UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

PRISCILA RODRIGUES DE ALCANTARA

HIPERSUPERFÍCIES COM CURVATURA MÉDIA PRESCRITA EM VARIEDADES RIEMANNIANAS

FORTALEZA
2010

PRISCILA RODRIGUES DE ALCANTARA

HIPERSUPERFÍCIES COM CURVATURA MÉDIA PRESCRITA EM VARIEDADES RIEMANNIANAS

Dissertação submetida Coordenação do Curso de Pós-Gradução em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira.

Fortaleza

2010

A348h Alcantara, Priscila Rodrigues de

Hipersuperfícies com curvatura média prescrita em variedades riemannianas / Priscila Rodrigues de Alcantara - Fortaleza: 2010.

41 f.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Herbert Soares Lira

Área de concentração: Matemática

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Departamento de Matemática, 2010.

1-Geometria diferencial

CDD 516.36

Dedicatória

Dedico este trabalho, em especial a Deus, que me presenteou com o Dom da Vida e por estar comigo sempre.

Aos meus familiares, em especial aos meus pais Antônio Deuszimar de Alcantara e Sonia Maria Rodrigues de Alcantara, meu irmão Deryson Rodrigues de Alcantara, aos meus avós Tereza de Jesus Rodrigues e Francisco Xavier Rodrigues *(in memoriam)*, meus tios, tias e primos, que acreditaram e favoreceram para que esta conquista se realizasse. Obrigada pelo incentivo, compreensão e paciência por ter lhes privado muitas vezes da minha companhia devido à necessidade de dedicação aos estudos.

Aos professores Juscelino Pereira Silva, Mário de Assis Oliveira, Zelalber Gondim Guimarães e Carlos Humberto Soares Júnior, por toda ajuda concedida para o ingresso no curso de Pós-graduação da UFC. Obrigada por me fazerem sonhar.

A Andrea Dantas, secretária da Pós-Graduação em Matemática da UFC, quero parabenizá-la por toda sua competência e prontidão na assistência a todos os alunos da Pós-graduação.

Aos colegas de curso pelas críticas e sugestões, pelo companheirismo e abnegada ajuda nas dificuldades sofridas. Nunca esquecerei os sábados, domingos e feriados que estudamos juntos, almoçando marmitas frias na sala de seminários na deserta UFC.

Agradecimentos

A Deus por ter me iluminado, permitindo que eu canalizasse minhas energias na conclusão deste trabalho.

A todos os amigos da Pós-Graduação em Matemática da UFC, em especial: Vânia, Ana Shirley, Valéria, Wilson, Tiago Veras, Rondinelle, Leon Denis, Filipe Mendonça, José Deibson, Alexandro Belém, Raimundo Bastos (Bill), José Ederson, Thadeu, Edinardo, João Francisco (Piaget), Nazareno, Ernani, Kelton Brito, Flávio França, Francisco Calvi, Damião Júnio, Chaves, Tiarlos, João Vitor, Davi Lustosa, Fátima Cruz, Raquel Costa, Francisco de Assis, Júnio Moreira, Fagner, Edno. Tenham certeza de que todos vocês contribuiram com tijolos para que eu pudesse construir este caminho e finalizar esta jornada.

A Cícero Henrique Viana Correia, a quem carinhosamente chamo de *Meu Amor*, por toda compreensão que mostrou, principalmente nas muitas vezes que transpareci deixá-lo em segundo plano, limitando ligações, viagens, ou ainda direcionando o cansaço e preocupações da estressante e exigente vida de um mestrando em matemática. Por todas as palavras de apoio e incentivo, carinho e ombro amigo/noivo muito obrigada!

Ao professor Jorge Herbert S. Lira, pela paciência demonstrada e por toda ajuda durante a elaboração deste trabalho.

Aos demais professores do curso de pós-graduação em matemática da UFC: João Lucas Marques Barbosa, Levi Lima, Antonio Caminha, Marcos Melo, José Robério, Fernanda Esther, Luquésio Jorge, Cleon Barroso, Silvano Menezes, Abdênago Alves, Fábio Montenegro,Gregório Pacelli Bessa, Aldir Brasil e Eduardo Vasconcelos pela ajuda concedida nos momentos de dúvida mais obscuros.

À CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual este sonho não se realizaria.

“ What you do in life echoes in eternity.”

Filme: The Gladiador

Resumo

O objetivo deste trabalho é exibir resultados de existência e unicidade de gráficos com curvatura média prescrita. Demonstraremos que uma fixação natural do problema de Dirichlet para gráficos de curvatura média prescrita é considerar esses gráficos como folhas em uma submersão Riemanniana transversal ao cilindro de Killing, isto é, ao cilindro dado pelas linhas de fluxo de um campo de vetores de Killing. Usando essa aproximação, somos capazes de resolver o problema em um modo mais compreensivo, dando uma prova unificada e resultados de existência para uma ampla gama do ambiente de variedades Riemannianas.

Palavras-chave: curvatura média, curvatura média prescrita, Gráficos de Killing.

Abstract

This work shows results existence and uniqueness of graphs with prescribed mean curvature. We demonstrate that a natural fixation Dirichlet problem for graphs of average curvature is required to consider those graphs like leaves on a Riemannian submersion Killing transversal cylinder, the cylinder given by flow lines of a Killing vector field. Using this approach, we are able to solve the problem in a way more comprehensive, giving a unified proof and existence results.

Word-keys: mean curvature, prescribed mean curvature , Killing graphs

Sumário

Introdução

Uma das principais questões para desenvolver uma teoria de superfícies de curvatura média constante em ambientes Riemannianos gerais é a existência de exemplos. Os métodos que se baseiam principalmente em construções geométricas podem falhar por falta de simetrias ou estruturas mais rígidas no ambiente. No entanto, o problema pode ser reformulado em termos analíticos, pelo menos localmente, como a existência de gráficos com curvatura média constante. Isto requer essencialmente apenas uma noção adequada de gráfico, o que pode ser obtido se supusermos que a variedade riemanniana é dotada de um campo de Killing.

O problema de Dirichlet para curvatura média prescrita de gráficos de Killing foi resolvido em [5] para para espaços ambiente dotados com um campo de vetores de Killing o qual determina uma distribuição normal integrável. Neste caso, a variedade ambiente está submersa em cada uma das folhas integrais. Aqui, consideraremos uma generalização de [2] para submersões cujas fibras verticais são dadas por linhas de fluxo de uma translação infinitesimal. Agora, *não* estamos assumindo a integrabilidade da distribuição normal. Enfatizamos o fato de que não impomos restrições na curvatura da variedade base. Entre os ambientes com que lidamos neste trabalho, podemos citar mais dimensões espaços de Heisenberg e esferas de dimensão ímpar submersas no espaço projetivo complexo.

Nosso resultado de existência é provado usando o método de continuidade para EDP elíptica quasilinear. Em ordem para obter estimativas a priori é essencial para este método usarmos cilindros de Killing como barreiras. Mais precisamente, dada a submersão Riemanniana $\pi : \bar{M}^{n+1} \to M^n$ e um domínio Ω em M com fecho compacto e bordo Γ, os cilindros de Killing K e M_0 sobre Γ e $\bar{\Omega}$ são respectivamente os subconjuntos $\pi^{-1}(\Gamma)$ e $\pi^{-1}(\bar{\Omega})$. Denotaremos por H_{cyl} a curvatura média de K e por Ric o tensor de Ricci de $\bar{M}$. Suponhamos que não existem pontos singulares de Y em M_0 e que as linhas integrais de Y são completas aqui. Usando esta notação, afirmamos nosso teorema.

Teorema. *Seja $\Omega \subset M$ um domínio com fecho compacto e $C^{2,\alpha}$ com bordo Γ. Suponha que $H_{\mathrm{cyl}} > 0$ e que*

$$\inf_{\bar{M}} \mathrm{Ric} \geq -n \inf_{\Gamma} H_{\mathrm{cyl}}^2. \tag{1}$$

Seja $H \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ e $\phi \in C^{2,\alpha}(\Gamma)$ funções dadas. Assuma que existe uma imersão $C^{2,\alpha}$ $\iota : \bar{\Omega} \to \bar{M}$ transversal às fibras verticais em M_0. Se

$$\sup_{\Omega} |H| \leq \inf_{\Gamma} H_{\mathrm{cyl}}, \tag{2}$$

então existe uma única função $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ satisfazendo $u|_{\Gamma} = \phi$ cujo gráfico de Killing Σ possui curvatura média H.

A hipótese na existência de uma imersão ι é usada simultaneamente para introduzir um conjunto de coordenadas bem adequadas para o problema e definir propriamente a noção de gráfico. Em termos dessas coordenadas, podemos tornar evidente que a métrica ambiente é fixa. Finalmente, $\iota(\bar{\Omega})$ é usado como barreira para produzir um gráfico inicial mínimo pelo método direto do Cálculo das Variações. No caso dos espaços de Heisenberg de maior dimensão, existe uma folha mínima transversal às linhas de fluxo do campo vetorial vertical. Então, neste caso particular, não é necessária a hipótese. No entanto, se considerarmos o exemplo das esferas de dimensão ímpar submersas no espaço projetivo complexo, não é garantido que sempre existe tal gráfico mínimo com respeito às fibras de Hopf. No entanto, observamos que submersões com fibras totalmente geodésicas constituem um exemplo importante onde podemos construir inicialmente gráficos de Killing . De fato, se assumirmos que o cilindro de Killing M_0 sobre $\bar{\Omega}$ é completo, então cones geodésicos com bordo em K e vértice na metade do lado convexo de K podem ser tomados, depois de suavização em torno do vértice, como gráficos de Killing iniciais. Assim, pode-se excluir a hipótese neste caso.

Esta dissertação possui a seguinte estrutura. No capítulo 2, fixamos a notação e tornamos precisa a noção de gráfico de Killing. Nós também deduzimos a equação da curvatura média e definimos um referencial básico e adaptado crucial para análise subsequente. Nos capítulos 3 e 4, apresentamos alguma noção básica de geometria dos cilindros de Killing e construímos barreiras geométricas e analíticas para obter estimativas de altura e gradiente limitado. No capítulo 5 discutimos a versão particular do teorema de existência no caso de variedades produto $M^2 \times R$.

Capítulo 1

Campos de Killing

Doravante, M denota uma variedade riemanniana de dimensão $n+1$, cuja métrica denotamos por g. Por comodidade, dados dois campos vetoriais $X, Z \in \Gamma(TM)$, escrevemos

$$g(X, Z) = \langle X, Z \rangle.$$

Definição 1. *Sejam M uma variedade Riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Seja $p \in M$ e sejam $U \subset M$ uma vizinhança de p, e $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$ uma aplicação diferenciável tais que para todo $q \in U$ a curva $t \mapsto \phi(t, q)$ é a trajetória de X passando por q em $t = 0$. X é chamado* Campo de Killing conforme *se, para todo $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a aplicação $\phi(t_0) : U \subset M \to M$ é uma aplicação conforme.*

Supomos que M é dotada de um campo vetorial conforme Y, cujas linhas de fluxo são completas e tal que a distribuição ortogonal

$$p \in M \mapsto \mathcal{D}_p = \{v \in T_pM : \langle Y, v \rangle = 0\} \subset T_pM$$

é integrável. A mera definição de campo conforme acarreta a existência de uma função $\rho \in C^\infty(M)$ tal que

$$\pounds_Y g = 2\rho g, \tag{1.1}$$

o que implica, por sua vez, em

$$\begin{aligned} 2\rho\langle X, Z\rangle &= Y\langle X, Z\rangle - \langle [Y, X], Z\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_Y X - [Y, X], Z\rangle + \langle \bar{\nabla}_Y Z - [Y, Z], X\rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X Y, Z\rangle + \langle \bar{\nabla}_Z Y, X\rangle, \end{aligned}$$

para quaisquer $X, Z \in \Gamma(TM)$. Nestes cálculos e ao longo do texto, $\bar{\nabla}$ denota a conexão riemanniana em (M, g). Concluímos que Y satisfaz a equação de Killing

$$\langle \bar{\nabla}_X Y, Z \rangle + \langle \bar{\nabla}_Z Y, X \rangle = 2\rho \langle X, Z \rangle, \quad X, Z \in \Gamma(TM). \tag{1.2}$$

Por outro lado, se denotarmos por $\omega = g(Y, \cdot)$ a forma metricamente equivalente a Y, o critério de integrabilidade de Frobenius diz que

$$d\omega(X, Z) = 0,$$

para quaisquer $X, Z \in \mathcal{D}$. Segue que

$$\begin{aligned} 0 &= X\langle Y, Z \rangle - Z\langle Y, X \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X Y, Z \rangle - \langle \bar{\nabla}_Z Y, X \rangle. \end{aligned}$$

Disto resulta que

$$\langle \bar{\nabla}_X Y, Z \rangle = \rho \langle X, Z \rangle, \quad X, Z \in \mathcal{D}. \tag{1.3}$$

A equação (1.3) implica que as folhas integrais da distribuição $\mathcal{D}$ são hipersuperfícies em M com curvaturas principais iguais a

$$k = \frac{\rho}{|Y|}, \tag{1.4}$$

quando calculadas com respeito à orientação dada por $Y/|Y|$.

Seja $\mathbb{P}$ uma folha integral de $\mathcal{D}$. Definimos o fluxo $\Psi \colon \mathbb{R} \times \mathbb{P} \to M$ gerado por Y, com condições iniciais dadas por $\Psi(0, p) = p$, para algum $p \in \mathbb{P}$. Denotamos $\Psi_s = \Psi(s, \cdot)$ e $\mathbb{P}_s = \Psi_s(\mathbb{P})$. Fixada esta notação, concluímos que existe uma função $\lambda \in C^\infty(M)$ tal que

$$\langle \Psi_{s*} X, \Psi_{s*} Z \rangle = \lambda^2(s, p) \langle X, Z \rangle, \quad X, Z \in \Gamma(TM). \tag{1.5}$$

A partir de agora, nos restringiremos ao caso dos campos de Killing isométricos. Em termos da notação há pouco fixada, isto significa considerarmos $\rho = k = 0$ e $\lambda = 1$. O caso geral dos campos conformes não-isométricos apresenta algumas dificuldades técnicas as quais podem obnubilar as idéias essenciais dos métodos analíticos que estudaremos.

Fixadas coordenadas locais $x^1, \ldots, x^n$ em $\mathbb{P}$, define-se um sistema de coordenadas em M do seguinte modo: a um ponto $q \in M$ tal que $q = \Psi(s, p)$, para algum $p \in \mathbb{P}$, associamos coordenadas

$$q \mapsto (s, x^1, \ldots, x^n)$$

desde que a $p \in \mathbb{P}$ correspondam as coordenadas $x^1, \ldots, x^n$. Em termos dos campos coordenados

$$\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_q = Y(q) = \Psi_{s*}(p) \cdot Y(p) \quad \text{e} \quad \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q = \Psi_{s*}(p) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \tag{1.6}$$

a métrica ambiente é escrita como

$$\gamma^{-1}ds^2 + \sigma_{ij}dx^i dx^j, \tag{1.7}$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{|Y|^2(q)} = \frac{1}{|Y|^2(p)} \tag{1.8}$$

e

$$\sigma_{ij}|_q = \sigma_{ij}|_p = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle|_p \tag{1.9}$$

é a métrica induzida em $\mathbb{P}$. Em algumas circunstâncias, denotamos $s = x^0$ e, mantida esta convenção, escrevemos a métrica ambiente abreviadamente como

$$\bar{g}_{ab}dx^a dx^b, \tag{1.10}$$

onde a, b variam de 0 a n. A métrica contravariante, atuando sobre covetores, tem componentes indicados por $\bar{g}^{ab}$.

1.1 Exemplos

Nesta seção, apresentamos alguns exemplos elementares, embora importantes, da estrutura geométrica descrita anteriormente. No que segue, $\mathbb{M}^d(\kappa)$ denota a forma espacial de dimensão d, completa e simplesmente conexa, com curvatura seccional constante κ.

Fixemos, doravante, $M = \mathbb{M}^{n+1}(\kappa)$ e $\mathbb{P}$ uma hipersuperfície totalmente geodésica em $\mathbb{M}^{n+1}(\kappa)$. Assim, $\mathbb{P}$ é um modelo da forma espacial n-dimensional $\mathbb{M}^n(\kappa)$ com a mesma curvatura. Seja

$$(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{n-1} \mapsto p \in \mathbb{P}$$

um sistema de coordenadas polares na variedade $\mathbb{P}$, centradas em algum ponto o em $\mathbb{P}$. Consideremos também

$$(\theta^1, \ldots, \theta^{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \theta \in \mathbb{S}^{n-1}$$

coordenadas generalizadas em $\mathbb{S}^{n-1}$. Em termos dessas coordenadas, a métrica em $\mathbb{P}$ é expressa por

$$\mathrm{d}r^2 + \mathrm{sn}_\kappa^2(t)\,\mathrm{d}\sigma^2,$$

onde $\mathrm{d}\sigma^2 = \sigma_{ij}\mathrm{d}\theta^i\mathrm{d}\theta^j$ é a métrica usual em $\mathbb{S}^{n-1}$ e $\mathrm{sn}_\kappa(r)$ é dada pela expressão

$$\mathrm{sn}_\kappa(r) = \begin{cases} r, & \text{se} \quad \kappa = 0 \\ \dfrac{\sin\sqrt{\kappa}r}{\sqrt{\kappa}}, & \text{se} \quad \kappa > 0 \\ \dfrac{\sinh\sqrt{-\kappa}r}{\sqrt{-\kappa}}, & \text{se} \quad \kappa < 0 \end{cases}$$

Sejam c a geodésica em M passando por o e ortogonal a $\mathbb{P}$ e Y o campo de Killing em M gerado pela translação geodésica ao longo de c. A norma ao quadrado deste campo é igual a

$$\langle Y, Y\rangle = \mathrm{cs}^2_\kappa(r).$$

Assim, no ponto o, o vetor $Y(o)$ é a velocidade unitária de c. Lembremos que a função $\mathrm{sn}_\kappa(r)$ é a solução da equação de Jacobi $\ddot{u} + \kappa u = 0$ com condições iniciais $u(0) = 0$ e $\dot{u}(0) = 1$, onde $\cdot$ indica derivada com respeito a r. Além disso, $\dot{\mathrm{sn}}_\kappa(r) = \mathrm{cs}_\kappa(r)$.

A restrição de Y a $\mathbb{P}$ define um campo normal a $\mathbb{P}$ fora do conjunto de pontos singulares de Y em $\mathbb{P}$. Como antes, $\Psi(s, p)$ denota o fluxo gerado por Y e $\mathcal{D} = \ker \omega$, onde $\omega = \langle Y, \cdot\rangle$. No caso que ora consideramos, as folhas integrais de $\mathcal{D}$ são hipersuperfícies totalmente geodésicas dadas por $\mathbb{P}_s = \Psi_s(\mathbb{P})$. Assim, o parâmetro s do fluxo pode ser considerado como uma coordenada em M. As coordenadas $(r, \theta^1, \ldots, \theta^n)$ são então estendidas a M ao longo do fluxo: associamos os mesmos valores dessas coordenadas a pontos correspondentes em $\mathbb{P}$ e $\Psi_s(\mathbb{P})$ com respeito à aplicação $\Psi_s : \mathbb{P} \to \mathbb{P}_s$. A métrica em M é dada em termos destas coordenadas cilíndricas (r, θ, s) por

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{cs}^2_\kappa(r)\mathrm{d}s^2 + \mathrm{d}r^2 + \mathrm{sn}^2_\kappa(r)\mathrm{d}\sigma^2. \tag{1.11}$$

Determinamos agora a conexão Riemanniana $\bar{\nabla}$ de M em termos dessas coordenadas. Temos, pela equação de Killing,

$$\langle \bar{\nabla}_Y Y, Y\rangle = 0.$$

Em particular, a norma do campo de Killing é constante ao longo das órbitas do fluxo $s \mapsto \Psi(s, p)$. Além disso, o fato de que as folhas integrais de $\mathcal{D}$ são hipersuperfícies totalmente geodésicas implica que

$$\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}} Y, \frac{\partial}{\partial r}\rangle = \langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}} Y, \frac{\partial}{\partial \theta^i}\rangle = \langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \theta^i}} Y, \frac{\partial}{\partial \theta^j}\rangle = 0.$$

Segue igualmente da equação de Killing que

$$\langle \bar{\nabla}_Y Y, \frac{\partial}{\partial r}\rangle = -\langle Y, \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}} Y\rangle = -\frac{1}{2}\,\partial_r\langle Y, Y\rangle = -\mathrm{cs}_\kappa(r)\dot{\mathrm{cs}}_\kappa(r). \tag{1.12}$$

Geometricamente, estas equações significam o seguinte: para r fixado, a linha de fluxo de Y passando sobre o círculo geodésico em $\mathbb{P}$ centrado em o com raio r gera um cilindro, dito cilindro de Killing em M.

Afirmamos que estes cilindros são hipersuperfícies rotacionalmente invariantes com curvatura média constante. Em (1.12), é calculada a segunda forma fundamental de um cilindro de Killing na direção tangente a Y com respeito a normal unitária $\frac{\partial}{\partial r}$ - tendo em conta que tal cilindro é hipersuperfície de nível da função coordenada r. Ademais, concluímos a partir da expressão

$$\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \theta^i}} Y, \frac{\partial}{\partial r} \rangle = 0$$

que $Y = \frac{\partial}{\partial s}$ e $\frac{\partial}{\partial \theta^i}$ são direções principais desses cilindros. Calculemos, portanto, as correspondentes curvaturas principais. Para tanto, observamos que

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \theta^i}} \frac{\partial}{\partial \theta^j} =: \Gamma^1_{ij} \frac{\partial}{\partial r} + \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial \theta^k}.$$

No entanto, como $\mathbb{P} = \mathbb{M}^n(\kappa)$ é totalmente geodésica, temos

$$\Gamma^1_{ij} = \langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \theta^i}} \frac{\partial}{\partial \theta^j}, \frac{\partial}{\partial r} \rangle = \langle \nabla^{\mathbb{M}^n(\kappa)}_{\frac{\partial}{\partial \theta^i}} \frac{\partial}{\partial \theta^j}, \frac{\partial}{\partial r} \rangle = -\frac{\dot{\text{sn}}_\kappa(\rho)}{\text{sn}_\kappa(\rho)} h_{ij},$$

onde $(h_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$ são as componentes da métrica induzida em $\mathbb{P}$ e $\nabla^{\mathbb{M}^n(\kappa)}$ é a conexão riemanniana em $\mathbb{P}$. Assim, $(\Gamma^1_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$ são as componentes da segunda forma fundamental das esferas geodésicas em $\mathbb{P}$ com respeito ao campo vetorial unitário $\frac{\partial}{\partial r}$. Finalmente, $(\Gamma^k_{ij})_{i,j,k=1}^{n-1}$ são os símbolos de Christoffel usuais para a esfera euclidiana $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ em termos das coordenadas $(\theta^i)_{i=1}^{n-1}$. Concluímos que as curvaturas principais dos cilindros de Killing nas direções $\frac{\partial}{\partial s}/|\frac{\partial}{\partial s}| = \text{cs}_\kappa^{-1}(r) Y$ e $\frac{\partial}{\partial \theta^i}$ são respectivamente iguais a

$$\kappa_s = -\frac{\dot{\text{cs}}_\kappa(r)}{\text{cs}_\kappa(r)}, \quad \kappa_i = -\frac{\dot{\text{sn}}_\kappa(r)}{\text{sn}_\kappa(r)}.$$

Assim, a curvatura média H_{cyl} dos cilindros de Killing é dada por

$$nH_{\text{cyl}} = -\frac{\dot{\text{cs}}_\kappa(r)}{\text{cs}_\kappa(r)} - (n-1)\frac{\dot{\text{sn}}_\kappa(r)}{\text{sn}_\kappa(r)}$$

Em seguida, descrevemos mais concretamente estes fatos nos casos particulares em que $\kappa = 0, 1, -1$. Para $\kappa = 0$, em um ambiente euclidiano, o campo vetorial Y é paralelo. Podemos fixar $Y(p) = a$, um campo vetorial constante. Em particular, sua restrição a $\mathbb{P} = \{q \in M : \langle q, a \rangle = 0\}$ é um campo normal. Este campo obviamente é livre de singularidades. O fluxo gerado por Y é dado por $\Psi(s, p) = p + sa$. As hipersuperfícies de nível $\Psi_s(\mathbb{P})$ formam a família de hiperplanos paralelos a $\mathbb{P}$ com a mesma direção normal a. A métrica neste caso é dada por

$$\text{d}l^2 = \text{d}s^2 + \text{d}r^2 + r^2 \text{d}\sigma^2.$$

Quando $\kappa = -1$, a hipersuperfície integral $\mathbb{P}$ é um hiperplano totalmente geodésico $\mathbb{H}^n(-1) \subset \mathbb{H}^{n+1}(-1)$. No modelo do semi-espaço

$$\mathbb{H}^{n+1}(-1) = \{(x^1 \ldots, x^{n+1}) : x^{n+1} > 0\},$$

este hiperplano pode ser visto como uma semi-esfera euclidiana centrada na origem o da fronteira assintótica $\{x^{n+1} = 0\}$. A origem o das coordenadas polares em $\mathbb{P}$ pode ser fixada, por meio de isometrias hiperbólicas, no ponto de maior coordenada x^{n+1} em $\mathbb{P}$. Sendo assim, o traço da geodésica c pode ser fixado como a semi-reta vertical passando por o. Nesta configuração, o campo de Killing é dado por $Y(p) = p$. Este campo de vetores gera dilatações euclidianas, ou seja, translações em $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ do tipo parabólico. O fluxo de Y é dado por $\Psi(s, p) = e^s\, p$. As hipersuperfícies $\Psi_s(\mathbb{P})$ consistem na família de semi-esferas euclidianas centradas em o. Os cilindros de Killing correspondem a cones esféricos euclidianos com vértice em o, contendo uma esfera geodésica em $\mathbb{P}$ centrada em o. O quadrado da norma de Y em um ponto arbitrário de $\mathbb{P}$ é igual a

$$\langle Y, Y\rangle = \langle \frac{\partial \Psi}{\partial s}, \frac{\partial \Psi}{\partial s}\rangle\big|_{s=0} = \frac{e^{2s}}{e^{2s}(x^{n+1})^2} = \frac{1}{(x^{n+1})^2}.$$

De outro modo, denotando por ϕ o ângulo euclidiano entre o eixo vertical dado pelo traço de c e a norma do cilindro com direção p, então

$$1/\cos\phi = 1/x^{n+1}.$$

Por outro lado, a distância geodésica r entre o e o ponto p

$$r = \int \frac{1}{\cos\phi}\, \mathrm{d}\phi = \ln\big(\sec\phi + \tan\phi\big).$$

Então, $e^r = \sec\phi + \tan\phi = (1 + \sin\phi)/\cos\phi$ e, portanto, $e^{-r} = \cos\phi/(1 + \sin\phi)$. Assim,

$$\cosh r = \sec\phi.$$

Logo,

$$\langle Y, Y\rangle = \cosh^2 r.$$

Deste modo, a métrica em $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ em termos de coordenadas cilindricas é dada por

$$\cosh^2 r \mathrm{d}s^2 + \mathrm{d}r^2 + \sinh^2 r \mathrm{d}\sigma^2.$$

Quando $\kappa = 1$, o campo vetorial de Killing Y possui duas singularidades em pontos antípodas $a, -a$ em $\mathbb{S}^{n+1}(1)$. De fato, neste caso, Y é o campo gerado por rotações euclidianas fixando o eixo em $\mathbb{R}^{n+2}$ contendo a e $-a$. Consideramos $\mathbb{P} = \mathbb{S}^n$ como o equador em $\mathbb{S}^{n+1}(1)$, contendo $\pm a$, para o qual Y é campo normal fora dos pontos $\pm a$. A rotação gerada por Y leva $\mathbb{S}^n$ em uma família de esferas totalmente geodésicas, todas elas contendo $\pm a$. Fixamos, então, coordenadas polares (r, θ) com origem em $o \in \mathbb{S}^n$, de modo que o ponto a corresponde ao valor $r = \pi/2$. Definimos $\phi = \pi/2 - r$. Com isto, as linhas de fluxo de Y passando por pontos de $\mathbb{S}^n$ quando $s = 0$ são círculos geodésicos centrados em a. Podemos ajustar a norma de Y ao longo das linhas de fluxo de forma que, nos pontos de $\mathbb{S}^n$, o campo Y coincida com a velocidade desses círculos geodésicos com raio geodésico ϕ. Sendo assim, temos

$$\langle Y, Y\rangle = \langle \frac{\partial \Psi}{\partial s}, \frac{\partial \Psi}{\partial s}\rangle = \sin^2\phi = \cos^2 r.$$

Portanto, a métrica esférica é escrita como

$$\cos^2 r \mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}r^2 + \sin^2 r \mathrm{d}\sigma^2$$

Uma outra classe natural de exemplos com que lidaremos a seguir são os produtos riemannianos da forma $\mathbb{M}^n(\kappa)\times\mathbb{R}$, em que o campo de Killing em consideração é o campo paralelo coordenado $\frac{\partial}{\partial s}$ associado à coordenada natural s do fator $\mathbb{R}$. Neste caso, coordenadas cilíndricas são facilmente definidas, de modo que a expressão da métrica ambiente nesta carta é da forma

$$ds^2 + dr^2 + \mathrm{sn}_\kappa^2(r)d\vartheta^2. \tag{1.13}$$

Observamos que, quando $\kappa \neq 0$, estes produtos não têm curvatura seccional constante.

Capítulo 2

Gráficos de Killing

Mantemos, doravante, a notação fixada no capítulo anterior. Dados um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{P}$ com fecho compacto e fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ de classe $C^{2,\alpha}$, o *gráfico de Killing* de uma função $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ é, por definição, a hipersuperfície

$$\Sigma = \{q = \Psi(u(p), p) : p \in \bar{\Omega}\}.$$

Alternativamente, Σ é o lugar geométrico definido pela equação

$$\Phi(s, p) = s - u(p) = 0,$$

onde definimos trivialmente a extensão $u(s, p) = u(p)$, $s \in \mathbb{R}$, da função u. O gráfico Σ é globalmente orientado pelo vetor normal unitário

$$N = \frac{1}{W}\,\bar{\nabla}\Phi. \tag{2.1}$$

onde $W = |\bar{\nabla}\Phi|$. Adotando a notação abreviada $\partial_s = \frac{\partial}{\partial s}$ e $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, calculamos explicitamente, no ponto $q = \Psi(u(p), p)$,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}\Phi(q) &= \bar{g}^{00}\,\partial_s - \bar{g}^{ij}(p)\,u_i\,\partial_j(q) = \gamma\partial_s - \sigma^{ij}(p)\,u_i\,\Psi_{u(p)_*}\partial_j(p)\\ &= \gamma\,\partial_s - \Psi_{u(p)_*}\nabla u(p),\end{aligned}$$

onde ∇ denota a conexão Riemanniana em $\mathbb{P}$ com respeito à métrica induzida e

$$\nabla u = \sigma^{ij}u_i\partial_j = u^j\partial_j$$

é o gradiente de u relativamente a esta métrica. Vale ressaltar que

$$|\nabla u|^2 = u^i u_i.$$

Denotamos, no que segue,

$$W^2 = \gamma + |\nabla u|^2.$$

Fixada esta notação, concluímos que

$$N = \frac{1}{W}(\gamma\,\partial_s - \Psi_*\nabla u) \tag{2.2}$$

onde Ψ_* denota abreviadamente a diferencial Ψ_{s*}. Observamos que a orientação do gráfico é escolhida de modo que $\langle N, Y\rangle > 0$.

Por sua vez, o espaço tangente a Σ no ponto $q = \Psi(u(p), p)$ é gerado pelos vetores tangentes

$$X_i = \Psi_*\partial_i + u_i\partial_s,$$

o que implica, em particular, que a métrica induzida em Σ tem componentes

$$g_{ij} = \sigma_{ij} + \frac{u_i u_j}{\gamma},$$

ao passo que os componentes de sua versão contravariante são

$$g^{ij} = \sigma^{ij} - \frac{u^i u^j}{\gamma + |\nabla u|^2}.$$

Agora, determinamos a segunda forma fundamental de Σ, definida como o tensor simétrico

$$a_{ij} = \langle\bar\nabla_{X_i}X_j, N\rangle.$$

Temos

$$\begin{aligned} Wa_{ij} = {} & \gamma u_{ij}\langle\partial_0, \partial_0\rangle + \gamma u_i u_j\langle\bar\nabla_{\partial_0}\partial_0, \partial_0\rangle + \gamma u_j\langle\bar\nabla_{\partial_i}\partial_0, \partial_0\rangle + \gamma u_i\langle\bar\nabla_{\partial_j}\partial_0, \partial_0\rangle \\ & + \gamma\langle\bar\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_0\rangle - u_i u_j\langle\bar\nabla_{\partial_0}\partial_0, \Psi_{u(p)*}\nabla u\rangle - u_j\langle\bar\nabla_{\partial_i}\partial_0, \Psi_{u(p)*}\nabla u\rangle \\ & - u_i\langle\bar\nabla_{\partial_j}\partial_0, \Psi_{u(p)*}\nabla u\rangle - \langle\bar\nabla_{\partial_i}\partial_j, \Psi_{u(p)*}\nabla u\rangle. \end{aligned}$$

Do fato que $\mathbb{P}$ é hipersuperfície totalmente geodésica, resulta

$$\langle\bar\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_0\rangle = 0.$$

Os termos relativos à aceleração das linhas de fluxo são

$$\langle\bar\nabla_{\partial_0}\partial_0, \partial_0\rangle = \frac{1}{2}\partial_s\gamma^{-1} = 0$$

e

$$\langle\bar\nabla_{\partial_i}\partial_0, \partial_0\rangle = \frac{1}{2}\partial_i\gamma^{-1} = -\frac{\gamma_i}{2\gamma^2}.$$

Similarmente, usando o fato que, para cada $s \in \mathbb{R}$, a aplicação Ψ_s é uma isometria, temos

$$\langle \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j|_q, \Psi_{u(p)\,*} \nabla u(p) \rangle = \langle \Psi_{u(p)\,*} \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j|_p, \Psi_{u(p)\,*} \nabla u(p) \rangle = \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j|_p, \nabla u|_p \rangle$$

e

$$\langle \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_0, \Psi_{u(p)*} \nabla u \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_0|_q, u^j \partial_j|_q \rangle = 0.$$

Posto que $u_{i;j} = u_{ij} - \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \nabla u \rangle$ são os componentes do hessiano de u, temos

$$W a_{ij} = u_{i;j} - \frac{\gamma_i}{2\gamma} u_j - \frac{\gamma_j}{2\gamma} u_i - \frac{\gamma_k}{2\gamma^2} u_i u_j u^k.$$

Deste modo, infere-se facilmente que

$$\begin{aligned} W^3 a^i_k &= W^3 g^{ij} a_{jk} \\ &= (W^2 \sigma^{ij} - u^i u^j) u_{j;k} - \frac{1}{2} u^i \gamma_k - W^2 \frac{\gamma^i}{2\gamma} u_k. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Tomando traços e, em seguida, dividindo ambos os lados da expressão acima por W^3, obtém-se a equação da curvatura média H do gráfico de Killing de u, a saber,

$$nH = \frac{1}{W} \Big(\sigma^{ij} - \frac{u^i u^j}{W^2} \Big) u_{i;j} - \frac{\gamma_i u^i}{2W^3} - \frac{1}{W} \frac{\gamma_i u^i}{2\gamma}. \tag{2.4}$$

Definimos, portanto, o operador

$$\mathcal{Q}[u] := \left(\frac{u^i}{\sqrt{\gamma + u^k u_k}} \right)_{;i} - \frac{1}{\sqrt{\gamma + u^k u_k}} \frac{\gamma_i u^i}{2\gamma} - nH. \tag{2.5}$$

Seja ϕ uma função $C^{2,\alpha}$ em $\Gamma = \partial\Omega$. O gráfico de Killing de ϕ, definido como o lugar geométrico dos pontos da forma

$$q = \Psi(\phi(p), p), \quad p \in \Gamma,$$

é uma subvariedade de codimensão 2 em M. Portanto, dizemos que Σ é um gráfico de Killing com curvatura média prescrita H e fronteira prescrita por ϕ se u resolve o problema de Dirichlet

$$\mathcal{Q}[u] = 0, \quad u|_\Gamma = \phi \tag{2.6}$$

para o operador diferencial parcial elíptico e quase-linear $\mathcal{Q}$. Podemos aplicar a este operador o Princípio do Máximo e o Princípio de Comparação expostos em [9]. Na verdade, isto requer que cumpramos a condição $\partial_s H \geq 0$, condição atendida, em particular, quando a curvatura média do gráfico é constante.

Esboçaremos, mais adiante, a prova destes fatos e algo da teoria de equações diferenciais parciais quase-lineares elípticas, em termos da qual estudaremos a existência de soluções do problema (2.6).

2.1 A Equação da Curvatura Média na Forma Divergente

Nesta seção, reobtemos a equação da curvatura média do gráfico de Killing de uma função u a partir do cálculo da divergência de um campo de vetores. Da definição da aplicação de Weingarten, segue diretamente que

$$nH(q) = -\text{tr}_\Sigma \bar{\nabla} N = -\text{div}_\Sigma N,$$

onde a divergência é calculada com respeito à métrica induzida no gráfico Σ. Consideramos um sistema normal de coordenadas $x^1, \ldots, x^n$ em torno de um ponto $p \in \mathbb{P}$ de modo que os campos coordenados $\partial_1, \ldots, \partial_n$ são ortonormais no ponto p, isto é, tal que $\sigma_{ij}|_p = \delta_{ij}$. Neste caso, $E_0 = \gamma^{1/2}\partial_s, E_1(q) = \Psi_* \,\partial_1(p), \ldots, E_n(q) = \Psi_* \,\partial_n(p)$ define um referencial ortonormal em $q = \Psi(u(p), p)$.

A expressão (2.2) assegura que

$$-nH = g^{ij}\langle \bar{\nabla}_{\partial_i} N, \partial_j\rangle = g^{ij}\langle \bar{\nabla}_{\partial_i} N, \partial_j\rangle + \langle \bar{\nabla}_N N, N\rangle = \text{div}_M \frac{\bar{\nabla}\Phi}{W}(q),$$

onde, desta vez, consideramos a divergência calculada em M. Utilizando o referencial ortonormal definido há pouco, calculamos este divergente da seguinte forma

$$\text{div}_M \frac{\bar{\nabla}\Phi}{W} = \langle \bar{\nabla}\big(\frac{\gamma}{W}\big), \partial_s\rangle + \frac{\gamma}{W}\text{div}_M \partial_s - \gamma\langle \bar{\nabla}_{\partial_s}\frac{\Psi_*\nabla u}{W}, \partial_s\rangle - \langle \bar{\nabla}_{E_i}\frac{\Psi_*\nabla u}{W}, E_i\rangle.$$

Da equação de Killing, deduzimos que o campo vetorial $Y = \partial_s$ é livre de divergência. Além disso, as funções γ e W não dependem de s, visto que os componentes da métrica ambiente são constantes ao longo do fluxo gerado por Y. Assim,

$$\begin{aligned}
\text{div}_M \frac{\bar{\nabla}\Phi}{W} &= -\gamma\langle \bar{\nabla}_{\partial_s}\frac{\Psi_*\nabla u}{W}, \partial_s\rangle - \sum_i \langle \bar{\nabla}_{E_i}\frac{\Psi_*\nabla u}{W}, E_i\rangle \\
&= \gamma\langle \frac{\Psi_*\nabla u}{W}, \bar{\nabla}_{\partial_s}\partial_s\rangle - \sum_i \langle \bar{\nabla}_{\Psi_*\partial_i}\Psi_*\frac{\nabla u}{W}, \Psi_*\partial_i\rangle \\
&= \gamma\langle \frac{\Psi_*\nabla u}{W}, \bar{\nabla}_{\partial_s}\partial_s\rangle - \sum_i \langle \bar{\nabla}_{\partial_i}\frac{\nabla u}{W}, \partial_i\rangle.
\end{aligned}$$

Uma vez que Ψ_* preserva o campo ∂_s, pela propriedade de grupo a um parâmetro do fluxo, temos

$$\gamma(q)\langle \frac{\Psi_*\nabla u}{W}, \bar{\nabla}_{\partial_s}\partial_s\rangle(q) = \gamma(p)\langle \frac{\nabla u}{W}, \bar{\nabla}_{\partial_s}\partial_s\rangle(p).$$

Resulta que

$$nH(p) = \sum_i \langle \bar{\nabla}_{\partial_i}\frac{\nabla u}{W}, \partial_i\rangle - \gamma\langle \frac{\nabla u}{W}, \bar{\nabla}_{\partial_s}\partial_s\rangle,$$

onde as expressões em ambos os lados são calculadas em $p \in \mathbb{P}$. Visto que $\mathbb{P}$ é totalmente geodésica, podemos escrever

$$\mathrm{div}_{\mathbb{P}}\Big(\frac{\nabla u}{W}\Big) - \gamma\langle\frac{\nabla u}{W}, \bar{\nabla}_{\partial_s}\partial_s\rangle - nH = 0, \tag{2.7}$$

onde, por fim, a divergência refere-se à métrica induzida em $\mathbb{P}$. Observamos que o campo $\bar{\nabla}_{\partial_s}\partial_s$ é tangente a $\mathbb{P}$, como consequência da equação de Killing. Em vista da expressão,

$$\langle\bar{\nabla}\gamma, \nabla u\rangle = 2\gamma^2\langle\bar{\nabla}_{\partial_s}\partial_s, \nabla u\rangle,$$

não é difícil verificar que (2.7) pode ser posta na forma

$$\frac{1}{W}\Big(\sigma^{ij} - \frac{u^i u^j}{W^2}\Big)u_{i;j} - \frac{1}{W^3}(\gamma + W^2)\langle\nabla u, \bar{\nabla}_{\partial_s}\partial_s\rangle - nH = 0, \tag{2.8}$$

mencionando uma vez mais que $(u_{i;j})_{i,j=1}^n$ são os componentes do hessiano de u em termos das coordenadas $(x^i)_{i=1}^n$ em $\mathbb{P}$. Denotando

$$A^{ij}(x, \nabla u) = \frac{1}{W}\Big(\sigma^{ij} - \frac{u^i u^j}{W^2}\Big) \tag{2.9}$$

e

$$B(x, \nabla u) = -\frac{1}{W^3}(\gamma + W^2)\langle\nabla u, \bar{\nabla}_{\partial_s}\partial_s\rangle, \tag{2.10}$$

a equação da curvatura média passa a ser escrita como

$$\mathcal{Q}[u] = A^{ij}u_{i;j} + B - nH = 0.$$

Observamos que a matriz $(A^{ij})_{i,j=1}^n$ é definida-positiva com autovalores dados por

$$\lambda_- = \frac{\gamma}{W^3} \quad \text{e} \quad \lambda_+ = \frac{1}{W}$$

cujas multiplicidades são 1 e $n-1$, correspondendo às direções paralela e ortogonais a ∇u, respectivamente. Note que $\lambda_- \leq \lambda_+$, dado que $\gamma \leq W^2$.

2.1.1 Abordagem Variacional

O fato de que a equação da curvatura média pode ser posta na forma divergente é diretamente vinculado à caracterização de funções descrevendo gráficos com curvatura média constante serem extremos de um problema variacional.

Consideramos o funcional não-paramétrico

$$\mathcal{I}[u] = \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\mathrm{d}x,$$

onde

$$F(x,u,\nabla u) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{\gamma + |\nabla u|^2}\sqrt{\det \sigma_{ij}}$$

definido em

$$\mathcal{C} = \{u \in C^{0,1}(\bar{\Omega}) : u|_\Gamma = \phi\}.$$

Pontos críticos deste funcional são soluções fracas da equação da curvatura média para gráficos de Killing mínimos, isto é, com curvatura média nula e fronteira prescrita. Isto significa que os extremizantes de $\mathcal{I}$ são funções lipschtzianas - com derivadas definidas em quase toda parte - satisfazendo a equação da curvatura média $H = 0$ e dado de fronteira prescrita no sentido das distribuições.

A lagrangiana F é o elemento de volume do gráfico Σ. De fato, calcula-se

$$X_1 \wedge \ldots \wedge X_n = (\partial_1 + u_1\partial_s) \wedge \ldots \wedge (\partial_n + u_n\partial_s)$$
$$= \partial_1 \wedge \ldots \wedge \partial_n + \sum_{i=1}^n u_i \partial_1 \wedge \ldots \wedge \partial_{i-1} \wedge \partial_s \wedge \partial_{i+1} \wedge \ldots \wedge \partial_n.$$

Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} X_1 \wedge \ldots \wedge X_n &= |\partial_1 \wedge \ldots \wedge \partial_n| \frac{\partial_s}{|\partial_s|} - |\partial_s||\partial_1 \wedge \ldots \wedge \partial_n|\sigma^{ij} u_i \partial_j \\ &= |\partial_s||\partial_1 \wedge \ldots \wedge \partial_n|\big(\gamma\partial_s - \Psi_* \nabla u\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}}|\partial_1 \wedge \ldots \wedge \partial_n| W N. \end{aligned}$$

Portanto, resulta da identidade de Lagrange que

$$\begin{aligned} \sqrt{\det g_{ij}} &= \sqrt{\det\langle X_i, X_j\rangle} = |X_1 \wedge \ldots \wedge X_n| \\ &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{\gamma + |\nabla u|^2}\sqrt{\det \sigma_{ij}}. \end{aligned}$$

A equação de Euler-Lagrange que caracteriza extremos de $\mathcal{I}$ é

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \left(\frac{F u^i}{\sqrt{\gamma + |\nabla u|^2}}\right)_{,i} = 0, \tag{2.11}$$

onde a vírgula denota derivadas parciais. Entretanto, temos

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial u^i} = \frac{1}{2W\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial u^i}(\sigma_{kl}u^k u^l)\sqrt{\det \sigma_{kl}} = \frac{G}{W}\sigma_{ik}u^k = \frac{G}{W}u_i,$$

onde

$$W = \sqrt{\gamma + |\nabla u|^2} \quad \text{e} \quad G = \frac{F}{W} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{\det \sigma_{kl}}.$$

Dado que

$$\left(\frac{Gu^i}{W}\right)_{,i} = G\left(\frac{u^i}{W}\right)_{,i} + \frac{u^i G_{,i}}{W} = G\left(\frac{u^i}{W}\right)_{,i} + G\frac{u^i}{W}\left(-\frac{\gamma_i}{2\gamma} + \frac{\partial_i\sqrt{\det \sigma_{kl}}}{\sqrt{\det \sigma_{kl}}}\right),$$

obtemos a partir de (2.11) que

$$-\left(\frac{u^i}{W}\right)_{,i} + \frac{1}{W}\left(\frac{u^i\gamma_i}{2\gamma}\right) + \frac{u^i}{W}\frac{\partial_i\sqrt{\det \sigma_{kl}}}{\sqrt{\det \sigma_{kl}}} = 0.$$

Uma vez que

$$\sqrt{\det \sigma_{kl}} = |\partial_1 \wedge \ldots \wedge \partial_n| \quad \text{e} \quad \nabla_{\partial_i}(\partial_1 \wedge \ldots \wedge \partial_n) = \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{j}\, \partial_1 \wedge \ldots \wedge \partial_n$$

temos

$$\frac{\partial_i\sqrt{\det \sigma_{kl}}}{\sqrt{\det \sigma_{kl}}} = \Gamma_{ij}^{j}.$$

Concluímos que (2.5), no caso particular em que $H = 0$, é a equação de Euler-Lagrange para $\mathcal{I}$ como afirmado. Restringindo o funcional $\mathcal{I}$ ao impor um vínculo sobre o volume, caracterizamos extremizantes como funções descrevendo gráficos de curvatura média constante.

Capítulo 3

Resultados de Existência

O seguinte resultado geral foi demonstrado em [6] para o caso mais geral em que a distribuição associada ao campo de Killing não é integrável. Neste contexto, a existência de folhas integrais, em que são fixadas coordenadas locais para efetuar os cálculos, é substituída pela seguinte configuração: a variedade M é o espaço total de uma submersão riemanniana $\pi : M \to \mathbb{P}$, onde $\mathbb{P}$ é uma variedade riemanniana $n-$dimensional não necessariamente imersa em M, de tal modo que o campo Y é tangente à distribuição vertical, unidimensional, definida por $q \mapsto \ker \pi_*(q)$. Fixado um domínio $\Omega \subset \mathbb{P}$, exigimos, portanto, que exista uma imersão $\iota : \bar{\Omega} \to M$ transversal às linhas de fluxo de Y no cilindro de Killing M_0 sobre $\bar{\Omega}$. Tal cilindro é simplesmente definido por $\pi^{-1}(\Omega)$. A curvatura média da fronteira do cilindro de Killing, ou seja, do cilindro de Killing $K = \pi^{-1}(\Gamma)$ sobre $\Gamma = \partial\Omega$ é denotada por H_{cyl}.

No enunciado abaixo, *Ric* denota o tensor de Ricci de M. A hipótese sobre o tensor de Ricci implica que a curvatura média de cilindros de Killing geodesicamente paralelos não decresce ao movermos os cilindros na direção de seu vetor curvatura média.

Teorema 1. (Veja [6]) *Seja $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio $C^{2,\alpha}$ com fecho compacto, cuja fronteira denotamos por Γ. Suponhamos que $H_{\text{cyl}} > 0$ e, além disso, que*

$$\inf_M \text{Ric} \geq -n \inf_\Gamma H_{\text{cyl}}^2. \tag{3.1}$$

Dadas as funções $H \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ e $\phi \in C^{2,\alpha}(\Gamma)$, suponha que exista uma imersão $C^{2,\alpha}$ $\iota : \bar{\Omega} \to M$ tranversal às linhas de fluxo de Y em M_0. Se

$$\sup_\Omega |H| \leq \inf_\Gamma H_{\text{cyl}}, \tag{3.2}$$

então existe uma única função $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ satisfazendo $u|_\Gamma = \phi$ cujo gráfico de Killing Σ tem curvatura média H.

Estes resultados estendem, para ambientes riemannianos bastante gerais, o teorema clássico de existência de James Serrin [19]. Um caso interessante *per si* de aplicação do Teorema 1 assegura a existência de gráficos helicoidais em espaços euclidianos e, mais geralmente, em submersões riemannianas. O resultado abaixo foi demonstrado em [7].

Teorema 2. (Veja [7]) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{P}$ *um domínio* $C^{2,\alpha}$ *cuja fronteira denotamos por* Γ. *Suponhamos que* $H_{\mathrm{cyl}} \geq 0$ *e* $\mathrm{Ric}_M| \geq -n \inf_\Gamma H^2_{\mathrm{cyl}}$. *Considere* $H \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ *e* $\phi \in C^{2,\alpha}(\Gamma)$ *funções tais que*

$$|H| \leq \inf_{\Gamma} H_{\mathrm{cyl}}.$$

Então, existe uma única função $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ *satisfazendo* $u|_\Gamma = \phi$ *cujo gráfico helicoidal tem curvatura média* H *e dados de fronteira* ϕ.

Apresentamos, na sequência, alguns resultados parciais cujas demonstrações envolvem menor aparato técnico, conquanto utilizem as idéias centrais do método empregado nas situações mais gerais.

3.1 O Método da Continuidade

Aplicamos o método da continuidade (v. [9]) à família de problemas definidos por

$$\mathcal{Q}_\sigma[u] = 0, \quad u|_\Gamma = \sigma\phi, \tag{3.3}$$

onde $\sigma \in [0,1]$ e

$$\mathcal{Q}_\sigma[u] = A^{ij} u_{i;j} + B - n\sigma H.$$

O subconjunto I de $[0,1]$ consistindo nos valores de σ para os quais o problema de Dirichlet correspondente tem uma solução $C^{2,\alpha}$ é não-vazio, uma vez que $0 \in I$. A hipótese $H_s \leq 0$ implica que I é aberto, o que segue diretamente do Teorema da Função Implícita (v. [9], Teorema 17.6). O fato de que I é fechado deriva das estimativas *a priori* demonstradas na sequência deste trabalho. Deste modo, por conexidade de $[0,1]$, concluímos que $1 \in I$, siginificando que o problema de Dirichlet original (2.6) admite solução. Para maiores detalhes, mencionamos ao leitor à referência clássica [9].

As estimativas *a priori* envolvem obter cotas superiores uniformes para a altura e a inclinação dos gráficos. Analiticamente, é preciso estabelecer um limite uniforme em $\sigma \in [0,1]$ para as normas C^0 e C^1 das soluções dos problemas na homotopia que definimos há pouco. Estas estimativas são determinadas utilizando-se barreiras geométrico-analíticas, ou seja, subsoluções e supersoluções dos problemas de Dirichlet em (3.3).

A parte da unicidade de soluções nos resultados segue tanto do Príncipio do Máximo para equações elípticas quase-lineares quanto de um argumento geométrico utilizando uma fórmula do fluxo, consequência do Teorema da Divergência aplicado ao campo de Killing Y, o qual é livre de divergência.

Analisamos, no que segue, apenas alguns casos particulares em que a construção de barreiras requer ferramentas analíticas mais simples, de emprego direto. Indicamos ao leitor as referências [5], [6] e [7] para detalhes completos sobre a prova dos teoremas 1 e 2 acima.

3.2 Esferas Geodésicas como Barreiras

Nesta seção, exibimos barreiras de natureza geométrica cuja existência, todavia, requer condições mais restritivas sobre a geometria do ambiente, ou sobre as funções de curvatura média prescrita admissíveis.

Teorema 3 (Veja [5])**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio $C^{2,\alpha}$, limitado, com bordo Γ, contido em um disco normal geodésico de raio r_0. Suponha que $\inf_M \operatorname{Ric}_M \geq -(n-1)k$ para alguma constante positiva k. Sejam $H \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ e $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ dados. Suponha que $H_{\text{cyl}} \geq 0$, que $\sup_\Omega |H| \leq \inf_\Gamma H_{\text{cyl}}$ e que*

$$r_0 \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \coth^{-1} \frac{\sup_\Omega |H|}{\sqrt{k}}.$$

Então, existe uma única função $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ satisfazendo $u|_\Gamma = \phi$, cujo gráfico de Killing tem curvatura média H.

Segundo a hipótese do Teorema 3, supomos que a curvatura de Ricci é limitada inferiormente, isto é, que exista uma constante positiva k tal que

$$\operatorname{Ric}_M \geq -(n-1)k.$$

Neste caso, apresentamos uma estratégia para obter estimativas de altura para u. O método em consideração se baseia no Teorema de Comparação do Hessiano e adota esferas geodésicas como barreiras.

Fixamos um ponto $o \in \mathbb{P}$ e consideramos a função distância $r = \operatorname{dist}(o, \cdot)$. Seja $\mathbb{H}^{n+1}(-k)$ o espaço hiperbólico com curvatura seccional constante $-k$ e r_{hyp} a respectiva função distância com respeito a um dado ponto. O Teorema de Comparação do Laplaciano (cf. [18], p. 5, Corolário 1.1) assegura que

$$\Delta r \leq \Delta_{\mathbb{H}^{n+1}(-k)} r_{\text{hyp}}$$

em pontos correspondentes (equidistantes), sempre que r for diferenciável. Isto implica que, se considerarmos bolas geodésicas B em M fora do *cut locus* de M e B_{hyp} em $\mathbb{H}^{n+1}(-k)$, ambas com mesmo raio r_0, então as curvaturas médias das respectivas esferas geodésicas, calculadas com respeito ao gradiente das distâncias, satisfazem

$$-H_{\partial B} \leq -H_{\partial B_{\text{hyp}}} = -\sqrt{k} \coth \sqrt{k}\, r_0.$$

Assim, supondo que a função prescrita H satisfaz

$$r_0 \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \coth^{-1} \frac{\max_\Omega |H|}{\sqrt{k}},$$

deduzimos que

$$|H| \leq H_{\partial B}.$$

Logo, supondo, ainda, que o domínio Ω esteja contido em um disco geodésico de raio r_0 em $\mathbb{P}$, concluímos que a esfera geodésica correspondente em M é uma barreira para estimativas C^0 do problema (2.6). Para obtermos esta estimativa, é suficiente movermos uma esfera geodésica ao longo das linhas de fluxo de Y e então aplicar o Princípio do Máximo a uma vizinhança do primeiro ponto de contato entre o gráfico Σ e a esfera.

3.3 Esferas de Curvatura Média Constante

Supomos, agora, que a métrica induzida em $\mathbb{P}$ é invariante por rotações. Mais precisamente, que a métrica em $\mathbb{P}$ é da forma

$$\mathrm{d}r^2 + \xi^2(r)\mathrm{d}\theta^2,$$

quando escrita em termos de coordenadas $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{n-1}$, onde $\mathrm{d}\theta^2$ denota a métrica usual em $\mathbb{S}^{n-1}$. Supomos, ademais, que $\varrho = \varrho(r)$, isto é, que a norma do campo de Killing não depende de θ. Neste caso, a métrica ambiente é escrita em termos de coordenadas cilíndricas s, r, θ como

$$\varrho^2(r)\mathrm{d}s^2 + \mathrm{d}r^2 + \xi^2(r)\mathrm{d}\theta^2$$

e M um produto duplamente *warped* com respeito a funções da coordenada r. Neste caso particular que, todavia, inclui todos os exemplos vistos no Capítulo 1, demonstra-se o seguinte teorema por recurso às barreiras geométricas naturalmente definidas.

Teorema 4. *Suponha que a métrica induzida em $\mathbb{P}$ é da forma*

$$\mathrm{d}r^2 + \xi^2(r)\mathrm{d}\theta^2$$

para uma dada função ξ, onde $\mathrm{d}\theta^2$ é a métrica canônica na esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1}$. Seja $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio limitado com bordo $\Gamma \in C^{2,\alpha}$ contido em um disco normal geodésico com raio r_0.

Sejam $H \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ e $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ dados. Suponha que $H_{\mathrm{cyl}} \geq 0$, que $\sup_{\Omega}|H| \leq \inf_{\Gamma} H_{\mathrm{cyl}}$ e que

$$\sup_{\Omega}|H| \leq -\frac{\varrho(r_0)\xi^{n-1}(r_0)}{\int_0^{r_0}\varrho(r)\xi^{n-1}(r)\mathrm{d}r}$$

onde $\varrho = |Y|^2$. Então, existe uma única função $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ satisfazendo $u|_{\Gamma} = \phi$ cujo gráfico de Killing possui curvatura média H.

As barreiras são hipersuperfícies rotacionalmente invariantes com curvatura média constante. Uma hipersuperfície rotacionalmente invariante Σ_0 é parametrizada por uma imersão $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} \to M$ cuja expressão coordenada é dada por

$$(u, \theta) \mapsto (s(u), r(u), \theta),$$

onde u é o parâmetro comprimento de arco da curva perfil $\theta = \theta_0$. Isto significa que u é definido por $\varrho^2\dot{s}^2 + \dot{r}^2 = 1$ e que a métrica induzida em Σ_0 é

$$\mathrm{d}u^2 + \xi^2(u)\mathrm{d}\theta^2.$$

Se Σ_0 possui curvatura média constante H_0, então as coordenadas da curva perfil satisfazem uma equação de primeira ordem dada pela fórmula do fluxo. Na fórmula do fluxo no apêndice, fixamos Γ como o círculo geodésico de raio $r = r(u)$, dado pela intersecção de Σ_0 e a folha $\mathbb{P}_s$, onde $s = s(u)$. Assim, consideramos D como o disco geodésico em $\mathbb{P}_s$ com raio $r = r(u)$. O vetor conormal é a velocidade unitária $\dot{s}\partial_s + \dot{r}\partial_r$. Finalmente, o campo de Killing Y corresponde ao campo coordenado ∂_s. Assim, temos

$$\langle Y, \nu\rangle = \varrho^2(r(u))\dot{s} \;\text{ e }\; \langle Y, N_D\rangle = \langle Y, \frac{Y}{|Y|}\rangle = \varrho(r(u)).$$

Portanto, reunindo essas expressões na fórmula do fluxo, obtém-se

$$c \;=\; nH_0\int_D \varrho + \int_\Gamma \dot{s}\varrho^2 = nH_0\int_0^r\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\varrho\xi^{n-1}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta + \int_{\mathbb{S}^{n-1}}\dot{s}\varrho^2\xi^{n-1}\,\mathrm{d}\theta. \qquad (3.4)$$

Como estamos integrando em um valor fixo de s e, portanto, em um valor fixo de u, temos

$$nH_0\int_0^r \varrho\xi^{n-1}\mathrm{d}r + \dot{s}(r(u))\varrho^2(r)\xi^{n-1}(r) = \frac{c}{\omega_n}.$$

Derivar esta expressão com respeito a u resulta em uma EDO de segunda ordem, a qual caracteriza hipersuperfícies invariantes com curvatura média constante H_0. As soluções compactas desta EDO satisfazem $r = 0$ nos pontos de altura máxima e mínima, onde $\dot{s} = 0$. Portanto, esses exemplos compactos correspondem a tomar $c = 0$. Por outro lado, nos pontos de máximo para r, temos $\varrho^2\dot{s}^2 = 1$ e, deste modo,

$$nH_0 \int_0^{r_0} \varrho(r)\xi^{n-1}(r)\mathrm{d}r + \varrho(r_0)\xi^{n-1}(r_0) = 0,$$

onde r_0 é o valor máximo de r. Assim, a curvatura média de um exemplo compacto, rotacionalmente invariante, com raio máximo r_0, satisfaz

$$nH_0 = -\frac{\varrho(r_0)\xi^{n-1}(r_0)}{\int_0^{r_0} \varrho(r)\xi^{n-1}(r)\mathrm{d}r} =: -F(r_0).$$

Se supusermos que $\Omega \subset \mathbb{P}$ está contida num disco geodésico com raio r_0, então essas esferas com curvatura média constante são barreiras para a altura do gráfico de Killing com curvatura média prescrita $H(x)$ satisfazendo

$$n|H(x)| \leq F(r_0).$$

O valor de $F(r_0)$ pode ser dado explicitamente em casos particulares tais como $\mathbb{H}^{n+1}(-k)$ e $\mathbb{H}^n(-k) \times \mathbb{R}$.

3.4 Apêndice: uma fórmula do fluxo

Considere uma hipersuperfície Σ em M com bordo Γ e outra hipersuperfície D tal que $\Sigma \cup D$ limita um domínio U em M. Seja H uma função, suposta constante ao longo das linhas de fluxo de Y. Escolha uma orientação de $\Sigma \cup D$ dada pelo campo normal unitário N ao longo de Σ e N_D ao longo de D. Pela equação de Killing, temos

$$\mathrm{div}_M HY = H\mathrm{div}_M Y + \langle \bar{\nabla} H, Y\rangle = 0.$$

Assim, aplicando o Teorema de Stokes ao domínio U, temos

$$0 = \int_U \mathrm{div}_M HY = \int_\Sigma H\langle Y, N\rangle + \int_D H\langle Y, N_D\rangle.$$

No entanto, se considerarmos um referencial ortonormal $N, e_1, \ldots, e_n$ adaptado a Σ, deduzimos da equação de Killing que

$$0 = \sum_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} Y, e_i\rangle = \sum_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} Y^T, e_i\rangle + \sum_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_i\rangle = \mathrm{div}_\Sigma Y^T - nH\langle Y, N\rangle.$$

Logo, aplicando uma vez mais o Teorema de Stokes, desta vez à Σ, obtemos

$$n\int_\Sigma H\langle Y, N\rangle = \int_\Gamma \langle Y, \nu\rangle,$$

onde ν é o co-normal exterior unitário de Σ ao longo Γ. As duas expressões obtidas acima podem ser reunidas na *fórmula do fluxo*

$$n\int_D H\langle Y, N_D\rangle + \int_\Gamma \langle Y, \nu\rangle = 0.$$

Uma variante útil deste raciocínio é a de se considerar uma hipersuperfície Γ em Σ não homóloga a zero Σ tal que $\Gamma = \partial D$. Então, temos

$$n\int_D H\langle Y, N_D\rangle + \int_\Gamma \langle Y, \nu\rangle = c,$$

onde c é uma constante dependendo apenas da classe de homologia de Γ.

Capítulo 4

Estimativas do Gradiente

Nesta seção, consideramos o caso particular em que $M = \mathbb{P} \times \mathbb{R}$ é o produto riemanniano. Neste caso, $Y = \partial_s$ um campo de vetores paralelo e suas linhas de fluxo são geodésicas. Supomos que $\mathrm{Ric}_M \geq 0$ e que $\partial\Sigma = \partial\Omega$. Além disso, supomos H constante. Sob estas hipóteses, pretendemos demonstrar o seguinte resultado de existência.

Teorema 5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio $C^{2,\alpha}$ com fecho compacto, cuja fronteira denotamos por Γ. Supomos que $H_{\mathrm{cyl}} > 0$ e, além disso, que $\mathrm{Ric} \geq 0$. Dada uma constante não-negativa H tal que*

$$H < \inf_{\Gamma} H_{\mathrm{cyl}}, \tag{4.1}$$

então existe uma única função $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ satisfazendo $u|_\Gamma = 0$ cujo gráfico de Killing Σ tem curvatura média H e bordo Γ.

No que segue, podemos supor, sem perda de generalidade, que Y tem norma constante igual a 1. Neste capítulo, ∇ denota, excepcionalmente, a conexão riemanniana no gráfico Σ. Além disso, Δ_Σ ou Δ denotam, ambos, o operador de Laplace-Beltrami em Σ.

A fim de obtermos estimativas de altura e do gradiente, definimos as funções

$$h = s|_\Sigma$$

e

$$\Theta = \langle Y, N \rangle.$$

Em termos não-paramétricos, temos $h = u$ e $\Theta = 1/W$. Fixado um sistema de coordenadas geodésicas local $\{e_i\}_{i=1}^n$ em Σ com $\nabla e_i(p) = 0$, para algum $p \in \Sigma$, calculamos

$$\langle \nabla h, e_i \rangle = \langle \bar{\nabla} s, e_i \rangle = \langle \partial_s^T, e_i \rangle,$$

onde T denota a projeção tangente sobre $T\Sigma$. Assim, segue que

$$\nabla h = \partial_s^T = \partial_s - \Theta N.$$

Diferenciando mais uma vez no ponto p, temos

$$\langle \nabla_{e_i} \nabla h, e_j \rangle = \langle \bar{\nabla}_{e_i} \partial_s, e_j \rangle - \Theta \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle = \langle A_\Sigma e_i, e_j \rangle \Theta,$$

onde A_Σ indica o operador de Weingarten $A_\Sigma = -\bar{\nabla} N$ em Σ. Logo,

$$\Delta_\Sigma h = nH\Theta.$$

Agora, temos

$$\langle \nabla \Theta, e_i \rangle = \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \partial_s \rangle = -\langle A_\Sigma e_i, \partial_s^T \rangle = -\langle A_\Sigma \partial_s^T, e_i \rangle.$$

Portanto,

$$\nabla \Theta = -A_\Sigma(\partial_s^T),$$

o que resulta em

$$\begin{aligned}
-\langle \nabla_{e_i} \nabla \Theta, e_j \rangle &= \langle \nabla_{e_i} A_\Sigma(\partial_s^T), e_j \rangle = \langle (\nabla_{e_i} A_\Sigma) \partial_s^T, e_j \rangle + \langle A_\Sigma(\nabla_{e_i} \partial_s^T), e_j \rangle \\
&= \langle (\nabla_{\partial_s^T} A_\Sigma) e_i, e_j \rangle + \langle \bar{R}(e_i, \partial_s^T) N, e_j \rangle + \langle \nabla_{e_i} \partial_s^T, A_\Sigma e_j \rangle \\
&= \langle \nabla_{\partial_s^T} A_\Sigma e_i, e_j \rangle - \langle A_\Sigma(\nabla_{\partial_s^T} e_i), e_j \rangle + \langle \bar{R}(e_i, \partial_s^T) N, e_j \rangle + \langle \nabla_{e_i} \partial_s^T, A_\Sigma e_j \rangle \\
&= \partial_s^T \langle A_\Sigma e_i, e_j \rangle - \langle A_\Sigma e_i, \nabla_{\partial_s^T} e_j \rangle - \langle \nabla_{\partial_s^T} e_i, A_\Sigma e_j \rangle + \langle \bar{R}(e_i, \partial_s^T) N, e_j \rangle + \langle \nabla_{e_i} \partial_s^T, A_\Sigma e_j \rangle \\
&= \partial_s^T \langle A_\Sigma e_i, e_j \rangle + \langle \bar{R}(e_i, \partial_s^T) N, e_j \rangle - \Theta \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, A_\Sigma e_j \rangle \\
&= \partial_s^T \langle A_\Sigma e_i, e_j \rangle + \langle \bar{R}(e_i, \partial_s^T) N, e_j \rangle + \Theta \langle A_\Sigma e_i, A_\Sigma e_j \rangle.
\end{aligned}$$

Utilizamos, nos cálculos anteriores, a equação de Codazzi

$$(\nabla_U A_\Sigma) V - (\nabla_V A_\Sigma) U = \bar{R}(U, V) N, \quad U, V \in \Gamma(T\Sigma).$$

Tomando traços na expressão acima e levando em conta que $H = \mathrm{tr} A_\Sigma / n$ é constante, segue que

$$-\Delta_\Sigma \Theta = \mathrm{Ric}(\partial_s^T, N) + |A_\Sigma|^2 \Theta.$$

No entanto, como ∂_s é campo de vetores paralelo, temos

$$\bar{R}(X, Z) \partial_s = 0, \quad X, Z \in \Gamma(TM).$$

Assim, concluímos que

$$\Delta_\Sigma \Theta = -|A_\Sigma|^2 \Theta - \mathrm{Ric}(N, N) \Theta. \tag{4.2}$$

Em particular, devemos apenas que verificar que Θ é uma função superharmônica em Σ. Como $H \leq 0$, observamos que

$$\Delta_\Sigma(Hh + \Theta) = (nH^2 - |A_\Sigma|^2 - \mathrm{Ric}(N, N))\Theta \leq 0, \tag{4.3}$$

isto é, que $Hh + \Theta$ uma função superharmônica em Σ. Como $\partial\Sigma = \partial\Omega$, temos $h|_{\partial\Omega} = 0$ e, portanto,

$$\min_\Sigma(Hh + \Theta) \geq \min_\Gamma \Theta$$

Agora, fixamos $p \in \Gamma$ como um ponto onde Θ atinge seu mínimo. Note que

$$\min_\Sigma \Theta \geq \min_\Gamma \Theta = \Theta(p).$$

Então, se ν denota a direção co-normal unitária sobre Γ apontando para dentro de Σ, deduzimos que

$$\nu(\Theta) \geq 0.$$

Isto implica que

$$\langle A_\Sigma(\partial_s^T), \nu\rangle = -\langle \nabla\Theta, \nu\rangle \leq 0.$$

No entanto, como $\Gamma \subset \mathbb{P}$,

$$\partial_s^T = \langle \partial_s, \nu\rangle\nu$$

ou, equivalentemente, posto que $\partial_s = \Theta N + \langle \partial_s, \nu\rangle\nu$, obtemos

$$\langle \partial_s, \nu\rangle\langle A_\Sigma\nu, \nu\rangle \leq 0.$$

Como o gráfico está localmente contido (globalmente, de fato) no semi-espaço $s \geq 0$, temos $\langle \partial_s, \nu\rangle \geq 0$. Então, concluímos que

$$\langle A_\Sigma\nu, \nu\rangle \leq 0.$$

Agora, consideremos um sistema de coordenadas ortonormal tangente em $T_p\Sigma$ formado por $\nu(p)$ e um sistema de coordenadas ortonormal local $e_1, \ldots, e_{n-1}$ para $\Gamma \subset \mathbb{P}$. Então, calculamos em p

$$nH = \langle A_\Sigma\nu, \nu\rangle - \sum_{i=1}^{n-1}\langle \bar{\nabla}_{e_i}N, e_i\rangle.$$

Todavia,

$$N = \langle N, \partial_s\rangle\partial_s + \langle N, \eta\rangle\eta.$$

Portanto, obtemos

$$nH = \langle A_\Sigma \nu, \nu\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \langle \bar{\nabla}_{e_i}\eta, e_i\rangle\langle N, \eta\rangle = \langle A_\Sigma \nu, \nu\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla^{\mathbb{P}}_{e_i}\eta, e_i\rangle\langle N, \eta\rangle,$$

o que implica

$$nH = \langle A_\Sigma \nu, \nu\rangle + (n-1)H_\Gamma\langle N, \eta\rangle = \langle A_\Sigma \nu, \nu\rangle + nH_{\mathrm{cyl}}\langle N, \eta\rangle \leq nH_{\mathrm{cyl}}\langle N, \eta\rangle.$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da última desigualdade, obtemos, tendo em conta que $H \leq 0$ e que $\langle N, \eta\rangle \leq 0$,

$$H^2 \geq \langle N, \eta\rangle^2 H_{\mathrm{cyl}}^2 = (1 - \langle N, \partial_s\rangle^2)H_{\mathrm{cyl}}^2,$$

o que implica

$$\Theta^2(p) \geq \frac{H_{\mathrm{cyl}}^2 - H^2}{H_{\mathrm{cyl}}^2}.$$

Se supusermos que

$$|H| < \inf_\Gamma H_{\mathrm{cyl}},$$

então obtemos uma estimativa não trivial para $\Theta(p)$ e, portanto, para $\min_\Gamma \Theta$ e para $\min_\Sigma \Theta$. Isto produz automaticamente uma estimativa de altura, uma vez que

$$Hh + 1 \geq Hh + \Theta \geq \min_\Gamma \Theta = \Theta(p) \geq \sqrt{\frac{H_{\mathrm{cyl}}^2 - H^2}{H_{\mathrm{cyl}}^2}},$$

o que implica

$$h \leq \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{H^2}{H_{\mathrm{cyl}}^2}}}{|H|}.$$

Deste modo, provemos também estimativas globais do gradiente, uma vez que

$$\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = \Theta.$$

Estes cálculos demonstram e tornam explícitas as estimativas C^0 e C^1 essenciais à prova do Teorema 5.

Capítulo 5

Gráficos Helicoidais: um Protótipo para o Caso Não-Integrável

A fim de formular a noção exata de gráfico helicoidal, vamos inicialmente definir o contexto geométrico em que trabalhamos neste capítulo. Então, apresentamos a prova do resultado geral de existência, baseado fortemente no Teorema 1. Finalmente, discutimos a versão particular do teorema de existência no caso de variedades produto $M^2 \times \mathbb{R}$, o que, obviamente, inclui o espaço euclideano.

Seja $(\mathbb{P}^n, d\sigma^2)$ uma variedade Riemanniana dotada de um campo de Killing S_0. Dada uma função positiva $\varrho \in C^\infty(M)$ tal que $S_0(\varrho) = 0$, consideramos o produto *warped*

$$M^{n+1} = \mathbb{P}^n \times_\varrho \mathbb{R}$$

com a métrica

$$d\bar{\sigma}^2 = \varrho^2 dt^2 + d\sigma^2. \tag{5.1}$$

Denotamos por S o levantamento vertical de S_0 pela projeção $(p,t) \in M \mapsto p \in \mathbb{P}$. Portanto, é fácil ver que S é um campo de Killing em $(M, d\bar{\sigma}^2)$. Assim, dadas constantes $a, b \in \mathbb{R}$ com $b \neq 0$, segue que

$$Y = aS + bT$$

é um campo de Killing em M, onde $T = \partial_t$. Identificando $\mathbb{P}^n$ à hipersuperfície imersa $\mathbb{P}\times\{0\} \subset M$, denotamos por $\Psi\colon\ \mathbb{R} \times \mathbb{P} \to M$ o fluxo gerado por Y.

A seguir, por comodidade, relembramos a notação empregada anteriormente, adaptada ligeiramente ao caso de gráficos helicoidais, em que a distribuição ortogonal a Y não é necessariamente integrável.

Dado um domínio limitado Ω em $\mathbb{P}^n$ com bordo Γ, o *gráfico helicoidal* de uma função u definida em $\bar{\Omega}$ é a hipersuperfície

$$\Sigma^n = \{\Psi(u(p), p) : p \in \Omega\}.$$

O *cilindro* K sobre Γ é a hipersuperfície regrada pelas linhas de fluxo de Y ao longo de Γ, i.e.,

$$K = \{q = \Psi(s, p) : s \in \mathbb{R},\, p \in \Gamma\}$$

e H_{cyl} denota a curvatura média deste cilindro relativamente à normal apontando para dentro.

No enunciado abaixo, Ric_M denota mais uma vez o tensor de Ricci ambiente.

Teorema 2. *Seja Ω um domínio $C^{2,\alpha}$ limitado em $\mathbb{P}^n$. Suponha que $H_{\mathrm{cyl}} \geq 0$ e $\mathrm{Ric}_M \geq -n \inf_\Gamma H^2_{\mathrm{cyl}}$. Sejam $H \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ e $\varphi \in C^{2,\alpha}(\Gamma)$ dados tais que*

$$|H| \leq \inf_\Gamma H_{\mathrm{cyl}}.$$

Então, existe uma única função $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ satisfazendo $u|_\Gamma = \phi$ cujo gráfico helicoidal possui função curvatura média H e fronteira prescrita ϕ.

5.1 Prova do Teorema 2

Considere a submersão $\pi\colon\ M \to \mathbb{P}$ definida identificando-se os pontos ao longo das linhas de fluxo de $\bar{Y}$, i.e.,

$$\pi(\Psi(s, p)) = p,$$

onde $s \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{P}^n$. Seja $\mathsf{v}_1, \ldots, \mathsf{v}_n$ um referencial local definido em $\Omega \subset \mathbb{P}^n$. Por exemplo, podemos tomar um referencial de coordenadas relativo a um sistema de coordenadas locais em $\mathbb{P}^n$. Então, seja $D_1, \ldots, D_n$ o referencial de vetores básicos π-relacionado a $\mathsf{v}_1, \ldots, \mathsf{v}_n$. Segue que π é uma submersão Riemanniana de considerarmos $\mathbb{P}^n$ munido da métrica definida por

$$\langle \mathsf{v}_i(p), \mathsf{v}_j(p)\rangle = \langle D_i(\Psi(s, p)), D_j(\Psi(s, p))\rangle_\varrho,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varrho$ denota a métrica (5.1) em M^{n+1}. Agora, a prova segue diretamente do Teorema 1. ∎

5.2 Gráficos helicoidais em $M^2 \times \mathbb{R}$

Consideraremos agora o caso em que $\mathbb{P} = \mathbb{P}^2$ é munido de uma métrica invariante por rotações. Mais precisamente, em que existem coordenadas polares r, θ nas quais a métrica em $\mathbb{P}$ é escrita como

$$ds^2 = dr^2 + \psi^2(r)\, d\theta^2$$

para alguma função diferenciável positiva ψ.

Definimos coordenadas cilíndricas r, θ, z na variedade produto $M^3 = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{R}$. Identificamos $\mathbb{P}^2$ com o plano $z = 0$. Dado o campo de Killing ∂_θ em $\mathbb{P}^2$ e $a, b \in \mathbb{R}$ com $b \neq 0$, então

$$Y = a\partial_\theta + b\partial_z$$

é um campo de Killing em M^3. Em termos de coordenadas cilíndricas, o fluxo gerado por Y é descrito por

$$\Psi_s(r, \theta, z) = (r, \theta + as, z + bs), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Como no caso geral, definimos a submersão $\pi \colon\ M^3 \to \mathbb{P}^2$ identificando pontos de mesma órbita ao longo de um ponto de $\mathbb{P}^2$. Portanto,

$$\pi(r, \theta, z) = (r, \theta - \frac{a}{b} z).$$

Note que os campos de vetores ∂_r e $-b\partial_\theta + a\psi^2\partial_z$ geram o subespaço horizontal de π com respeito à métrica em M^3. Além disso,

$$\pi_*\partial_r = \partial_r, \quad \pi_*\partial_\theta = \partial_\theta, \quad \pi_*\partial_z = -\frac{a}{b}\partial_\theta, \tag{5.2}$$

implica que os campos vetoriais horizontais

$$D_1 = \partial_r, \quad D_2 = \frac{b}{a^2\psi^2 + b^2}(b\partial_\theta - a\psi^2\partial_z)$$

são π-relacionados aos campos vetoriais ∂_r e ∂_θ em $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Portanto, a métrica em M^3 restrita ao subespaço horizontal tem componentes

$$\langle D_1, D_1 \rangle = 1, \quad \langle D_1, D_2 \rangle = 0, \quad \langle D_2, D_2 \rangle = \frac{b^2\psi^2}{a^2\psi^2 + b^2}.$$

Assim, concluímos que $\pi \colon\ M^3 \to \mathbb{P}^2$ é uma submersão Riemanniana se considerarmos em $\mathbb{P}^2$ a métrica

$$ds^2 = dr^2 + \frac{b^2\psi^2}{a^2\psi^2 + b^2}\, d\theta^2.$$

a qual coincide com a métrica Euclideana quando $a = 0$ e $\psi(r) = r$. O Teorema 2 , aplicado ao caso particular em que $M^3 = \mathbb{R}^3$ é válido seguinte resultado.

Corolário 1. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *um domínio limitado* $C^{2,\alpha}$ *com bordo* Γ *tal que* $H_{\mathrm{cyl}} \geq 0$. *Sejam* $H \in C^{\alpha}(\Omega)$ *e* $\phi \in C^{2,\alpha}(\Gamma)$ *dados tais que*

$$|H| \leq \inf_{\Gamma} H_{\mathrm{cyl}}.$$

Então, existe uma única função $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ *satisfazendo* $u|_{\Gamma} = \phi$ *cujo gráfico helicoidal em* $\mathbb{R}^3$ *possui curvatura média* H *e bordo prescrito* ϕ.

É válido observar que este corolário se reduz ao teorema clássico de existência devido a Serrin [19] quando fixamos $a = 0$. Também apontamos que resultados semelhantes podem ser indicados para gráficos helicoidais em espaços hiperbólicos, espaços de Heisenberg e esferas, no que diz respeito a combinações lineares de campos de Killing gerando translações e rotações ao longo de uma linha geodésica.

Referências Bibliográficas

[1] ALIAS, Luis ; DAJCZER, Marcos. Normal geodesic graphs of constant mean curvature, **J. Diff. Geometry**. **75** p. 387–401, 2007.

[2] ALIAS, Luis J.; DAJCZER, Marcos; ROSENBERG, Harold The Dirichlet problem for constant mean curvature surfaces in Heisenberg space. **Calc. Var. Partial Differential Equations** v. 30 , no. 4, p. 513–522, 2007

[3] ANDRADE, F. ; LIRA, Jorge H. Soares de. Conformal Killing graphs with prescribed curvature. *In preparation.*

[4] BARBOSA, João Lucas Marques ; EARP, R. Sa Prescribed mean curvature hypersurfaces in $H^{n+1}(-1)$ with convex planar boundary, I. **Geom. Dedicata** v. 71 ,p. 61–74, 1998.

[5] DAJCZER, Marcos ; HINOJOSA, Pedro ; LIRA, Jorge H. Soares de. Killing graphs with prescribed mean curvature. **Calc. Var. Partial Differential Equations.** v. 33, p. 231–248, 2008.

[6] DAJCZER, Marcos ; LIRA, Jorge H. Soares de. Killing graphs of prescribed mean curvature in Riemannian submersions. **Ann. I.H. Poincaré.** v. 26, p. 763-775, 2009.

[7] DAJCZER, Marcos ; LIRA, Jorge H. Soares de, Helicoidal graphs with prescribed mean curvature. **Proc. Amer. Math. Soc.** v. 137 ,no. 7, p.2441–2444, 2009.

[8] DAJCZER, Marcos ; RIPOLL, J. An extension of a theorem of Serrin to graphs in warped products. **J. Geom. Anal.** v. 15 , p. 193–205, 2005.

[9] GILBARG, D. ; TRUDINGER, N. **Elliptic partial differential equations of second order**, Berlin-Heidelberg, Springer Verlag: 2001.

[10] GUIO, E. ; R. Sa Earp. **Existence and non-existence for a mean curvature equation in hyperbolic space.** To appear in Commun. Pure Appl. Anal.

[11] JENKINS, H. ; SERRIN, J. The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimensions. **J. Reine Angew. Math.** v. 229 p. 170–187, 1968.

[12] LI, Y.Y. ; NIRENBERG, L. Regularity of the distance function to the boundary. **Rendiconti, Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL, Memorie di Matematica e Applicazioni** v. 123, p. 257264, 2005.

[13] LIRA, Jorge H. Soares de, **Radial graphs with constant mean curvature in the hyperbolic space.** Geom. Dedicata **93** (2002), 11–23.

[14] LIRA, Jorge H. Soares de. **Existencia e unicidade de hipersuperficies com curvatura média constante em formas espaciais**. Tese de Doutorado: UFC, 2000.

[15] LÓPEZ, R. ; MONTIEL, S. Existence of constant mean curvature graphs in hyperbolic space. **Calc. Var. Partial Differential Equations**, v. 8, p. 177–190, 1999.

[16] NELLI, B. e SPRUCK, J. On the existence and uniqueness of constant mean curvature hypersurfaces in hyperbolic space. **Geometric analysis and the calculus of variations**,p. 253-266, Int. Press, Cambridge, MA, 1996.

[17] NITSCHE, P. Existence of prescribed mean curvature graphs in hyperbolic space. **Manuscripta Math.** v. 108, p. 349–367, 2002.

[18] SCHOEN, R. e Yau, S.T. **Lectures on Differential Geometry**. Cambridge M.A: International Press, 1994.

[19] SERRIN, J. The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables. **Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A** v. 264, p.413-496, 1969.

[20] SPRUCK, J. **Interior gradient estimates and existence theorem for constant mean curvature graphs.** Preprint.

[21] TREIBERGS, A. Existence and convexity for hyperspheres of prescribed mean curvature. **Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.** v. 4, p. 225–241, 1985.

[22] TREIBERGS, A. ; WEI, W. Embedded hyperspheres with prescribed mean curvature. **J. Diff. Geometry** v. 18, p. 513–521, 1983.