e

$$\|\omega(|x|)\| \leq C\varepsilon^m,$$

então

$$D_\nu u(0) \geq c\lambda \frac{u(\varepsilon\nu) - u(0)}{\varepsilon}.$$

Note que o lema acima diz que para funções u tais que $F(D^2u, x) = 0$, ε-monotonicidade implica monotonicidade total. No nosso problema de fronteira livre, supondo 0 ponto da fronteira livre, caso tenha êxito na obtenção da conclusão do lema acima para toda direção $\nu \in \Gamma(\theta, e)$, então, em particular, a fronteira livre é continuamente Lipschitz em torno de 0. Portanto, o Teorema 6.1 se aplica. Sendo assim, enunciamos o seguinte resultado:

Teorema 6.2. *Sejam $\frac{\pi}{4} < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ dado e u uma solução no sentido da viscosidade para nosso* **problema 2** *de fronteira livre. Suponha $G(z)$ continuamente Lipschitz, estritamente crescente e $z^{-\kappa}G(z)$ decrescente em $(0, +\infty)$ para algum $\kappa > 0$. Então, existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\theta_0)$ tal que, se u é estritamente ε-monótona ao longo do cone de direções $\Gamma(\theta, e_N)$, para algum $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $\theta \geq \theta_0$, então em $\mathcal{C}_{1/3}$, $\mathfrak{F}(u)$ é o gráfico de uma função de classe $C^{1,\alpha}$, com $\alpha = \alpha(N, a, \lambda, \Lambda, \theta_0, \kappa)$.*

Observação 6.1. *Uma outra forma de expressar ε-monotonicidade é como segue: u é ε_0-monótona no cone $\Gamma(\theta, e)$, quando*

$$\sup_{B_{\varepsilon sen(\theta)}} u(y - \varepsilon e) \leq u(x),$$

para todo $\varepsilon > \varepsilon_0$.

Um caso similar ao Teorema 6.2 é o seguinte resultado:

Teorema 6.3. *Seja u solução do nosso problema de fronteira livre (veja* **Problema 2***) tal que $F(M, x)$ satisfaz as condições estruturais $(H2)$, $(H4)$, $(H5)$ e suponha que $\omega(s) = \bar{C}s^a$ com $a \in (0, 1]$ e $\bar{C} > 0$ fixado. Suponha, além disso, que:*

(i) existem constantes α_0, α_1 tais que

$$\alpha_0 \leq \frac{u^+(x)}{dist(x, \mathfrak{F}(u))} \leq \alpha_1,$$

(ii) $G(0) > 0$, *G é uma função continuamente Lipschitz, estritamente crescente em* $\mathbb{R}^+$ *e, para uma constante* $\kappa > 0$, *suficientemente grande,* $s^{-\kappa}G(s)$ *é decrescente.*

Então, existem $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ *e* $\bar{\varepsilon} > 0$ *tais que, se para algum* $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ *o conjunto* $\mathfrak{F}(u)$ *está contido numa* ε*-vizinhança do gráfico de uma função Lipschitz* h, $x_N = h(x')$, *com norma Lipschitz*

$$\textit{Lip}(h) \leq tg(\pi/2 - \theta_0)$$

então, em $B'_{1/2} \subset \mathbb{R}^{N-1}$, *existe constante* $\alpha = \alpha(N, a, \bar{C}, \alpha_0, \alpha_1, \lambda, \Lambda, \kappa, \textit{Lip}(h))$ *tal que* h *é uma função de classe* $C^{1,\alpha}$ *com*

6.2 Resultados fracos

Vamos agora voltar ao nosso problema de fronteira livre geral (0.0.3) e examinar a regularidade da fronteira livre. Mostraremos inicialmente que $\mathcal{H}^{N-1}$-q.t.p. $x \in \mathfrak{F}(u_0)$ e, em particular, em todo ponto x_0 da fronteira livre reduzida $\mathfrak{F}(u_0)_{\text{red}}$, u_0 possui um desenvolvimento assintótico adequado. Em primeiro lugar, observe que, se Ω é um conjunto de perímetro finito e se $\partial_{\text{red}}\Omega$ é sua fronteira reduzida, o seguinte teorema estrutural vale (veja [32]).

Teorema 6.4. *Seja* Ω *um conjunto de perímetro finito. Então para todo ponto* $x \in \partial_{red}\Omega$, *existe um vetor normal unitário* $\nu(x)$ *no sentido da teoria geométrica da medida.*

Concluímos, usando os Teoremas 5.4 e 6.4, o seguinte resultado:

Teorema 6.5. *Suponha* F *satisfazendo* $(H1) - (H3)$, (5.1.5) *e que o conjunto* $\{u_0 \equiv 0\}$ *possua densidade positiva uniforme. Se* $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0)_{red}$, *então* u_0 *possui, em* x_0, *o desenvolvimento assintótico*

$$u_0(x) = \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^{\star}(\nu \otimes \nu, x_0)}}\,\langle x - x_0, \nu\rangle^+ + o(|x - x_0|),$$

onde $\nu = \nu(x_0)$. *Em particular, em torno de tais pontos, a fronteira livre* $\mathfrak{F}(u_0)$ *é flat.*

Demonstração. De fato, pelo Teorema 5.4, como em x_0 temos vetor normal no sentido da medida, temos que

$$u_0(x) = \theta\langle x - x_0, \nu\rangle^+ + o(|x - x_0|),$$

onde $\theta = \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^{\star}(\nu\otimes\nu, x_0)}}$. Para $\lambda > 0$, considere a sequência

$$(u_0)_\lambda(x) := \frac{1}{\lambda} u_0(x_0 + \lambda x),$$

temos que

$$(u_0)_\lambda \to \theta\langle x - x_0, \nu\rangle^+.$$

Assim, u_0 satisfaz (6.1.2) e (6.1.3) e, portanto, a propriedade “flatness” segue agora por argumentos contidos em [5] ou [27]. Isto finaliza a prova. □

Então, recapitulando o que vimos nos capítulos anteriores, obtemos propriedades geométricas fracas da fronteira livre provadas até agora

1. Equação totalmente não-linear satisfeita em Ω_0: Em $\Omega_0 := \{u_0 > 0\}$, vale

$$F(D^2u_0, Du_0, x) = 0.$$

2. Crescimento linear ao longo da fronteira livre e continuidade Lipschitz:

$$c\mathrm{dist}(x, \mathfrak{F}(u_0)) \leq u_0(x) \leq C\mathrm{dist}(x, \mathfrak{F}(u_0)).$$

3. Não-degenerescência:

$$\sup_{B_\rho} u_0 \geq c\rho.$$

4. Se F estiver nas condições do Capítulo 3.3, vale a propriedade da estimativa da medida de Hausdorff $\mathcal{H}^{N-1}$ da fronteira livre: para toda bola $B_\rho(x)$ centrada em $\mathfrak{F}(u_0)$,

$$\mathcal{H}^{N-1}(B_\rho(x) \cap \mathfrak{F}(u_0)) \leq C\rho^{N-1}$$

5. Desenvolvimento assintótico: Para todo $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0)_{\mathrm{red}}$, u_0 possui o seguinte desenvolvimento assintótico

$$u_0(x) = \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^\star(\nu \otimes \nu, x_0)}}\langle x - x_0, \nu\rangle^+ + o(|x - x_0|)$$

onde $\nu = \nu(x_0)$ é o vetor normal unitário no sentido da medida teórica em x_0.

6. Condição de fronteira livre no sentido da viscosidade: se $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0)$ é ponto regular, e B é a bola tocante correspondente, então

$$u_0(x) = \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^\star(\nu \otimes \nu, x_0)}}\langle x - x_0, \nu\rangle^+ + o(|x - x_0|)$$

onde ν é a normal unitária a ∂B, interior a Ω_0.

A listagem dos resultados acima (propriedades da geometria fraca relevantes ao nosso problema) nos coloca em posição favorável para a investigação da regularidade da fronteira livre. Vale a pena lembrar a observação 5.9 sob a hipótese do conjunto $\{u_0 \equiv 0\}$ possuir densidade positiva uniforme, $\mathcal{H}^{N-1}(\mathfrak{F}(u_0) \setminus \mathfrak{F}(u_0)_{\text{red}}) = 0$ e que para operadores côncavos (convexos) sem dependência de x, isto é, da forma $F(M)$, não precisamos dessa hipótese de densidade para obtermos tal resultado (veja Teorema 4.2).

Segue do Teoremas 6.5 o seguinte resultado

Teorema 6.6 (Condição de fronteira livre-sentido pontual)**.** *Suponha F satisfazendo $(H1)-(H3)$,* (5.1.5) *e que o conjunto $\{u_0 \equiv 0\}$ possua densidade positiva uniforme. Então para $\mathcal{H}^{N-1}$-q.t.p. $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0)$, vale o seguinte desenvolvimento assintótico*

$$u_0(x) = \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^\star(\nu \otimes \nu, x_0)}}\langle x - x_0, \nu\rangle^+ + o(|x - x_0|)$$

onde ν é o vetor normal unitário interior a $\{u_0 > 0\}$ em x_0.

Demonstração. De fato, seja $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0)_{\text{red}}$ tal que

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^{N-1}(\partial\{u_0 > 0\} \cap B_r(x_0))}{\alpha(N-1)r^{N-1}} \leq 1. \tag{6.2.1}$$

Temos, pelo Teorema 6.5 que

$$(u_0)_\lambda(x - x_0) = \frac{u_0(\lambda(x - x_0))}{\lambda} \to \theta\langle x - x_0, \nu\rangle^+ \quad \text{quando} \quad \lambda \to 0$$

onde $\theta = \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{F^\star(\nu\otimes\nu, x_0)}}$. Como o conjunto $\{u_0 \equiv 0\}$ possui densidade positiva uniforme, $\mathcal{H}^{N-1}(\mathfrak{F}(u_0) \setminus \mathfrak{F}^\star(u_0)) = 0$ e a densidade superior (6.2.1) para $\mathcal{H}^{N-1}$-q.s em $\mathfrak{F}(u_0)$, a prova está completa. $\square$

6.3 Regularidade $C^{1,\alpha}$ da fronteira livre

Nesta seção, sob a hipótese natural de homogeneidade de F, mostraremos que a fronteira livre reduzida $\partial_{\text{red}}\{u_0 > 0\} := \mathfrak{F}(u_0)_{\text{red}}$ é localmente o gráfico de uma função $C^{1,\alpha}$. Em particular, para os pontos da fronteira livre, vale a seguinte condição de fronteira livre

$$F(\nabla u_0 \otimes \nabla u_0) = 2\int \beta$$

vale no sentido clássico. Vamos agora obter regularidade da fronteira livre.

Teorema 6.7 (Primeiro Teorema de Regularidade)**.** *Suponha F satisfazendo as condições $(H1)-(H5)$, e que $F(M,\cdot) \in \mathrm{Lip}$. Seja u_0 o limite uniforme das soluções minimais para a equação (E_ε) e que $\{u_0 = 0\}$ possui densidade positiva uniforme. Então a fronteira livre $\mathfrak{F}(u_0) = \partial\{u_0 > 0\} \cap \Omega$ é uma superfície de classe $C^{1,\alpha}$ numa vizinhança de $\mathcal{H}^{N-1}$-q.t.p $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0)_{red}$. Em particular, $\mathfrak{F}(u_0)$ é uma superfície de classe $C^{1,\alpha}$ numa vizinhança de $\mathcal{H}^{N-1}$-q.t.p de $\mathfrak{F}(u_0)$. Além disso, ao longo da parte suave de $\mathfrak{F}(u_0)$ temos a condição de fronteira livre*

$$F(\nabla u_0 \otimes \nabla u_0, z) = 2\mathrm{T}.$$

Demonstração. A prova deste teorema segue do célebre programa desenvolvido por Luís Caffarelli: "Flat free boundaries are Lipschitz"e "Lipschitz free boundaries are superfaces $C^{1,\alpha}$". Estes resultados foram recentemente desenvolvida em grande generalidade para equações totalmente não-lineares com coeficientes variáveis por Ferrari e Argiolas-Ferrari em [27] ou [28], como visto na seção anterior. Veja também [29], [36] e [46, 47] para futuros detalhes. Pequenas adaptações nos argumentos em [27] e [28] provam o Teorema 6.7. De fato, basta observar que a função limite u_0 é uma solução admissível no sentido da viscosidade com

$$G(z,\nu,x) := \sqrt{z - \frac{2\mathrm{T}}{F^\star(\nu \otimes \nu, x_0)}}$$

De fato, ela é localmente Lipschitz e possui crescimento linear ao longo da fronteira livre $\mathfrak{F}(u_0)$. Contudo, como o conjunto $\{u_0 \equiv 0\}$ possui densidade positiva uniforme, segue que $\mathcal{H}^{N-1}(\mathfrak{F}(u_0) \setminus \mathfrak{F}(u_0)_{\text{red}}) = 0$ então, u_0 é, para $\mathcal{H}^{N-1}$-q.t.p., um 1-plano de solução. Em particular, em qualquer tal ponto x_0, a dilatação

$$(u_0)_\tau(x - x_0) = \frac{u_0(\tau(x-x_0))}{\tau}, \quad \text{para} \quad \tau \quad \text{pequeno},$$

satisfaz as hipóteses do Teorema 6.3. □

Conclusão: Tomando-se u_0 o limite das soluções minimais, $\Omega' = \{u_0 = 0\}$ e considere $\Gamma = \partial\{u_0 > 0\}$, u_0 resolve o problema de cavidade (0.0.3),

$$\left\{ \begin{array}{rcll} F(D^2u, x) & = & 0 & \text{em} \quad \Omega \setminus \Omega' \\ u & = & \varphi & \text{em} \quad \partial\Omega \\ u = 0, F(\nabla u_0 \otimes \nabla u_0, z) & = & 2\mathrm{T} & \text{em} \quad \partial\Omega' \end{array} \right. \tag{6.3.1}$$

em toda parte suave da fronteira livre.

Um importante caso particular diz respeito às equações côncavas com coeficientes constantes, onde uma condição de fronteira livre constante é esperado, sob a condição de o operador ser invariante por rotacões. Neste caso, o Teorema 5.2 nos dá medida total da fronteira livre reduzida, a qual é provado ser localmente uma superfície $C^{1,\alpha}$. Mais precisamente temos o seguinte resultado:

Teorema 6.8 (Segundo Teorema de Regularidade)**.** *Seja* $F\colon \mathcal{S}(N) \to \mathbb{R}$ *operador côncavo uniformemente eliptico. Suponha que* F *é invariante por rotações, i.e.,*

$$F(M) = f(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n),$$

onde $(\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n)$ *são autovalores de* M. *Seja* u_0 *o limite das soluções mínimas para a equação* (2)*. Então a fronteira livre* $\partial\{u_0 > 0\}$ *é localmente uma superfície suave* $C^{1,\alpha}$*, para* $\mathcal{H}^{N-1}$*-q.s. em* $\mathfrak{F}(u_0)$ *. Além disso,*

$$|\nabla u_0(z)| \equiv \text{Const.}$$

ao longo da parte suave da fronteira livre.

6.4 Exemplos

Nesta seção, iremos aplicar a teoria desenvolvida para alguns casos particulares, por exemplo as abordadas pela Teoria de Alt-Caffarelli.

Exemplo 6.1 (Teoria de Alt-Caffarelli)**.** *Suponha* $F(D^2u) = \text{tr}(D^2u)$*. Neste caso, obtemos pela teoria desenvolvida que, ao longo da parte suave da fronteira livre* $\mathfrak{F}(u_0)$*, temos* $F(\nabla u_0 \otimes \nabla u_0) = 2\text{T}$*. Por outro lado,*

$$F(\nabla u_0 \otimes \nabla u_0) = \text{tr}(\nabla u_0 \otimes \nabla u_0) = |\nabla u_0|^2.$$

Portanto, u_0 *resolve o problema de Cavidade*

$$\begin{cases} \Delta u_0 &= 0 \quad \textit{em} \quad \Omega \setminus \Omega' \\ u &= \varphi \quad \textit{em} \quad \partial\Omega \\ u = 0, |\nabla u_0| &= \sqrt{2\text{T}} \quad \textit{em} \quad \partial\Omega' \end{cases}$$

Exemplo 6.2 (Operadores da forma não-divergente)**.** *Seja* $A(x)$ *uma matriz* $N \times N$ *simétrica e elíptica. Considere o operador* $F(D^2u, x) = \text{tr}(A(x)D^2u)$*. Neste caso, ao longo da parte suave da fronteira livre,* $F(\nabla u_0 \otimes \nabla u_0, z) = 2\text{T}$*. Por outro lado,*

$$F(\nabla u_0 \otimes \nabla u_0, z) = \text{tr}(A(z)\nabla u_0 \otimes \nabla u_0) = \langle A(z)\nabla u_0, \nabla u_0\rangle.$$

Portanto, u_0 *resolve o problema de Cavidade*

$$\begin{cases} \text{tr}(A(x)D^2u) &= 0 \quad \textit{em} \quad \Omega \setminus \Omega' \\ u &= \varphi \quad \textit{em} \quad \partial\Omega \\ u = 0, |\nabla u_0| &= \sqrt{\frac{2\text{T}}{\langle A(z)\nu, \nu\rangle}} \quad \textit{em} \quad \partial\Omega' \end{cases}$$

Exemplo 6.3 (Operadores de Pucci)**.** *Para operadores de Pucci*

$$F(D^2u) = \inf_{A \in \mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}} \mathrm{tr}(AD^2u),$$

obtemos a seguinte condição de fronteira livre

$$\begin{cases} \inf_{A \in \mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}} \mathrm{tr}(AD^2u_0) & = & 0 \quad \textit{em} \quad \Omega \setminus \Omega' \\ u & = & \varphi \quad \textit{em} \quad \partial\Omega \\ u = 0, |\nabla u_0| & = & \sqrt{\frac{2\mathrm{T}}{\inf_{A \in \mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}} \langle A(z)\nu, \nu \rangle}} \quad \textit{em} \quad \partial\Omega' \end{cases}$$

Exemplo 6.4. *Um operador muito importante em geometria é o seguinte: Considere uma matriz $M \in \mathcal{S}(N)$ diagonalizada da forma*

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix}$$

e defina o operador

$$F\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix}\right) = (1+\lambda_1^3)^{1/3} + (1+\lambda_2^3)^{1/3} + \ldots + (1+\lambda_N^3)^{1/3}.$$

É fácil verificar que $F^\star(M) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_N = \mathrm{tr}(M)$. Assim, para operadores dessa forma, temos uma condição de fronteira livre bastante simples que coincide com a condição da Teoria de Alt-Caffarelli, isto é,

$$|\nabla u_0| = \sqrt{2\mathrm{T}}.$$

Apêndice A

Elementos da teoria geométrica da medida

Nesta seção, iremos destacar algumas definições e resultados da teoria geométrica da medida. No decorrer do texto, iremos omitir algumas demonstrações, mas sempre citando as referências sobre o assunto.

A.1 Medida de Hausdorff

Vamos agora introduzir a chamada *medida de Hausdorff*, a qual será utilizada durante o texto. No que segue, usaremos a ordem de [19] ou [48].

Definição A.1. *Seja* $E \subset \mathbb{R}^N$, $0 \leq \gamma < \infty$, $0 < \delta \leq \infty$. *Defina*

$$\mathcal{H}_\delta^\gamma(E) := \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\alpha(\gamma)\left(\frac{\mathrm{diam} A_j}{2}\right)^\gamma \quad | \quad E \subset \cup_{j=1}^{\infty} A_j, \quad \mathrm{diam}\, A_j \leq \delta\right\}$$

onde $\alpha(0) = 1$ *e para* $\gamma > 1$, $\alpha(\gamma) := \frac{\pi^{\gamma/2}}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+1\right)}$. *Aqui* $\Gamma(\gamma) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\gamma-1}dx$ *é a função gama usual. Definimos a medida de Hausdorff* γ*-dimensional em* $\mathbb{R}^N$ *como*

$$\mathcal{H}^\gamma(A) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^\gamma(A).$$

Note que se γ for um inteiro positivo, então $\alpha(\gamma)$ representa precisamente o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^\gamma$. Por essa, razão incluímos a constante normalizada na Definição A.1 de modo que $\mathcal{H}^k$ coincida com a área da superfície k-dimensional de certos conjuntos. Vamos agora listar algumas propriedades da medida de Hausdorff importantes cujas demonstrações encontram-se em [32].

(i) $\mathcal{H}^\gamma$ é uma medida de Borel regular. Note que $\mathcal{H}^\gamma$ não é medida de Radon para $0 \leq \gamma < N$. Além disso $\mathcal{H}^{N+\varepsilon} \equiv 0$, para todo $\varepsilon > 0$.

(ii) $\mathcal{H}^0$ é a medida de contagem e $\mathcal{H}^N(E) = |E|$ (medida de Lebesgue de E). Este último é uma conseqüência da desigualdade chamada isodiamétrica: para todo conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^N$,

$$|A| \leq \alpha(N) \left(\frac{\operatorname{diam} A}{2} \right)^N .$$

(iii) $\mathcal{H}^\gamma(\lambda A) = \lambda^\gamma \mathcal{H}^\gamma(A)$ e se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ é Lipschitz, então

$$\mathcal{H}^\gamma(f(A)) \leq [\mathrm{Lip}(f)]^\gamma \mathcal{H}^\gamma(A).$$

(iv) Se $E \subset \mathbb{R}^N$, $\mathcal{H}^\gamma(E) < \infty$, então

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^\gamma(B_r(x) \cap E)}{\alpha(\gamma) r^\gamma} = 0, \quad \mathcal{H}^\gamma - \text{q.t.p} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus E,$$

e

$$\frac{1}{2^\gamma} \leq \limsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^\gamma(B_r(x) \cap E)}{\alpha(\gamma) r^\gamma} \leq 1, \quad \mathcal{H}^\gamma - \text{q.t.p} \quad x \in E.$$

Estes correspondem a propriedade densidade que podemos derivar do teorema de diferenciação de Lebesgue, i.e., se $|E| < \infty$,

$$\lim_{r\to 0} \frac{|B_r(x) \cap E|}{\alpha(N) r^N} = \begin{cases} 1, & \text{para q.t.p} \quad x \in E \\ 0, & \text{para q.t.p} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus E \end{cases}$$

(v) Se $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N, dx)$, $0 \leq \gamma < N$, então $\mathcal{H}^\gamma(\Lambda_\gamma(f)) = 0$, onde

$$\Lambda_\gamma(f) := \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \limsup_{r\to 0} \frac{1}{r^\gamma} \int_{B_r(x)} |f(y)| dy > 0 \right\}$$

(vi) Para todo conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$, existe um único número não-negativo $\mathcal{H}_{\text{dim}}(E)$, tal que:

$$\begin{cases} \mathcal{H}^\gamma(E) = 0, & \text{se} \quad \gamma > \mathcal{H}_{\text{dim}}(E), \\ \mathcal{H}^\gamma(E) = \infty, & \text{se} \quad \gamma < \mathcal{H}_{\text{dim}}(E) \end{cases}$$

O número $\mathcal{H}_{\text{dim}}(E)$ é chamado *dimensão Hausdorff* de E. Podemos calcular esse número da seguinte forma:

$$\mathcal{H}_{\text{dim}}(E) = \inf\{\gamma : \mathcal{H}^\gamma(E) = 0\}.$$

A.2 Conjuntos de perímetro finito

Funções de Sobolev aparecem naturalmente em formulações fracas de certas equações diferenciais parciais. Lembre que uma função pertence ao espaço de Sobolev quando suas derivadas distribucionais são p-integráveis para algum $p \geq 1$. É importante resaltar que a teoria de funções de Sobolev é inadequada para estudar propriedades geométricas e re-gularidade sobre fronteiras de conjuntos. Isto porque a função característica χ_E não pertende ao espaço de Sobolev $W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, independente de quão suave seja E. Para solucionar este problema, vamos trabalhar com funções cuja a primeira derivada parcial fraca são medidas de Radon. Estas são as chamadas *funções de variação limitada*.

Definição A.2. *Seja U conjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Uma função $f \in L^1(U)$ é dita ter variação limitada se*

$$\sup\left\{\int_U f \operatorname{div}\varphi\, dx \mid \varphi \in C_0^1(U;\mathbb{R}^N),\ |\varphi| \leq 1\right\} < \infty.$$

Vamos denotar $BV(U)$ como sendo o espaço das funções de variação limitada. Uma função f pertence a $BV_{\text{loc}}(U)$, se $f \in BV(K)$ para todo $K \Subset U$.

Definição A.3. *Seja U conjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Diremos que um conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$ possui perímetro finito em U se*

$$\chi_E \in BV(U).$$

Note que, pelo Teorema da Representação de Riesz (veja seção 1.8-Teorema 1 de [32]), se $f \in BV(U)$, existe uma única medida de Radon $\mu \in U$, e uma função μ-mensurável $\sigma : U \to \mathbb{R}^N$ com $|\sigma(x)| = 1$ para μ-q.t.p. $x \in U$ tal que

$$\int_U f \operatorname{div}\varphi\, dx = -\int_U \varphi \cdot \sigma\, d\mu \tag{A.2.1}$$

para toda $\varphi \in C_0^1(U;\mathbb{R}^N)$. A ideia chave da Definição A.3 é formalizar o uso do Teorema da Divergência para dizer $Df = \sigma d\mu$.

No que segue, vamos escrever $\|Df\|$ para indicar a medida μ em (A.2.1). Quando um conjunto E possui perímetro finito em U, escrevemos $\|\partial E\|$ para a medida μ, e $\nu_E = -\sigma$. Portanto, podemos escrever

$$\int_E \operatorname{div}\varphi\, dx = \int_U \varphi \cdot \nu_E\, d\|\partial E\|. \tag{A.2.2}$$

Em seguida, definimos o perímetro total de E em U, por

$$\operatorname{Per}(E,U) := \int_U d\,\|\partial E\|.$$

O perímetro total de E, $\operatorname{Per}(E,U)$, é simplesmente denotado por $\operatorname{Per}(E)$.

Exemplo 3. *Se $f \in W^{1,1}(U)$, então $\sigma d\mu = \nabla f\, dx$. Portanto, $W^{1,1}(U) \subset BV(U)$. Se E for subconjunto aberto, suave com $\mathcal{H}^{N-1}(\partial E \cap K) < \infty$ para todo compacto K, então*

$$\operatorname{Per}(E, U) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial E \cap U).$$

A partir da perspectiva de análise funcional, perímetro é semicontínuo inferiormente. Mais precisamente

Teorema A.1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^N$ conjunto aberto e $\{f_j\}$ uma sequencia de funções em $BV(U)$ o qual converge em $L^1_{loc}(U)$ para f. Então*

$$\|Df\|(U) \leq \liminf_{j\to\infty} \|Df_j\|(U).$$

Demonstração. Seja $\varphi \in C^1_0(U;\mathbb{R}^N)$, $|\varphi| \leq 1$. Temos,

$$\begin{aligned}
\int_U f \operatorname{div}\varphi\, dx &= \lim_{j\to\infty} \int_U f_j \operatorname{div}\varphi\, dx = -\lim_{j\to\infty} \int_U \varphi \cdot \sigma_j d\|Df_j\| \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \|Df_j\|(U).
\end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre todas as $\varphi \in C^1_0(U;\mathbb{R}^N)$, $|\varphi| \leq 1$, concluímos a prova do teorema. $\square$

Outra característica importante da teoria é que os conjuntos de perímetro finito podem ser aproximados por conjuntos suave

Teorema A.2. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^N$ conjunto aberto e $f \in BV(U)$. Existe sequência de funções $\{f_j\} \subset BV(U) \cap C^\infty(U)$, tal que*

$$f_j \to f \quad \text{em} \quad L^1(U) \quad \text{e} \quad \|Df_j\|(U) \to \|Df\|(U) \quad \text{quando} \quad j \to \infty.$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ dado e $\{U_j\}$ sequencia de conjuntos abetos e limitados com $\bar{U}_j \subset U$. Podemos supor que $\|Df\|(U \setminus U_1) < \frac{\varepsilon}{3}$. Defina

$$V_1 = U_1 \quad \text{e} \quad V_j := U_{j+1} \setminus U_j$$

e seja ξ_j uma partição da unidade subordinada a $\{V_j\}$, i.e.,

$$\xi_j \in C^\infty_0(V_j),\ 0 \leq \xi_j \leq 1,\ \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \equiv 1 \quad \text{em} \quad U.$$

Agora, escolha funções mollifiers da forma

$$\mu_{\varepsilon_j}(x) := \frac{1}{\varepsilon_j^n}\mu\left(\frac{x}{\varepsilon_j}\right),$$

de modo que $\operatorname{supp}(\mu_{\varepsilon_j} \star (f\xi_j)) \subset V_j$, e

$$\int_U |\mu_{\varepsilon_j} \star (f\xi_j) - f\xi_j| + |\mu_{\varepsilon_j} \star (fD\xi_j) - fD\xi_j| dx \leq \frac{\varepsilon}{2^j}. \tag{A.2.3}$$

Defina $f_\varepsilon := \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{\varepsilon_j} \star (f\xi_j) \in C^\infty(U)$. Tendo em conta que $f = \sum_{j=1}^{\infty} f\xi_j$,segue que $f_\varepsilon \to f$ em $L^1(U)$. Agora, para $\varphi \in C_0^1(U;\mathbb{R}^N)$, $|\varphi| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned}
\int_U f_\varepsilon \operatorname{div}(\varphi) dx &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_U f \operatorname{div}(\xi_j(\nu_{\varepsilon_j} \star \varphi)) dx \\
&- \sum_{j=1}^{\infty} \int_U \varphi(\nu_{\varepsilon_j} \star (fD\xi_j) - fD\xi_j) dx.
\end{aligned}$$

De (A.2.3), o segundo termo do lado direito da expressão acima tende a zero quando $\varepsilon \to 0$ e como cada ponto em U pertence no máximo a três dos conjuntos $\{V_j\}$, podemos estimar o primeiro termo do lado direito como

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{\infty} \int_U f \operatorname{div}(\xi_j(\nu_{\varepsilon_j} \star \varphi)) dx\right| &\leq \|Df\|(U) + \sum_{j=2}^{\infty} \|Df\|(V_j) \\
&\leq \|Df\|(U) + 3\|Df\|(U \setminus U_1) \\
&< \|Df\|(U) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Do Teorema A.1, podemos concluir que $\lim_{\varepsilon\to 0} \|Df_\varepsilon\|(U) = \|Df\|(U)$, e o teorema está provado. $\square$

O próximo teorema mostra compacidade em L^1. Mais precisamente:

Teorema A.3. *Seja $U \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $\{f_j\} \subset BV(U)$ satisfazendo*

$$\|f_j\|_{BV(U)} := \|f_j\|_{L^1(U)} + \|Df_j\|(U) < \infty.$$

Então existe subsequencia $\{f_{j_k}\}$ e uma função $f \in BV(U)$, tal que

$$f_{j_k} \to f \quad em \quad L^1(U).$$

Demonstração. Para cada f_j, escolha funções $g_j \in C^\infty(U)$, de modo que

$$\sup_j \int_U |Dg_j(x)|dx < \infty \quad \text{e} \quad \int_U |f_j(x) - g_j(x)|dx < \frac{1}{j}.$$

Como $W^{1,1}(U)$ está imerso compactamente em $L^1(U)$, existe uma função $f \in L^1(U)$ de modo que $g_{j_k} \to f$ em $L^1(U)$. Do Teorema A.1, $f \in BV(U)$ e $f_{j_k} \to f$ em $L^1(U)$. $\square$

Vale a pena observar que se $f \in BV(\mathbb{R}^N)$, então a sequencia provada no Teorema A.2 pode ser construída de modo que cada f_j possuem suporte compacto. Portanto, as desigualdades de Sobolev e Poincaré podem ser derivadas como usual para funções BV. Mais precisamente, existem constantes universais C_1 e C_2 tais que

$$\|f\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 \|Df\|(\mathbb{R}^N) \tag{A.2.4}$$

para toda $f \in BV(\mathbb{R}^N)$, e também

$$\left\| f - \fint_B f dy \right\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq C_2 \|Df\|(B) \tag{A.2.5}$$

para toda bola $B = B_r(x) \subset \mathbb{R}^N$ e toda $f \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$.

Uma consequência imediata e muito importante da desigualdade de Sobolev (A.2.4) é a desigualdade isoperimétrica para conjuntos de perímetro finito. O próximo resultado é uma importante ferramenta quando queremos comparar a medida de Lebesgue com a medida de Hausdorff.

Teorema A.4 (Desigualdade Isoperimétrica)**.** *Seja E conjunto de perímetro finito em $\mathbb{R}^N$. Então*

$$\|E\|^{1-\frac{1}{N}} \leq C\text{Per}(E)$$

para alguma constante C. Além disso, para toda bola $B = B_r(x) \subset \mathbb{R}^N$,

$$\min\{|E \cap B|, |B \setminus E|\}^{1-\frac{1}{N}} \leq 2C_1 \text{Per}(E, B),$$

para alguma constante C_1.

A segunda desigualdade no Teorema A.4, conhecida como relação isoperimétrica, segue da desigualdade de Poincaré (A.2.5). Vamos finalizar a seção enunciando um importante resultado para funções de variação limitada.

Teorema A.5 (Traço). *Seja U um domínio limitado Lipschitz. Existe uma aplicação linear limitada $T : BV(U) \to L^1(\partial U, d\mathcal{H}^{N-1})$ tal que*

$$\int_U f \operatorname{div}\varphi dx = -\int_U \varphi \cdot \sigma d\mu + \int_{\partial U} (\varphi \cdot \nu) Tf \, d\mathcal{H}^{N-1},$$

onde σ e μ são como em (A.2.1), *ν é a normal exterior definidaq.t.p. em ∂U e considere $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. Além disso,*

$$Tf(x) = \lim_{r \to 0} \fint_{B_r(x) \cap U} f dy,$$

para q.t.p. $x \in \partial U$.

A função Tf, a qual é $\mathcal{H}^{N-1}$-q.t.p. unicamente definida, é chamada o traço de f em ∂U: uma espécie de "valor de fronteira" de f em ∂U. Note que se $f \in C(\bar{U}) \cap BV(U)$, então $Tf = f_{|\partial U}$.

A.3 Fronteira reduzida

Vamos agora introduzir um conceito muito importante para investigação sobre propriedades de suavidade para problemas de fronteira livre. Em toda essa subseção, E indicará um conjunto de perímetro localmente finito em $\mathbb{R}^N$, i.e. , $\chi_E \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$.

Definição A.4. *Um ponto $x \in \mathbb{R}^N$ é dito pertencer a fronteira livre de E, $x \in \partial_{\text{red}} E$, se*

(i) $\|\partial E\|(B_r(x)) > 0$ *para todo* $r > 0$,

(ii) $\lim_{r \to 0} \fint_{\partial B_r(x)} \nu_E(y) d\|\partial E\|(y) = \nu_E(y)$, *e*

(iii) $|\nu_E(x)| = 1$.

Note que, como $\|\partial E\|$ é uma medida de Radon em $\mathbb{R}^N$, segue do Teorema de Diferenciação de medida de Lebesgue-Besicovitch que $\|\partial E\|(\mathbb{R}^N \setminus \partial_{\text{red}} E) = 0$ (Veja [19]).

Exemplo 4. *Seja E domínio limitado de classe C^1. Então, pelo Teorema 2.2.9 e (2.6) de [19], temos*

$$D\chi_E = \nu d\mathcal{H}^{N-1} \quad \textit{para todo} \quad x \in \partial E,$$

onde ν é a normal exterior de ∂E. Em particular, $\nu_E = \nu$ e $\partial_{\text{red}} E = \partial E$. Se E for domínio limitado Lipschitz, ainda temos $D\chi_E = \nu d\mathcal{H}^{N-1}$ para $\mathcal{H}^{N-1}$-q.t.p $x \in \partial E$, e $\mathcal{H}^{N-1}(\partial E \setminus \partial_{\text{red}} E) = 0$.

O próximo lema é uma versão preliminar do teorema da divergência:

Lema A.1. *Seja $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^M)$. Então, para quase todo $r > 0$,*

$$\int_{E\cap B_r(x)} div\varphi\, dy = \int_{B_r(x)} \varphi \cdot \nu_E d\|\partial E\| + \int_{E\cap\partial B_r(x)} \varphi \cdot \nu d\mathcal{H}^{N-1}$$

onde ν denota o vetor normal exterior a $\partial B_r(x)$.

Demonstração. Para simplificar a notação, assuma $x = 0$. Seja η_ε função linear por partes satisfazendo:

$$\eta_\varepsilon \equiv 1 \quad \text{em} \quad [0, r], \quad \eta_\varepsilon \equiv 0 \quad \text{em} \quad [r+\varepsilon, \infty)$$

e denote $h_\varepsilon := \eta_\varepsilon(|x|)$. De (A.2.2) e do teorema da divergência clássico, obtemos

$$\begin{aligned} \int_E \operatorname{div}(h_\varepsilon\varphi)dy &= \int_{\mathbb{R}^N} h_\varepsilon\varphi\nu_E d\|\partial E\| \\ &= \int_E h_\varepsilon \operatorname{div}\varphi dy + \int_E Dh_\varepsilon \cdot \varphi dy. \end{aligned} \tag{A.3.1}$$

Note que $Dh_\varepsilon \equiv 0$ em $0 < |y| < r$ e em $r + \varepsilon < |y|$, enquanto

$$Dh_\varepsilon(y) = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{y}{|y|} \quad \text{em} \quad A := \{y : r < |y| < r + \varepsilon\}.$$

Portanto, (A.3.1) torna-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} h_\varepsilon\varphi\nu_E d\|\partial E\| = \int_E h_\varepsilon \operatorname{div}\varphi dy - \frac{1}{\varepsilon}\int_{E\cap A} \varphi \cdot \frac{y}{|y|} dy. \tag{A.3.2}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ em (A.3.2), levando em conta que para toda $\xi \in L^1$,

$$\partial_r \left(\int_{B_r} \xi dx \right) = \int_{\partial B_r} \xi d\mathcal{H}^{N-1},$$

para quase todo $r > 0$, concluímos a prova do lema. □

O próximo lema aborda o comportamento com relação à densidade de E próximo à fronteira reduzida.

Lema A.2 (Veja [19]-Lema 2.3.4)**.** *Existem constantes positivas c e C, dependendo somente da dimensão e E, tais que para todo $x \in \partial_{\text{red}} E$,*

(1) $\liminf_{r\to 0} \dfrac{|B_r(x)\cap E|}{r^N} > c$,

(2) $\liminf_{r\to 0} \dfrac{|B_r(x)\setminus E|}{r^N} > c$,

(3) $\liminf_{r\to 0} \dfrac{\|\partial E\|(B_r(x))}{r^{N-1}} > c$,

(4) $\limsup_{r\to 0} \dfrac{\|\partial E\|(B_r(x))}{r^{N-1}} \leq C$,

(5) $\limsup_{r\to 0} \dfrac{\|\partial (E\cap B_r(x))\|(\mathbb{R}^N)}{r^{N-1}} \leq C$.

Demonstração. Inicialmente tomando o supremo sobre todas $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$, satisfazendo $|\varphi| \leq 1$ no Lema A.1, concluímos para q.t. $r > 0$, que

$$\|\partial(E\cap B_r(x))\|(\mathbb{R}^N) \leq \|\partial E\|(B_r(x)) + \mathcal{H}^{N-1}(E\cap \partial B_r(x)). \tag{A.3.3}$$

Agora, tomando $\varphi \equiv \nu_E(x)$ em $B_r(x)$ no Lema A.1 obtemos

$$\int_{B_r(x)} \nu_E(x)\cdot \nu_E d\|\partial E\| = -\int_{E\cap\partial B_r(x)} \nu_E(x)\cdot \nu d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{A.3.4}$$

Como $x \in \partial_{\text{red}} E$,

$$\lim_{r\to 0} \fint_{\partial B_r(x)} \nu_E(x)\cdot \nu d\|\partial E\|(y) = |\nu_E(x)|^2 = 1.$$

Portanto, segue de (A.3.3) que, para quase todo $r > 0$ suficientemente pequeno

$$\frac{1}{2}\|\partial E\|(B_r(x)) \leq \mathcal{H}^{N-1}(E\cap B_r(x)). \tag{A.3.5}$$

Combinando (A.3.3) e (A.3.5), obtemos

$$\|\partial(E\cap B_r(x))\|(\mathbb{R}^N) \leq 3\mathcal{H}^{N-1}(E\cap B_r(x)). \tag{A.3.6}$$

Defina $g(r) := |E\cap B_r(x)|$. Para q.t. $r > 0$,

$$g'(r) = \mathcal{H}^{N-1}(E\cap\partial B_r(x)).$$

Combinando agora a desigualdade isoperimétrica, Teorema A.4, e (A.3.6), deduzimos que, para q.t. $r > 0$ suficientemente pequeno,

$$g(r)^{1-\frac{1}{N}} \leq Cg'(r).$$

Isto nos diz que

$$\frac{1}{C} \leq g(r)^{\frac{1-N}{N}} g'(r) = n(g^{1/N}(r))'.$$

A desigualdade acima implica imediatamente que, para q.t. $r > 0$ suficientemente pequeno

$$|E \cap B_r(x)| = g(r) \geq cr^N.$$

Isto prova (1). Como

$$\|\partial E\| = \|\partial(\mathbb{R}^N \setminus E)\|$$

e $\nu_E = -\nu_{\mathbb{R}^N \setminus E}$, (2) segue de (1). A afirmação (3) segue agora de (1), (2) e da desigualdade isoperimétrica (a segunda desigualdadedo TeoremaA.4). O item (4) segue de (A.3.5) e (5) é obtido combinando (4) e (A.3.3). $\square$

Agora voltamos nossa atenção para uma técnica fundamental no que diz respeito a "blow-up" em torno de pontos da fronteira livre.

Definição A.5. *Seja $x \in \partial_{\mathrm{red}} E$. Definimos o plano tangente no sentido da teoria geométrica da medida para E em x como*

$$H(x) := \{y \in \mathbb{R}^N \,|\, \nu_E(x) \cdot (y - x) = 0\}.$$

Definimos também os semi-espaços no sentido da teoria geométrica da medida como

$$H^+(x) := \{y \in \mathbb{R}^N \,|\, \nu_E(x) \cdot (y - x) \geq 0\}$$

$$H^-(x) := \{y \in \mathbb{R}^N \,|\, \nu_E(x) \cdot (y - x) \leq 0\}$$

e para $r > 0$, chamamos

$$E_r := \{y \in \mathbb{R}^N \,|\, r(y - x) + x \in E\}.$$

O próximo resultado diz que, para r suficientemente pequeno, $E \cap B_r(x)$ está se aproximando do conjunto $H^-(x) \cap B_r(x)$. Mais precisamente

Teorema A.6 (Veja [19]). *Seja $x \in \partial_{\text{red}}E$. Então $\chi_{E_r} \to \chi_{H^-(x)}$ in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, quando $r \to 0$.*

Demonstração. Para simplificar as notações, vamos supor que $x = 0$ e $\nu = e_N$. Fixe $R > 0$ e seja $D_r := E_r \cap B_R$, e $g_r(x) := \frac{y}{r}$. Dado qualquer $\varphi \in C^1_0(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, com $|\varphi| \leq 1$, usando o teorema da mudança de variável temos,

$$\begin{aligned}\int_{D_r} \text{div}\varphi(Z)dZ &= \frac{1}{r^{N-1}} \int_{E \cap B_{rR}} \text{div}(\varphi \circ g_r(y))dy \\ &= \frac{1}{r^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^N} (\varphi \circ g_r) \cdot \nu_{E \cap B_{rR}} d\|\partial(E \cap B_{rR})\| \\ &\leq C < \infty,\end{aligned}$$

do Lema A.2, item (5). Portanto, $\|\partial D_r\|(\mathbb{R}^N) \leq C < \infty$, para $0 < r \leq 1$, i.e., D_r é um conjunto de perímetro finito. Certamente, $\|\chi_{D_r}\| < \omega_N R^N$, pois $D_r \subset B_R$. Portanto, $\|\chi_{D_r}\|_{BV} < C$ e, portanto, pelo Teorema A.3, a menos de subsequencia, $\chi_{E_r} \to f$ em $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, para alguma $f \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos assumir que $\chi_{E_r} \to f$ q.t.p, portanto, para algum conjunto de perímetro localmente finito F, $f = \chi_F$ q.t.p. O objetivo agora é provar que $F = H^-(0)$. Sejam $\|\partial F\|$ e ν_F como em (A.2.1). Para toda $\varphi \in C^1_0(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \cdot \nu_{E_r} d\|\partial E_r\| = \int_{E_r} \text{div}\varphi\, dx \to \int_F \text{div}\varphi\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \cdot \nu_F d\|\partial F\|.$$

Isto mostra que $\nu_{E_r}\|\partial E_r\| \to \nu_F\|\partial F\|$ no sentido de medida. Sabemos que para quase todo $R > 0$, $\|\partial F\|(\partial B_R) = 0$. Assim, para quase todo $R > 0$,

$$\int_{B_R} \nu_{E_r} d\|\partial E_r\| \to \int_{B_R} \nu_F d\|\partial F\|. \tag{A.3.7}$$

Contudo, para toda $\varphi \in C^1_0(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \cdot \nu_{E_r} d\|\partial E_r\| = \frac{1}{r^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^N} (\varphi \circ g_r) \cdot \nu_E d\|\partial E\|.$$

Segue que $\|\partial E_r\|(B_R) = \frac{1}{r^{N-1}}\|\partial E\|(B_{rR})$ e, portanto,

$$\int_{B_R} \nu_{E_r} d\|\partial E_r\| = \frac{1}{r^{N-1}} \int_{B_{rR}} \nu_E d\|\partial E\|.$$

Dividindo a expressão acima por R^N e fazendo $r \to 0$, obtemos, pois $0 \in \partial_{\text{red}}E$, que

$$\lim_{r \to 0} ⨍_{B_R} \nu_{E_r} d\|\partial E_r\| = e_N.$$

Para $R > 0$ de modo que $\|\partial F\|(\partial B_R) = 0$, temos, do Teorema A.1,

$$\begin{aligned}\|\partial F\|(\partial B_R) &\leq \liminf_{r\to 0} \|\partial E_r\|(B_R) = \lim_{r\to 0} \int_{B_R} e_N \nu_{E_r} d\|\partial E_r\| \\ &= \int_{B_R} e_N \nu_F d\|\partial F\|,\end{aligned}$$

por (A.3.7). Como $|\nu_F| = 1$, $\|\partial F\|$ q.s., da desigualdade acima, concluímos que

$$\nu_F \equiv e_N,\ \|\partial F\| \text{ q.s.}$$

Em particular, para toda $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$,

$$\int_F \mathrm{div}\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \cdot e_N d\|\partial F\|.$$

Agora, seja η_ε função mollifier, e defina $f_\varepsilon := \eta_\varepsilon \star \chi_F$. Então

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_\varepsilon \mathrm{div}\varphi dx = \int_F \mathrm{div}(\eta_\varepsilon \star \varphi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon \star (\varphi \cdot e_N) d\|\partial F\|.$$

Além disso, aplicando o Teorema da Divergência,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_\varepsilon \mathrm{div}\varphi dx = -\int_{\mathbb{R}^N} Df_\varepsilon \cdot \varphi dx.$$

A conclusão é que $\partial_j f_\varepsilon = 0$, para $j = 1, 2, \cdots, N-1$ e $\partial_N f_\varepsilon \leq 0$. Portanto, quando $\varepsilon \to 0$, a menos de um conjunto $\mathcal{H}^N$ negligente,

$$F = \{Y \in \mathbb{R}^N : Y_N \leq \alpha\}, \quad \text{para algum número real } \alpha.$$

Finalmente, devemos mostrar que $\alpha = 0$. Isto é consequência da propriedade de densidade listada no Lema (A.2). De fato, assuma que $\alpha > 0$, então, como $\chi_{E_r} \to \chi_F$ em $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, teríamos

$$\omega_N \alpha^N = |F \cap B_\alpha| = \lim_{r\to 0} |E_r \cap B_\alpha| = \lim_{r\to 0} \frac{|B_{\alpha r} \cap E|}{r^N}.$$

Mas o item (2) no Lema (A.2) nos levaria a

$$\omega_N \alpha^N r^N = |B_{\alpha r} \setminus E| + |B_{\alpha r} \cap E| \geq c r^N \alpha^N + \omega_N \alpha^N.$$

Fazendo $r \to 0$, obtemos uma contradição. Similarmente, se α for negativo, o item (1) do mesmo lema nos leva a uma contradição. $\square$

Note que, da prova do Teorema A.6, obtemos

$$\frac{\|\partial E\|(B_r)}{r^{N-1}} = \|\partial E_r\|(B_1).$$

Como $\|\partial H^-(0)\|(\partial B_1) = \mathcal{H}^{N-1}(B_1 \cap H(0)) = 0$, deduzimos que

$$\lim_{r\to 0} \frac{\|\partial E\|(B_r)}{r^{N-1}} = \|\partial H^-(0)\|(B_1) = \mathcal{H}^{N-1}(B_1 \cap H(0)) = \alpha(N-1).$$

Isto é,

$$\lim_{r\to 0} \frac{\|\partial E\|(B_r)}{\alpha(N-1)r^{N-1}} = 1. \tag{A.3.8}$$

A próxima etapa é mostrar que a fronteira reduzida, $\partial_{\text{red}}E$, de um conjunto de perímetro localmente finito E é uma hipersuperfície de casse C^1, a menos de um conjunto $\|\partial E\|$ negligente. O próximo teorema fornece uma descrição completa da estrutura da fronteira reduzida, mas primeiro mostraremos um interessante lema:

Lema A.3. *Dado um conjunto de perímetro localmente finito E, existe uma constante C, dependendo somente de E e dimensão N, tal que, para qualquer conjunto de Borel $\mathcal{B} \subset \partial_{\text{red}}E$, vale*

$$\mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{B}) \leq C\|\partial E\|(\mathcal{B}).$$

Demonstração. Fixe $\epsilon, \delta > 0$. Como $\|\partial E\|$ é uma medida de Radon

$$\|\partial E\|(U) \leq \|\partial E\|(B) + \epsilon,$$

para algum conjunto aberto $U \subset B$. Do Lema A.2, item (3), se $x \in \partial_{\text{red}}E$,

$$\lim_{r\to 0} \frac{\|\partial E\|(B_r(x))}{r^{N-1}} > c, \tag{A.3.9}$$

onde c só depende de N e E. Defina

$$\Lambda := \left\{ B_r(x) : x \in \mathcal{B},\ B_r(x) \subset U,\ r < \frac{\delta}{8} \quad \text{e} \quad \|\partial E\|(B_r(x)) > cr^{N-1} \right\}.$$

Segue do Teorema da convergência de Vitali que existe uma família de bolas disjuntas $\{B_{r_j}(x)\}_{j=1}^{\infty} \subset \Lambda$, satisfazendo $\mathcal{B} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{5r_j}(x_j)$. Como $\text{diam} B_{5r_j}(x) \leq \delta$, temos

$$\mathcal{H}^{N-1}_{\delta}(\mathcal{B}) \leq \alpha(N-1) \sum_{j=1}^{\infty} (5r_j)^{N-1} = C \sum_{j=1}^{\infty} (r_j)^{N-1}.$$

Assim, tendo em vista (A.3.9), podemos escrever

$$\mathcal{H}_\delta^{N-1}(\mathcal{B}) \leq C \sum_{j=1}^{\infty} \|\partial E\|(B_{r_j}(x_j)) \leq C\|\partial E\|(U) \leq C\{\|\partial E\|(\mathcal{B}) + \epsilon\}.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ e depois $\delta \to 0$, obtemos o resultado desejado. $\square$

Teorema A.7. *Seja E conjunto de perímetro localmente finito em $\mathbb{R}^N$. Então*

$$\partial_{\text{red}} E = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \right) \cup N,$$

onde cada C_j é subconjunto compacto de uma hipersuperfície S_j de classe C^1 e com as notações anteriores, $\|\partial E\|(N) = 0$. Além disso, $\nu_E|_{S_j}$ é normal ao conjunto S_j e $\|\partial E\| = \mathcal{H}^{N-1} \lfloor \partial_{\text{red}} E$, i.e., para todo abeto A,

$$\operatorname{Per}(E, A) := \|\partial E\|(A) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial_{\text{red}} E \cap A).$$

Demonstração. Com as notações introduzidas, segue do Teorema **??** que para todo $x \in \partial_{\text{red}} E$,

$$\lim_{r \to 0} \frac{|B_r(x) \cap E \cap H^+(x)|}{r^N} = \lim_{r \to 0} \frac{|(B_r(x) \setminus E) \cap H^-(x)|}{r^N} = 0. \tag{A.3.10}$$

Pelo Teorema de Egorov, podemos achar conjuntos $\|\partial\|$-mensuráveis disjuntos

$$\{F_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \partial_{\text{red}} E,$$

tais que,

(i) $\|\partial E\|(F_i) < \infty$, $\|\partial E\| \left(\partial_{\text{red}} E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = 0$,

(ii) a convergência em (A.3.10) é uniforme sobre F_i, para cada $i = 1, 2, \cdots$.

Agora, para cada i, pelo Teorema de Lusin, existem conjuntos compactos disjuntos $\{E_i^\lambda\}_{\lambda=1}^{\infty} \subset F_i$, tal que

$$\|\partial E\| \left(F_i \setminus \bigcup_{\lambda=1}^{\infty} E_i^\lambda \right) = 0 \quad \text{e} \quad \nu \Big|_{E_i^\lambda} \quad \text{é contínua.}$$

Por reindexação dos conjuntos, podemos dizer que $\{E_i^\lambda\}_{i,\lambda=1}^{\infty} = \{C_j\}_{j=1}^{\infty}$. Pelas informações que temos até agora temos,

(a) $\partial_{\text{red}} E + \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \right) \cup N$, $\|\partial E\|(N) = 0$,

(b) a convergência em (A.3.10) é uniforme em C_j, e $\nu\Big|_{C_j}$ é contínua .

Nossa estratégia agora é construir funções C^1, $f_j : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, tais que $f_j = 0$ em C_j e $\nabla f_j = \nu_E$ em C_j. uma vez conseguidas essas funções, a família de hipersuperfícies

$$S_j := \{x \in \mathbb{R}^N : f_j(x) = 0,\, |\nabla f_j(x)| > 1/2\}$$

satisfaz as condições do Teorema. Em vista do teorema de extensão de Whitney (veja por exemplo [26], página 225), tudo que precisamos fazer é verificar que

$$\rho_j(\delta) := \sup \left\{ \frac{|\nu_E(x) \cdot (y-x)|}{|y-x|} : 0 < |y-x| \leq \delta,\, x, y \in C_j \right\} \to 0, \tag{A.3.11}$$

quando $\delta \to 0$. Para este fim, fixe j e um $0 < \epsilon < 1$. De (A.3.10) e das informações em (a) e (b), existe $0 < \delta < 1$, tal que para $z \in C_j$ e $r < 2\delta$

$$|E \cap B_r(z) \cap H^+(z)| < \frac{\epsilon^N}{2^{N+2}} \omega_N r^N \quad \text{e} \quad |E \cap B_r(z) \cap H^-(z)| < \omega_N \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon^N}{2^{N+2}} \right) r^N. \tag{A.3.12}$$

Agora, sejam $x, y \in C_j$ e $\kappa := |x-y| \leq \delta$. Suponha inicialmente que $\nu_E(x) \cdot (y-x) \leq \epsilon\kappa$. Como $\epsilon < 1$,

$$B_{\epsilon k}(y) \subset H^+(x) \cap B_{2\kappa}(x). \tag{A.3.13}$$

De fato, para todo $z = y + z'$, com $|z'| \leq \epsilon\kappa$, $\nu_E(x) \cdot (z-x) > \epsilon\kappa - |z'| \geq 0$. Contudo, a primeira desigualdade em (A.3.12), com $z = x$,

$$|E \cap B_{2\kappa}(x) \cap H^+(x)| \leq \frac{\epsilon^N \omega_N}{4} \kappa^N. \tag{A.3.14}$$

Por outro lado, pela segunda desigualdade de (A.3.12) com $z = y$, temos

$$|E \cap B_{\epsilon\kappa}(y) \cap H^-(y)| > \omega_N \epsilon^N \kappa^N \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon^N}{2^{N+2}} \right) > \frac{\epsilon^N \omega_N}{4} \kappa^N. \tag{A.3.15}$$

Combinando (A.3.13), (A.3.14) e (A.3.15), chegamos a uma contradição. O caso onde $\nu_E(x) \cdot (y-x) \leq -\epsilon|x-y|$ é similar.

Estas observações mostram que $\|\partial E\| = \mathcal{H}^{N-1} \lfloor \partial_{\text{red}} E$. Para qualquer conjunto de Borel $\mathcal{B} \subset \partial_{\text{red}} E$, temos, de acordo com o Lema A.3,

$$\mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{B} \cap N) \leq C \|\partial E\|(\mathcal{B} \cap N) = 0.$$

Portanto, a menos de um conjunto $\mathcal{H}^{n-1}$ inegligente, podemos supor $\mathcal{B} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$. Seja $\mathcal{B}_j := \mathcal{B} \cap C_j \subset S_j$ e $\mu_j := \mathcal{H}^{N-1} \lfloor S_j$, i.e., $\mu_j(A) = \mathcal{H}^{N-1}(A \cap S_j)$, para todo conjunto de Borel A. Como S_j é uma superfície C^1, dada qualquer bola $B_r(x)$ centrada em $x \in \mathcal{B}_j$, temos

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu_j(B_r(x))}{\alpha(N-1)r^{N-1}} = 1.$$

Combinando a condição acima com (A.3.8), achamos que

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu_j(B_r(x))}{\|\partial E\|(B_r(x))} = 1,$$

e como cada μ e $\|\partial E\|$ são medidas de Radon, o Teorema da diferenciação para medidas de Radon implica que $\|\partial E\| = \mathcal{H}^{N-1} \lfloor \partial_{\text{red}} E$.

$\square$

Vamos finalizar enunciando um resultado sobre a validade do Teorema da Divergência para conjuntos de perímetro localmente finito. Para isso, precisamos considerar um conjunto maior que a fronteira reduzida: o qual é chamado fronteira no sentido da teoria geométrica da medida $\partial_\star E$

Definição A.6. *Um ponto x é dito pertencer a $\partial_\star E$, a fronteira no sentido da teoria geométrica da medida, de E, quando*

$$\lim_{r \to 0} \frac{|B_r(x) \cap E|}{r^N} > 0 \quad e \quad \lim_{r \to 0} \frac{|B_r(x) \setminus E|}{r^N} > 0.$$

Uma outra maneira de ver é a seguinte: $x \in \partial_\star E$ se ambos E e E^c possuem densidade positiva em torno de x. Como veremos, esta é uma informação importante quando se estudam problemas de fronteira livre. O próximo lema relaciona a fronteira reduzida com a fronteira no sentido da medida teórica.

Lema A.4. *Seja E conjunto de perímetro localmente finito. Então $\partial_{\text{red}} E \subset \partial_\star E$ e*

$$\mathcal{H}^{N-1}(\partial_\star E \setminus \partial_{\text{red}} E) = 0.$$

Demonstração. O fato de que $\partial_{\text{red}} E \subset \partial_\star E$ segue imediatamente de Lema A.2. Vamos provar que $\mathcal{H}^{N-1}(\partial_\star E \setminus \partial_{\text{red}} E) = 0$. Seja $0 < \alpha < 1$

$$\alpha := \lim_{r \to 0} \frac{|B_r(x) \cap E|}{\omega_N} r^N.$$

Certamente, $\lim_{r\to 0} \frac{|B_r(x)\setminus E|}{\omega_N r^N} = 1-\alpha$. Portanto

$$\min\{|B_r(x)\cap E|, |B_r(x)\setminus E|\} = \min\{\alpha, (1-\alpha)\}\omega_N r^N + o(1).$$

Combinando a expressão acima com a desigualdade isoperimétrica e a segunda desigualdade do Teorema A.4, obtemos

$$\frac{\|\partial E\|(B_r(x))}{r^{N-1}} \geq c\{\min\{\alpha, 1-\alpha\}\omega_N r^N + o(1)\}^{1/N}.$$

Portanto, concluímos $\limsup\limits_{r\to 0} \dfrac{\|\partial E\|(B_r(x))}{r^{N-1}} > 0$. Finalmente, lembrando que

$$\|\partial E\|(\mathbb{R}^N \setminus \partial_{\text{red}} E) = 0,$$

basta aplicar um argumento de cobertura para concluir que $\mathcal{H}^{N-1}(\partial_\star E \setminus \partial_{\text{red}} E) = 0$. $\square$

Lembre de (A.2.2) que se E possui perímetro localmente finito e $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$,

$$\int_E \text{div}\varphi(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\cdot \nu_E(x) d\|\partial E\|(x). \tag{A.3.16}$$

Entretanto, $\|\partial E\|(\mathbb{R}^N \setminus \partial_{\text{red}} E) = 0$ e do Teorema A.7,

$$\|\partial E\| = \mathcal{H}^{N-1}\lfloor \partial_{\text{red}} E.$$

Contudo, do Lema A.4, $\mathcal{H}^{N-1}(\partial_\star E \setminus \partial_{\text{red}} E) = 0$. Concluímos, portanto, que

$$\|\partial E\| = \mathcal{H}^{N-1}\lfloor \partial_\star E.$$

Em particular, $\mathcal{H}^{N-1}(\partial_\star \cap K) < \infty$ para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^N$. Assim, (A.3.16) pode ser reescrito em termos do Teorema da Divergência:

$$\int_E \text{div}\varphi(y)dy = \int_{\partial_\star E} \varphi(x)\cdot \nu_E(x) d\mathcal{H}^{N-1}(x),$$

Provamos assim que o Teorema da Divergência é válido para conjuntos de perímetro finito. Mais precisamente:

Teorema A.8. *Seja E conjunto localmente de perímetro finito. Então, para $\mathcal{H}^{N-1}$-q.t.p. $x \in \partial_\star E$, existe uma único "vetor normal no sentido da medida teórica", $\nu_E(x)$, tal que*

$$\int_E \text{div}\varphi(y)dy = \int_{\partial_\star E} \varphi(x)\cdot \nu_E(x) d\mathcal{H}^{N-1}(x),$$

para toda $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$.

Apêndice B

Direções futuras

Este apêndice é devotado ao estudo do problema de fronteira livre de duas fases (isto é, quando φ muda de sinal) e o caso parabólico. A similaridade de problemas de fronteira livre elípticos e sua versão parabólica nos permitem fazer algumas adaptações.

B.1 Problema elíptico de duas fases

Nesta seção, estamos interessados em discutir algumas ideias com relação ao problema de perturbação singular

$$\left\{ \begin{array}{rcll} F(D^2u, x) & = & \zeta_\varepsilon(u) & \text{em } \Omega \\ u & = & \varphi & \text{em } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{B.1.1}$$

em que φ muda de sinal e, portanto, se trata de um problema de duas fases. Como vimos neste trabalho, a maior dificuldade em estudar o problema de fronteira livre para equações totalmente não-lineares é a falta de caracterização variacional. Inspirado por este trabalho, gostaríamos de estender esses resultados para problemas de duas fases para equações totalmente não-lineares. Iniciaremos nossa jornada observando alguns pontos principais deste projeto. A primeira observação é o fato de que a existência de soluções minimais independe do sinal da função φ na fronteira $\partial\Omega$ e, portanto, o Teorema 2.1 continua válido para tais problemas. Então, com certeza, a primeira dificuldade diz respeito ao Teorema 2.3, o qual fornece regularidade Lipschitz para as soluções. *A priori*, quando as soluções u_ε de (B.1.1) mudam de sinal, em geral, é necessário uma fórmula de monotonicidade para equações totalmente não-lineares, como em [1]. Em um recente trabalho, E. Teixeira e M. Montenegro em [20] provaram regularidade Lipschitz sem a utilização da fórmula de monotonicidade. Eles obtiveram o seguinte resultado:

Teorema B.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domínio limitado, G função positiva de classe C^1, F uniformemente elíptico com estimativa a priori $C^{1,1}$ e u_ε família de soluções para*

$$F(D^2u) = G(x)\zeta_\varepsilon(u) \quad em \quad \Omega.$$

Suponha que exista $1 < \lambda_\varepsilon < C$ tal que $\{u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \varepsilon\}$ é localmente superfície de classe $C^{1,\alpha}$, com norma $C^{1,\alpha}$ uniformemente limitada. Então, dado subdomínio $\Omega' \Subset \Omega$, existe constante K dependendo da dimensão, elipticidade, ζ e G, mas independe de ε, tal que

$$\max_{x\in\Omega'} |\nabla u_\varepsilon(x)| \leq K.$$

A estratégia para demonstrar o teorema consiste em analisar o comportamento do gradiente em duas regiões. Inicialmente na região $\Omega'_\varepsilon := \{y \in \Omega' : |u_\varepsilon(y)| > \varepsilon\}$, u_ε satisfaz uma EDP homogênea e, portanto, temos um controle sobre o gradiente. A parte complicada surge quando analisamos o gradiente sobre a área de transição

$$\Gamma_\varepsilon := \{y \in \Omega' : |u_\varepsilon(y)| \leq \varepsilon\}.$$

Acredito que seja possível provar o mesmo resultado retirando a hipótese de regularidade sobre as superfícies de nível $\{u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \varepsilon\}$. O resultado esperado é o seguinte:

Teorema B.2 (Em progresso)**.** *Seja u_ε uma família de soluções para a equação* (B.1.1) *num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \mathcal{A}$, para algum $\mathcal{A} > 0$. Sejam $K \subset \Omega$ conjunto compacto e $\tau > 0$ tal que $B_\tau(x_0) \subset \Omega$, para todo $x_0 \in K$. Então, existe constante $L = L(\tau, \mathcal{A})$ tal que*

$$|\nabla u_\varepsilon(x)| \leq L \quad para \quad x \in K.$$

Em seguida, com regularidade Lipschitz obtemos os mesmos resultados deste trabalho, a qual listamos abaixo para problema de duas fases.

- A família u_ε é uniformemente fortemente não-degenerada, ou seja, $\sup_{B_r} u_\varepsilon \geq cr$. Tal degenerescência é ótima.

- A menos de subsequência, u_ε converge localmente uniforme para uma função no espaço $u_0 \in C^{0,1}_{\text{loc}}(\Omega)$ que satisfaz $F(D^2u_0, x) = 0$ em $\Omega^+ := \{u_0 > 0\}$ e em $\Omega^- := (\Omega \setminus \Omega_0)^\circ$ no sentido da viscosidade. Além disso, $u_0^+(x) \leq C\text{dist}(x, \partial\{u_0 \leq 0\})$, para todo $x \in \Omega'$ com $\text{dist}(x, \{u_0 \leq 0\}) \leq \frac{1}{4}\text{dist}(\Omega', \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$.

- A medida de Hausdorff $\mathcal{H}^{N-1}(\partial\{u_0 > 0\} \cap B) \sim r^{N-1}$.

- A fronteira livre reduzida possui medida total.

Uma informação fundamental na elaboração desse futuro projeto é a condição de fronteira livre. O resultado esperado para a condição de fronteira livre é a seguinte:

Teorema B.3 (Duas Fases)**.** *Seja* u_ε *família de soluções minimais para* (B.1.1) *num domínio* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *tal que* $u_\varepsilon \to u_0$ *uniformemente em subconjuntos compactos de* Ω*, quando* $\varepsilon \to 0$*. Sejam* $x_0 \in \Omega \cap \partial\{u_0 > 0\}$ *e* η *vetor normal a* $\Omega \cap \partial\{u_0 > 0\}$ *no sentido da medida teórica. Suponha, além disso, que* u^- *é não-degenerada em* x_0*. Então existem operador elíptico* $F^\star$ *e constantes* $\alpha, \gamma > 0$ *tais que*

$$u_0(x) = \alpha\langle x - x_0, \eta\rangle^+ - \gamma\langle x - x_0, \eta\rangle^- + o(|x - x_0|) \tag{B.1.2}$$

com

$$\alpha^2 - \gamma^2 = \frac{2\mathrm{T}}{F^\star(x_0, \eta \otimes \eta)}.$$

Vale a pena observar que, supondo F invariante por rotações, o processo de homogeneização descrito neste trabalho continua válido para problemas de duas fases. Por exemplo, o Teorema 5.1 independe do sinal da solução u_ε. Esperamos ainda poder verificar a condição de fronteira livre em um sentido fraco, que não exija regularidade da fronteira livre. Uma vez verificada tal condição, já sabemos como empregar ferramentas da teoria geométrica da medida para provarmos que, de fato, a fronteira livre será de classe $C^{1,\gamma}$ e, portanto, a condição (B.1.2) é satisfeita no sentido clássico. O projeto é factível, porém será necessário bastante esforço a fim de obter uma descrição completa da condição de fronteira livre. Um entendimento da condição de fronteira livre que possa aparecer neste processo teria um impacto sobre o desenvolvimento de novas técnicas para estudar problemas de regularidade da fronteira livre ainda não acessíveis através da teoria atual.

B.2 Caso parabólico

O estudo da versão parabólica

$$F(D^2 u_\varepsilon, x) - \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon = \zeta_\varepsilon(u_\varepsilon) \tag{B.2.1}$$

é também uma importante linha de pesquisa. Este tipo de equação foi estudado inicialmente por Caffarelli e Vázquez em [6], Caffarelli, Lederman e Wolanski em [12] e [13], entre outros. Novamente, a principal contribuição deste projeto é achar uma condição de fronteira livre no sentido da viscosidade. Não é verdade, em geral, que fronteiras livres parabólicas Lipschitz são $C^{1,\alpha}$ (veja, por exemplo, [2]) contradizendo o que ocorre no caso elíptico. A similaridade dos problemas de fronteira livre elípticos e suas versões parabólicas nos leva a elaborar estratégias filosóficas para o problema. Vamos aqui estudar algumas propriedades uniformes no parâmetro ε e o limite, quando $\varepsilon \to 0$, das soluções $u_\varepsilon(x,t)$ da equação

$$F(D^2u_\varepsilon, x) - \frac{\partial}{\partial t}u_\varepsilon = \zeta_\varepsilon(u_\varepsilon) \tag{B.2.2}$$

onde $\varepsilon > 0$ e ζ_ε é como em (0.0.2).

Assim como no caso elíptico, o teorema de existência de soluções minimais para o problema parabólico

$$\begin{cases} F(D^2u, x) - u_t &= g(u) \text{ em } \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times [0,T) \\ u(0,x) &= \varphi(x) \text{ em } \bar{\Omega}. \end{cases} \tag{B.2.3}$$

não é barreira para a teoria. O problema surge novamente em obter estimativa uniforme em ε com relação ao gradiente. O teorema esperado é o seguinte:

Teorema B.4 (Regularidade Lipschitz)**.** *Seja $\tilde{\mathcal{D}} \Subset \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Existe constante C dependendo de, $\|\varphi\|_\infty$, $\|\beta_1\|_\infty$, $\tilde{\mathcal{D}}$, dimensão, elipticidade e norma C^μ de $F(M,\cdot)$, mas independente de ε, tal que, para qualquer família de soluções $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ de (B.2.2)*

$$\sup_{(x,t)\in\tilde{\mathcal{D}}} |\nabla u_\varepsilon(x,t)| \le C$$

e como Corolário

Colorário B.1. *Seja u_ε família de soluções tal que $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty} \le \mathcal{A}$ no sentido da viscosidade de (B.2.2) num domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{N+1}$. Seja $K \subset \mathcal{D}$ conjunto compacto e $\tau > 0$ tal que $\mathcal{N}_\tau^-(K) \subset \mathcal{D}$. Existe constante $L = L(\tau, \mathcal{A})$, tal que*

$$|\nabla u_\varepsilon(x,t)| \le L \quad \textit{for} \quad (x,t) \in K.$$

Considere agora uma família de soluções minimais u_ε para (B.2.2) definidas num domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{N+1}$, as quais são uniformemente limitadas na norma L^∞ em $\mathcal{D}$. Vamos mostrar que as funções u_ε são localmente uniformemente limitadas na semi-norma Lip $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, isto é, para todo compacto $K \subset \mathcal{D}$, existe uma constante L, independente de ε, tal que

$$|\nabla u_\varepsilon(x,t)| \le L, \quad \text{e} \quad |u_\varepsilon(x,t) - u_\varepsilon(x,t+\Delta t)| \le L|\Delta t|^{1/2},$$

para $(x,t), (x,t+\Delta t) \in K$. Temos a seguinte definição:

Definição B.1. *Uma função v pertence à classe $Lip_{loc}(1, 1/2)$ num domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{N+1}$ se para todo $K \Subset \mathcal{D}$ existe constante $L = L(K)$ tal que*

$$|v(x,t) - v(y,s)| \leq L(|x-y| + |t-s|^{1/2})$$

para todo $(x,t), (y,s) \in K$.

Para provarmos regularidade $\mathrm{Lip}(1, 1/2)$, precisamos do seguinte resultado.

Proposição B.1. *Seja $u \in C(\overline{B}_1(0) \times [0, 1/(4N + M_0)])$ tal que*

$$|u_t - F(D^2u, x)| \leq M_0 \quad \textit{no sentido da viscosidade}$$

em $\{u < 0\} \cup \{u > 1\}$, para algum $M_0 > 0$. Suponho que $|\nabla u| \leq L$, para algum $L > 0$. Existe uma constante $C = C(L)$ tal que

$$|u(0,T) - u(0,0)| \leq C \quad \textit{if} \quad 0 \leq T \leq \frac{1}{4N + M_0}.$$

Demonstração. Suponha sem perda de generalidade que $L > 1$.

Parte I: Primeiro vamos provar o seguinte fato geral: se o cilindro

$$Q_{t_0,t_1} := B_1(0) \times (t_0, t_1) \subset \{u < 0\} \cup \{u > 1\}$$

e $t_1 - t_0 \leq \frac{1}{4N+M_0}$, temos

$$|u(0,t_1) - u(0,t_0)| \leq 2L.$$

De fato, seja

$$h^{\pm}(x,t) = u(0,t_0) \pm L \pm \frac{2L}{\Lambda}|x|^2 \pm (4NL + M_0)(t - t_0).$$

Então, considerando

$$\mathcal{M}^+(D^2u, \lambda, \Lambda) := \Lambda \sum_{e_i > 0} e_i + \lambda \sum_{e_i < 0} e_i$$

e

$$\mathcal{M}^-(D^2u, \lambda, \Lambda) := \lambda \sum_{e_i > 0} e_i + \Lambda \sum_{e_i < 0} e_i$$

onde $e_i's$ são autovalores de D^2u, temos:

$$\begin{aligned} h_t^+ - F(D^2h^+, x) &\geq h_t^+ - \mathcal{M}^+\left(D^2h^+, \frac{\lambda}{N}, \Lambda\right) \\ &= h_t^+ - \left(\Lambda \sum_{e_i > 0} e_i + \frac{\lambda}{N} \sum_{e_i < 0} e_i\right) \\ &= (4NL + M_0) - \Lambda \frac{4LN}{\Lambda} = M_0. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
h_t^- - F(D^2h^-, x) &\leq h_t^- - \mathcal{M}^-\left(D^2h^-, \frac{\lambda}{N}, \Lambda\right) \\
&= h_t^+ - \left(\frac{\lambda}{N}\sum_{e_i>0} e_i + \Lambda \sum_{e_i<0} e_i\right) \\
&= -(4NL + M_0) - \Lambda\frac{-4LN}{\Lambda} = -M_0.
\end{aligned}$$

Então,

$$h_t^+ - F(D^2h^+, x) \geq M_0 \quad \text{and} \quad h_t^- - F(D^2h^-, x) \leq -M_0.$$

Seja $t_0 < t_2 \leq t_1$ tal que

$$|u(0,t) - u(0,t_0)| \leq 2L \quad \text{para} \quad t \in [t_0, t_2).$$

Vamos comparar u com h^+ e h^- em Q_{t_0,t_2}. De fato, pela continuidade Lipschitz no espaço com constante Lipschitz L, deduzimos que

$$h^- \leq u \leq h^+ \quad \partial_p Q_{t_0,t_2}.$$

Por outro lado,

$$h_t^- - F(D^2h^-, x) \leq -M_0 \leq u_t - F(D^2u, x) \leq M_0 \leq h_t^+ - F(D^2h^+, x)$$

no sentido da viscosidade. Portanto,

$$h^- \leq u \leq h^+ \quad \text{em} \quad Q_{t_0,t_2}.$$

Em particular, como $t_2 - t_0 \leq t_1 - t_0 \leq \frac{1}{4N+M_0}$ e $L > 1$,

$$|u(0,t_2) - u(0,t_0)| < 2L.$$

Da desigualdade estrita, deduzimos que podemos tomar $t_2 = t_1$ e portanto,

$$|u(0,t_1) - u(0,t_0)| \leq 2L.$$

Parte II: Vamos considerar agora o cilindro $Q_{0,T}$ com $0 < T \leq \frac{1}{4N+M_0}$.

(a) Se $Q_{0,T} \subset \{u < 0\} \cup \{u > 1\}$ podemos aplicar a parte I para concluir que

$$|u(0,T) - u(0,0)| \leq 2L.$$

(b) Se $Q_{0,T} \nsubseteq \{u < 0\} \cup \{u > 1\}$, seja $0 \le t_1 \le t_2 \le T$ e $x_1, x_2 \in \overline{B}_1(0)$ tal que

$$0 \le u(x_1, t_1) \le 1,\ 0 \le u(x_2, t_2) \le 1$$

e

$$(\overline{B}_1(0) \times (0, t_1)) \cup (\overline{B}_1(0) \times (t_2, T)) \subset (\{u < 0\} \cup \{u > 1\}).$$

Então, pela parte I e continuidade Lipschitz no espaço, temos

$$\begin{aligned} |u(0,T) - u(0,0)| &\le |u(0,T) - u(0,t_2)| + |u(0,t_2) - u(x_2,t_2)| + |u(x_2,t_2)| \\ &+ |u(x_1,t_1)| + |u(x_1,t_1) - u(0,t_1)| + |u(0,t_1) - u(0,0)| \\ &\le 2(2L + L + 1) \end{aligned}$$

e a proposição está provada.

$\square$

Como consequência da Proposição B.1 temos o seguinte teorema

Teorema B.5. *Seja u_ε família de soluções no sentido da viscosidade de*

$$F(D^2u, x) - u_t = \zeta_\varepsilon(u)$$

num domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{N+1}$. Seja $K \subset \mathcal{D}$ compacto e $\tau > 0$ tal que $\mathcal{N}_{2\tau}(K) \subset \mathcal{D}$. Existem constantes $L = L(\tau)$ e $C = C(L, \tau)$ tais que

$$|\nabla u_\varepsilon(x,t)| \le L$$

e

$$|u_\varepsilon(x, t + \Delta t) - u_\varepsilon(x,t)| \le C|\Delta t|^{1/2}$$

para $(x,t), (x, t + \Delta t) \in K$.

Demonstração. Aplicando o Corolário B.1, segue a existência de um $L = L(\tau, \mathcal{A}) > 0$ tal que

$$|\nabla u_\varepsilon(x,t)| \le L \quad \text{for} \quad (x,t) \in \mathcal{N}_\tau(K). \tag{B.2.4}$$

Vamos agora provar regularidade Hölder $1/2$. Seja $(x_0, t_0) \in K$ e defina

$$(w_\varepsilon)_r(x,t) := \frac{1}{r} u_\varepsilon(x_0 + rx, t_0 + r^2 t).$$

Então, se $0 < r < \tau$, segue que

$$\frac{\partial (w_\varepsilon)_r}{\partial t} - F_r(D^2 (w_\varepsilon)_r, x) = \beta_{\varepsilon/r}((w_\varepsilon)_r)$$

no sentido da viscosidade e

$$|\nabla (w_\varepsilon)_r(x,t)| = |\nabla u_\varepsilon(x_0 + rx, t_0 + r^2 t)| \leq L$$

para $(x,t) \in \overline{B_1(0)} \times [0, 1/(4N+B)]$, onde $B = \max_{s\in[0,1]} \beta(s)$ (aqui usamos a estimativa (B.2.4)).

Portanto, podemos aplicar a Proposição B.1 com $M_0 = B$ para a função $(w_\varepsilon)_r$ para concluir que

$$|(w_\varepsilon)_r(0,t) - (w_\varepsilon)_r(0,0)| \leq C(L) \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{4N+B}.$$

Portanto,

$$|u_\varepsilon(x_0, t_0 + r^2 t) - u_\varepsilon(x_0, t_0)| \leq C(L) r \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{4N+B}.$$

Em particular, para $0 < r < \tau$,

$$\left| u_\varepsilon \left(x_0, t_0 + \frac{r^2}{4N+B} \right) - u_\varepsilon(x_0, t_0) \right| \leq C(L) r. \tag{B.2.5}$$

Finalmente, seja $(x_0, t_0 + \Delta t) \in K$. Se $0 < \Delta t < \frac{r^2}{4N+B}$, podemos tomar o número $r = \Delta t^{1/2}\sqrt{4N+B}$ in (B.2.5), ficando

$$|u_\varepsilon(x_0, t_0 + \Delta t) - u_\varepsilon(x_0, t_0)| \leq C(L)\sqrt{4N+B}\Delta t^{1/2}.$$

Se, por outro lado, $\Delta t \geq \frac{r^2}{4N+B}$, temos

$$|u_\varepsilon(x_0, t_0 + \Delta t) - u_\varepsilon(x_0, t_0)| \leq 2\mathcal{A} \leq \frac{2\mathcal{A}}{\tau}\sqrt{4N+B}\Delta t^{1/2},$$

e o teorema está provado. □

Com regularidade Lipschitz, acredito que podemos avançar na geometria fraca da solução limite u_0. Com relação à condição de fronteira livre, o resultado esperado é análogo ao problema elíptico.

Teorema B.6 (Em progresso)**.** *Seja u_ε família de soluções minimais para o problema*

$$F(D^2 u, x) - u_t = \zeta_\varepsilon(u)$$

num domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{N+1}$ *tal que* $u_\varepsilon \to u_0$ *uniformemente em subconjuntos compactos de* $\mathcal{D}$*, e* $\varepsilon \to 0$*. Seja* $(x_0, t_0) \in \mathcal{D} \cap \partial\{u_0 > 0\}$ *e* η *vetor normal espacial unitário em* (x_0, t_0) *no sentido da medida parabólica. Se* u^- *é não-degenerada em* (x_0, t_0) *então*

$$u_0(x,t) = \alpha\langle x - x_0, \eta\rangle^+ - \gamma\langle x - x_0, \eta\rangle^- + o(|x - x_0| + |t - t_0|^{1/2})$$

com

$$\alpha^2 - \gamma^2 = \frac{2\mathrm{T}}{F^\star(\eta \otimes \eta, x_0)}.$$

Até o momento, obtemos condição de fronteira livre para a versão parabólica de uma fase. Esperamos ainda poder empregar ferramentas da teoria geométrica da medida para obter regularidade $C^{1,\gamma}$ da fronteira livre. Seria, sem dúvida, uma grande conquista para a teoria das equações elípticas parabólicas não-lineares.

Referências Bibliográficas

[1] ALT, Hans Wilhelm; CAFFARELLI, Luis A.; FRIEDMAN, Avner. Variational problems with two phases and their free boundaries. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 282, n. 2, p. 431-461, 1984.

[2] ATHANASOPOULOS, I.; CAFFARELLI, Luis A.; SALSA, Sandro. Regularity of the free boundary in parabolic phase-transition problems, *Acta. Math.*, 176, n. 2, p. 245-282, 1996.

[3] CAFFARELLI, Luis A. A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries. I. Lipschitz free boundaries are $C^{1,\alpha}$. *Rev. Mat. Iberoamericana*, V. 3, n. 2, p. 139-162, 1987.

[4] ____________________. A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries. II. Flat free boundaries are Lipschitz. *Comm. Pure Appl. Math.*, V. 42, n. 1, p. 55-78, 1989.

[5] ____________________. A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries. III. Existence Theory, Compactness, and Dependence on X. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. Serie IV*, V. 15, p. 253-288, 1999.

[6] CAFFARELLI, Luis A.,VAZQUES, J.L. A free boundary problem for the heat equation arising in flame propagation. *Trans. Am. Math. Soc.*, V. 347, p. 411–441, 1995

[7] CAFFARELLI, Luis A.; CABRÉ, Xavier. *Fully nonlinear elliptic equations.*Providence R.I: American Mathematical Society, 1995. (American Mathematical Society Colloquium Publications, 43)

[8] CAFFARELLI, Luis A.; KENIG, C. E. Gradient estimates for variable coefficient parabolic equations and singular perturbation problems. *Amer. J. Math.*, V. 120, n. 2, p. 391-439, 1998.

[9] CAFFARELLI, Luis A. Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations. *Ann. of Math.*, V. 130, n. 1, p. 189-213, 1989.

[10] CAFFARELLI, Luis A.; JERISON, David; KENIG, C. E. Some new monotonicity theorems with applications to free boundary problems. *Ann. of Math.*, V. 155, n. 2, p. 369-404, 2002.

[11] CAFFARELLI, Luis A., LEE, K. A., MALLET, A.S. Limit and homogenization for flame propagation in periodic excitable media. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, V. 172, n. 2, p. 153-190, 2004.

[12] CAFFARELLI, Luis A.; LEDERMAN, C.; WOLANSKI, N. Uniform estimates and limits for a two phase parabolic singular perturbation problem. *Indiana Univ. Math. J.*, V. 46, n. 2, p. 453-489, 1997.

[13] ______. Pointwise and viscosity solutions for the limit of a two phase parabolic singular perturbation problem. *Indiana Univ. Math. J.*, V. 46, n. 3, p. 719-740, 1997.

[14] CAFFARELLI, Luis A. Uniform Lipschitz regularity of a singular perturbation problem. *Differential Integral Equations*, V. 8, p. 1585–1590, 1995

[15] PUCCI, C. Operatori ellittici estremanti, *Ann. Mat. Pura Appl.* V. 72, p. 141-170, 1966.

[16] DANIELLI, D.; PETROSYAN A.; SHAHGHOLIAN H. A singular perturbation problem for the p-Laplace operator, *Indiana Univ. Math. J.* v. 52, n. 2, p. 457-476, 2003.

[17] D. GILBARG, D; TRUDINGER, Neil S. *Elliptic partial differential equations of second order*, 2nd, Berlin-Heidelberg- New York-Tokyo: Springer-Verlag, 1983

[18] TEIXEIRA, E. V. Optimal regularity of viscosity solutions of fully nonlinear singular equations and their limiting free boundary problems. *Matemática Conteporânea*, V. 30, p. 217-237, 2006.

[19] ______. Elliptic regularity and free boundary problems: an introduction. Rio de Janeiro: IMPA, 2007 (Mathematical Publications).

[20] TEIXEIRA, E.V. , MONTENEGRO, M. Gradient estimates for viscosity solutions of singular fully non-linear elliptic equations. *Journal of Functional Analysis* V. 259, p. 428-452, 2010.

[21] TEIXEIRA, E.V., A variational treatment for elliptic equations of the flame propagation type: regularity of the free boundary. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, V. 25, p. 633-658, 2008.

[22] ____________________. *Elliptic Regularity and Free Boundary Problem*. Rio de Janeiro: Impa, 2007 (Publicações Matemáticas).

[23] ISHII, Hitoshi. Perron's method for Hamilton-Jacobi equations. *Duke Math. J*. V. 55, p. 369-384, 1987.

[24] ____________________. A boundary value problem of the Dirichlet type for Hamilton Jacobi equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*. V. 16, n. 1, p. 105-135, 1989.

[25] ____________________. On uniqueness and existence of viscosity solutions of fully nonlinear second order elliptic PDE's. *Communications on pure and applied mathematics*, V. 42, n. 1, p. 15-45, 1989.

[26] FEDERER, H. *Geometric measure theory*. New York: Springer, 1969.

[27] FERRARI, Fausto; ARGIOLAS, Roberto; Flat free boundaries regularity in two-phase problems for a class of fully nonlinear elliptic operators with variable coefficients. *Interfaces Free Bound*, V. 11, N. 2, p. 177–199, 2009.

[28] FERRRI, Fausto. Two-phase problems for a class of fully nonlinear elliptic operators: Lipschitz free boundaries are $C^{1,\gamma}$. *American Journal of Mathematics*, V. 128, n. 3, p. 541-571, 2006.

[29] FERRARI, Fausto; SALSA, Sandro. Regularity of the free boundary in two phase problems for linear elliptic operators. *Adv. Math*, V. 214, p. 288–322, 2007.

[30] ALT, H.; CAFFARELLI, Luis A. Existence and regularity for a minimum problem with regularity. *J. Reine Angew. Math.*, V. 325, p. 105-144, 1981.

[31] BERESTYCKI, H. ; CAFFARELLI, Luis A.; NIRENBERG, L. Uniform estimates for regularization of free boundary problems. *Analysis and partial differential equations. Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, V. 122, p. 567–619, 1990.

[32] EVANS, L. C. ; GARIEPY, R. F. *Measure theory and fine properties of functions*. Boca Raton: CPC Press, 1992 (Studies in Advanced Mathematics)

[33] CRANDALL, M.; EVANS, L.C.; LIONS, P.L. Some Properties of Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations. *Transactions of the A.M.S.*, V. 282, p. 487-502, 1984.

[34] CRANDALL, M.; ISHII, H.; LIONS, P.L. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. A.M.S.*, V. 27, p. 1-67, 1992.

[35] CRANDALL, M.; LIONS, P.L. Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations, *Trans. of the A.M.S.*, V. 277, p. 1-42, 1983.

[36] FELDMAN, M. Regularity of Lipschitz free boundaries in two-phase problems for fully nonlinear elliptic equations, *Indiana Univ. Math. J.*, V. 50, n. 3, p. 1171-1200, 2001.

[37] MOREIRA, D.; TEIXEIRA, E. V. A singular perturbation free boundary problem for elliptic equations in divergence form. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, V. 29, n. 2, p. 161-190, 2007.

[38] PHILLIPS, D. Hausdorff measure estimates of a free boundary for a minimum problem, *Comm. Partial Differential Equations*, V. 8, n. 13, p. 1409-1454, 1983.

[39] JENSEN, R. Uniqueness Criteria for Viscosity Solutions of Fully Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations, *Indiana Univ. Math. J.*, V. 38, p. 629-667, 1989.

[40] ______________________. The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equation, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, V. 101, n. 1, p. 1-27, 1998.

[41] TRUDINGER, Neil S. Comparison principle and pointwise estimates for viscosity solutions of second order, elliptic equations. *Centre for Math. Anal., Aust. Mat. Univ., Research Report.* **(R45)**, 1987.

[42] ______________________. On regularity and existence of viscosity solutions of nonlinear second order, elliptic equations. *Partial differential equations and the calculus of variations*, V. 2, p. 939-957, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 2, BirkhSuser Boston, Boston, MA, 1989.

[43] ______________________. On the twice differentiability of viscosity solutions of nonlinear elliptic equations. *Centre for Math. Anal., Aust. Mat. Univ., Research report* **(R20)**, 1988.

[44] ______________. *Lectures on nonlinear second order elliptic equation*. China : Tianjin, 1985. (Nankai Institute of Mathematics)

[45] WANG, Pei-Yong. On The Regularity Theory Of Fully Nonlinear Parabolic Equations. *American Mathematical Society*, V. 22, p. 107-114, 1990.

[46] ______________. Regularity of free boundaries of two-phase problems for fully nonlinear elliptic equations of second order. I. Lipschitz free boundaries are $C^{1,\alpha}$. *Comm. Pure Appl. Math.* V. 53, n. 7, p. 799–810, 2000

[47] ______________. Regularity of free boundaries of two-phase problems for fully nonlinear elliptic equations of second order. II. Flat free boundaries are Lipschitz. *Comm. Partial Differential Equations*, V. 27, n. 7-8, p. 1497–1514, 2002.

[48] WILLIAM, P. Ziemer. *Weakly Differentiable Functions*. *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1989.