UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Marcos Ferreira de Melo

IMERSÕES ISOMÉTRICAS EM GRUPOS DE LIE NILPOTENTES E SOLÚVEIS

Fortaleza-Ce
2008

Marcos Ferreira de Melo

IMERSÕES ISOMÉTRICAS EM GRUPOS DE LIE NILPOTENTES E SOLÚVEIS

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração:
Geometria diferencial.

Orientador:
Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira.

Fortaleza-Ce
2008

Melo, Marcos Ferreira de

M486i Imersões isométricas em grupos de Lie nilpotentes e solúveis.

Marcos Ferreira de Melo – Fortaleza: 2008.
104f.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira.

Área de concentração: Geometria Diferencial

Tese (doutorado)- Universidade Federal do Ceará;

Departamento de Matemática, 2008

CDD 516.36

Dedico este trabalho à minha esposa Rebeca de Lima Leite Melo.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Jeová Deus pelo dom da vida e por todas as bênçãos a mim concedidas.

Agradeço à minha esposa, Rebeca Melo, pelo amor, carinho e compreensão em todos esses anos.

Agradeço à minha mãe, Aurea e minha irmã Joyce pelo afeto e incentivo durante a minha vida.

Agradeço ao meu irmão Marcelo Melo pela cumplicidade, apoio e companheirismo em toda a minha vida.

Agradeço aos meus sogros Joaquim Ibiapina e Neusa Bezerra por toda a consideração, assistência, arrimo e desvelo em todos esses anos. Agradeço aos meus cunhados André, Débora, Tiago e Priscila pela estima e boa convivência.

Agradeço ao meu orientador, Jorge Herbert, pelo perito trabalho de orientação e por todo o imprescindível suporte que proporcionou a realização desta tese de doutorado.

Agradeço aos professores Abdênago Barros e Gervásio Colares pelas pertinentes e valiosas sugestões em adendo a este trabalho, por aquiescerem em participar da banca de defesa desta tese e por todo o apoio nestes anos em que participei deste programa de pós-graduação. Agradeço ao professores Paolo Piccione e Pedro Roitman por suas apropriadas e ponderadas considerações e admoestações e por assentirem em tomar parte da comissão julgadora deste trabalho.

Agradeço aos professores Fábio Montenegro, Alexandre Fernandes, Lucas Barbosa e Cleon Barroso pelo valoroso ensino e aprendizado que angariei nas disciplinas por eles ministradas neste programa de doutorado.

Agradeço a todos os meus colegas de pós-graduação em matemática da UFC, em especial, a Francisco Andrade, Jorge Hinojosa, Joseílson Lima, Juscelino Pereira e Paulo Alexandre por terem me ajudado nas disciplinas que cursaram comigo.

Agradeço à secretária da pós-graduação, Andréia Dantas, pela assiduidade e competência em executar suas atribuições que, em particular, me beneficiaram. Agradeço aos demais secretários, Antonia Catarina, Carlos Adriano e Márcio Pereira pelo proveito que obtive em virtude do bom trabalho desempenhado por eles.

Agradeço à bibliotecária da matemática, Rocilda Sales, e aos seus auxiliares, Francisca Fernanda e Erivan Carneiro pelo benefício que me trouxeram através bom desempenho de suas atividades.

Agradeço aos meus colegas da UFC no campus do Cariri por todo amparo e auxílio que recebi para concluir a minha tese doutorado.

Agradeço a CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todos que de maneira direta ou indireta contribuíram para que este trabalho se concretizasse.

"Semeia de manhã a tua semente, e não descanses a tua mão até a noitinha; pois não sabes onde esta terá bom êxito , quer aqui quer ali, ou se ambas serão igualmente boas."

Eclesiastes 11:6

Sumário

Agradecimentos **ii**

Resumo **1**

Abstract **2**

Introdução **3**

1 Noções Preliminares **10**

1.1 Grupos de Lie Nilpotentes 10

1.1.1 Conexão e Curvatura para Campos Arbitrários 12

1.2 Grupos de Lie Solúveis 13

1.2.1 Conexão e Curvatura para Campos Arbitrários 17

2 Imersões Isométricas em Grupos de Lie Nilpotentes **20**

2.1 Alguns Tensores Auxiliares 20

2.1.1 Definição Alternativa do Tensor L 28

2.2 Existência de um Referencial Adaptado 30

2.3 Existência de Imersões Isométricas em Grupos de Lie Nilpotentes 38

2.4 Apêndice 41

3 Imersões Isométricas em Grupos de Lie Solúveis **44**

3.1 Alguns Tensores Auxiliares 44

3.1.1 Definição Alternativa do Tensor L 61

3.2 Existência de um Referencial Adaptado 67

3.3 Existência de Imersões Isométricas em Grupos de Lie Solúveis 77

4 Imersões Isométricas no Espaço Hiperbólico Complexo 78

4.1 O Espaço Hiperbólico Complexo $\mathbb{CH}_2$ 79

4.1.1 Conexão Riemanniana em $\mathbb{CH}_2$ 80

4.1.2 A Curvatura de $\mathbb{CH}_2$ 82

4.2 As Equações de Compatibilidade em $\mathbb{CH}_2$ 91

4.3 Existência de Imersões Isométricas em $\mathbb{CH}_2$ 100

Referências Bibliográficas 101

Resumo

Neste trabalho, demonstramos teoremas estabelecendo condições suficientes para a existência de imersões isométricas com curvatura extrínseca prescrita em grupos de Lie nilpotentes e solúveis, isto é, grupos de Lie N, S cujas respectivas álgebras de Lie $\mathfrak{n}, \mathfrak{s}$ são da forma $\mathfrak{n} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{v}$ com

$$[\mathfrak{v}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{z}, \quad [\mathfrak{z}, \mathfrak{v}] = \{0\}, \quad [\mathfrak{z}, \mathfrak{z}] = \{0\},$$

e $\mathfrak{s} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{a}$, onde $\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{v}$ é nilpotente, $\mathfrak{a} = \mathbb{R}H$ é um fator unidimensional, com o colchete de lie estendido a $\mathfrak{a}$ através das relações

$$[H, E] = \frac{1}{2}E, \quad [H, Z] = Z$$

para $E \in \mathfrak{v}$ e $Z \in \mathfrak{z}$. Obtemos assim uma generalização do Teorema Fundamental da Teoria de Subvariedades em $\mathbb{R}^n$ e, em particular, obtemos resultados de imersão em todos os grupos tipo-Heisenberg e em todos os espaços de Damek-Ricci.

Abstract

In this paper, we prove theorems establishing sufficient conditions to existence for isometric immersions with prescribed extrinsic curvature in two-step nilpotent Lie groups and solvmanifolds.

We obtain a generalization of the Fundamental Theorem of Submanifold Theory in $\mathbb{R}^n$ and, in particular, we one has immersion results in the generally Heisenberg type groups and Damek-Ricci spaces.

Introdução

Atribui-se ao geômetra O. Bonnet o usualmente denominado Teorema Fundamental da Teoria de Superfícies, cujo teor pode ser resumido como a prova de que, caso satisfaçam formalmente as equações de Gauss e Codazzi, duas formas quadráticas dadas em um aberto simplesmente conexo do plano, uma das quais positiva-definida, podem ser realizadas como a métrica induzida e a curvatura extrínseca de uma superfície imersa no espaço euclidiano. O mérito incontestável do teorema é estabelecer um prolífico enlace entre a teoria de superfícies e a análise de equações diferenciais parciais. Isto graças ao fato de que, apresentadas em termos de componentes locais, as formas quadráticas satisfazem a um sistema sobre-determinado de equações de primeira ordem, cujas condições de compatibilidade são justamente as equações fundamentais de Gauss e Codazzi.

A linguagem de fibrados principais presta-se exemplarmente ao enunciado preciso de extensões naturais do Teorema de Bonnet a teoria de subvariedades em formas espaciais, como demonstradas segundo uma notável variedade de formas na literatura, a exemplo de [9], [22], [28], [34] e [36]. A despeito da diversidade de formulações, o Teorema Fundamental da Teoria de Subvariedades em formas espaciais assenta-se na possibilidade de construir-se sobre a variedade a ser imersa um fibrado vetorial com curvatura nula. As equações de Gauss, Codazzi, acrescidas da equação de Ricci, que regula a curvatura do fibrado normal, são vistas como condições suficientes para a existência de um referencial ortonormal paralelo no fibrado, o qual mimetiza o referencial canônico no espaço euclidiano. Naturalmente, o fibrado passa a ser representado como o ambiente euclidiano em que imergimos a variedade. Uma variante interessante desta idéia, com curiosas interpretações em termos da Teoria de Elasticidade, pode ser lida em [7] e [8].

Embora constituam um sistema de equações diferenciais sobejamente díficil de manipular, as equações fundamentais de Gauss, Codazzi e Ricci são ferramentas indispensáveis ao estudo de existência e unicidade (rigidez) de subvariedades em espaços de curvatura constante. Surpreendentemente, em casos de notório interesse geométrico, como o estudo de superfícies mínimas e, mais geralmente, de superfícies de curvatura média constante, as equações de Gauss e Codazzi correspondem a equações amplamente estudadas via ferramentas de sistemas integráveis. Este é o caso da precursora representação de Weierstrass para superfícies mínimas, que relaciona o teorema fundamental a equações de Cauchy-Riemann e cuja formulação recente, baseada em textos clássicos, vincula tais superfícies a análise do operador de Dirac em superfícies de Riemann. Nestes exemplos, e em tantos outros cuja enumeração não é o nosso enfoque presentemente, o teorema fundamental é o arcabouço derradeiro para validar teoremas de representação ou teoremas de equivalência.

Estas considerações *per si* talvez justifiquem por que, recentemente, assiste-se a um considerável esforço de pesquisa sobre teoremas de existência de imersões isométricas em espaços mais gerais. A tônica de diversos artigos na literatura pertinente é a investigação das condições de integrabilidade para superfícies em espaços homogêneos de dimensão três, entre os quais as formas espaciais tridimensionais figuram como os exemplos com quantidade máxima de movimentos rígidos independentes. A lista completa destes espaços é já amplamente conhecida, em função dos primeiros esforços na direção da geometrização do Teorema de Poincaré, e inclui, como exemplo, o grupo de Heisenberg de dimensão três. A propósito, referimos o leitor a [33] e [37].

Os artigos [14] e [15] são, do nosso conhecimento, os primeiros trabalhos em que são descritas versões do teorema fundamental para, respectivamente, imersões isométricas em produtos riemannianos de um espaço de curvatura constante por uma cópia da reta real e nos espaços homogêneos com grupos de isometrias de dimensão quatro. Posteriormente, resultados similares sobre imersões em produtos semi-riemannianos de formas espaciais foram demonstrados em [23] e [38], adaptando as idéias apresentadas em [14]. Em [26], formula-se um teorema de existência de imersões isométricas no modelo solúvel de um espaço homogêneo de dimensão três com grupo de isometrias também tridimensional.

A estratégia adotada por B. Daniel é impor, ao lado das equações usuais de Gauss e Codazzi, condições adicionais que, de certo modo, prescrevem a posição relativa da superfície imersa com respeito as linhas de fluxo de um campo de Killing distinguido do ambiente. Observamos que, em todos os casos tratados em [14] e [15], o ambiente submerge em um espaço de curvatura constante e as fibras da submersão podem ser parametrizadas como linhas de fluxo de um campo gerando uma translação ambiente. A propriedade exemplar destes espaços é que a conexão riemanniana e o tensor de curvatura podem, ao longo da superfície imersa, ser completamente descritos em termos da curvatura da base da submersão e das projeções do campo de Killing tangentes e normais a superfície. Ilustrando a vinculação do Teorema de Bonnet a teoria de superfícies de curvatura média constante, sobre que discorremos acima, mencionamos que diversos trabalhos posteriores combinaram os teoremas demonstrados por Daniel a existência de uma forma quadrática holomorfa, como asegurada em [1] e [2], para produzir uma consistente gama de exemplos e resultados de estrutura sobre superfícies mínimas, de curvatura média ou intrínseca constante nestes espaços. Desincumbidos da pretensão de sermos exaustivos, citamos, da enorme quantidade de contribuições de que tomamos notícia, os artigos [3], [16], [17], [20] e [35].

Instigados, certamente, pela necessidade de descrever os diversos resultados desta natureza, clássicos e contemporâneos, sob a égide de uma teoria geral, Paolo Piccione e Daniel Tausk, inicialmente em [29] e, em seguida, de modo condensado, em [30], utilizaram um formidável aparato envolvendo a noção de *homogeneidade infinitesimal* que lhes permite recobrar de maneira unificada as variações conhecidas do Teorema de Bonnet e propor umas tantas outras em diversos contextos. O tema central em [29] e [30] é enunciar, a partir de uma laboriosa formulação do conceito de espaços infinitesimalmente homogêneos em termos de G-estruturas em fibrados principais, um teorema geral sobre a existência de imersões afins em tais espaços. A homogeneidade infinite-simal é, *grosso modo*, concebida como a constância da conexão afim, do tensor de curvatura e da torção interna da G-estrutura, quando expressos em uma classe de refe-renciais dstinguidos no fibrado de referenciais do ambiente. Distinguidos justamente pelo fato de serem referenciais na G-estrutura, em que G pode ser entendido como o grupo estrutural de uma redução conveniente do fibrado de referenciais. Ilustrando o resultado geral, os teoremas em [14] e [15] são recuperados tomando-se como referenciais distinguidos aqueles contendo o campo de Killing. A "constância" da torção interna corresponde ao elenco de condições adicionais postas por Daniel.

Destacamos que teoremas de existência de imersões isométricas em grupos de Lie dotados de uma métrica invariante à esquerda estão entre os diversos corolários do teorema geral em [29] - v. também [26] - a que aludimos anteriormente. Dito de modo algo impreciso, os autores tomam como G-estrutura a trivialização do fibrado tangente do grupo de Lie ambiente obtida pela escolha de um referencial global, ortonormal e invariante à esquerda. Com isto, tornam constante o tensor de Christoffel e o tensor de curvatura. Mimetizam, então, estas escolhas em um fibrado sobre a variedade a ser imersa, considerando a existência de secções neste fibrado em que a derivada covariante é inteiramente descrita pelo tensor de Christoffel do grupo. Na linguagem de B. Daniel, isto corresponderia a tomar condições adicionais envolvendo derivadas de primeira ordem das projeções tangentes e normais de *todos* os campos nos referenciais distinguidos do fibrado.

Nos capítulos a seguir, empreendemos uma construção a meio caminho entre as apresentados por Daniel e por Piccione e Tausk. Lidamos com uma classe específica de espaços ambiente, a saber, grupos de Lie nilpotentes e solúveis munidos de uma métrica invariante à esquerda, sem, contudo, impor o mesmo gênero de condições adicionais requeridas em [29]. Mais precisamente, utilizando o fato de que, neste grupos, destaca-se uma subálgebra de campos de Killing conformes invariantes à esquerda, pretendemos descrever inteiramente a derivada covariante e, por conseguinte, a curvatura destes espaços unicamente em termos da métrica, de projeções na direção destes campos e de suas derivadas covariantes, as quais consideramos em conjunto como tensores distinguidos. Pretendendo evitar antecipar uma embaraçosa lista de notações e noções, dirigimos o leitor diretamente para o exame dos seguintes teoremas, demonstrados no corpo do texto. O primeiro destes trata de imersões isométricas em um grupo de Lie N nilpotente a dois passos.

Teorema 1. *Seja M^m uma variedade Riemanniana orientada, simplesmente conexa e seja $\mathcal{E}$ um fibrado vetorial Riemanniano real com posto m' de modo que $\mathcal{S} = TM \oplus \mathcal{E}$ é um fibrado vetorial trivial. Fixamos um referencial ortonormal global $\{\hat{E}_k\}_{k=1}^{n+n'}$ em $\mathcal{S}$. Sejam $\hat{\nabla}$ e $\hat{R}$, nesta ordem, a conexão compatível e o tensor curvatura de $\mathcal{S}$ e $\nabla, \nabla^{\mathcal{E}}$ as conexões compatíveis induzidas em TM e $\mathcal{E}$, respectivamente. Definimos $\hat{J}_k$, $\hat{L}$ e $\hat{Q}$ como em (2.20), (2.22) e (2.23), respectivamente. Supomos que estes campos satisfaçam as equações*

$$\hat{R} = \hat{Q} \tag{1}$$

e

$$\hat{\nabla}\hat{E}_{n+k} = -\frac{1}{2}\hat{J}_k, \quad k = 1, \ldots, n'. \tag{2}$$

Então, existem uma imersão isométrica $f : M \to N$ e um isomorfismo $f^\perp : \mathcal{E} \to TM^\perp$, onde $TM^\perp$ denota o fibrado normal ao longo de f, de modo que $f^\perp$ é uma isometria, quando restrito às fibras, e satisfaz

$$f_*\nabla^{\mathcal{E}}_X V = \bar{\nabla}^\perp_{f_*X} f^\perp V, \quad X \in \Gamma(TM),\, V \in \Gamma(\mathcal{E}), \tag{3}$$

$$f^\perp II(X,Y) = \bar{\nabla}^\perp_{f_*X} f_*Y, \quad X, Y \in \Gamma(TM), \tag{4}$$

onde $\bar{\nabla}^\perp$ denota a conexão normal em $TM^\perp$. A imersão isométrica é única, a menos de escolhas de um referencial global em $\mathcal{S}$ e movimentos rígidos em N.

Os tensores $\hat{J}_k$ reproduzem, no fibrado $\mathcal{S}$, as derivadas covariantes dos campos de Killing na subálgebra $\mathfrak{z} = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ da álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ de N. Os tensores $\hat{L}$ e $\hat{Q}$ provêm das expressões, deduzidas no Capítulo 2, da conexão riemanniana e da curvatura de N em termos dos campos de Killing nesta subálgebra e de suas derivadas covariantes.

O teorema correspondente para imersões isométricas em um grupo de Lie S solúvel a três passos é obtido igualmente descrevendo-se a conexão e a curvatura ambientes em termos de campos vetoriais nas duas últimas parcelas da soma direta $\mathfrak{s} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{a}$ em que se decompõe a álgebra de Lie $\mathfrak{s}$ de S. Novamente, desempenham papel crucial estes campos e suas derivadas covariantes, embutidas na definição dos tensores $\hat{J}, \hat{L}$ e $\hat{Q}$ do enunciado.

Teorema 2. *Seja M^m uma variedade Riemanniana orientada, simplesmente conexa e seja $\mathcal{E}$ um fibrado vetorial Riemanniano real com posto m' de modo que $\mathcal{S} = TM \oplus \mathcal{E}$ é um fibrado vetorial trivial. Fixamos um referencial ortonormal global $\{\hat{E}_k\}_{k=1}^{n+n'+1}$ em $\mathcal{S}$. Sejam $\hat{\nabla}$ e $\hat{R}$, nesta ordem, a conexão compatível e o tensor curvatura de $\mathcal{S}$ e $\nabla, \nabla^{\mathcal{E}}$ as conexões compatíveis induzidas em TM e $\mathcal{E}$, respectivamente. Definimos $\hat{J}_k, \hat{J}_{n'+1}, \hat{L}$ e $\hat{Q}$ como em (3.18), (3.19), (3.24) e (3.25), respectivamente. Supomos que estes campos satisfaçam as equações*

$$\hat{R} = \hat{Q} \tag{5}$$

e

$$\hat{\nabla}\hat{E}_{n+k} = -\frac{1}{2}\hat{J}_k, \quad k = 1, \ldots, n', n'+1. \tag{6}$$

Então, existem uma imersão isométrica $f : M \to S$ e um isomorfismo $f_*^\perp : \mathcal{E} \to TM^\perp$, onde $TM^\perp$ denota o fibrado normal ao longo de f, de modo que $f_*^\perp$ é uma isometria, quando restrito *às fibras, e satisfaz*

$$f_*\nabla^{\mathcal{E}}_X V = \bar{\nabla}^{\perp}_{f_*X} f^{\perp}_* V, \quad X \in \Gamma(TM),\ V \in \Gamma(\mathcal{E}), \tag{7}$$

$$f^{\perp}_* II(X,Y) = \bar{\nabla}^{\perp}_{f_*X} f_* Y, \quad X, Y \in \Gamma(TM), \tag{8}$$

onde $\bar{\nabla}^{\perp}$ denota a conexão normal em $TM^{\perp}$. A imersão isométrica é única, a menos de escolhas de um referencial global em $\mathcal{S}$ e movimentos rígidos em S.

A restrição de nossa caminhada e grupos nilpotentes a dois ou três passos torna-se justificada em parte por razões técnicas, dada a crescente dificuldade de determinar expressões manipuláveis dos tensores fundamentais em uma situação absolutamente geral. Um outro motivo, de caráter geométrico, que nos fez circunscrever a análise a estas classes de grupos, é o fato de que incluem os afamados grupos tipo-Heisenberg e espaços de Damek-Ricci tão vastamente estudados em várias áreas de Geometria Riemanniana e da Análise Geométrica. Uma pequena amostra de textos pioneiros no campo pode ser encabeçada por [4], [5], [10], [11], [12], [13], [18], [19], [21], [24] e [25]. Como ilustração do alcance dos resultados que obtivemos, apresentamos à parte uma versão do teorema fundamental para imersões isométricas no espaço hiperbólico complexo, cujo enunciado denota proximidade com os resultados de B. Daniel.

Teorema 3. *Sejam M uma variedade Riemanniana orientada e simplesmente conexa de dimensão 3, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a métrica em M, ∇ a conexão compatível correspondente e J_i os endomorfismos em TM dados por*

$$J_i X = X \times T_i \times \nu, \quad i = 1, 2,$$

onde T_1 e T_2 são campos vetoriais em M e ν é uma secção global no fibrado trivial $M \times \mathbb{R}$. Seja S um campo simétrico de operadores $S_y : T_yM \to T_yM$ e sejam f_1 e f_2 funções suaves em M tais que $||T_i||^2 + f_i^2 = 1$, para $i = 1, 2$. Então, existe uma imersão isométrica $f : M \to \mathbb{CH}_2$ se, e somente se, $(\langle .,. \rangle, S, T_1, T_2, f_1, f_2)$ satisfazem as equações de Gauss e Codazzi para $\mathbb{CH}_2$ e, para todo campo vetorial X em M, as seguintes equações são satisfeitas

$$\begin{aligned} \nabla_X T_1 &= f_1 SX - \frac{1}{2} f_2 J_1 X + \frac{1}{2} f_1 J_2 X - \langle X, T_1 \rangle T_2, && (9) \\ \mathrm{d}f_1(X) &= -\langle SX, T_1 \rangle - \frac{1}{2}\langle X, T_1 \rangle - \frac{1}{2}\langle X \times T_1 \times T_2, \nu \rangle && (10) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \nabla_X T_2 &= f_2 SX - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\langle X, T_1\rangle T_1 + \frac{1}{2}\langle X, T_2\rangle T_2, && (11) \\ \mathrm{d}f_2(X) &= -\langle SX, T_2\rangle - \frac{1}{2}\langle X, T_1\rangle f_1 + \frac{1}{2}\langle X, T_2\rangle f_2, && (12) \end{aligned}$$

ou seja, $(\langle .,. \rangle, S, T_1, T_2, f_1, f_2)$ *satisfazem as equações de compatibilidade para* $\mathbb{CH}_2$*.*

Investigação corrente nos leva a crer que, restringindo-nos ao estudo de superfícies e hipersuperfícies no espaço hiperbólico complexo, podemos interpretar o resultado acima em termos de soluções de certas equações de Dirac com potencial. Esta perspectiva de trabalho tem sido levada a cabo por autores como Taimanov e J. Roth em artigos tais como [31] e [35]. Esta seria uma ocasião de lidar especificamente com a representação de subvariedades mínimas neste espaço, configurando o Teorema 3 em termos de existência de aplicações harmônicas, por exemplo.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo, apresentamos os grupos de Lie objeto de nosso estudo e estabelecemos alguns fatos geométricos básicos nesses espaços.

1.1 Grupos de Lie Nilpotentes

Seja N um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ e forma de Maurer-Cartan $\omega_{\mathfrak{n}}$. A conexão de Levi-Cività para uma dada métrica invariante à esquerda $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em N é

$$2\bar{\nabla}_E F = [E, F] - \mathrm{ad}_E^* \cdot F - \mathrm{ad}_F^* \cdot E, \tag{1.1}$$

para campos invariantes à esquerda E, F em $\mathfrak{n}$, onde $\mathrm{ad}_E = [E, \cdot\ ]$ e

$$\langle \mathrm{ad}_E^* \cdot F, G \rangle = \langle F, \mathrm{ad}_E \cdot G \rangle = \langle F, [E, G] \rangle, \quad E, F, G \in \mathfrak{n}.$$

Supomos que $\mathfrak{n}$ admite a decomposição $\mathfrak{n} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{v}$ com

$$[\mathfrak{v}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{z}, \quad [\mathfrak{z}, \mathfrak{v}] = \{0\}, \quad [\mathfrak{z}, \mathfrak{z}] = \{0\}, \tag{1.2}$$

o que obviamente implica que

$$[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{z}, \quad [\mathfrak{n}, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]] = \{0\}. \tag{1.3}$$

Desse modo, N é um grupo de Lie nilpotente (a dois passos). Vamos denotar por n e n' as dimensões de $\mathfrak{v}$ and $\mathfrak{z}$, respectivamente. Podemos, sem perda de generalidade, supor que a métrica invariante à esquerda $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em N é escolhida de modo que a soma direta $\mathfrak{n} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{v}$ é ortogonal.

As relações (1.2) implicam que

$$\bar{\nabla}_E F = \frac{1}{2}[E, F] \tag{1.4}$$

para campos invariantes à esquerda em $\mathfrak{v}$. Também obtemos de (1.2) que $\bar{\nabla}_Z Z' = 0$ para quaisquer campos invariantes à esquerda Z, Z' em $\mathfrak{z}$.

Dado um campo de vetores $Z \in \mathfrak{z}$, é fácil ver que (1.4) é equivalente ao fato de que $\bar{\nabla} Z$ gera uma transformação linear anti-simétrica em $\mathfrak{v}$. Com efeito, para $E, F \in \mathfrak{v}$, tem-se que

$$\langle \bar{\nabla}_E Z, F \rangle = -\frac{1}{2}\langle [E, F], Z \rangle = -\frac{1}{2}\langle \mathrm{ad}_E^* Z, F \rangle, \tag{1.5}$$

para $Z \in \mathfrak{z}$ e $E, F \in \mathfrak{v}$. Denotamos $J_Z : \mathfrak{v} \to \mathfrak{v}$, $J_Z E = \mathrm{ad}_E^* Z$. Verifica-se imediatamente que os campos de vetores em $\mathfrak{z}$ são campos de Killing. De fato,

$$\langle \bar{\nabla}_Z Z', Z'' \rangle = 0, \quad \langle \bar{\nabla}_E Z, Z' \rangle = 0, \tag{1.6}$$

para $E \in \mathfrak{v}$ and $Z, Z', Z'' \in \mathfrak{z}$. Finalmente, uma vez que $[\mathfrak{z}, \mathfrak{v}] = \{0\}$, segue-se que

$$\bar{\nabla}_Z E = \bar{\nabla}_Z E = -\frac{1}{2} J_Z E, \quad E \in \mathfrak{v}. \tag{1.7}$$

Assim, concluímos que a derivada covariante para campos invariantes à esquerda em $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é dada por

$$\bar{\nabla}_E F = \frac{1}{2}[E, F], \quad E, F \in \mathfrak{v}, \tag{1.8}$$

$$\bar{\nabla}_E Z = -\frac{1}{2} J_Z E = -\frac{1}{2}\mathrm{ad}_E^* Z, \quad E \in \mathfrak{v},\ Z \in \mathfrak{z}, \tag{1.9}$$

$$\bar{\nabla}_Z Z' = 0, \quad Z, Z' \in \mathfrak{z}. \tag{1.10}$$

O operador J_Z, associado a um campo de vetores $Z \in \mathfrak{z}$, pode ser estendido a $\mathfrak{n}$ como

$$J_Z := -2\bar{\nabla} Z. \tag{1.11}$$

É também apropriado considerar o campo tensorial do tipo $(0, 2)$, igualmente denotado por J_Z, definido por $J_Z(E, F) = \langle J_Z E, F \rangle$.

A partir das equações (1.8)-(1.10), podemos obter facilmente o tensor curvatura de

N, o qual admite a seguinte decomposição (veja [18])

$$\bar{R}(E,F)G = -\frac{1}{4}J_{[E,G]}F + \frac{1}{4}J_{[F,G]}E - \frac{1}{2}J_{[E,F]}G, \tag{1.12}$$

$$\bar{R}(E,F)Z = -\frac{1}{2}\big(\bar{\nabla}_F J_Z\big)E + \frac{1}{2}\big(\bar{\nabla}_E J_Z\big)F, \tag{1.13}$$

$$\bar{R}(E,Z)F = \frac{1}{2}\big(\bar{\nabla}_E J_Z\big)F, \tag{1.14}$$

$$\bar{R}(E,Z)Z' = \frac{1}{4}J_Z J_{Z'}E, \tag{1.15}$$

$$\bar{R}(Z,Z')E = \frac{1}{4}J_{Z'}J_Z E - \frac{1}{4}J_Z J_{Z'}E, \tag{1.16}$$

$$\bar{R}(Z,Z')Z'' = 0, \tag{1.17}$$

para $E,F,G \in \mathfrak{v}$ e $Z,Z',Z'' \in \mathfrak{z}$. É possível reescrever (1.13) e (1.14) em termos do colchete de Lie e dos tensores J. De fato, temos, para $E,F \in \mathfrak{v}$ e $Z \in \mathfrak{z}$,

$$(\bar{\nabla}_E J_Z)F = \bar{\nabla}_E(J_Z F) - J_Z\bar{\nabla}_E F = \bar{\nabla}_E(J_Z F) = \frac{1}{2}[E, J_Z F],$$

onde estamos usando o fato que $J_Z F \in \mathfrak{v}$. Assim, obtemos

$$(\bar{\nabla}_E J_Z)F = \frac{1}{2}[E, J_Z F]. \tag{1.18}$$

É também útil observar que, dado $Z' \in \mathfrak{z}$, vale

$$\begin{aligned} \langle(\bar{\nabla}_E J_Z)F, Z'\rangle &= \langle\bar{\nabla}_E(J_Z F), Z'\rangle = E\langle J_Z F, Z'\rangle - \langle J_Z F, \bar{\nabla}_E Z'\rangle \\ &= -\langle J_Z F, \bar{\nabla}_E Z'\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle J_Z F, J_{Z'}E\rangle. \end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que

$$\langle(\bar{\nabla}_E J_Z)F, Z'\rangle = \frac{1}{2}\langle J_Z F, J_{Z'}E\rangle. \tag{1.19}$$

1.1.1 Conexão e Curvatura para Campos Arbitrários

Dado um campo de vetores X em N, denotamos por $X^{\mathfrak{v}}$ e $X^{\mathfrak{z}}$ suas projeções sobre os subespaços $\mathfrak{v}$ e $\mathfrak{z}$, respectivamente.

Usando as fórmulas obtidas em (1.8)-(1.10) para campos invariantes à esquerda, obtemos a seguinte expressão para a derivada covariante ambiente em termos de campos de vetores X,Y,V *arbitrários* em N:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= \bar{\nabla}_{X^{\mathfrak{v}}} Y^{\mathfrak{v}} + \bar{\nabla}_{X^{\mathfrak{v}}} Y^{\mathfrak{z}} + \bar{\nabla}_{X^{\mathfrak{z}}} Y^{\mathfrak{v}} + \bar{\nabla}_{X^{\mathfrak{z}}} Y^{\mathfrak{z}} \\ &= \frac{1}{2}[X,Y] - \frac{1}{2}J_{Y^{\mathfrak{z}}}X^{\mathfrak{v}} - \frac{1}{2}J_{X^{\mathfrak{z}}}Y^{\mathfrak{v}}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

O tensor curvatura se decompõe do seguinte modo:

$$
\begin{aligned}
\bar{R}(X,Y)V &= \bar{R}(X^{\mathfrak{v}},Y^{\mathfrak{v}})V^{\mathfrak{v}} \\
&+ \bar{R}(X^{\mathfrak{v}},Y^{\mathfrak{v}})V^{\mathfrak{z}} + \bar{R}(X^{\mathfrak{v}},Y^{\mathfrak{z}})V^{\mathfrak{v}} - \bar{R}(Y^{\mathfrak{v}},X^{\mathfrak{z}})V^{\mathfrak{v}} \\
&+ \bar{R}(X^{\mathfrak{v}},Y^{\mathfrak{z}})V^{\mathfrak{z}} - \bar{R}(Y^{\mathfrak{v}},X^{\mathfrak{z}})V^{\mathfrak{z}} + \bar{R}(X^{\mathfrak{z}},Y^{\mathfrak{z}})V^{\mathfrak{v}}.
\end{aligned} \tag{1.21}
$$

Daí, usando as expressões (1.12)-(1.17) e contraindo (1.21) com um quarto campo vetorial $W \in \Gamma(TN)$, segue-se que

$$
\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X,Y)V,W\rangle &= -\frac{1}{4}\langle J_{[X^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}]}Y^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}\rangle + \frac{1}{4}\langle J_{[Y^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}]}X^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}\rangle \\
&- \frac{1}{2}\langle J_{[X^{\mathfrak{v}},Y^{\mathfrak{v}}]}V^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}\rangle \\
&+ \frac{1}{2}\Big(\langle(\bar{\nabla}_{X^{\mathfrak{v}}}J_{V^{\mathfrak{z}}})Y^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{z}}\rangle - \langle\bar{\nabla}_{Y^{\mathfrak{v}}}J_{V^{\mathfrak{z}}})X^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{z}}\rangle \\
&+ \langle(\bar{\nabla}_{X^{\mathfrak{v}}}J_{Y^{\mathfrak{z}}})V^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{z}}\rangle - \langle(\nabla_{Y^{\mathfrak{v}}}J_{X^{\mathfrak{z}}})V^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{z}}\rangle\Big) \\
&+ \frac{1}{4}\Big(\langle J_{Y^{\mathfrak{z}}}J_{V^{\mathfrak{z}}}X^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}\rangle - \langle J_{X^{\mathfrak{z}}}J_{V^{\mathfrak{z}}}Y^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}\rangle \\
&+ \langle J_{Y^{\mathfrak{z}}}J_{X^{\mathfrak{z}}}V^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}\rangle - \langle J_{X^{\mathfrak{z}}}J_{Y^{\mathfrak{z}}}V^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}\rangle\Big).
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\langle J_{[X^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}]}Y^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}\rangle = \langle [X^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}],[Y^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}]\rangle. \tag{1.22}
$$

Usando (1.22) e a anti-simetria do tensor J, concluí-se que

$$
\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X,Y)V,W\rangle &= -\frac{1}{4}\langle [X^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}],[Y^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}]\rangle + \frac{1}{4}\langle [Y^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}],[X^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}]\rangle \\
&- \frac{1}{2}\langle [X^{\mathfrak{v}},Y^{\mathfrak{v}}],[V^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}]\rangle \\
&+ \frac{1}{2}\Big(\langle(\bar{\nabla}_{X^{\mathfrak{v}}}J_{V^{\mathfrak{z}}})Y^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{z}}\rangle - \langle\bar{\nabla}_{Y^{\mathfrak{v}}}J_{V^{\mathfrak{z}}})X^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{z}}\rangle \\
&+ \langle(\bar{\nabla}_{X^{\mathfrak{v}}}J_{Y^{\mathfrak{z}}})V^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{z}}\rangle - \langle(\nabla_{Y^{\mathfrak{v}}}J_{X^{\mathfrak{z}}})V^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{z}}\rangle\Big) \\
&- \frac{1}{4}\Big(\langle J_{V^{\mathfrak{z}}}X^{\mathfrak{v}},J_{Y^{\mathfrak{z}}}W^{\mathfrak{v}}\rangle - \langle J_{V^{\mathfrak{z}}}Y^{\mathfrak{v}},J_{X^{\mathfrak{z}}}W^{\mathfrak{v}}\rangle \\
&+ \langle J_{X^{\mathfrak{z}}}V^{\mathfrak{v}},J_{Y^{\mathfrak{z}}}W^{\mathfrak{v}}\rangle - \langle J_{Y^{\mathfrak{z}}}V^{\mathfrak{v}},J_{X^{\mathfrak{z}}}W^{\mathfrak{v}}\rangle\Big).
\end{aligned} \tag{1.23}
$$

1.2 Grupos de Lie Solúveis

Seja S um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{s}$ e forma de Maurer-Cartan $\omega_{\mathfrak{s}}$. A conexão de Levi-Cività para uma dada métrica invariante à esquerda $\langle\cdot,\cdot\rangle$ em S é

$$
2\bar{\nabla}_E F = [E,F] - \mathrm{ad}_E^* \cdot F - \mathrm{ad}_F^* \cdot E, \tag{1.24}
$$

para campos de vetores invariantes à esquerda E, F em $\mathfrak{s}$, onde $\mathrm{ad}_E = [E, \cdot\,]$ e

$$\langle \mathrm{ad}_E^* \cdot F, G\rangle = \langle F, \mathrm{ad}_E \cdot G\rangle = \langle F, [E, G]\rangle, \quad E, F, G \in \mathfrak{s}.$$

Supomos que $\mathfrak{s}$ admite a decomposição $\mathfrak{s} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{a}$, onde $\mathfrak{a} = \mathbb{R}H$ é um fator unidimensional, com

$$[\mathfrak{v}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{z}, \quad [\mathfrak{z}, \mathfrak{v}] = \{0\}, \quad [\mathfrak{z}, \mathfrak{z}] = \{0\}, \tag{1.25}$$

e o colchete de Lie é estendido a $\mathfrak{a}$ pelas relações

$$[H, E] = \frac{1}{2}E, \quad [H, Z] = Z \tag{1.26}$$

para $E \in \mathfrak{v}$ and $Z \in \mathfrak{z}$, o que obviamente implica que

$$[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{v} =: \mathfrak{n}, \quad [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = \mathfrak{z}, \quad [\mathfrak{z}, \mathfrak{n}] = \{0\}. \tag{1.27}$$

Assim, S é um grupo de Lie solúvel (ou nilpotente a três passos). Denotamos por n e n' as dimensões de $\mathfrak{v}$ e $\mathfrak{z}$, respectivamente. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que a métrica invariante à esquerda $\langle\cdot,\cdot\rangle$ em S é escolhida de modo que a soma direta $\mathfrak{s} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{a}$ é ortogonal. As relações (1.25) e (1.26) implicam que

$$\bar{\nabla}_H = 0, \tag{1.28}$$

$$\bar{\nabla}_E F = \frac{1}{2}\langle E, F\rangle H + \frac{1}{2}[E, F], \tag{1.29}$$

$$\bar{\nabla}_E H = -\frac{1}{2}E, \tag{1.30}$$

$$\bar{\nabla}_E Z = -\frac{1}{2}\mathrm{ad}_E^* Z \tag{1.31}$$

e

$$\bar{\nabla}_Z H = -Z, \tag{1.32}$$

$$\bar{\nabla}_Z E = -\frac{1}{2}\mathrm{ad}_E^* Z, \tag{1.33}$$

$$\bar{\nabla}_Z Z' = \langle Z, Z'\rangle H, \tag{1.34}$$

para $E, F \in \mathfrak{v}$, $Z, Z' \in \mathfrak{z}$ e $H \in \mathfrak{a}$.

Dado um campo vetorial $Z \in \mathfrak{z}$, observamos que (1.31) é equivalente ao fato de que $\bar{\nabla}Z$ gera uma transformação linear anti-simétrica em $\mathfrak{v}$. Com efeito, para $E, F \in \mathfrak{v}$, $Z' \in \mathfrak{z}$ e $H \in \mathfrak{a}$, temos

$$\langle \bar{\nabla}_E Z, H\rangle = E\langle Z, H\rangle - \langle Z, \bar{\nabla}_H X\rangle = 0, \tag{1.35}$$

$$2\langle \bar{\nabla}_E Z, F\rangle = \langle [E,Z]F, \rangle - \langle [Z,F],E\rangle - \langle [Z,F],E\rangle = -\langle \mathrm{ad}_E F, Z\rangle = -\langle \mathrm{ad}_E^* Z, F\rangle \quad (1.36)$$

e, finalmente,

$$2\langle \bar{\nabla}_E Z, Z'\rangle = \langle [E,Z],Z'\rangle - \langle [E,Z'],Z\rangle - \langle [Z,Z'],E\rangle = 0, \quad (1.37)$$

para $E, F \in \mathfrak{v},\ Z, Z' \in \mathfrak{z}$ e $H \in \mathfrak{a}$. Denotamos $J_Z : \mathfrak{v} \to \mathfrak{v}$, $J_Z E = \mathrm{ad}_E^* Z$.

Considerando o campo vetorial $H \in \mathfrak{a}$, observamos que (1.30) e (1.32) são equivalentes ao fato de que $\bar{\nabla} H$ gera uma transformação linear simétrica em $\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{v}$ tal que $\mathfrak{z}$ e $\mathfrak{v}$ são subespaços invariantes. Escrevemos $J_H : \mathfrak{v} \to \mathfrak{v}$, $J_H E = -\frac{1}{2}E$ e $J_H : \mathfrak{z} \to \mathfrak{z}$, $J_H Z = -Z$.

Os operadores $J_Z,\ J_H$, associados aos campos $Z \in \mathfrak{z}$ e $H \in \mathfrak{a}$, podem ser estendidos a $\mathfrak{s}$ pondo

$$J_Z := -2\bar{\nabla} Z, \quad J_H := -2\bar{\nabla} H. \quad (1.38)$$

É útil considerar os campos tensoriais do tipo $(0,2)$, também denotados por $J_Z,\ J_H$, dados por $J_Z(E,F) = \langle J_Z E, F\rangle,\ J_H(E,F) = \langle J_H E, F\rangle$.

Usando as equações (1.28)-(1.34), obtemos facilmente a seguinte decomposição do tensor curvatura de S:

$$\bar{R}(E,H)H = \frac{1}{4}E, \tag{1.39}$$

$$\bar{R}(Z,H)H = Z, \tag{1.40}$$

$$\bar{R}(E,F)G = -\frac{1}{4}\langle E,G\rangle F + \frac{1}{4}\langle F,G\rangle E - \frac{1}{4}J_{[E,G]}F \tag{1.41}$$

$$+\frac{1}{4}J_{[F,G]}E - \frac{1}{2}J_{[E,F]}G,$$

$$\bar{R}(E,F)H = -\frac{1}{2}[E,F], \tag{1.42}$$

$$\bar{R}(E,H)F = -\frac{1}{4}\langle E,F\rangle H - \frac{1}{4}[E,F], \tag{1.43}$$

$$\bar{R}(E,F)Z = \frac{1}{2}\langle J_Z E,F\rangle H + \frac{1}{4}[E,J_Z F] - \frac{1}{4}[F,J_Z E], \tag{1.44}$$

$$\bar{R}(Z,E)F = \frac{1}{2}\langle E,F\rangle H - \frac{1}{4}[E,J_Z F] - \frac{1}{4}\langle J_Z E,F\rangle H, \tag{1.45}$$

$$R(E,Z)Z' = \frac{1}{4}J_Z J_{Z'}E + \frac{1}{2}\langle Z,Z'\rangle E, \tag{1.46}$$

$$\bar{R}(Z,Z')E = \frac{1}{4}[J_{Z'},J_Z]E, \tag{1.47}$$

$$\bar{R}(Z,Z')Z'' = \langle Z',Z''\rangle Z - \langle Z,Z''\rangle Z', \tag{1.48}$$

$$\bar{R}(Z,Z')H = 0, \tag{1.49}$$

$$\bar{R}(Z,H)Z' = -\langle Z,Z'\rangle H, \tag{1.50}$$

$$\bar{R}(H,E)Z = -\frac{1}{4}J_Z E, \tag{1.51}$$

$$\bar{R}(H,Z)X = -\frac{1}{2}J_Z X, \tag{1.52}$$

$$\bar{R}(E,Z)H = -\frac{1}{4}J_Z E, \tag{1.53}$$

para $E,F,G \in \mathfrak{v},\ Z,Z',Z'' \in \mathfrak{z}$ e $H \in \mathfrak{a}$. É também útil observar que,

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_E J_Z)F &= \bar{\nabla}_E(J_Z F) - J_Z(\bar{\nabla}_E F)\\
&= \frac{1}{2}\langle E,J_Z F\rangle H + \frac{1}{2}[E,J_Z F] - J_Z\big(\frac{1}{2}\langle E,F\rangle H + \frac{1}{2}[E,F]\big)\\
&= \frac{1}{2}\langle E,J_Z F\rangle H + \frac{1}{2}[E,J_Z F] - \frac{1}{2}J_Z([E,F]),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$[E,J_Z F] = 2(\bar{\nabla}_E J_Z)F - \langle E,J_Z F\rangle H + J_Z[E,F] \tag{1.54}$$

e, consequentemente,

$$\langle [E,J_Z F],Z^{'}\rangle = 2\langle(\bar{\nabla}_E J_Z)F,Z^{'}\rangle. \tag{1.55}$$

para campos $E,F \in \mathfrak{v}$ e $Z,Z' \in \mathfrak{z}$ quaisquer.

1.2.1 Conexão e Curvatura para Campos Arbitrários

Dado um campo vetorial X em S, denotamos por $X^{\mathfrak{v}},\ X^{\mathfrak{z}}$ e $X^{\mathfrak{a}}$ suas projeções sobre os subespaços $\mathfrak{v},\ \mathfrak{z}$ e $\mathfrak{a}$, respectivamente.

Usando as fórmulas obtidas em (1.28)-(1.34) para campos invariantes à esquerda, obtemos a seguinte expressão para a derivada covariante ambiente em termos de campos de vetores X, Y, V *arbitrários* em S:

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X Y &= \bar{\nabla}_{X^{\mathfrak{v}}} Y^{\mathfrak{v}} + \bar{\nabla}_{X^{\mathfrak{v}}} Y^{\mathfrak{z}} + \bar{\nabla}_{X^{\mathfrak{v}}} Y^{\mathfrak{a}} + \bar{\nabla}_{X^{\mathfrak{z}}} Y^{\mathfrak{v}} + \bar{\nabla}_{X^{\mathfrak{z}}} Y^{\mathfrak{z}} + \bar{\nabla}_{X^{\mathfrak{z}}} Y^{\mathfrak{a}} \\
&= \frac{1}{2}\langle X^{\mathfrak{v}}, Y^{\mathfrak{v}}\rangle H + \frac{1}{2}[X^{\mathfrak{v}}, Y^{\mathfrak{v}}] - \frac{1}{2} J_{X^{\mathfrak{v}}} Y^{\mathfrak{z}} - \frac{1}{2}\langle Y, H\rangle X^{\mathfrak{v}} + X^{\mathfrak{v}}\langle Y, H\rangle H \\
&- \frac{1}{2} J_{Y^{\mathfrak{v}}} X^{\mathfrak{z}} - \langle X^{\mathfrak{z}}, Y^{\mathfrak{z}}\rangle H - \langle Y, H\rangle X^{\mathfrak{z}} + X^{\mathfrak{z}}\langle Y, H\rangle H.
\end{aligned}$$

O tensor curvatura se decompõe do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X,Y)V &= \bar{R}(X^{\mathfrak{a}}, Y^{\mathfrak{v}})V^{\mathfrak{a}} + \bar{R}(X^{\mathfrak{a}}, Y^{\mathfrak{v}})V^{\mathfrak{v}} + \bar{R}(X^{\mathfrak{a}}, Y^{\mathfrak{v}})V^{\mathfrak{z}} \\
&+ \bar{R}(X^{\mathfrak{a}}, Y^{\mathfrak{z}})V^{\mathfrak{a}} + \bar{R}(X^{\mathfrak{a}}, Y^{\mathfrak{z}})V^{\mathfrak{v}} + \bar{R}(X^{\mathfrak{a}}, Y^{\mathfrak{z}})V^{\mathfrak{z}} \\
&+ \bar{R}(X^{\mathfrak{v}}, Y^{\mathfrak{a}})V^{\mathfrak{a}} + \bar{R}(X^{\mathfrak{v}}, Y^{\mathfrak{a}})V^{\mathfrak{v}} + \bar{R}(X^{\mathfrak{v}}, Y^{\mathfrak{a}})V^{\mathfrak{z}} \\
&+ \bar{R}(X^{\mathfrak{v}}, Y^{\mathfrak{v}})V^{\mathfrak{a}} + \bar{R}(X^{\mathfrak{v}}, Y^{\mathfrak{v}})V^{\mathfrak{v}} + \bar{R}(X^{\mathfrak{v}}, Y^{\mathfrak{v}})V^{\mathfrak{z}} \\
&+ \bar{R}(X^{\mathfrak{v}}, Y^{\mathfrak{z}})V^{\mathfrak{a}} + \bar{R}(X^{\mathfrak{v}}, Y^{\mathfrak{z}})V^{\mathfrak{v}} + \bar{R}(X^{\mathfrak{v}}, Y^{\mathfrak{z}})V^{\mathfrak{z}} \\
&+ \bar{R}(X^{\mathfrak{z}}, Y^{\mathfrak{a}})V^{\mathfrak{a}} + \bar{R}(X^{\mathfrak{z}}, Y^{\mathfrak{a}})V^{\mathfrak{v}} + \bar{R}(X^{\mathfrak{z}}, Y^{\mathfrak{a}})V^{\mathfrak{z}} \\
&+ \bar{R}(X^{\mathfrak{z}}, Y^{\mathfrak{v}})V^{\mathfrak{a}} + \bar{R}(X^{\mathfrak{z}}, Y^{\mathfrak{v}})V^{\mathfrak{v}} + \bar{R}(X^{\mathfrak{z}}, Y^{\mathfrak{v}})V^{\mathfrak{z}} \\
&+ \bar{R}(X^{\mathfrak{z}}, Y^{\mathfrak{z}})V^{\mathfrak{a}} + \bar{R}(X^{\mathfrak{z}}, Y^{\mathfrak{z}})V^{\mathfrak{v}} + \bar{R}(X^{\mathfrak{z}}, Y^{\mathfrak{z}})V^{\mathfrak{z}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X,Y)V &= \langle X, H\rangle\langle V, H\rangle \bar{R}(H, Y^{\mathfrak{v}})H + \langle X, H\rangle \bar{R}(H, Y^{\mathfrak{v}})V^{\mathfrak{v}} + \langle X, H\rangle \bar{R}(H, Y^{\mathfrak{v}})V^{\mathfrak{z}} \\
&+ \langle X, H\rangle\langle V, H\rangle \bar{R}(H, Y^{\mathfrak{z}})H + \langle X, H\rangle \bar{R}(H, Y^{\mathfrak{z}})V^{\mathfrak{v}} + \langle X, H\rangle \bar{R}(H, Y^{\mathfrak{z}})V^{\mathfrak{z}} \\
&+ \langle Y, H\rangle\langle V, H\rangle \bar{R}(X^{\mathfrak{v}}, H)H + \langle Y, H\rangle \bar{R}(X^{\mathfrak{v}}, H)V^{\mathfrak{v}} + \langle Y, H\rangle \bar{R}(X^{\mathfrak{v}}, H)V^{\mathfrak{z}} \\
&+ \langle V, H\rangle \bar{R}(X^{\mathfrak{v}}, Y^{\mathfrak{v}})H + \bar{R}(X^{\mathfrak{v}}, Y^{\mathfrak{v}})V^{\mathfrak{v}} + \bar{R}(X^{\mathfrak{v}}, Y^{\mathfrak{v}})V^{\mathfrak{z}} \\
&+ \langle V, H\rangle \bar{R}(X^{\mathfrak{v}}, Y^{\mathfrak{z}})H + \bar{R}(X^{\mathfrak{v}}, Y^{\mathfrak{z}})V^{\mathfrak{v}} + \bar{R}(X^{\mathfrak{v}}, Y^{\mathfrak{z}})V^{\mathfrak{z}} \\
&+ \langle Y, H\rangle\langle V, H\rangle \bar{R}(X^{\mathfrak{z}}, H)H + \langle Y, H\rangle \bar{R}(X^{\mathfrak{z}}, H)V^{\mathfrak{v}} + \langle Y, H\rangle \bar{R}(X^{\mathfrak{z}}, H)V^{\mathfrak{z}} \\
&+ \langle V, H\rangle \bar{R}(X^{\mathfrak{z}}, Y^{\mathfrak{v}})H + \bar{R}(X^{\mathfrak{z}}, Y^{\mathfrak{v}})V^{\mathfrak{v}} + \bar{R}(X^{\mathfrak{z}}, Y^{\mathfrak{v}})V^{\mathfrak{z}} \\
&+ \langle V, H\rangle \bar{R}(X^{\mathfrak{z}}, Y^{\mathfrak{z}})H + \bar{R}(X^{\mathfrak{z}}, Y^{\mathfrak{z}})V^{\mathfrak{v}} + \bar{R}(X^{\mathfrak{z}}, Y^{\mathfrak{z}})V^{\mathfrak{z}}.
\end{aligned}$$

Daí, usando as expressões (1.39)-(1.53), obtemos

$$
\begin{aligned}
\bar{R}(X,Y)V &= -\frac{1}{4}\langle X,H\rangle\langle V,H\rangle Y^{\mathfrak{v}} + \frac{1}{4}\langle X,H\rangle(\langle Y^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}\rangle H + [Y^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}]) - \frac{1}{2}\langle X,H\rangle J_{V^{\mathfrak{z}}}Y^{\mathfrak{v}}\\
&- \langle X,H\rangle\langle V,H\rangle Y^{\mathfrak{z}} - \frac{1}{2}\langle X,H\rangle J_{Y^{\mathfrak{z}}}V^{\mathfrak{v}} + \langle X,H\rangle\langle Y^{\mathfrak{z}},V^{\mathfrak{z}}\rangle H\\
&+ \frac{1}{4}\langle Y,H\rangle\langle V,H\rangle X^{\mathfrak{v}} - \frac{1}{4}\langle Y,H\rangle(\langle X^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}\rangle H + [X^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}]) + \frac{1}{4}\langle Y,H\rangle J_{V^{\mathfrak{z}}}X^{\mathfrak{v}}\\
&- \frac{1}{2}\langle V,H\rangle[X^{\mathfrak{v}},Y^{\mathfrak{v}}] - \frac{1}{4}\langle X^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}\rangle Y^{\mathfrak{v}} + \frac{1}{4}\langle Y^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}\rangle X^{\mathfrak{v}} - \frac{1}{4}J_{[X^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}]}Y^{\mathfrak{v}}\\
&+ \frac{1}{4}J_{[Y^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}]}X^{\mathfrak{v}} - \frac{1}{2}J_{[X^{\mathfrak{v}},Y^{\mathfrak{v}}]}V^{\mathfrak{v}} + \frac{1}{2}\langle J_{V^{\mathfrak{z}}}X^{\mathfrak{v}},Y^{\mathfrak{v}}\rangle H + \frac{1}{4}[X^{\mathfrak{v}},J_{V^{\mathfrak{z}}}Y^{\mathfrak{v}}] - \frac{1}{4}[Y^{\mathfrak{v}},J_{V^{\mathfrak{z}}}X^{\mathfrak{v}}]\\
&- \frac{1}{4}\langle V,H\rangle J_{Y^{\mathfrak{z}}}X^{\mathfrak{v}} - \frac{1}{2}\langle X^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}\rangle H - \frac{1}{4}[X^{\mathfrak{v}},J_{Y^{\mathfrak{z}}}V^{\mathfrak{v}}] - \frac{1}{4}\langle J_{Y^{\mathfrak{z}}}X^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}\rangle H + \frac{1}{4}J_{Y^{\mathfrak{z}}}J_{V^{\mathfrak{z}}}X^{\mathfrak{v}}\\
&+ \frac{1}{2}\langle Y^{\mathfrak{z}},V^{\mathfrak{z}}\rangle X^{\mathfrak{v}} + \langle Y,H\rangle\langle V,H\rangle X^{\mathfrak{z}} + \langle Y,H\rangle\frac{1}{2}J_{X^{\mathfrak{z}}}V^{\mathfrak{v}} - \langle Y,H\rangle\langle X^{\mathfrak{z}},V^{\mathfrak{z}}\rangle H\\
&+ \frac{1}{4}\langle V,H\rangle J_{X^{\mathfrak{z}}}Y^{\mathfrak{v}} + \frac{1}{2}\langle Y^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}\rangle H - \frac{1}{4}[Y^{\mathfrak{v}},J_{X^{\mathfrak{z}}}V^{\mathfrak{v}}] - \frac{1}{4}\langle J_{X^{\mathfrak{z}}}Y^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}\rangle H\\
&- \frac{1}{4}J_{X^{\mathfrak{z}}}J_{V^{\mathfrak{z}}}Y^{\mathfrak{v}} - \frac{1}{2}\langle X^{\mathfrak{z}},V^{\mathfrak{z}}\rangle Y^{\mathfrak{v}} + \frac{1}{4}[J_{Y^{\mathfrak{z}}},J_{X^{\mathfrak{z}}}]V^{\mathfrak{v}}.
\end{aligned}
$$

Contraindo essa expressão com um quarto campo vetorial $W \in \Gamma(TS)$ e usando a equação (1.55), segue-se que

$$
\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X,Y)V,W\rangle \;=\;& -\frac{1}{4}\langle X,H\rangle\langle V,H\rangle\langle Y^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}\rangle + \frac{1}{4}\langle X,H\rangle)(\langle Y^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}\rangle\langle W,H\rangle + \langle [Y^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}],W^{\mathfrak{z}}\rangle)\\
&-\frac{1}{2}\langle X,H\rangle\langle J_{V^{\mathfrak{z}}}Y^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}\rangle - \langle X,H\rangle\langle V,H\rangle\langle Y^{\mathfrak{z}},W^{\mathfrak{z}}\rangle - \frac{1}{2}\langle X,H\rangle\langle J_{Y^{\mathfrak{z}}}V^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}\rangle\\
&+\langle X,H\rangle\langle W,H\rangle\langle Y^{\mathfrak{z}},V^{\mathfrak{z}}\rangle + \frac{1}{4}\langle Y,H\rangle\langle V,H\rangle\langle X^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}\rangle\\
&-\frac{1}{4}\langle Y,H\rangle(\langle X^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}\rangle\langle W,H\rangle + \langle [X^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}],W^{\mathfrak{z}}\rangle) + \frac{1}{4}\langle Y,H\rangle\langle J_{V^{\mathfrak{z}}}X^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}\rangle\\
&-\frac{1}{2}\langle V,H\rangle\langle [X^{\mathfrak{v}},Y^{\mathfrak{v}}],W^{\mathfrak{z}}\rangle - \frac{1}{4}\langle X^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}\rangle\langle Y^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}\rangle + \frac{1}{4}\langle Y^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}\rangle\langle X^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}\rangle\\
&-\frac{1}{4}\langle J_{[X^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}]}Y^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}\rangle + \frac{1}{4}\langle J_{[Y^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}]}X^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}\rangle - \frac{1}{2}\langle J_{[X^{\mathfrak{v}},Y^{\mathfrak{v}}]}V^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}\rangle\\
&+\frac{1}{2}\langle J_{V^{\mathfrak{z}}}X^{\mathfrak{v}},Y^{\mathfrak{v}}\rangle\langle W,H\rangle + \frac{1}{2}\langle(\bar{\nabla}_{X^{\mathfrak{v}}}J_{V^{\mathfrak{z}}})Y^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{z}}\rangle - \frac{1}{2}\langle(\bar{\nabla}_{Y^{\mathfrak{v}}}J_{V^{\mathfrak{z}}})X^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{z}}\rangle\\
&-\frac{1}{4}\langle V,H\rangle\langle J_{Y^{\mathfrak{z}}}X^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}\rangle - \frac{1}{2}\langle X^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}\rangle\langle W,H\rangle - \frac{1}{2}\langle(\bar{\nabla}_{X^{\mathfrak{v}}}J_{Y^{\mathfrak{z}}})V^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{z}}\rangle\\
&-\frac{1}{4}\langle J_{Y^{\mathfrak{z}}}X^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}\rangle\langle W,H\rangle - \frac{1}{4}\langle J_{Y^{\mathfrak{z}}}W^{\mathfrak{v}},J_{V^{\mathfrak{z}}}X^{\mathfrak{v}}\rangle + \frac{1}{2}\langle Y^{\mathfrak{z}},V^{\mathfrak{z}}\rangle\langle X^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}\rangle\\
&+\langle Y,H\rangle\langle V,A\rangle\langle X^{\mathfrak{z}},W^{\mathfrak{z}}\rangle + \frac{1}{2}\langle Y,H\rangle\langle J_{X^{\mathfrak{z}}}V^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}\rangle - \langle Y,H\rangle\langle W,H\rangle\langle X^{\mathfrak{z}},V^{\mathfrak{z}}\rangle\\
&+\frac{1}{4}\langle V,H\rangle\langle J_{X^{\mathfrak{z}}}Y^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}\rangle + \frac{1}{2}\langle W,H\rangle\langle Y^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}\rangle - \frac{1}{2}\langle(\bar{\nabla}_{Y^{\mathfrak{v}}}J_{X^{\mathfrak{z}}})V^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{z}}\rangle\\
&-\frac{1}{4}\langle W,H\rangle\langle J_{X^{\mathfrak{z}}}Y^{\mathfrak{v}},V^{\mathfrak{v}}\rangle + \frac{1}{4}\langle J_{X^{\mathfrak{z}}}W^{\mathfrak{v}},J_{V^{\mathfrak{z}}}Y^{\mathfrak{v}}\rangle - \frac{1}{2}\langle X^{\mathfrak{z}},V^{\mathfrak{z}}\rangle\langle Y^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}\rangle\\
&+\frac{1}{4}\langle [J_{Y^{\mathfrak{z}}},J_{X^{\mathfrak{z}}}]V^{\mathfrak{v}},W^{\mathfrak{v}}\rangle.
\end{aligned}
$$

Capítulo 2

Imersões Isométricas em Grupos de Lie Nilpotentes

Neste capítulo, apresentamos um teorema que estabelece condições suficientes para a existência de subvariedades com curvatura extrínseca prescrita em grupos de Lie nilpotentes.

Fazemos reiterado uso de alguns tensores auxiliares que são apresentados a seguir.

2.1 Alguns Tensores Auxiliares

Considerando a decomposição $\mathfrak{n} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{v}$, escolhemos um referencial ortonormal local invariante à esquerda

$$E_1, \ldots, E_{n+n'}, \tag{2.1}$$

tal que os primeiros n campos vetoriais estão em $\mathfrak{v}$ e os últimos n' campos vetoriais estão em $\mathfrak{z}$. Definimos em N o campo tensorial

$$\begin{aligned} -2L(X, Y, V) &= \sum_{k=1}^{n'} \langle J_k V, X\rangle \langle Y, E_{n+k}\rangle - \sum_{k=1}^{n'} \langle J_k Y, X\rangle \langle V, E_{n+k}\rangle \\ &+ \sum_{k=1}^{n'} \langle J_k Y, V\rangle \langle X, E_{n+k}\rangle, \end{aligned}$$

onde X, Y e V são campos de vetores em N e $J_k := J_{E_{n+k}}$ para $1 \leq k \leq n'$.

Nosso objetivo agora é derivar uma expressão *local* para o tensor L. Com esse propósito, consideramos um referencial $\{e_a\}_{a=1}^{n+n'}$ definido num subconjunto aberto O

de N por

$$e_a = E_b \, A_a^b,$$

para alguma aplicação $A : O \subset N \to \mathrm{SO}_{n+n'}$. Para $1 \leq k \leq n'$, definimos as funções

$$U_a^k = \langle e_a, E_{n+k} \rangle = A_a^{n+k}.$$

Assim, se $(\omega^a)_{a=1}^{n+n'}$ e $(\omega_a^b)_{a,b=1}^{n+n'}$ são, respectivamente, as formas duais e as formas de conexão associadas ao referencial $\{e_a\}_{a=1}^{n+n'}$, temos

$$\langle \bar{\nabla} E_{n+k}, e_a \rangle = \mathrm{d}U_a^k - \sum_c U_c^k \omega_a^c =: -\frac{1}{2} \sum_b u_{ba}^k \, \omega^b. \tag{2.2}$$

Ademais, obtemos

$$\langle J_k e_b, e_a \rangle = -2 \langle \bar{\nabla}_{e_b} E_{n+k}, e_a \rangle = u_{ba}^k.$$

Considerando J_k como um tensor do tipo $(0, 2)$, podemos escrever

$$J_k = \sum_{a,b=1}^{n+n'} u_{ab}^k \omega^a \otimes \omega^b. \tag{2.3}$$

Note que

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\langle J_k V, W \rangle &= \sum_{l,r=1}^{n+n'} \langle \bar{\nabla}_V E_{n+k}, W \rangle = -\sum_{l,r=1}^{n+n'} \langle V, E_l \rangle \langle W, E_r \rangle \langle \bar{\nabla}_{E_l} E_r, E_{n+k} \rangle \\
&= -\sum_{l,r=1}^{n} \langle V, E_l \rangle \langle W, E_r \rangle \underbrace{\langle \bar{\nabla}_{E_l} E_r, E_{n+k} \rangle}_{=\frac{1}{2}\langle [E_l, E_r], E_{n+k} \rangle} \\
&\quad -\sum_{l=1}^{n} \sum_{r=n+1}^{n+n'} \langle V, E_l \rangle \langle W, E_r \rangle \underbrace{\langle \bar{\nabla}_{E_l} E_r, E_{n+k} \rangle}_{=0} \\
&\quad -\sum_{l=n+1}^{n+n'} \sum_{r=1}^{n} \langle V, E_l \rangle \langle W, E_r \rangle \underbrace{\langle \bar{\nabla}_{E_l} E_r, E_{n+k} \rangle}_{=0} \\
&\quad -\sum_{l,r=n+1}^{n+n'} \langle V, E_l \rangle \langle W, E_r \rangle \underbrace{\langle \bar{\nabla}_{E_l} E_r, E_{n+k} \rangle}_{=0} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{l,r=1}^{n} \langle V, E_l \rangle \langle W, E_r \rangle \sigma_{lr}^{n+k}
\end{aligned}$$

Em termos de coordenadas locais, isto é, fixando-se $V = e_a, W = e_b$, temos

$$u_{ab}^k = \sum_{l,r=1}^{n} A_a^l A_b^r \sigma_{lr}^{n+k}. \tag{2.4}$$

Voltando nossa atenção para o tensor L definido acima, temos

$$\begin{aligned}-2L(X,e_a,e_b) &= \sum_{k=1}^{n'}\langle J_k e_b, X\rangle\langle e_a, E_{n+k}\rangle - \sum_{k=1}^{n'}\langle J_k e_a, X\rangle\langle e_b, E_{n+k}\rangle \\ &+ \sum_{k=1}^{n'}\langle J_k e_a, e_b\rangle\langle X, E_{n+k}\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n'}\big(U_a^k u_{bc}^k - U_b^k u_{ac}^k + U_c^k u_{ab}^k\big)\omega^c(X).\end{aligned}$$

Considere a matriz de 1-formas diferenciais $\lambda = (\lambda_b^a)_{a,b=1}^{n+n'}$ definidas por

$$\lambda_b^a = L(\,\cdot\,, e_a, e_b). \tag{2.5}$$

Isto significa que

$$\lambda_b^a = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n'}\big(U_a^k u_{bc}^k - U_b^k u_{ac}^k + U_c^k u_{ba}^k\big)\omega^c. \tag{2.6}$$

Considere agora a matriz de 2-formas diferenciais $Q = (Q_d^a)_{a,d=1}^{n+n'}$, onde

$$Q_d^a = -\big(\mathrm{d}\lambda + \lambda\wedge\omega + \omega\wedge\lambda - \lambda\wedge\lambda\big)\,{}_d^a.$$

Observe, inicialmente, que

$$-2\lambda_b^a = \sum_k \big(U_a^k u_{bc}^k - U_b^k u_{ac}^k - U_c^k u_{ab}^k\big)\,\omega^c.$$

Assim

$$-2\lambda_b^a\wedge\omega_d^b = -\sum_k \big(U_a^k u_{bc}^k\omega_d^b - U_b^k\omega_d^b u_{ac}^k - U_c^k u_{ab}^k\omega_d^b\big)\wedge\omega^c,$$

$$-2\omega_b^a\wedge\lambda_d^b = -\sum_k \big(U_b^k\omega_a^b u_{dc}^k - U_d^k\omega_a^b u_{bc}^k - U_c^k\omega_a^b u_{bd}^k\big)\wedge\omega^c$$

e

$$-2\lambda_b^a\wedge\lambda_d^b = -\sum_k \big(U_a^k u_{bc}^k\lambda_d^b - U_b^k\lambda_d^b u_{ac}^k - U_c^k u_{ab}^k\lambda_d^b\big)\wedge\omega^c.$$

Finalmente, calculamos

$$\begin{aligned}-2\mathrm{d}\lambda_d^a &= -\sum_k \big(U_a^k u_{db}^k - U_d^k u_{ab}^k - U_b^k u_{ad}^k\big)\wedge\omega_c^b\wedge\omega^c \\ &+\sum_k \big(\mathrm{d}U_a^k u_{dc}^k - \mathrm{d}U_d^k u_{ac}^k - \mathrm{d}U_c^k u_{ad}^k + U_a^k\mathrm{d}u_{dc}^k - U_d^k\mathrm{d}u_{ac}^k - U_c^k\mathrm{d}u_{ad}^k\big)\wedge\omega^c \\ &= -\sum_k \big(U_a^k u_{db}^k\omega_c^b - U_d^k u_{ab}^k\omega_c^b - U_b^k\omega_c^b u_{ad}^k\big)\wedge\omega^c \\ &+\sum_k \big(\mathrm{d}U_a^k u_{dc}^k - \mathrm{d}U_d^k u_{ac}^k - \mathrm{d}U_c^k u_{ad}^k + U_a^k\mathrm{d}u_{dc}^k - U_d^k\mathrm{d}u_{ac}^k - U_c^k\mathrm{d}u_{ad}^k\big)\wedge\omega^c.\end{aligned}$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&-2\big(\mathrm{d}\lambda + \lambda\wedge\omega + \omega\wedge\lambda - \lambda\wedge\lambda\big)\,{}^{a}_{d} \\
&= \sum_k \big(\mathrm{d}U^k_a u^k_{dc} - \mathrm{d}U^k_d u^k_{ac} - \mathrm{d}U^k_c u^k_{ad} + U^k_a \mathrm{d}u^k_{dc} - U^k_d \mathrm{d}u^k_{ac} - U^k_c \mathrm{d}u^k_{ad} \\
&-U^k_a u^k_{db}\omega^b_c + U^k_d u^k_{ab}\omega^b_c + U^k_b \omega^b_c u^k_{ad} \\
&-U^k_a u^k_{bc}\omega^b_d + U^k_b \omega^b_d u^k_{ac} + U^k_c u^k_{ab}\omega^b_d \\
&-U^k_b \omega^b_a u^k_{dc} + U^k_d \omega^b_a u^k_{bc} + U^k_c \omega^b_a u^k_{bd} \\
&+U^k_a u^k_{bc}\lambda^b_d - U^k_b \lambda^b_d u^k_{ac} - U^k_c u^k_{ab}\lambda^b_d\big)\wedge\omega^c.
\end{aligned}
$$

Agrupando alguns termos, obtemos

$$
\begin{aligned}
&-2\big(\mathrm{d}\lambda + \lambda\wedge\omega + \omega\wedge\lambda - \lambda\wedge\lambda\big)\,{}^{a}_{d} \\
&= \big((\mathrm{d}U^k_a - U^k_b\omega^b_a)u^k_{dc} - (\mathrm{d}U^k_d - U^k_b\omega^b_d)u^k_{ac} - (\mathrm{d}U^k_c - U^k_b\omega^b_c)u^k_{ad} \\
&+U^k_a(\mathrm{d}u^k_{dc} - u^k_{db}\omega^b_c - u^k_{bc}\omega^b_d) \\
&-U^k_d(\mathrm{d}u^k_{ac} - u^k_{ab}\omega^b_c - u^k_{bc}\omega^b_a) \\
&-U^k_c(\mathrm{d}u^k_{ad} - u^k_{ab}\omega^b_d - u^k_{bd}\omega^b_a) \\
&+U^k_a u^k_{bc}\lambda^b_d - U^k_b\lambda^b_d u^k_{ac} - U^k_c u^k_{ab}\lambda^b_d\big)\wedge\omega^c
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Ademais, da definição do tensor J, temos a equação

$$
\mathrm{d}U^k_a - \sum_b U^k_b\omega^b_a = -\frac{1}{2}\sum_c u^k_{ca}\omega^c. \tag{2.8}
$$

A derivada covariante do tensor $J_k(X,Y) = \langle J_k X, Y\rangle$ é dada, em termos do referencial adaptado, por

$$
\bar\nabla J_k(e_a, e_b) = \mathrm{d}u^k_{ab} - u^k_{db}\omega^d_a - u^k_{ad}\omega^d_b =: \bar\nabla u^k_{ab}.
$$

Usando as expressões acima, concluímos que

$$
\begin{aligned}
&-2\big(\mathrm{d}\lambda + \lambda\wedge\omega + \omega\wedge\lambda - \lambda\wedge\lambda\big)\,{}^{a}_{d} \\
&= \sum_k \big(-\frac{1}{2}u^k_{ea}u^k_{dc} + \frac{1}{2}u^k_{ed}u^k_{ac} + \frac{1}{2}u^k_{ec}u^k_{ad}\big)\omega^e\wedge\omega^c \\
&+\big(U^k_a\bar\nabla u^k_{dc} - U^k_d\bar\nabla u^k_{ac} - U^k_c\bar\nabla u^k_{ad}\big)\wedge\omega^c \\
&+\big(U^k_a u^k_{bc}\lambda^b_d - U^k_b\lambda^b_d u^k_{ac} - U^k_c u^k_{ab}\lambda^b_d\big)\wedge\omega^c.
\end{aligned}
$$

Deste modo, obtém-se

$$\begin{aligned}
2Q(X,Y,e_a,e_d) &= \sum_k \big(-\frac{1}{2}u^k_{ea}u^k_{dc} + \frac{1}{2}u^k_{ed}u^k_{ac} + \frac{1}{2}u^k_{ec}u^k_{ad}\big)\omega^e(X)\omega^c(Y) \\
&- \sum_k \big(-\frac{1}{2}u^k_{ea}u^k_{dc} + \frac{1}{2}u^k_{ed}u^k_{ac} + \frac{1}{2}u^k_{ec}u^k_{ad}\big)\omega^e(Y)\omega^c(X) \\
&+ \sum_k \big(U^k_a\bar{\nabla}u^k_{dc}(X) - U^k_d\bar{\nabla}u^k_{ac}(X) - U^k_c\bar{\nabla}u^k_{ad}(X)\big)\omega^c(Y) \\
&- \sum_k \big(U^k_a\bar{\nabla}u^k_{dc}(Y) - U^k_d\bar{\nabla}u^k_{ac}(Y) - U^k_c\bar{\nabla}u^k_{ad}(Y)\big)\omega^c(X) \\
&+ \sum_k \big(U^k_a u^k_{bc}\lambda^b_d(X) - U^k_b\lambda^b_d(X)u^k_{ac} - U^k_c u^k_{ab}\lambda^b_d(X)\big)\omega^c(Y) \\
&- \sum_k \big(U^k_a u^k_{bc}\lambda^b_d(Y) - U^k_b\lambda^b_d(Y)u^k_{ac} - U^k_c u^k_{ab}\lambda^b_d(Y)\big)\omega^c(X)
\end{aligned}$$

de onde decorre que

$$\begin{aligned}
&2Q(X,Y,e_a,e_d) \\
&= \big(-\frac{1}{2}\sum_k\langle J_kX,e_a\rangle\langle J_ke_d,Y\rangle + \frac{1}{2}\sum_k\langle J_kX,e_d\rangle\langle J_ke_a,Y\rangle + \frac{1}{2}\sum_k\langle J_kX,Y\rangle\langle J_ke_a,e_d\rangle\big) \\
&-\big(-\frac{1}{2}\sum_k\langle J_kY,e_a\rangle\langle J_ke_d,X\rangle + \frac{1}{2}\sum_k\langle J_kY,e_d\rangle\langle J_ke_a,X\rangle + \frac{1}{2}\sum_k\langle J_kY,X\rangle\langle J_ke_a,e_d\rangle\big) \\
&+\sum_k \big(U^k_a\bar{\nabla}_XJ_k(e_d,Y) - U^k_d\bar{\nabla}_XJ_k(e_a,Y) - \langle Y,E_{n+k}\rangle\bar{\nabla}_XJ_k(e_a,e_d)\big) \\
&-\sum_k \big(U^k_a\bar{\nabla}_YJ_k(e_d,X) - U^k_d\bar{\nabla}_YJ_k(e_a,X) - \langle X,E_{n+k}\rangle\bar{\nabla}_YJ_k(e_a,e_d)\big) \\
&+\sum_{b=1}^{n+n'}\sum_{k=1}^{n'} \big(U^k_a\langle J_ke_b,Y\rangle L(X,e_b,e_d) - U^k_bL(X,e_b,e_d)\langle J_ke_a,Y\rangle \\
&-\langle Y,E_{n+k}\rangle\langle J_ke_a,e_b\rangle L(X,e_b,e_d)\big) \\
&-\sum_{b=1}^{n+n'}\sum_{k=1}^{n'} \big(U^k_a\langle J_ke_b,X\rangle L(Y,e_b,e_d) - U^k_bL(Y,e_b,e_d)\langle J_ke_a,X\rangle \\
&-\langle X,E_{n+k}\rangle\langle J_ke_a,e_b\rangle L(Y,e_b,e_d)\big).
\end{aligned}$$

Sendo assim, resulta que

$$
\begin{aligned}
&2Q(X,Y,V,W)\\
&= \big(-\frac{1}{2}\sum_k \langle J_kX,V\rangle\langle J_kW,Y\rangle + \frac{1}{2}\sum_k \langle J_kX,W\rangle\langle J_kV,Y\rangle + \frac{1}{2}\sum_k \langle J_kX,Y\rangle\langle J_kV,W\rangle\big)\\
&-\big(-\frac{1}{2}\sum_k \langle J_kY,V\rangle\langle J_kW,X\rangle + \frac{1}{2}\sum_k \langle J_kY,W\rangle\langle J_kV,X\rangle + \frac{1}{2}\sum_k \langle J_kY,X\rangle\langle J_kV,W\rangle\big)\\
&+\sum_k \big(\langle V,E_{n+k}\rangle\bar{\nabla}_X J_k(W,Y) - \langle W,E_{n+k}\rangle\bar{\nabla}_X J_k(V,Y) - \langle Y,E_{n+k}\rangle\bar{\nabla}_X J_k(V,W)\big)\\
&-\sum_k \big(\langle V,E_{n+k}\rangle\bar{\nabla}_Y J_k(W,X) - \langle W,E_{n+k}\rangle\bar{\nabla}_Y J_k(V,X) - \langle X,E_{n+k}\rangle\bar{\nabla}_Y J_k(V,W)\big)\\
&+\sum_b\sum_k \big(\langle V,E_{n+k}\rangle\langle J_ke_b,Y\rangle L(X,e_b,W) - U_b^k L(X,e_b,W)\langle J_kV,Y\rangle\\
&-\langle Y,E_{n+k}\rangle\langle J_kV,e_b\rangle L(X,e_b,W)\big)\\
&-\sum_b\sum_k \big(\langle V,E_{n+k}\rangle\langle J_ke_b,X\rangle L(Y,e_b,W) - U_b^k L(Y,e_b,W)\langle J_kV,X\rangle\\
&-\langle X,E_{n+k}\rangle\langle J_kV,e_b\rangle L(Y,e_b,W)\big).
\end{aligned}
$$

Todavia, usando o fato de que $\langle J_kX, E_{n+l}\rangle = 0$, observamos que

$$
\begin{aligned}
&-2\sum_b \langle V,E_{n+k}\rangle\langle J_ke_b,Y\rangle L(X,e_b,W)\\
&= \sum_b \langle V,E_{n+k}\rangle\langle J_ke_b,Y\rangle \sum_l \big(\langle J_lW,X\rangle\langle e_b,E_{n+l}\rangle\\
&-\langle J_le_b,X\rangle\langle W,E_{n+l}\rangle + \langle J_le_b,W\rangle\langle X,E_{n+l}\rangle\big)\\
&= \sum_b \langle V,E_{n+k}\rangle\langle J_kY,e_b\rangle \sum_l \big(-\langle J_lW,X\rangle\langle e_b,E_{n+l}\rangle - \langle J_lX,e_b\rangle\langle W,E_{n+l}\rangle\\
&+\langle J_lW,e_b\rangle\langle X,E_{n+l}\rangle\big)\\
&= -\sum_l \langle V,E_{n+k}\rangle\langle J_kY, \sum_b \langle e_b,E_{n+l}\rangle e_b\rangle\langle J_lW,X\rangle\\
&-\sum_l \langle V,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+l}\rangle \sum_b \langle J_kY,e_b\rangle\langle J_lX,e_b\rangle\\
&+\sum_l \langle V,E_{n+k}\rangle\langle X,E_{n+l}\rangle \sum_b \langle J_kY,e_b\rangle\langle J_lW,e_b\rangle\\
&= -\langle V,E_{n+k}\rangle \sum_l \langle J_kY,E_{n+l}\rangle\langle J_lW,X\rangle\\
&-\sum_l \langle V,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+l}\rangle\langle J_kY,J_lX\rangle + \sum_l \langle V,E_{n+k}\rangle\langle X,E_{n+l}\rangle\langle J_kY,J_lW\rangle\\
&= -\langle V,E_{n+k}\rangle \sum_l \big(\langle W,E_{n+l}\rangle\langle J_kY,J_lX\rangle - \langle X,E_{n+l}\rangle\langle J_kY,J_lW\rangle\big)
\end{aligned}
$$

Analogamente, obtemos

$$
\begin{aligned}
&-2\sum_b \langle Y, E_{n+k}\rangle\langle J_kV, e_b\rangle L(X, e_b, W) \\
&\quad = \langle Y, E_{n+k}\rangle \sum_l \big(\langle W, E_{n+l}\rangle\langle J_kV, J_lX\rangle - \langle X, E_{n+l}\rangle\langle J_kV, J_lW\rangle\big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2\sum_b \langle V, E_{n+k}\rangle\langle J_kX, e_b\rangle L(Y, e_b, W) \\
&\quad = \langle V, E_{n+k}\rangle \sum_l \big(\langle W, E_{n+l}\rangle\langle J_kX, J_lY\rangle - \langle Y, E_{n+l}\rangle\langle J_kX, J_lW\rangle\big)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&-2\sum_b \langle X, E_{n+k}\rangle\langle J_kV, e_b\rangle L(Y, e_b, W) \\
&\quad = \langle X, E_{n+k}\rangle \sum_l \big(\langle W, E_{n+l}\rangle\langle J_kV, J_lY\rangle - \langle Y, E_{n+l}\rangle\langle J_kV, J_lW\rangle\big).
\end{aligned}
$$

Finalmente, calculamos

$$
\begin{aligned}
-2\sum_b U_b^k L(X, e_b, W)\langle J_kV, Y\rangle &= \sum_b U_b^k \sum_l \big(\langle J_lW, X\rangle\langle e_b, E_{n+l}\rangle - \langle J_le_b, X\rangle\langle W, E_{n+l}\rangle \\
&+\langle J_le_b, W\rangle\langle X, E_{n+l}\rangle\big)\langle J_kV, Y\rangle \\
&= \sum_l \big(\langle J_lW, X\rangle \sum_b \langle e_b, E_{n+k}\rangle\langle e_b, E_{n+l}\rangle + \langle J_lX, E_{n+k}\rangle\langle W, E_{n+l}\rangle \\
&-\langle J_lW, E_{n+k}\rangle\langle X, E_{n+l}\rangle\big)\langle J_kV, Y\rangle \\
&= \langle J_kW, X\rangle\langle J_kV, Y\rangle
\end{aligned}
$$

e, de modo análogo, obtemos

$$
-2\sum_b U_b^k L(Y, e_b, W)\langle J_kV, X\rangle = \langle J_kW, Y\rangle\langle J_kV, X\rangle.
$$

Utilizando essas expressões, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
&2Q(X,Y,V,W)\\
&= -\frac{1}{2}\sum_k \langle J_kX,V\rangle\langle J_kW,Y\rangle + \frac{1}{2}\sum_k \langle J_kX,W\rangle\langle J_kV,Y\rangle + \frac{1}{2}\sum_k \langle J_kX,Y\rangle\langle J_kV,W\rangle\\
&+\frac{1}{2}\sum_k \langle J_kY,V\rangle\langle J_kW,X\rangle - \frac{1}{2}\sum_k \langle J_kY,W\rangle\langle J_kV,X\rangle - \frac{1}{2}\sum_k \langle J_kY,X\rangle\langle J_kV,W\rangle\\
&+\sum_k \big(\langle V,E_{n+k}\rangle\bar{\nabla}_X J_k(W,Y) - \langle W,E_{n+k}\rangle\bar{\nabla}_X J_k(V,Y) - \langle Y,E_{n+k}\rangle\bar{\nabla}_X J_k(V,W)\big)\\
&-\sum_k \big(\langle V,E_{n+k}\rangle\bar{\nabla}_Y J_k(W,X) - \langle W,E_{n+k}\rangle\bar{\nabla}_Y J_k(V,X) - \langle X,E_{n+k}\rangle\bar{\nabla}_Y J_k(V,W)\big)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{k,l} \big(\langle V,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+l}\rangle\langle J_kY,J_lX\rangle - \langle V,E_{n+k}\rangle\langle X,E_{n+l}\rangle\langle J_kY,J_lW\rangle\big)\\
&+\frac{1}{2}\sum_k \langle J_kW,X\rangle\langle J_kV,Y\rangle\\
&+\frac{1}{2}\sum_{k,l} \big(\langle Y,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+l}\rangle\langle J_kV,J_lX\rangle - \langle Y,E_{n+k}\rangle\langle X,E_{n+l}\rangle\langle J_kV,J_lW\rangle\big)\\
&-\frac{1}{2}\sum_{k,l} \big(\langle V,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+l}\rangle\langle J_kX,J_lY\rangle - \langle Z,E_{n+k}\rangle\langle Y,E_{n+l}\rangle\langle J_kX,J_lW\rangle\big)\\
&-\frac{1}{2}\langle J_kW,Y\rangle\langle J_kV,X\rangle\\
&-\frac{1}{2}\sum_{k,l} \big(\langle X,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+l}\rangle\langle J_kV,J_lY\rangle - \langle X,E_{n+k}\rangle\langle Y,E_{n+l}\rangle\langle J_kV,J_lW\rangle\big).
\end{aligned}
$$

Note que

$$\bar{\nabla}_V J_k(X,Y) = \langle(\bar{\nabla}_V J_k)X,Y\rangle, \tag{2.9}$$

onde no lado direito indicamos a derivada de um tensor do tipo $(1,1)$. Após cancelar alguns termos na expressão anterior de Q, deduzimos que

$$
\begin{aligned}
2Q(X,Y,V,W) &= \langle J_kX,Y\rangle\langle J_kV,W\rangle + \frac{1}{2}\langle J_kY,V\rangle\langle J_kW,X\rangle - \frac{1}{2}\langle J_kY,W\rangle\langle J_kV,X\rangle \\
&+\sum_k \big(\langle V,E_{n+k}\rangle\langle(\bar\nabla_X J_k)W,Y\rangle - \langle W,E_{n+k}\rangle\langle(\bar\nabla_X J_k)V,Y\rangle - \langle Y,E_{n+k}\rangle\langle(\bar\nabla_X J_k)V,W\rangle\big) \\
&-\sum_k \big(\langle V,E_{n+k}\rangle\langle(\bar\nabla_Y J_k)W,X\rangle - \langle W,E_{n+k}\rangle\langle(\bar\nabla_Y J_k)V,X\rangle - \langle X,E_{n+k}\rangle\langle(\bar\nabla_Y J_k)V,W\rangle\big) \\
&+\frac{1}{2}\sum_{k,l} \big(\langle V,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+l}\rangle\langle J_kY,J_lX\rangle - \langle V,E_{n+k}\rangle\langle X,E_{n+l}\rangle\langle J_kY,J_lW\rangle\big) \\
&+\frac{1}{2}\sum_{k,l} \big(\langle Y,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+l}\rangle\langle J_kV,J_lX\rangle - \langle Y,E_{n+k}\rangle\langle X,E_{n+l}\rangle\langle J_kV,J_lW\rangle\big) \\
&-\frac{1}{2}\sum_{k,l} \big(\langle V,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+l}\rangle\langle J_kX,J_lY\rangle - \langle V,E_{n+k}\rangle\langle Y,E_{n+l}\rangle\langle J_kX,J_lW\rangle\big) \\
&-\frac{1}{2}\sum_{k,l} \big(\langle X,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+l}\rangle\langle J_kV,J_lY\rangle - \langle X,E_{n+k}\rangle\langle Y,E_{n+l}\rangle\langle J_kV,J_lW\rangle\big).
\end{aligned}
$$

2.1.1 Definição Alternativa do Tensor L

A partir da escolha do referencial ortonormal local invariante à esquerda em (2.1), definimos as *constantes de estrutura* em N por

$$[E_k,E_l] = \sum_{r=1}^{n+n'} \sigma_{kl}^r E_r. \tag{2.10}$$

Se $\{\theta^k\}_{k=1}^{n+n'}$ denota o co-referencial dual a $\{E_k\}_{k=1}^{n+n'}$, então as formas de conexão em N são dadas por

$$\theta_l^k = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n+n'} \tau_{lr}^k\,\theta^r, \tag{2.11}$$

onde

$$\tau_{lr}^k = \sigma_{rl}^k + \sigma_{kr}^l + \sigma_{kl}^r. \tag{2.12}$$

De acordo com essa notação, as primeiras equações de estrutura são

$$\mathrm{d}\theta^k + \theta_l^k \wedge \theta^l = 0, \quad \theta_l^k = -\theta_k^l. \tag{2.13}$$

A relação (1.4) pode ser reescrita como

$$\tau_{kl}^r = \sigma_{lk}^r, \quad 1 \le k,l \le n, \quad 1 \le r \le n+n'. \tag{2.14}$$

Daí, para $1 \le k,l \le n$, vale a relação

$$\sigma_{kr}^l = \sigma_{lk}^r = -\sigma_{kl}^r, \quad 1 \le r \le n+n',$$

Em termos das constantes de estrutura temos, a partir de (1.8)-(1.10),

$$\tau_{kl}^r = 2\langle \bar{\nabla}_{E_l} E_k, E_r \rangle = -\sigma_{lr}^k, \tag{2.15}$$

para $1 \leq l, r \leq n$ and $n+1 \leq k \leq n+n'$.
A 2-forma de curvatura $\Theta = \{\Theta_l^k\}_{k,l=1}^{n+n'}$ de N, associada ao referencial $\{E_k\}_{k=1}^{n+n'}$, é dada por

$$\mathrm{d}\theta_l^k + \sum_{r=1}^{n+n'} \theta_r^k \wedge \theta_l^r = \Theta_l^k. \tag{2.16}$$

Verifica-se facilmente que

$$\Theta_l^k = \frac{1}{4} \sum_{r,p,q=1}^{n+n'} \left(\tau_{lr}^k \tau_{st}^r + \tau_{rs}^k \tau_{lt}^r \right) \theta^p \wedge \theta^q. \tag{2.17}$$

Recordamos que as duas expressões distintas para J_k obtidas acima estão relacionadas pela equação

$$u_{ab}^k = \sum_{l,r=1}^{n} A_a^l A_b^r \sigma_{lr}^{n+k}. \tag{2.18}$$

Utilizamos a equação (2.18) para deduzir uma expressão alternativa para λ, a ser usada posteriormente.

Proposição 1. *A 1-forma $\lambda = (\lambda_b^a)_{a,b=1}^{n+n'}$ definida em (2.5) satisfaz*

$$\lambda = A^{-1} \theta A,$$

onde $\theta = (\theta_l^k)_{k,l=1}^{n+n'}$.

Prova. Como calculado acima, as constantes de estrutura de N satisfazem, em termos do referencial ortonormal $\{E_k\}_{k=1}^{n+n'}$, as equações

$$\sigma_{kl}^r = \begin{cases} 0, \ 1 \leq r \leq n, \\ 0, \ 1 \leq k \leq n, \ n+1 \leq l \leq n+n', \\ 0, \ n+1 \leq k, l \leq n+n'. \end{cases}$$

e

$$\tau_{lr}^k = \begin{cases} \sigma_{rl}^k, \ 1 \leq l, r \leq n \text{ e } k \geq n+1, \\ \sigma_{kl}^r, \ 1 \leq k, l \leq n \text{ e } r \geq n+1, \\ \sigma_{kr}^l, \ 1 \leq k, r \leq n \text{ e } l \geq n+1 \end{cases}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_b^a &= -\frac{1}{2}\sum_{c=1}^{n+n'}\sum_{k=1}^{n'}(U_a^k u_{bc}^k - U_b^k u_{ac}^k - U_c^k u_{ab}^k)\omega^c \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{c=1}^{n+n'}\sum_{k=1}^{n'}\sum_{l,r=1}^{n} U_a^k A_b^l A_c^r \sigma_{lr}^{n+k}\omega^c + \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{n+n'}\sum_{l=1}^{n'}\sum_{k,r=1}^{n} A_a^k U_b^l A_c^r \sigma_{kr}^{n+l}\omega^c \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{n+n'}\sum_{r=1}^{n'}\sum_{k,l=1}^{n} A_a^k A_b^l U_c^r \sigma_{kl}^{n+r}\omega^c \\
&= \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{n+n'}\sum_{k=n+1}^{n+n'}\sum_{l,r=1}^{n} A_a^k A_b^l A_c^r \tau_{lr}^k\omega^c + \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{n+n'}\sum_{l=n+1}^{n+n'}\sum_{k,r=1}^{n} A_a^k A_b^l A_c^r \tau_{lr}^k\omega^c \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{n+n'}\sum_{r=n+1}^{n+n'}\sum_{k,l=1}^{n} A_a^k A_b^l A_c^r \tau_{lr}^k\omega^c \\
&= \frac{1}{2}\sum_{c,k,l,r=1}^{n+n'} A_a^k A_b^l A_c^r \tau_{lr}^k\omega^c = \frac{1}{2}\sum_{k,l,r=1}^{n+n'} A_a^k A_b^l \tau_{lr}^k\theta^r = \sum_{k,l=1}^{n+n'} A_a^k A_b^l \theta_l^k \\
&= \sum_{k,l=1}^{n+n'} (A^{-1})_k^a \theta_l^k A_b^l \\
&= (A^{-1}\theta A)_b^a.
\end{aligned}$$

Isso encerra a prova da proposição. □

Observação 1. *Podemos ainda demonstrar que*

$$-Q = A^{-1}\Theta A. \tag{2.19}$$

Uma fórmula análoga é provada posteriormente na Proposição 4.

2.2 Existência de um Referencial Adaptado

Seja M uma variedade Riemanniana m-dimensional. Definimos m' por $m+m' = n+n'$. Consideramos um fibrado vetorial real Riemanniano $\mathcal{E}$ sobre M com posto m' e a soma de Whitney $\mathcal{S} = TM \oplus \mathcal{E}$, de modo que $\mathcal{S}$ é um fibrado vetorial trivial. Podemos, portanto, fixar um referencial ortonormal globalmente definido $\hat{E}_1, \ldots, \hat{E}_{n+n'}$ em $\mathcal{S}$. Denotamos por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ o tensor métrico em $\mathcal{S}$. Sejam $\hat{\nabla}$ e $\hat{R}$ a conexão compatível com a métrica e o tensor curvatura em $\mathcal{S}$, respectivamente. Então, definimos o tensor

$$\langle \hat{J}_k V, W\rangle = \sum_{l,r}\langle V, \hat{E}_l\rangle\langle W, \hat{E}_r\rangle\sigma_{lr}^{n+k}, \quad k = 1, \ldots, n', \tag{2.20}$$

onde V, W são secções arbitrárias de $\mathcal{S}$. Em virtude da definição de $\hat{J}_k$, temos

$$\langle \hat{J}_k V, \hat{E}_{n+l} \rangle = 0 \tag{2.21}$$

posto que $\sigma^{n+k}_{r,n+l} = 0$. Definimos em termos de $\hat{J}_k$ os tensores $\hat{L}$ e $\hat{Q}$ em $\mathcal{S}$ por

$$\begin{aligned} -2\hat{L}(X,Y,V) &= \sum_{k=1}^{n'} \langle \hat{J}_k V, X \rangle \langle Y, \hat{E}_{n+k} \rangle - \sum_{k=1}^{n'} \langle \hat{J}_k Y, X \rangle \langle V, \hat{E}_{n+k} \rangle \\ &+ \sum_{k=1}^{n'} \langle \hat{J}_k Y, V \rangle \langle X, \hat{E}_{n+k} \rangle \end{aligned} \tag{2.22}$$

e

$$\begin{aligned} &2\hat{Q}(X,Y,V,W) \\ &= \langle \hat{J}_k X, Y \rangle \langle \hat{J}_k V, W \rangle + \frac{1}{2} \langle \hat{J}_k Y, V \rangle \langle \hat{J}_k W, X \rangle - \frac{1}{2} \langle \hat{J}_k Y, W \rangle \langle \hat{J}_k V, X \rangle \\ &+ \sum_k \langle V, \hat{E}_{n+k} \rangle \langle (\hat{\nabla}_X \hat{J}_k) W, Y \rangle - \sum_k \langle Y, \hat{E}_{n+k} \rangle \langle (\hat{\nabla}_X \hat{J}_k) V, W \rangle \\ &- \sum_k \langle V, \hat{E}_{n+k} \rangle \langle (\hat{\nabla}_Y \hat{J}_k) W, X \rangle + \sum_k \langle X, \hat{E}_{n+k} \rangle \langle (\hat{\nabla}_Y \hat{J}_k) V, W \rangle \\ &- \sum_k \langle W, \hat{E}_{n+k} \rangle \langle (\hat{\nabla}_X \hat{J}_k) V, Y \rangle + \sum_k \langle W, \hat{E}_{n+k} \rangle \langle (\hat{\nabla}_Y \hat{J}_k) V, X \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k,l} \big(\langle V, \hat{E}_{n+k} \rangle \langle W, \hat{E}_{n+l} \rangle \langle \hat{J}_k Y, \hat{J}_l X \rangle - \langle V, \hat{E}_{n+k} \rangle \langle X, E_{n+l} \rangle \langle \hat{J}_k Y, \hat{J}_l W \rangle \big) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k,l} \big(\langle Y, \hat{E}_{n+k} \rangle \langle W, \hat{E}_{n+l} \rangle \langle \hat{J}_k V, \hat{J}_l X \rangle - \langle Y, \hat{E}_{n+k} \rangle \langle X, \hat{E}_{n+l} \rangle \langle \hat{J}_k V, \hat{J}_l W \rangle \big) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k,l} \big(\langle V, \hat{E}_{n+k} \rangle \langle W, \hat{E}_{n+l} \rangle \langle \hat{J}_k X, \hat{J}_l Y \rangle - \langle V, \hat{E}_{n+k} \rangle \langle Y, \hat{E}_{n+l} \rangle \langle \hat{J}_k X, \hat{J}_l W \rangle \big) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k,l} \big(\langle X, \hat{E}_{n+k} \rangle \langle W, \hat{E}_{n+l} \rangle \langle \hat{J}_k V, \hat{J}_l Y \rangle - \langle X, \hat{E}_{n+k} \rangle \langle Y, \hat{E}_{n+l} \rangle \langle \hat{J}_k V, \hat{J}_l W \rangle \big) \end{aligned} \tag{2.23}$$

onde $X, Y \in \Gamma(TM)$ e $V, W \in \Gamma(\mathcal{S})$.

Supomos, então, que

$$\langle \hat{R}(X,Y)V, W \rangle = \hat{Q}(X,Y,V,W), \quad X, Y \in \Gamma(TM), \; V, W \in \Gamma(\mathcal{S}). \tag{2.24}$$

Além disso, supomos que a condição

$$\hat{\nabla}_X \hat{E}_{n+k} = -\frac{1}{2} \hat{J}_k X, \quad X \in \Gamma(TM), \; k = 1, \ldots, n' \tag{2.25}$$

é satisfeita.

A conexão em $\mathcal{S}$ induz conexões ∇ em M e $\nabla^{\mathcal{E}}$ em $\mathcal{E}$. Mais precisamente, definindo-se $II \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes \mathcal{E})$ por

$$\hat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X,Y),\ \ X, Y \in \Gamma(TM)$$

e denotando-se

$$\langle S_V(X), Y\rangle = \langle II(X,Y), V\rangle, \quad V \in \Gamma(\mathcal{E}),$$

obtemos

$$\hat{\nabla}_X V = -S_V X + \nabla^{\mathcal{E}}_X V.$$

Em termos da decomposição $\hat{E}_{n+k} = T_k + N_k$, $T_k \in \Gamma(TM)$, $N_k \in \Gamma(\mathcal{E})$, a condição (2.25) é expressa por

$$\nabla_X T_k - S_k(X) + \nabla^{\mathcal{E}}_X N_k + II(T_k, X) = -\frac{1}{2}\hat{J}_k(X), \quad X \in \Gamma(TM), \tag{2.26}$$

onde $S_k = S_{N_k}$.

Definição 1. *Dado um aberto simplesmente conexo $M' \subset M$, fixamos uma aplicação $U \in C^\infty(M', \mathbb{R}^{n'(n+n')})$. Um referencial ortonormal $e : M' \to \mathcal{F}(\mathcal{S})$ com componentes*

$$e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_{m+m'}$$

é admissível *se as primeiras m secções são campos vetoriais em M e as últimas m' são secções em $\mathcal{E}$ e, ainda, se satisfizer*

$$\langle \hat{E}_{n+k}, e_a\rangle = U^k_a, \quad 1 \le k \le n'.$$

Em particular, isso implica que

$$\langle T_k, e_i\rangle = \langle \hat{E}_{n+k}, e_i\rangle = U^k_i \tag{2.27}$$

para $i = 1, \dots, m$ e

$$\langle N_k, e_\alpha\rangle = \langle \hat{E}_{n+k}, e_\alpha\rangle = U^k_\alpha, \tag{2.28}$$

para $\alpha = m+1, \dots, m+m'$. A aplicação de transição de um referencial ortonormal $\hat{E}_k$ para um referencial ortonormal admissível e_a é dada por uma aplicação admissível, *isto é, se*

$$e_a = \hat{E}_k A^k_a,$$

então A é da forma

$$A(x) = \begin{pmatrix} * \\ U(x) \end{pmatrix}. \tag{2.29}$$

Denotamos por

$$\omega^1, \dots, \omega^m, \omega^{m+1}, \dots, \omega^{m+m'} \tag{2.30}$$

as 1-formas reais sobre $\mathcal{S}$ duais ao referencial $\{e_a\}_{a=1}^{n+n'}$. A conexão riemanniana $\hat{\nabla}$ é dada, em termos deste referencial, pela matriz $\omega = (\omega_b^a)_{a,b=1}^{n+n'}$. Assim, a primeira equação de estrutura é escrita como

$$\mathrm{d}\omega^a + \omega_b^a \wedge \omega^b = 0, \quad \omega_b^a = -\omega_a^b. \tag{2.31}$$

A expressão local para $\hat{J}_k$ em termos de um referencial ortonormal admissível é

$$\langle \hat{J}_k e_b, e_a \rangle = u_{ba}^k. \tag{2.32}$$

Então, considerando J_k como um tensor do tipo $(0,2)$ dado por

$$\hat{J}_k(e_a, e_b) := \langle \hat{J}_k e_a, e_b \rangle, \tag{2.33}$$

podemos escrever

$$\hat{J}_k = \sum_{a,b} u_{ab}^k \omega^a \otimes \omega^b. \tag{2.34}$$

Assim, a equação (2.25) é reescrita como

$$\sum_k \left(\mathrm{d}U_a^k - \sum_c U_c^k \omega_a^c\right) = -\frac{1}{2} \sum_k u_{ba}^k \, \omega^b. \tag{2.35}$$

As derivadas covariantes do campo tensorial $\hat{J}_k$ são dadas por

$$\hat{\nabla} \hat{J}_k(e_a, e_b) = \mathrm{d}u_{ab}^k - u_{db}^k \omega_a^d - u_{ad}^k \omega_b^d =: \hat{\nabla} u_{ab}^k.$$

A expressão local para $\hat{L}$ é dada, em termos de 1-formas, por

$$\hat{\lambda}_b^a = \hat{L}(\,\cdot\,, e_a, e_b). \tag{2.36}$$

Assim, do mesmo modo como foi calculado na Seção 2.1, obtemos a identidade

$$\hat{\lambda}_b^a = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n'} \left(U_a^k u_{bc}^k - U_b^k u_{ac}^k + U_c^k u_{ba}^k\right) \omega^c. \tag{2.37}$$

A expressão local para $\hat{Q}$ é dada pela 2-forma

$$\hat{Q}_a^d = \hat{Q}(\cdot, \cdot, e_a, e_d).$$

Podemos verificar que

$$\hat{Q}^a_d := \hat{Q}(\,\cdot\,,\,\cdot\,, e_a, e_d) = -\big(\mathrm{d}\hat{\lambda} + \hat{\lambda} \wedge \omega + \omega \wedge \hat{\lambda} - \hat{\lambda} \wedge \hat{\lambda}\big)\,{}^a_d. \tag{2.38}$$

Com efeito, a verificação de (2.38) é análoga àquela feita na Seção 2.1, dessa vez utilizando a expressão (2.21).

Observemos agora que a hipótese (2.24) é refraseada, em termos dessas formas, como

$$\mathrm{d}\omega + \omega \wedge \omega = -(\hat{Q}^d_a). \tag{2.39}$$

Podemos provar o seguinte resultado.

Proposição 2. *Suponhamos que os dados definidos acima satisfaçam (2.24) e (2.25). Seja $M' \subset M$ um subconjunto aberto e simplesmente conexo. Então, existe uma aplicação admissível $A \in C^\infty(M', \mathrm{SO}_{n+n'})$ tal que*

$$A^{-1}\mathrm{d}A = \omega - \hat{\lambda} \tag{2.40}$$

com a condição inicial $A(x_0) = Id$, para $x_0 \in M'$ dado.

Prova. É suficiente mostrar que as hipóteses em consideração implicam nas hipóteses da Proposição 5 do Apêndice 2.4. Isso assegura a existência de uma aplicação admissível tal que

$$A^{-1}\mathrm{d}A = \hat{\omega}, \tag{2.41}$$

onde estamos considerando

$$\hat{\omega} = \omega - \hat{\lambda}. \tag{2.42}$$

Denotando

$$\Upsilon = \hat{\omega} - A^{-1}\mathrm{d}A, \tag{2.43}$$

calculamos

$$\begin{aligned} -\mathrm{d}\Upsilon &= -A^{-1}\mathrm{d}A \wedge A^{-1}\mathrm{d}A - \mathrm{d}\hat{\omega} \\ &= -\big(\Upsilon - \hat{\omega}\big) \wedge \big(\Upsilon - \hat{\omega}\big) - \mathrm{d}\hat{\omega} \\ &= -\Upsilon \wedge \Upsilon + \Upsilon \wedge \hat{\omega} + \hat{\omega} \wedge \Upsilon - \mathrm{d}\hat{\omega} - \hat{\omega} \wedge \hat{\omega}. \end{aligned}$$

Assim, em vista da expressão $\hat{\omega} = \omega - \hat{\lambda}$, obtemos a seguinte equação módulo Υ

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Upsilon &= \mathrm{d}\hat{\omega} + \hat{\omega} \wedge \hat{\omega} \\ &= \mathrm{d}\omega + \omega \wedge \omega - \mathrm{d}\hat{\lambda} + \hat{\lambda} \wedge \hat{\lambda} - \omega \wedge \hat{\lambda} - \hat{\lambda} \wedge \omega. \end{aligned}$$

Então, a partir de (2.38) e (2.39), concluímos que a equação, módulo Υ,

$$\mathrm{d}\Upsilon = \mathrm{d}\hat{\omega} + \hat{\omega} \wedge \hat{\omega} = 0$$

é verdadeira. Para satisfazer a condição (2.65) da Proposição 5 no Apêndice 2.4, resta provar que os dados definidos acima satisfazem

$$\mathrm{d}U - U\omega + U\hat{\lambda} = 0. \tag{2.44}$$

Para provar isso, calculamos

$$\begin{aligned} U^k_c \hat{\lambda}^c_a &= U^k_c \hat{L}(\cdot, e_c, e_a) = \hat{L}(\cdot, U^k_c e_c, e_a) = \hat{L}(\cdot, \langle \hat{E}_{n+k}, e_c\rangle e_c, e_a) \\ &= \hat{L}(\cdot, \hat{E}_{n+k}, e_a) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_l \Big(\langle \hat{J}_l e_a, \cdot\rangle \langle \hat{E}_{n+k}, \hat{E}_{n+l}\rangle - \langle \hat{J}_l \hat{E}_{n+k}, \cdot\rangle\langle e_a, \hat{E}_{n+l}\rangle \\ &+ \langle \hat{J}_l \hat{E}_{n+k}, e_a\rangle \langle \cdot, \hat{E}_{n+l}\rangle \Big) \\ &= -\frac{1}{2}\big(\langle \hat{J}_k e_a, \cdot\rangle - \sum_l \langle \hat{J}_l \hat{E}_{n+k}, \cdot\rangle\langle e_a, \hat{E}_{n+l}\rangle - \sum_l \langle \hat{J}_l \hat{E}_{n+k}, e_a\rangle\langle \cdot, \hat{E}_{n+l}\rangle \big). \end{aligned}$$

Entretanto,

$$-\frac{1}{2}\langle \hat{J}_l \hat{E}_{n+k}, e_a\rangle = \sum_{p,q} \langle \hat{E}_{n+k}, \hat{E}_q\rangle \langle e_a, \hat{E}_p\rangle \sigma^{n+l}_{qp} = \langle e_a, \hat{E}_p\rangle \sigma^{n+l}_{n+k,p} = 0.$$

Similarmente, dado $V \in \Gamma(\mathcal{S})$

$$-\frac{1}{2}\langle \hat{J}_l \hat{E}_{n+k}, V\rangle = \sum_{p,q} \langle \hat{E}_{n+k}, \hat{E}_q\rangle \langle V, \hat{E}_p\rangle \sigma^{n+l}_{qp} = \langle V, \hat{E}_p\rangle \sigma^{n+l}_{n+k,p} = 0.$$

Portanto, concluímos que

$$\begin{aligned} U^k_c \hat{\lambda}^c_a &= -\frac{1}{2}\langle \hat{J}_k e_a, \cdot\rangle \\ &= -\frac{1}{2} u^k_{ab}\omega^b \\ &= -\big(\mathrm{d}U^k_a - U^k_c \omega^c_a\big), \end{aligned}$$

como desejado.

A existência de uma aplicação satisfazendo (2.41) segue diretamente da Proposição 5 no Apêndice 2.4. Isto encerra a prova. □

Dada uma aplicação admissível $A : M' \to \mathrm{SO}_{n+n'}$ resolvendo (2.40), definimos um referencial ortonormal $\{e_a\}_{a=1}^{n+n'}$ em $\mathcal{S}$ ao longo de M' a partir do referencial $\hat{E}_a$, isto é, satisfazendo (2.27) e (2.28). Os conjuntos correspondentes de 1-formas duais estão relacionados por

$$\hat{\theta}^k = A^k_a \omega^a. \tag{2.45}$$

Segue-se de (2.20) que a expressão local para J_k no referencial ortonormal $\{e_a\}_{a=1}^{n+n'}$ é

$$-\frac{1}{2}u^k_{ab} = -\frac{1}{2}\langle \hat{J}_k e_a, e_b\rangle = \langle e_a, \hat{E}_l\rangle\langle e_b, \hat{E}_r\rangle \sigma^{n+k}_{lr} = A^l_a A^r_b \sigma^{n+k}_{lr}.$$

Então, definimos

$$\hat{\theta}^k_l = \frac{1}{2}\tau^k_{lr}\hat{\theta}^r = \frac{1}{2}\tau^k_{lr}A^r_a\omega^a, \tag{2.46}$$

onde $\tau^k_{lr} = \sigma^k_{rl} + \sigma^l_{kr} + \sigma^r_{kl}$. Em virtude desses fatos, podemos reobter a Proposição 1 no atual contexto.

Proposição 3. *O referencial ortonormal admissível obtido acima como solução da equação (2.40) satisfaz*

$$\hat{\lambda} = A^{-1}\hat{\theta}A, \tag{2.47}$$

onde $\hat{\theta} = (\hat{\theta}^k_l)_{k,l=1}^{n+n'}$ *está definido em (2.46).*

Prova: É suficiente imitar a prova da Proposição 1 na Seção 2.1. □

Finalmente, definimos as seguintes 2-formas

$$\hat{\Theta}^k_l = \frac{1}{4}\big(\tau^k_{lr}\tau^r_{pq} + \tau^k_{rp}\tau^r_{lq}\big)\hat{\theta}^p \wedge \hat{\theta}^q = \frac{1}{4}\big(\tau^k_{lr}\tau^r_{pq} + \tau^k_{rp}\tau^r_{lq}\big)A^p_a A^q_b \omega^a \wedge \omega^b. \tag{2.48}$$

Então, podemos provar o seguinte resultado.

Proposição 4. *O referencial admissível definido acima como solução da equação (2.40) satisfaz*

$$-\hat{Q} = A^{-1}\hat{\Theta}A, \tag{2.49}$$

onde $\hat{\Theta} = (\hat{\Theta}^k_l)_{k,l=1}^{n+n'}$ *é definido em (2.48).*

Prova. Temos

$$A^{-1}\mathrm{d}A = \omega - \hat{\lambda} \tag{2.50}$$

e

$$\mathrm{d}\hat{\lambda} - \hat{\lambda}\wedge\hat{\lambda} + \omega\wedge\hat{\lambda} + \hat{\lambda}\wedge\omega = -\hat{Q} \tag{2.51}$$

e, como já foi demonstrado,

$$\hat{\lambda} = A^{-1}\hat{\theta}A. \tag{2.52}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\hat{\lambda} &= \mathrm{d}A^{-1} \wedge \hat{\theta} A + A^{-1}\mathrm{d}\hat{\theta} A - A^{-1}\hat{\theta} \wedge \mathrm{d}A \\
&= -A^{-1}\mathrm{d}A \wedge A^{-1}\hat{\theta} A + A^{-1}\mathrm{d}\hat{\theta} A - A^{-1}\hat{\theta} A \wedge A^{-1}\mathrm{d}A \\
&= -(\omega - \hat{\lambda}) \wedge \hat{\lambda} + A^{-1}\mathrm{d}\hat{\theta} A - \hat{\lambda} \wedge (\omega - \hat{\lambda}) \\
&= 2\hat{\lambda} \wedge \hat{\lambda} - \omega \wedge \hat{\lambda} - \hat{\lambda} \wedge \omega + A^{-1}\mathrm{d}\hat{\theta} A.
\end{aligned}$$

Entretanto,

$$\begin{aligned}
-\hat{Q} &= \mathrm{d}\hat{\lambda} - \hat{\lambda} \wedge \hat{\lambda} + \omega \wedge \hat{\lambda} + \hat{\lambda} \wedge \omega = \hat{\lambda} \wedge \hat{\lambda} + A^{-1}\mathrm{d}\hat{\theta} A \\
&= A^{-1}\hat{\theta} A \wedge A^{-1}\hat{\theta} A + A^{-1}\mathrm{d}\hat{\theta} A \\
&= A^{-1}\big(\mathrm{d}\hat{\theta} + \hat{\theta} \wedge \hat{\theta}\big)A.
\end{aligned}$$

Deste modo, calculando-se diretamente, tendo em vista as definições, a primeira equação de estrutura (2.31) e a equação (2.40) na forma $\mathrm{d}A = A\omega - A\hat{\lambda}$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\hat{\theta}^k_l &= \frac{1}{2}\tau^k_{lr}(\mathrm{d}A^r_a \wedge \omega^a + A^r_a \mathrm{d}\omega^a) = \frac{1}{2}\tau^k_{lr}(\mathrm{d}A^r_b \wedge \omega^b - A^r_a \omega^a_b \wedge \omega^b) \\
&= \frac{1}{2}\tau^k_{lr}(\mathrm{d}A^r_b - A^r_a \omega^a_b) \wedge \omega^b \\
&= -\frac{1}{2}\tau^k_{lr}(A\hat{\lambda})^r_b \wedge \omega^b.
\end{aligned}$$

Todavia, $A\hat{\lambda} = AA^{-1}\hat{\theta} A = \hat{\theta} A$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\hat{\theta}^k_l &= -\frac{1}{2}\tau^k_{lr}(\hat{\theta} A)^r_b \wedge \omega^b = -\frac{1}{2}\tau^k_{lr}\hat{\theta}^r_p \wedge A^p_b \omega^b = -\frac{1}{2}\tau^k_{lr}\hat{\theta}^r_p \wedge \hat{\theta}^p \\
&= -\frac{1}{4}\tau^k_{lr}\tau^r_{pq}\hat{\theta}^q \wedge \hat{\theta}^p
\end{aligned}$$

e

$$\hat{\theta}^k_r \wedge \hat{\theta}^r_l = \frac{1}{4}\tau^k_{rp}\tau^r_{lq}\hat{\theta}^p \wedge \hat{\theta}^q.$$

Portanto, concluímos que

$$\mathrm{d}\hat{\theta} + \hat{\theta} \wedge \hat{\theta} = \hat{\Theta} \tag{2.53}$$

e deduzimos, como afirmado, que

$$-\hat{Q} = \mathrm{d}\hat{\lambda} - \hat{\lambda} \wedge \hat{\lambda} + \omega \wedge \hat{\lambda} + \hat{\lambda} \wedge \omega = A^{-1}\hat{\Theta} A.$$

Isto completa a prova da proposição. □

2.3 Existência de Imersões Isométricas em Grupos de Lie Nilpotentes

Escolhemos números naturais tais que $n + n' = m + m'$. Estamos, agora, em condições de enunciar e demonstrar o principal resultado desse capítulo.

Teorema 1. *Seja M^m uma variedade Riemanniana orientada, simplesmente conexa e seja $\mathcal{E}$ um fibrado vetorial Riemanniano real com posto m' de modo que $\mathcal{S} = TM \oplus \mathcal{E}$ é um fibrado vetorial trivial. Fixamos um referencial ortonormal global $\{\hat{E}_k\}_{k=1}^{n+n'}$ em $\mathcal{S}$. Sejam $\hat{\nabla}$ e $\hat{R}$, nesta ordem, a conexão compatível e o tensor curvatura de $\mathcal{S}$ e $\nabla, \nabla^{\mathcal{E}}$ as conexões compatíveis induzidas em TM e $\mathcal{E}$, respectivamente. Definimos $\hat{J}_k$, $\hat{L}$ e $\hat{Q}$ como em (2.20), (2.22) e (2.23), respectivamente. Supomos que estes campos satisfaçam as equações*

$$\hat{R} = \hat{Q} \tag{2.54}$$

e

$$\hat{\nabla}\hat{E}_{n+k} = -\frac{1}{2}\hat{J}_k, \quad k = 1, \ldots, n'. \tag{2.55}$$

Então, existem uma imersão isométrica $f : M \to N$ e um isomorfismo $f_*^{\perp} : \mathcal{E} \to TM^{\perp}$, onde $TM^{\perp}$ denota o fibrado normal ao longo de f, de modo que $f_*^{\perp}$ é uma isometria, quando restrito às fibras, e satisfaz

$$f_*\nabla_X^{\mathcal{E}}V = \bar{\nabla}_{f_*X}^{\perp}f_*^{\perp}V, \quad X \in \Gamma(TM),\, V \in \Gamma(\mathcal{E}), \tag{2.56}$$

$$f_*^{\perp}II(X,Y) = \bar{\nabla}_{f_*X}^{\perp}f_*Y, \quad X, Y \in \Gamma(TM), \tag{2.57}$$

onde $\bar{\nabla}^{\perp}$ denota a conexão normal em $TM^{\perp}$. A imersão isométrica é única, a menos de escolhas de um referencial global em $\mathcal{S}$ e movimentos rígidos em N.

A hipótese (2.54) corresponde a uma formulação das equações clássicas de Gauss, Codazzi e Ricci. As condições adicionais a que nos referimos estão abreviadas em (2.55) e podem ser reescritas como em (2.26).

Impor a trivilização global de $\mathcal{S}$ é o sucedâneo, em nosso caso, do fato de que, utilizando as equações fundamentais no Teorema de Bonnet clássico, demonstra-se que o fibrado $\mathcal{S}$ tem curvatura nula. Este é o ingrediente fundamental da prova, que conduz diretamente a aplicação do Teorema de Frobenius a uma equação de curvatura zero.

Observamos que a unicidade da imersão pode ser verificada, a menos da escolha do referencial global em $\mathcal{S}$ e de translações à esquerda em N.

Prova. Em virtude das hipóteses, a Proposição 2 implica que, dado um aberto simplesmente conexo $M' \subset M$, existe uma aplicação admissível $A : M' \to \mathrm{SO}_{n+n'}$ que resolve a equação (2.40) e satisfaz as equações (2.47), (2.48) e (2.49), respectivamente. Seja $\{\bar{e}_k\}_{k=1}^{n+n'}$ um referencial ortonormal em $\mathfrak{n} = \mathbb{R}^{n+n'}$. Definimos, então, a seguinte 1-forma em $M \times N$ com valores em $\mathfrak{n}$

$$\Pi = \pi_N^* \,\omega_{\mathfrak{n}} - \bar{e}_k (A_a^k \circ \pi_M) \pi_M^* \omega^a, \tag{2.58}$$

onde $\pi_N : M \times N \to N$ e $\pi_M : M \times N \to M$ são as projeções canônicas. De modo sucinto, podemos escrever

$$\Pi = \pi_N^* \,\omega_{\mathfrak{n}} - \bar{e}_k \pi_M^* \hat{\theta}^k, \tag{2.59}$$

onde estamos usando (2.45). Consideramos, deste modo, a distribuição $\mathcal{D} = \ker \Pi$ sobre $M \times N$. Assim, em vista de (2.31) e (2.40), calculamos (omitindo projeções)

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Pi &= \mathrm{d}\omega_{\mathfrak{n}} - \bar{e}_k \,\mathrm{d}A_a^k \wedge \omega^a - \bar{e}_k \,A_a^k \,\mathrm{d}\omega^a \\
&= -\frac{1}{2}[\omega_{\mathfrak{n}}, \omega_{\mathfrak{n}}] - \bar{e}_k \,\mathrm{d}A_a^k \wedge \omega^a + \bar{e}_k A_a^k \,\omega_c^a \wedge \omega^c \\
&= -\frac{1}{2}[\omega_{\mathfrak{n}}, \omega_{\mathfrak{n}}] - \bar{e}_k \,(A\hat{\omega})_a^k \wedge \omega^a + \bar{e}_k A_a^k \,\omega_c^a \wedge \omega^c \\
&= -\frac{1}{2}[\Pi + \bar{e}_k \hat{\theta}^k, \Pi + \bar{e}_l \hat{\theta}^l] - \bar{e}_k \,(A\hat{\omega})_a^k \wedge \omega^a + \bar{e}_k A_a^k \,\omega_c^a \wedge \omega^c \\
&= -\frac{1}{2}[\Pi, \Pi] - \frac{1}{2}[\Pi, \bar{e}_k \hat{\theta}^k] - \frac{1}{2}[\bar{e}_l \hat{\theta}^l, \Pi] - \frac{1}{2}[\bar{e}_k \hat{\theta}^k, \bar{e}_l \hat{\theta}^l] \\
&- \bar{e}_k \,(A\omega)_a^k \wedge \omega^a + \bar{e}_k \,(A\hat{\lambda})_a^k \wedge \omega^a + \bar{e}_k A_a^k \,\omega_c^a \wedge \omega^c.
\end{aligned}$$

Portanto, considerando a igualdade módulo Π, segue-se que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Pi &= -\frac{1}{2}[\bar{e}_k \hat{\theta}^k, \bar{e}_l \hat{\theta}^l] - \bar{e}_k (A\omega)_a^k \wedge \omega^a + \bar{e}_k (A\hat{\lambda})_a^k \wedge \omega^a + \bar{e}_k A_a^k \,\omega_c^a \wedge \omega^c \\
&= -\frac{1}{2}\hat{\theta}^k \wedge \hat{\theta}^l \,[\bar{e}_k, \bar{e}_l] - \bar{e}_k \,A_c^k \omega_a^c \wedge \omega^a + \bar{e}_k \,A_c^k \hat{\lambda}_a^c \wedge \omega^a + \bar{e}_k \,A_c^k \omega_a^c \wedge \omega^a \\
&= -\frac{1}{2}\hat{\theta}^k \wedge \hat{\theta}^l \,[\bar{e}_k, \bar{e}_l] + \bar{e}_k A_c^k \hat{\lambda}_a^c \wedge \omega^a.
\end{aligned}$$

Entretanto, usando (2.45) e (2.47), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Pi &= -\frac{1}{2}\bar{e}_r \sigma_{kl}^r \,\hat{\theta}^k \wedge \hat{\theta}^l + \bar{e}_k \,A_c^k \hat{\lambda}_b^c (A^{-1})_l^b A_a^l \wedge \omega^a \\
&= -\frac{1}{2}\bar{e}_r \sigma_{kl}^r \,\hat{\theta}^k \wedge \hat{\theta}^l + \bar{e}_k \,(A\hat{\lambda}A^{-1})_l^k \wedge \hat{\theta}^l \\
&= -\frac{1}{2}\bar{e}_k \sigma_{rl}^k \,\hat{\theta}^r \wedge \hat{\theta}^l + \bar{e}_k \hat{\theta}_l^k \wedge \hat{\theta}^l = \bar{e}_k \big(\hat{\theta}_l^k - \frac{1}{2}\,\sigma_{rl}^k \hat{\theta}^r\big) \wedge \hat{\theta}^l.
\end{aligned}$$

Assim $\mathcal{D}$ é involutiva, uma vez que (2.46) garante que

$$\hat{\theta}_l^k = \frac{1}{2}\,\sigma_{rl}^k \hat{\theta}^r + \mu_{lr}^k \hat{\theta}^r, \tag{2.60}$$

onde $\mu_{lr}^k = \sigma_{kr}^l + \sigma_{kl}^r$ satisfaz

$$\mu_{lr}^k = \mu_{rl}^k. \tag{2.61}$$

Daí, (2.61) implica que

$$\sum_{r,l} \big(\hat{\theta}_l^k - \frac{1}{2}\,\sigma_{rl}^k \hat{\theta}^r\big) \wedge \theta^l = \sum_{r,l} \mu_{lr}^k \hat{\theta}^r \wedge \hat{\theta}^l = -\sum_{r,l} \mu_{rl}^k \hat{\theta}^l \wedge \hat{\theta}^r = 0.$$

Podemos verificar que a folha integral ao longo da identidade e_0 em N é um gráfico sobre M'. A função que define este gráfico é uma imersão isométrica $f : M' \to N$ com condição inicial, digamos, $f(x_0) = e_0$, para um ponto $x_0 \in M'$ dado. De fato, dado

$$(v, w) \in \mathcal{D}_{(x,e)},$$

com $e = f(x)$, temos $w = f_*(x) \cdot v$. Assim, aplicando-se L_{e*} a $\Pi(v, w) = 0$, obtemos, utilizando (2.58),

$$f_*(x) \cdot v = \sum_{k=1}^{n+n'} \sum_{a=1}^{m} E_k(f(x)) A_a^k(x) \omega^a(v),$$

onde $\{E_k\}_{k=1}^{n+n'}$ é o referencial invariante à esquerda em N definido por $\omega_{\mathfrak{n}}(E_k) = \bar{e}_k$. Desta expressão, uma vez que A é uma matriz ortogonal, segue-se imediatamente que f é uma imersão isométrica.

Ademais, utilizando a expressão (2.59), inferimos que

$$f_*(x) \cdot v = \sum_{k=1}^{n+n'} E_k(f(x)) \hat{\theta}^k(v),$$

donde concluímos que $\{\hat{\theta}^k\}_{k=1}^{n+n'}$ é o co-referencial dual a $\{E_k\}_{k=1}^{n+n'}$ nos pontos de $f(M) \subset N$. Sendo assim, (2.46) assegura que $(\hat{\theta}_l^k)_{k,l=1}^{n+n'}$ são as formas de conexão correspondentes ao referencial $\{E_k\}_{k=1}^{n+n'}$ ao longo de f. Portanto, a equação

$$\omega = A^{-1}\mathrm{d}A - \hat{\lambda}$$

juntamente com a expressão $\hat{\lambda} = A^{-1}\hat{\theta}A$ garantem que $(\omega_b^a)_{a,b=1}^{m+m'}$ são as formas de conexão em $f(M)$ associadas ao referencial adaptado $\{e_a\}_{a=1}^{m+m'}$. Portanto, a equação (2.39) implica que $-Q$ é a forma de curvatura em N em pontos de $f(M)$ em termos do referencial adaptado. Deste modo, (2.49) garante que $\hat{\Theta}$ são as formas de curvatura em N ao longo de f relativamente ao referencial invariante à esquerda.

A escolha da condição inicial $f(x_0) = e_0$ não é uma restrição séria, visto que uma imersão isométrica com condição inicial $e \in N$ pode ser obtida aplicando à folha ao longo de e_0 a isometria L_e de N.

Um argumento convencional envolvendo monodromia permite enunciarmos o resultado para a variedade inteira, visto que M é simplesmente conexa. Para duas abordagens distintas da técnica empregada, nos referimos a [29] e [32]. Isto conclui a prova do teorema.

2.4 Apêndice

Dada uma aplicação $U \in C^\infty(M', \mathbb{R}^{n'(n+n')})$, recordamos que $A \in C^\infty(M', \mathrm{SO}_{n+n'})$ é uma aplicação dita *admissível* quando é da forma

$$A(x) = \begin{pmatrix} * \\ U(x) \end{pmatrix}. \tag{2.62}$$

Denotando por $\mu : \mathrm{M}_{n+n'}\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n'(n+n')}$ a projeção nas últimas n' linhas, a condição (2.62) significa que $\mu(A(x)) = U(x)$.

O conjunto das aplicações admissíveis define uma subvariedade em $M \times \mathrm{SO}_{n+n'}$ de dimensão $m + n(n-1)/2$ dada por

$$\mathcal{U} = \left\{ (x, A) : A = \begin{pmatrix} * \\ U(x) \end{pmatrix} \right\}. \tag{2.63}$$

O espaço tangente a $\mathcal{U}$ num ponto (x, A) é

$$T_{(x,A)}\mathcal{U} = \left\{ (v, \mathbf{B}) : \mathbf{B} = \begin{pmatrix} * \\ \mathrm{d}U(x) \cdot v \end{pmatrix} \right\}. \tag{2.64}$$

Seja $\bar{\omega} \in \Lambda^1(\mathrm{SO}_{n+n'}, \mathfrak{so}_{n+n'})$ a forma de Maurer-Cartan em $\mathrm{SO}_{n+n'}$. Apresentamos a seguir condições suficientes (e de fato necessárias) para resolver o seguinte problema.

Proposição 5. *Seja M uma variedade Riemanniana m-dimensional e simplesmente conexa. Dada uma 1-forma $\hat{\omega} \in \Lambda^1(M, \mathfrak{so}_{n+n'})$ e uma aplicação $U \in C^\infty(M', \mathbb{R}^{n'(n+n')})$ satisfazendo*

$$dU - U\hat{\omega} = 0, \tag{2.65}$$

existe uma aplicação admissível $A \in C^\infty(M', \mathrm{SO}_{n+n'})$ tal que

$$\hat{\omega} = A^{-1}\mathrm{d}A \tag{2.66}$$

ou $\hat{\omega} = A^*\bar{\omega}$. Em outras palavras, existe uma primitiva A para a derivada de Darboux $\hat{\omega}$.

Prova. Definimos a 1-forma Υ em $M \times \mathrm{SO}_{n+n'}$ com valores em $\mathfrak{so}_{n+n'}$ por

$$\Upsilon = \pi_1^*\hat{\omega} - \pi_2^*\bar{\omega}, \tag{2.67}$$

onde $\pi_1 : M \times \mathrm{SO}_{n+n'} \to M$ e $\pi_2 : M \times \mathrm{SO}_{n+n'} \to \mathrm{SO}_{n+n'}$ são as projeções naturais. Por brevidade escrevemos

$$\Upsilon = \hat{\omega} - A^{-1}\mathrm{d}A.$$

Definimos então a distribuição $\mathcal{D} = \ker \Upsilon$ em $\mathcal{U}$. Mais precisamente

$$(v, \mathbf{B}) \in \mathcal{D}_{(x,A)} \quad \text{se , e somente se,} \quad \hat{\omega}(v) = \bar{\omega}(\mathbf{B}) \tag{2.68}$$

Equivalentemente, podemos definir $\mathcal{D}$ como uma distribuição em todo o espaço $M \times \mathrm{SO}_{n+n'}$ escrevendo

$$\mathcal{D}_{(x,A)} = \ker \Upsilon_{(x,A)} \cap \ker \vartheta_{(x,A)},$$

onde ϑ é a 1-forma em $M \times \mathrm{SO}_{n+n'}$ com valores em $\mathbb{R}^{n'(n+n')}$ dada por

$$\begin{aligned} \vartheta_{(x,A)}(v, \mathbf{B}) &= \mathrm{d}U(x) \cdot v - \mathrm{d}\mu(A) \cdot \mathbf{B} \\ &= \mathrm{d}U(x) \cdot v - \mu(\mathbf{B}) \end{aligned}$$

Para mostrar que (2.68) define uma distribuição, precisamos mostrar que $\ker \Upsilon$ tem posto constante. Inicialmente, provamos que a diferencial de π_1 restrita a $\mathcal{D}_{(x,A)}$

$$\pi_{1_*} : \mathcal{D}_{(x,A)} \to T_xM$$

é um isomorfismo. De fato, se $\pi_{1_*}(v, \mathbf{B}) = 0$ para algum $(v, \mathbf{B}) \in \mathcal{D}_{(x,A)}$ então $v = 0$. Uma vez que $0 = \hat{\omega}(v) = \bar{\omega}(\mathbf{B})$, segue-se que $\mathbf{B} = 0$. Assim,

$$\dim \ker \Upsilon_{(x,A)} \leq m.$$

Agora, dado $(v, \mathbf{B}) \in T_{(x,A)}\mathcal{U}$, temos

$$\begin{aligned} &\mu\big(A\Upsilon_{(x,A)}(v, \mathbf{B})\big) = \mu\big(A\hat{\omega}_x(v) - A\bar{\omega}_A(\mathbf{B})\big) = \mu\big(A\hat{\omega}(v) - AA^{-1} \cdot \mathbf{B}\big) \\ &= \mu\big(A\big)\hat{\omega}(v) - \mu\big(\mathbf{B}\big) = U\hat{\omega}(v) - \mathrm{d}U_x(v) = 0. \end{aligned}$$

Verificamos, assim, que

$$\mathrm{Im}\Upsilon_{(x,A)} \subset \{\mathcal{B} \in \mathfrak{so}_{n+n'} : \mu(A\mathcal{B}) = 0\}$$

Desta forma, se $\mathcal{B} \in \mathrm{Im}\Upsilon_{(x,A)}$, então $\mathcal{B} = \bar{\omega}_A(\mathbf{B})$, para algum $\mathbf{B}$ tangente a A tal que $\mu(\mathbf{B}) = 0$. Isto significa que

$$\mathrm{Im}\Upsilon_{(x,A)} \subset \bar{\omega}_A\big(\ker \mu_A\big),$$

onde $\ker \mu_A = \{\mathbf{B} \in T_A\mathrm{SO}_{n+n'} : \mu(\mathbf{B}) = 0\}$ é, como dito acima, um espaço $n(n-1)/2$-dimensional. Posto que $\bar{\omega}_A$ é um isomorfismo, segue-se que $\bar{\omega}_A\big(\ker \mu_A\big)$ tem a mesma dimensão. Assim,

$$\dim \ker \Upsilon_{(x,A)} \geq m.$$

Logo, $\mathcal{D}_{(x,A)}$ é m-dimensional:

$$\dim \ker \Upsilon_{(x,A)} = \dim M$$

para todo $(x, A) \in M \times \mathrm{SO}_{n+n'}$.

Verificamos, por fim, a integrabilidade de $\mathcal{D}$. Observando que

$$\mathrm{d}\hat{\omega} + \hat{\omega} \wedge \hat{\omega} = 0, \tag{2.69}$$

temos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Upsilon &= \mathrm{d}\hat{\omega} - \mathrm{d}\bar{\omega} = -\hat{\omega} \wedge \hat{\omega} + \bar{\omega} \wedge \bar{\omega} = -(\bar{\omega} + \Upsilon) \wedge (\bar{\omega} + \Upsilon) + \bar{\omega} \wedge \bar{\omega} \\ &= \bar{\omega} \wedge \Upsilon + \Upsilon \wedge \bar{\omega}. \end{aligned}$$

Assim, se calculando $\mathrm{d}\Upsilon$ em algum vetor $(v, \mathbf{B}) \in \mathcal{D}_{(x,A)}$ obtemos $\Upsilon(v, \mathbf{B}) = 0$ e, consequentemente, $\mathrm{d}\Upsilon(v, \mathbf{B}) = 0$ também. Então, a distribuição $\mathcal{D}$ é integrável.

Portanto, seja (x, A) uma variedade integral da distribuição passando por (x_0, Id). Mostra-se que esta folha pode ser escrita como um gráfico $x \mapsto A(x)$ sobre M. Com efeito, π_* é um isomorfismo entre os espaços tangentes às folhas e os espaços tangentes a M em pontos correspondentes. Assim π é um difeomorfismo local. Dado que M é simplesmente conexa, π é um difeomorfismo global. Seja $x \mapsto A(x)$ a aplicação inversa. A partir disso, verifica-se facilmente que $A^*\bar{\omega} = \hat{\omega}$ como desejado. Isto completa a prova da proposição. $\square$

Capítulo 3

Imersões Isométricas em Grupos de Lie Solúveis

Neste capítulo, apresentamos um teorema que estabelece condições suficientes para a existência de subvariedades com curvatura extrínseca prescrita em grupos de Lie solúvies.

3.1 Alguns Tensores Auxiliares

Tendo em vista a decomposição $\mathfrak{s} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{a}$, escolhemos um referencial ortonormal local invariante à esquerda

$$E_1, \ldots, E_n, \ldots, E_{n+n'}, E_{n+n'+1} \tag{3.1}$$

tal que os primeiros n campos vetoriais estão em $\mathfrak{v}$, os próximos n' vetoriais estão em $\mathfrak{z}$ e o último campo vetorial está em $\mathfrak{a}$. Definimos em S o campo

$$\begin{aligned} L(X,Y,V) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n'}\Big(-\langle Y, E_{n+k}\rangle\langle J_k V, X\rangle + \langle X, E_{n+k}\rangle\langle J_k Y, V\rangle + \langle V, E_{n+k}\rangle\langle J_k Y, X\rangle\Big) \\ &- \langle V, E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1} Y, X\rangle + \langle Y, E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1} V, X\rangle \\ &+ \sum_{k=1}^{n'}(2\langle X, E_{n+k}\rangle\langle Y, E_{n+k}\rangle\langle V, E_{n+n'+1}\rangle \\ &+ \langle Y, E_{n+k}\rangle\langle V, E_{n+k}\rangle\langle X, E_{n+n'+1}\rangle), \end{aligned}$$

onde X, Y e V são campos de vetores em S e $J_k := J_{E_{n+k}}$ para $1 \leq k \leq n'+1$.

Nosso objetivo agora é derivar uma expressão *local* para o tensor L. Com esse propósito, consideramos um referencial $\{e_a\}_{a=1}^{n+n'+1}$ definido num subconjunto aberto

O de S por

$$e_a = E_b\, A_a^b,$$

para alguma aplicação $A : O \subset S \to \mathrm{SO}_{n+n'+1}$. Para $1 \leq k \leq n'+1$, definimos as funções

$$U_a^k = \langle e_a, E_{n+k} \rangle = A_a^{n+k}.$$

Assim, se $(\omega^a)_{a=1}^{n+n'+1}$ e $(\omega_a^b)_{a,b=1}^{n+n'+1}$ são, respectivamente, as formas duais e as formas de conexão associadas ao referencial $\{e_a\}_{a=1}^{n+n'+1}$, temos

$$\langle \bar{\nabla} E_{n+k}, e_a \rangle = \mathrm{d}U_a^k - \sum_c U_c^k \omega_a^c =: -\frac{1}{2} \sum_b u_{ba}^k\, \omega^b. \tag{3.2}$$

Ademais, obtemos

$$\langle J_k e_b, e_a \rangle = -2 \langle \bar{\nabla}_{e_b} E_{n+k}, e_a \rangle = u_{ba}^k.$$

Considerando J_k como um tensor do tipo $(0,2)$, podemos escrever

$$J_k = \sum_{a,b=1}^{n+n'+1} u_{ab}^k \omega^a \otimes \omega^b. \tag{3.3}$$

Observamos que, para $1 \leq k \leq n'$, temos

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{e_a} E_{n+k} &= \sum_{l=1}^{n+n'+1} A_a^l \bar{\nabla}_{E_l} E_{n+k} = \sum_{l,r=1}^{n+n'+1} A_a^l \langle \bar{\nabla}_{E_l} E_{n+k}, E_r \rangle E_r \\
&= -\sum_{l,r=1}^{n+n'+1} A_a^l \langle \bar{\nabla}_{E_l} E_r, E_{n+k} \rangle E_r \\
&= -\sum_{l,r=1}^{n} A_a^l \langle \bar{\nabla}_{E_l} E_r, E_{n+k} \rangle E_r - \sum_{l=1}^{n} \sum_{r=n+1}^{n+n'+1} A_a^l \langle \bar{\nabla}_{E_l} E_r, E_{n+k} \rangle E_r \\
&\quad - \sum_{l=n+1}^{n+n'+1} \sum_{r=1}^{n} A_a^l \langle \bar{\nabla}_{E_l} E_r, E_{n+k} \rangle E_r - \sum_{l,r=n+1}^{n+n'+1} A_a^l \langle \bar{\nabla}_{E_l} E_r, E_{n+k} \rangle E_r \\
&= -\sum_{l,r=1}^{n} A_a^l \underbrace{\langle \frac{1}{2} \langle E_l, E_r \rangle E_{n+n'+1} + \frac{1}{2} [E_l, E_r], E_{n+k} \rangle}_{=\frac{1}{2}\sigma_{lr}^{n+k}} E_r \\
&\quad + \sum_{l,r=n+1}^{n+n'} A_a^l \langle E_l, E_r \rangle \underbrace{\langle E_{n+n'+1}, E_{n+k} \rangle}_{=0} E_r \\
&\quad - \sum_{l=n+1}^{n+n'} A_a^l \langle \bar{\nabla}_{E_l} E_{n+n'+1}, E_{n+k} \rangle E_{n+n'+1} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{l,r=1}^{n} A_a^l \sigma_{lr}^{n+k} E_r + \sum_{l=n+1}^{n+n'} A_a^l \langle E_l, E_{n+k} \rangle E_{n+n'+1} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{l,r=1}^{n} A_a^l \sigma_{lr}^{n+k} E_r + A_a^{n+k} E_{n+n'+1}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\langle \bar{\nabla}_{e_a} E_{n+k}, e_b \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{l,r=1}^{n} A_a^l A_b^r \sigma_{lr}^{n+k} + A_a^{n+k} A_b^{n+n'+1}.$$

Ademais,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{e_a} E_{n+n'+1} &= \sum_{k=1}^{n+n'+1} A_a^b \bar{\nabla}_{E_k} E_{n+n'+1} = \sum_{k=1}^{n} A_a^k \bar{\nabla}_{E_k} E_{n+n'+1} + \sum_{k=n+1}^{n+n'} A_a^k \bar{\nabla}_{E_k} E_{n+n'+1} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} A_a^k E_k - \sum_{k=n+1}^{n+n'} A_a^k E_k.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle \bar{\nabla}_{e_a} E_{n+n'+1}, e_b \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} A_a^k A_b^k - \sum_{k=n+1}^{n+n'} A_a^k A_b^k$$

Constatamos, ainda, que, para $1 \leq k \leq n'$,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\langle J_k V, W\rangle &= \langle \bar{\nabla}_V E_{n+k}, W\rangle = \sum_{l,r=1}^{n+n'+1} \langle V, E_l\rangle\langle W, E_r\rangle\langle \bar{\nabla}_{E_l} E_{n+k}, E_r\rangle \\
&= -\sum_{l,r=1}^{n}\langle V, E_l\rangle\langle W, E_r\rangle \underbrace{\langle \bar{\nabla}_{E_l} E_r, E_{n+k}\rangle}_{=\frac{1}{2}\sigma_{lr}^{n+k}} \\
&\quad -\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=n+1}^{n+n'+1}\langle V, E_l\rangle\langle W, E_r\rangle \underbrace{\langle \bar{\nabla}_{E_l} E_r, E_{n+k}\rangle}_{=0} \\
&\quad -\sum_{l=n+1}^{n+n'+1}\sum_{r=1}^{n}\langle V, E_l\rangle\langle W, E_r\rangle \underbrace{\langle \bar{\nabla}_{E_l} E_r, E_{n+k}\rangle}_{=0} \\
&\quad -\sum_{l=n+1}^{n+n'+1}\langle V, E_l\rangle\langle W, E_{n+n'+1}\rangle\langle \bar{\nabla}_{E_l} E_{n+n'+1}, E_{n+k}\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{l,r=1}^{n}\langle V, E_l\rangle\langle W, E_r\rangle\sigma_{lr}^{n+k} + \langle V, E_{n+k}\rangle\langle W, E_{n+n'+1}\rangle.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\langle J_{n'+1} V, W\rangle &= \langle \bar{\nabla}_V E_{n+n'+1}, W\rangle = \sum_{l,r=1}^{n+n'+1} \langle V, E_l\rangle\langle W, E_r\rangle\langle \bar{\nabla}_{E_l} E_{n+n'+1}, E_r\rangle \\
&= \sum_{l,r=1}^{n}\langle V, E_l\rangle\langle W, E_r\rangle \underbrace{\langle \bar{\nabla}_{E_l} E_{n+n'+1}, E_r\rangle}_{-\frac{1}{2}\delta_{lr}} \\
&\quad +\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=n+1}^{n+n'+1}\langle V, E_l\rangle\langle W, E_r\rangle \underbrace{\langle \bar{\nabla}_{E_l} E_{n+n'+1}, E_r\rangle}_{=0} \\
&\quad +\sum_{l=n+1}^{n+n'+1}\sum_{l=1}^{n}\langle V, E_l\rangle\langle W, E_r\rangle \underbrace{\langle \bar{\nabla}_{E_l} E_{n+n'+1}, E_r\rangle}_{=0} \\
&+ \sum_{l,r=n+1}^{n+n'+1}\langle V, E_l\rangle\langle W, E_r\rangle \underbrace{\langle \bar{\nabla}_{E_l} E_{n+n'+1}, E_r\rangle}_{=-\delta_{lr};\ l,r\leq n+n'} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\langle V, E_l\rangle\langle W, E_l\rangle - \sum_{l=n+1}^{n+n'}\langle V, E_l\rangle\langle W, E_l\rangle.
\end{aligned}$$

Em termos locais, isto é, fixando-se $V = e_a, W = e_b$, temos

$$u_{ab}^k = \sum_{l,r=1}^{n} A_a^l A_b^r \sigma_{lr}^{n+k} - 2A_a^{n+k}A_b^{n+n'+1}, \quad \text{para} \quad 1 \leq k \leq n' \tag{3.4}$$

e

$$u_{ab}^{n'+1} = \delta_{ab} - U_a^{n'+1}U_b^{n'+1} + \sum_{k=1}^{n'} U_a^k U_b^k. \tag{3.5}$$

Voltando nossa atenção para o tensor L definido acima, temos

$$\begin{aligned}
&L(X, e_a, e_b)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n'}\Big(- \langle e_a, E_{n+k}\rangle\langle J_k(e_b), X\rangle + \langle X, E_{n+k}\rangle\langle J_k(e_a), e_b\rangle + \langle e_b, E_{n+k}\rangle\langle J_k(e_a), X\rangle\Big)\\
&\quad -\langle e_b, E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}(e_a), X\rangle + \langle e_a, E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}(e_b), X\rangle\\
&\quad +\sum_{k=1}^{n'}(2\langle X, E_{n+k}\rangle\langle e_a, E_{n+k}\rangle\langle e_b, E_{n+n'+1}\rangle + \langle e_a, E_{n+k}\rangle\langle e_b, E_{n+k}\rangle\langle X, E_{n+n'+1}\rangle).
\end{aligned}$$

Consideramos a matriz de 1-formas diferenciais $\lambda = (\lambda^a_b)_{a,b=1}^{n+n'+1}$ definidas por

$$\lambda^a_b = L(\,\cdot\,, e_a, e_b). \tag{3.6}$$

Isto significa que

$$\begin{aligned}
\lambda^a_b &= \sum_{c=1}^{n+n'+1}\Big(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n'}(-U^k_a u^k_{bc} + U^k_c u^k_{ab} + U^k_b u^k_{ac}) - U^{n'+1}_b u^{n'+1}_{ac} + U^{n'+1}_a u^{n'+1}_{bc}\Big)\omega^c\\
&\quad + \sum_{c=1}^{n+n'+1}\sum_{k=1}^{n'}\Big(2U^k_a U^k_c U^{n'+1}_b + U^k_b U^k_a U^{n'+1}_c\Big)\omega^c.
\end{aligned}$$

Definimos, desta vez, a matriz de 2-formas diferenciais $Q = (Q^a_d)_{a,d=1}^{n+n'+1}$ por

$$Q^a_d = -\big(\mathrm{d}\lambda + \lambda\wedge\omega + \omega\wedge\lambda - \lambda\wedge\lambda\big)\,{}^a_d. \tag{3.7}$$

Observe, inicialmente, que

$$\begin{aligned}
-2\lambda^a_b &= \big(U^k_a u^k_{bc} - U^k_c u^k_{ab} - U^k_b u^k_{ac} + 2U^{n'+1}_b u^{n'+1}_{ac} - 2U^{n'+1}_a u^{n'+1}_{bc}\\
&\quad -4U^k_a U^k_c U^{n'+1}_b - 2U^k_b U^k_a U^{n'+1}_c\big)\omega^c.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
-2\lambda^a_b\wedge\omega^b_d &= -\big(U^k_a u^k_{bc}\omega^b_d - U^k_c u^k_{ab}\omega^b_d - U^k_b u^k_{ac}\omega^b_d + 2U^{n'+1}_b u^{n'+1}_{ac}\omega^b_d\\
&\quad -2U^{n'+1}_a u^{n'+1}_{bc}\omega^b_d - 4U^k_a U^k_c U^{n'+1}_b\omega^b_d - 2U^k_b U^k_a U^{n'+1}_c\omega^b_d\big)\wedge\omega^c,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2\omega^a_b\wedge\lambda^b_d &= -\big(U^k_b\omega^b_a u^k_{dc} - U^k_c\omega^b_a u^k_{bd} - U^k_d\omega^b_a u^k_{bc} + 2U^{n'+1}_d\omega^b_a u^{n'+1}_{bc}\\
&\quad -2U^{n'+1}_b\omega^b_a u^{n'+1}_{dc} - 4U^k_b\omega^b_a U^k_c U^{n'+1}_d - 2U^k_d U^k_b\omega^b_a U^{n'+1}_c\big)\wedge\omega^c
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
-2\lambda^a_b\wedge\lambda^b_d &= -\big(U^k_a u^k_{bc}\lambda^b_d - U^k_c u^k_{ab}\lambda^b_d - U^k_b u^k_{ac}\lambda^b_d + 2U^{n'+1}_b u^{n'+1}_{ac}\lambda^b_d\\
&\quad -2U^{n'+1}_a u^{n'+1}_{bc}\lambda^b_d - 4U^k_a U^k_c U^{n'+1}_b\lambda^b_d - 2U^k_b U^k_a U^{n'+1}_c\lambda^b_d\big)\wedge\omega^c.
\end{aligned}$$

Finalmente, calculamos

$$
\begin{aligned}
-2\mathrm{d}\lambda^a_d &= -\big(U^k_a u^k_{db} - U^k_b u^k_{ad} - U^k_d u^k_{ab} + 2U^{n'+1}_d u^{n'+1}_{ab} - 2U^{n'+1}_a u^{n'+1}_{db} \\
&- 4U^k_a U^k_b U^{n'+1}_d - 2U^k_d U^k_a U^{n'+1}_b\big)\omega^b_c \wedge \omega^c \\
&+ \big(\mathrm{d}U^k_a u^k_{dc} - \mathrm{d}U^k_c u^k_{ad} - \mathrm{d}U^k_d u^k_{ac} + 2\mathrm{d}U^{n'+1}_d u^{n'+1}_{ac} - 2\mathrm{d}U^{n'+1}_a u^{n'+1}_{dc} \\
&+ U^k_a \mathrm{d}u^k_{dc} - U^k_c \mathrm{d}u^k_{ad} - U^k_d \mathrm{d}u^k_{ac} + 2U^{n'+1}_d \mathrm{d}u^{n'+1}_{ac} - 2U^{n'+1}_a \mathrm{d}u^{n'+1}_{dc} \\
&- 4\mathrm{d}U^k_a U^k_c U^{n'+1}_d - 4U^k_a \mathrm{d}U^k_c U^{n'+1}_d - 4U^k_a U^k_c \mathrm{d}U^{n'+1}_d \\
&- 2\mathrm{d}U^k_d U^k_a U^{n'+1}_c - 2U^k_d \mathrm{d}U^k_a U^{n'+1}_c - 2U^k_d U^k_a \mathrm{d}U^{n'+1}_c\big) \wedge \omega^c.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&-2(\mathrm{d}\lambda + \lambda \wedge \omega + \omega \wedge \lambda - \lambda \wedge \lambda)^a_d \\
&= \big(\mathrm{d}U^k_a u^k_{dc} - \mathrm{d}U^k_c u^k_{ad} - \mathrm{d}U^k_d u^k_{ac} + 2\mathrm{d}U^{n'+1}_d u^{n'+1}_{ac} - 2\mathrm{d}U^{n'+1}_a u^{n'+1}_{dc} \\
&+U^k_a \mathrm{d}u^k_{dc} - U^k_c \mathrm{d}u^k_{ad} - U^k_d \mathrm{d}u^k_{ac} + 2U^{n'+1}_d \mathrm{d}u^{n'+1}_{ac} - 2U^{n'+1}_a \mathrm{d}u^{n'+1}_{dc} \\
&-U^k_a u^k_{db}\omega^b_c + U^k_b u^k_{ad}\omega^b_c + U^k_d u^k_{ab}\omega^b_c - 2U^{n'+1}_d u^{n'+1}_{ab}\omega^b_c + 2U^{n'+1}_a u^{n'+1}_{db}\omega^b_c \\
&-U^k_a u^k_{bc}\omega^b_d + U^k_c u^k_{ab}\omega^b_d + U^k_b u^k_{ac}\omega^b_d - 2U^{n'+1}_b u^{n'+1}_{ac}\omega^b_d + 2U^{n'+1}_a u^{n'+1}_{bc}\omega^b_d \\
&-U^k_b \omega^b_a u^k_{dc} + U^k_c \omega^b_a u^k_{bd} + U^k_d \omega^b_a u^k_{bc} - 2U^{n'+1}_d \omega^b_a u^{n'+1}_{bc} + 2U^{n'+1}_b \omega^b_a u^{n'+1}_{dc} \\
&+U^k_a u^k_{bc}\lambda^b_d - U^k_c u^k_{ab}\lambda^b_d - U^k_b u^k_{ac}\lambda^b_d + 2U^{n'+1}_b u^{n'+1}_{ac}\lambda^b_d - 2U^{n'+1}_a u^{n'+1}_{bc}\lambda^b_d\big) \wedge \omega^c \\
&+\big(- 4\mathrm{d}U^k_a U^k_c U^{n'+1}_d - 4U^k_a \mathrm{d}U^k_c U^{n'+1}_d - 4U^k_a U^k_c \mathrm{d}U^{n'+1}_d \\
&-2\mathrm{d}U^k_d U^k_a U^{n'+1}_c - 2U^k_d \mathrm{d}U^k_a U^{n'+1}_c - 2U^k_d U^k_a \mathrm{d}U^{n'+1}_c \\
&+4U^k_a U^k_b U^{n'+1}_d \omega^b_c + 2U^k_d U^k_a U^{n'+1}_b \omega^b_c + 4U^k_a U^k_c U^{n'+1}_b \omega^b_d + 2U^k_b U^k_a U^{n'+1}_c \omega^b_d \\
&+4U^k_b \omega^b_a U^k_c U^{n'+1}_d + 2U^k_d U^k_b \omega^b_a U^{n'+1}_c - 4U^k_a U^k_c U^{n'+1}_b \lambda^b_d - 2U^k_b U^k_a U^{n'+1}_c \lambda^b_d\big) \wedge \omega^c.
\end{aligned}
$$

Agrupando alguns termos, obtemos

$$
\begin{aligned}
&-2(\mathrm{d}\lambda + \lambda\wedge\omega + \omega\wedge\lambda - \lambda\wedge\lambda)^a_d\\
&= \big((\mathrm{d}U^k_a - U^k_b\omega^b_a)u^k_{dc} - (\mathrm{d}U^k_c - U^k_b\omega^b_c)u^k_{ad} - (\mathrm{d}U^k_d - U^k_b\omega^b_d)u^k_{ac}\\
&+2(\mathrm{d}U^{n'+1}_d - U^{n'+1}_b\omega^b_d)u^{n'+1}_{ac} - 2(\mathrm{d}U^{n'+1}_a - U^{n'+1}_b\omega^b_a)u^{n'+1}_{dc}\\
&+U^k_a(\mathrm{d}u^k_{dc} - u^k_{db}\omega^b_c - u^k_{bc}\omega^b_d) - U^k_c(\mathrm{d}u^k_{ad} - u^k_{ab}\omega^b_d - u^k_{bd}\omega^b_a)\\
&-U^k_d(\mathrm{d}u^k_{ac} - u^k_{ab}\omega^b_c - u^k_{bc}\omega^b_a) + 2U^{n'+1}_d(\mathrm{d}u^{n'+1}_{ac} - u^{n'+1}_{ab}\omega^b_c - u^{n'+1}_{bc}\omega^b_a)\\
&-2U^{n'+1}_a(\mathrm{d}u^{n'+1}_{dc} - u^{n'+1}_{db}\omega^b_c - u^{n'+1}_{bc}\omega^b_d)\\
&+U^k_a u^k_{bc}\lambda^b_d - U^k_c u^k_{ab}\lambda^b_d - U^k_b u^k_{ac}\lambda^b_d + 2U^{n'+1}_b u^{n'+1}_{ac}\lambda^b_d - 2U^{n'+1}_a u^{n'+1}_{bc}\lambda^b_d\big)\wedge\omega^c\\
&-\big(4(\mathrm{d}U^k_a - U^k_b\omega^b_a)U^k_c U^{n'+1}_d + 4(\mathrm{d}U^k_c - U^k_b\omega^b_c)U^k_a U^{n'+1}_d\\
&+4(\mathrm{d}U^{n'+1}_d - U^{n'+1}_b\omega^b_d)U^k_a U^k_c + 2(\mathrm{d}U^k_d - U^k_b\omega^b_d)U^k_a U^{n'+1}_c\\
&+2(\mathrm{d}U^k_a - U^k_b\omega^b_a)U^k_d U^{n'+1}_c + 2(\mathrm{d}U^{n'+1}_c - U^{n'+1}_b\omega^b_c)U^k_a U^k_d\\
&+4U^k_a U^k_c U^{n'+1}_b\lambda^b_d + 2U^k_b U^k_a U^{n'+1}_c\lambda^b_d\big)\wedge\omega^c
\end{aligned}
$$

Todavia, a partir da definição do tensor J, temos a equação

$$\mathrm{d}U^k_a - \sum_b U^k_b\omega^b_a = -\frac{1}{2}\sum_c u^k_{ca}\omega^c$$

para $1 \leq k \leq n'+1$. A derivada covariante do tensor do tipo $(0,2)$, $J_k(X,Y) = \langle J_k X, Y\rangle$, é dada, em termos do referencial adaptado, por

$$\bar\nabla J(E_{n+k})(e_a,e_b) = \mathrm{d}u^k_{ab} - u^k_{db}\omega^d_a - u^k_{ad}\omega^d_b =: \bar\nabla u^k_{ab}.$$

Usando essas expressões acima, concluímos que

$$
\begin{aligned}
&-2(\mathrm{d}\lambda + \lambda\wedge\omega + \omega\wedge\lambda - \lambda\wedge\lambda)^a_d\\
&= \big(-\frac{1}{2}u^k_{ea}u^k_{dc} + \frac{1}{2}u^k_{ec}u^k_{ad} + \frac{1}{2}u^k_{ed}u^k_{ac} - u^{n'+1}_{ed}u^{n'+1}_{ac} + u^{n'+1}_{ea}u^{n'+1}_{dc}\\
&+2U^k_c U^{n'+1}_d u^k_{ea} + 2U^k_a U^{n'+1}_d u^k_{ec} + 2U^k_a U^k_c u^{n'+1}_{ed}\\
&+U^k_a U^{n'+1}_c u^k_{ed} + U^k_d U^{n'+1}_c u^k_{ea} + U^k_a U^k_d u^{n'+1}_{ec}\big)\omega^e\wedge\omega^c\\
&+(U^k_a\bar\nabla u^k_{dc} - U^k_c\bar\nabla u^k_{ad} - U^k_d\bar\nabla u^k_{ac} + 2U^{n'+1}_d\bar\nabla u^{n'+1}_{ac} - 2U^{n'+1}_a\bar\nabla u^{n'+1}_{dc})\wedge\omega^c\\
&+\big(U^k_a u^k_{bc}\lambda^b_d - U^k_c u^k_{ab}\lambda^b_d - U^k_b u^k_{ac}\lambda^b_d + 2U^{n'+1}_b u^{n'+1}_{ac}\lambda^b_d - 2U^{n'+1}_a u^{n'+1}_{bc}\lambda^b_d\\
&-4U^k_a U^k_c U^{n'+1}_b\lambda^b_d - 2U^k_b U^k_a U^{n'+1}_c\lambda^b_d\big)\wedge\omega^c
\end{aligned}
$$

Calcula-se, portanto,

$$
\begin{aligned}
&2Q(X,Y,e_a,e_d)\\
&=\big(-\frac{1}{2}u^k_{ea}u^k_{dc}+\frac{1}{2}u^k_{ec}u^k_{ad}+\frac{1}{2}u^k_{ed}u^k_{ac}-u^{n'+1}_{ed}u^{n'+1}_{ac}+u^{n'+1}_{ea}u^{n'+1}_{dc}\\
&+2U^k_cU^{n'+1}_du^k_{ea}+2U^k_aU^{n'+1}_du^k_{ec}+2U^k_aU^k_cu^{n'+1}_{ed}\\
&+U^k_aU^{n'+1}_cu^k_{ed}+U^k_dU^{n'+1}_cu^k_{ea}+U^k_aU^k_du^{n'+1}_{ec}\big)\omega^e(X)\omega^c(Y)\\
&-\big(-\frac{1}{2}u^k_{ea}u^k_{dc}+\frac{1}{2}u^k_{ec}u^k_{ad}+\frac{1}{2}u^k_{ed}u^k_{ac}-u^{n'+1}_{ed}u^{n'+1}_{ac}+u^{n'+1}_{ea}u^{n'+1}_{dc}\\
&+2U^k_cU^{n'+1}_du^k_{ea}+2U^k_aU^{n'+1}_du^k_{ec}+2U^k_aU^k_cu^{n'+1}_{ed}\\
&+U^k_aU^{n'+1}_cu^k_{ed}+U^k_dU^{n'+1}_cu^k_{ea}+U^k_aU^k_du^{n'+1}_{ec}\big)\omega^e(Y)\omega^c(X)\\
&+\big(U^k_a\bar\nabla u^k_{dc}(X)-U^k_c\bar\nabla u^k_{ad}(X)-U^k_d\bar\nabla u^k_{ac}(X)\\
&+2U^{n'+1}_d\bar\nabla u^{n'+1}_{ac}(X)-2U^{n'+1}_a\bar\nabla u^{n'+1}_{dc}(X)\big)\omega^c(Y)\\
&-\big(U^k_a\bar\nabla u^k_{dc}(Y)-U^k_c\bar\nabla u^k_{ad}(Y)-U^k_d\bar\nabla u^k_{ac}(Y)\\
&+2U^{n'+1}_d\bar\nabla u^{n'+1}_{ac}(Y)-2U^{n'+1}_a\bar\nabla u^{n'+1}_{dc}(Y)\big)\omega^c(X)\\
&+\big(U^k_au^k_{bc}\lambda^b_d(X)-U^k_cu^k_{ab}\lambda^b_d(X)-U^k_bu^k_{ac}\lambda^b_d(X)\\
&+2U^{n'+1}_bu^{n'+1}_{ac}\lambda^b_d(X)-2U^{n'+1}_au^{n'+1}_{bc}\lambda^b_d(X)\\
&-4U^k_aU^k_cU^{n'+1}_b\lambda^b_d(X)-2U^k_bU^k_aU^{n'+1}_c\lambda^b_d(X)\big)\omega^c(Y)\\
&-\big(U^k_au^k_{bc}\lambda^b_d(Y)-U^k_cu^k_{ab}\lambda^b_d(Y)-U^k_bu^k_{ac}\lambda^b_d(Y)\\
&+2U^{n'+1}_bu^{n'+1}_{ac}\lambda^b_d(Y)-2U^{n'+1}_au^{n'+1}_{bc}\lambda^b_d(Y)\\
&-4U^k_aU^k_cU^{n'+1}_b\lambda^b_d(Y)-2U^k_bU^k_aU^{n'+1}_c\lambda^b_d(Y)\big)\omega^c(X)
\end{aligned}
$$

Sendo assim, deduzimos que

$$
\begin{aligned}
&2Q(X,Y,e_a,e_d)\\
&= -\frac{1}{2}\langle J_k(X),e_a\rangle\langle J_k(e_d),Y\rangle + \frac{1}{2}\langle J_k(X),Y\rangle\langle J_k(e_a),e_d\rangle + \frac{1}{2}\langle J_k(X),e_d\rangle\langle J_k(e_a),Y\rangle\\
&-\langle J_{n'+1}(X),e_d\rangle\langle J_{n'+1}(e_a),Y\rangle + \langle J_{n'+1}(X),e_a\rangle\langle J_{n'+1}(e_d),Y\rangle\\
&+2U_d^{n'+1}\langle Y,E_{n+k}\rangle\langle J_kX,e_a\rangle + 2U_a^kU_d^{n'+1}\langle J_kX,Y\rangle + 2U_a^k\langle Y,E_{n+k}\rangle\langle J_{n'+1}X,e_d\rangle\\
&+U_a^k\langle Y,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_kX,e_d\rangle + U_d^k\langle Y,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_kX,e_a\rangle + U_a^kU_d^k\langle J_{n'+1}X,Y\rangle\\
&-\Big(-\frac{1}{2}\langle J_k(Y),e_a\rangle\langle J_k(e_d),X\rangle + \frac{1}{2}\langle J_k(Y),X\rangle\langle J_k(e_a),e_d\rangle + \frac{1}{2}\langle J_k(Y),e_d\rangle\langle J_k(e_a),X\rangle\\
&-\langle J_{n'+1}(Y),e_d\rangle\langle J_{n'+1}(e_a),X\rangle + \langle J_{n'+1}(Y),e_a\rangle\langle J_{n'+1}(e_d),X\rangle\\
&+2U_d^{n'+1}\langle X,E_{n+k}\rangle\langle J_kY,e_a\rangle + 2U_a^kU_d^{n'+1}\langle J_kY,X\rangle + 2U_a^k\langle X,E_{n+k}\rangle\langle J_{n'+1}Y,e_d\rangle\\
&+U_a^k\langle X,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_kY,e_d\rangle + U_d^k\langle X,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_kY,e_a\rangle + U_a^kU_d^k\langle J_{n'+1}Y,X\rangle\Big)\\
&+U_a^k\bar\nabla_XJ_k(e_d,Y) - \langle Y,E_{n+k}\rangle\bar\nabla_XJ_k(e_a,e_d) - U_d^k\bar\nabla_XJ_k(e_a,Y)\\
&+2U_d^{n'+1}\bar\nabla_XJ_{n'+1}(e_a,Y) - 2U_a^{n'+1}\bar\nabla_XJ_{n'+1}(e_d,Y)\\
&-\Big(U_a^k\bar\nabla_YJ_k(e_d,X) - \langle X,E_{n+k}\rangle\bar\nabla_YJ_k(e_a,e_d) - U_d^k\bar\nabla_YJ_k(e_a,X)\\
&+2U_d^{n'+1}\bar\nabla_YJ_{n'+1}(e_a,X) - 2U_a^{n'+1}\bar\nabla_YJ_{n'+1}(e_d,X)\Big)\\
&+U_a^k\langle J_k(e_b),Y\rangle L(X,e_b,e_d) - \langle Y,E_{n+k}\rangle\langle J_k(e_a),e_b\rangle L(X,e_b,e_d)\\
&-U_b^k\langle J_k(e_a),Y\rangle L(X,e_b,e_d) + 2U_b^{n'+1}\langle J_{n'+1}(e_a),Y\rangle L(X,e_b,e_d)\\
&-2U_a^{n'+1}\langle J_{n'+1}(e_b),Y\rangle L(X,e_b,e_d) - 4U_a^kU_b^{n'+1}\langle Y,E_{n+k}\rangle L(X,e_b,e_d)\\
&-2U_a^kU_b^k\langle Y,E_{n+n'+1}\rangle L(X,e_b,e_d) - \Big(U_a^k\langle J_k(e_b),X\rangle L(Y,e_b,e_d)\\
&-\langle X,E_{n+k}\rangle\langle J_k(e_a),e_b\rangle L(Y,e_b,e_d) - U_b^k\langle J_k(e_a),X\rangle L(Y,e_b,e_d)\\
&+2U_b^{n'+1}\langle J_{n'+1}(e_a),X\rangle L(Y,e_b,e_d) - 2U_a^{n'+1}\langle J_{n'+1}(e_b),X\rangle L(Y,e_b,e_d)\\
&-4U_a^kU_b^{n'+1}\langle X,E_{n+k}\rangle L(Y,e_b,e_d) - 2U_a^kU_b^k\langle X,E_{n+n'+1}\rangle L(Y,e_b,e_d)\Big).
\end{aligned}
$$

Desta expressão, segue-se que

$$
\begin{aligned}
&2Q(X,Y,Z,W)\\
&= -\frac{1}{2}\langle J_k(X),Z\rangle\langle J_k(W),Y\rangle + \frac{1}{2}\langle J_k(X),Y\rangle\langle J_k(Z),W\rangle + \frac{1}{2}\langle J_k(X),W\rangle\langle J_k(Z),Y\rangle\\
&-\langle J_{n'+1}(X),W\rangle\langle J_{n'+1}(Z),Y\rangle + \langle J_{n'+1}(X),Z\rangle\langle J_{n'+1}(W),Y\rangle\\
&+2\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\langle Y,E_{n+k}\rangle\langle J_kX,Z\rangle + 2\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_kX,Y\rangle\\
&+2\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle Y,E_{n+k}\rangle\langle J_{n'+1}X,W\rangle + \langle Z,E_{n+k}\rangle\langle Y,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_kX,W\rangle\\
&+\langle W,E_{n+k}\rangle\langle Y,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_kX,Z\rangle + \langle Z,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+k}\rangle\langle J_{n'+1}X,Y\rangle\\
&-\Big(-\frac{1}{2}\langle J_k(Y),Z\rangle\langle J_k(W),X\rangle + \frac{1}{2}\langle J_k(Y),X\rangle\langle J_k(Z),W\rangle + \frac{1}{2}\langle J_k(Y),W\rangle\langle J_k(Z),X\rangle\\
&-\langle J_{n'+1}(Y),W\rangle\langle J_{n'+1}(Z),X\rangle + \langle J_{n'+1}(Y),Z\rangle\langle J_{n'+1}(W),X\rangle\\
&+2\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\langle X,E_{n+k}\rangle\langle J_kY,Z\rangle + 2\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_kY,X\rangle\\
&+2\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle X,E_{n+k}\rangle\langle J_{n'+1}Y,W\rangle + \langle Z,E_{n+k}\rangle\langle X,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_kY,W\rangle\\
&+\langle W,E_{n+k}\rangle\langle X,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_kY,Z\rangle + \langle Z,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+k}\rangle\langle J_{n'+1}Y,X\rangle\Big)\\
&+\langle Z,E_{n+k}\rangle\bar\nabla_X J_k(W,Y) - \langle Y,E_{n+k}\rangle\bar\nabla_X J_k(Z,W) - \langle W,E_{n+k}\rangle\bar\nabla_X J_k(Z,Y)\\
&+2\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\bar\nabla_X J_{n'+1}(Z,Y) - 2\langle Z,E_{n+n'+1}\rangle\bar\nabla_X J_{n'+1}(W,Y)\\
&-\Big(\langle Z,E_{n+k}\rangle\bar\nabla_Y J_k(W,X) - \langle X,E_{n+k}\rangle\bar\nabla_Y J_k(Z,W) - \langle W,E_{n+k}\rangle\bar\nabla_Y J_k(Z,X)\\
&+2\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\bar\nabla_Y J_{n'+1}(Z,X) - 2\langle Z,E_{n+n'+1}\rangle\bar\nabla_Y J_{n'+1}(W,X)\Big)\\
&+\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle J_k(e_b),Y\rangle L(X,e_b,W) - \langle Y,E_{n+k}\rangle\langle J_k(Z),e_b\rangle L(X,e_b,W)\\
&-U_b^k\langle J_k(Z),Y\rangle L(X,e_b,W) + 2U_b^{n'+1}\langle J_{n'+1}(Z),Y\rangle L(X,e_b,W)\\
&-2\langle Z,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}(e_b),Y\rangle L(X,e_b,W) - 4\langle Y,E_{n+k}\rangle\langle Z,E_{n+k}\rangle U_b^{n'+1}L(X,e_b,e_d)\\
-&2\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle Y,E_{n+n'+1}\rangle U_b^k L(X,e_b,e_d) - \Big(\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle J_k(e_b),X\rangle L(Y,e_b,W)\\
-&\langle X,E_{n+k}\rangle\langle J_k(Z),e_b\rangle L(Y,e_b,W) - U_b^k\langle J_k(Z),X\rangle L(Y,e_b,W)\\
+&2U_b^{n'+1}\langle J_{n'+1}(Z),X\rangle L(Y,e_b,W) - 2\langle Z,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}(e_b),X\rangle L(Y,e_b,W)\\
-&4\langle X,E_{n+k}\rangle\langle Z,E_{n+k}\rangle U_b^{n'+1}L(Y,e_b,e_d) - 2\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle X,E_{n+n'+1}\rangle U_b^k L(Y,e_b,e_d)\Big).
\end{aligned}
$$

Assim, após o cancelamento de alguns termos, obtemos

$$
\begin{aligned}
&2Q(X,Y,Z,W)\\
&= -\langle J_k(X),Z\rangle\langle J_k(W),Y\rangle + \langle J_k(X),Y\rangle\langle J_k(Z),W\rangle + \langle J_k(X),W\rangle\langle J_k(Z),Y\rangle\\
&-2\langle J_{n'+1}(X),W\rangle\langle J_{n'+1}(Z),Y\rangle + 2\langle J_{n'+1}(X),Z\rangle\langle J_{n'+1}(W),Y\rangle\\
&+2\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\sum_{k=1}^{n'}\langle Y,E_{n+k}\rangle\langle J_kX,Z\rangle + 4\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\sum_{k=1}^{n'}\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle J_kX,Y\rangle\\
&+2\langle J_{n'+1}X,W\rangle\sum_{k=1}^{n'}\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle Y,E_{n+k}\rangle + \langle Y,E_{n+n'+1}\rangle\sum_{k=1}^{n'}\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle J_kX,W\rangle\\
&+\langle Y,E_{n+n'+1}\rangle\sum_{k=1}^{n'}\langle W,E_{n+k}\rangle\langle J_kX,Z\rangle + \langle J_{n'+1}X,Y\rangle\sum_{k=1}^{n'}\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+k}\rangle\\
&-2\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\sum_{k=1}^{n'}\langle X,E_{n+k}\rangle\langle J_kY,Z\rangle - 2\langle J_{n'+1}Y,W\rangle\sum_{k=1}^{n'}\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle X,E_{n+k}\rangle\\
&-\langle X,E_{n+n'+1}\rangle\sum_{k=1}^{n'}\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle J_kY,W\rangle - \langle X,E_{n+n'+1}\rangle\sum_{k=1}^{n'}\langle W,E_{n+k}\rangle\langle J_kY,Z\rangle\\
&-\langle J_{n'+1}Y,X\rangle\sum_{k=1}^{n'}\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+k}\rangle + \sum_{k=1}^{n'}\langle Z,E_{n+k}\rangle\bar{\nabla}_XJ_k(W,Y)\\
&-\sum_{k=1}^{n'}\langle Y,E_{n+k}\rangle\bar{\nabla}_XJ_k(Z,W) - \sum_{k=1}^{n'}\langle W,E_{n+k}\rangle\bar{\nabla}_XJ_k(Z,Y)\\
&+2\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\bar{\nabla}_XJ_{n'+1}(Z,Y) - 2\langle Z,E_{n+n'+1}\rangle\bar{\nabla}_XJ_{n'+1}(W,Y)\\
&-\sum_{k=1}^{n'}\langle Z,E_{n+k}\rangle\bar{\nabla}_YJ_k(W,X) + \sum_{k=1}^{n'}\langle X,E_{n+k}\rangle\bar{\nabla}_YJ_k(Z,W) + \sum_{k=1}^{n'}\langle W,E_{n+k}\rangle\bar{\nabla}_YJ_k(Z,X)\\
&-2\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\bar{\nabla}_YJ_{n'+1}(Z,X) + 2\langle Z,E_{n+n'+1}\rangle\bar{\nabla}_YJ_{n'+1}(W,X)\\
&+\sum_{k=1}^{n'}\sum_{b=1}^{n+n'+1}\Big(\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle J_k(e_b),Y\rangle L(X,e_b,W) - \langle Y,E_{n+k}\rangle\langle J_k(Z),e_b\rangle L(X,e_b,W)\\
&-U_b^k\langle J_k(Z),Y\rangle L(X,e_b,W) - 4\langle Y,E_{n+k}\rangle\langle Z,E_{n+k}\rangle U_b^{n'+1}L(X,e_b,W)\\
&-2\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle Y,E_{n+n'+1}\rangle U_b^kL(X,e_b,W) - \langle Z,E_{n+k}\rangle\langle J_k(e_b),X\rangle L(Y,e_b,W)\\
&+\langle X,E_{n+k}\rangle\langle J_k(Z),e_b\rangle L(Y,e_b,W) + U_b^k\langle J_k(Z),X\rangle L(Y,e_b,W)\\
&+4\langle X,E_{n+k}\rangle\langle Z,E_{n+k}\rangle U_b^{n'+1}L(Y,e_b,W) + 2\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle X,E_{n+n'+1}\rangle U_b^kL(Y,e_b,W)\Big)\\
&+\sum_{b=1}^{n+n'+1}\Big(2U_b^{n'+1}\langle J_{n'+1}(Z),Y\rangle L(X,e_b,W) - 2\langle Z,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}(e_b),Y\rangle L(X,e_b,W)\\
&-2U_b^{n'+1}\langle J_{n'+1}(Z),X\rangle L(Y,e_b,W) + 2\langle Z,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}(e_b),X\rangle L(Y,e_b,W)\Big),
\end{aligned}
$$

para $X, Y, Z, W \in \Gamma(TS)$.

Note que

$$
\begin{aligned}
&\langle Z, E_{n+k}\rangle\langle J_k(e_b), Y\rangle L(X, e_b, W)\\
&= \langle Z, E_{n+k}\rangle\langle J_k(e_b), Y\rangle\Big(-\frac{1}{2}\langle e_b, E_{n+l}\rangle\langle J_l W, X\rangle + \frac{1}{2}\langle X, E_{n+l}\rangle\langle J_l(e_b), W\rangle\\
&\quad + \frac{1}{2}\langle W, E_{n+l}\rangle\langle J_l(e_b), X\rangle - \langle W, E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}(e_b), X\rangle\\
&\quad + \langle e_b, E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}W, X\rangle + 2\langle X, E_{n+l}\rangle\langle e_b, E_{n+l}\rangle\langle W, E_{n+n'+1}\rangle\\
&\quad + \langle e_b, E_{n+l}\rangle\langle W, E_{n+l}\rangle\langle X, E_{n+n'+1}\rangle\Big)\\
&= \frac{1}{2}\langle Z, E_{n+k}\rangle\Big(\langle J_l W, X\rangle \underbrace{\langle J_k Y, E_{n+l}\rangle}_{=0} + \langle X, E_{n+l}\rangle\langle J_k Y, J_l W\rangle + \langle W, E_{n+l}\rangle\langle J_k Y, J_l X\rangle\\
&\quad + 2\langle W, E_{n+n'+1}\rangle\langle J_k Y, J_{n'+1}X\rangle - 2\langle J_{n'+1}W, X\rangle \underbrace{\langle J_k Y, E_{n+n'+1}\rangle}_{=-2\langle Y, E_{n+k}\rangle}\\
&\quad - 4\langle X, E_{n+l}\rangle\langle W, E_{n+n'+1}\rangle \underbrace{\langle J_k Y, E_{n+l}\rangle}_{=0} - 2\langle W, E_{n+l}\rangle\langle X, E_{n+n'+1}\rangle \underbrace{\langle J_k Y, E_{n+l}\rangle}_{=0}\Big)\\
&= \frac{1}{2}\langle Z, E_{n+k}\rangle\Big(\langle X, E_{n+l}\rangle\langle J_k Y, J_l W\rangle + \langle W, E_{n+l}\rangle\langle J_k Y, J_l X\rangle\\
&\quad + 2\langle W, E_{n+n'+1}\rangle\langle J_k Y, J_{n'+1}X\rangle + 4\langle Y, E_{n+k}\rangle\langle J_{n'+1}W, X\rangle\Big)
\end{aligned}
$$

e, similarmente,

$$
\begin{aligned}
&\langle Y, E_{n+k}\rangle\langle J_k Z, e_b\rangle L(X, e_b, W)\\
&= -\frac{1}{2}\langle Y, E_{n+k}\rangle\Big(\langle X, E_{n+l}\rangle\langle J_k Z, J_l W\rangle + \langle W, E_{n+l}\rangle\langle J_k Z, J_l X\rangle\\
&\quad + 2\langle W, E_{n+n'+1}\rangle\langle J_k Z, J_{n'+1}X\rangle + 4\langle Z, E_{n+k}\rangle\langle J_{n'+1}W, X\rangle\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle Z, E_{n+k}\rangle\langle J_k(e_b), X\rangle L(Y, e_b, W)\\
&= \frac{1}{2}\langle Z, E_{n+k}\rangle\Big(\langle Y, E_{n+l}\rangle\langle J_k X, J_l W\rangle + \langle W, E_{n+l}\rangle\langle J_k X, J_l Y\rangle\\
&\quad + 2\langle W, E_{n+n'+1}\rangle\langle J_k X, J_{n'+1}Y\rangle + 4\langle X, E_{n+k}\rangle\langle J_{n'+1}W, Y\rangle\Big)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&\langle X, E_{n+k}\rangle\langle J_k Z, e_b\rangle L(Y, e_b, W)\\
&= -\frac{1}{2}\langle X, E_{n+k}\rangle\Big(\langle Y, E_{n+l}\rangle\langle J_k Z, J_l W\rangle + \langle W, E_{n+l}\rangle\langle J_k Z, J_l Y\rangle\\
&\quad + 2\langle W, E_{n+n'+1}\rangle\langle J_k Z, J_{n'+1}Y\rangle + 4\langle Z, E_{n+k}\rangle\langle J_{n'+1}W, Y\rangle\Big).
\end{aligned}
$$

Observamos, ainda, que

$$\begin{aligned}
&U_b^k\langle J_kZ,Y\rangle L(X,e_b,W)\\
&= U_b^k\langle J_kZ,Y\rangle\Big(-\frac{1}{2}\langle e_b,E_{n+l}\rangle\langle J_lW,X\rangle+\frac{1}{2}\langle X,E_{n+l}\rangle\langle J_l(e_b),W\rangle\\
&\quad+\frac{1}{2}\langle W,E_{n+l}\rangle\langle J_l(e_b),X\rangle-\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}(e_b),X\rangle\\
&\quad+\langle e_b,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}W,X\rangle+2\langle X,E_{n+l}\rangle\langle e_b,E_{n+l}\rangle\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\\
&\quad+\langle e_b,E_{n+l}\rangle\langle W,E_{n+l}\rangle\langle X,E_{n+n'+1}\rangle\Big)\\
&= \langle J_kZ,Y\rangle\Big(-\frac{1}{2}\underbrace{\langle E_{n+k},E_{n+l}\rangle}_{\delta_{kl}}\langle J_lW,X\rangle-\frac{1}{2}\langle X,E_{n+l}\rangle\underbrace{\langle J_lW,E_{n+k}\rangle}_{=0}\\
&\quad-\frac{1}{2}\langle W,E_{n+l}\rangle\underbrace{\langle J_lX,E_{n+k}\rangle}_{=0}-\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\underbrace{\langle J_{n'+1}X,E_{n+k}\rangle}_{=2\langle X,E_{n+k}\rangle}\\
&\quad+2\langle X,E_{n+l}\rangle\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\underbrace{\langle E_{n+k},E_{n+l}\rangle}_{=\delta_{kl}}\\
&\quad+\langle W,E_{n+l}\rangle\langle X,E_{n+n'+1}\rangle\underbrace{\langle E_{n+k},E_{n+l}\rangle}_{=\delta_{kl}}\Big)\\
&= -\frac{1}{2}\langle J_kZ,Y\rangle\Big(\langle J_kW,X\rangle-2\langle W,E_{n+k}\rangle\langle X,E_{n+n'+1}\rangle\Big)
\end{aligned}$$

e, de maneira análoga,

$$U_b^k\langle J_kZ,X\rangle L(Y,e_b,W)=-\frac{1}{2}\langle J_k(Z),X\rangle\Big(\langle J_kW,Y\rangle-2\langle W,E_{n+k}\rangle\langle Y,E_{n+n'+1}\rangle\Big),$$

$$\begin{aligned}
&\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle Y,E_{n+n'+1}\rangle U_b^kL(X,e_b,W)\\
&= -\frac{1}{2}\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle Y,E_{n+n'+1}\rangle\Big(\langle J_kW,X\rangle-2\langle W,E_{n+k}\rangle\langle X,E_{n+n'+1}\rangle\Big)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle X,E_{n+n'+1}\rangle U_b^kL(Y,e_b,W)\\
&= -\frac{1}{2}\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle X,E_{n+n'+1}\rangle\Big(\langle J_kW,Y\rangle-2\langle W,E_{n+k}\rangle\langle Y,E_{n+n'+1}\rangle\Big).
\end{aligned}$$

É válido ademais que

$$
\begin{aligned}
&2U_b^{n'+1}\langle J_{n'+1}Z,Y\rangle L(X,e_b,W)\\
&= 2U_b^{n'+1}\langle J_{n'+1}Z,Y\rangle\Big(-\frac{1}{2}\langle e_b,E_{n+l}\rangle\langle J_lW,X\rangle+\frac{1}{2}\langle X,E_{n+l}\rangle\langle J_l(e_b),W\rangle\\
&\quad+\frac{1}{2}\langle W,E_{n+l}\rangle\langle J_l(e_b),X\rangle-\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}(e_b),X\rangle\\
&\quad+\langle e_b,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}W,X\rangle+2\langle X,E_{n+l}\rangle\langle e_b,E_{n+l}\rangle\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\\
&\quad+\langle e_b,E_{n+l}\rangle\langle W,E_{n+l}\rangle\langle X,E_{n+n'+1}\rangle\Big)\\
&= \langle J_{n'+1}Z,Y\rangle\Big(-\underbrace{\langle E_{n+n'+1},E_{n+l}\rangle}_{=0}\langle J_lW,X\rangle-\langle X,E_{n+l}\rangle\underbrace{\langle J_lW,E_{n+n'+1}\rangle}_{=-2\langle W,E_{n+l}\rangle}\\
&\quad-\langle W,E_{n+l}\rangle\underbrace{\langle J_lX,E_{n+n'+1}\rangle}_{=-2\langle X,E_{n+l}\rangle}-2\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\underbrace{\langle J_{n'+1}X,E_{n+n'+1}\rangle}_{=0}+2\langle J_{n'+1}W,X\rangle\\
&\quad+4\langle X,E_{n+l}\rangle\underbrace{\langle E_{n+n'+1},E_{n+l}\rangle}_{=0}\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\\
&\quad+2\underbrace{\langle E_{n+n'+1},E_{n+l}\rangle}_{=0}\langle W,E_{n+l}\rangle\langle X,E_{n+n'+1}\rangle\Big)\\
&= 2\langle J_{n'+1}Z,Y\rangle\Big(\langle X,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+k}\rangle+\langle J_{n'+1}W,X\rangle\Big)
\end{aligned}
$$

e, analogamente,

$$
2U_b^{n'+1}\langle J_{n'+1}Z,X\rangle L(Y,e_b,W)= 2\langle J_{n'+1}Z,X\rangle\Big(\langle Y,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+k}\rangle+\langle J_{n'+1}W,Y\rangle\Big),
$$

$$
\begin{aligned}
&2\langle Y,E_{n+k}\rangle\langle Z,E_{n+k}\rangle U_b^{n'+1}L(X,e_b,W)\\
&\quad= 2\langle Y,E_{n+k}\rangle\langle Z,E_{n+k}\rangle\big(\langle X,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+k}\rangle+\langle J_{n'+1}W,X\rangle\big)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&2\langle X,E_{n+k}\rangle\langle Z,E_{n+k}\rangle U_b^{n'+1}L(Y,e_b,W)\\
&\quad= 2\langle X,E_{n+k}\rangle\langle Z,E_{n+k}\rangle\big(\langle Y,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+k}\rangle+\langle J_{n'+1}W,Y\rangle\big).
\end{aligned}
$$

Finalmente, observamos que

$$\begin{aligned}
&2\langle Z, E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}(e_b), Y\rangle L(X, e_b, W)\\
&\quad = 2\langle Z, E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}(e_b), Y\rangle\Big(-\frac{1}{2}\langle e_b, E_{n+l}\rangle\langle J_l W, X\rangle + \frac{1}{2}\langle X, E_{n+l}\rangle\langle J_l(e_b), W\rangle\\
&\qquad + \frac{1}{2}\langle W, E_{n+l}\rangle\langle J_l(e_b), X\rangle - \langle W, E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}(e_b), X\rangle\\
&\qquad + \langle e_b, E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}W, X\rangle\Big)\\
&\quad = \langle Z, E_{n+n'+1}\rangle\Big(- \underbrace{\langle J_{n'+1}Y, E_{n+l}\rangle}_{=2\langle Y, E_{n+l}\rangle}\langle J_l W, X\rangle - \langle X, E_{n+l}\rangle\langle J_{n'+1}Y, J_l W\rangle\\
&\qquad -\langle W, E_{n+l}\rangle\langle J_{n'+1}Y, J_l X\rangle - 2\langle W, E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}X, J_{n'+1}Y\rangle\\
&\qquad +, 2\underbrace{\langle J_{n'+1}Y, E_{n+n'+1}\rangle}_{=0}\langle J_{n'+1}W, X\rangle\Big)\\
&\quad = -\langle Z, E_{n+n'+1}\rangle\Big(2\langle Y, E_{n+l}\rangle\langle J_l W, X\rangle + \langle X, E_{n+l}\rangle\langle J_{n'+1}Y, J_l W\rangle\\
&\qquad + \langle W, E_{n+l}\rangle\langle J_{n'+1}Y, J_l X\rangle + 2\langle W, E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}X, J_{n'+1}Y\rangle\Big)
\end{aligned}$$

e, segundo o mesmo padrão,

$$\begin{aligned}
&2\langle Z, E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}(e_b), X\rangle L(Y, e_b, W)\\
&\quad = -\langle Z, E_{n+n'+1}\rangle\Big(2\langle X, E_{n+l}\rangle\langle J_l W, Y\rangle + \langle Y, E_{n+l}\rangle\langle J_{n'+1}X, J_l W\rangle\\
&\qquad + \langle W, E_{n+l}\rangle\langle J_{n'+1}X, J_l Y\rangle + 2\langle W, E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}Y, J_{n'+1}X\rangle\Big).
\end{aligned}$$

Utilizando essas expressões, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
&2Q(X,Y,Z,W)\\
&= -\langle J_kX,Z\rangle\langle J_kW,Y\rangle + \langle J_kX,Y\rangle\langle J_kZ,W\rangle + \langle J_kX,W\rangle\langle J_kZ,Y\rangle\\
&-2\langle J_{n'+1}X,W\rangle\langle J_{n'+1}Z,Y\rangle + 2\langle J_{n'+1}X,Z\rangle\langle J_{n'+1}W,Y\rangle\\
&+2\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\langle Y,E_{n+k}\rangle\langle J_kX,Z\rangle + 4\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle J_kX,Y\rangle\\
&+2\langle J_{n'+1}X,W\rangle\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle Y,E_{n+k}\rangle + \langle Y,E_{n+n'+1}\rangle\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle J_kX,W\rangle\\
&+\langle Y,E_{n+n'+1}\rangle\langle W,E_{n+k}\rangle\langle J_kX,Z\rangle + \langle J_{n'+1}X,Y\rangle\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+k}\rangle\\
&-2\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\langle X,E_{n+k}\rangle\langle J_kY,Z\rangle - 2\langle J_{n'+1}Y,W\rangle\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle X,E_{n+k}\rangle\\
&-\langle X,E_{n+n'+1}\rangle\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle J_kY,W\rangle - \langle X,E_{n+n'+1}\rangle\langle W,E_{n+k}\rangle\langle J_kY,Z\rangle\\
&-\langle J_{n'+1}Y,X\rangle\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+k}\rangle + \langle Z,E_{n+k}\rangle\bar\nabla_X J_k(W,Y)\\
&-\langle Y,E_{n+k}\rangle\bar\nabla_X J_k(Z,W) - \langle W,E_{n+k}\rangle\bar\nabla_X J_k(Z,Y)\\
&+2\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\bar\nabla_X J_{n'+1}(Z,Y) - 2\langle Z,E_{n+n'+1}\rangle\bar\nabla_X J_{n'+1}(W,Y)\\
&-\langle Z,E_{n+k}\rangle\bar\nabla_Y J_k(W,X) + \langle X,E_{n+k}\rangle\bar\nabla_Y J_k(Z,W) + \langle W,E_{n+k}\rangle\bar\nabla_Y J_k(Z,X)\\
&-2\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\bar\nabla_Y J_{n'+1}(Z,X) + 2\langle Z,E_{n+n'+1}\rangle\bar\nabla_Y J_{n'+1}(W,X)\\
&+\frac{1}{2}\langle Z,E_{n+k}\rangle\Big(\langle X,E_{n+l}\rangle\langle J_kY,J_lW\rangle + \langle W,E_{n+l}\rangle\langle J_kY,J_lX\rangle\\
&+2\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_kY,J_{n'+1}X\rangle + 4\langle Y,E_{n+k}\rangle\langle J_{n'+1}W,X\rangle\Big)\\
&+\frac{1}{2}\langle Y,E_{n+k}\rangle\Big(\langle X,E_{n+l}\rangle\langle J_kZ,J_lW\rangle + \langle W,E_{n+l}\rangle\langle J_kZ,J_lX\rangle\\
&+2\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_kZ,J_{n'+1}X\rangle + 4\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle J_{n'+1}W,X\rangle\Big)\\
&+\frac{1}{2}\langle J_kZ,Y\rangle\Big(\langle J_kW,X\rangle - 2\langle W,E_{n+k}\rangle\langle X,E_{n+n'+1}\rangle\Big)\\
&-4\langle Y,E_{n+k}\rangle\langle Z,E_{n+k}\rangle\big(\langle X,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+k}\rangle + \langle J_{n'+1}W,X\rangle\big)\\
&+\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle Y,E_{n+n'+1}\rangle\Big(\langle J_kW,X\rangle - 2\langle W,E_{n+k}\rangle\langle X,E_{n+n'+1}\rangle\Big)\\
&-\frac{1}{2}\langle Z,E_{n+k}\rangle\Big(\langle Y,E_{n+l}\rangle\langle J_kX,J_lW\rangle + \langle W,E_{n+l}\rangle\langle J_kX,J_lY\rangle\\
&+2\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_kX,J_{n'+1}Y\rangle + 4\langle X,E_{n+k}\rangle\langle J_{n'+1}W,Y\rangle\Big)\\
&-\frac{1}{2}\langle X,E_{n+k}\rangle\Big(\langle Y,E_{n+l}\rangle\langle J_kZ,J_lW\rangle + \langle W,E_{n+l}\rangle\langle J_kZ,J_lY\rangle\\
&+2\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_kZ,J_{n'+1}Y\rangle + 4\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle J_{n'+1}W,Y\rangle\Big)\\
&-\frac{1}{2}\langle J_k(Z),X\rangle\Big(\langle J_kW,Y\rangle - 2\langle W,E_{n+k}\rangle\langle Y,E_{n+n'+1}\rangle\Big)\\
&+4\langle X,E_{n+k}\rangle\langle Z,E_{n+k}\rangle\big(\langle Y,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+k}\rangle + \langle J_{n'+1}W,Y\rangle\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\langle Z, E_{n+k}\rangle\langle X, E_{n+n'+1}\rangle\Big(\langle J_k W, Y\rangle - 2\langle W, E_{n+k}\rangle\langle Y, E_{n+n'+1}\rangle\Big)\\
&+2\langle J_{n'+1}Z, Y\rangle\Big(\langle X, E_{n+k}\rangle\langle W, E_{n+k}\rangle + \langle J_{n'+1}W, X\rangle\Big)\\
&+\langle Z, E_{n+n'+1}\rangle\Big(2\langle Y, E_{n+l}\rangle\langle J_l W, X\rangle + \langle X, E_{n+l}\rangle\langle J_{n'+1}Y, J_l W\rangle\\
&+\langle W, E_{n+l}\rangle\langle J_{n'+1}Y, J_l X\rangle + 2\langle W, E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}X, J_{n'+1}Y\rangle\Big)\\
&-2\langle J_{n'+1}Z, X\rangle\Big(\langle Y, E_{n+k}\rangle\langle W, E_{n+k}\rangle + \langle J_{n'+1}W, Y\rangle\Big)\\
&-\langle Z, E_{n+n'+1}\rangle\Big(2\langle X, E_{n+l}\rangle\langle J_l W, Y\rangle + \langle Y, E_{n+l}\rangle\langle J_{n'+1}X, J_l W\rangle\\
&+\langle W, E_{n+l}\rangle\langle J_{n'+1}X, J_l Y\rangle + 2\langle W, E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}Y, J_{n'+1}X\rangle\Big).
\end{aligned}
$$

Observamos que

$$\bar{\nabla}_V J_k(X, Y) = \langle(\bar{\nabla}_V J_k)X, Y\rangle, \tag{3.8}$$

onde no lado direito indicamos a derivada de um tensor do tipo $(1,1)$. Finalmente, após cancelar alguns termos, escrevemos

$$
\begin{aligned}
&2Q(X,Y,Z,W)\\
&= \langle J_kX,Y\rangle\langle J_kZ,W\rangle - \frac{1}{2}\langle J_kX,Z\rangle\langle J_kW,Y\rangle + \frac{1}{2}\langle J_kX,W\rangle\langle J_kZ,Y\rangle\\
&+2\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\langle Y,E_{n+k}\rangle\langle J_kX,Z\rangle + 4\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle J_kX,Y\rangle\\
&+2\langle J_{n'+1}X,W\rangle\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle Y,E_{n+k}\rangle - 2\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\langle X,E_{n+k}\rangle\langle J_kY,Z\rangle\\
&-2\langle J_{n'+1}Y,W\rangle\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle X,E_{n+k}\rangle + \langle Z,E_{n+k}\rangle\langle(\bar{\nabla}_XJ_k)W,Y\rangle\\
&-\langle Y,E_{n+k}\rangle\langle(\bar{\nabla}_XJ_k)Z,W\rangle - \langle W,E_{n+k}\rangle\langle(\bar{\nabla}_XJ_k)Z,Y\rangle\\
&+2\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\langle(\bar{\nabla}_XJ_{n'+1})Z,Y\rangle - 2\langle Z,E_{n+n'+1}\rangle\langle(\bar{\nabla}_XJ_{n'+1})W,Y\rangle\\
&-\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle(\bar{\nabla}_YJ_k)W,X\rangle + \langle X,E_{n+k}\rangle\langle(\bar{\nabla}_YJ_k)Z,W\rangle + \langle W,E_{n+k}\rangle\langle(\bar{\nabla}_YJ_k)Z,X\rangle\\
&-2\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\langle(\bar{\nabla}_YJ_{n'+1})Z,X\rangle + 2\langle Z,E_{n+n'+1}\rangle\langle(\bar{\nabla}_YJ_{n'+1})W,X\rangle\\
&+\frac{1}{2}\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle X,E_{n+l}\rangle\langle J_kY,J_lW\rangle + \frac{1}{2}\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+l}\rangle\big(\langle J_kY,J_lX\rangle - \langle J_kX,J_lY\rangle\big)\\
&+2\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_kY,J_{n'+1}X\rangle + \frac{1}{2}\langle Y,E_{n+k}\rangle\langle X,E_{n+l}\rangle\big(\langle J_kZ,J_lW\rangle\\
&-\langle J_kW,J_lZ\rangle\big) - \frac{1}{2}\langle Z,E_{n+k}\rangle\langle Y,E_{n+l}\rangle\langle J_kX,J_lW\rangle - \frac{1}{2}\langle X,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+l}\rangle\langle J_kZ,J_lY\rangle\\
&-\langle X,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_kZ,J_{n'+1}Y\rangle + 2\langle X,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+k}\rangle\langle J_{n'+1}Z,Y\rangle\\
&+2\langle Y,E_{n+k}\rangle\langle Z,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_kW,X\rangle + \langle X,E_{n+k}\rangle\langle Z,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}Y,J_kW\rangle\\
&+\langle W,E_{n+k}\rangle\langle Z,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}Y,J_kX\rangle - 2\langle Y,E_{n+k}\rangle\langle W,E_{n+k}\rangle\langle J_{n'+1}Z,X\rangle\\
&-2\langle X,E_{n+k}\rangle\langle Z,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_kW,Y\rangle - \langle Y,E_{n+k}\rangle\langle Z,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}X,J_kW\rangle\\
&-\langle W,E_{n+k}\rangle\langle Z,E_{n+n'+1}\rangle\langle J_{n'+1}X,J_kY\rangle.
\end{aligned}
$$

3.1.1 Definição Alternativa do Tensor L

A partir da escolha do referencial ortonormal local invariante à esquerda em (3.1), definimos as *constantes de estrutura* em S por

$$[E_k,E_l] = \sum_{r=1}^{n+n'+1} \sigma_{kl}^r E_r. \tag{3.9}$$

Se $\{\theta^k\}_{k=1}^{n+n'+1}$ denota o co-referencial dual a $\{E_k\}_{k=1}^{n+n'+1}$, então as formas de conexão em S são dadas por

$$\theta_l^k = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n+n'+1} \tau_{lr}^k\,\theta^r, \tag{3.10}$$

onde

$$\tau^k_{lr} = \sigma^k_{rl} + \sigma^l_{kr} + \sigma^r_{kl}. \tag{3.11}$$

De acordo com essa notação, as primeiras equações de estrutura são

$$\mathrm{d}\theta^k + \theta^k_l \wedge \theta^l = 0, \quad \theta^k_l = -\theta^l_k. \tag{3.12}$$

A 2-forma de curvatura $\Theta = \{\Theta^k_l\}_{k,l=1}^{n+n'+1}$ de S, associada ao referencial $\{E_k\}_{k=1}^{n+n'+1}$, é dada por

$$\mathrm{d}\theta^k_l + \sum_{r=1}^{n+n'+1} \theta^k_r \wedge \theta^r_l = \Theta^k_l. \tag{3.13}$$

Verifica-se facilmente que

$$\Theta^k_l = \frac{1}{4} \sum_{r,p,q=1}^{n+n'+1} \big(\tau^k_{lr}\tau^r_{st} + \tau^k_{rs}\tau^r_{lt}\big)\theta^p \wedge \theta^q. \tag{3.14}$$

Recordamos que as duas expressões distintas para J_k obtidas acima estão relacionadas pelas equações

$$u^k_{ab} = \sum_{l,r=1}^{n} A^l_a A^r_b \sigma^{n+k}_{lr} - 2U^k_a U^{n'+1}_b. \tag{3.15}$$

e

$$u^{n'+1}_{ab} = \delta_{ab} - U^{n'+1}_a U^{n'+1}_b + \sum_{k=1}^{n'} U^k_a U^k_b. \tag{3.16}$$

Utilizamos as equações (3.15) e (3.16) para deduzir uma expressão alternativa para λ, a ser usada posteriormente. Inicialmente, enumeramos as constantes de estrutura.

Lema 1. *As constantes de estrutura satisfazem as relações*

$$\sigma^r_{kl} = \begin{cases} 0, \ 1 \le r \le n, \ 1 \le k,l \le n \\ 0, \ 1 \le k \le n, \ n+1 \le l \le n+n' \\ 0, \ n+1 \le k,l \le n+n' \\ \frac{1}{2}, \ k = n+n'+1, \ 1 \le r,l \le n \text{ e } r = l \\ 1, \ k = n+n'+1, \ n+1 \le r,l \le n+n' \text{ e } r = l, \end{cases}$$

$$\tau^k_{lr} = \begin{cases} \sigma^k_{rl}, \ 1 \le l,r \le n \text{ e } n+1 \le k \le n+n' \\ \sigma^r_{kl}, \ 1 \le k,l \le n \text{ e } n+1 \le r \le n+n' \\ \sigma^l_{kr}, \ 1 \le k,r \le n \text{ e } n+1 \le l \le n+n', \end{cases}$$

$$\tau^k_{n+n'+1,r} = \begin{cases} -1, \ 1 \le k,r \le n \text{ e } k = r \\ -2, \ n+1 \le k,r \le n+n' \text{ e } k = r, \end{cases}$$

$$\tau^{k}_{l,n+n'+1} = 0, \forall\, l, k$$

e

$$\tau^{n+n'+1}_{lr} = \begin{cases} 1, \ 1 \leq l, r \leq n \ e \ l = r \\ 2, \ n+1 \leq l, r \leq n+n' \ e \ l = r. \end{cases}$$

Prova. Consideramos os índices

$$a, b = 1, \ldots, n \quad \text{e} \quad \alpha, \beta = n+1, \ldots, n+n'.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} &[E_a, E_b] = \sum_{r=n+1}^{n+n'} \sigma^r_{ab} E_r, \\ &[E_a, E_\beta] = 0, \\ &[E_\alpha, E_\beta] = 0 \\ &[E_{n+n'+1}, E_a] = \frac{1}{2} E_a \\ &[E_{n+n'+1}, E_\alpha] = E_\alpha. \end{aligned}$$

Assim,

$$\sigma^r_{kl} = \begin{cases} 0, \ 1 \leq r \leq n, \ 1 \leq k, l \leq n \\ 0, \ 1 \leq k \leq n, \ n+1 \leq l \leq n+n' \\ 0, \ n+1 \leq k, l \leq n+n' \\ \frac{1}{2}, \ k = n+n'+1, \ 1 \leq r, l \leq n \text{ e } r = l \\ 1, \ k = n+n'+1, \ n+1 \leq r, l \leq n+n' \text{ e } r = l. \end{cases}$$

Usando estas expressões e (3.11), concluímos que

$$\tau_{ab}^k = \sigma_{ba}^k + \sigma_{kb}^a + \sigma_{ka}^b = \begin{cases} \sigma_{ba}^k & \text{se} \quad n+1 \leq k \leq n+n' \\ 0 & \text{se} \quad 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

$$\tau_{a\beta}^k = \sigma_{\beta a}^k + \sigma_{k\beta}^a + \sigma_{ka}^\beta = \begin{cases} \sigma_{ka}^\beta & \text{se} \quad 1 \leq k \leq n \\ 0 & \text{se} \quad n+1 \leq k \leq n+n' \end{cases}$$

$$\tau_{\alpha b}^k = \sigma_{b\alpha}^k + \sigma_{kb}^\alpha + \sigma_{k\alpha}^b = \begin{cases} \sigma_{kb}^\alpha & \text{se} \quad 1 \leq k \leq n \\ 0 & \text{se} \quad n+1 \leq k \leq n+n' \end{cases}$$

$$\tau_{\alpha\beta}^k = \sigma_{\beta\alpha}^k + \sigma_{k\beta}^\alpha + \sigma_{k\alpha}^\beta = 0 \ \text{se} \ 1 \leq k \leq n+n'$$

$$\tau_{ab}^{n+n'+1} = \sigma_{ba}^{n+n'+1} + \sigma_{n+n'+1,b}^a + \sigma_{n+n'+1,a}^b = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad a = b \\ 0 & \text{se} \quad a \neq b \end{cases}$$

$$\tau_{\alpha b}^{n+n'+1} = \sigma_{b\alpha}^{n+n'+1} + \sigma_{n+n'+1,b}^\alpha + \sigma_{n+n'+1,\alpha}^b = 0 = \tau_{a\beta}^{n+n'+1}$$

$$\tau_{\alpha\beta}^{n+n'+1} = \sigma_{\beta\alpha}^{n+n'+1} + \sigma_{n+n'+1,\beta}^\alpha + \sigma_{n+n'+1,\alpha}^\beta = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad \alpha = \beta \\ 0 & \text{se} \quad \alpha \neq \beta \end{cases}$$

$$\tau_{n+n'+1,b}^k = \sigma_{b,n+n'+1}^k + \sigma_{kb}^{n+n'+1} + \sigma_{k,n+n'+1}^b = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad b = k \\ 0 & \text{se} \quad b \neq k \end{cases}$$

$$\tau_{a,n+n'+1}^k = \sigma_{n+n'+1,a}^k + \sigma_{k,n+n'+1}^a + \sigma_{ka}^{n+n'+1} = 0 = \tau_{\alpha,n+n'+1}^k$$

$$\tau_{n+n'+1,\beta}^k = \sigma_{\beta,n+n'+1}^k + \sigma_{k\beta}^{n+n'+1} + \sigma_{k,n+n'+1}^\beta = \begin{cases} -2 & \text{se} \quad \beta = k \\ 0 & \text{se} \quad \beta \neq k. \end{cases}$$

Logo,

$$\tau_{lr}^k = \begin{cases} \sigma_{rl}^k, \ 1 \leq l, r \leq n \text{ e } n+1 \leq k \leq n+n' \\ \sigma_{kl}^r, \ 1 \leq k, l \leq n \text{ e } n+1 \leq r \leq n+n' \\ \sigma_{kr}^l, \ 1 \leq k, r \leq n \text{ e } n+1 \leq l \leq n+n', \end{cases}$$

$$\tau_{n+n'+1,r}^k = \begin{cases} -1, \ 1 \leq k, r \leq n \text{ e } k = r \\ -2, \ n+1 \leq k, r \leq n+n' \text{ e } k = r, \end{cases}$$

$$\tau_{l,n+n'+1}^k = 0, \forall\, l, k$$

e

$$\tau_{lr}^{n+n'+1} = \begin{cases} 1, \ 1 \leq l, r \leq n \text{ e } l = r \\ 2, \ n+1 \leq l, r \leq n+n' \text{ e } l = r. \end{cases}$$

Isto finaliza a prova do lema. □

Com esse lema em mente, apresentamos a seguinte expressão alternativa para λ.

Proposição 6. *A* 1*-forma* $\lambda = (\lambda^a_b)^{n+n'+1}_{a,b=1}$ *definida em (2.5) satisfaz*

$$\lambda = A^{-1}\theta A,$$

onde $\theta = (\theta^k_l)^{n+n'+1}_{k,l=1}$.

Prova. Com efeito, utilizando as relações entre as constantes de estrutura apresentadas no lema 3.1.1 juntamente com as equações (3.15) e (3.16), obtemos diretamente

$$\begin{aligned}
\lambda^a_b &= \sum_{c=1}^{n+n'+1}\Big(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n'}(-U^k_a u^k_{bc} + U^k_c u^k_{ab} + U^k_b u^k_{ac}) - U^{n'+1}_b u^{n'+1}_{ac} + U^{n'+1}_a u^{n'+1}_{bc}\Big)\omega^c \\
&+ \sum_{c=1}^{n+n'+1}\sum_{k=1}^{n'}(2U^k_a U^k_c U^{n'+1}_b + U^k_b U^k_a U^{n'+1}_c)\omega^c \\
&= \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{n+n'+1}\sum_{k=1}^{n'}(-U^k_a u^k_{bc} + U^k_c u^k_{ab} + U^k_b u^k_{ac})\omega^c - U^{n'+1}_b u^{n'+1}_{ac}\omega^c + U^{n'+1}_a u^{n'+1}_{bc}\omega^c \\
&+ \sum_{c=1}^{n+n'+1}\sum_{k=1}^{n'}(2U^k_a U^k_c U^{n'+1}_b + U^k_b U^k_a U^{n'+1}_c)\omega^c \\
&= \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{n+n'+1}\sum_{k=1}^{n'}(-U^k_a u^k_{bc} + U^k_c u^k_{ab} + U^k_b u^k_{ac})\omega^c \\
&-U^{n'+1}_b\Big(\delta_{ac} - U^{n'+1}_a U^{n'+1}_c + \sum_{k=1}^{n'} U^k_a U^k_c\Big)\omega^c \\
&+U^{n'+1}_a\Big(\delta_{bc} - U^{n'+1}_b U^{n'+1}_c + \sum_{l=1}^{n'} U^l_b U^l_c\Big)\omega^c \\
&+ \sum_{c=1}^{n+n'+1}\sum_{k=1}^{n'}(2U^k_a U^k_c U^{n'+1}_b + U^k_b U^k_a U^{n'+1}_c)\omega^c,
\end{aligned}$$

donde,

$$
\begin{aligned}
\lambda^a_b &= \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{n+n'+1}\sum_{k=1}^{n'}(U^k_a u^k_{cb} + U^k_c u^k_{ab} + U^k_b u^k_{ac} + 2U^k_a U^k_c U^{n'+1}_b + 2U^k_c U^k_a U^{n'+1}_b \\
&\quad +2U^k_b U^k_a U^{n'+1}_c)\omega^c - U^{n'+1}_b \sum_{k=1}^{n'} U^k_a U^k_c \omega^c + U^{n'+1}_a \sum_{l=1}^{n'} U^l_b U^l_c \omega^c \\
&\quad -U^{n'+1}_b\Big(\delta_{ac} - U^{n'+1}_a U^{n'+1}_c\Big)\omega^c + U^{n'+1}_a\Big(\delta_{bc} - U^{n'+1}_b U^{n'+1}_c\Big)\omega^c \\
&= \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{n+n'+1}\Big(\sum_{k=1}^{n'} U^k_a(u^k_{cb} + 2U^k_c U^{n'+1}_b) \\
&\quad +\sum_{r=1}^{n'} U^r_c(u^r_{ab} + 2U^r_a U^{n'+1}_b) + \sum_{l=1}^{n'} U^l_b(u^l_{ac} + 2U^l_a U^{n'+1}_c) \\
&\quad -U^{n'+1}_b\Big(\sum_{k=1}^{n} A^k_a A^k_c + \sum_{k=1}^{n'} U^k_a U^k_c\Big)\omega^c - U^{n'+1}_b \sum_{k=1}^{n'} U^k_a U^k_c \omega^c \\
&\quad +U^{n'+1}_a\Big(\sum_{l=1}^{n} A^l_b A^l_c + \sum_{l=1}^{n'} U^l_b U^l_c\Big)\omega^c + U^{n'+1}_a \sum_{l=1}^{n'} U^l_b U^l_c \omega^c\Big) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{n+n'+1}\Big(\sum_{k=1}^{n'}\sum_{l,r=1}^{n} U^k_a A^l_b A^r_c \sigma^{n+k}_{rl} + \sum_{k,l=1}^{n}\sum_{r=1}^{n'} U^r_c A^l_b A^k_a \sigma^{n+r}_{kl} + \sum_{l=1}^{n'}\sum_{k,r=1}^{n} U^l_b A^k_a A^r_c \sigma^{n+l}_{kr} \\
&\quad -\sum_{k=1}^{n} U^{n'+1}_b A^k_a A^k_c - 2\sum_{k=1}^{n'} U^k_a U^{n'+1}_b U^k_c + \sum_{l=1}^{n} U^{n'+1}_a A^l_b A^l_c + 2\sum_{l=1}^{n'} U^{n'+1}_a U^l_b U^l_c\Big)\omega^c \\
&= \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{n+n'+1}\sum_{k=n+1}^{n+n'}\sum_{l,r=1}^{n} A^k_a A^l_b A^r_c \sigma^k_{rl}\omega^c + \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{n+n'+1}\sum_{r=n+1}^{n+n'}\sum_{k,l=1}^{n} A^k_a A^l_b A^r_c \sigma^r_{kl}\omega^c \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{c=1}^{n+n'+1}\sum_{l=n+1}^{n+n'}\sum_{k,r=1}^{n} A^k_a A^l_b A^r_c \sigma^l_{kr}\omega^c - \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{n+n'+1}\sum_{k=1}^{n} A^k_a A^{n+n'+1}_b A^k_c \omega^c \\
&\quad -\sum_{c=1}^{n+n'+1}\sum_{k=n+1}^{n+n'} A^k_a A^{n+n'+1}_b A^k_c \omega^c + \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{n+n'+1}\sum_{l=1}^{n} A^{n+n'+1}_a A^l_b A^l_c \omega^c \\
&\quad +\sum_{c=1}^{n+n'+1}\sum_{l=n+1}^{n+n'} A^{n+n'+1}_a A^l_b A^l_c \omega^c \\
&= \frac{1}{2}\sum_{c,k,l,r=1}^{n+n'+1} A^k_a A^l_b A^r_c \tau^k_{lr}\omega^c = \frac{1}{2}\sum_{k,l,r=1}^{n+n'+1} A^k_a A^l_b \tau^k_{lr}\theta^r \\
&= \sum_{k,l=1}^{n+n'+1} (A^{-1})^a_k \theta^k_l A^l_b = \sum_{k,l=1}^{n+n'+1} A^k_a A^l_b \theta^k_l \\
&= (A^{-1}\theta A)^a_b.
\end{aligned}
$$

Isso finaliza a prova da proposição. □

Observação 2. *Podemos ainda demonstrar que*

$$-Q = A^{-1}\Theta A. \tag{3.17}$$

Uma fórmula análoga é provada posteriormente na Proposição 9.

3.2 Existência de um Referencial Adaptado

Seja M uma variedade Riemanniana m-dimensional. Definimos m' por $m + m' = n + n' + 1$. Consideramos um fibrado vetorial Riemanniano real $\mathcal{E}$ sobre M com posto m' e a soma de Whitney $\mathcal{S} = TM \oplus \mathcal{E}$, de modo que $\mathcal{S}$ é um fibrado vetorial trivial. Podemos, portanto fixar um referencial ortonormal globalmente definido $\hat{E}_1, \ldots, \hat{E}_{n+n'}, \hat{E}_{n+n'+1}$ em $\mathcal{S}$. Denotamos por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ o tensor métrico em $\mathcal{S}$. Sejam $\hat{\nabla}$ e $\hat{R}$ a conexão compatível com a métrica e o tensor curvatura em $\mathcal{S}$, respectivamente. Então definimos os tensores

$$\langle \hat{J}_k V, W\rangle = \sum_{l,r=1}^{n} \langle V, \hat{E}_l\rangle\langle W, \hat{E}_r\rangle \sigma_{lr}^{n+k} - 2\langle V, E_{n+k}\rangle\langle W, E_{n+n'+1}\rangle, \quad k = 1, \ldots, n', \tag{3.18}$$

e

$$\langle \hat{J}_{n'+1} V, W\rangle = \langle V, W\rangle - \langle V, \hat{E}_{n+n'+1}\rangle\langle W, \hat{E}_{n+n'+1}\rangle + \sum_{l=n+1}^{n+n'} \langle V, \hat{E}_l\rangle\langle W, \hat{E}_l\rangle, \tag{3.19}$$

onde V, W são secções arbitrárias de $\mathcal{S}$. Em virtude da definição de $\hat{J}_k$ e $\hat{J}_{n'+1}$, onde $1 \leq k \leq n + n'$, temos

$$\langle \hat{J}_k V, \hat{E}_{n+l}\rangle = 0, \tag{3.20}$$

$$\langle \hat{J}_k V, \hat{E}_{n+n'+1}\rangle = -2\langle V, E_{n+k}\rangle, \tag{3.21}$$

$$\langle \hat{J}_{n'+1} V, \hat{E}_{n+k}\rangle = 2\langle V, E_{n+k}\rangle \tag{3.22}$$

e

$$\langle \hat{J}_{n'+1} V, \hat{E}_{n+n'+1}\rangle = 0. \tag{3.23}$$

Definimos em termos de $\hat{J}_k$ os tensores $\hat{L}$ e $\hat{Q}$ em $\mathcal{S}$ por

$$\begin{aligned}
\hat{L}(X,Y,V) \;=\; & \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n'}\Big(- \langle Y, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle \hat{J}_k V, X\rangle + \langle X, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle \hat{J}_k Y, V\rangle + \langle V, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle \hat{J}_k Y, X\rangle\Big) \\
& - \langle V, \hat{E}_{n+n'+1}\rangle\langle \hat{J}_{n'+1} Y, X\rangle + \langle Y, \hat{E}_{n+n'+1}\rangle\langle \hat{J}_{n'+1} V, X\rangle \\
& + \sum_{k=1}^{n'}(2\langle X, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle Y, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle V, \hat{E}_{n+n'+1}\rangle \\
& + \langle Y, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle V, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle X, E_{n+n'+1}\rangle)).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

e

$$
\begin{aligned}
&2\hat{Q}(X,Y,V,W)\\
&= \langle \hat{J}_k X, Y\rangle\langle \hat{J}_k V, W\rangle - \frac{1}{2}\langle \hat{J}_k X, V\rangle\langle \hat{J}_k W, Y\rangle + \frac{1}{2}\langle \hat{J}_k X, W\rangle\langle \hat{J}_k V, Y\rangle\\
&+2\langle W, \hat{E}_{n+n'+1}\rangle\langle Y, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle \hat{J}_k X, V\rangle + 4\langle W, \hat{E}_{n+n'+1}\rangle\langle V, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle \hat{J}_k X, Y\rangle\\
&+2\langle \hat{J}_{n'+1} X, W\rangle\langle V, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle Y, \hat{E}_{n+k}\rangle - 2\langle W, \hat{E}_{n+n'+1}\rangle\langle X, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle \hat{J}_k Y, V\rangle\\
&-2\langle \hat{J}_{n'+1} Y, W\rangle\langle V, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle X, \hat{E}_{n+k}\rangle + \langle V, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle (\hat{\nabla}_X \hat{J}_k)W, Y\rangle\\
&-\langle Y, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle (\hat{\nabla}_X \hat{J}_k)V, W\rangle - \langle W, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle (\hat{\nabla}_X \hat{J}_k)V, Y\rangle\\
&+2\langle W, \hat{E}_{n+n'+1}\rangle\langle (\hat{\nabla}_X \hat{J}_{n'+1})V, Y\rangle - 2\langle V, \hat{E}_{n+n'+1}\rangle\langle (\hat{\nabla}_X \hat{J}_{n'+1})W, Y\rangle\\
&-\langle V, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle (\hat{\nabla}_Y \hat{J}_k)W, X\rangle + \langle X, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle (\hat{\nabla}_Y \hat{J}_k)V, W\rangle + \langle W, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle (\hat{\nabla}_Y \hat{J}_k)V, X\rangle\\
&-2\langle W, \hat{E}_{n+n'+1}\rangle\langle (\hat{\nabla}_Y \hat{J}_{n'+1})V, X\rangle + 2\langle V, \hat{E}_{n+n'+1}\rangle\langle (\hat{\nabla}_Y \hat{J}_{n'+1})W, X\rangle\\
&+\frac{1}{2}\langle V, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle X, \hat{E}_{n+l}\rangle\langle \hat{J}_k Y, \hat{J}_l W\rangle + \frac{1}{2}\langle V, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle W, \hat{E}_{n+l}\rangle\big(\langle \hat{J}_k Y, \hat{J}_l X\rangle - \langle \hat{J}_k X, \hat{J}_l Y\rangle\big)\\
&+2\langle V, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle W, \hat{E}_{n+n'+1}\rangle\langle \hat{J}_k Y, \hat{J}_{n'+1} X\rangle + \frac{1}{2}\langle Y, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle X, \hat{E}_{n+l}\rangle\big(\langle \hat{J}_k V, \hat{J}_l W\rangle\\
&-\langle \hat{J}_k W, \hat{J}_l V\rangle\big) - \frac{1}{2}\langle V, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle Y, \hat{E}_{n+l}\rangle\langle \hat{J}_k X, \hat{J}_l W\rangle - \frac{1}{2}\langle X, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle W, \hat{E}_{n+l}\rangle\langle \hat{J}_k V, \hat{J}_l Y\rangle\\
&-\langle X, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle W, \hat{E}_{n+n'+1}\rangle\langle \hat{J}_k V, \hat{J}_{n'+1} Y\rangle + 2\langle X, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle W, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle \hat{J}_{n'+1} V, Y\rangle\\
&+2\langle Y, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle V, \hat{E}_{n+n'+1}\rangle\langle \hat{J}_k W, X\rangle + \langle X, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle V, \hat{E}_{n+n'+1}\rangle\langle \hat{J}_{n'+1} Y, \hat{J}_k W\rangle\\
&+\langle W, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle V, \hat{E}_{n+n'+1}\rangle\langle \hat{J}_{n'+1} Y, \hat{J}_k X\rangle - 2\langle Y, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle W, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle \hat{J}_{n'+1} V, X\rangle\\
&-2\langle X, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle V, \hat{E}_{n+n'+1}\rangle\langle \hat{J}_k W, Y\rangle - \langle Y, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle V, \hat{E}_{n+n'+1}\rangle\langle \hat{J}_{n'+1} X, \hat{J}_k W\rangle\\
&-\langle W, \hat{E}_{n+k}\rangle\langle V, \hat{E}_{n+n'+1}\rangle\langle \hat{J}_{n'+1} X, \hat{J}_k Y\rangle. \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

onde $X,Y \in \Gamma(TM)$, $V,W \in \Gamma(\mathcal{S})$ e omitimos, por brevidade, as somas em $k = 1,\ldots,n'$.

Supomos que

$$\langle \hat{R}(X,Y)V,W\rangle = \hat{Q}(X,Y,V,W), \quad X,Y \in \Gamma(TM),\ V,W \in \Gamma(\mathcal{S}). \qquad (3.26)$$

Além disso, supomos que a condição

$$\hat{\nabla}_X \hat{E}_{n+k} = -\frac{1}{2}\hat{J}_k X, \quad X \in \Gamma(TM),\ k = 1,\ldots,n'+1. \qquad (3.27)$$

é satisfeita.

A conexão em $\mathcal{S}$ induz conexões ∇ em M e $\nabla^{\mathcal{E}}$ em $\mathcal{E}$. Mais precisamente, definindo-se $II \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes \mathcal{E})$ por

$$\hat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X,Y),\ X,Y \in \Gamma(TM)$$

e denotando-se

$$\langle S_V(X), Y\rangle = \langle II(X,Y), V\rangle,$$

obtemos

$$\hat{\nabla}_X V = -S_V X + \nabla_X^{\mathcal{E}} V.$$

Em termos da decomposição $\hat{E}_{n+k} = T_k + N_k$, $T_k \in \Gamma(TM)$, $N_k \in \Gamma(\mathcal{E})$, a condição (3.27) é expressa por

$$\nabla_X T_k - S_k(X) + \nabla_X^{\mathcal{E}} N_k + II(T_k, X) = \hat{J}_k(X), \quad X \in \Gamma(TM), \tag{3.28}$$

onde $S_k = S_{N_k}$ e $k = 1, \dots, n' + 1$.

Definição 2. *Dado um aberto simplesmente conexo $M' \subset M$, fixamos uma aplicação $U \in C^\infty(M', \mathbb{R}^{(n'+1)(n+n'+1)})$. Um referencial ortonormal $e : M' \to \mathcal{F}(\mathcal{S})$ com componentes*

$$e_1, \dots e_m, e_{m+1}, \dots e_{m+m'}$$

é admissível *se as primeiras m secções são campos vetoriais em M e as últimas m' são secções em $\mathcal{E}$ e, ainda, se satisfizer*

$$\langle \hat{E}_{n+k}, e_a\rangle = U_a^k, \quad 1 \leq k \leq n' + 1.$$

Em particular, isso implica que

$$\langle T_k, e_i\rangle = \langle \hat{E}_{n+k}, e_i\rangle = U_i^k \tag{3.29}$$

para $i = 1, \dots, m$ e

$$\langle N_k, e_\alpha\rangle = \langle \hat{E}_{n+k}, e_\alpha\rangle = U_\alpha^k \tag{3.30}$$

para $\alpha = m+1, \dots, m+m'$. A aplicação de transição de um referencial ortonormal $\hat{E}_k$ para um referencial ortonormal admissível e_a é dada por uma aplicação admissível, *isto é, se*

$$e_a = \hat{E}_k A_a^k,$$

então A é da forma

$$A(x) = \begin{pmatrix} * \\ U(x) \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Denotamos por

$$\omega^1, \ldots, \omega^m, \omega^{m+1}, \ldots, \omega^{m+m'} \tag{3.32}$$

as 1-formas reais sobre $\mathcal{S}$ duais ao referencial $\{e_a\}_{a=1}^{n+n'+1}$. A conexão riemanniana $\hat{\nabla}$ é dada, em termos deste referencial, pela matriz $\omega = (\omega_b^a)_{a,b=1}^{n+n'+1}$. Assim, a primeira equação de estrutura é escrita como

$$\mathrm{d}\omega^a + \omega_b^a \wedge \omega^b = 0, \quad \omega_b^a = -\omega_a^b. \tag{3.33}$$

A expressão local para $\hat{J}_k$ em termos de um referencial ortonormal admissível é

$$\langle \hat{J}_k e_b, e_a \rangle = u_{ba}^k. \tag{3.34}$$

Então, considerando J_k como um tensor do tipo $(0,2)$ dado por

$$\hat{J}_k(e_a, e_b) := \langle \hat{J}_k e_a, e_b \rangle, \tag{3.35}$$

podemos escrever

$$\hat{J}_k = \sum_{a,b} u_{ab}^k \omega^a \otimes \omega^b. \tag{3.36}$$

Assim, a equação (3.27) é reescrita como

$$\sum_k \left(\mathrm{d}U_a^k - \sum_c U_c^k \omega_a^c \right) = -\frac{1}{2} \sum_k u_{ba}^k \, \omega^b. \tag{3.37}$$

As derivadas covariantes do campo tensorial $\hat{J}_k$ são dadas por

$$\hat{\nabla} \hat{J}_k(e_a, e_b) = \mathrm{d}u_{ab}^k - u_{db}^k \omega_a^d - u_{ad}^k \omega_b^d =: \hat{\nabla} u_{ab}^k.$$

A expressão local para $\hat{L}$ é dada, em termos de 1-formas, por

$$\hat{\lambda}_b^a = \hat{L}(\,\cdot\,, e_a, e_b). \tag{3.38}$$

Assim, do mesmo modo como foi calculado na Seção 3.1, obtemos a identidade

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_b^a \;=\; & \sum_{c=1}^{n+n'+1} \Big(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n'} (-U_a^k u_{bc}^k + U_c^k u_{ab}^k + U_b^k u_{ac}^k) - U_b^{n'+1} u_{ac}^{n'+1} + U_a^{n'+1} u_{bc}^{n'+1} \Big) \omega^c \\ + \; & \sum_{c=1}^{n+n'+1} \sum_{k=1}^{n'} (2U_a^k U_c^k U_b^{n'+1} + U_b^k U_a^k U_c^{n'+1}) \omega^c. \end{aligned}$$

A expressão local para $\hat{Q}$ é dada pela 2-forma

$$\hat{Q}_a^d = \hat{Q}(\cdot, \cdot, e_a, e_d).$$

Podemos verificar que

$$\hat{Q}^a_d := \hat{Q}(\,\cdot,\,,\,\cdot, e_a, e_d) = -\big(\mathrm{d}\hat{\lambda} + \hat{\lambda}\wedge\omega + \omega\wedge\hat{\lambda} - \hat{\lambda}\wedge\hat{\lambda}\big)\,{}^a_{\;d}. \tag{3.39}$$

Com efeito, a verificação de (3.39) é análoga àquela feita na Seção 3.1, dessa vez utilizando as expressões (3.20)-(3.23).

Observemos agora que a hipótese (3.26) é refraseada, em termos dessas formas, como

$$\mathrm{d}\omega + \omega\wedge\omega = -(\hat{Q}^d_a). \tag{3.40}$$

Podemos, então, provar o seguinte resultado.

Proposição 7. *Suponhamos que os dados definidos acima satisfaçam (3.26) e (3.27). Seja $M' \subset M$ um subconjunto aberto e simplesmente conexo. Então existe uma aplicação admissível $A \in C^\infty(M', \mathrm{SO}_{n+n'+1})$ tal que*

$$A^{-1}\mathrm{d}A = \omega - \hat{\lambda} \tag{3.41}$$

com a condição inicial $A(x_0) = Id$, para $x_0 \in M'$ dado.

Prova: É suficiente mostrar que as hipóteses em consideração implicam nas hipóteses de uma versão adequada da Proposição 5 do Apêndice 2.4. Isso assegura a existência de uma aplicação admissível tal que

$$A^{-1}\mathrm{d}A = \hat{\omega}, \tag{3.42}$$

onde estamos considerando

$$\hat{\omega} = \omega - \hat{\lambda}. \tag{3.43}$$

Denotando

$$\Upsilon = \hat{\omega} - A^{-1}\mathrm{d}A, \tag{3.44}$$

calculamos

$$\begin{aligned} -\mathrm{d}\Upsilon &= -A^{-1}\mathrm{d}A\wedge A^{-1}\mathrm{d}A - \mathrm{d}\hat{\omega} \\ &= -\big(\Upsilon - \hat{\omega}\big)\wedge\big(\Upsilon - \hat{\omega}\big) - \mathrm{d}\hat{\omega} \\ &= -\Upsilon\wedge\Upsilon + \Upsilon\wedge\hat{\omega} + \hat{\omega}\wedge\Upsilon - \mathrm{d}\hat{\omega} - \hat{\omega}\wedge\hat{\omega}. \end{aligned}$$

Assim, em vista da expressão $\hat{\omega} = \omega - \hat{\lambda}$, obtemos a seguinte equação módulo Υ

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Upsilon &= \mathrm{d}\hat{\omega} + \hat{\omega}\wedge\hat{\omega} \\ &= \mathrm{d}\omega + \omega\wedge\omega - \mathrm{d}\hat{\lambda} + \hat{\lambda}\wedge\hat{\lambda} - \omega\wedge\hat{\lambda} - \hat{\lambda}\wedge\omega. \end{aligned}$$

Então, de (3.39) e (3.40), concluímos que a equação, módulo Υ,

$$\mathrm{d}\Upsilon = \mathrm{d}\hat{\omega} + \hat{\omega} \wedge \hat{\omega} = 0$$

é verdadeira. Para que a condição (2.65) da Proposição 5 no Apêndice 2.4 seja satisfeita, resta provar que os dados definidos acima satisfazem

$$\mathrm{d}U - U\omega + U\hat{\lambda} = 0. \tag{3.45}$$

Para provar isso, calculamos para $1 \leq k \leq n'$

$$\begin{aligned}
\sum_{c=1}^{n+n'+1} U_c^k \hat{\lambda}_a^c &= \sum_{c=1}^{n+n'+1} U_c^k \Big(\sum_{b=1}^{n+n'+1} \Big(\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n'} (-U_c^l u_{ab}^l + U_b^l u_{ca}^l + U_a^l u_{cb}^l) - U_a^{n'+1} u_{cb}^{n'+1} \\
&\quad + U_c^{n'+1} u_{ab}^{n'+1} \Big) \omega^b + \sum_{b=1}^{n+n'+1} \sum_{l=1}^{n'} (2 U_c^l U_b^l U_a^{n'+1} + U_a^l U_c^l U_b^{n'+1}) \omega^b \Big) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{b,c=1}^{n+n'+1} U_c^k U_c^l u_{ab}^k \omega^b + \frac{1}{2} \sum_{b,c=1}^{n+n'+1} \sum_{l=1}^{n'} U_c^k U_b^l u_{ca}^l \omega^b \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{b,c=1}^{n+n'+1} \sum_{l=1}^{n'} U_c^k U_a^l u_{cb}^l \omega^b - \sum_{b,c=1}^{n+n'+1} U_c^k U_a^{n'+1} u_{cb}^{n'+1} \omega^b \\
&\quad + \sum_{b,c=1}^{n+n'+1} U_c^k U_c^{n'+1} u_{ab}^{n'+1} \omega^b + 2 \sum_{b,c=1}^{n+n'+1} \sum_{l=1}^{n'} U_c^k U_c^l U_b^l U_a^{n'+1} \omega^b \\
&\quad + \sum_{b,c=1}^{n+n'+1} \sum_{l=1}^{n'} U_c^k U_a^l U_c^l U_b^{n'+1} \omega^b \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{b=1}^{n+n'+1} u_{ab}^k \omega^b + \frac{1}{2} \sum_{b,c=1}^{n+n'+1} \sum_{l=1}^{n'} U_c^k U_b^l \Big(\sum_{s,t=1}^{n} A_c^s A_a^t \sigma_{st}^{n+l} \\
&\quad - 2 U_c^l U_a^{n'+1} \Big) \omega^b + \frac{1}{2} \sum_{b,c=1}^{n+n'+1} \sum_{l=1}^{n'} U_c^k U_a^l \Big(\sum_{s,t=1}^{n} A_c^s A_b^t \sigma_{st}^{n+l} \\
&\quad - 2 U_c^l U_b^{n'+1} \Big) \omega^b - \sum_{b,c=1}^{n+n'+1} U_c^k U_a^{n'+1} \Big(\delta_{cb} - U_c^{n'+1} U_b^{n'+1} \\
&\quad + \sum_{l=1}^{n'} U_c^l U_b^l \Big) \omega^b + 2 U_a^{n'+1} \sum_{b=1}^{n+n'+1} U_b^k \omega^b + U_a^k \sum_{b=1}^{n+n'+1} U_b^{n'+1} \omega^b \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{b=1}^{n+n'+1} u_{ab}^k \omega^b - U_a^{n'+1} \sum_{b=1}^{n+n'+1} U_b^k \omega^b - U_a^k \sum_{b=1}^{n+n'+1} U_b^{n'+1} \omega^b \\
&\quad - U_a^{n'+1} \sum_{b=1}^{n+n'+1} U_b^k \omega^b + 2 U_a^{n'+1} \sum_{b=1}^{n+n'+1} U_b^k \omega^b + U_a^k \sum_{b=1}^{n+n'+1} U_b^{n'+1} \omega^b \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{b=1}^{n+n'+1} u_{ab}^k \omega^b = \frac{1}{2} \sum_{b=1}^{n+n'+1} u_{ba}^k \omega^b = -\big(\mathrm{d}U_a^k - \sum_{c=1}^{n+n'+1} U_c^k \omega_a^c \big),
\end{aligned}$$

donde obtemos,

$$\mathrm{d}U_a^k - \sum_{c=1}^{n+n'+1} U_c^k \omega_a^c + \sum_{c=1}^{n+n'+1} U_c^k \hat{\lambda}_a^c = 0$$

e, calculando

$$
\begin{aligned}
&\sum_{c=1}^{n+n'+1} U_c^{n'+1}\hat{\lambda}_a^c \\
&= \sum_{c=1}^{n+n'+1} U_c^{n'+1}\Big(\sum_{b=1}^{n+n'+1}\Big(\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n'}(-U_c^l u_{ab}^l + U_b^l u_{ca}^l + U_a^l u_{cb}^l) - U_a^{n'+1}u_{cb}^{n'+1} \\
&+U_c^{n'+1}u_{ab}^{n'+1}\Big)\omega^b + \sum_{b=1}^{n+n'+1}\sum_{l=1}^{n'}(2U_c^l U_b^l U_a^{n'+1} + U_a^l U_c^l U_b^{n'+1})\omega^b\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{b,c=1}^{n+n'+1}\sum_{l=1}^{n'} U_c^{n'+1}U_c^l u_{ab}^l\omega^b + \frac{1}{2}\sum_{b,c=1}^{n+n'+1}\sum_{l=1}^{n'} U_c^{n'+1}U_b^l u_{ca}^l\omega^b \\
&+\frac{1}{2}\sum_{b,c=1}^{n+n'+1}\sum_{l=1}^{n'} U_c^{n'+1}U_a^l u_{cb}^l\omega^b - U_a^{n'+1}\sum_{b,c=1}^{n+n'+1} U_c^{n'+1}u_{cb}^{n'+1}\omega^b \\
&+\sum_{b,c=1}^{n+n'+1} U_c^{n'+1}U_c^{n'+1}u_{ab}^{n'+1}\omega^b + 2\sum_{b,c=1}^{n+n'+1}\sum_{l=1}^{n'} U_c^{n'+1}U_c^l U_b^l U_a^{n'+1}\omega^b \\
&+\sum_{b,c=1}^{n+n'+1}\sum_{l=1}^{n'} U_c^{n'+1}U_a^l U_c^l U_b^{n'+1}\omega^b \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{b=1}^{n+n'+1} u_{ab}^{n'+1}\omega^b + \frac{1}{2}\sum_{b,c=1}^{n+n'+1}\sum_{l=1}^{n'} U_c^{n'+1}U_b^l\Big(\sum_{s,t=1}^{n} A_c^s A_a^t \sigma_{st}^{n+l} \\
&-2U_c^l U_a^{n'+1}\Big)\omega^b + \frac{1}{2}\sum_{b,c=1}^{n+n'+1}\sum_{l=1}^{n'} U_c^{n'+1}U_a^l\Big(\sum_{s,t=1}^{n} A_c^s A_b^t \sigma_{st}^{n+l} - 2U_c^l U_b^{n'+1}\Big)\omega^b \\
&-U_a^{n'+1}\sum_{b,c=1}^{n+n'+1} U_c^{n'+1}\Big(\delta_{cb} - U_c^{n'+1}U_b^{n'+1} + \sum_{l=1}^{n'} U_c^l U_b^l\Big)\omega^b + \sum_{b=1}^{n+n'+1} u_{ab}^{n'+1}\omega^b \\
&+2U_a^{n'+1}\sum_{b=1}^{n+n'+1} U_b^{n'+1}\omega^b + U_a^{n'+1}\sum_{b=1}^{n+n'+1} U_b^{n'+1}\omega^b \\
&= \frac{1}{2}\sum_{b=1}^{n+n'+1} u_{ab}^{n'+1}\omega^b - U_a^{n'+1}\sum_{b=1}^{n+n'+1} U_b^{n'+1}\omega^b - U_a^{n'+1}\sum_{b=1}^{n+n'+1} U_b^{n'+1}\omega^b \\
&-U_a^{n'+1}\sum_{b=1}^{n+n'+1} U_b^{n'+1}\omega^b + U_a^{n'+1}\sum_{b=1}^{n+n'+1} U_b^{n'+1}\omega^b - U_a^{n'+1}\sum_{b=1}^{n+n'+1} U_b^{n'+1}\omega^b \\
&+3U_a^{n'+1}\sum_{b=1}^{n+n'+1} U_b^{n'+1}\omega^b = \frac{1}{2}\sum_{b=1}^{n+n'+1} u_{ba}^{n'+1}\omega^b = -\big(\mathrm{d}U_a^k - \sum_{c=1}^{n+n'+1} U_c^k\omega_a^c\big),
\end{aligned}
$$

obtemos também,

$$
\mathrm{d}U_a^{n'+1} - \sum_{c=1}^{n+n'+1} U_c^{n'+1}\omega_a^c + \sum_{c=1}^{n+n'+1} U_a^{n'+1}\lambda_a^c = 0.
$$

A existência de uma aplicação satisfazendo (3.42) segue, portanto, diretamente de uma versão adequada da Proposição 5 no Apêndice 2.4. Isto encerra a prova. □

Dada uma aplicação admissível $A : M' \to \mathrm{SO}_{n+n'+1}$ resolvendo (3.41), definimos um referencial ortonormal $\{e_a\}_{a=1}^{n+n'+1}$ em $\mathcal{S}$ ao longo de M' a partir do referencial $\hat{E}_a$, isto é, satisfazendo (3.29) e (3.30). Os conjuntos correspondentes de 1-formas duais estão relacionados por

$$\hat{\theta}^k = A^k_a \omega^a. \tag{3.46}$$

Segue-se de (3.18) e (3.19) que a expressão local para J_k no referencial ortonormal $\{e_a\}_{a=1}^{n+n'+1}$ é

$$u^k_{ab} = \langle \hat{J}_k e_a, e_b \rangle = A^l_a A^r_b \sigma^{n+k}_{lr} - 2U^k_a U^{n'+1}_b, \;\; k = 1, \ldots, n'$$

e

$$u^{n'+1}_{ab} = \langle \hat{J}_{n'+1} e_a, e_b \rangle = \delta_{ab} - U^{n'+1}_a U^{n'+1}_b + \sum_{k=1}^{n'} U^k_a U^k_b.$$

Então, definimos

$$\hat{\theta}^k_l = \frac{1}{2}\tau^k_{lr}\hat{\theta}^r = \frac{1}{2}\tau^k_{lr} A^r_a \omega^a \tag{3.47}$$

onde $\tau^k_{lr} = \sigma^k_{rl} + \sigma^l_{kr} + \sigma^r_{kl}$.

Em virtude desses fatos, podemos reobter a Proposição 6 no atual contexto.

Proposição 8. *O referencial ortonormal admissível obtido acima como solução da equação (3.41) satisfaz*

$$\hat{\lambda} = A^{-1}\hat{\theta}A, \tag{3.48}$$

onde $\hat{\theta} = (\hat{\theta}^k_l)_{k,l=1}^{n+n'+1}$ *é definida em (3.47).*

Prova. É suficiente imitar a prova da Proposição 6 na Seção 3.1.1. □

Finalmente, definimos as seguintes 2-formas

$$\hat{\Theta}^k_l = \frac{1}{4}\big(\tau^k_{lr}\tau^r_{pq} + \tau^k_{rp}\tau^r_{lq}\big)\hat{\theta}^p \wedge \hat{\theta}^q = \frac{1}{4}\big(\tau^k_{lr}\tau^r_{pq} + \tau^k_{rp}\tau^r_{lq}\big) A^p_a A^q_b \omega^a \wedge \omega^b. \tag{3.49}$$

Então, podemos provar o seguinte resultado.

Proposição 9. *O referencial admissível definido acima como solução da equação (3.41) satisfaz*

$$-\hat{Q} = A^{-1}\hat{\Theta}A, \tag{3.50}$$

onde $\hat{\Theta} = (\hat{\Theta}^k_l)_{k,l=1}^{n+n'+1}$ *é definida em (3.49).*

Prova. Temos

$$A^{-1}\mathrm{d}A = \omega - \hat{\lambda} \tag{3.51}$$

e

$$\mathrm{d}\hat{\lambda} - \hat{\lambda}\wedge\hat{\lambda} + \omega\wedge\hat{\lambda} + \hat{\lambda}\wedge\omega = -\hat{Q} \tag{3.52}$$

e, como já foi provado,

$$\hat{\lambda} = A^{-1}\hat{\theta}A. \tag{3.53}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\hat{\lambda} &= \mathrm{d}A^{-1}\wedge\hat{\theta}A + A^{-1}\mathrm{d}\hat{\theta}A - A^{-1}\hat{\theta}\wedge\mathrm{d}A \\
&= -A^{-1}\mathrm{d}A\wedge A^{-1}\hat{\theta}A + A^{-1}\mathrm{d}\hat{\theta}A - A^{-1}\hat{\theta}A\wedge A^{-1}\mathrm{d}A \\
&= -(\omega-\hat{\lambda})\wedge\hat{\lambda} + A^{-1}\mathrm{d}\hat{\theta}A - \hat{\lambda}\wedge(\omega-\hat{\lambda}) \\
&= 2\hat{\lambda}\wedge\hat{\lambda} - \omega\wedge\hat{\lambda} - \hat{\lambda}\wedge\omega + A^{-1}\mathrm{d}\hat{\theta}A.
\end{aligned}$$

Entretanto,

$$\begin{aligned}
-\hat{Q} &= \mathrm{d}\hat{\lambda} - \hat{\lambda}\wedge\hat{\lambda} + \omega\wedge\hat{\lambda} + \hat{\lambda}\wedge\omega = \hat{\lambda}\wedge\hat{\lambda} + A^{-1}\mathrm{d}\hat{\theta}A \\
&= A^{-1}\hat{\theta}A\wedge A^{-1}\hat{\theta}A + A^{-1}\mathrm{d}\hat{\theta}A \\
&= A^{-1}\big(\mathrm{d}\hat{\theta} + \hat{\theta}\wedge\hat{\theta}\big)A.
\end{aligned}$$

Deste modo, calculando diretamente, tendo em vista as definições, a primeira equação de estrutura (3.33) e a equação (3.41) na forma $\mathrm{d}A = A\omega - A\lambda$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\hat{\theta}^k_l &= \frac{1}{2}\tau^k_{lr}(\mathrm{d}A^r_a\wedge\omega^a + A^r_a\mathrm{d}\omega^a) = \frac{1}{2}\tau^k_{lr}(\mathrm{d}A^r_b\wedge\omega^b - A^r_a\omega^a_b\wedge\omega^b) \\
&= \frac{1}{2}\tau^k_{lr}(\mathrm{d}A^r_b - A^r_a\omega^a_b)\wedge\omega^b \\
&= -\frac{1}{2}\tau^k_{lr}(A\lambda)^r_b\wedge\omega^b.
\end{aligned}$$

Todavia, $A\lambda = AA^{-1}\hat{\theta}A = \hat{\theta}A$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\hat{\theta}^k_l &= -\frac{1}{2}\tau^k_{lr}(\hat{\theta}A)^r_b\wedge\omega^b = -\frac{1}{2}\tau^k_{lr}\hat{\theta}^r_p\wedge A^p_b\omega^b = -\frac{1}{2}\tau^k_{lr}\hat{\theta}^r_p\wedge\hat{\theta}^p \\
&= -\frac{1}{4}\tau^k_{lr}\tau^r_{pq}\hat{\theta}^q\wedge\hat{\theta}^p
\end{aligned}$$

e

$$\hat{\theta}^k_r\wedge\hat{\theta}^r_l = \frac{1}{4}\tau^k_{rp}\tau^r_{lq}\hat{\theta}^p\wedge\hat{\theta}^q.$$

Portanto, concluímos que

$$\mathrm{d}\hat{\theta} + \hat{\theta} \wedge \hat{\theta} = \hat{\Theta} \tag{3.54}$$

e deduzimos, como afirmado, que

$$-\hat{Q} = \mathrm{d}\hat{\lambda} - \hat{\lambda} \wedge \hat{\lambda} + \omega \wedge \hat{\lambda} + \hat{\lambda} \wedge \omega = A^{-1}\hat{\Theta}A.$$

Isto completa a prova da proposição. □

3.3 Existência de Imersões Isométricas em Grupos de Lie Solúveis

Vamos escolher números naturais tais que $n + n' + 1 = m + m'$. Estamos, deste modo, em condição de enunciar e demonstrar o principal resultado desse capítulo.

Teorema 2. *Seja M^m uma variedade Riemanniana orientada, simplesmente conexa e seja $\mathcal{E}$ um fibrado vetorial Riemanniano real com posto m' de modo que $\mathcal{S} = TM \oplus \mathcal{E}$ é um fibrado vetorial trivial. Fixamos um referencial ortonormal global $\{\hat{E}_k\}_{k=1}^{n+n'+1}$ em $\mathcal{S}$. Sejam $\hat{\nabla}$ e $\hat{R}$, nesta ordem, a conexão compatível e o tensor curvatura de $\mathcal{S}$ e $\nabla, \nabla^{\mathcal{E}}$ as conexões compatíveis induzidas em TM e $\mathcal{E}$, respectivamente. Definimos $\hat{J}_k$, $\hat{J}_{n'+1}$, $\hat{L}$ e $\hat{Q}$ como em (3.18), (3.19), (3.24) e (3.25), respectivamente. Supomos que estes campos satisfaçam as equações*

$$\hat{R} = \hat{Q} \tag{3.55}$$

e

$$\hat{\nabla}\hat{E}_{n+k} = -\frac{1}{2}\hat{J}_k, \quad k = 1, \ldots, n', n'+1. \tag{3.56}$$

Então, existem uma imersão isométrica $f : M \to S$ e um isomorfismo $f_*^{\perp} : \mathcal{E} \to TM^{\perp}$, onde $TM^{\perp}$ denota o fibrado normal ao longo de f, de modo que $f_*^{\perp}$ é uma isometria, quando restrito às fibras, e satisfaz

$$f_*\nabla_X^{\mathcal{E}}V = \bar{\nabla}_{f_*X}^{\perp} f_*^{\perp}V, \quad X \in \Gamma(TM),\, V \in \Gamma(\mathcal{E}), \tag{3.57}$$

$$f_*^{\perp}II(X,Y) = \bar{\nabla}_{f_*X}^{\perp} f_*Y, \quad X, Y \in \Gamma(TM), \tag{3.58}$$

onde $\bar{\nabla}^{\perp}$ denota a conexão normal em $TM^{\perp}$. A imersão isométrica é única, a menos de escolhas de um referencial global em $\mathcal{S}$ e movimentos rígidos em S.

Prova. A demonstração segue as mesmas linhas da prova do Teorema 1.

Capítulo 4

Imersões Isométricas no Espaço Hiperbólico Complexo

No capítulo 2 apresentamos e demonstramos um teorema de imersões isométricas em grupos de Lie nilpotentes. Esse teorema, em particular, é verdadeiro para todos os grupos tipo-Heisenberg (v. [24]). Em [14], Benôit Daniel demonstra um teorema de imersões isométricas em variedades homogêneas, o que inclui, em particular, o espaço de Heisenberg 3-dimensional. No artigo mencionado, são apresentadas, de maneira explícita, as equações de Gauss e Codazzi e certas condições adicionais, as quais, em conjunto, facultam a existência de imersões isométricas. A saber, é provado o seguinte resultado.

Teorema (B. Daniel em [14]) *Seja M uma variedade Riemanniana orientada e simplesmente conexa de dimensão 2, $\mathrm{d}s^2$ sua métrica (que também pode ser denotada por $\langle\cdot,\cdot\rangle$), ∇ sua conexão Riemanniana e J a rotação de ângulo $\frac{\pi}{2}$ em TM. Sejam S um campo simétrico de operadores $S_y : T_yM \to T_yM$, T um campo vetorial em M e f uma função suave em M tais que $||T||^2 + f^2 = 1$.*

Sejam $\mathbb{E}$ uma variedade homogênea 3-dimensional com um grupo de isometria 4-dimensional e ξ seu campo vertical. Sejam κ a curvatura da base e τ a curvatura do seu fibrado. Então, existe uma imersão isométrica $f : M \to \mathbb{E}$ tal que o operador de forma com respeito ao campo normal unitário ν associado a f é

$$\mathrm{d}f \circ S \circ \mathrm{d}f^{-1}$$

e tal que

$$\xi = T + f\nu$$

se, e somente se, $(\mathrm{d}s^2, S, T, f)$ *satisfaz as equações de Gauss e Codazzi para* $\mathbb{E}$ *e, para todo campo vetorial* X *em* M*, as seguintes equações são satisfeitas:*

$$\nabla_X T = f(SX - \tau JX), \quad \mathrm{d}f(X) + \langle SX - \tau JX, T\rangle = 0. \tag{4.1}$$

Neste caso, a imersão é única, a menos de isometrias globais de $\mathbb{E}$ *que preservam as orientações de ambas as fibras e a base da fibração.*

Essas últimas equações são, efetivamente, as condições adicionais suficientes e também necessárias para garantir a existência da imersão. As equações de Gauss e Codazzi aparecem explicitamente nesse trabalho pelo simples fato de que o tensor curvatura de $\mathbb{E}$ é dado por

$$\langle \bar{R}(X,Y)Z, W\rangle = (\kappa - 3\tau^2)\langle R_0(X,Y)Z, W\rangle + (\kappa - 4\tau^2)\langle R_1(\xi; X, Y)Z, W\rangle \tag{4.2}$$

onde X, Y, Z, W são campos vetoriais em $\mathbb{E}$ e, por definição,

$$\begin{aligned} R_0(X,Y)Z &= \langle X, Z\rangle Y - \langle Y, Z\rangle X, \\ R_1(\xi; X, Y)Z &= \langle Y, \xi\rangle\langle Z, \xi\rangle X + \langle Y, Z\rangle\langle X, \xi\rangle \xi \\ &- \langle X, Z\rangle\langle Y, \xi\rangle\xi - \langle X, \xi\rangle\langle Z, \xi\rangle Y. \end{aligned}$$

Quando $\kappa = 0$ e $\tau \neq 0$, obtém-se uma versão do Teorema de Bonnet no grupo de Heisenberg Nil_3 que, em particular, é um grupo de Lie nilpotente de dimensão 3.

Entretanto, nesse capítulo apresentamos um teorema de imersões isométricas no espaço hiperbólico complexo como um caso particular do Teorema 2.

Como no caso Nil_3 mencionado acima, listamos explicitamente as equações de Gauss e Codazzi e as condições adicionais pertinentes ao espaço hiperbólico complexo $\mathbb{CH}_2$ em termos de campos distinguidos ξ e A, e tensores J_1 e J_2 a serem definidos e interpretados geometricamente.

4.1 O Espaço Hiperbólico Complexo $\mathbb{CH}_2$

O espaço hiperbólico complexo é o grupo de Lie $\mathbb{CH}_2$, cuja álgebra de Lie $\mathfrak{s}$ é tal que

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{a} = [E_1, E_2] \oplus [E_3] \oplus [E_4],$$

onde $\mathfrak{a} = \mathbb{R}A,\ \mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$ é uma álgebra nilpotente e

$$\{E_1, E_2, E_2, E_4\}$$

é um referencial ortonormal invariante à esquerda. O colchete de Lie satisfaz as relações de Heisenberg

$$[E_1, E_1] = [E_2, E_2] = 0,$$

$$[E_1, E_2] = E_3$$

e é estendido a $\mathfrak{a}$ através das relações

$$[A, V] = \frac{1}{2}V,\ [A, Z] = Z$$

para $V \in \mathfrak{v}$ e $Z \in \mathfrak{z}$. Denotamos

$$\xi := E_3 \ \text{ e } \ A := E_4.$$

4.1.1 Conexão Riemanniana em $\mathbb{CH}_2$

Definimos as constantes de estrutura de $\mathbb{CH}_2$ por

$$[E_k, E_l] = \sum_{r=1}^{4} \sigma_{kl}^r E_r. \tag{4.3}$$

Pelas relações de Heisenberg do colchete de Lie, temos, em particular, que as constantes de estrutura de $\mathbb{CH}_2$ são dadas por

$$\sigma_{ij}^k = \begin{cases} 1; & i = 1,\ j = 2,\ k = 3 \\ -1; & i = 2,\ j = 1,\ k = 3 \\ -\frac{1}{2}; & i = k = 1, 2,\ j = 4 \\ \frac{1}{2}; & i = 4,\ j = k = 1, 2 \\ -1; & i = k = 3,\ j = 4 \\ 1; & i = 4,\ j = k = 3 \\ 0; & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Como vimos na Seção 1.2, a conexão de Levi-Cività $\mathbb{CH}_2$ é dada por

$$\bar{\nabla}_A = 0, \quad \bar{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}\langle X, Y\rangle A + \frac{1}{2}[X, Y], \quad \bar{\nabla}_X A = -\frac{1}{2}X,$$
$$\bar{\nabla}_X Z = -\frac{1}{2}\mathrm{ad}_X^* Z, \quad \bar{\nabla}_Z A = -Z, \quad \bar{\nabla}_Z X = -\frac{1}{2}\mathrm{ad}_X^* Z, \quad \bar{\nabla}_Z Z' = -\langle Z, Z'\rangle A$$

para $X, Y \in \mathfrak{v}$ e $Z, Z' \in \mathfrak{z}$.

Usando as expressões para as constantes de estrutura e a conexão acima, concluímos que os símbolos de Christoffel de $\mathbb{CH}_2$ são dados por

$$
\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{11}^k &= \langle \bar{\nabla}_{E_1} E_1, E_k \rangle = \langle \frac{1}{2}\langle E_1, E_1\rangle A + \frac{1}{2}[E_1, E_1], E_k\rangle = \begin{cases} \frac{1}{2}; & k = 4 \\ 0; & k \neq 4 \end{cases} \\
\bar{\Gamma}_{12}^k &= \langle \bar{\nabla}_{E_1} E_2, E_k \rangle = \langle \frac{1}{2}\langle E_1, E_2\rangle A + \frac{1}{2}[E_1, E_2], E_k\rangle = \begin{cases} \frac{1}{2}; & k = 3 \\ 0; & k \neq 3 \end{cases} \\
\bar{\Gamma}_{13}^k &= \langle \bar{\nabla}_{E_1} E_3, E_k \rangle = \langle -\frac{1}{2}\mathrm{ad}^*_{E_1}\xi, E_k\rangle = -\frac{1}{2}\langle \xi, [E_1, E_k]\rangle = \begin{cases} -\frac{1}{2}; & k = 2 \\ 0; & k \neq 2 \end{cases} \\
\bar{\Gamma}_{14}^k &= \langle \bar{\nabla}_{E_1} A, E_k \rangle = \langle -\frac{1}{2}E_1, E_k\rangle = \begin{cases} -\frac{1}{2}; & k = 1 \\ 0; & k \neq 1 \end{cases} \\
\bar{\Gamma}_{21}^k &= \langle \bar{\nabla}_{E_2} E_1, E_k \rangle = \langle \frac{1}{2}\langle E_2, E_1\rangle A + \frac{1}{2}[E_2, E_1], E_k\rangle = \begin{cases} -\frac{1}{2}; & k = 3 \\ 0; & k \neq 3 \end{cases} \\
\bar{\Gamma}_{22}^k &= \langle \bar{\nabla}_{E_2} E_2, E_k \rangle = \langle \frac{1}{2}\langle E_2, E_2\rangle A + \frac{1}{2}[E_2, E_2], E_k\rangle = \begin{cases} \frac{1}{2}; & k = 4 \\ 0; & k \neq 4 \end{cases} \\
\bar{\Gamma}_{23}^k &= \langle \bar{\nabla}_{E_2} E_3, E_k \rangle = \langle -\frac{1}{2}\mathrm{ad}^*_{E_2}\xi, E_k\rangle = -\frac{1}{2}\langle \xi, [E_2, E_k]\rangle = \begin{cases} \frac{1}{2}; & k = 1 \\ 0; & k \neq 1 \end{cases} \\
\bar{\Gamma}_{24}^k &= \langle \bar{\nabla}_{E_2} A, E_k \rangle = \langle -\frac{1}{2}E_2, E_k\rangle = \begin{cases} -\frac{1}{2}; & k = 2 \\ 0; & k \neq 2 \end{cases} \\
\bar{\Gamma}_{31}^k &= \langle \bar{\nabla}_{\xi} E_1, E_k \rangle = \langle -\frac{1}{2}\mathrm{ad}^*_{E_1}\xi, E_k\rangle = -\frac{1}{2}\langle \xi, [E_1, E_k]\rangle = \begin{cases} -\frac{1}{2}; & k = 2 \\ 0; & k \neq 2 \end{cases} \\
\bar{\Gamma}_{32}^k &= \langle \bar{\nabla}_{\xi} E_2, E_k \rangle = \langle -\frac{1}{2}\mathrm{ad}^*_{E_2}\xi, E_k\rangle = -\frac{1}{2}\langle \xi, [E_2, E_k]\rangle = \begin{cases} \frac{1}{2}; & k = 1 \\ 0; & k \neq 1 \end{cases} \\
\bar{\Gamma}_{33}^k &= \langle \bar{\nabla}_{\xi} \xi, E_k \rangle = \langle -\langle \xi, \xi\rangle A, E_k\rangle = \begin{cases} -1; & k = 4 \\ 0; & k \neq 4 \end{cases} \\
\bar{\Gamma}_{34}^k &= \langle \bar{\nabla}_{\xi} A, E_k \rangle = \langle -\xi, E_k\rangle = \begin{cases} -1; & k = 3 \\ 0; & k \neq 3 \end{cases} \\
\bar{\Gamma}_{4j}^k &= \langle \bar{\nabla}_{E_4} E_j, E_k \rangle = 0.
\end{aligned}
$$

Com essas expressões para os símbolos de Christoffel, podemos calcular explicitamente o tensor curvatura de $\mathbb{CH}_2$.

4.1.2 A Curvatura de $\mathbb{CH}_2$

Usando os símbolos de Christoffel de $\mathbb{CH}_2$ calculados na seção anterior, vamos determinar uma expressão geral para o tensor curvatura de $\mathbb{CH}_2$ assim como em (4.2). Para isso calculamos, inicialmente, todas as curvaturas seccionais de $\mathbb{CH}_2$.

Lema 2. *As curvaturas seccionais de* $\mathbb{CH}_2$ *são dadas pelas constantes* $1, -1$ e $\frac{1}{4}$.

Prova. Consideramos o referencial invariante à esquerda $\{E_1, E_2, E_3 = \xi, E_4 = A\}$. Para $1 \leq i, j \leq 4$, temos

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{ijij} &= \langle \bar{R}(E_i, E_j)E_i, E_j\rangle = \langle \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_{E_j}E_i - \bar{\nabla}_{E_j}\bar{\nabla}_{E_i}E_i - \bar{\nabla}_{[E_i,E_j]}E_i, E_j\rangle \\
&= \Big\langle \bar{\nabla}_{E_i}\Big(\sum_{k=1}^{4}\bar{\Gamma}_{ji}^{k}E_k\Big) - \bar{\nabla}_{E_j}\Big(\sum_{k=1}^{4}\bar{\Gamma}_{ii}^{k}E_k\Big) - \bar{\nabla}_{[E_i,E_j]}E_i, E_j\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{1212} &= \Big\langle \bar{\nabla}_{E_1}(\bar{\Gamma}_{21}^{3}E_3) - \bar{\nabla}_{E_2}(\bar{\Gamma}_{11}^{4}E_4) - \bar{\nabla}_{[E_1,E_2]}E_1, E_2\Big\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\underbrace{\langle \bar{\nabla}_{E_1}\xi, E_2\rangle}_{=-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\underbrace{\langle \bar{\nabla}_{E_2}A, E_2\rangle}_{=-\frac{1}{2}} - \underbrace{\langle \bar{\nabla}_{\xi}E_1, E_2\rangle}_{=-\frac{1}{2}} = 1, \\
\bar{R}_{1313} &= \Big\langle \bar{\nabla}_{E_1}(\bar{\Gamma}_{31}^{2}E_2) - \bar{\nabla}_{E_3}(\bar{\Gamma}_{11}^{4}E_4) - \bar{\nabla}_{[E_1,E_3]}E_1, E_3\Big\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\underbrace{\langle \bar{\nabla}_{E_1}E_2, E_3\rangle}_{=\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\underbrace{\langle \bar{\nabla}_{E_3}A, E_3\rangle}_{=-1} = \frac{1}{4}, \\
\bar{R}_{1414} &= -\langle \bar{\nabla}_{[E_1,E_4]}E_1, E_4\rangle = \frac{1}{2}\underbrace{\langle \bar{\nabla}_{E_1}E_1, A\rangle}_{=\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}, \\
\bar{R}_{2323} &= \Big\langle \bar{\nabla}_{E_2}(\bar{\Gamma}_{32}^{1}E_1) - \bar{\nabla}_{E_3}(\bar{\Gamma}_{22}^{4}E_4) - \bar{\nabla}_{[E_2,E_3]}E_2, E_3\Big\rangle \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{\langle \bar{\nabla}_{E_2}E_1, E_3\rangle}_{=-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\underbrace{\langle \bar{\nabla}_{E_3}A, E_3\rangle}_{=-1} = \frac{1}{4}, \\
\bar{R}_{2424} &= -\langle \bar{\nabla}_{[E_2,E_4]}E_2, E_4\rangle = \frac{1}{2}\underbrace{\langle \bar{\nabla}_{E_2}E_2, E_4\rangle}_{=\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}, \\
\bar{R}_{3434} &= -\langle \bar{\nabla}_{[E_3,E_4]}E_3, E_4\rangle = \langle \bar{\nabla}_{E_3}E_3, E_4\rangle = -1.
\end{aligned}$$

Isto encerra a prova do lema. $\square$

Podemos agora apresentar o tensor curvatura de $\mathbb{CH}_2$.

Proposição 10. *Para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{CH}_2)$, tem-se*

$$
\begin{aligned}
\bar{R}(X,Y)Z \;=\; & -\frac{1}{2}\big(\langle X,\xi\rangle\langle Y,A\rangle - \langle Y,\xi\rangle\langle X,A\rangle\big)\big(\langle Z,\xi\rangle A + \langle Z,A\rangle\xi\big)\\
& +\frac{1}{4}\langle X,Z\rangle\big(\langle Y,\xi\rangle\xi + \langle Y,A\rangle A\big) - \frac{1}{4}\langle Y,Z\rangle\big(\langle X,\xi\rangle\xi + \langle X,A\rangle A\big)\\
& +\frac{3}{4}\langle Z,\xi\rangle\big(\langle Y,\xi\rangle\, X - \langle X,\xi\rangle Y\big) - \frac{1}{4}\langle Z,A\rangle\big(\langle Y,A\rangle\, X - \langle X,A\rangle Y\big)\\
& +\frac{1}{4}\langle X\times\xi\times A, Z\rangle\big(3\langle Y,\xi\rangle A + \langle Y,A\rangle\xi\big) + \frac{1}{4}\langle Z\times\xi\times A, Y\rangle\big(3\langle X,\xi\rangle A\\
& +\langle X,A\rangle\xi\big) + \frac{1}{4}\langle X\times\xi\times A, Y\rangle\big(3\langle Z,\xi\rangle A + \langle Z,A\rangle\xi\big)\\
& +\frac{1}{4}\big(\langle Y,\xi\rangle\langle Z,A\rangle - \langle Z,\xi\rangle\langle Y,A\rangle\big)X\times\xi\times A\\
& +\frac{1}{4}\big(\langle Z,\xi\rangle\langle X,A\rangle - \langle X,\xi\rangle\langle Z,A\rangle\big)Y\times\xi\times A\\
& +\frac{1}{2}\big(\langle Y,\xi\rangle\langle X,A\rangle - \langle X,\xi\rangle\langle Y,A\rangle + 2\langle X\times\xi\times A, Y\rangle\big)Z\times\xi\times A.
\end{aligned}
$$

onde $\times$ denota o produto vetorial de $\mathbb{CH}_2$, tal que $E_1 \times E_2 \times \xi = A$.

Prova. Todo campo vetorial X de $\mathbb{CH}_2$ se decompõe como $X = \sum_{i=1}^{4} x_i E_i$, onde $x_i = \langle X, E_i\rangle$. Então, por trilinearidade,

$$\bar{R}(X,Y)Z = \bar{R}(x_iE_i, y_jE_j)(z_kE_k) = x_iy_jz_k\bar{R}(E_i,E_j)E_k.$$

Ademais,

$$
\begin{aligned}
\bar{R}(E_i,E_j)E_k &= \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_{E_j}E_k - \bar{\nabla}_{E_j}\bar{\nabla}_{E_i}E_k - \bar{\nabla}_{[E_i,E_j]}E_k\\
&= \bar{\nabla}_{E_i}\big(\bar{\Gamma}^{\mu}_{jk}E_\mu\big) - \bar{\nabla}_{E_j}\big(\bar{\Gamma}^{\mu}_{ik}E_\mu\big) - \bar{\nabla}_{[E_i,E_j]}E_k.
\end{aligned}
$$

Em particular, temos

$$
\begin{aligned}
\bar{R}(E_1,E_2)E_k &= \bar{\nabla}_{E_1}\big(\bar{\Gamma}^{\mu}_{2k}E_\mu\big) - \bar{\nabla}_{E_2}\big(\bar{\Gamma}^{\mu}_{1k}E_\mu\big) - \bar{\nabla}_{[E_1,E_2]}E_k\\
&= \begin{cases}
-\frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{E_1}\xi}_{=-\frac{1}{2}E_2} - \frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{E_2}A}_{=-\frac{1}{2}E_2} - \underbrace{\bar{\nabla}_{\xi}E_1}_{=-\frac{1}{2}E_2} \;=\; E_2, & k=1\\[2ex]
\frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{E_1}A}_{=-\frac{1}{2}E_1} - \frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{E_2}\xi}_{=\frac{1}{2}E_1} - \underbrace{\bar{\nabla}_{\xi}E_2}_{=\frac{1}{2}E_1} \;=\; -E_1, & k=2\\[2ex]
\frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{E_1}E_1}_{=\frac{1}{2}A} + \frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{E_2}E_2}_{=\frac{1}{2}A} - \underbrace{\bar{\nabla}_{\xi}\xi}_{=-A} \;=\; \frac{3}{2}A, & k=3\\[2ex]
-\frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{E_1}E_2}_{=\frac{1}{2}\xi} + \frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{E_2}E_1}_{=-\frac{1}{2}\xi} - \underbrace{\bar{\nabla}_{\xi}A}_{=-\xi} \;=\; \frac{1}{2}\xi, & k=4,
\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\bar{R}(E_1,E_3)E_k &= \bar{\nabla}_{E_1}\big(\bar{\Gamma}^{\mu}_{3k}E_\mu\big) - \bar{\nabla}_{E_3}\big(\bar{\Gamma}^{\mu}_{1k}E_\mu\big) - \bar{\nabla}_{[E_1,E_3]}E_k\\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{E_1}E_2}_{=\frac{1}{2}\xi} - \frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{\xi}A}_{=-\xi} = \frac{1}{4}\xi, & k=1\\ \frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{E_1}E_1}_{=\frac{1}{2}A} - \frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{\xi}\xi}_{=-A} = \frac{3}{4}A, & k=2\\ -\underbrace{\bar{\nabla}_{E_1}A}_{=-\frac{1}{2}E_1} + \frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{\xi}E_2}_{=\frac{1}{2}E_1} = \frac{3}{4}E_1, & k=3\\ -\underbrace{\bar{\nabla}_{E_1}\xi}_{=-\frac{1}{2}E_2} + \frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{\xi}E_1}_{=-\frac{1}{2}E_2} = \frac{1}{4}E_2, & k=4, \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{R}(E_1,E_4)E_k &= \bar{\nabla}_{E_1}\big(\bar{\Gamma}^{\mu}_{4k}E_\mu\big) - \bar{\nabla}_{E_4}\big(\bar{\Gamma}^{\mu}_{1k}E_\mu\big) - \bar{\nabla}_{[E_1,E_4]}E_k\\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{E_1}E_1}_{=\frac{1}{2}A} = \frac{1}{4}A, & k=1\\ \frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{E_1}E_2}_{=\frac{1}{2}\xi} = \frac{1}{4}\xi, & k=2\\ \frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{E_1}\xi}_{=-\frac{1}{2}E_2} = -\frac{1}{4}E_2, & k=3\\ \frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{E_1}A}_{=-\frac{1}{2}E_1} = -\frac{1}{4}E_1, & k=4, \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{R}(E_2,E_3)E_k &= \bar{\nabla}_{E_2}\big(\bar{\Gamma}^{\mu}_{3k}E_\mu\big) - \bar{\nabla}_{E_3}\big(\bar{\Gamma}^{\mu}_{2k}E_\mu\big) - \bar{\nabla}_{[E_2,E_3]}E_k\\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{E_2}E_2}_{=\frac{1}{2}A} + \frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{\xi}\xi}_{=-A} = -\frac{3}{4}A, & k=1\\ \frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{E_2}E_1}_{=-\frac{1}{2}\xi} - \frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{\xi}A}_{=-\xi} = \frac{1}{4}\xi, & k=2\\ -\underbrace{\bar{\nabla}_{E_2}A}_{=-\frac{1}{2}E_2} - \frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{\xi}E_1}_{=-\frac{1}{2}E_2} = \frac{3}{4}E_2, & k=3\\ -\underbrace{\bar{\nabla}_{E_2}\xi}_{=\frac{1}{2}E_1} + \frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{\xi}E_2}_{=\frac{1}{2}E_1} = -\frac{1}{4}E_1, & k=4, \end{cases}\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{rcl}
\bar{R}(E_2, E_4)E_k & = & \bar{\nabla}_{E_2}\big(\bar{\Gamma}^{\mu}_{4k}E_{\mu}\big) - \bar{\nabla}_{E_4}\big(\bar{\Gamma}^{\mu}_{2k}E_{\mu}\big) - \bar{\nabla}_{[E_2,E_4]}E_k \\
& = & \left\{
\begin{array}{rcll}
\frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{E_2}E_1}_{=-\frac{1}{2}\xi} & = & -\frac{1}{4}\xi, & k=1 \\
\frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{E_2}E_2}_{=\frac{1}{2}A} & = & \frac{1}{4}A, & k=2 \\
\frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{E_2}\xi}_{=\frac{1}{2}E_1} & = & \frac{1}{4}E_1, & k=3 \\
\frac{1}{2}\underbrace{\bar{\nabla}_{E_2}A}_{=-\frac{1}{2}E_2} & = & -\frac{1}{4}E_2, & k=4
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

e

$$
\begin{array}{rcl}
\bar{R}(E_3, E_4)E_k & = & \bar{\nabla}_{E_3}\big(\bar{\Gamma}^{\mu}_{4k}E_{\mu}\big) - \bar{\nabla}_{E_4}\big(\bar{\Gamma}^{\mu}_{3k}E_{\mu}\big) - \bar{\nabla}_{[E_3,E_4]}E_k \\
& = & \left\{
\begin{array}{rcll}
\bar{\nabla}_{\xi}E_1 & = & -\frac{1}{2}E_2, & k=1 \\
\bar{\nabla}_{\xi}E_2 & = & \frac{1}{2}E_1, & k=2 \\
\bar{\nabla}_{\xi}\xi & = & -A, & k=3 \\
\bar{\nabla}_{\xi}A & = & -\xi, & k=4.
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

Usando estas expressões, obtemos

$$
\begin{aligned}
\bar{R}(X,Y)Z &= \sum_{i,j,k=1}^{4} x_i y_j z_k \bar{R}(E_i,E_j)E_k \\
&= \sum_{1\leq i<j\leq 4}\sum_{k=1}^{4} x_i y_j z_k \bar{R}(E_i,E_j)E_k + \sum_{1\leq j<i\leq 4}\sum_{k=1}^{4} x_i y_j z_k \bar{R}(E_i,E_j)E_k \\
&= \sum_{1\leq i<j\leq 4}\sum_{k=1}^{4}(x_i y_j - x_j y_i) z_k \bar{R}(E_i,E_j)E_k \\
&= (x_1y_2 - x_2y_1)\sum_{k=1}^{4} z_k \bar{R}(E_1,E_2)E_k + (x_1y_3 - x_3y_1)\sum_{k=1}^{4} z_k \bar{R}(E_1,E_3)E_k \\
&\quad +(x_1y_4 - x_4y_1)\sum_{k=1}^{4} z_k \bar{R}(E_1,E_4)E_k + (x_2y_3 - x_3y_2)\sum_{k=1}^{4} z_k \bar{R}(E_2,E_3)E_k \\
&\quad +(x_2y_4 - x_4y_2)\sum_{k=1}^{4} z_k \bar{R}(E_2,E_4)E_k + (x_3y_4 - x_4y_3)\sum_{k=1}^{4} z_k \bar{R}(E_3,E_4)E_k \\
&= (x_1y_2 - x_2y_1)\Big(z_1E_2 - z_2E_1 + \frac{3}{2}z_3A + \frac{1}{2}z_4\xi\Big) \\
&\quad +(x_1y_3 - x_3y_1)\Big(\frac{1}{4}z_1\xi + \frac{3}{4}z_2A + \frac{3}{4}z_3E_1 + \frac{1}{4}z_4E_2\Big) \\
&\quad +(x_1y_4 - x_4y_1)\Big(\frac{1}{4}z_1A + \frac{1}{4}z_2\xi - \frac{1}{4}z_3E_2 - \frac{1}{4}z_4E_1\Big) \\
&\quad +(x_2y_3 - x_3y_2)\Big(-\frac{3}{4}z_1A + \frac{1}{4}z_2\xi + \frac{3}{4}z_3E_2 - \frac{1}{4}z_4E_1\Big) \\
&\quad +(x_2y_4 - x_4y_2)\Big(-\frac{1}{4}z_1\xi + \frac{1}{4}z_2A + \frac{1}{4}z_3E_1 - \frac{1}{4}z_4E_2\Big) \\
&\quad +(x_3y_4 - x_4y_3)\Big(-\frac{1}{2}z_1E_2 + \frac{1}{2}z_2E_1 - z_3A - z_4\xi\Big)
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
\bar{R}(X,Y)Z &= x_1z_1y_2E_2 - y_2z_2x_1E_1 + \frac{3}{2}x_1y_2z_3A + \frac{1}{2}x_1y_2z_4\xi \\
&\quad -y_1z_1x_2E_2 + x_2z_2y_1E_1 - \frac{3}{2}y_1x_2z_3A - \frac{1}{2}y_1x_2z_4\xi \\
&\quad +\frac{1}{4}x_1z_1y_3\xi + \frac{3}{4}x_1z_2y_3A + \frac{3}{4}y_3z_3x_1E_1 + \frac{1}{4}x_1y_3z_4E_2 \\
&\quad -\frac{1}{4}y_1z_1x_3\xi - \frac{3}{4}y_1z_2x_3A - \frac{3}{4}x_3z_3y_1E_1 - \frac{1}{4}y_1x_3z_4E_2 \\
&\quad +\frac{1}{4}x_1z_1y_4A + \frac{1}{4}x_1z_2y_4\xi - \frac{1}{4}x_1z_3y_4E_2 - \frac{1}{4}y_4z_4x_1E_1 \\
&\quad -\frac{1}{4}y_1z_1x_4A - \frac{1}{4}y_1z_2x_4\xi + \frac{1}{4}y_1z_3x_4E_2 + \frac{1}{4}x_4z_4y_1E_1 \\
&\quad -\frac{3}{4}z_1x_2y_3A + \frac{1}{4}x_2z_2y_3\xi + \frac{3}{4}y_3z_3x_2E_2 - \frac{1}{4}x_2y_3z_4E_1 \\
&\quad +\frac{3}{4}z_1y_2x_3A - \frac{1}{4}y_2z_2x_3\xi - \frac{3}{4}x_3z_3y_2E_2 + \frac{1}{4}y_2x_3z_4E_1 \\
&\quad -\frac{1}{4}z_1x_2y_4\xi + \frac{1}{4}x_2z_2y_4A + \frac{1}{4}x_2z_3y_4E_1 - \frac{1}{4}y_4z_4x_2E_2 \\
&\quad +\frac{1}{4}z_1y_2x_4\xi - \frac{1}{4}y_2z_2x_4A - \frac{1}{4}y_2z_3x_4E_1 + \frac{1}{4}x_4z_4y_2E_2 \\
&\quad -\frac{1}{2}z_1x_3y_4E_2 + \frac{1}{2}z_2x_3y_4E_1 - x_3z_3y_4A - y_4z_4x_3\xi \\
&\quad +\frac{1}{2}z_1y_3x_4E_2 - \frac{1}{2}z_2y_3x_4E_1 + y_3z_3x_4A + x_4z_4y_3\xi
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
\bar{R}(X,Y)Z &= -x_3z_3y_4A - y_4z_4x_3\xi + y_3z_3x_4A + x_4z_4y_3\xi \\
&\quad +\frac{1}{4}(x_1z_1 + x_2z_2)(y_3\xi + y_4A) - \frac{1}{4}(y_1z_1 + y_2z_2)(x_3\xi + x_4A) \\
&\quad +\frac{3}{4}y_3z_3(x_1E_1 + x_2E_2) - \frac{3}{4}x_3z_3(y_1E_1 + y_2E_2) + \frac{1}{4}(z_1y_2 - z_2y_1)x_4\xi \\
&\quad -\frac{1}{4}y_4z_4(x_1E_1 + x_2E_2) + \frac{1}{4}x_4z_4(y_1E_1 + y_2E_2) + \frac{3}{4}(x_1z_2 - z_1x_2)y_3A \\
&\quad -\frac{3}{4}(y_1z_2 - z_1y_2)x_3A + \frac{1}{4}(x_1z_2 - z_1x_2)y_4\xi + \frac{1}{2}(x_1y_2 - y_1x_2)z_4\xi \\
&\quad -\frac{1}{4}z_3y_4(x_1E_2 - x_2E_1) + \frac{1}{4}z_3x_4(y_1E_2 - y_2E_1) + \frac{1}{2}x_3y_4(z_2E_1 - z_1E_2) \\
&\quad +\frac{1}{2}y_3x_4(z_1E_2 - z_2E_1) + \frac{1}{4}y_3z_4(x_1E_2 - x_2E_1) - \frac{1}{4}x_3z_4(y_1E_2 - y_2E_1) \\
&\quad +\frac{3}{2}(x_1y_2 - y_1x_2)z_3A + y_1x_2(z_2E_1 - z_1E_2) + x_1y_2(z_1E_2 - z_2E_1).
\end{aligned}
$$

ou, ainda,

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X,Y)Z &= -\langle X,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle\langle Y,A\rangle A - \langle Y,A\rangle\langle Z,A\rangle\langle X,\xi\rangle\xi \\
&\quad +\langle Y,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle\langle X,A\rangle A + \langle X,A\rangle\langle Z,A\rangle\langle Y,\xi\rangle\xi \\
&\quad +\frac{1}{4}(\langle X,Z\rangle - \langle X,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle - \langle X,A\rangle\langle Z,A\rangle)(\langle Y,\xi\rangle\xi + \langle Y,A\rangle A) \\
&\quad -\frac{1}{4}(\langle Y,Z\rangle - \langle Y,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle - \langle Y,A\rangle\langle Z,A\rangle)(\langle X,\xi\rangle\xi + \langle X,A\rangle A) \\
&\quad +\frac{3}{4}\langle Y,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle(X - \langle X,\xi\rangle\xi - \langle X,A\rangle A) \\
&\quad -\frac{3}{4}\langle X,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle(Y - \langle Y,\xi\rangle\xi - \langle Y,A\rangle A) \\
&\quad -\frac{1}{4}\langle Y,A\rangle\langle Z,A\rangle(X - \langle X,\xi\rangle\xi - \langle X,A\rangle A) \\
&\quad +\frac{1}{4}\langle X,A\rangle\langle Z,A\rangle(Y - \langle Y,\xi\rangle\xi - \langle Y,A\rangle A) \\
&\quad +\frac{3}{4}\langle X\times\xi\times A,Z\rangle\langle Y,\xi\rangle A - \frac{3}{4}\langle Y\times\xi\times A,Z\rangle\langle X,\xi\rangle A \\
&\quad +\frac{1}{4}\langle X\times\xi\times A,Z\rangle\langle Y,A\rangle\xi + \frac{1}{2}\langle X\times\xi\times A,Y\rangle\langle Z,A\rangle\xi \\
&\quad -\frac{1}{4}\langle Z,\xi\rangle\langle Y,A\rangle X\times\xi\times A + \frac{1}{4}\langle Z,\xi\rangle\langle X,A\rangle Y\times\xi\times A \\
&\quad -\frac{1}{2}\langle X,\xi\rangle\langle Y,A\rangle Z\times\xi\times A + \frac{1}{2}\langle Y,\xi\rangle\langle X,A\rangle Z\times\xi\times A \\
&\quad +\frac{1}{4}\langle Y,\xi\rangle\langle Z,A\rangle X\times\xi\times A - \frac{1}{4}\langle X,\xi\rangle\langle Z,A\rangle Y\times\xi\times A \\
&\quad +\frac{3}{2}\langle X\times\xi\times A,Y\rangle\langle Z,\xi\rangle A + \frac{1}{4}\langle Z\times\xi\times A,Y\rangle\langle X,A\rangle\xi \\
&\quad +\langle X\times\xi\times A,Y\rangle Z\times\xi\times A
\end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$
\begin{aligned}
\bar{R}(X,Y)Z &= -\langle X,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle\langle Y,A\rangle A - \langle Y,A\rangle\langle Z,A\rangle\langle X,\xi\rangle\xi \\
&+\langle Y,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle\langle X,A\rangle A + \langle X,A\rangle\langle Z,A\rangle\langle Y,\xi\rangle\xi \\
&+\frac{1}{4}\langle X,Z\rangle\langle Y,\xi\rangle\xi - \frac{1}{4}\langle X,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle\langle Y,\xi\rangle\xi - \frac{1}{4}\langle X,A\rangle\langle Z,A\rangle\langle Y,\xi\rangle\xi \\
&+\frac{1}{4}\langle X,Z\rangle\langle Y,A\rangle A - \frac{1}{4}\langle X,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle\langle Y,A\rangle A - \frac{1}{4}\langle X,A\rangle\langle Z,A\rangle\langle Y,A\rangle A \\
&-\frac{1}{4}\langle Y,Z\rangle\langle X,\xi\rangle\xi + \frac{1}{4}\langle Y,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle\langle X,\xi\rangle\xi + \frac{1}{4}\langle Y,A\rangle\langle Z,A\rangle\langle X,\xi\rangle\xi \\
&-\frac{1}{4}\langle Y,Z\rangle\langle X,A\rangle A + \frac{1}{4}\langle Y,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle\langle X,A\rangle A + \frac{1}{4}\langle Y,A\rangle\langle Z,A\rangle\langle X,A\rangle A \\
&+\frac{3}{4}\langle Y,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle X - \frac{3}{4}\langle Y,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle\langle X,\xi\rangle\xi - \frac{3}{4}\langle Y,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle\langle X,A\rangle A \\
&-\frac{3}{4}\langle X,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle Y + \frac{3}{4}\langle X,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle\langle Y,\xi\rangle\xi + \frac{3}{4}\langle X,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle\langle Y,A\rangle A \\
&-\frac{1}{4}\langle Y,A\rangle\langle Z,A\rangle X + \frac{1}{4}\langle Y,A\rangle\langle Z,A\rangle\langle X,\xi\rangle\xi + \frac{1}{4}\langle Y,A\rangle\langle Z,A\rangle\langle X,A\rangle A \\
&+\frac{1}{4}\langle X,A\rangle\langle Z,A\rangle Y - \frac{1}{4}\langle X,A\rangle\langle Z,A\rangle\langle Y,\xi\rangle\xi - \frac{1}{4}\langle X,A\rangle\langle Z,A\rangle\langle Y,A\rangle A \\
&+\frac{3}{4}\langle X\times\xi\times A,Z\rangle\langle Y,\xi\rangle A - \frac{3}{4}\langle Y\times\xi\times A,Z\rangle\langle X,\xi\rangle A \\
&+\frac{1}{4}\langle X\times\xi\times A,Z\rangle\langle Y,A\rangle\xi + \frac{1}{2}\langle X\times\xi\times A,Y\rangle\langle Z,A\rangle\xi \\
&+\frac{3}{2}\langle X\times\xi\times A,Y\rangle\langle Z,\xi\rangle A + \frac{1}{4}\langle Z\times\xi\times A,Y\rangle\langle X,A\rangle\xi \\
&-\frac{1}{4}\langle Z,\xi\rangle\langle Y,A\rangle X\times\xi\times A + \frac{1}{4}\langle Z,\xi\rangle\langle X,A\rangle Y\times\xi\times A \\
&-\frac{1}{2}\langle X,\xi\rangle\langle Y,A\rangle Z\times\xi\times A + \frac{1}{2}\langle Y,\xi\rangle\langle X,A\rangle Z\times\xi\times A \\
&+\frac{1}{4}\langle Y,\xi\rangle\langle Z,A\rangle X\times\xi\times A - \frac{1}{4}\langle X,\xi\rangle\langle Z,A\rangle Y\times\xi\times A \\
&+\langle X\times\xi\times A,Y\rangle Z\times\xi\times A.
\end{aligned}
$$

Finalmente, eliminando alguns termos, obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X,Y)Z \;=\;& -\frac{1}{2}\langle X,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle\langle Y,A\rangle A - \frac{1}{2}\langle Y,A\rangle\langle Z,A\rangle\langle X,\xi\rangle\xi + \frac{1}{2}\langle Y,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle\langle X,A\rangle A \\
& +\frac{1}{2}\langle X,A\rangle\langle Z,A\rangle\langle Y,\xi\rangle\xi + \frac{1}{4}\langle X,Z\rangle\langle Y,\xi\rangle\xi + \frac{1}{4}\langle X,Z\rangle\langle Y,A\rangle A \\
& -\frac{1}{4}\langle Y,Z\rangle\langle X,\xi\rangle\xi - \frac{1}{4}\langle Y,Z\rangle\langle X,A\rangle A + \frac{3}{4}\langle Y,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle X - \frac{3}{4}\langle X,\xi\rangle\langle Z,\xi\rangle Y \\
& -\frac{1}{4}\langle Y,A\rangle\langle Z,A\rangle X + \frac{1}{4}\langle X,A\rangle\langle Z,A\rangle Y + \frac{3}{4}\langle X\times\xi\times A,Z\rangle\langle Y,\xi\rangle A \\
& -\frac{3}{4}\langle Y\times\xi\times A,Z\rangle\langle X,\xi\rangle A + \frac{1}{4}\langle X\times\xi\times A,Z\rangle\langle Y,A\rangle\xi \\
& +\frac{1}{2}\langle X\times\xi\times A,Y\rangle\langle Z,A\rangle\xi + \frac{3}{2}\langle X\times\xi\times A,Y\rangle\langle Z,\xi\rangle A \\
& +\frac{1}{4}\langle Z\times\xi\times A,Y\rangle\langle X,A\rangle\xi - \frac{1}{4}\langle Z,\xi\rangle\langle Y,A\rangle X\times\xi\times A \\
& +\frac{1}{4}\langle Z,\xi\rangle\langle X,A\rangle Y\times\xi\times A - \frac{1}{2}\langle X,\xi\rangle\langle Y,A\rangle Z\times\xi\times A \\
& +\frac{1}{2}\langle Y,\xi\rangle\langle X,A\rangle Z\times\xi\times A + \frac{1}{4}\langle Y,\xi\rangle\langle Z,A\rangle X\times\xi\times A \\
& -\frac{1}{4}\langle X,\xi\rangle\langle Z,A\rangle Y\times\xi\times A + \langle X\times\xi\times A,Y\rangle Z\times\xi\times A
\end{aligned}$$

e, portanto

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X,Y)Z \;=\;& -\frac{1}{2}\big(\langle X,\xi\rangle\langle Y,A\rangle - \langle Y,\xi\rangle\langle X,A\rangle\big)\big(\langle Z,\xi\rangle A + \langle Z,A\rangle\xi\big) \\
& +\frac{1}{4}\langle X,Z\rangle\big(\langle Y,\xi\rangle\xi + \langle Y,A\rangle A\big) - \frac{1}{4}\langle Y,Z\rangle\big(\langle X,\xi\rangle\xi + \langle X,A\rangle A\big) \\
& +\frac{3}{4}\langle Z,\xi\rangle\big(\langle Y,\xi\rangle\, X - \langle X,\xi\rangle Y\big) - \frac{1}{4}\langle Z,A\rangle\big(\langle Y,A\rangle\, X - \langle X,A\rangle Y\big) \\
& +\frac{1}{4}\langle X\times\xi\times A,Z\rangle\big(3\langle Y,\xi\rangle A + \langle Y,A\rangle\xi\big) + \frac{1}{4}\langle Z\times\xi\times A,Y\rangle\big(3\langle X,\xi\rangle A \\
& +\langle X,A\rangle\xi\big) + \frac{1}{4}\langle X\times\xi\times A,Y\rangle\big(3\langle Z,\xi\rangle A + \langle Z,A\rangle\xi\big) \\
& +\frac{1}{4}\big(\langle Y,\xi\rangle\langle Z,A\rangle - \langle Z,\xi\rangle\langle Y,A\rangle\big)X\times\xi\times A \\
& +\frac{1}{4}\big(\langle Z,\xi\rangle\langle X,A\rangle - \langle X,\xi\rangle\langle Z,A\rangle\big)Y\times\xi\times A \\
& +\frac{1}{2}\big(\langle Y,\xi\rangle\langle X,A\rangle - \langle X,\xi\rangle\langle Y,A\rangle + 2\langle X\times\xi\times A,Y\rangle\big)Z\times\xi\times A.
\end{aligned}$$

Com isto, demonstramos a proposição. □

Utilizamos a seguir esta expressão explícita do tensor de curvatura, a fim de obter as equações de Gauss e Codazzi apresentadas na próxima seção.

4.2 As Equações de Compatibilidade em $\mathbb{CH}_2$

Seja $(M^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma hipersuperfície orientável em $\mathbb{CH}_2$, orientada pelo campo normal unitário ν. Seja T_1 a projeção do campo vetorial ξ sobre o fibrado tangente TM. Ademais, podemos considerar a função f_1 definida por:

$$f_1 := \langle \nu, \xi \rangle.$$

É claro que

$$\xi = T_1 + f_1\nu. \tag{4.4}$$

Uma vezque ξ é um campo de vetores unitários, temos

$$||T_1||^2 + f_1^2 = 1.$$

Similarmente, seja T_2 a projeção do campo vetorial A sobre o fibrado tangente TM. Ademais, podemos considerar a função f_2 definida por:

$$f_2 := \langle \nu, A \rangle.$$

É claro que

$$A = T_2 + f_2\nu. \tag{4.5}$$

Dado que A é um campo de vetores unitários, temos

$$||T_2||^2 + f_2^2 = 1.$$

Estamos considerando em $\mathfrak{s}$ o produto vetorial $\times$ tal que

$$E_1 \times E_2 \times \xi = A$$

ou seja, estamos supondo que

$$\det(E_1, E_2, \xi, A) = 1.$$

Deste modo, temos

$$E_1 \times \xi \times A = E_2 \quad \text{e} \quad E_2 \times \xi \times A = -E_1.$$

Interessa-nos, agora, apresentar as condições adicionais para o teorema de imersão isométrica em $\mathbb{CH}_2$. Inicialmente, calculamos o seguinte.

Lema 3. *Para $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos*

$$\bar{\nabla}_X \xi = -\frac{1}{2} X \times \xi \times A - \langle X, \xi \rangle A$$

Prova. Observamos que

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{E_1}\xi &= \sum_{i=1}^{3} \langle \bar{\nabla}_{E_1}\xi, E_i\rangle E_i = \sum_{i=1}^{3} \bar{\Gamma}_{13}^{i} E_i = -\frac{1}{2}E_2, \\
\bar{\nabla}_{E_2}\xi &= \sum_{i=1}^{3} \langle \bar{\nabla}_{E_2}\xi, E_i\rangle E_i = \sum_{i=1}^{3} \bar{\Gamma}_{23}^{i} E_i = \frac{1}{2}E_1, \\
\bar{\nabla}_{\xi}\xi &= \sum_{i=1}^{3} \langle \bar{\nabla}_{\xi}\xi, E_i\rangle E_i = \sum_{i=1}^{3} \bar{\Gamma}_{33}^{i} E_i = -A \ \text{ e} \\
\bar{\nabla}_{A}\xi &= \sum_{i=1}^{3} \langle \bar{\nabla}_{A}\xi, E_i\rangle E_i = \sum_{i=1}^{3} \bar{\Gamma}_{43}^{i} E_i = 0.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X \xi &= \langle X, E_1\rangle \bar{\nabla}_{E_1}\xi + \langle X, E_2\rangle \bar{\nabla}_{E_2}\xi + \langle X, \xi\rangle \bar{\nabla}_{\xi}\xi + \langle X, A\rangle \bar{\nabla}_{A}\xi \\
&= -\frac{1}{2}\langle X, E_1\rangle E_2 + \frac{1}{2}\langle X, E_2\rangle E_1 - \langle X, \xi\rangle A \\
&= -\frac{1}{2}\langle X, E_1\rangle E_1 \times \xi \times A - \frac{1}{2}\langle X, E_2\rangle E_2 \times \xi \times A - \langle X, \xi\rangle A \\
&= -\frac{1}{2} X \times \xi \times A - \langle X, \xi\rangle A,
\end{aligned}$$

o que encerra a prova. □

Estamos agora aptos a apresentar as condições adicionais.

Proposição 11. *Para $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos*

$$\begin{aligned}
\nabla_X T_1 &= f_1 SX - \frac{1}{2} f_2 J_1 X + \frac{1}{2} f_1 J_2 X - \langle X, T_1\rangle T_2, \ \textit{e} &\quad (4.6)\\
\mathrm{d}f_1(X) &= -\langle SX, T_1\rangle - \frac{1}{2}\langle X, T_1\rangle - \frac{1}{2}\langle X \times T_1 \times T_2, \nu\rangle &\quad (4.7)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\nabla_X T_2 &= f_2 SX - \frac{1}{2} X - \frac{1}{2}\langle X, T_1\rangle T_1 + \frac{1}{2}\langle X, T_2\rangle T_2, \ \textit{e} &\quad (4.8)\\
\mathrm{d}f_2(X) &= -\langle SX, T_2\rangle - \frac{1}{2}\langle X, T_1\rangle f_1 + \frac{1}{2}\langle X, T_2\rangle f_2, &\quad (4.9)
\end{aligned}$$

onde S é o operador de forma de M e

$$J_i X := X \times T_i \times \nu, \ \textit{para } i = 1, 2. \quad (4.10)$$

Prova. Por um lado, temos

$$
\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X \xi &= \bar{\nabla}_X (T_1 + f_1 \nu) \\
&= \bar{\nabla}_X T_1 + \mathrm{d} f_1(X)\nu + f_1 \bar{\nabla}_X \nu \\
&= \nabla_X T_1 - f_1 S X + \big(\langle SX, T_1\rangle + \mathrm{d} f_1(X)\big)\nu.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, deduzimos que

$$
\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X \xi &= -\frac{1}{2} X \times \xi \times A - \langle X, \xi\rangle A \\
&= -\frac{1}{2} X \times (T_1 + f_1\nu) \times (T_2 + f_2 \nu) - \langle X, T_1 + f_1 \nu\rangle (T_2 + f_2\nu) \\
&= -\frac{1}{2} X \times T_1 \times T_2 - \frac{1}{2} f_2 X \times T_1 \times \nu - \frac{1}{2} f_1 X \times \nu \times T_2 - \langle X, T_1\rangle T_2 - f_2 \langle X, T_1\rangle \nu \\
&= -\frac{1}{2} f_2 J_1 X + \frac{1}{2} f_1 J_2 X - \langle X, T_1\rangle T_2 - \big(\frac{1}{2}\langle X \times T_1 \times T_2, \nu\rangle - f_2 \langle X, T_1\rangle\big)\nu.
\end{aligned}
$$

Assim, concluímos a primeira parte igualando as partes tangentes e normais destas expressões. Para concluir a segunda parte, ressaltamos que, por um lado,

$$
\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X A &= \bar{\nabla}_A X + [X, A] = [\widetilde{X} + \langle X, T_1\rangle \xi + \langle X, T_2\rangle A, A] \\
&= [\tilde{X}, A] + \langle X, T_1\rangle [\xi, A] - A\langle X, T_1\rangle \xi = -\frac{1}{2}\tilde{X} - \langle X, T_1\rangle \xi \\
&= -\frac{1}{2}\big(X - \langle X, T_1\rangle \xi - \langle X, T_2\rangle A\big) - \langle X, T_1\rangle \xi \\
&= -\frac{1}{2} X - \frac{1}{2}\langle X, T_1\rangle \xi + \frac{1}{2}\langle X, T_2\rangle A \\
&= -\frac{1}{2} X - \frac{1}{2}\langle X, T_1\rangle (T_1 + f_1\nu) + \frac{1}{2}\langle X, T_2\rangle (T_2 + f_2 \nu) \\
&= -\frac{1}{2} X - \frac{1}{2}\langle X, T_1\rangle T_1 + \frac{1}{2}\langle X, T_2\rangle T_2 + \Big(-\frac{1}{2}\langle X, T_1\rangle f_1 + \frac{1}{2}\langle X, T_2\rangle f_2\Big)\nu
\end{aligned}
$$

onde $\widetilde{X} := \langle X, E_1\rangle E_1 + \langle X, E_2\rangle E_2$. Por outro lado, obervamos que

$$
\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X A &= \bar{\nabla}_X (T_2 + f_2\nu) = \bar{\nabla}_X T_2 + f_2 \bar{\nabla}_X \nu + \mathrm{d} f_2(X)\nu \\
&= \nabla_X T_2 - f_2 S X + \big(\langle SX, T_2\rangle + \mathrm{d} f_2(X)\big)\nu.
\end{aligned}
$$

Agora, igualando as partes tangentes e normais dessas expressões, concluímos a prova da proposição. $\square$

Vamos agora, efetivamente, apresentar as equações de Gauss e Codazzi para a imersão $M^3 \hookrightarrow \mathbb{CH}_2$.

Proposição 12. *Para $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, temos*

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X,Y)Z,W\rangle &= -\frac{1}{2}\big(\langle X,T_1\rangle\langle Y,T_2\rangle - \langle Y,T_1\rangle\langle X,T_2\rangle\big)\big(\langle Z,T_1\rangle\langle W,T_2\rangle + \langle Z,T_2\rangle\langle W,T_1\rangle\big)\\
&+\frac{1}{4}\langle X,Z\rangle\big(\langle Y,T_1\rangle\langle W,T_1\rangle + \langle Y,T_2\rangle\langle W,T_2\rangle\big)\\
&-\frac{1}{4}\langle Y,Z\rangle\big(\langle X,T_1\rangle\langle W,T_1\rangle + \langle X,T_2\rangle\langle W,T_2\rangle\big)\\
&+\frac{3}{4}\langle Z,T_1\rangle\big(\langle Y,T_1\rangle\ \langle X,W\rangle - \langle X,T_1\rangle\langle Y,W\rangle\big)\\
&-\frac{1}{4}\langle Z,T_2\rangle\big(\langle Y,T_2\rangle\ \langle X,W\rangle - \langle X,T_2\rangle\langle Y,W\rangle\big)\\
&+\frac{1}{4}\big(-f_1\langle J_1X,Z\rangle + f_2\langle J_2X,Z\rangle\big)\big(3\langle Y,T_1\rangle\langle W,T_2\rangle + \langle Y,T_2\rangle\langle W,T_1\rangle\big)\\
&+\frac{1}{4}\big(-f_1\langle J_1Z,Y\rangle + f_2\langle J_2Z,Y\rangle\big)\big(3\langle X,T_1\rangle\langle W,T_2\rangle + \langle X,T_2\rangle\langle W,T_1\rangle\big)\\
&+\frac{1}{4}\big(-f_1\langle J_1X,Y\rangle + f_2\langle J_2X,Y\rangle\big)\big(3\langle Z,T_1\rangle\langle W,T_2\rangle + \langle Z,T_2\rangle\langle W,T_1\rangle\big)\\
&+\frac{1}{4}\big(\langle Y,T_1\rangle\langle Z,T_2\rangle - \langle Z,T_1\rangle\langle Y,T_2\rangle\big)\big(-f_1\langle J_2X,W\rangle + f_2\langle J_1X,W\rangle\big)\\
&+\frac{1}{4}\big(\langle Z,T_1\rangle\langle X,T_2\rangle - \langle X,T_1\rangle\langle Z,T_2\rangle\big)\big(-f_1\langle J_2Y,W\rangle + f_2\langle J_1Y,W\rangle\big)\\
&+\frac{1}{2}\big(\langle Y,T_1\rangle\langle X,T_2\rangle - \langle X,T_1\rangle\langle Y,T_2\rangle\big)\big(-f_1\langle J_2Z,W\rangle + f_2\langle J_1Z,W\rangle\big)\\
&+\big(-f_1\langle J_1X,Y\rangle + f_2\langle J_2X,Y\rangle\big)\big(-f_1\langle J_2Z,W\rangle + f_2\langle J_1Z,W\rangle\big),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X,Y)\nu,Z\rangle &= -\frac{1}{2}\big(\langle X,T_1\rangle\langle Y,T_2\rangle - \langle Y,T_1\rangle\langle X,T_2\rangle\big)\big(f_1\langle Z,T_2\rangle + f_2\langle Z,T_1\rangle\big)\\
&+\frac{3}{4}f_1\big(\langle Y,T_1\rangle\ \langle X,Z\rangle - \langle X,T_1\rangle\langle Y,Z\rangle\big)\\
&-\frac{1}{4}f_2\big(\langle Y,T_2\rangle\ \langle X,Z\rangle - \langle X,T_2\rangle\langle Y,Z\rangle\big)\\
&+\frac{1}{4}\langle X\times T_1\times T_2,\nu\rangle\big(3\langle Y,T_1\rangle\langle Z,T_2\rangle + \langle Y,T_2\rangle\langle Z,T_1\rangle\big)\\
&-\frac{1}{4}\langle Y\times T_1\times T_2,\nu\rangle\big(3\langle X,T_1\rangle\langle Z,T_2\rangle + \langle X,T_2\rangle\langle Z,T_1\rangle\big)\\
&+\frac{1}{4}\big(-f_1\langle J_2X,Y\rangle + f_2\langle J_1X,Y\rangle)\big)\big(3f_1\langle Z,T_2\rangle + f_2\langle Z,T_1\rangle\big)\\
&+\frac{1}{4}\big(f_2\langle Y,T_1\rangle - f_1\langle Y,T_2\rangle\big)\big(-f_1\langle J_2X,Z\rangle + f_2\langle J_1X,Z\rangle\big)\\
&+\frac{1}{4}\big(f_1\langle X,T_2\rangle - f_2\langle X,T_1\rangle\big)\big(-f_1\langle J_2Y,Z\rangle + f_2\langle J_1Y,Z\rangle\big)\\
&-\frac{1}{2}\big(\langle Y,T_1\rangle\langle X,T_2\rangle - \langle X,T_1\rangle\langle Y,T_2\rangle\big)\langle Z\times T_1\times T_2,\nu\rangle\\
&+\big(f_1\langle J_2X,Y\rangle - f_2\langle J_1X,Y\rangle\big)\langle Z\times T_1\times T_2,\nu\rangle.
\end{aligned}$$

Prova. Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos $\langle X, \xi\rangle = \langle X, T_1\rangle$ e $\langle X, A\rangle = \langle X, T_2\rangle$, em virtude das decomposições (4.4) e (4.5). Da Proposição 10, inferimos

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X,Y)Z \;=\; & -\frac{1}{2}\big(\langle X,\xi\rangle\langle Y,A\rangle - \langle Y,\xi\rangle\langle X,A\rangle\big)\big(\langle Z,\xi\rangle A + \langle Z,A\rangle\xi\big)\\
&+\frac{1}{4}\langle X,Z\rangle\big(\langle Y,\xi\rangle\xi + \langle Y,A\rangle A\big) - \frac{1}{4}\langle Y,Z\rangle\big(\langle X,\xi\rangle\xi + \langle X,A\rangle A\big)\\
&+\frac{3}{4}\langle Z,\xi\rangle\big(\langle Y,\xi\rangle\, X - \langle X,\xi\rangle Y\big) - \frac{1}{4}\langle Z,A\rangle\big(\langle Y,A\rangle\, X - \langle X,A\rangle Y\big)\\
&+\frac{1}{4}\langle X\times\xi\times A, Z\rangle\big(3\langle Y,\xi\rangle A + \langle Y,A\rangle\xi\big) + \frac{1}{4}\langle Z\times\xi\times A, Y\rangle\big(3\langle X,\xi\rangle A\\
&+\langle X,A\rangle\xi\big) + \frac{1}{4}\langle X\times\xi\times A, Y\rangle\big(3\langle Z,\xi\rangle A + \langle Z,A\rangle\xi\big)\\
&+\frac{1}{4}\big(\langle Y,\xi\rangle\langle Z,A\rangle - \langle Z,\xi\rangle\langle Y,A\rangle\big)X\times\xi\times A\\
&+\frac{1}{4}\big(\langle Z,\xi\rangle\langle X,A\rangle - \langle X,\xi\rangle\langle Z,A\rangle\big)Y\times\xi\times A\\
&+\frac{1}{2}\big(\langle Y,\xi\rangle\langle X,A\rangle - \langle X,\xi\rangle\langle Y,A\rangle + 2\langle X\times\xi\times A, Y\rangle\big)Z\times\xi\times A.
\end{aligned}$$

Ademais, podemos observar que, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}
X\times\xi\times A &= X\times(T_1 + f_1\nu)\times(T_1 + f_2\nu)\\
&= X\times(T_1 + f_1\nu)\times T_2 + f_2 X\times(T_1 + f_1\nu)\times\nu\\
&= X\times T_1\times T_2 + f_1 X\times\nu\times T_2 + f_2 X\times T_1\times\nu\\
&= \langle X\times T_1\times T_2, \nu\rangle\nu - f_1 J_2 X + f_2 J_1 X.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\langle X\times\xi\times A, Y\rangle = -f_1\langle J_1 X, Y\rangle + f_2\langle J_2 X, Y\rangle,$$

para quaiquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Usando essas expressões, obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X,Y)Z \;=\;& -\frac{1}{2}\big(\langle X,T_1\rangle\langle Y,T_2\rangle - \langle Y,T_1\rangle\langle X,T_2\rangle\big)\big(\langle Z,T_1\rangle A + \langle Z,T_2\rangle\xi\big)\\
&+\frac{1}{4}\langle X,Z\rangle\big(\langle Y,T_1\rangle\xi + \langle Y,T_2\rangle A\big) - \frac{1}{4}\langle Y,Z\rangle\big(\langle X,T_1\rangle\xi + \langle X,T_2\rangle A\big)\\
&+\frac{3}{4}\langle Z,T_1\rangle\big(\langle Y,T_1\rangle\, X - \langle X,T_1\rangle Y\big) - \frac{1}{4}\langle Z,T_2\rangle\big(\langle Y,T_2\rangle\, X - \langle X,T_2\rangle Y\big)\\
&+\frac{1}{4}\big(-f_1\langle J_1X,Z\rangle + f_2\langle J_2X,Z\rangle\big)\big(3\langle Y,T_1\rangle A + \langle Y,T_2\rangle\xi\big)\\
&+\frac{1}{4}\big(-f_1\langle J_1Z,Y\rangle + f_2\langle J_2Z,Y\rangle\big)(3\langle X,T_1\rangle A + \langle X,T_2\rangle\xi\big)\\
&+\frac{1}{4}\big(-f_1\langle J_1X,Y\rangle + f_2\langle J_2X,Y\rangle\big)\big(3\langle Z,T_1\rangle A + \langle Z,T_2\rangle\xi\big)\\
&+\frac{1}{4}\big(\langle Y,T_1\rangle\langle Z,T_2\rangle - \langle Z,T_1\rangle\langle Y,T_2\rangle\big)\big(\langle X\times T_1\times T_2,\nu\rangle\nu - f_1J_2X + f_2J_1X\big)\\
&+\frac{1}{4}\big(\langle Z,T_1\rangle\langle X,T_2\rangle - \langle X,T_1\rangle\langle Z,T_2\rangle\big)\big(\langle Y\times T_1\times T_2,\nu\rangle\nu - f_1J_2Y + f_2J_1Y\big)\\
&+\frac{1}{2}\big(\langle Y,T_1\rangle\langle X,T_2\rangle - \langle X,T_1\rangle\langle Y,T_2\rangle\big)\big(\langle Z\times T_1\times T_2,\nu\rangle\nu - f_1J_2Z + f_2J_1Z\big)\\
&+\big(-f_1\langle J_1X,Y\rangle + f_2\langle J_2X,Y\rangle\big)\big(\langle Z\times T_1\times T_2,\nu\rangle\nu - f_1J_2Z + f_2J_1Z\big).
\end{aligned}$$

Finalmente, temos

$$\begin{aligned}
\langle\bar{R}(X,Y)Z,W\rangle \;=\;& -\frac{1}{2}\big(\langle X,T_1\rangle\langle Y,T_2\rangle - \langle Y,T_1\rangle\langle X,T_2\rangle\big)\big(\langle Z,T_1\rangle\langle A,W\rangle + \langle Z,T_2\rangle\langle\xi,W\rangle\big)\\
&+\frac{1}{4}\langle X,Z\rangle\big(\langle Y,T_1\rangle\langle\xi,W\rangle + \langle Y,T_2\rangle\langle A,W\rangle\big)\\
&-\frac{1}{4}\langle Y,Z\rangle\big(\langle X,T_1\rangle\langle\xi,W\rangle + \langle X,T_2\rangle\langle A,W\rangle\big)\\
&+\frac{3}{4}\langle Z,T_1\rangle\big(\langle Y,T_1\rangle\,\langle X,W\rangle - \langle X,T_1\rangle\langle Y,W\rangle\big)\\
&-\frac{1}{4}\langle Z,T_2\rangle\big(\langle Y,T_2\rangle\,\langle X,W\rangle - \langle X,T_2\rangle\langle Y,W\rangle\big)\\
&+\frac{1}{4}\big(-f_1\langle J_1X,Z\rangle + f_2\langle J_2X,Z\rangle\big)\big(3\langle Y,T_1\rangle\langle A,W\rangle + \langle Y,T_2\rangle\langle\xi,W\rangle\big)\\
&+\frac{1}{4}\big(-f_1\langle J_1Z,Y\rangle + f_2\langle J_2Z,Y\rangle\big)(3\langle X,T_1\rangle\langle A,W\rangle + \langle X,T_2\rangle\langle\xi,W\rangle\big)\\
&+\frac{1}{4}\big(-f_1\langle J_1X,Y\rangle + f_2\langle J_2X,Y\rangle\big)\big(3\langle Z,T_1\rangle\langle A,W\rangle + \langle Z,T_2\rangle\langle\xi,W\rangle\big)\\
&+\frac{1}{4}\big(\langle Y,T_1\rangle\langle Z,T_2\rangle - \langle Z,T_1\rangle\langle Y,T_2\rangle\big)\big(-f_1\langle J_2X,W\rangle + f_2\langle J_1X,W\rangle\big)\\
&+\frac{1}{4}\big(\langle Z,T_1\rangle\langle X,T_2\rangle - \langle X,T_1\rangle\langle Z,T_2\rangle\big)\big(-f_1\langle J_2Y,W\rangle + f_2\langle J_1Y,W\rangle\big)\\
&+\frac{1}{2}\big(\langle Y,T_1\rangle\langle X,T_2\rangle - \langle X,T_1\rangle\langle Y,T_2\rangle\big)\big(-f_1\langle J_2Z,W\rangle + f_2\langle J_1Z,W\rangle\big)\\
&+\big(-f_1\langle J_1X,Y\rangle + f_2\langle J_2X,Y\rangle\big)\big(-f_1\langle J_2Z,W\rangle + f_2\langle J_1Z,W\rangle\big).
\end{aligned}$$

Da Proposição 10, também temos

$$
\begin{aligned}
\bar{R}(X,Y)\nu &= -\frac{1}{2}\big(\langle X,\xi\rangle\langle Y,A\rangle-\langle Y,\xi\rangle\langle X,A\rangle\big)\big(\langle\nu,\xi\rangle A+\langle\nu,A\rangle\xi\big)\\
&\quad+\frac{1}{4}\langle X,\nu\rangle\big(\langle Y,\xi\rangle\xi+\langle Y,A\rangle A\big)-\frac{1}{4}\langle Y,\nu\rangle\big(\langle X,\xi\rangle\xi+\langle X,A\rangle A\big)\\
&\quad+\frac{3}{4}\langle\nu,\xi\rangle\big(\langle Y,\xi\rangle\, X-\langle X,\xi\rangle Y\big)-\frac{1}{4}\langle\nu,A\rangle\big(\langle Y,A\rangle\, X-\langle X,A\rangle Y\big)\\
&\quad+\frac{1}{4}\langle X\times\xi\times A,\nu\rangle\big(3\langle Y,\xi\rangle A+\langle Y,A\rangle\xi\big)\\
&\quad+\frac{1}{4}\langle \nu\times\xi\times A,Y\rangle\big(3\langle X,\xi\rangle A+\langle X,A\rangle\xi\big)\\
&\quad+\frac{1}{4}\langle X\times\xi\times A,Y\rangle\big(3\langle \nu,\xi\rangle A+\langle \nu,A\rangle\xi\big)\\
&\quad+\frac{1}{4}\big(\langle Y,\xi\rangle\langle\nu,A\rangle-\langle\nu,\xi\rangle\langle Y,A\rangle\big)X\times\xi\times A\\
&\quad+\frac{1}{4}\big(\langle \nu,\xi\rangle\langle X,A\rangle-\langle X,\xi\rangle\langle \nu,A\rangle\big)Y\times\xi\times A\\
&\quad+\frac{1}{2}\big(\langle Y,\xi\rangle\langle X,A\rangle-\langle X,\xi\rangle\langle Y,A\rangle+2\langle X\times\xi\times A,Y\rangle\big)\nu\times\xi\times A\\
&= -\frac{1}{2}\big(\langle X,T_1\rangle\langle Y,T_2\rangle-\langle Y,T_1\rangle\langle X,T_2\rangle\big)\big(f_1A+f_2\xi\big)\\
&\quad+\frac{3}{4}f_1\big(\langle Y,T_1\rangle\, X-\langle X,T_1\rangle Y\big)-\frac{1}{4}f_2\big(\langle Y,T_2\rangle\, X-\langle X,T_2\rangle Y\big)\\
&\quad+\frac{1}{4}\langle X\times T_1\times T_2,\nu\rangle\big(3\langle Y,T_1\rangle A+\langle Y,T_2\rangle\xi\big)\\
&\quad+\frac{1}{4}\langle \nu\times T_1\times T_2,Y\rangle\big(3\langle X,T_1\rangle A+\langle X,T_2\rangle\xi\big)\\
&\quad+\frac{1}{4}\big(-f_1\langle J_2X,Y\rangle+f_2\langle J_1X,Y\rangle)\big)\big(3f_1A+f_2\xi\big)\\
&\quad+\frac{1}{4}\big(f_2\langle Y,T_1\rangle-f_1\langle Y,T_2\rangle\big)\big(\langle X\times T_1\times T_2,\nu\rangle\nu-f_1J_2X+f_2J_1X\big)\\
&\quad+\frac{1}{4}\big(f_1\langle X,T_2\rangle-f_2\langle X,T_1\rangle\big)\big(\langle Y\times T_1\times T_2,\nu\rangle\nu-f_1J_2Y+f_2J_1Y\big)\\
&\quad+\frac{1}{2}\big(\langle Y,T_1\rangle\langle X,T_2\rangle-\langle X,T_1\rangle\langle Y,T_2\rangle\big)\nu\times T_1\times T_2\\
&\quad+\big(-f_1\langle J_2X,Y\rangle+f_2\langle J_1X,Y\rangle\big)\nu\times T_1\times T_2.
\end{aligned}
$$

Finalmente, concluímos que

$$
\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X,Y)\nu, Z\rangle \;=\; & -\frac{1}{2}\big(\langle X,T_1\rangle\langle Y,T_2\rangle - \langle Y,T_1\rangle\langle X,T_2\rangle\big)\big(f_1\langle Z,T_2\rangle + f_2\langle Z,T_1\rangle\big)\\
& +\frac{3}{4}f_1\big(\langle Y,T_1\rangle\,\langle X,Z\rangle - \langle X,T_1\rangle\langle Y,Z\rangle\big)\\
& -\frac{1}{4}f_2\big(\langle Y,T_2\rangle\,\langle X,Z\rangle - \langle X,T_2\rangle\langle Y,Z\rangle\big)\\
& +\frac{1}{4}\langle X\times T_1\times T_2,\nu\rangle\big(3\langle Y,T_1\rangle\langle Z,T_2\rangle + \langle Y,T_2\rangle\langle Z,T_1\rangle\big)\\
& +\frac{1}{4}\langle \nu\times T_1\times T_2,Y\rangle\big(3\langle X,T_1\rangle\langle Z,T_2\rangle + \langle X,T_2\rangle\langle Z,T_1\rangle\big)\\
& +\frac{1}{4}\big(-f_1\langle J_2X,Y\rangle + f_2\langle J_1X,Y\rangle)\big)\big(3f_1\langle Z,T_2\rangle + f_2\langle Z,T_1\rangle\big)\\
& +\frac{1}{4}\big(f_2\langle Y,T_1\rangle - f_1\langle Y,T_2\rangle\big)\big(-f_1\langle J_2X,Z\rangle + f_2\langle J_1X,Z\rangle\big)\\
& +\frac{1}{4}\big(f_1\langle X,T_2\rangle - f_2\langle X,T_1\rangle\big)\big(-f_1\langle J_2Y,Z\rangle + f_2\langle J_1Y,Z\rangle\big)\\
& +\frac{1}{2}\big(\langle Y,T_1\rangle\langle X,T_2\rangle - \langle X,T_1\rangle\langle Y,T_2\rangle\big)\langle \nu\times T_1\times T_2,Z\rangle\\
& +\big(-f_1\langle J_2X,Y\rangle + f_2\langle J_1X,Y\rangle\big)\langle \nu\times T_1\times T_2,Z\rangle,
\end{aligned}
$$

encerrando a demonstração. □

Sejam ∇ a conexão riemanniana de M, R o tensor curvatura de M, i.e.,

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z,$$

e S o operador de forma de M, associado ao campo normal unitário ν, i.e., $SX = -\bar{\nabla}_X\nu$. A partir da Proposição 12, obtemos as equações de Gauss e Codazzi. Mais precisamente, concluímos que:

Corolário 1. *As seguintes equações são verdadeiras para quaisquer* X, Y, Z *em* $M \hookrightarrow \mathbb{CH}_2$*:*

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)Z \;=\;& \langle SX, Z\rangle SY - \langle SY, Z\rangle SX \\
&-\frac{1}{2}\big(\langle X, T_1\rangle\langle Y, T_2\rangle - \langle Y, T_1\rangle\langle X, T_2\rangle\big)\big(\langle Z, T_1\rangle T_2 + \langle Z, T_2\rangle T_1\big) \\
&+\frac{1}{4}\langle X, Z\rangle\big(\langle Y, T_1\rangle T_1 + \langle Y, T_2\rangle T_2\big) - \frac{1}{4}\langle Y, Z\rangle\big(\langle X, T_1\rangle T_1 + \langle X, T_2\rangle T_2\big) \\
&+\frac{3}{4}\langle Z, T_1\rangle\big(\langle Y, T_1\rangle\, X - \langle X, T_1\rangle Y\big) - \frac{1}{4}\langle Z, T_2\rangle\big(\langle Y, T_2\rangle\, X - \langle X, T_2\rangle Y\big) \\
&+\frac{1}{4}\big(- f_1\langle J_1X, Z\rangle + f_2\langle J_2X, Z\rangle\big)\big(3\langle Y, T_1\rangle T_2 + \langle Y, T_2\rangle T_1\big) \\
&+\frac{1}{4}\big(- f_1\langle J_1Z, Y\rangle + f_2\langle J_2Z, Y\rangle\big)(3\langle X, T_1\rangle T_2 + \langle X, T_2\rangle T_1\big) \\
&+\frac{1}{4}\big(- f_1\langle J_1X, Y\rangle + f_2\langle J_2X, Y\rangle\big)\big(3\langle Z, T_1\rangle T_2 + \langle Z, T_2\rangle T_1\big) \\
&+\frac{1}{4}\big(\langle Y, T_1\rangle\langle Z, T_2\rangle - \langle Z, T_1\rangle\langle Y, T_2\rangle\big)\big(- f_1J_2X + f_2J_1X\big) \\
&+\frac{1}{4}\big(\langle Z, T_1\rangle\langle X, T_2\rangle - \langle X, T_1\rangle\langle Z, T_2\rangle\big)\big(- f_1J_2Y + f_2J_1Y\big) \\
&+\frac{1}{2}\big(\langle Y, T_1\rangle\langle X, T_2\rangle - \langle X, T_1\rangle\langle Y, T_2\rangle\big)\big(- f_1J_2Z + f_2J_1Z\big) \\
&+\big(- f_1\langle J_1X, Y\rangle + f_2\langle J_2X, Y\rangle\big)\big(- f_1J_2Z + f_2J_1Z\big)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X,Y] \;=\;& -\frac{1}{2}\big(\langle X, T_1\rangle\langle Y, T_2\rangle - \langle Y, T_1\rangle\langle X, T_2\rangle\big)\big(f_1T_2 + f_2T_1\big) \\
&+\frac{3}{4}f_1\big(\langle Y, T_1\rangle\, X - \langle X, T_1\rangle Y\big) - \frac{1}{4}f_2\big(\langle Y, T_2\rangle\, X - \langle X, T_2\rangle Y\big) \\
&+\frac{1}{4}\langle X \times T_1 \times T_2, \nu\rangle\big(3\langle Y, T_1\rangle T_2 + \langle Y, T_2\rangle T_1\big) \\
&+\frac{1}{4}\langle \nu \times T_1 \times T_2, Y\rangle\big(3\langle X, T_1\rangle T_2 + \langle X, T_2\rangle T_1\big) \\
&+\frac{1}{4}\big(- f_1\langle J_2X, Y\rangle + f_2\langle J_1X, Y\rangle)\big)\big(3f_1T_2 + f_2T_1\big) \\
&+\frac{1}{4}\big(f_2\langle Y, T_1\rangle - f_1\langle Y, T_2\rangle\big)\big(- f_1J_2X + f_2J_1X\big) \\
&+\frac{1}{4}\big(f_1\langle X, T_2\rangle - f_2\langle X, T_1\rangle\big)\big(- f_1J_2Y + f_2J_1Y\big) \\
&+\frac{1}{2}\big(\langle Y, T_1\rangle\langle X, T_2\rangle - \langle X, T_1\rangle\langle Y, T_2\rangle\big)\nu \times T_1 \times T_2 \\
&+\big(- f_1\langle J_2X, Y\rangle + f_2\langle J_1X, Y\rangle\big)\nu \times T_1 \times T_2.
\end{aligned}
$$

Estas são, respectivamente, as equações de Gauss e Codazzi.

Definição 3. **(Equações de Compatibilidade)** *Dizemos que os dados* $(\langle .,. \rangle, S, T_1, T_2, f_1, f_2)$ *em* M *satisfazem as equações de compatibilidade para* $\mathbb{CH}_2$ *se, e somente se, para quaiquer*

$X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, as equações de Gauss e Codazzi e as equações (4.6), (4.7), (4.8) e (4.9) são satisfeitas.

4.3 Existência de Imersões Isométricas em $\mathbb{CH}_2$

Tendo em vista essas considerações e o teorema geral de imersões isométricas para grupos de Lie solúveis apresentado no capítulo 3, podemos enunciar agora um teorema de imersões isométricas para o espaço hiperbólico complexo $\mathbb{CH}_2$.

Teorema 3. *Sejam M uma variedade Riemanniana orientada e simplesmente conexa de dimensão 3, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a métrica em M, ∇ a conexão compatível correspondente e J_i os endomorfismos em TM dados por*

$$J_i X = X \times T_i \times \nu, \quad i = 1, 2,$$

onde T_1 e T_2 são campos vetoriais em M e ν é uma secção global no fibrado trivial $M \times \mathbb{R}$. Seja S um campo simétrico de operadores $S_y : T_y M \to T_y M$ e sejam f_1 e f_2 funções suaves em M tais que $||T_i||^2 + f_i^2 = 1$, para $i = 1, 2$. Então, existe uma imersão isométrica $f : M \to \mathbb{CH}_2$ se, e somente se, $(\langle ., . \rangle, S, T_1, T_2, f_1, f_2)$ satisfazem as equações de Gauss e Codazzi para $\mathbb{CH}_2$ e, para todo campo vetorial X em M, as seguintes equações são satisfeitas

$$\begin{aligned} \nabla_X T_1 &= f_1 SX - \frac{1}{2} f_2 J_1 X + \frac{1}{2} f_1 J_2 X - \langle X, T_1 \rangle T_2, &(4.11)\\ \mathrm{d} f_1(X) &= -\langle SX, T_1 \rangle - \frac{1}{2}\langle X, T_1 \rangle - \frac{1}{2}\langle X \times T_1 \times T_2, \nu \rangle &(4.12) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \nabla_X T_2 &= f_2 SX - \frac{1}{2} X - \frac{1}{2}\langle X, T_1 \rangle T_1 + \frac{1}{2}\langle X, T_2 \rangle T_2, &(4.13)\\ \mathrm{d} f_2(X) &= -\langle SX, T_2 \rangle - \frac{1}{2}\langle X, T_1 \rangle f_1 + \frac{1}{2}\langle X, T_2 \rangle f_2, &(4.14) \end{aligned}$$

ou seja, $(\langle ., . \rangle, S, T_1, T_2, f_1, f_2)$ satisfazem as equações de compatibilidade para $\mathbb{CH}_2$.

Prova. O Teorema decorre do Teorema 2. Basta obervarmos que a condição (3.55) resume as condições de Gauss e Codazzi (a equação de Ricci sendo, neste caso, trivial). As condições adicionais são abreviadas na hipótese (3.56). □

Referências Bibliográficas

[1] ABRESCH, U.; ROSENBERG, H., *A Hopf differential for a constant mean curvature surfaces in* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Acta Math., v. 193, n. 2, p. 141-174, 2004.

[2] ABRESCH, U; ROSENBERG, H., *Generalized Hopf differentials.* Mat. Contemp. vol. 28, n. 1, p. 1-28, 2005.

[3] ALEDO, J.A.; ESPINAR, J.M.; GALVEZ, J.A., *Surfaces with constant curvature in* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Height estimatives and representation.* Bull. Braz. Math. Soc., vol. 38, p. 533-554, 2007.

[4] BERNDT, J.; TRICERRI, F.; VANHECKE, L., *Generalized Heisenberg Groups and Damek-Ricci Harmonic Spaces.* Berlin: Heidelberg, Springer-Verlag, 1995, 125 p.

[5] BERNDT, J.; VANHECKE, L., *Geometry of generalized Heisenberg groups and their Damek-Ricci harmonic extensions.* vol. 318, p. 471-476, C.R Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 1994.

[6] CARMO, M.P., *Geometria Riemanniana.* Rio de Janeiro: IMPA, 2005, 3.ecl., 332 p.

[7] CIARLET, P.G.; LARSONNEUR, F., *On the recovery of a surface with prescribed first and second fundamental forms* , J. Math. Pures Appl., vol. 81, p. 167-185, 2002.

[8] CIARLET, P.G. et alli, *Another approach to the fundamental theorem of Riemannian geometry, by way of rotation fields*, J. Math. Pures Appl., vol. 87, p. 237-252, 2007.

[9] DAJCZER, M., *Submanifolds and isometric immersions*. Houston: Texas, Publish or Perish, 1990, 173 p. (Mathematics Lecture Series; 13).

[10] DAMEK, E., *Harmonic functions on semidirect extensions of type H nilpotent groups*, TAMS, vol. 290, n. 1, p. 375-384, 1985.

[11] DAMEK, E., *A Poisson kernel on Heisenberg type nilpotent groups*, Coll. Math., vol. 53, n. 2, p. 239-247, 1987.

[12] DAMEK, E.; HULANICKI, A., *Boundaries and the Fatou theorem for subelliptic second order operators on solvable Lie groups*, Coll. Math., vol. 18, p. 121-140, 1995.

[13] DAMEK, E.; RICCI, F., *Harmonic analysis on solvable extensions of H-type groups*, The Journal of Geometric Analysis, vol. 2, n. 3, p. 213-248, 1992.

[14] DANIEL, B., *Isometric Immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds*. Comment. Math. Helv., vol. 82, n. 1, p. 87-131, 2007.

[15] DANIEL, B., *Isometric Immersions into $S^n \times \mathbb{R}$ and $H^n \times \mathbb{R}$ and applications to minimal surfaces*, arXiv:math.DG/0406426 .

[16] DANIEL, B., *The Gauss map of minimal surfaces in the Heisenberg group*, arXiv:math.DG/0606299.

[17] DANIEL, B.; HAUSWIRTH, L., *Half space theorem, embedded minimal annuli and minimal graphs in the Heisenberg group*, arXiv:0707.0831.

[18] EBERLEIN, P., *Geometry of 2-step nilpotent groups with a left invariant metric*, Annales de l'Ecole Normale Superieure, vol. 27, p. 611-660, 1994.

[19] EBERLEIN, P., *Left invariant geometry of Lie groups.* Cubo, vol. 6, n. 1, p. 427-510, 2004.

[20] FERNÁNDEZ, I.; MIRA, P., *Harmonic maps and constant mean curvature surfaces in* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Amer. J. Math., vol. 129, n. 4, 2007.

[21] HERVIK, S., *Einstein metrics: Homogeneous solvmanifolds, generalized Heisenberg groups and Black Holes*, J. Geom. Phys., vol. 52, n. 3, p. 298-312, 2004.

[22] JACOBOWITZ, H., *The Gauss-Codazzi equations*, Tensor N.S., vol. 39, p. 15-22, 1982.

[23] LIRA, J. H.; TOJEIRO, R.; VITÓRIO, F. *A Bonnet theorem for isometric immersions into products of space forms.* (preprint)

[24] KAPLAN, A., *Riemannian nilmanifolds attached to Clifford modules*. Geom. Dedicata, vol. 11, n. 2, p. 127-136, 1981.

[25] KAPLAN, A., *On the geometry of groups of Heisenberg type*. Bull. London Math. Soc., vol. 15, n. 1, p. 35-42, 1983.

[26] LODOVICI, S.D.B., *An Isometric Immersion Theorem in* Sol^3. Matemática Contemporânea, vol. 30, p. 109-123, 2006.

[27] MILNOR, J., *Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups*, Adv. in Math., vol. 21, p. 293-329, 1976.

[28] PETERSEN, P., *Riemannian geometry*. New York: Springer-Verlag, 1998, 432 p. (Grad. Texts in Math. 171)

[29] PICCIONE P.; TAUSK, D. V., *The theory of connections and* **G***-structures. Applications to affine and isometric immersions*, XIV Escola de Geometria, UFBA, Salvador,(2006).

[30] PICCIONE P.; TAUSK, D. V., *An existence theorem for* **G***-structure preserving affine immersions*, preprint, 2006(arXiv: math/0610703).

[31] ROTH, J. e LAWN, M. A., *Isometric immersions of hypersurfaces in 4-dimensional manifolds via spinors*. (preprint)

[32] SHARPE, R. W., *Differential Geometry - Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program.* New York: Springer-Verlag, 1997 (Grad. Texts in Math.)

[33] SCOTT, P., *The geometries of 3-manifolds.* Bull. London Math. Soc., vol. 15, n. 5, p. 401-487, 1983.

[34] SPIVAK, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry.* Houston, 2nd Edition, Publish or Perish Inc, 1989.

[35] TAIMANOV. I. A., *Surfaces in three-dimensional Lie groups in terms of spinors*, arXiv:0712.4139

[36] TENENBLAT, K., *On isometric immersions of riemannian manifolds*. Bol. Soc. Bras. Mat., vol. 2, p. 23-26, 1971.

[37] THURSTON, WILLIAM, P., *Three-dimensional geometry and topology.* Princeton: Princeton University Press, 1997, vol.1. (Mathematical Series, 35.)

[38] VITÓRIO, F. *Imersões Isométricas em Produtos Riemannianos e no Espaço Anti-de Sitter*. Tese. (Doutorado em Matemática) - Depto de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2007.