

Erneson Alves de Oliveira

***Linhas divisoras de águas e fraturas de caminhos
ótimos em meios desordenados***

Fortaleza - CE

Jul / 2012

Erneson Alves de Oliveira

***Linhas divisoras de águas e fraturas de caminhos
ótimos em meios desordenados***

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação
em Física da Universidade Federal do Ceará
como parte dos requisitos para a obtenção do
título de Doutor em Física.

Prof. José Soares de Andrade Júnior.

DOUTORADO EM FÍSICA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CENTRO DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Fortaleza - CE

Jul / 2012

Dedicatória

*Aos meus pais,
Ernesto Borges de Oliveira e
Maria Veracy Alves de Oliveira, e
minha irmã,
Nathália Alves de Oliveira,
que estiveram comigo
em todos os momentos e
em todas as distâncias.*

Agradecimentos

Quero agradecer à todos que contribuíram para essa tese. Em especial:

- Ao Prof. José Soares de Andrade Júnior, pela orientação, amizade, incentivo e confiança depositada em mim em todos os momentos;
- Ao Prof. Hans Jürgen Herrmann, pela orientação e convite para visitar o seu grupo de pesquisa em Zurique;
- Ao Prof. André Auto Moreira, pela orientação e discussões sempre produtivas;
- À todos os meus colaboradores científicos;
- À minha família e amigos, pois sempre terão um papel fundamental na minha vida;
- Ao Departamento de Física da UFC e seus funcionários;
- Ao CNPq, CAPES e FUNCAP pelo financiamento dessa pesquisa.

“The basic theorem of interdisciplinary research states: Physicists not only know everything; they know everything better. This theorem is wrong; it is valid only for computational statistical physicists like me.”

Dietrich Stauffer

Resumo

Na natureza todo material se quebra dependendo do valor de tensão aplicada. Dependendo do tipo, forma e outras características do material ou até mesmo do ponto de tensão, podemos produzir *fraturas* distintas, como um rasgo em uma folha de papel tensionada, um congestionamento na rede de trânsito de uma cidade ou solos rachados por climas áridos. Tais fraturas se relacionam economicamente com a extração de petróleo de reservatórios subterrâneos, com a extração de calor e vapor de reservatórios geotérmicos e até mesmo com a preservação dos lençóis freáticos. Fenomenologicamente, podemos imaginar que processos de fraturas são aqueles que dividem o sistema em duas ou mais partes, destruindo sua conectividade global. Nesse contexto, construímos dois modelos computacionais para estudar, caracterizar e elucidar o comportamento de fenômenos naturais semelhantes aos processos de fraturas. No primeiro modelo, exploramos conceitos de percolação invasiva aplicados à descrição da geometria irregular das cumeeiras de montanhas que dividem bacias hidrográficas. Mostramos de forma robusta o carácter auto-similar das linhas de divisores de águas, com expoente fractal $D = 1.21 \pm 0.001$ para paisagens artificiais não-correlacionadas e, $D = 1.10 \pm 0.01$ e $D = 1.11 \pm 0.01$ para paisagens correlacionadas reais dos Alpes Suíços e das Montanhas do Himalaia, respectivamente. No segundo modelo, utilizamos caminhos ótimos que são sequencialmente interrompidos, levando ao colapso do sistema, produzindo uma fratura percolante. No caso bidimensional, consideramos paisagens artificiais não-correlacionadas com desordem fraca e forte. Em ambos os regimes obtivemos o mesmo expoente fractal para o esqueleto da fratura, $D = 1.22 \pm 0.01$. Para paisagens artificiais correlacionadas, encontramos que a dimensão fractal do esqueleto da fratura decresce com o aumento do expoente de *Hurst*. No caso tridimensional, consideramos apenas paisagens não-correlacionadas artificiais com desordem forte. Nesse caso, obtivemos uma superfície percolante com dimensão fractal $D = 2.47 \pm 0.05$ que fratura o sistema em duas partes.

Abstract

In the nature all material breaks down depending on the value of stress applied. Depending of kind, shape and other characteristics of the material or even the stress point, we can produce distinct *fractures*, like a tear on stressed sheet of paper, a congestion in the network traffic of a city or cracked soils by arid climates. Such fractures are economically related with the extraction of oil from the underground reservoirs, with the extraction of heat and steam from geothermal reservoirs and even the preservation of the groundwater. Phenomenologically, we can imagine that fracture processes are the ones that divides the system in two or more parts, destroying its global connectivity. In this context, we built two computer models to study, characterize and elucidate the behavior of natural phenomena similar to fracture processes. In the first model, we explored concepts of invasion percolation applied to description of the irregular geometry of the ridge of mountains that divides hydrographic basins. We shown robustly the self-similar nature of the watershed lines, with fractal exponent $D = 1.21 \pm 0.001$ for artificial uncorrelated landscapes and, $D = 1.10 \pm 0.01$ and $D = 1.11 \pm 0.01$, for real correlated landscapes of the Swiss Alps and the Himalaya Mountains, respectively. In the second model, we used optimal paths that are cracked sequentially providing the collapse of the system, producing a percolating fracture. In the two-dimensional case, we considered artificial uncorrelated landscapes in the weak and strong disorder. In both regimes, we obtained the same fractal exponent for the backbone fracture, $D = 1.22 \pm 0.01$. For artificial correlated landscapes, we found that the fractal dimension of the backbone decreases with increasing of the *Hurst* exponent. In the three-dimensional case, we considered only artificial uncorrelated landscapes with strong disorder. In this case, we obtained a percolating surface with fractal dimension $D = 2.47 \pm 0.05$ that cracks the system in two parts.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1	Introdução	p. 18
2	Definições e conceitos para o estudo de meios desordenados	p. 20
2.1	Introdução à geometria fractal	p. 20
2.1.1	Dimensão de Hausdorff-Besicovith	p. 20
2.1.2	Método do <i>box counting</i>	p. 21
2.1.3	Método do <i>yardstick</i>	p. 21
2.1.4	Curva triádica de Koch	p. 24
2.1.5	Auto-similaridade e auto-afinidade	p. 26
2.2	Introdução à teoria da percolação	p. 27
2.2.1	Modelo de fogo na floresta	p. 28
2.2.2	Modelo de percolação	p. 31
2.2.3	Agregados em percolação	p. 32
2.2.4	Parâmetro de ordem	p. 36
2.2.5	Comprimento de correlação	p. 38
2.2.6	Modelo de percolação invasiva	p. 39
2.3	Introdução à superfícies correlacionadas	p. 42
2.3.1	Lei empírica de Hurst	p. 43
2.3.2	Movimento Browniano	p. 44

2.3.3	Movimento Browniano fracionário	p. 46
2.3.4	Método de <i>Fourier filtering</i>	p. 46
2.3.5	Extensão para várias dimensões	p. 47
3	Linhas divisoras de águas	p. 50
3.1	Divisores de águas	p. 50
3.2	Algoritmo baseado em percolação invasiva	p. 51
3.3	Algoritmo de inundação	p. 54
3.4	Redes não-correlacionadas	p. 57
3.5	Redes correlacionadas	p. 57
4	Fratras de caminhos ótimos	p. 61
4.1	O problema do caminho de custo mínimo	p. 61
4.1.1	Caminhos ótimos	p. 65
4.2	Fratura de caminhos ótimos	p. 66
4.2.1	Redes não-correlacionadas	p. 68
4.2.2	Redes correlacionadas	p. 77
5	Conclusões e perspectivas	p. 81
	Referências Bibliográficas	p. 84

Lista de Figuras

- 2.1 Imagem de satélite disponibilizada pela NASA da costa sul da Noruega mostrando a grande complexidade geográfica do local, com várias ilhas e rios que se ramificam até as montanhas cobertas por neve. A grade representa a contagem de caixas, onde o comprimento das arestas é $\delta \approx 50$ km. p. 22
- 2.2 Imagem de satélite disponibilizada pela NASA da Grã-Bretanha. Metaforicamente, o território da ilha seria o “jardim” e os segmentos de retas representariam as “cercas do jardim” representando o método do *yardstick*, o comprimento de cada segmento é $\delta \approx 70$ km. p. 23
- 2.3 O comportamento das primeiras gerações da curva de Koch. p. 24
- 2.4 Gráfico em escala logarítmica do número de segmentos de linha da curva de Koch N_δ em relação ao tamanho de cada segmento δ . Em concordância com o resultado analítico, encontramos o expoente da dimensão fractal igual à 1.26. p. 25
- 2.5 Exemplo de uma transformação isotrópica T_i e de uma transformação anisotrópica T_a em um círculo de diâmetro unitário. p. 27
- 2.6 Vizinhanças de Von Neuman e Moore. p. 28
- 2.7 Modelo de fogo na floresta para uma rede quadrada de lado $L = 128$. Os sítios verdes representam as árvores intactas, os vermelhos representam as árvores queimando e os sítios pretos representam as árvores queimadas. (a) Probabilidade de ocupação abaixo do ponto crítico, observamos que o incêndio não se propaga. (b) Probabilidade de ocupação em torno do ponto crítico, o incêndio tende a percolar na “florete”. p. 29

- 2.8 Gráfico do tempo de vida médio $\langle t_v \rangle$ para o modelo de fogo na floresta com a vizinhança de Von Neuman de primeiros vizinhos em relação à probabilidade de ocupação p . Os cálculos são realizados com 1000 amostras de redes de tamanho $L = 1024$ e estimamos $p_c = 0.592$ como a probabilidade onde o maior valor de $\langle t_v \rangle$ é encontrado. No sub-gráfico, mostramos o deslocamento do ponto crítico para 0.407, quando usamos a vizinhança de Von Neuman de segundos vizinhos. p. 30
- 2.9 (a)-(d) Redes quadradas de tamanho $L = 128$ em diferentes valores da probabilidade de ocupação p para percolação de sítios. O agregado percolante está em vermelho e os agregados isolados estão em preto. p. 33
- 2.10 Modelo de percolação de sítios para uma rede de tamanho $L = 1024$ na probabilidade crítica p_c de ocupação. Em vermelho, o agregado percolante com estrutura fractal e com várias ramificações que conectam os lados opostos do sistema. Nas outras cores, identificamos os agregados isolados cuja a distribuição de tamanhos é controlada pelo expoente de *Fisher*. p. 34
- 2.11 Gráfico da massa do agregado percolante no ponto crítico M em função do tamanho L do sistema. Adotamos 1000 amostras para a realização da média de cada ponto e obtemos $D \simeq 1.89$ para a dimensão fractal do agregado percolante. p. 35
- 2.12 Gráfico da distribuição acumulada N_s em função do tamanho dos agregados s no ponto crítico. Adotamos $L = 8192$, 100 amostras para a estatística e encontramos $1 - \tau \simeq -1.05$. Logo, o expoente de Fisher fica $\tau \simeq 2.05$ p. 36
- 2.13 Gráfico da fração de elementos pertencentes ao agregado percolante P em função da probabilidade de ocupação p . Os cálculos foram realizados para redes de tamanho $L = 128$ e $L = 1024$ do modelo de percolação de sítios, com 1000 amostras para cada ponto. p. 38
- 2.14 Rede de percolação invasiva de tamanho $L = 1024$ sem aprisionamento. Em preto, representamos os sítios invadidos que formam uma estrutura similar ao agregado percolante em p_c e, em cinza, representamos os sítios defensores. . . p. 40

2.15	Gráfico da massa de sítios invasores M em relação ao tamanho L do sistema em escala logarítmica. Simulamos sistemas de tamanhos $L = 32768, 16384, 8192, 4096, 2048$ e 1024 com 100, 200, 400, 800, 1600 e 3200 amostras, respectivamente. Encontramos $D \simeq 1.89$ para a dimensão fractal do agregado invasor de percolação invasiva sem aprisionamento.	p. 41
2.16	Gráfico do número médio de sítios de crescimento h em relação ao tamanho L do sistema em escala logarítmica. Simulamos sistemas de tamanhos $L = 32768, 16384, 8192, 4096, 2048$ e 1024 com 100, 200, 400, 800, 1600 e 3200 amostras, respectivamente. Encontramos $D = 1.75$ para a dimensão fractal da envoltória de percolação invasiva sem aprisionamento.	p. 42
2.17	Representação esquemática de um reservatório ideal de Hurst.	p. 44
2.18	Redes de tamanho $L = 1024$ com diferentes valores do expoente espectral β_C . O azul e o vermelho representam pontos de menor e maior altura, respectivamente. (a) Caso não-correlacionado. (b)-(d) Casos correlacionados.	p. 49
3.1	Representação do modelo de elevação digital (<i>DEM</i>). Em tais imagens digitais a intensidade de cinza é transformada em altura.	p. 51
3.2	Estágios do algoritmo baseado em percolação invasiva (<i>IPBA</i>). (a)-(d) Em preto os sítios invadidos, em azul e vermelho os sítios pertencentes a linha divisora de águas.	p. 53
3.3	Rede de tamanho $L = 1024$ para o algoritmo baseado em percolação invasiva (<i>IPBA</i>). Os sítios azuis pertencem à linha de sumidouros na parte superior da rede e os sítios vermelhos são drenados pelos sumidouros na parte inferior da rede. Como podemos ver, identificamos apenas os sítios das vizinhanças da linha divisora de águas, tornando o algoritmo bastante eficiente e de baixíssimo custo computacional.	p. 55
3.4	Estágios do algoritmo de inundação (<i>FA</i>). (a)-(d) Em preto, os sítios pertencentes à linha divisora de águas. Em cinza, representamos os sítios inundados que não pertencem a nenhuma bacia. Em azul e vermelho, os sítios pertencentes às bacias hidrográficas norte e sul, respectivamente.	p. 56

- 3.5 Gráfico em escala logarítmica da massa dos sítios pertencentes à linha de divisores de águas M (círculos) para paisagens não-correlacionadas em função do tamanho do sistema L . Simulamos sistemas de tamanhos $L = 10000, 5000, 1000, 500, 100, 50, 10$ e 5 , com ao menos 10000 amostras por tamanho de rede L . Encontramos um comportamento em lei de potência, $M \sim L^D$, com expoente $D = 1.21 \pm 0.001$. As barras de erro dos pontos individuais são menores que os símbolos. p. 58
- 3.6 Modelo de *IPBA* aplicado aos dados reais de topografia das regiões: (a) dos Alpes e (b) do Himalaia. As linhas (em preto) representam as linhas divisoras de águas do sistema. p. 59
- 3.7 Gráfico do número de segmentos $N(\delta)$ em função da fração do tamanho do sistema L pelo tamanho de cada segmento δ . Encontramos comportamentos em lei de potência, $N(\delta) \sim L/\delta^D$, com expoente $D = 1.10 \pm 0.01$ para os Alpes e $D = 1.10 \pm 0.01$ para o Himalaia. As barras de erro dos pontos individuais são menores que os símbolos. p. 60
- 4.1 Grafo das rotas entre as cidades A e B . Os círculos são os vértices, as setas são as arestas e os pesos são os números suspensos. As arestas sombreadas formam o caminho de custo mínimo. p. 62
- 4.2 Aplicação do algoritmo de Dijkstra. Os vértices pretos pertencem ao conjunto S e o conjunto Q é representado pela relação $Q = V - S$. Os vértices sombreados são aqueles que tem o menor valor dentro do conjunto Q . Desse modo, dado um vértice fonte s , o algoritmo encontrará todos os caminhos mais curtos para cada vértice $v \in V$. A cada iteração, o caminho de custo mínimo estimado aparece dentro de cada vértice e os antecessores são representados pelas arestas sombreadas. p. 64
- 4.3 Caminhos ótimos para redes quadradas de lado $L = 1024$. (a) Para desordem fraca com $\beta_D = 0.0625$, o caminho ótimo geralmente é uma linha reta. (b) Para desordem forte com $\beta_D = 1024$, o caminho ótimo é fractal. p. 65

- 4.4 Gráfico em log-log do número médio de sítios do caminho ótimo M em função do tamanho L do sistema para duas dimensões. Simulamos sistemas de tamanhos $L = 1024, 512, 256, 128, 64, 32$ com 100, 200, 400, 800, 1600 e 3200 amostras, respectivamente. Encontramos um comportamento auto-afim para desordem fraca (círculos) e auto-similar com dimensão fractal $D = 1.22 \pm 0.01$ para desordem forte (triângulos). As barras de erro dos pontos individuais são menores que os símbolos. p. 67
- 4.5 Rede não-correlacionada de tamanho $L = 1024$ com desordem fraca $\beta_D = 0.0625$ no qual o algoritmo de *OPC* foi aplicado. Identificamos os agregados isolados espalhados por toda a rede (preto), a fratura percolante com várias ramificações (vermelho) e seu esqueleto (azul). p. 69
- 4.6 Rede não-correlacionada de tamanho $L = 1024$ com desordem moderada $\beta_D = 8$ no qual o algoritmo de *OPC* foi aplicado. Neste caso, o esqueleto é preservado, embora o número de ramificações da fratura e os agregados isolados sejam reduzidos substancialmente. p. 70
- 4.7 Rede não-correlacionada de tamanho $L = 1024$ com desordem forte $\beta_D = 1024$ no qual o algoritmo de *OPC* foi aplicado. Neste caso, somente o esqueleto da fratura percolante permanece. p. 71
- 4.8 Gráfico em escala logarítmica da massa de todos os sítios bloqueados M_t (círculos), da massa do agregado de sítios da fratura percolante M_f (triângulos) e da massa do esqueleto da fratura percolante M_b (estrelas), para $\beta_D = 0.0625$ em função do tamanho do sistema L . Simulamos sistemas de tamanhos $L = 1024, 512, 256, 128, 64, 32$ com 100, 200, 400, 800, 1600 e 3200 amostras, respectivamente. Encontramos três leis de potência, $M_t \sim L^{D_t}$, $M_f \sim L^{D_f}$ e $M_b \sim L^{D_b}$, com expoentes $D_t = 2.00 \pm 0.01$, $D_f = 1.56 \pm 0.02$ e $D_b = 1.22 \pm 0.01$. As barras de erro dos pontos individuais são menores que os símbolos. p. 72

4.9 Gráfico em log-log das massas M_t (círculos), M_f (triângulos) e M_b (estrelas) contra o tamanho do sistema L para $\beta_D = 8$. Para esse valor intermediário de β_D , identificamos uma mudança de comportamento de desordem fraca para desordem forte dependendo do tamanho do sistema. Para redes pequenas, o sistema está submetido às condições de desordem forte. Como consequência, os sítios bloqueados tendem a pertencer ao esqueleto da fratura e as massas M_t , M_f e M_b tendem a ser iguais. Com o aumento da rede, alcançamos o regime de desordem fraca e as três curvas se separam. No sub-gráfico, mostramos as mesmas massas para o valor de desordem $\beta_D = 1024$. Nesse caso, para qualquer tamanho de sistema os valores das massas são idênticos, indicando que estamos no regime de desordem forte para todos os tamanhos de rede. Para o esqueleto da fratura percolante, encontramos o expoente $D = 1.22 \pm 0.01$ para ambos os casos. As barras de erro dos pontos individuais são menores que os símbolos. p. 73

4.10 Gráfico da transição do comportamento de desordem fraca para desordem forte no modelo de *OPC*. Observamos que a densidade de todos os sítios bloqueados ρ_t apresenta três regimes distintos no final do processo. No sub-gráfico, para a desordem fraca ($\beta_D < 1$), observamos a saturação da densidade em torno do valor $\rho_t \approx 0.22$. Para um valor intermediário do parâmetro β_D , entretanto, não existe dependência com o tamanho L do sistema. Para valores altos de β_D , a densidade satura novamente, mas para valores que dependem do tamanho do sistema L . Esse último regime é aquele que caracteriza a desordem forte. A densidade saturada desse regime depende do tamanho do sistema L^{D_b-2} , onde $D_b \approx 1.22$ é a dimensão fractal para o esqueleto da fratura percolante do modelo de *OPC*. Para cada tamanho de sistema, observamos a transição do regime de desordem fraca para desordem forte em valores diferentes do parâmetro β_{D_x} . Desse modo, mostramos que o colapso de dependência não-trivial das curvas para cada tamanho L do sistema segue a relação $\beta_{D_x} \sim L^{0.59}$ p. 74

- 4.11 Gráfico em log-log da distribuição acumulada de tamanho dos agregados, N_s , como função do tamanho dos agregados, s . Encontramos uma lei de potência com o expoente $1 - \tau = -1.3 \pm 0.2$, implicando em um expoente de Fisher $\tau = 2.3 \pm 0.2$. No sub-gráfico, mostramos a média dos tamanhos dos agregados, S , em relação ao tamanho do sistema, L . Encontramos outro comportamento em lei de potência com expoente crítico $\gamma/\nu = 1.3 \pm 0.2$. Tais resultados foram obtidos com 100 amostras de redes de tamanho $L = 1024$ p. 75
- 4.12 Representação de uma configuração do modelo de *OPC* tridimensional, para uma rede cúbica de tamanho $L = 128$ e para desordem forte $\beta_D = 1024$. Mostramos os sítios bloqueados formando a superfície percolante fractal (amarelo) e os sítios pertencentes à superfície que interceptam as bordas do sistema (preto). p. 76
- 4.13 Gráfico em log-log da massa de todos os sítios proibidos, M_t , para redes não-correlacionadas, no regime de desordem forte e para três dimensões, como uma função do tamanho do sistema, L . Encontramos a dimensão fractal $D_t = 2.47 \pm 0.05$ para a massa da superfície. Simulamos sistemas de tamanhos $L = 128, 91, 64, 45, 32, 23, 16, 11, 8$ com 100, 150, 200, 300, 400, 600, 800, 1200 e 1600 amostras, respectivamente. As barras de erro dos pontos individuais são menores que os símbolos. p. 77
- 4.14 Densidade de todos os sítios bloqueados ρ para o modelo de *OPC* em substratos correlacionados como uma função do parâmetro de correlação espacial β_C . Para $\beta_C = 0$ ou $H = -1$, o *fBm* corresponde ao caso não-correlacionado, onde a densidade é praticamente insensível a efeitos de tamanhos finitos. Simulamos sistemas de tamanhos $L = 1024, 512, 256, 128, 64, 32$ com 100, 200, 400, 800, 1600 e 3200 amostras, respectivamente. As barras de erro dos pontos individuais são menores que os símbolos. p. 78
- 4.15 A dimensão fractal D_t, D_f e D_b como uma função do parâmetro de correlação β_C . Os gráficos mostram que a correlação de longo alcance espacial tende a reduzir a dimensão fractal do sistema. Simulamos sistemas de tamanhos $L = 1024, 512, 256, 128, 64, 32$ com 100, 200, 400, 800, 1600 e 3200 amostras, respectivamente. As barras de erro dos pontos individuais são menores que os símbolos. p. 79

4.16 Redes quadradas de lado $L = 1024$ para alguns expoentes de correlação. Mostramos o esqueleto da fratura percolante (preto) e o primeiro caminho ótimo (verde). p. 80

Lista de Tabelas

2.1 Tabela das probabilidades críticas p_c para várias geometrias. p. 32

1 *Introdução*

Observamos que na natureza todo material se quebra dependendo do valor de tensão aplicada. Dependendo do tipo, forma e outras características do material ou até mesmo do ponto de tensão, podemos produzir *fraturas* distintas, como um rasgo em uma folha de papel tensionada, um congestionamento na rede de trânsito de uma cidade ou solos rachados por climas áridos. Existem materiais mais fáceis de se fraturar do que outros, como por exemplo, para fraturar o diamante devido à sua estrutura organizada é necessária uma força extremamente alta, quando comparado a outros materiais. A presença de desordem nas estruturas dos objetos torna-os mais frágeis. Processos de fratura são extremamente sensíveis à desordem que, microscopicamente, tem relação com espaços vazios, deslocamentos e até mesmo composição estrutural do material. Tais fraturas se relacionam economicamente com a extração de petróleo de reservatórios subterrâneos, com a extração de calor e vapor de reservatórios geotérmicos e até mesmo com a preservação dos lençóis freáticos [1, 2].

Microscopicamente, o transporte desses fluidos é feito através dos poros existentes na rocha e, macroscopicamente, o fluido escoar através de fraturas, sendo muitas vezes a escala dominante. No caso macroscópico, as propriedades espaciais podem ser tratadas apenas como ruídos presentes nas propriedades do material, por conta disso, em simulações computacionais, podemos gerar desordem através de números pseudoaleatórios. Existem basicamente dois limites de desordem. Qualitativamente, na *desordem fraca*, uma dada propriedade dos elementos pertencentes ao sistema não pode diferir muito entre si. No limite de *desordem forte*, uma dada propriedade dos elementos do sistema pode ser significativamente diferente. Além disso, podemos imaginar processos de fratura em materiais com *correlação espacial de longo alcance*. Tais comportamentos são muito familiares à Física Teórica e Computacional, com principais aplicações em redes complexas, teoria de percolação e fractais [3, 4, 5, 6].

Em um passado recente, vários estudos sobre fraturas em rochas heterogêneas mostraram que elas tem um carácter fractal [1, 2]. Geralmente, para escalas de grandes comprimentos, da ordem de quilômetros ou mais, finas secções de uma rocha fraturada, ou seja, um sistema basicamente bidimensional, são caracterizadas pela dimensão fractal $D \simeq 1.9$ e para escalas

de pequenos comprimentos, da ordem de metros, o expoente característico encontrado é $D \simeq 1.6 - 1.7$. Exemplos bem conhecidos desse comportamento são a formação de montanhas de Yucca em Nevada [7] e algumas formações japonesas [8]. Evidentemente, podemos ter também redes de fraturas tridimensionais, onde a dimensão fractal encontrada é em torno de $D \simeq 2.5$ para grandes escalas [2]. Considerando apenas a fratura principal, semelhante à falha de San Andreas na Califórnia, a dimensão fractal é dada por $D \simeq 1.1 - 1.2$ [9]. Fenomenologicamente, podemos imaginar que processos de fraturas são aqueles que dividem o sistema em duas ou mais partes, destruindo sua conectividade local ou global. É nesse contexto que introduzimos dois modelos computacionais para estudar, caracterizar e elucidar o comportamento de fenômenos naturais semelhantes a processos de fraturas, como por exemplo, a geometria irregular das cumeeiras de montanhas que dividem bacias hidrográficas e congestionamentos de veículos em uma grande cidade. Desse modo, essa tese está organizada como descrevemos a seguir.

O Capítulo 2 é de introdução. Nele apresentaremos conceitos relacionados à *geometria fractal* definindo a *dimensão fractal* de um objeto, os métodos do *box counting* e do *yardstick*, além de apresentarmos exemplos de fractais bem conhecidos. Falaremos também sobre a *teoria da percolação*, apresentando os modelos de *fogo na floresta*, *percolação de sítios* e *percolação invasiva*, além de mostrarmos alguns de seus comportamentos críticos. Para encerrarmos o capítulo, abordaremos o problema de *superfícies correlacionadas*.

No Capítulo 3 definiremos o conceito das *linhas divisoras de águas*, proporemos o *algoritmo baseado em percolação invasiva* e apresentaremos o *algoritmo de inundação*. Aplicaremos o nosso modelo a redes não-correlacionadas e a paisagens reais correlacionadas das regiões dos Alpes e do Himalaia.

No Capítulo 4 apresentaremos alguns conceitos de *caminho de custo mínimo*, *algoritmo de Dijkstra* e *caminho ótimo*. Introduziremos e estudaremos o modelo de *fratura de caminhos ótimos* aplicado a redes não-correlacionadas para duas e três dimensões. Além disso, generalizaremos tal modelo para o caso de redes correlacionadas bidimensionais.

No Capítulo 5, concluiremos essa tese com observações acerca dos resultados dos modelos propostos e relacionando-os com outros trabalhos conhecidos na literatura. Sugestões e perspectivas também são delineadas objetivando a realização de trabalhos futuros.

2 *Definições e conceitos para o estudo de meios desordenados*

Devido ao surgimento de supercomputadores, ao grande interesse da comunidade científica e às inúmeras aplicações na ciência e na tecnologia, sistemas com estruturas desordenadas passaram a ser amplamente estudados desde a segunda metade do século XX [1, 2, 3, 4, 5]. Desde então, problemas que não poderiam ser resolvidos analiticamente ou de grande dificuldade em suas soluções começaram a ser entendidos e explorados através de simulações computacionais. Assim, desenvolveram-se muitos modelos, algoritmos e técnicas cada vez mais eficientes para descrever vários fenômenos em sistemas na presença de desordem. Neste capítulo, introduziremos conceitos de *geometria fractal*, definindo principalmente a *dimensão fractal*, o seu cálculo através do método do *box counting* e do método do *yardstick*. Daremos ênfase também à *teoria de percolação*, introduzindo os modelos de *fogo na floresta*, *percolação de sítios* e *percolação invasiva*, com simulações e resultados conhecidos na literatura. Encerrando o capítulo, abordaremos o problema do *movimento Browniano fracionário* e sua aplicação na geração de *superfícies correlacionadas*.

2.1 **Introdução à geometria fractal**

De forma usual, os conceitos de *geometria Euclidiana* descrevem muitas geometrias de objetos naturais. Entretanto, para a descrição de objetos de irregularidade infinita, a geometria Euclidiana falha na sua abordagem. Na segunda metade do século XX, *B. B. Mandelbrot* introduziu e estudou os conceitos de *geometria Fractal* [6, 10, 11].

2.1.1 **Dimensão de Hausdorff-Besicovith**

Qual o comprimento da costa litorânea da Noruega ? Podemos ver na Fig. 2.1 que o litoral sul da Noruega tem muitos detalhes geográficos, tornando o problema difícil de se resolver. Na realidade, a costa litorânea sul da Noruega apresenta uma estrutura complexa chamada de

Fractal. Devido à *Mandelbrot*, podemos citar a seguinte definição de um fractal:

"Um fractal é por definição um conjunto para o qual a sua *dimensão de Hausdorff-Besicovitch* excede a sua *dimensão topológica*."

A dimensão de Hausdorff-Besicovitch D é definida para o conjunto de pontos S como a dimensão crítica na qual a l -medida M_l desse conjunto muda de zero à infinito:

$$M_l = \sum h(l) = \sum \gamma(l) \delta^l = \lim_{\delta \rightarrow 0} \gamma(l) N(\delta) \delta^l \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } l > D, \\ \infty & \text{se } l < D. \end{cases} \quad (2.1)$$

Onde, $N(\delta)$ é o número necessário de funções teste $h(l)$ para cobrir completamente o conjunto S , $\gamma(l)$ é um fator geométrico, l é a dimensão da medida e δ é o comprimento do objeto de medida da função teste [3]. Geralmente, o valor de M_l para $l = D$ é finito, mas pode ser zero ou infinito. Na Física, a dimensão de Hausdorff-Besicovitch é comumente chamada de *dimensão fractal*. A dimensão topológica d é a dimensão habitual que sempre corresponde a um número inteiro.

2.1.2 Método do *box counting*

Considerando o exemplo introdutório, imaginemos a costa litorânea coberta por um conjunto de $N(\delta)$ quadrados com arestas de comprimento δ , como mostra a Fig. 2.1. No limite $\delta \rightarrow 0$, teremos:

$$N(\delta) \sim \frac{1}{\delta^D}. \quad (2.2)$$

Podemos chegar ao valor da dimensão fractal encontrando o módulo da inclinação do gráfico do logaritmo de $N(\delta)$ em função do logaritmo de δ e tal resultado é bastante conhecido, $D = 1.52$ [3]. Esse método é conhecido como método do *box counting*.

2.1.3 Método do *yardstick*

Existem outras técnicas para calcular a dimensão fractal de um objeto, por exemplo, o método do *yardstick*. Esse método consiste em tentar medir o perímetro de uma dada interface através de segmentos de retas de mesmo tamanho δ . Como podemos elucidar com a ilustração da costa litorânea da Grã-Bretanha, Fig. 2.2. De maneira análoga ao método de contagem de caixas, a relação entre o conjunto de $N(\delta)$ segmentos de reta com os seus comprimentos δ , fica:

$$N(\delta) \sim \frac{1}{\delta^D}. \quad (2.3)$$

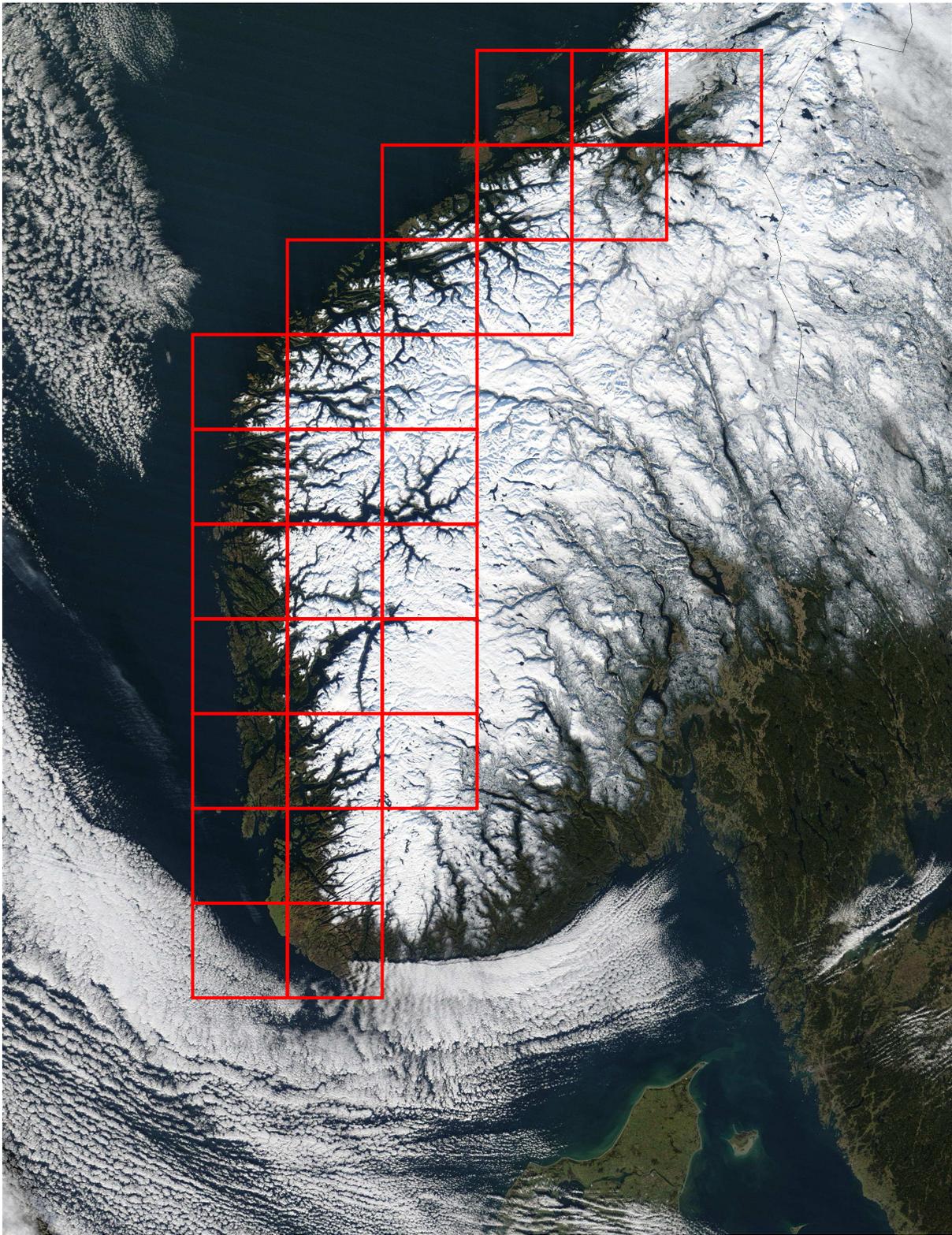


Figura 2.1: Imagem de satélite disponibilizada pela NASA da costa sul da Noruega mostrando a grande complexidade geográfica do local, com várias ilhas e rios que se ramificam até as montanhas cobertas por neve. A grade representa a contagem de caixas, onde o comprimento das arestas é $\delta \approx 50$ km.



Figura 2.2: Imagem de satélite disponibilizada pela *NASA* da Grã-Bretanha. Metaforicamente, o território da ilha seria o “jardim” e os segmentos de retas representariam as “cercas do jardim” representando o método do *yardstick*, o comprimento de cada segmento é $\delta \approx 70$ km.

Como no caso anterior, também temos um comportamento em lei de potência e podemos encontrar o valor do expoente através da inclinação do gráfico de $N(\delta)$ contra $1/\delta$ em escala logarítmica. O expoente fractal encontrado é $D = 1.25$ [12].

2.1.4 Curva triádica de Koch

Um dos exemplos mais tradicionais de curvas com dimensão de Hausdorff-Besicovitch maior do que a dimensão topológica é a *curva triádica de Koch*, ou simplesmente, *curva de Koch* [3]. Sua construção começa com um segmento de linha de comprimento unitário $L(1) = 1$. Essa construção é a geração $n = 0$ e sua forma é chamada de *iniciador*. Prosseguiremos substituindo o iniciador por um *gerador*, ou seja, segmentos de linhas com $1/3$ de comprimento formando um triângulo equilátero sem base na metade do segmento de linha do iniciador anterior. Desse modo, passamos para a geração $n = 1$, com cada novo iniciador tendo comprimento $\delta = 1/3$ e o comprimento da curva sendo igual a $L(1/3) = 4/3$. A próxima geração, $n = 2$, é obtida da mesma maneira, isto é, trocamos cada iniciador por um gerador. Dessa forma, o comprimento dos iniciadores e da curva para essa geração ficam $\delta = 1/9 = (1/3)^2$ e $L(1/9) = 16/9 = (4/3)^2$, respectivamente. Mostramos o comportamento para as primeiras gerações da curva de Koch na Fig. 2.3. Por recorrência, o comprimento para a n -ésima geração

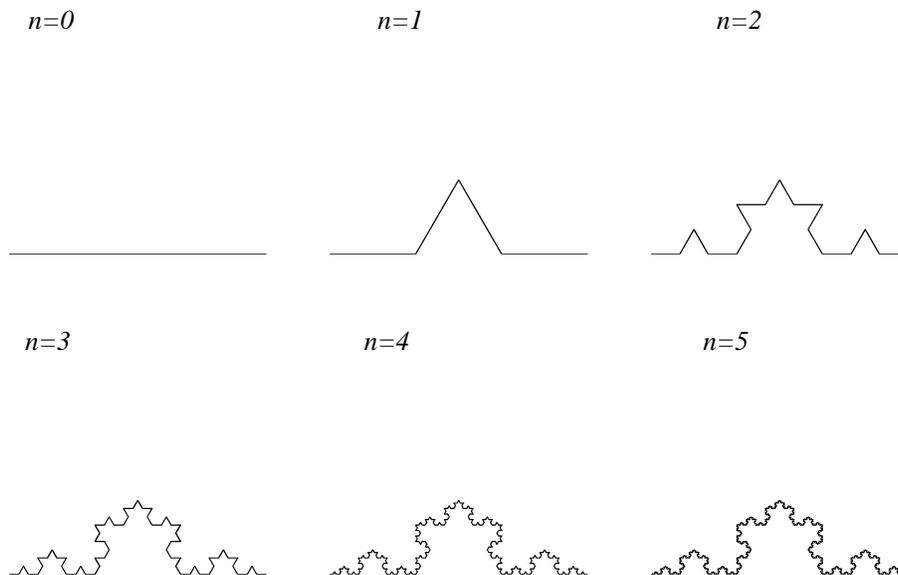


Figura 2.3: O comportamento das primeiras gerações da curva de Koch.

e o comprimento de cada segmento de linha δ são dados por:

$$L(\delta) = \left(\frac{4}{3}\right)^n \quad \& \quad \delta = 3^{-n} \Rightarrow n = -\frac{\ln \delta}{\ln 3}. \quad (2.4)$$

Podemos perceber que o número de segmentos obedece a seguinte expressão matemática:

$$N(\delta) = 4^n = 4^{\ln \delta / \ln 3} = \exp \left[\ln \left(4^{-\ln \delta / \ln 3} \right) \right] = \delta^{-D}, \quad (2.5)$$

onde identificamos $D = \ln 4 / \ln 3 \simeq 1.26$ como sendo a dimensão de Hausdorff-Besicovitch da curva de Koch. Considerando que a dimensão topológica da curva de Koch é $d = 1$, logo, se $D > d$, significa que temos uma estrutura fractal. Desse modo, a dimensão de Hausdorff-Besicovitch torna-se a dimensão fractal. Com o intuito de recuperarmos o resultado analítico, contamos o número de segmentos de linha em relação aos seus respectivos tamanhos para várias gerações da curva de Koch e conseguimos recuperar o expoente analítico $D \simeq 1.26$, como mostra o gráfico da Fig. 2.4. Além deste, existem outros fractais bem conhecidos e de grande importância, como a curva de Peano, os tapetes de Sierpinski e o conjunto de Mandelbrot [6, 10, 11].

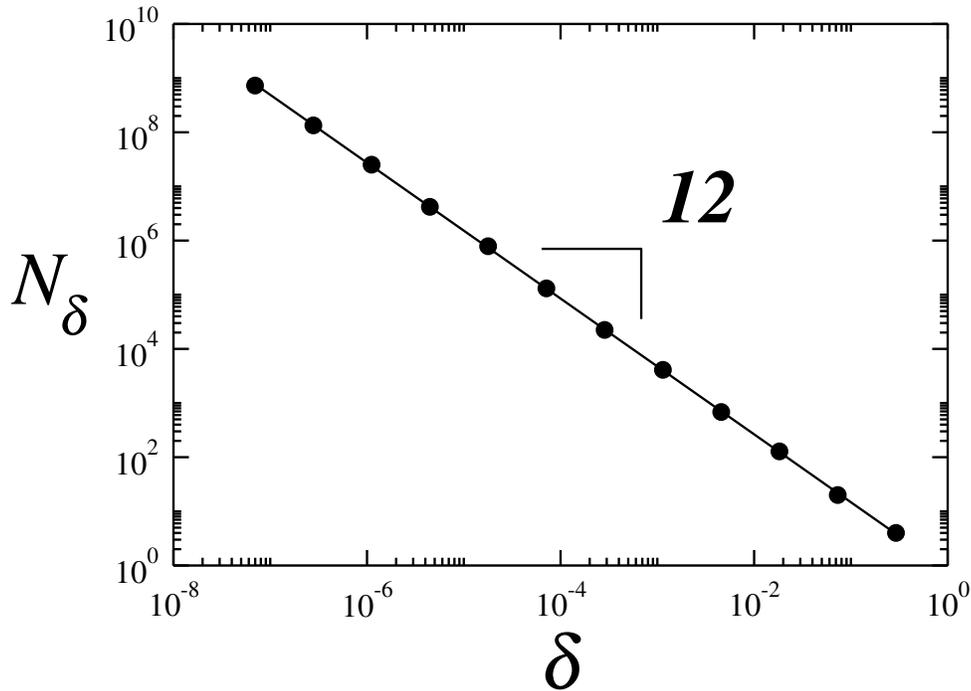


Figura 2.4: Gráfico em escala logarítmica do número de segmentos de linha da curva de Koch N_δ em relação ao tamanho de cada segmento δ . Em concordância com o resultado analítico, encontramos o expoente da dimensão fractal igual à 1.26.

2.1.5 Auto-similaridade e auto-afinidade

Uma característica marcante nos fractais é seu comportamento invariante em escalas distintas [3]. Por exemplo, uma linha infinita é um conjunto especial de pontos, pois se mudarmos o comprimento de escala ou aplicarmos uma translação, recuperaremos os mesmos conjuntos de pontos. Logo, podemos afirmar que essa linha é *invariante* com respeito à escala e translação. Dessa forma, podemos dizer que essa linha possui *auto-similaridade*, ou seja, ela é um objeto *auto-similar*. De forma mais rigorosa, podemos definir uma *transformação de similaridade* ou *transformação isotrópica* T_i como uma transformação que leva os pontos $x = (x_1, \dots, x_E)$, no espaço de dimensão E , para novos pontos $x' = (rx_1, \dots, rx_E)$, pertencentes ao mesmo espaço de dimensão E , com o fator de escala r para cada componente. Em suma, um fractal é *auto-similar* com respeito ao fator de escala r se o seu conjunto de pontos S é a união de N subconjuntos S_1, \dots, S_N com nenhuma sobreposição e que cada subconjunto seja congruente ao conjunto $r(S)$ obtido de S através de uma transformação isotrópica. O termo *congruente* é empregado no sentido de que o conjunto de pontos S_i é idêntico ao conjunto de pontos $r(S)$ depois de possíveis translações e/ou rotações do conjunto.

Naturalmente, existem muitos outros casos de relevância nos quais os conjuntos de objetos não são auto-similares. Desse modo, de forma análoga à transformação isotrópica, podemos definir uma *transformação de afinidade* ou *transformação anisotrópica* T_a que transforma um ponto $x = (x_1, \dots, x_E)$, no espaço de dimensão E , em um novo ponto $x' = (r_1x_1, \dots, r_Ex_E)$, no mesmo espaço de dimensão E , mas para fatores de escala r_1, \dots, r_E distintas. Podemos exemplificar uma transformação isotrópica quando transformamos um círculo em um círculo maior e uma transformação de afinidade quando passamos de um círculo para uma elipse, como ilustramos na Fig. 2.5. Assim, um fractal é *auto-afim* com respeito a um *vetor fator de escala* $\vec{r} = (r_1, \dots, r_E)$ se o seu conjunto de pontos S é a união de N subconjuntos S_1, \dots, S_N com nenhuma sobreposição e cada subconjunto seja congruente ao conjunto $\vec{r}(S)$ obtido de S através de uma transformação anisotrópica. Semelhantemente ao caso anterior, quando usamos *congruente*, queremos dizer que o conjunto de pontos S_i é idêntico ao conjunto de pontos $\vec{r}(S)$ depois de possíveis translações e/ou rotações do conjunto.

Nesse contexto, existem fractais que apresentam similaridade, as costas litorâneas, por exemplo, e não são estatisticamente auto-similares para todo valor de escala, havendo um limite inferior (micro-escala) e um limite superior (microescala) que os tornam auto-similares. Já com os fractais auto-afins, a escala também tem um papel importante. Localmente, esses objetos são fractais, possuindo uma dimensão fractal $D > d$, porém, globalmente, eles não são mais fractais, possuindo a dimensão fractal $D = d$, onde $d + 1$ é a dimensão topológica em que

o objeto está inserido.

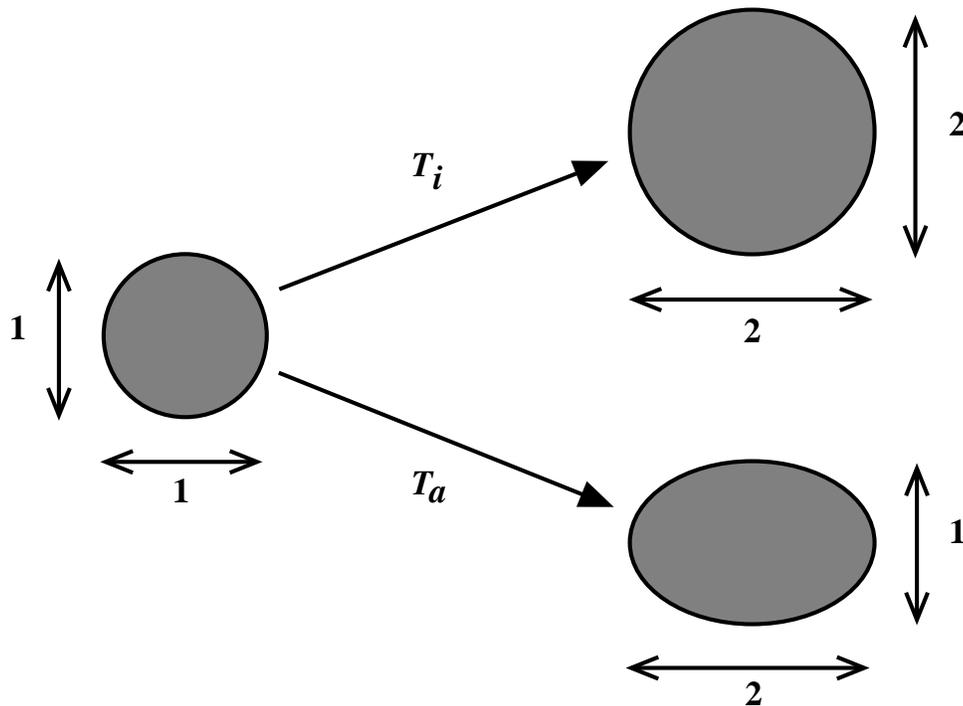


Figura 2.5: Exemplo de uma transformação isotrópica T_i e de uma transformação anisotrópica T_a em um círculo de diâmetro unitário.

2.2 Introdução à teoria da percolação

O conceito de percolação foi introduzido formalmente por *S. R. Broadbent* e *J. M. Hammersley* em 1957 usando conceitos de geometria e probabilidade [13], sendo que o objetivo desse trabalho era estudar um fluido escoando através de um meio desordenado. O termo percolação é relativo ao transporte de um modelo binário de desordem, onde os elementos pertencem a uma rede e são distribuídos aleatoriamente. Uma das maiores e mais importantes características do *modelo de percolação* é a presença de uma transição de fase de segunda ordem na probabilidade de um elemento pertencer ao *agregado percolante*. Essa transição ocorre em um ponto crítico, acima do qual existe conectividade global na estrutura formada, ou seja, uma informação qualquer pode atravessar globalmente a rede [3, 4]. Recentemente, surgiram vários trabalhos que tratam de uma possível transição de fase de primeira ordem em percolação [14, 15, 16].

2.2.1 Modelo de fogo na floresta

Para introduzirmos e entendermos os conceitos de percolação e criticalidade, vamos utilizar um modelo bastante conhecido, chamado de *modelo de fogo na floresta* [4]. O seu objetivo é simular e estudar o processo de propagação de um “incêndio florestal” desejando obter o tempo de vida do incêndio t_v . Supomos que a “floresta” seja representada por uma rede quadrada de lado L , onde os elementos de tal rede têm uma probabilidade de ocupação p de serem “árvores” e $(1 - p)$ de estarem vazios. Como regra para a dinâmica de propagação do incêndio, definiremos que todas as árvores incendiadas só podem transferir fogo para as suas vizinhas. Adotaremos, primeiramente a vizinhança de *Von Neuman* de primeiros vizinhos (Fig. 2.6a) e consideraremos que uma árvore só permanece queimando por apenas uma unidade de tempo. Cada unidade de tempo corresponde a uma varredura completa sobre todos os elementos da rede. Dessa maneira, o processo de atualização da rede é realizado a cada passo de tempo. Nas Figs. 2.6c e 2.6d, mostramos também as vizinhanças de *Moore* que serão usadas posteriormente nessa tese.

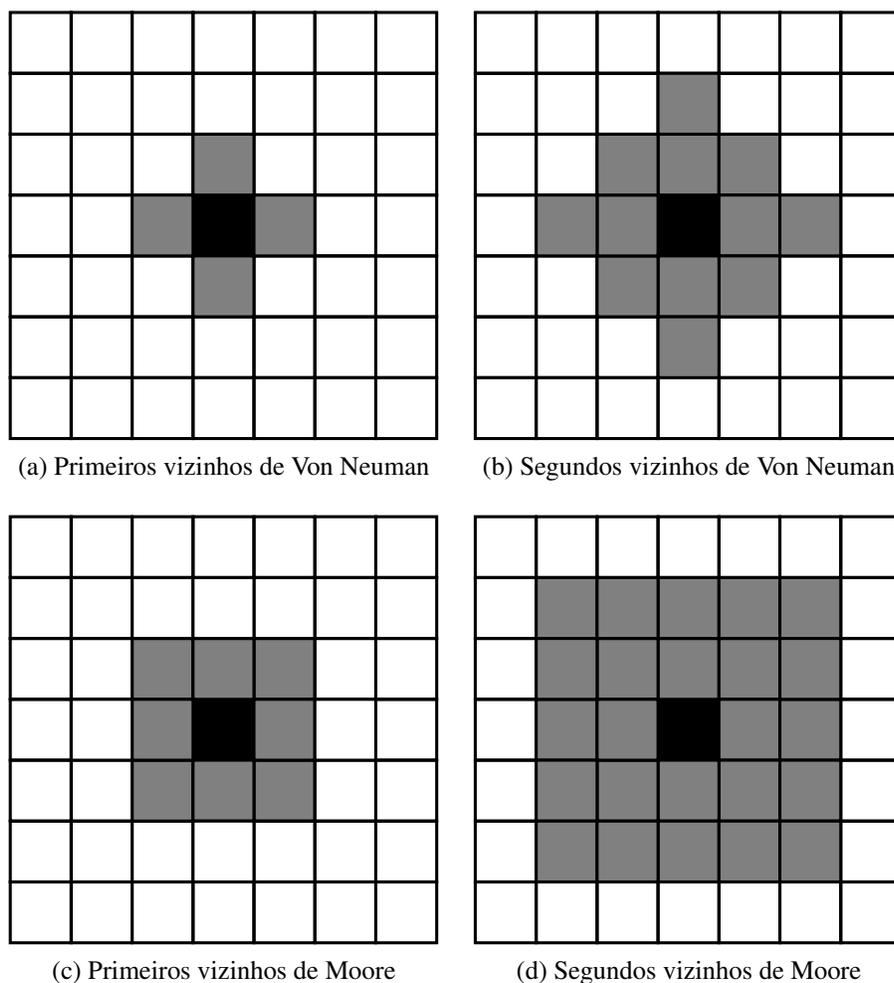


Figura 2.6: Vizinhanças de Von Neuman e Moore.

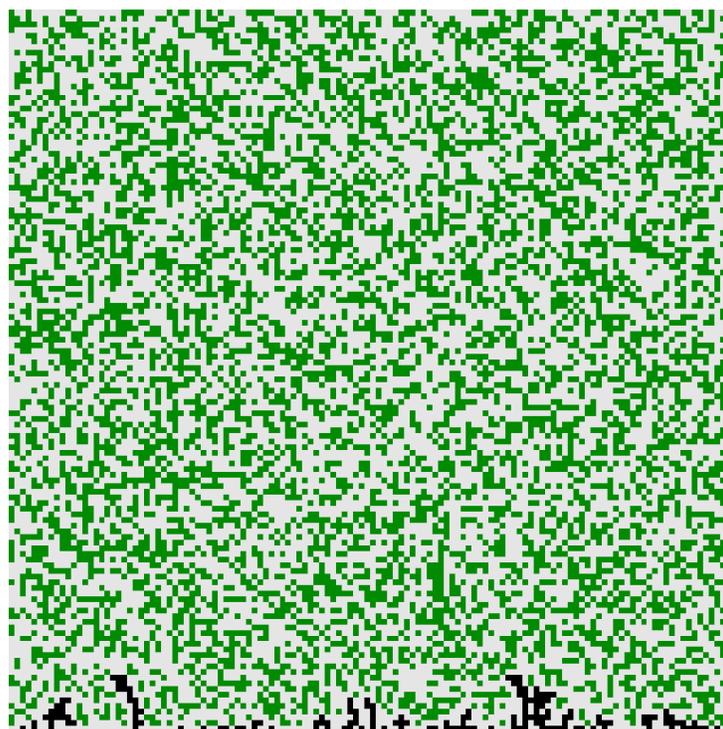
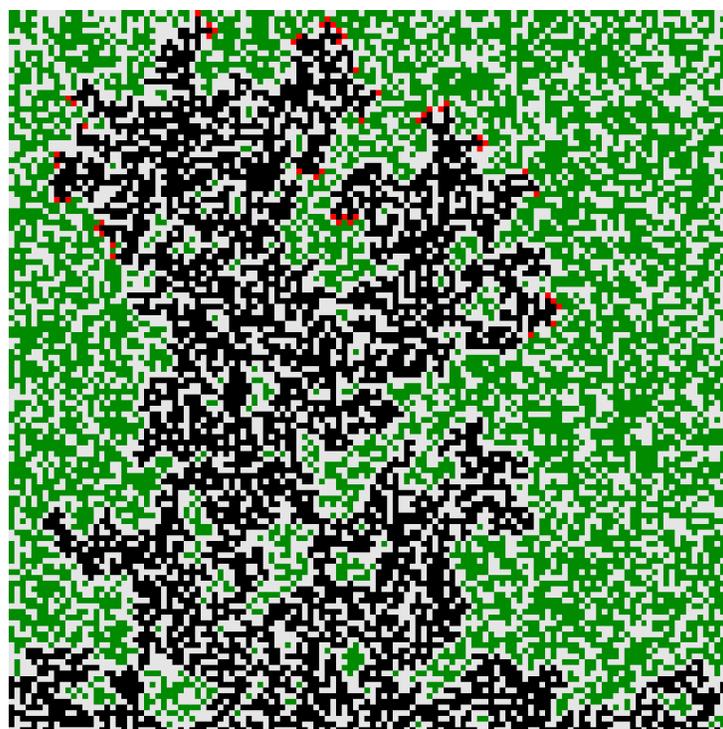
(a) $p = 0.4$ (b) $p \simeq p_c$

Figura 2.7: Modelo de fogo na floresta para uma rede quadrada de lado $L = 128$. Os sítios verdes representam as árvores intactas, os vermelhos representam as árvores queimando e os sítios pretos representam as árvores queimadas. (a) Probabilidade de ocupação abaixo do ponto crítico, observamos que o incêndio não se propaga. (b) Probabilidade de ocupação em torno do ponto crítico, o incêndio tende a percolar na “florete”.

Inicialmente, atearemos fogo nas árvores da primeira linha e deixaremos o incêndio evoluir com a sua dinâmica. A condição de extinção do incêndio será a inexistência de árvores queimando dentro da floresta (Fig. 2.7a) ou caso o incêndio consiga percolar na rede (Fig. 2.7b), ou seja, atravessá-la e queimar alguma árvore da última linha. O tempo de vida do incêndio será dado pelo número de varreduras da rede até a extinção do incêndio. Para uma análise geral, consideraremos o tempo de vida médio do incêndio $\langle t_v \rangle$ sobre várias amostras de redes de tamanho L , variando os valores da probabilidade de ocupação p , como ilustra a Fig. 2.8.

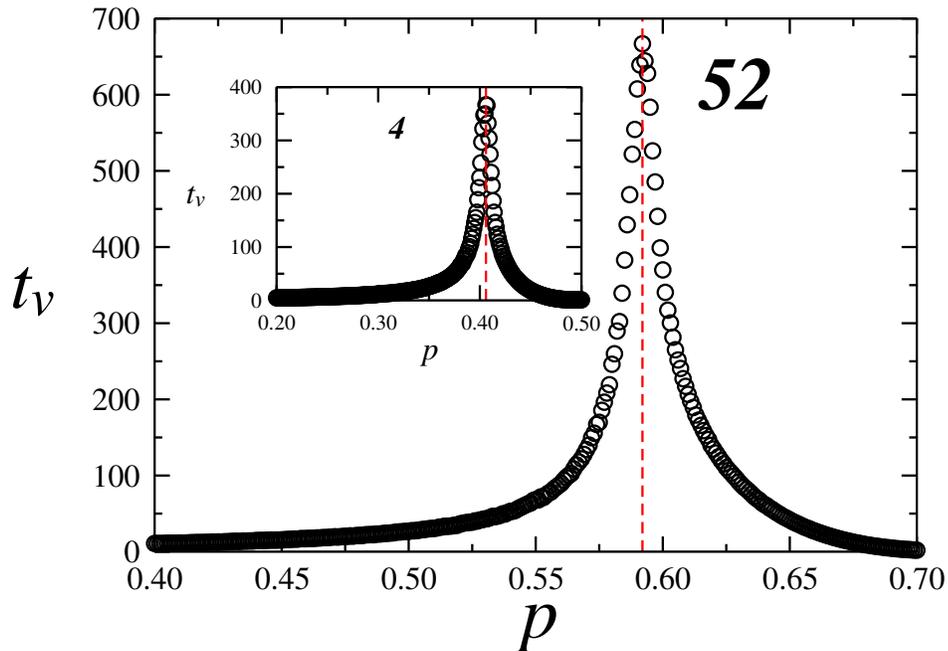


Figura 2.8: Gráfico do tempo de vida médio $\langle t_v \rangle$ para o modelo de fogo na floresta com a vizinhança de Von Neuman de primeiros vizinhos em relação à probabilidade de ocupação p . Os cálculos são realizados com 1000 amostras de redes de tamanho $L = 1024$ e estimamos $p_c = 0.592$ como a probabilidade onde o maior valor de $\langle t_v \rangle$ é encontrado. No sub-gráfico, mostramos o deslocamento do ponto crítico para 0.407, quando usamos a vizinhança de Von Neuman de segundos vizinhos.

Para $p < p_c$, o tempo de vida médio do incêndio é muito pequeno, pois existem poucas árvores na floresta e o fogo não consegue se propagar. Na probabilidade crítica, $p = p_c = 0.5927$ [4], o tempo de vida médio do incêndio $\langle t_v \rangle$ alcança o seu máximo. Nesse ponto, a floresta apresenta uma estrutura com muitas ramificações, fazendo com que o fogo possa atingir regiões remotas e o tempo de incêndio se prolongue. Para $p > p_c$, o tempo de vida médio do incêndio passa a diminuir novamente, pois a densidade de árvores passa a ser suficientemente alta, permitindo que o fogo se propague rapidamente. No limite $L \rightarrow \infty$, em $p = p_c$, a floresta se comportará da mesma maneira que o *agregado percolante infinito*, fazendo com que o tempo de vida médio divirja, isto é, $\langle t_v \rangle \rightarrow \infty$. Como extensão do modelo de fogo na floresta, permitiremos

que as árvores incendiadas passem a transferir fogo para uma vizinhança maior. Podemos interpretar essa modificação como uma floresta onde as copas das árvores se entrelaçam mais umas com as outras. Faremos isso adotando a vizinhança de Von Neuman de segundos vizinhos, Fig. 2.6b. Quase toda a análise qualitativa para o modelo tradicional em relação ao tempo de vida médio continua válida, a única diferença é que o valor máximo de $\langle t_v \rangle$ é deslocado para a esquerda, como ilustra a Fig. 2.8. Em suma, o fogo se propaga de forma mais rápida e a probabilidade crítica, p_c , para esse modelo é igual 0.4072 [4].

2.2.2 Modelo de percolação

Pela sua generalidade, há várias maneiras de tratarmos o modelo de percolação ordinário. Vamos usar a abordagem de percolação de sítios em $d = 2$, tendo em vista que as outras formas são apenas extensões com algumas peculiaridades [3, 1, 4, 2, 5]. Definiremos uma rede de elementos ou sítios, onde a probabilidade de ocupação de cada elemento da rede, caso esteja preenchido, seja dada por p e por $(1 - p)$, caso esteja vazio. Na prática, geramos um número pseudoaleatório no intervalo $]0, 1[$, segundo uma distribuição uniforme para cada sítio da rede. Se este número for menor do que p , consideraremos o elemento ocupado e caso contrário, vazio. Eventualmente, encontraremos *agregados* de sítios espalhados pela rede. Consideraremos elementos participantes de um agregado aqueles que estão ocupados e são vizinhos de outros elementos que também estão ocupados. No modelo ordinário de percolação de sítios, é adotada a *vizinhança de Von Neuman* de primeiros vizinhos na identificação dos agregados. À medida que aumentamos a probabilidade de ocupação da rede, os agregados tendem a ficar maiores, por consequência, alguns podem se juntar formando um agregado maior ainda (Figs. 2.9a e 2.9b). Em um certo valor de probabilidade, p_c , teremos um agregado que se destaca dos demais, tanto pelo tamanho quanto pelo número ramificações que conecta lados opostos da rede, como ilustra a Fig. 2.9c. Nesse ponto, há a formação de um *agregado incipiente* ou *agregado percolante*. Assim, a condição de percolação é que o transporte de uma dada informação não esteja confinado, ou seja, exista um caminho para que essa informação atravesse toda a rede. Nessa probabilidade crítica, o processo de percolação revela uma transição de segunda ordem de um estado localmente conectado para um estado onde existe uma conectividade que se estende globalmente pela rede. O valor de p_c pode ser encontrado exatamente para algumas geometrias de rede. Em outras, é necessária a utilização de métodos de simulação computacional para o seu cálculo aproximado, como mostrado na Tab. 2.1 [4]. Para valores de p ligeiramente acima do ponto crítico, as ramificações do agregado percolante passam rapidamente a atingir quase todas as regiões possíveis (Fig. 2.9d), culminando, em $p = 1$, com um agregado percolante que ocupa completamente a rede de elementos.

Geometria da rede	Percolação de sítios
Quadrada	0.5927
Triangular	$1/2^1$
Hexagonal	0.6962
Cúbica	0.3116

Tabela 2.1: Tabela das probabilidades críticas p_c para várias geometrias.

2.2.3 Agregados em percolação

Uma grandeza importante no estudo da percolação é o *número de elementos, tamanho ou massa* pertencente ao maior agregado $M(L, p)$. Observam-se comportamentos diferentes para $M(L, p)$ dependendo da probabilidade de ocupação p da rede [3, 4]. Para $p < p_c$, o número de elementos pertencentes ao maior agregado cresce de forma logarítmica com o tamanho da rede L . Na criticalidade, $p = p_c$, observamos que o número de elementos pertencentes ao maior agregado tem um comportamento em lei de potência com o tamanho L do sistema com o expoente $D = 91/48 \simeq 1.895$ em duas dimensões e $D \simeq 2.5$ em três dimensões [4]. Para redes muito grandes, o maior agregado torna-se também o agregado percolante a partir desse ponto crítico, como mostra a Fig. 2.10. Esta relação indica a estrutura peculiar do agregado percolante na criticalidade, com várias ramificações e com invariância de escala. Essa estrutura é então identificada como um *fractal*. Para $p > p_c$, o número de elementos do agregado percolante $M(L, p)$ é proporcional ao número total de elementos da rede L^2 , ocupando uniformemente praticamente toda a rede. Matematicamente, tais fatos podem ser expressos por :

$$M(L, p) \sim \begin{cases} \ln L & \text{se } p < p_c; \\ L^D & \text{se } p = p_c; \\ L^2 & \text{se } p > p_c. \end{cases} \quad (2.6)$$

Como definido anteriormente, identificamos o expoente D e o tamanho L do sistema como a dimensão de Hausdorff-Besicovith e o comprimento da medida, respectivamente. Numericamente, podemos utilizar dois métodos para encontrar a dimensão fractal D , nomeadamente o *método do raio de giração* e o *método do escalonamento de tamanho finito*. Podemos definir o *raio de giração* R do maior agregado como,

$$R^2 = \sum_i \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_o|^2}{s}, \quad (2.7)$$

onde s é equivalente à massa do maior agregado $M(L, p)$, \mathbf{r}_i é a posição do i -ésimo elemento e

¹Resultados com valores exatos.

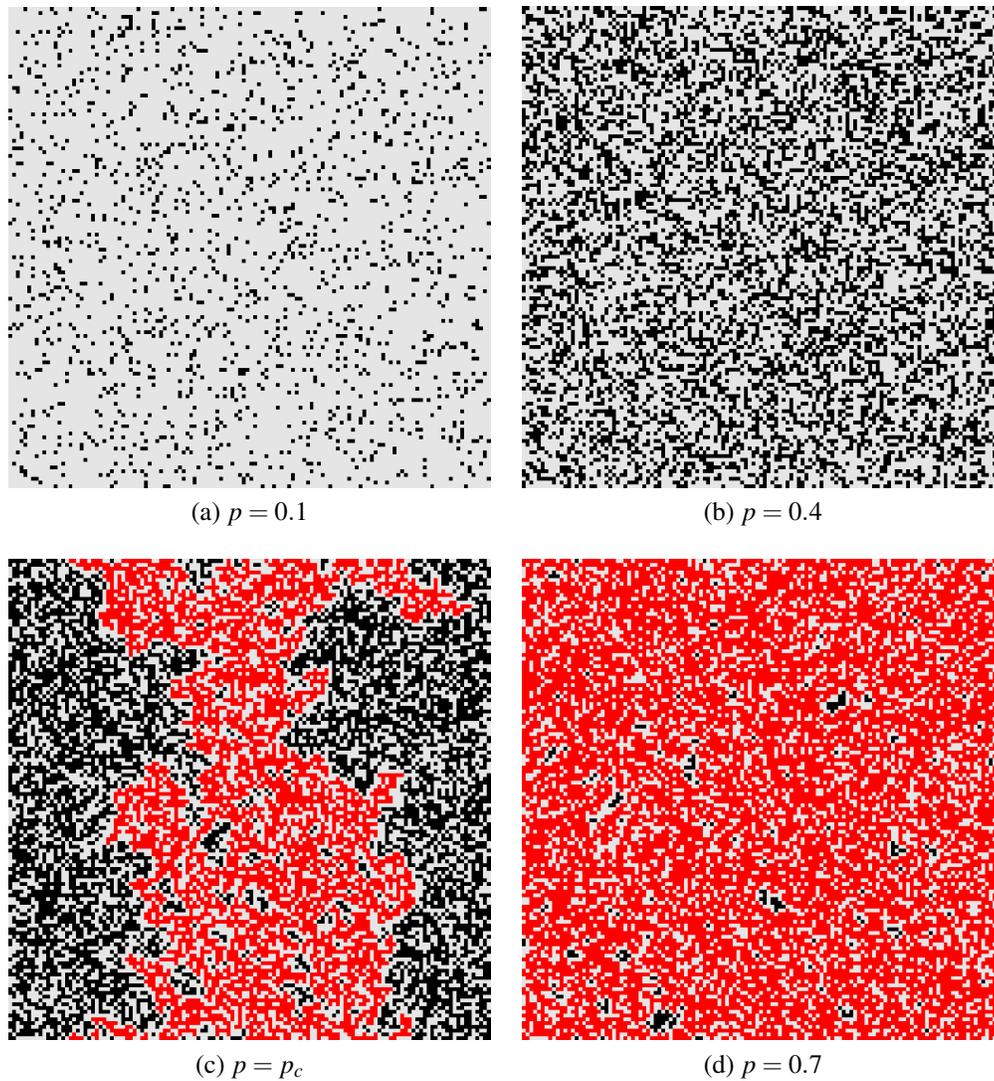


Figura 2.9: (a)-(d) Redes quadradas de tamanho $L = 128$ em diferentes valores da probabilidade de ocupação p para percolação de sítios. O agregado percolante está em vermelho e os agregados isolados estão em preto.

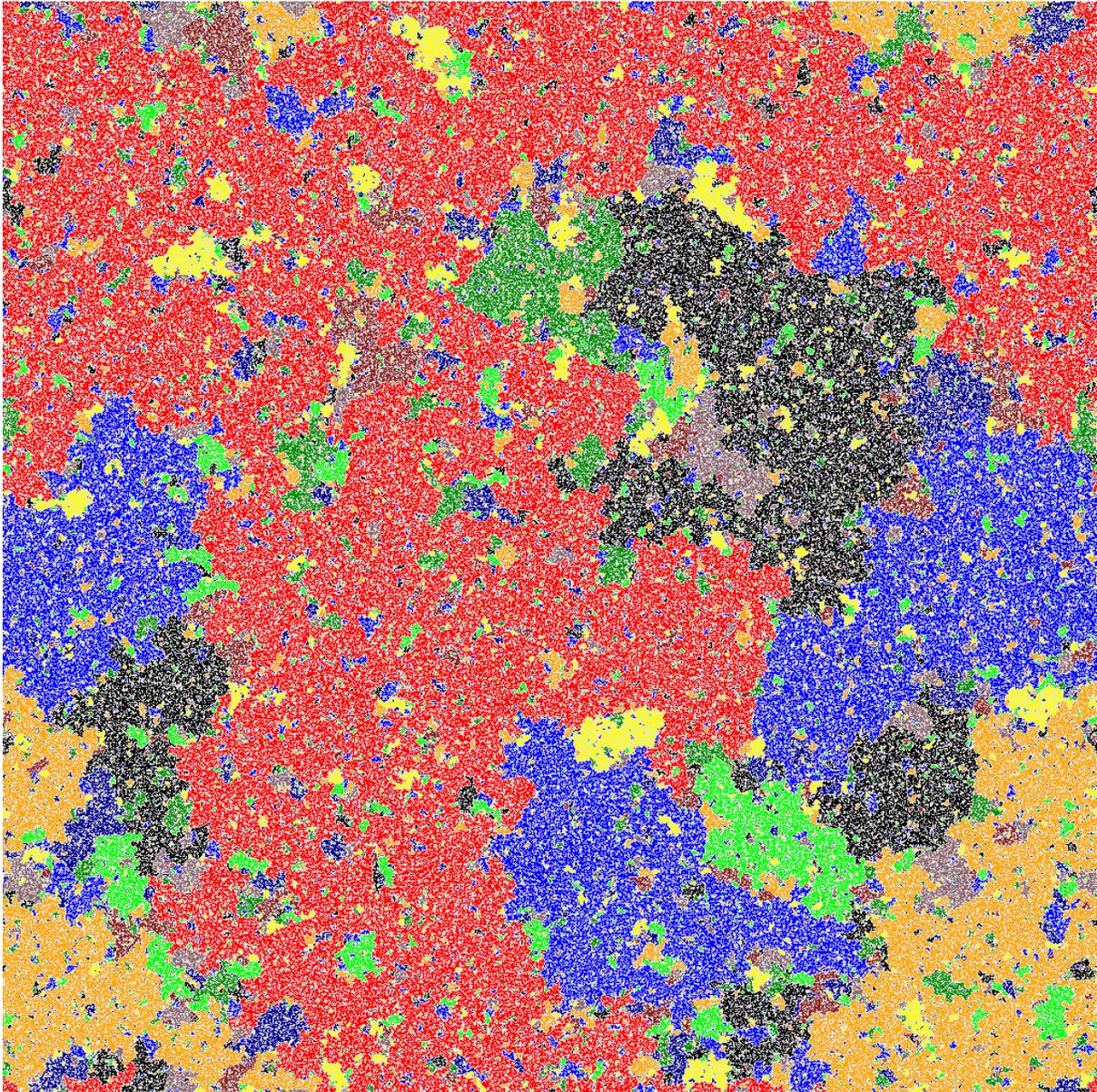


Figura 2.10: Modelo de percolação de sítios para uma rede de tamanho $L = 1024$ na probabilidade crítica p_c de ocupação. Em vermelho, o agregado percolante com estrutura fractal e com várias ramificações que conectam os lados opostos do sistema. Nas outras cores, identificamos os agregados isolados cuja a distribuição de tamanhos é controlada pelo expoente de *Fisher*.

\mathbf{r}_o é a posição do centro de massa do agregado que é dada por,

$$\mathbf{r}_o = \sum_i \frac{\mathbf{r}_i}{s}. \quad (2.8)$$

Considerando a estatística sobre várias amostras, no limite termodinâmico e na criticalidade, teremos,

$$M \equiv \langle M(\infty, p_c) \rangle \equiv \langle s \rangle \sim \langle R \rangle^D. \quad (2.9)$$

Como uma outra maneira de calcular a dimensão fractal do maior agregado, podemos introduzir também o método do escalonamento de tamanho finito, consistindo em medir o número de elementos ou a massa $M(L, p)$ do maior agregado em função do tamanho L do sistema, depois medir a mesma propriedade para um sistema um pouco maior e assim por diante. Para um dado espaço amostral no ponto crítico, calculamos o valor do expoente D através da inclinação do comportamento de M contra L em escala logarítmica. Em nossas simulações, encontramos o expoente 1.89 em duas dimensões, como mostra a Fig. 2.11.

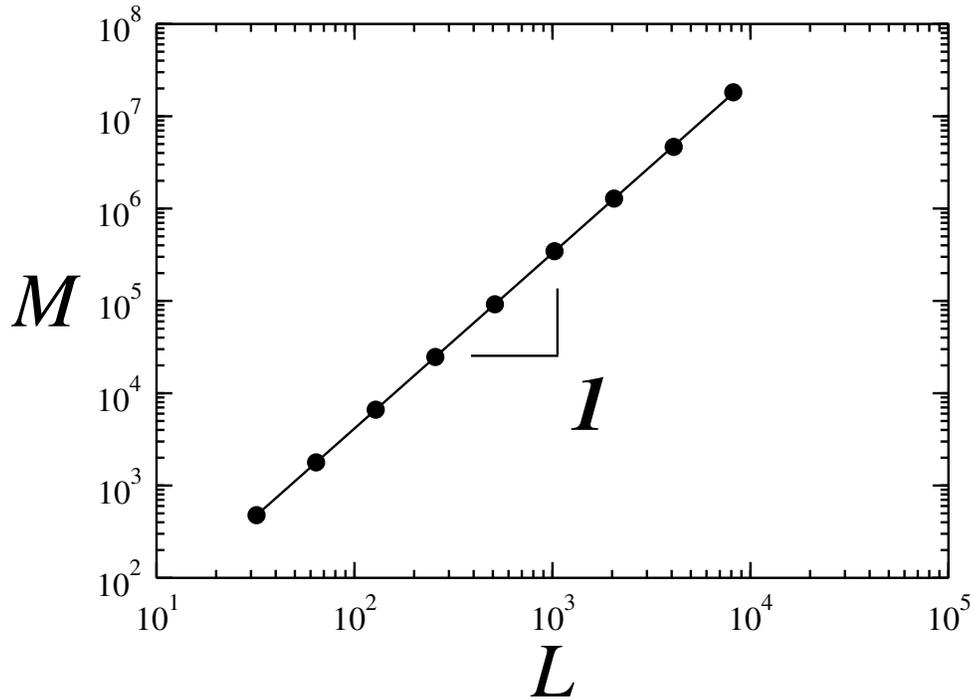


Figura 2.11: Gráfico da massa do agregado percolante no ponto crítico M em função do tamanho L do sistema. Adotamos 1000 amostras para a realização da média de cada ponto e obtemos $D \simeq 1.89$ para a dimensão fractal do agregado percolante.

Na criticalidade, além do agregado percolante, existem vários outros agregados menores, como também mostra a Fig. 2.10. Desse modo, podemos definir n_s como a distribuição de agregados com massa s . No limite termodinâmico, tal distribuição escala com a massa s de

cada agregado da seguinte maneira,

$$n_s \propto s^{-\tau}, \quad (2.10)$$

onde $\tau = 2.055$ e conhecido como expoente de *Fisher* [4]. Obviamente, podemos encontrar esse expoente considerando essa relação, porém a melhor forma é considerarmos N_s como a distribuição acumulada de n_s [17],

$$N_s = \sum_{s'=1}^s n_{s'} \propto s^{-(\tau-1)}. \quad (2.11)$$

Desse modo, minimizamos as flutuações no final da distribuição e encontramos $\tau = 2.05$ (Fig. 2.12). Podemos interpretar esse resultado como a prova de que na criticalidade de percolação existem agregados de todos os tamanhos.

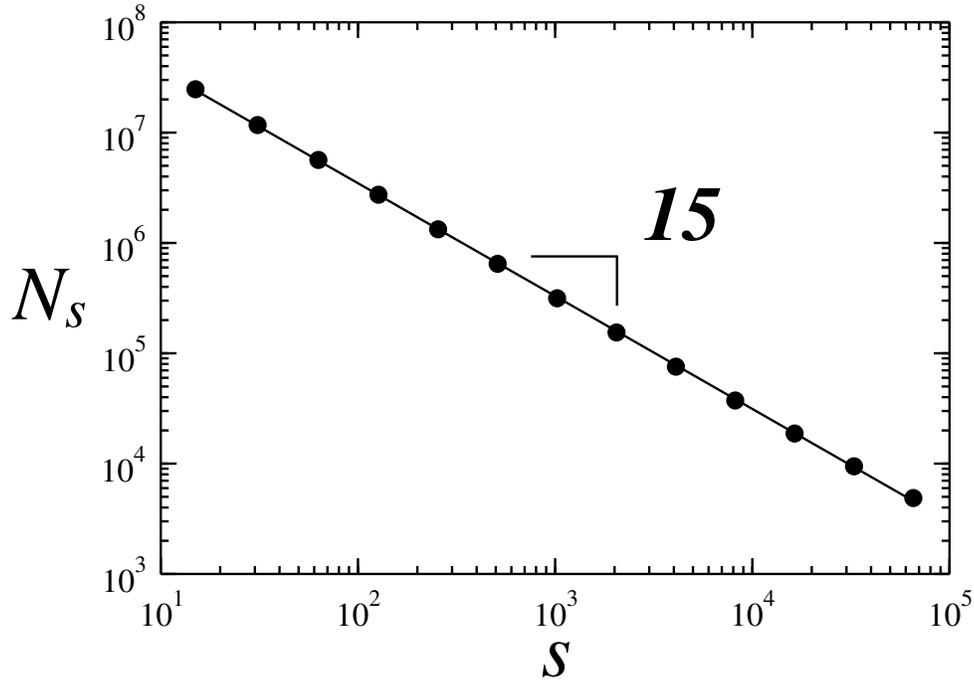


Figura 2.12: Gráfico da distribuição acumulada N_s em função do tamanho dos agregados s no ponto crítico. Adotamos $L = 8192$, 100 amostras para a estatística e encontramos $1 - \tau \simeq -1.05$. Logo, o expoente de Fisher fica $\tau \simeq 2.05$.

2.2.4 Parâmetro de ordem

Para o modelo de percolação que foi definido anteriormente, o parâmetro de ordem é a *fração de elementos pertencentes ao agregado percolante* $P(L, p)$. Essa fração é a razão entre a

massa do agregado percolante $M_{per}(L, p)$ e o número total de elementos da rede L^2 , ou seja,

$$P(L, p) = \frac{M_{per}(L, p)}{L^2}. \quad (2.12)$$

Para sistemas muito grandes, com $L \rightarrow \infty$, ou seja, no limite termodinâmico, podemos escrever a expressão,

$$P(\infty, p) = \lim_{L \rightarrow \infty} P(L, p) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{M_{per}(L, p)}{L^2}. \quad (2.13)$$

Acima do ponto crítico,

$$M_{per}(L, p > p_c) \propto L^2. \quad (2.14)$$

Desse modo, como já mencionamos, para valores da probabilidade de ocupação acima do ponto crítico p_c , o agregado percolante é homogeneamente distribuído e ocupa praticamente toda a rede, apresentando um comportamento quase linear até $P(L, 1) = 1$.

Para valores pequenos da probabilidade de ocupação p , não há agregado percolante, sendo assim, $P(\infty, p) = 0$. Em torno da probabilidade crítica p_c , observa-se um comportamento em lei de potência para a fração de elementos do agregado percolante,

$$P(\infty, p) \propto |p - p_c|^\beta. \quad (2.15)$$

Onde o expoente crítico fica sendo $\beta = 5/36 \simeq 0.138$, para duas dimensões, e $\beta \simeq 0.4$ para três dimensões [3, 4]. Como o agregado percolante também é o maior agregado do sistema, podemos escrever,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} M_{per}(L, p) \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} M(L, p). \quad (2.16)$$

Desse modo, mostramos o comportamento de $P(L, p)$ através de simulações computacionais para o modelo de percolação de sítios na Fig. 2.13, determinando para vários valores da probabilidade de ocupação p o número de elementos do maior agregado $M(L, p)$. Para pequenos valores da probabilidade de ocupação, $P(L, p)$ é completamente desprezível. À medida que aumentamos o valor de p , a fração de elementos pertencentes ao agregado percolante cresce inicialmente de forma muito vagarosa até que um crescimento acentuado é observado no valor de $P(L, p)$ nas probabilidades de ocupação próximas a p_c . Notamos também que para redes cada vez maiores a mudança de comportamento de $P(L, p)$ fica ainda mais abrupta. No limite termodinâmico, $L \rightarrow \infty$, a transição de $P(L, p)$ será exatamente na probabilidade crítica p_c . Nesse ponto, teremos que o maior agregado ou o agregado percolante se tornará um *agregado percolante infinito* (Fig. 2.10). Como mostram as Fig. 2.8 e 2.13, a ausência de simetria na transição de fase do parâmetro de ordem é um dos indícios que corroboram para que essa transição seja de segunda ordem, ou seja, uma transição de fase contínua no parâmetro de ordem

[4, 18].

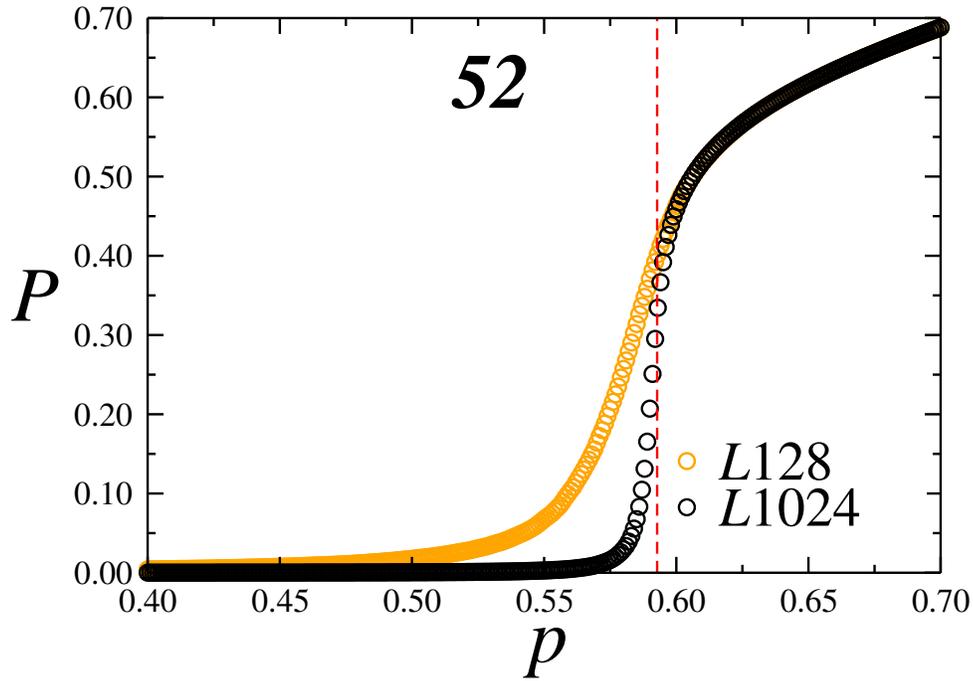


Figura 2.13: Gráfico da fração de elementos pertencentes ao agregado percolante P em função da probabilidade de ocupação p . Os cálculos foram realizados para redes de tamanho $L = 128$ e $L = 1024$ do modelo de percolação de sítios, com 1000 amostras para cada ponto.

2.2.5 Comprimento de correlação

Podemos definir o *comprimento de conectividade* ou o *comprimento de correlação* ξ , como a média das distâncias de dois elementos pertencentes a um mesmo agregado, ou matematicamente,

$$\xi^2 = \frac{2 \sum_s R_s^2 s^2 n_s}{\sum_s s^2 n_s}, \quad (2.17)$$

onde, utilizamos a seguinte relação para o raio de giração R_s [4],

$$R_s^2 = \frac{1}{2s^2} \sum_{i,j=1}^s |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2. \quad (2.18)$$

No modelo de percolação, a distância entre os elementos é um comprimento característico evidente. Entretanto, o fato do agregado percolante ser fractal impõe a inexistência de tal escala. Essa pseudo-contradição é explicada pelo fato da distância entre os elementos ser uma quantidade de carácter microscópico e a auto-similaridade do agregado percolante ter relação com a escala macroscópica [4]. Na criticidade, o comprimento de correlação diverge, apresentando

um comportamento em lei de potência dado por,

$$\xi \propto |p - p_c|^{-\nu}, \quad (2.19)$$

onde $\nu = 4/3 \sim 1.33$ para duas dimensões, e $\nu \sim 0.88$ para três dimensões [4]. Em duas dimensões, os expoentes críticos do parâmetro de ordem, da massa do agregado percolante e do comprimento de correlação relacionam-se da seguinte maneira [4],

$$-\frac{\beta}{\nu} = D - 2. \quad (2.20)$$

2.2.6 Modelo de percolação invasiva

Um outro modelo muito famoso na teoria da percolação é o *modelo de percolação invasiva*, introduzido por *D. Wilkinson* e *J. F. Willemsen* em 1983 no estudo do comportamento de dois fluidos imiscíveis deslocando-se em um meio poroso [19]. Por exemplo, quando injetamos água vagorosamente em um meio poroso com óleo, as forças de capilaridade tornam-se dominantes em relação às forças de viscosidade e a dinâmica do sistema é determinada localmente pelo tamanho dos poros. Desse modo, podemos definir um fluido *molhante* ou *invasor* e um fluido *não-molhante* ou *defensor*, como por exemplo, água e óleo, respectivamente, no exemplo anterior (Fig. 2.14).

Computacionalmente, podemos supor que o meio poroso seja representado por uma rede $L \times L$ com cada sítio associado a um número aleatório r_i uniformemente distribuído entre $]0, 1[$ representando o raio de cada poro. Além disso, podemos definir um ou vários sítios invasores para começarmos a dinâmica e um ou vários sítios defensores para encerrarmos a dinâmica. Assim, definimos também a chamada *interface*, ou os *sítios de crescimento* entre os fluidos, como aqueles sítios defensores que são vizinhos dos sítios invasores, ou seja, são os sítios defensores que pertencem à fronteira. Para a dinâmica do sistema, a cada passo de tempo, o sítio de menor raio r_i pertencente à fronteira é invadido e a lista dos sítios de crescimento é atualizada conforme os primeiros vizinhos de Von Neuman (Fig. 2.6). Em nossas simulações, consideramos toda a primeira linha da rede como sendo sítios invasores, deixamos o sistema evoluir seguindo as regras anteriores e encerramos a dinâmica quando o fluido invasor percola o sistema, ou seja, toca um sítio defensor da última linha (Fig. 2.14). Nesse ponto, o agregado invasor possui uma estrutura complicada com várias ramificações e podemos observar que a massa ou número de sítios invadidos $M(L)$ escala com o tamanho do sistema L , da seguinte forma,

$$M(L) \sim L^D, \quad (2.21)$$

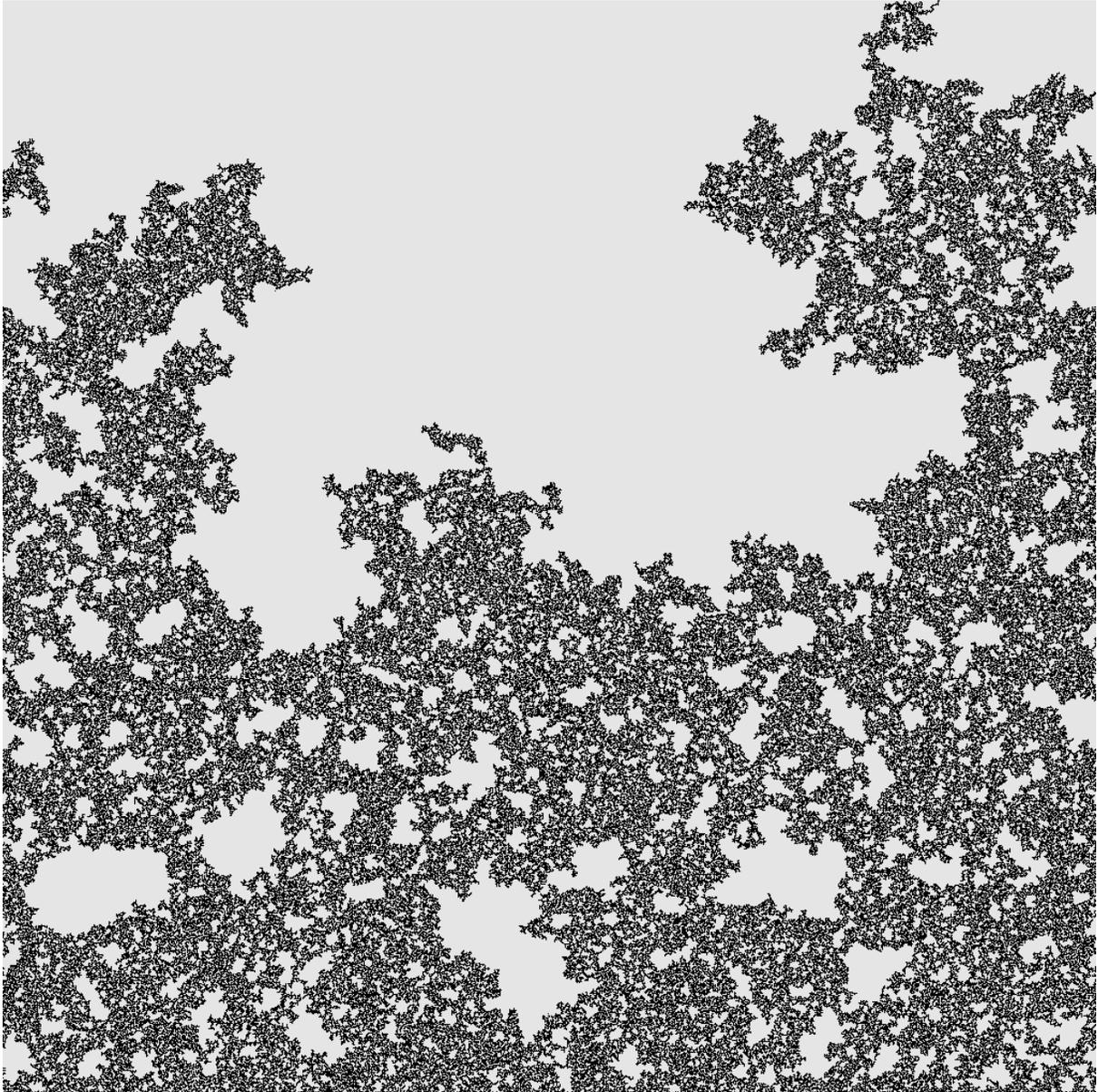


Figura 2.14: Rede de percolação invasiva de tamanho $L = 1024$ sem aprisionamento. Em preto, representamos os sítios invadidos que formam uma estrutura similar ao agregado percolante em p_c e, em cinza, representamos os sítios defensores.

onde $D \simeq 1.89$ para duas dimensões [4], como mostra a Fig. 2.15. Tal modelo, tenta descrever o comportamento de um fluido infinitamente compressível, sendo chamado de *modelo de percolação invasiva sem aprisionamento*. Nesse caso, os sítios invadidos se comportam da mesma maneira que o agregado percolante na criticalidade. Para um fluido incompressível, ou seja, quando há a formação permanente de bolhas do fluido defensor, o modelo torna-se o *modelo de percolação invasiva com aprisionamento* e o expoente torna-se um pouco menor, $D \simeq 1.82$ [4]. Para três dimensões, a dimensão fractal é $D \simeq 2.5$ para ambos os casos, pois quase não existe aprisionamento. Uma característica marcante desses modelos é a *criticalidade auto-organizada*, ou seja, eles evoluem para a criticalidade espontaneamente.

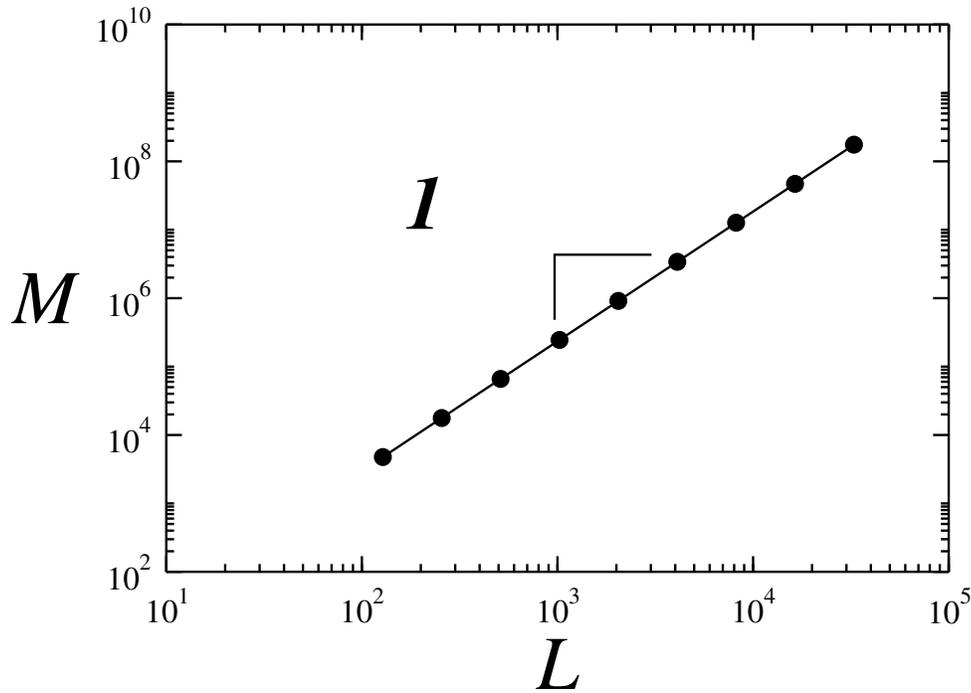


Figura 2.15: Gráfico da massa de sítios invasores M em relação ao tamanho L do sistema em escala logarítmica. Simulamos sistemas de tamanhos $L = 32768, 16384, 8192, 4096, 2048$ e 1024 com 100, 200, 400, 800, 1600 e 3200 amostras, respectivamente. Encontramos $D \simeq 1.89$ para a dimensão fractal do agregado invasor de percolação invasiva sem aprisionamento.

Outras duas quantidades interessantes no modelo de percolação invasiva são a *envoltória de percolação* e o *perímetro acessível* do fluido invasor. A envoltória de percolação $h(L)$ é definida como os sítios externos ao agregado invasor, isto é, os sítios defensores que são vizinhos dos sítios invadidos. Essa quantidade também escala com o tamanho do sistema L e é identificada como um fractal de dimensão $D = 7/4 = 1.75$, como mostra a Fig. 2.16. O perímetro acessível, é um pouco mais complicado, pois sua definição depende do diâmetro de partículas sonda d em relação à unidade de medida da rede a . Essas partículas são, hipoteticamente, lançadas em direção ao agregado invasor. Desse modo, o perímetro acessível é definido como o local no

agregado invasor para o qual existe alguma probabilidade dessas partículas sondas colidirem. Por exemplo, quando o diâmetro da partícula sonda obedece a seguinte relação,

$$d < \sqrt{2}a, \quad (2.22)$$

teremos que o perímetro acessível comporta-se de forma estatisticamente semelhante à envoltória de percolação, com a dimensão fractal $D = 7/4 = 1.75$. Caso contrário, o perímetro diminui com o aumento do valor de d , convergindo, no limite termodinâmico, para dimensão fractal $D = 4/3 \simeq 1.33$. Em suma, a teoria da percolação é muito abrangente devido à sua *uni-*

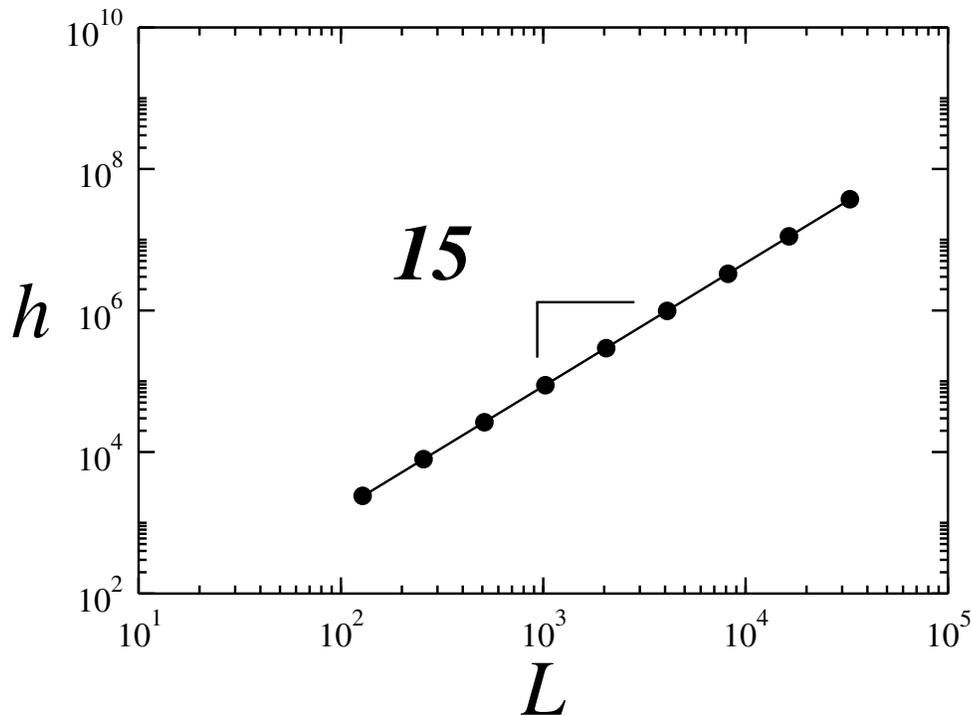


Figura 2.16: Gráfico do número médio de sítios de crescimento h em relação ao tamanho L do sistema em escala logarítmica. Simulamos sistemas de tamanhos $L = 32768, 16384, 8192, 4096, 2048$ e 1024 com 100, 200, 400, 800, 1600 e 3200 amostras, respectivamente. Encontramos $D = 1.75$ para a dimensão fractal da envoltória de percolação invasiva sem aprisionamento.

versalidade, pois apesar dos pontos críticos dependerem dos detalhes topológicos da rede, os expoentes críticos só dependem da dimensão topológica.

2.3 Introdução à superfícies correlacionadas

Por vários anos, matemáticos tentaram desenvolver uma teoria de suavização de curvas e superfícies. Assim, foi criada a *geometria diferencial* para estudar curvas e superfícies que globalmente poderiam ter formas bastante complexas, embora pudessem ser tratadas como um

conjunto de pequenas retas ou pequenos planos. Tal complexidade pode ser contornada com o estudo de *curvas e superfícies fractais aleatórias* sem a necessidade do grande rigor dos teoremas e notações da geometria diferencial, pois, computacionalmente, fractais são gerados de forma muito mais simples. Nesse contexto, apresentaremos o problema que deu origem a análise de *funções aleatórias correlacionadas* e sua conexão com o *Movimento Browniano Fracionário*. Finalmente, explicaremos um dos métodos utilizados na literatura para gerar *superfícies correlacionadas*. Tais sistemas tem grande aplicabilidade na natureza, como na representação de montanhas, nuvens ou meios porosos.

2.3.1 Lei empírica de Hurst

O hidrólogo *H. E. Hurst* dedicou boa parte de sua vida ao estudo de rios, lagos e de problemas relacionados com o armazenamento de água. Assim, ele criou um novo método estatístico, chamado de *análise de alcance reescalado* [3, 20, 21]. Por exemplo, vamos imaginar que desejamos determinar a forma de um reservatório ideal que nunca deve transbordar ou esvaziar completamente, a partir do histórico de sangria de um lago. Considerando que para um dado ano t o volume de entrada e saída do reservatório foi $\xi(t)$ e $\langle \xi \rangle$, respectivamente, para chegarmos na condição de um reservatório ideal, teremos que,

$$\langle \xi \rangle_\tau \equiv \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \xi(t), \quad (2.23)$$

onde τ é o período de tempo em análise. O fluxo acumulado, ou seja, a quantidade de água armazenada fica,

$$X(t, \tau) = \sum_{i=1}^t [\xi(i) - \langle \xi \rangle_\tau]. \quad (2.24)$$

Desse modo, podemos definir também, para um dado período τ , o alcance $R(\tau)$ como a diferença entre o máximo e o mínimo do fluxo acumulado, como ilustra a Fig. 2.17. Matematicamente, podemos escrever,

$$R(\tau) = X_{max}(t, \tau) - X_{min}(t, \tau). \quad (2.25)$$

Estudando vários fenômenos naturais, *Hurst* definiu a taxa adimensional R/S , onde S é o desvio padrão, isto é, a raiz quadrada da variância, dado por,

$$S = \left(\frac{1}{\tau} [\xi(t) - \langle \xi \rangle_\tau]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.26)$$

Com brilhantismo, observou que o alcance reescalado, ou seja, a taxa R/S obedecia a seguinte

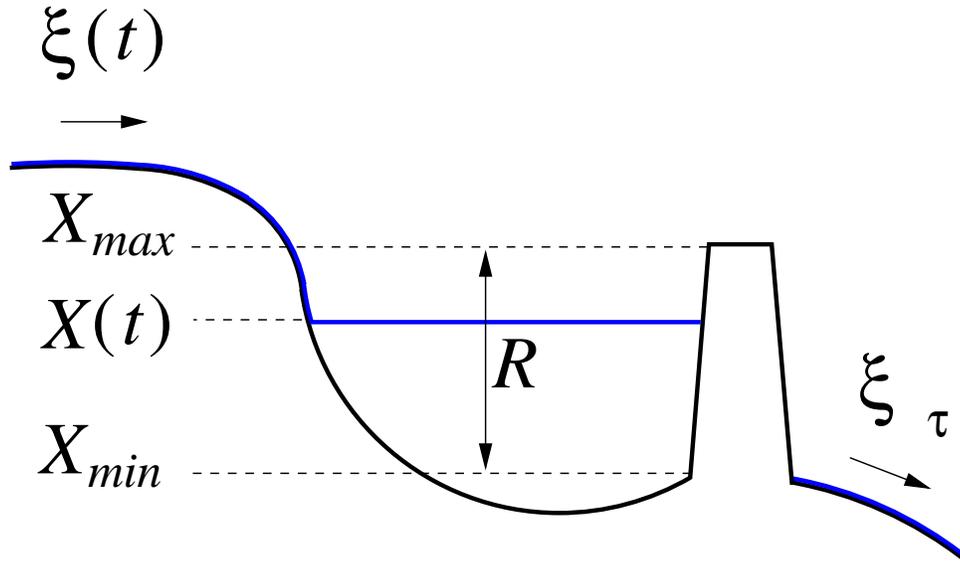


Figura 2.17: Representação esquemática de um reservatório ideal de Hurst.

relação empírica,

$$R/S = \left(\frac{\tau}{2}\right)^H, \quad (2.27)$$

onde H é conhecido como o *expoente de Hurst* e para muitos sistemas naturais, $H > 1/2$.

2.3.2 Movimento Browniano

Em 1828, o botânico *R. Brown* foi o primeiro cientista a observar que o movimento caótico de grãos de pólen em água era consequência da interação mecânica entre o fluido e as micropartículas, ou seja, de carácter completamente físico e não biológico, como se acreditava na época [22]. Na realidade, até as partículas dos mais sólidos materiais estão em constante movimento devido à energia térmica, embora tenham uma posição média bem definida. No ano miraculoso, 1905, o físico alemão *A. Einstein* também contribuiu para o entendimento desse problema, mostrando que independentemente do tamanho da partícula imersa no fluido, para uma dada temperatura absoluta T , a sua energia cinética média é $\frac{3}{2}kT$ [23]. Desse modo, podemos definir o *movimento Browniano* como aquele descrito por uma partícula que, aparentemente, se move em direções aleatórias e com um certo valor característico para o comprimento de cada passo. Nesse contexto, podemos definir o conceito de caminhante aleatório em uma dimensão considerando uma partícula com movimento confinado a uma linha, com passos ou incrementos de comprimento $-\xi$ ou $+\xi$ a cada passo de tempo τ . Consideremos ainda que tais incrementos

sejam dados pela distribuição Gaussiana,

$$p(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\mathcal{D}\tau}\right), \quad (2.28)$$

onde $\langle \xi \rangle = 0$ e identificamos \mathcal{D} como o *coeficiente de difusão*. A variância de tal processo fica,

$$\sigma^2 = \langle \xi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 p(\xi, \tau) d\xi = 2\mathcal{D}\tau. \quad (2.29)$$

Assim, chegamos a *relação de Einstein*,

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2\tau} \langle \xi^2 \rangle. \quad (2.30)$$

Podemos obter uma distribuição Gaussiana normalizada pela troca $\xi \rightarrow \frac{\xi}{\sqrt{2\mathcal{D}\tau}}$ e assim teremos $\langle \xi \rangle = 0$ e $\langle \xi^2 \rangle = 1$. Desse modo, o processo aleatório ou a função aleatória $X(t)$, isto é, a posição da partícula depois de n passos, fica sendo dada por,

$$X(t = n\tau) = \sum_{i=1}^n \xi_i. \quad (2.31)$$

O valor médio da função aleatória fica,

$$\langle |X(t) - X(s)| \rangle = 0, \quad (2.32)$$

para instantes de tempo que seguem a relação $t > s$. A variância obedece a seguinte relação,

$$\sigma^2 = \langle |X(t) - X(s)|^2 \rangle = 2\mathcal{D}|t - s| \propto |t - s|. \quad (2.33)$$

Além disso, tal processo aleatório possui invariância de escala. Essa propriedade de escalonamento é dada pela transformação de auto-afinidade,

$$\xi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{r}} \xi \quad \& \quad \tau \rightarrow r\tau, \quad (2.34)$$

Em suma, os deslocamentos das partículas no movimento Browniano são independentes, embora, claramente, as posições não sejam, isto é, a posição da partícula em um certo ponto depende da sua posição anterior. Para duas dimensões, por exemplo, o comportamento é completamente análogo e a trajetória da partícula é auto-similar, embora o comportamento da posição no tempo seja auto-afim [3].

2.3.3 Movimento Browniano fracionário

Em 1968, o *movimento Browniano fracionário* foi introduzido por *B. B. Mandelbrot* e *V. Ness* como a generalização do movimento Browniano através de um expoente real H , identificado como o expoente de Hurst, no intervalo $[0, 1]$ [24]. Analogamente, considerando $X(t)$ uma função aleatória, seu valor médio é dado por,

$$\langle X(t) - X(s) \rangle = 0, \quad (2.35)$$

onde os instantes de tempo obedecem a relação $t > s$. A variância para tal processo segue a relação,

$$\sigma^2 = \langle [X(t) - X(s)]^2 \rangle = 2\mathcal{D}\tau \left| \frac{t-s}{\tau} \right|^{2H} \propto |t-s|^{2H}. \quad (2.36)$$

Ainda de forma análoga, a propriedade de escalonamento é dada pela transformação de auto-afinidade,

$$\xi \rightarrow \frac{1}{r^H} \xi \quad \& \quad \tau \rightarrow r\tau. \quad (2.37)$$

Desse modo, para $H < 1/2$ temos um comportamento *anti-persistente* ou *anti-correlacionado*, existindo uma correlação negativa entre os incrementos. Em $H = 1/2$, recuperamos o resultado do movimento Browniano ordinário. Finalmente, no intervalo $H > 1/2$ temos um comportamento *persistente* ou *correlacionado*, existindo uma correlação positiva entre os incrementos.

2.3.4 Método de *Fourier filtering*

O movimento Browniano fracionário pode ser gerado através da representação espectral de funções aleatórias, essa técnica é conhecida como método de *síntese espectral* ou de *Fourier filtering*. Considerando $Y(t)$ a função aleatória reescalada, podemos escrever,

$$Y(t) = \frac{1}{r^H} X(rt), \quad (2.38)$$

onde $X(t)$ é a função aleatória, como definida anteriormente. As relações da *transformada de Fourier* ficam,

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} df \mathcal{F}(f) e^{2\pi i f t} \quad \& \quad \mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt Y(t) e^{-2\pi i f t}. \quad (2.39)$$

Considerando que a função aleatória reescalada é não-nula apenas em um intervalo de tempo finito, $0 < t < T$, devido às possíveis singularidades da sua transformada, podemos escrever,

$$\mathcal{F}_y(f, T) = \int_0^T dt Y(t, T) e^{-2\pi i f t} = \frac{1}{r^H} \int_0^{rT} \frac{ds}{r} X(s) e^{-2\pi i \frac{f}{r} s} = \frac{1}{r^{H+1}} \mathcal{F}_x\left(\frac{f}{r}, rT\right). \quad (2.40)$$

Desse modo, a *densidade de potência espectral* fica,

$$\mathcal{S}_y(f, T) = \frac{1}{T} |\mathcal{F}_y(f, t)|^2 = \frac{1}{r^{2H+1}} \left[\frac{1}{rT} \left| \mathcal{F}_x\left(\frac{f}{r}, rT\right) \right|^2 \right] = \frac{1}{r^{2H+1}} \mathcal{S}_x\left(\frac{f}{r}, rT\right). \quad (2.41)$$

No limite $T \rightarrow \infty$, teremos,

$$\mathcal{S}_y(f) = \frac{1}{r^{2H+1}} \mathcal{S}_x\left(\frac{f}{r}\right). \quad (2.42)$$

Como a função aleatória reescalada $Y(t)$ tem as mesmas propriedades estatísticas da função aleatória $X(t)$, podemos afirmar que,

$$\mathcal{S}_y(f) \equiv \mathcal{S}_x(f). \quad (2.43)$$

Assim, a relação fica,

$$\mathcal{S}_x(f) = \frac{1}{r^{2H+1}} \mathcal{S}_x\left(\frac{f}{r}\right). \quad (2.44)$$

Sem perda de generalidade, podemos considerar $f = 1$,

$$\mathcal{S}_x\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\mathcal{S}_x(1)}{\left(\frac{1}{r}\right)^{2H+1}} \propto \frac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)^{2H+1}} \quad (2.45)$$

e identificamos $1/r$ como uma outra frequência f . Portanto, podemos escrever a densidade de potência espectral como,

$$\mathcal{S}_x(f) \propto \frac{1}{f^{2H+1}} = \frac{1}{f^{\beta_C}}, \quad (2.46)$$

onde $\beta_C = 2H + 1$ é o *expoente da densidade de potência espectral* unidimensional. Dessa maneira, para $\beta_C = 0$ ou $H = -1/2$ a densidade de potência espectral é independente da frequência, implicando em uma distribuição não-correlacionada. Para os limites do expoente de Hurst $0 < H < 1$, teremos os limites do expoente da densidade de potência espectral $1 < \beta_C < 3$. Onde, para $\beta_C < 2$ ou $H < 1/2$, temos o comportamento anti-correlacionado. Em $\beta_C = 2$ ou $H = 1/2$, recuperamos o resultado do movimento Browniano ordinário unidimensional. Para encerrarmos, no intervalo $\beta_C > 2$ ou $H > 1/2$ temos o comportamento correlacionado.

2.3.5 Extensão para várias dimensões

Podemos generalizar o movimento Browniano fracionário em d dimensões através de um *processo aleatório multidimensional* ou *campo aleatório* $X(t_1, \dots, t_d)$ com incrementos Gaussianos. Desse modo, o valor médio do campo aleatório é dado por,

$$\langle X(t_1, \dots, t_d) - X(s_1, \dots, s_d) \rangle = 0. \quad (2.47)$$

A variância do processo é função da distância $\sqrt{\sum_{i=1}^d (t_i - s_i)^2}$ e do expoente H , como mostra a relação,

$$\sigma^2 = \langle [X(t_1, \dots, t_d) - X(s_1, \dots, s_d)]^2 \rangle \propto \left[\sqrt{\sum_{i=1}^d (t_i - s_i)^2} \right]^{2H} = \left[\sum_{i=1}^d (t_i - s_i)^2 \right]^H. \quad (2.48)$$

Como o campo aleatório é isotrópico e os incrementos são estacionários, a densidade de potência espectral fica,

$$\mathcal{S}(f_1, \dots, f_d) \propto \frac{1}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^d f_i^2} \right)^{2H+d}} = \frac{1}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^d f_i^2} \right)^{\beta_C}}, \quad (2.49)$$

onde $\beta_C = 2H + d$ é o expoente da densidade de potência espectral para d dimensões. Na prática, para produzirmos uma superfície correlacionada ($d = 2$), temos que gerar os *coeficientes de Fourier* no espaço recíproco através de uma fase aleatória no intervalo $[0, 2\pi[$ e uma amplitude distribuída de acordo com uma distribuição Gaussiana com valor máximo $1/(\sqrt{f_1^2 + f_2^2})^{\beta_C}$, onde f_1 e f_2 representam as frequências da *transformada discreta de Fourier* e $\beta_C = 2H + 2$. Desse modo, podemos aplicar a *transformada inversa de Fourier* para obtermos uma distribuição representando a paisagem correlacionada [25], como mostram as Fig. 2.18. Para $\beta_C = 0$ ou $H = -1$ a densidade de potência espectral é independente das frequências, implicando em uma distribuição *não-correlacionada*. No intervalo do expoente de Hurst $0 < H < 1$, teremos os limites do expoente da densidade de potência espectral $2 < \beta_C < 4$. Para $\beta_C < 3$ ou $H < 1/2$, temos o comportamento anti-correlacionado, ou seja, se o valor do incremento é positivo em um ponto, no ponto posterior o valor do incremento tenderá a ser negativo, e vice-versa, como ilustramos na Fig. 2.18b. Em $\beta_C = 3$ ou $H = 1/2$, recuperamos o resultado do movimento Browniano ordinário bidimensional. Nesse caso, naturalmente, o incremento de um ponto é independente do incremento do ponto anterior, porém essa característica não retira a correlação da superfície ou da trajetória da partícula no movimento Browniano, como deixa claro a Fig. 2.18c. Finalmente, no intervalo $\beta_C > 3$ ou $H > 1/2$, temos o comportamento correlacionado, isto é, se o incremento de um ponto é positivo, o incremento do ponto posterior tenderá a ser positivo também, e vice-versa, como mostramos na Fig. 2.18d.

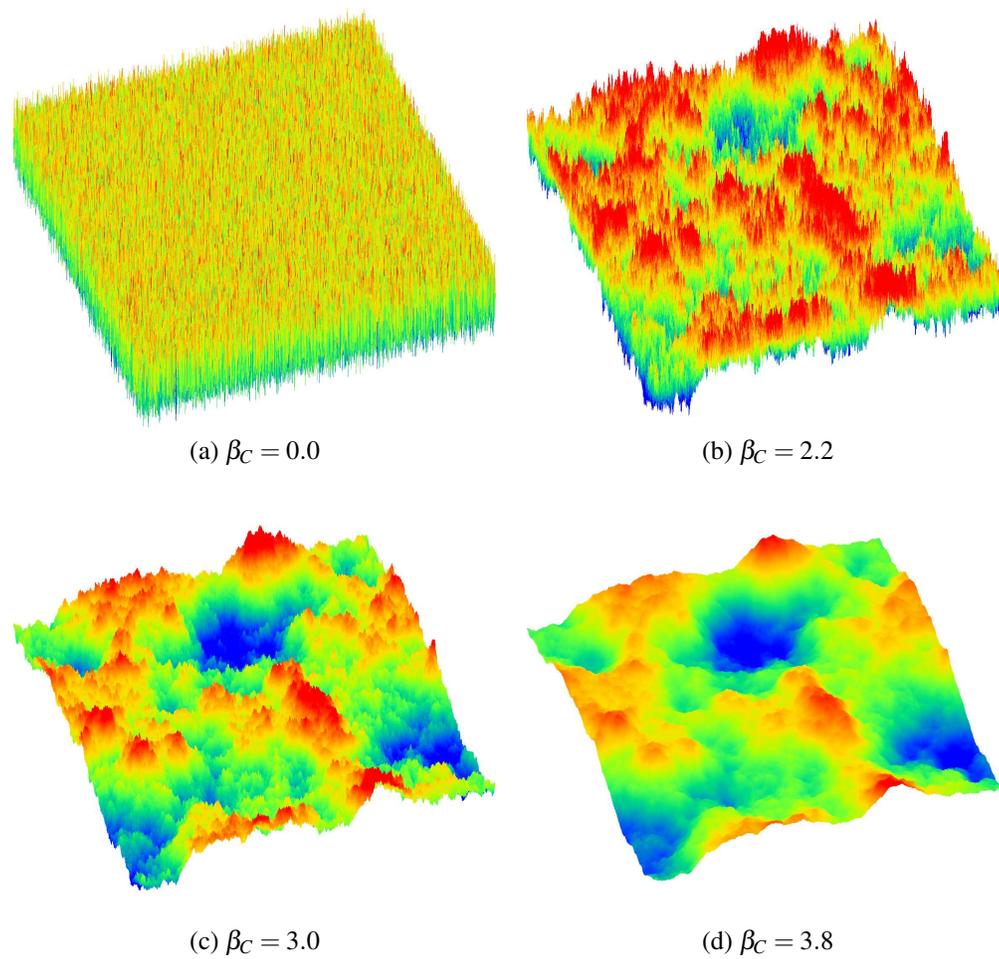


Figura 2.18: Redes de tamanho $L = 1024$ com diferentes valores do expoente espectral β_C . O azul e o vermelho representam pontos de menor e maior altura, respectivamente. (a) Caso não-correlacionado. (b)-(d) Casos correlacionados.

3 *Linhas divisoras de águas*

O conceito de *divisores de águas* na literatura surge naturalmente dos campos de estudo da geofísica e geomorfologia, devido ao papel fundamental destas estruturas na questão de gerenciamento de água [26, 27, 28], deslizamentos [29, 30, 31, 32] e prevenção de inundações [31, 33, 34]. Além disso, importantes aplicações podem ser encontradas em áreas aparentemente não correlacionadas, como por exemplo em processamento de imagens [35, 36, 37] e medicina [38, 39, 40, 41, 42]. Nesse capítulo apresentamos algoritmos avançados por nós desenvolvidos que nos permite estudar de forma eficiente as propriedades geométricas dos divisores de água em grandes paisagens e com boa amostralidade estatística. Aplicamos o modelo para paisagens artificiais, mostrando resultados sobre vastas áreas, envolvendo intervalos de comprimentos de até três ordens de magnitude e encontrando uma dimensão fractal conclusiva para os divisores de água. Finalmente, o método é aplicado para paisagens reais da região dos *Alpes* e para a cadeia de montanhas do *Himalaia*.

3.1 Divisores de águas

Os divisores de águas são linhas imaginárias que separam bacias hidrográficas de diferentes oceanos. Historicamente, tais linhas são utilizadas desde tempos remotos para delimitar fronteiras entre regiões. Em um contexto mais atual, fronteiras definidas com conceitos de divisores de águas são motivos de discussão entre países, como por exemplo entre Argentina e Chile [43], demonstrando a enorme importância de um completo entendimento dessas propriedades geométricas. Em 1992, *S. P. Breyer* e *R. S. Snow* encontraram indícios preliminares, porém inconclusivos sobre a fractalidade das linhas de divisores de água [44]. Em processamento de imagens existe um interesse contínuo no desenvolvimento de algoritmos cada vez mais eficientes. Sempre existem tentativas de simplificar e/ou mudar muitas das abordagens e métodos existentes, tal que o resultado final seja mais significativo ou a análise de dados seja mais fácil. Usualmente, isso é feito por segmentação de imagens digitais, particionando-se a imagem em vários segmentos. Mais precisamente, segmentação de imagens é o processo de atribuir um

rótulo para todo píxel de uma imagem, tal que os píxeis com o mesmo rótulo compartilhem determinadas características visuais, como cor, intensidade ou textura. Desse modo, embora existam muitos outros algoritmos de segmentação de imagens [37, 45, 46, 35, 47], divisores de águas ainda são frequentemente usados. Isso ocorre, pois podemos usar o *modelo de elevação digital* ou *digital elevation model (DEM)* transformando uma imagem digital na representação do seu gradiente de cores e calcular os divisores de águas do substrato.

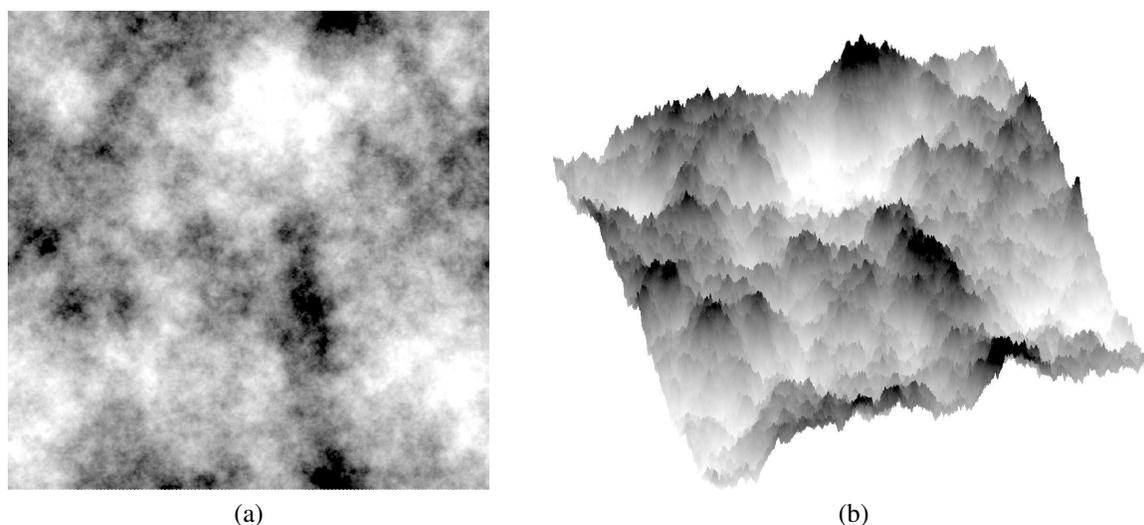


Figura 3.1: Representação do modelo de elevação digital (*DEM*). Em tais imagens digitais a intensidade de cinza é transformada em altura.

Os métodos tradicionais de cartografia para a definição de bacias hidrográficas baseiam-se em uma estimativa manual das isolinhas de elevação e requerem uma boa dose de subjetividade. Processos modernos são baseados no tratamento automático de imagens do *DEM* ou imagens digitais em escala de cinza, onde a intensidade do cinza é transformada em altura, como mostramos na Fig. 3.1. Na seção seguinte introduzimos um novo modelo para a identificação das linhas de divisores de águas, cujo algoritmo é baseado no modelo de percolação invasiva. Posteriormente, introduziremos pequenas modificações no modelo proposto inicialmente por *L. Vincent e P. Soille* [35].

3.2 Algoritmo baseado em percolação invasiva

Nessa seção, propomos uma técnica muito eficiente para a identificação das linhas divisoras de águas em meios correlacionados e não-correlacionados. Em nosso modelo, chamado de *algoritmo baseado em percolação invasiva* e primeiramente introduzido como *invasion percolation based algorithm (IPBA)* [48, 49, 50, 51], consideramos uma rede de sítios quadrada de

lado L , onde cada sítio i tem uma altura h_i correspondente. Evidentemente, essa altura pode ser proveniente de um gerador de números pseudoaleatórios ou do processamento de imagens digitais, utilizando o *DEM*, por exemplo. Sem perda de generalidade, consideramos tais alturas no intervalo $]0, 1[$. Para imagens digitais feitas através do *DEM*, normalizamos a distribuição de valores de altura no mesmo intervalo $]0, 1[$. Definimos ainda conjuntos específicos de sítios S_k ($k = 0, 1, \dots, N_{sumidouros}$), em posições aleatórias, para serem os sumidouros do sistema que são considerados *inundados* desde o início do algoritmo. Em paisagens naturais, tais sumidouros são pontos de drenagem do terreno, isto é, saídas naturais de água e podemos interpretá-los como canais para um lençol freático, lagos, rios ou oceanos. Desse modo, iniciamos o algoritmo inundando um dado sítio fonte i , considerando que, a cada passo de tempo, a água flui para o sítio de menor altura do perímetro da região inundada até encontrar um sumidouro S_k qualquer. Vale notar que, essa parte do modelo é uma aplicação direta do algoritmo de percolação invasiva sem aprisionamento discutido anteriormente. Além disso, sabemos que problemas de busca por mínimos ou máximos podem ser resolvidos de forma bastante rápida quando usamos uma estrutura de *heap binária*, que corresponde a um método de árvore para organizar a lista de sítios do perímetro de acordo com seus valores de altura [52]. Assim, o sítio i e toda a região inundada pertenceria à bacia hidrográfica do sumidouro S_k , ou de forma equivalente, diríamos que o sítio i e todo agregado formado por sítios inundados seria drenado pelo sumidouro S_k . Considerando processos semelhantes com outros sítios para ponto de partida da inundação, criaremos bacias hidrográficas para cada sumidouro S_k e teremos que as interfaces entre essas bacias serão as linhas de divisores de águas. Frequentemente, paisagens naturais possuem vários sumidouros, dificultando o estudo das propriedades geométricas de longo alcance das linhas divisoras de águas. Dessa forma, para simplificar, consideraremos apenas paisagens com dois sumidouros que dividem o sistema em duas bacias hidrográficas através de uma única linha.

Podemos melhorar nosso algoritmo de duas formas. A primeira é considerando que todos os sítios inundados, a partir de um sítio i , já estão diretamente conectados ao sumidouro daquela bacia. Por consequência, paramos a inundação provenientes de outras fontes se o agregado inundado atual alcançar um agregado inundado já existente. Dessa forma, conectamos os sítios do novo agregado inundado diretamente ao sumidouro do antigo agregado inundado. A segunda forma de melhorarmos o nosso é conjecturar que sempre existe uma linha imaginária dividindo o sistema em duas partes, embora desconhecida. Desse modo, definiremos os sítios fontes iniciais na sequência de uma linha reta vertical. Após algumas inundações, encontraremos sítios vizinhos pertencentes à dois sumidouros distintos. Esse ponto é o encontro das duas bacias hidrográficas e definiremos que aquela interface é o início da linha divisora de águas. Dando continuidade, os próximos sítios fontes são definidos pela *vizinhança de Moore*

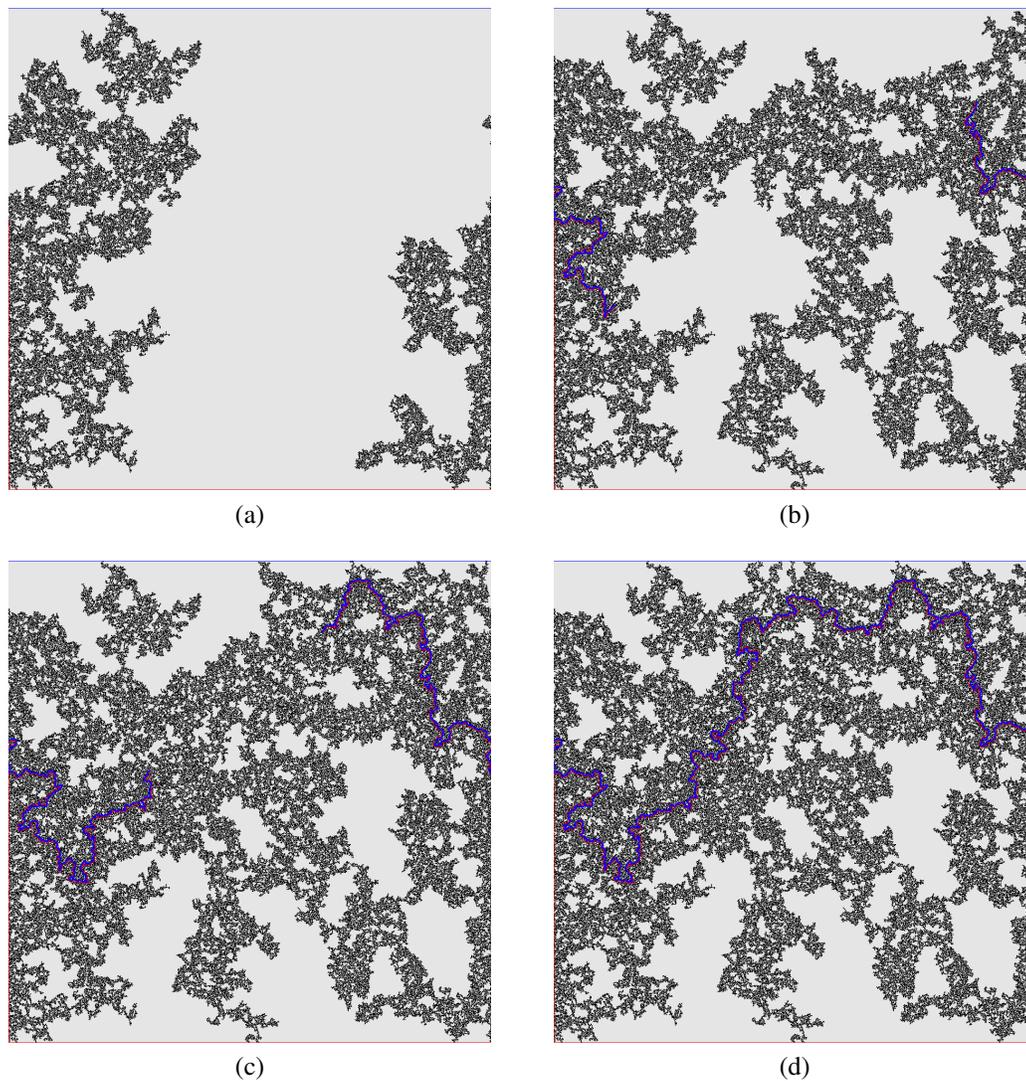


Figura 3.2: Estágios do algoritmo baseado em percolação invasiva (*IPBA*). (a)-(d) Em preto os sítios invadidos, em azul e vermelho os sítios pertencentes a linha divisora de águas.

de primeiros vizinhos (Fig. 2.6c) dos sítios que dividem as bacias. Pelo processo de inundação, encontramos outros sítios vizinhos de bacias distintas e assim por diante. No final do algoritmo, identificamos apenas os sítios das vizinhanças da linha divisora de águas, tornando o algoritmo bastante eficiente e de baixíssimo custo computacional, como ilustra a Fig. 3.3.

3.3 Algoritmo de inundação

Aqui consideraremos uma versão ligeiramente diferente do algoritmo comumente usado para o cálculo dos divisores de água [35], introduzido como *algoritmo de inundação* e primeiramente chamado de *flooding algorithm (FA)*[48], para mostrarmos a eficiência do *IPBA*. Nesse modelo, a rede inteira é ocupada ou “inundada” de acordo com o aumento das alturas dos sítios, isto é, no tempo t , todos os sítios para os quais $h_i < h(t)$ são ocupados e $h(t)$ cresce sítio por sítio no tempo. Como no *IPBA*, definimos que as alturas atribuídas para cada sítio são números reais no intervalo $]0, 1[$, tal que depois de ordenados, exista apenas uma sequência de alturas definida. Inicialmente, definimos rótulos diferentes para cada sítio que representa um sumidouro S_k ($k = 1, \dots, N_{\text{sumidouros}}$) em posições quaisquer. Dessa forma, os sítios ocupados que estiverem conectados através de um caminho de sítios ocupados a um sumidouro, receberão o rótulo de tal sumidouro, ou seja, os rótulos dos sítios ocupados se propagam a partir dos sumidouros. Já os sítios ocupados isolados, ou seja, aqueles que não possuem contato com nenhum sumidouro, permanecem não-rotulados. Todos os sítios que conectam agregados com rótulos diferentes são “cortados”, de tal forma que agregados de rótulos diferentes nunca se misturam, isto é, separamos sítios pertencentes à bacias hidrográficas distintas. Os sítios que conectam agregados de diferentes rótulos são chamados de sítios “pontes”. Quando esse procedimento de inundação está completo, os sítios pontes que separam as diferentes bacias hidrográficas identificam as linhas divisoras de águas do sistema. Evidentemente, poderíamos reformular o modelo para identificarmos todas as bacias hidrográficas de uma dada paisagem, introduzindo novos rótulos para cada sítio ocupado isolado inserido na rede. Entretanto, estamos interessados apenas nas características de longo alcance das linhas divisoras de águas, como dito anteriormente, e sem perda de generalidade, podemos nos restringir à paisagens com dois sumidouros. Infelizmente usando o *FA* temos em geral que considerar cada sítio ou píxel para determinar completamente a linha divisora de águas, de forma que, sem considerar a complexidade do problema de ordenamento, esse algoritmo tem performance menos eficiente do que o algoritmo baseado em percolação invasiva, *IPBA*.

Para provar a equivalência entre os métodos, consideramos durante o crescimento da inundação no *FA* um conjunto de sítios não-rotulados que tornam-se rotulados pela inclusão de um

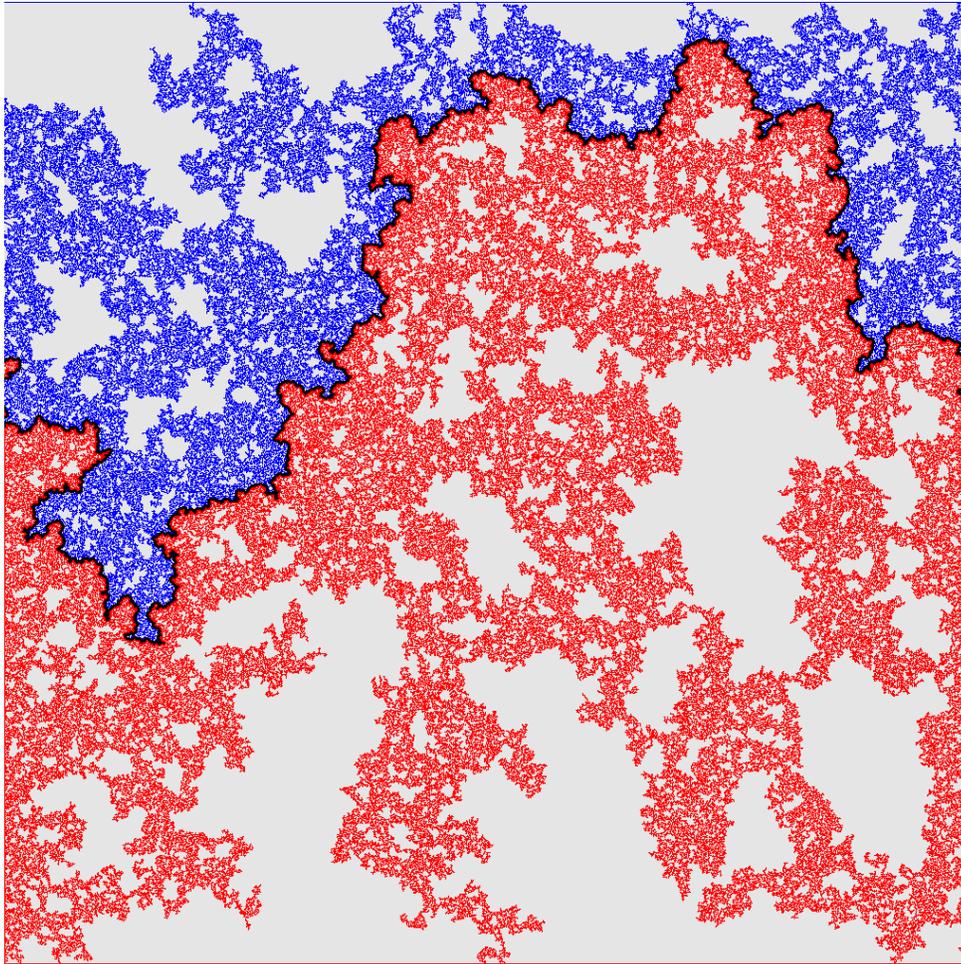


Figura 3.3: Rede de tamanho $L = 1024$ para o algoritmo baseado em percolação invasiva (*IPBA*). Os sítios azuis pertencem à linha de sumidouros na parte superior da rede e os sítios vermelhos são drenados pelos sumidouros na parte inferior da rede. Como podemos ver, identificamos apenas os sítios das vizinhanças da linha divisora de águas, tornando o algoritmo bastante eficiente e de baixíssimo custo computacional.

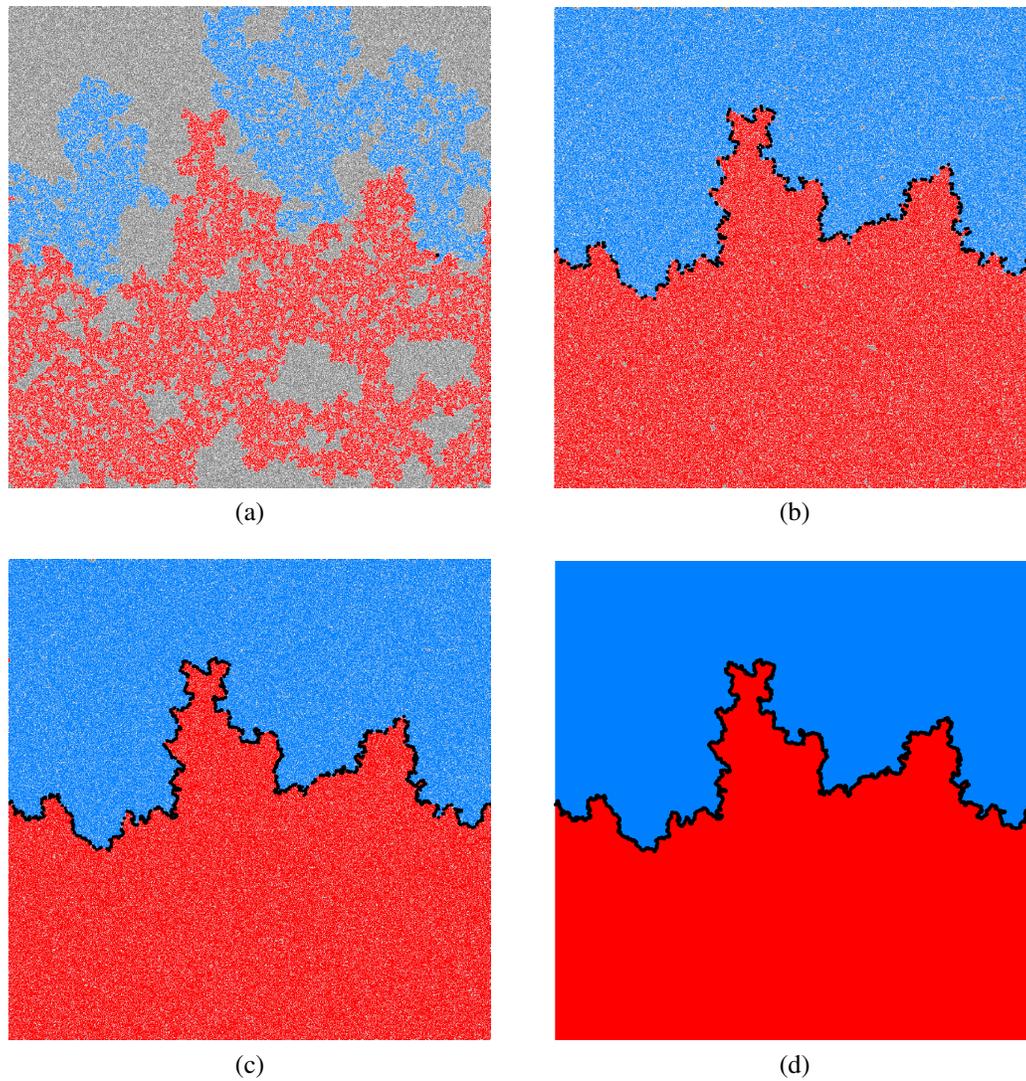


Figura 3.4: Estágios do algoritmo de inundação (*FA*). (a)-(d) Em preto, os sítios pertencentes à linha divisora de águas. Em cinza, representamos os sítios inundados que não pertencem a nenhuma bacia. Em azul e vermelho, os sítios pertencentes às bacias hidrográficas norte e sul, respectivamente.

novo sítio ocupado b . Metaforicamente, tal conjunto representaria um *lago* e o sítio b seria visto como o seu *ponto de sangria*, isto é, a altura de qualquer sítio i pertencente ao lago seria limitada pela altura do ponto de sangria, $h(i) \leq h(b)$. Seguimos o procedimento do *FA* até o sítio i tornar-se rotulado pela primeira vez. Em contrapartida, consideramos também o procedimento do *IPBA* a partir do mesmo sítio i . Desse modo, durante o processo de invasão o lago inteiro é inundado. Tendo em vista que todos os sítios pontes são maiores do que o ponto de sangria de um lago, pois, por definição, os sítios pontes são ocupados por último no *FA*, o próximo sítio inundado será, necessariamente, um ponto de sangria. Obviamente, esse argumento pode ser estendido para todo o sistema, provando a equivalência dos procedimentos.

3.4 Redes não-correlacionadas

Aplicamos o modelo de *IPBA* à substratos com distribuições de alturas não-correlacionadas. Nesse caso, definimos que as alturas dos sítios, h_i , são representadas por números pseudoaleatórios distribuídos uniformemente entre $]0, 1[$. Investigamos a possível fractalidade das linhas divisoras de águas através do comportamento da massa dos seus sítios, M , em relação ao tamanho L do sistema, como mostra a Fig. 3.5. Desse modo, encontramos que as linhas divisoras de águas exibem invariância de escala, comportando-se como fractais, pois obedecem a relação, $M \sim L^D$, com dimensão fractal $D = 1.211 \pm 0.001$. Desse modo, tal expoente crítico é estatisticamente idêntico à dimensão fractal do caminho ótimo com desordem forte [53, 54, 55, 56], e muito próxima daquelas encontradas para a esqueleto da fratura de caminhos ótimos [49, 57, 58], para os “fios” (*strands*) em percolação invasiva [53, 54] e para os caminhos em *minimum spanning trees* [59].

3.5 Redes correlacionadas

Para completarmos a abordagem do problema das linhas divisoras de águas, investigamos o modelo de *IPBA* aplicado a paisagens naturais [48]. Sabe-se que tais sistemas apresentam correlações de longo alcance no substrato. Nesse caso, utilizamos a análise dos dados topográficos reais da missão topográfica de radar transportado, conhecida como *Shuttle Radar Topography Mission (SRTM)*, das regiões montanhosas dos Alpes e do Himalaia e através de suas *DEM*, definimos as alturas h_i de cada sítio, como ilustramos na Fig. 3.6. A *SRTM* foi um projeto realizado pela *NASA* com parcerias internacionais [60]. O objetivo de tal missão era recolher dados topográficos precisos da superfície terrestre entre as longitudes -56° e 60° . O banco de dados proveniente dessa missão e de missões posteriores para o melhoramento de resolução

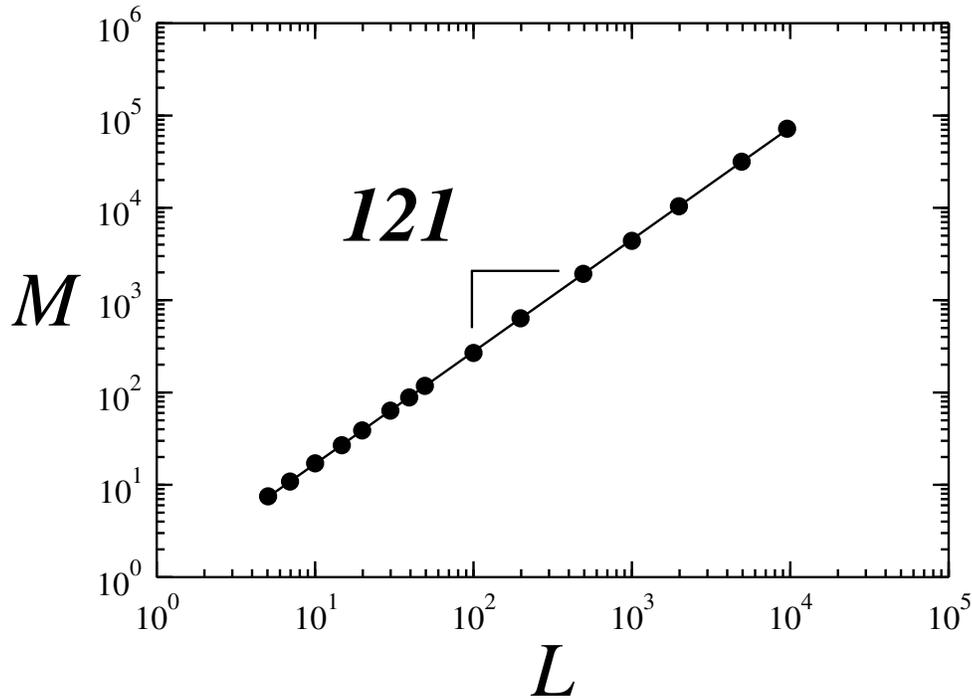
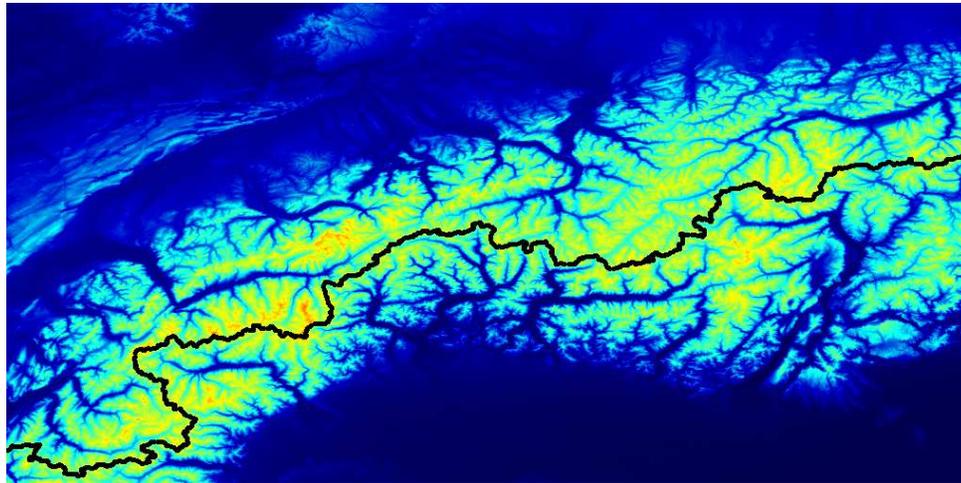


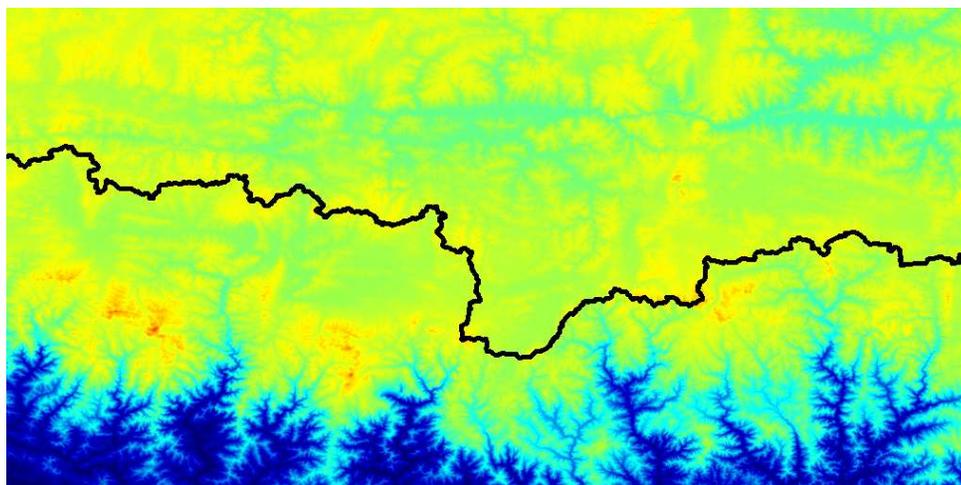
Figura 3.5: Gráfico em escala logarítmica da massa dos sítios pertencentes à linha de divisores de águas M (círculos) para paisagens não-correlacionadas em função do tamanho do sistema L . Simulamos sistemas de tamanhos $L = 10000, 5000, 1000, 500, 100, 50, 10$ e 5 , com ao menos 10000 amostras por tamanho de rede L . Encontramos um comportamento em lei de potência, $M \sim L^D$, com expoente $D = 1.21 \pm 0.001$. As barras de erro dos pontos individuais são menores que os símbolos.

são disponibilizados com precisão de $\text{sec}^{-1} 30$ (~ 1 km), $\text{sec}^{-1} 3$ (~ 90 m) e $\text{sec}^{-1} 1$ (~ 30 m). Contudo, apesar de toda a tecnologia implementada no projeto, existem ainda falhas, ou seja, pontos que não foram mapeados, principalmente em regiões montanhosas muito íngrimes. Desse modo, como tais pontos correspondem a apenas cerca de 0,2% da parte total mapeada, técnicas de *interpolação* são muito utilizadas para preenchimento dos dados dessas regiões. Em ambos os casos, Alpes e Himalaia, juntamos 18 imagens (6x3) com resolução de $\text{sec}^{-1} 3$ e interpolamos as falhas em relação a média dos primeiros vizinhos 2.6a. Além disso, utilizamos o método do *yardstick* para investigarmos a invariância de escala das linhas divisoras de águas nesses sistemas naturais.

Como mostrado na Fig. 3.7, encontramos que a linha divisora de águas apresenta invariância de escala com a dimensão fractal $D = 1.10 \pm 0.01$ e $D = 1.11 \pm 0.01$, para os Alpes e para o Himalaia, respectivamente. Além disso, encontramos que os divisores de águas são objetos auto-similares apenas para escalas intermediárias, pois o expoente de rugosidade encontrado é igual à unidade. Para escalas menores (< 100 m), devido à geomorfologia individual das montanhas, e maiores (> 200 km), devido ao movimento das placas tectônicas, os divisores de águas



(a) Alpes



(b) Himalaia

Figura 3.6: Modelo de *IPBA* aplicado aos dados reais de topografia das regiões: (a) dos Alpes e (b) do Himalaia. As linhas (em preto) representam as linhas divisoras de águas do sistema.

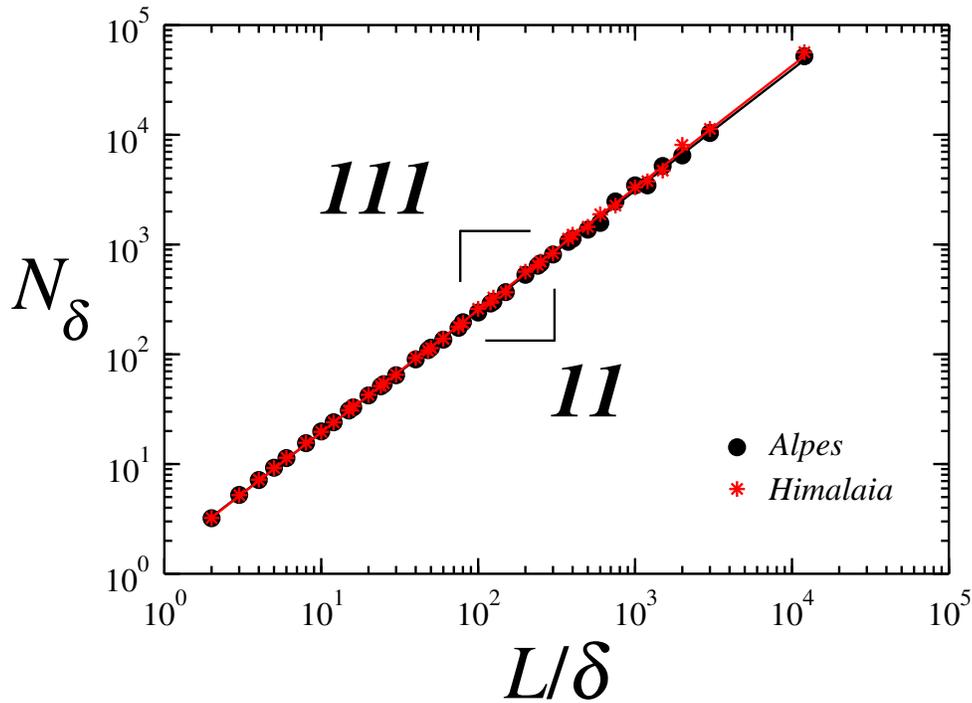


Figura 3.7: Gráfico do número de segmentos $N(\delta)$ em função da fração do tamanho do sistema L pelo tamanho de cada segmento δ . Encontramos comportamentos em lei de potência, $N(\delta) \sim L/\delta^D$, com expoente $D = 1.10 \pm 0.01$ para os Alpes e $D = 1.10 \pm 0.01$ para o Himalaia. As barras de erro dos pontos individuais são menores que os símbolos.

exibem um comportamento auto-afim. Desse modo, comprovamos a fractalidade dos divisores de águas e conjecturamos que a pequena magnitude desses expoentes em paisagens reais deve-se ao fato de haver correlações de longo alcance nas alturas das montanhas, influenciando o comportamento “crítico” do sistema.

4 *Fraturas de caminhos ótimos*

A identificação e caracterização de *caminhos ótimos* em paisagens aleatórias representa um importante problema em *Sistemas Complexos*, podendo ser associada à muitas aplicações científicas e tecnológicas relevantes, como polímeros aleatórios e transporte em meios porosos [61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72]. Este problema está presente em nosso cotidiano, por exemplo, quando usamos o *sistema de posicionamento global*, popularmente conhecido como *GPS (Global Positioning System)*, para traçar a melhor rota para chegarmos a um destino. Dependendo da aplicação, quando tais *caminhos ótimos* são usados de forma muito intensa, sobrecargas, superaquecimentos ou congestionamentos, estariam mais propensos a acontecer e teriam influência relevante nos fenômenos de transporte desses sistemas. Neste capítulo, abordaremos o *problema do caminho de custo mínimo*, do ponto de vista da *Teoria de Grafos*, e introduziremos o conceito de *caminho ótimo*, no contexto de sistemas desordenados. Dando continuidade, definiremos um modelo de quebra da conectividade global através de caminhos ótimos sobrecarregados, chamado de *fratura de caminhos ótimos*, primeiramente introduzido como *OPC (Optimal Path Crack)* [49, 57, 58]. Estudaremos o efeito de desordem na distribuição não-correlacionada de pesos do substrato em duas e três dimensões. Para encerrarmos o capítulo, investigaremos também o comportamento do modelo de *OPC* quando aplicado à paisagens correlacionadas.

4.1 **O problema do caminho de custo mínimo**

Para introduzirmos o *problema do caminho de custo mínimo* [52], imaginemos duas cidades, *A* e *B*. Suponhamos que existam algumas rotas que ligam essas cidades e que cada rota é composta por trechos. Conhecemos, mediante um mapa, a distância entre dois trechos adjacentes quaisquer e desejamos saber qual o menor caminho entre *A* e *B*, como ilustra a Fig. 4.1. A forma trivial de resolver o problema seria tentarmos todos os caminhos possíveis e descobrirmos o mais curto. No entanto, quando o número de rotas aumentar, esta solução se tornará inviável. Logo, teremos que restringir o problema para podermos resolvê-lo, como por

exemplo, excluindo ciclos nas rotas ou excluindo uma rota que se afasta demais das cidades.

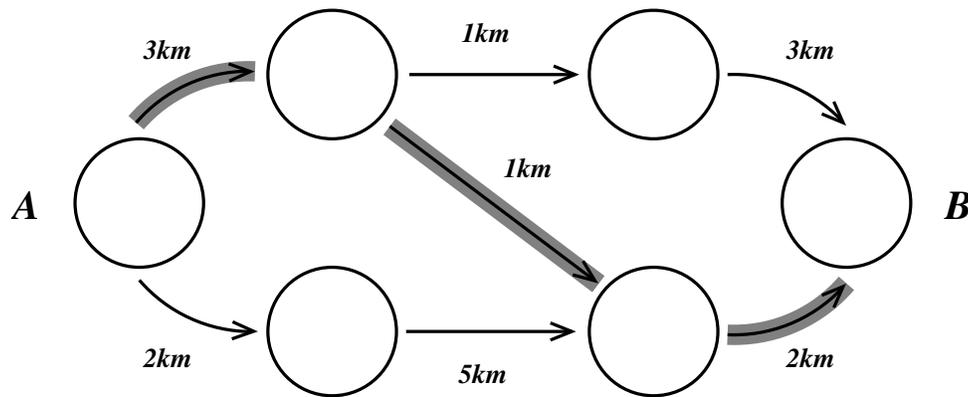


Figura 4.1: Grafo das rotas entre as cidades A e B. Os círculos são os vértices, as setas são as arestas e os pesos são os números suspensos. As arestas sombreadas formam o caminho de custo mínimo.

Na *Teoria de grafos*, o problema do caminho de custo mínimo consiste na minimização do custo ou peso da travessia entre dois vértices do grafo. Matematicamente, seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado, onde V é o conjunto dos vértices v e E é o conjunto das arestas (u, v) . Consideramos que cada aresta (u, v) é orientada do vértice u para o vértice v e que tenha função peso $w(u, v) : E \rightarrow \mathfrak{R}$, dessa forma, o peso total do caminho $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k \rangle$ será a soma dos pesos de todas as suas arestas,

$$w(p) = w(v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k) = \sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i). \quad (4.1)$$

Desse modo, podemos definir o *peso do caminho de custo mínimo* δ do vértice u para o vértice v , como sendo,

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \overset{p}{\rightsquigarrow} v\} & \text{se há um caminho de } u \text{ para } v, \\ \infty & \text{de outro modo.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Logo, o caminho de custo mínimo do vértice u para o vértice v é definido como qualquer caminho p com o peso $w(p) = \delta(u, v)$.

No exemplo mostrado na Fig. 4.1, podemos considerar os vértices como as intersecções entre os trechos, as arestas como os trechos e os pesos como os comprimentos de cada trecho. Dependendo do problema, os pesos das arestas podem representar qualquer outra quantidade que se acumula, por exemplo, de forma linear ao longo do caminho. De forma geral, para o problema do caminho de custo mínimo, os pesos das arestas podem ser positivos e/ou negativos. Para pesos positivos, o caminho de custo mínimo de um vértice u para um vértice v é sempre

bem definido. Para pesos negativos, o caminho de custo mínimo só é bem definido caso não existam ciclos de pesos negativos alcançáveis a partir do vértice u . Alguns algoritmos, como o *Algoritmo de Dijkstra* [73], consideram que todos os pesos são sempre positivos, outros, como o *Algoritmo de Bellman-Ford* [74, 75], consideram a possibilidade de haver pesos negativos. Para uma análise completa do problema, além de determinarmos o peso, queremos também identificar o caminho de custo mínimo. Sendo assim, dado o grafo $G = (V, E)$, iremos supor que para cada vértice $v \in V$ existe um *antecessor* ou *predecessor* $\pi[v]$. Esse antecessor $\pi[v]$ será igual ao vértice anterior a v ou igual ao próprio vértice v , caso não exista vértice anterior à v . Dessa forma, teremos uma *árvore de caminhos de custo mínimo* com raiz no vértice s . Essa árvore pode ser interpretada como um *sub-grafo de antecessores* $G' = (V', E')$, onde $V' \subseteq V$ é um conjunto de vértices que são alcançáveis a partir do vértice s e $E' \subseteq E$ é o conjunto de arestas desses vértices pertencentes à V' . Logo, qualquer caminho do vértice s para o vértice v em G' é um caminho de custo mínimo em G .

Para fins práticos, o algoritmo de Dijkstra se destaca pela sua simplicidade, alta performance computacional e grande aplicabilidade. Assim, dado o grafo $G = (V, E)$ definido anteriormente e um vértice fonte s , suponhamos que todas as arestas (u, v) tenham pesos não-negativos, ou seja, $w(u, v) \geq 0$. Podemos supor a existência de dois conjuntos, S como o conjunto de todos os vértices v que já tem o caminho de custo mínimo determinado e $Q = V - S$, e de dois vetores, $\pi[v]$ como vértice antecessor ao vértice v e $d[v]$ como o peso do caminho entre s e v . Inicialmente, como partirmos do vértice s , fazemos $d[s] = 0$ e, como não sabemos nenhum outro caminho para qualquer outro vértice v , tomamos $d[v] = \infty$ ($\forall v \neq s$), pois a pior hipótese é que tal caminho não exista e o seu peso torne-se infinito. Definimos também todos os antecessores como nulos, $\pi[v] = 0$ ($\forall v \in V$). Após a inicialização, fazemos $Q = V$, pois $S = \{0\}$. Começamos a extrair o vértice u de menor peso de Q e aplicamos o *processo de relaxação* em cada aresta do vértice u com os seus adjacentes. O *processo de relaxação* é a atualização de $d[v]$ e $\pi[v]$ se o caminho mais curto para o vértice v poder ser melhorado por um outro que passe através do vértice u para uma dada aresta (u, v) . Para finalizar, atualizamos então S e Q , respeitando sempre a relação $Q = V - S$. Continuamos com esse processo até $Q = \{0\}$, pois nesse ponto $S = V$. O resultado do algoritmo é o conhecimento do peso do caminho de custo mínimo $d[v]$ e dos antecessores $\pi[v]$ do vértice v , para todos os vértice do grafo [52]. Como exemplo, mostramos na Fig. 4.2 a aplicação do algoritmo de Dijkstra no grafo introdutório desta seção e calculamos o caminho de custo mínimo entre todos os vértices.

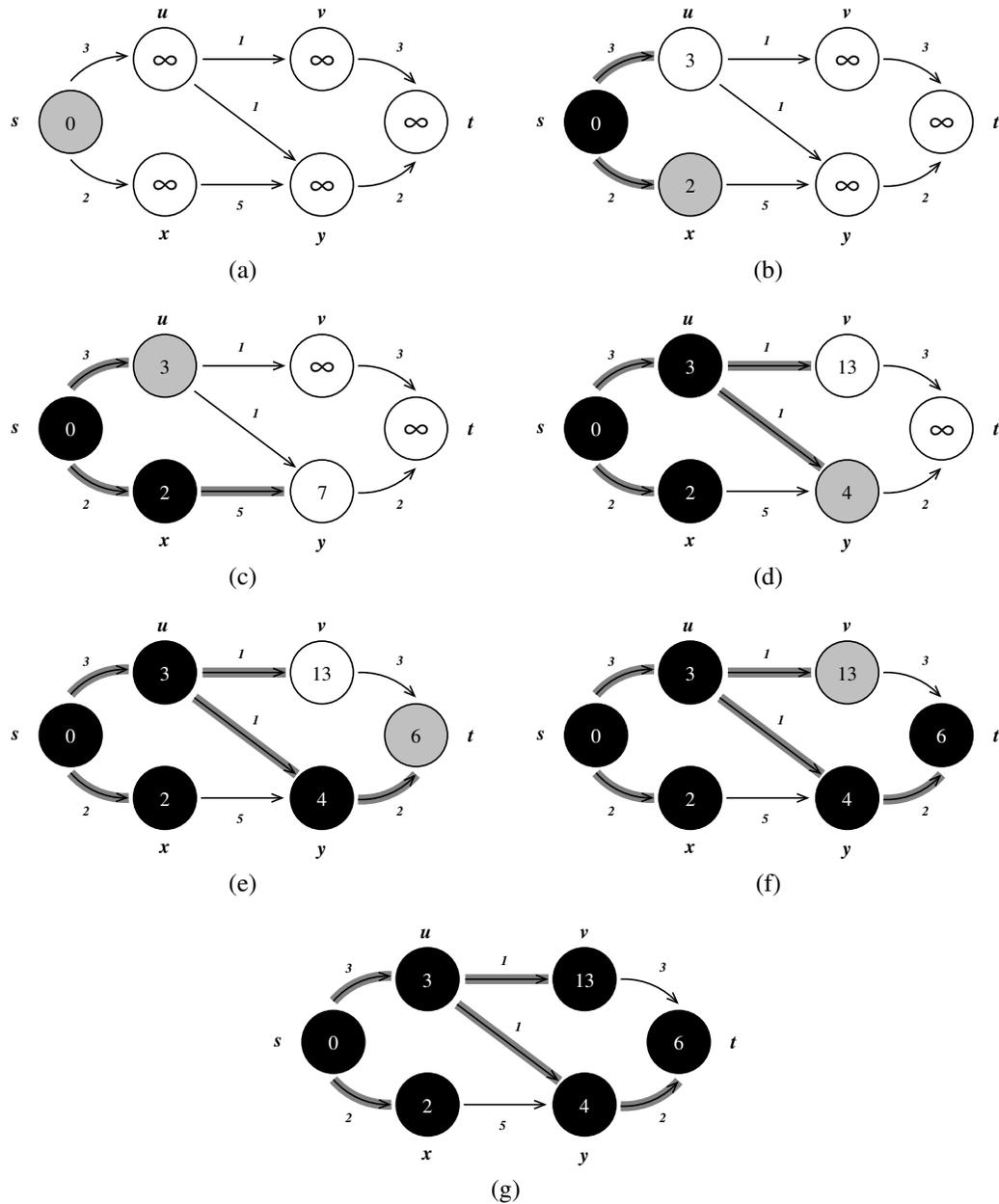


Figura 4.2: Aplicação do algoritmo de Dijkstra. Os vértices pretos pertencem ao conjunto S e o conjunto Q é representado pela relação $Q = V - S$. Os vértices sombreados são aqueles que tem o menor valor dentro do conjunto Q . Desse modo, dado um vértice fonte s , o algoritmo encontrará todos os caminhos mais curtos para cada vértice $v \in V$. A cada iteração, o caminho de custo mínimo estimado aparece dentro de cada vértice e os antecessores são representados pelas arestas sombreadas.

4.1.1 Caminhos ótimos

No contexto de sistemas complexos, caminhos de custo mínimo são chamados de *caminhos ótimos*. Tais caminhos podem ser escolhidos pela natureza como sendo aqueles de energia mínima em um sistema. Por outro lado, tais caminhos ótimos também podem ser encontrados deliberadamente, como faz uma empresa de consultoria, reduzindo uma função custo de um determinado problema. Abordamos aqui o problema de caminhos ótimos considerando, por simplicidade, uma rede quadrada de lado L com condições de contorno fixas na vertical e periódicas na horizontal. Definimos um peso ε_i , no intervalo $]0, 1[$, para cada sítio i . O peso total de um caminho é a soma sobre os pesos de todos os seus sítios. O caminho ótimo é aquele, entre todos os caminhos conectando dois sítios ou, no nosso caso, entre a parte superior e inferior da rede, com o menor peso. Desse modo, quando todos os sítios tem o mesmo peso, os caminhos ótimos são linhas retas e quando os pesos são aleatórios, os caminhos ótimos, em geral, são tortuosos e suas propriedades dependem da distribuição de pesos do substrato. Consideraremos distribuições com desordem fraca e com desordem forte. Para o caso de desordem fraca, o caminho ótimo é auto-afim e pertence a mesma classe de universalidade dos polímeros aleatórios [76] (Fig. 4.3). Para desordem forte, por outro lado, trabalhos numéricos [53, 54, 55, 56] (Fig. 4.3) demonstram a natureza auto-similar do caminho ótimo em duas e três dimensões, com a dimensão fractal dada por $D \sim 1.22$ e $D \sim 1.43$, respectivamente. Podemos abordar esses dois comportamentos, considerando a distribuição de pesos $P(\varepsilon_i)$ na forma hiperbólica,

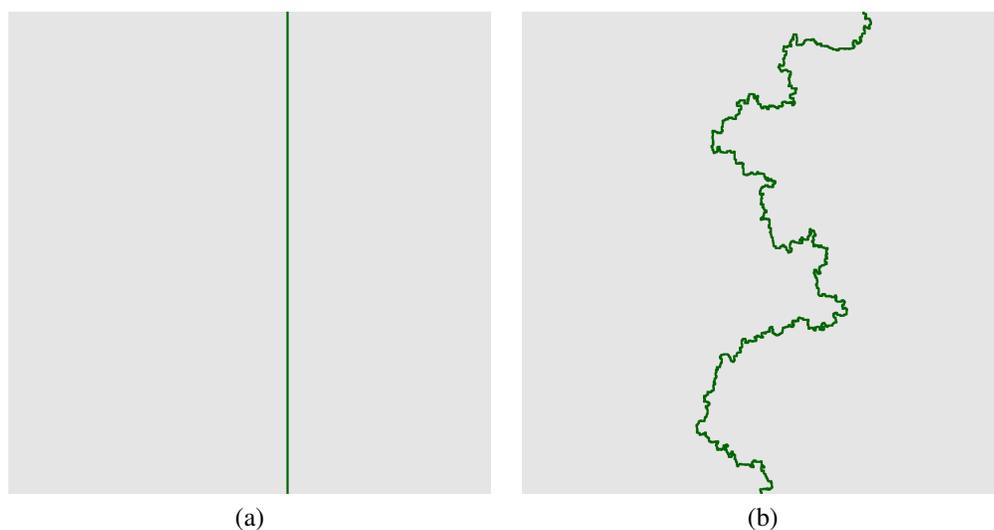


Figura 4.3: Caminhos ótimos para redes quadradas de lado $L = 1024$. (a) Para desordem fraca com $\beta_D = 0.0625$, o caminho ótimo geralmente é uma linha reta. (b) Para desordem forte com $\beta_D = 1024$, o caminho ótimo é fractal.

$$p(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon_i}. \quad (4.3)$$

Para tornarmos essa distribuição normalizável, consideramos dois cortes, o primeiro em $\varepsilon_{min} = \exp(-\beta_D)$ e o segundo em $\varepsilon_{max} = 1$, definindo um intervalo de existência. Desse modo,

$$1 = \int_{\varepsilon_{min}}^{\varepsilon_{max}} p(\varepsilon) d\varepsilon = \int_{\varepsilon_{min}}^{\varepsilon_{max}} \left[C \frac{1}{\varepsilon} \right] d\varepsilon = C \ln \varepsilon \Big|_{\varepsilon_{min}}^{\varepsilon_{max}} \Rightarrow C = \frac{1}{\beta_D}, \quad (4.4)$$

onde C é a constante de proporcionalidade que normaliza a distribuição hiperbólica no dado intervalo. Além disso, por conveniência, se considerarmos a transformação fundamental das leis de probabilidade obtemos,

$$|p(\varepsilon') d\varepsilon'| = |p(x') dx'|. \quad (4.5)$$

Podemos supor que $p(x')$ seja uma distribuição uniforme, isto é, $p(x') = 1$. Dessa forma,

$$\int_{\varepsilon_{min}}^{\varepsilon} \left(\frac{1}{\beta_D \varepsilon'} \right) d\varepsilon' = \int_0^x (1) dx' \Rightarrow \varepsilon = \exp[\beta_D(x-1)], \quad (4.6)$$

onde dado um valor aleatório x distribuído uniformemente no intervalo $]0, 1[$, teremos um outro valor aleatório ε distribuído em lei de potência representando o peso de cada sítio, também no intervalo entre 0 e 1. O grau de desordem do sistema é controlado pelo parâmetro $\beta_D \geq 0$, posto que esse parâmetro governa a largura da distribuição de pesos. No limite $\beta_D \rightarrow 0$, observamos que $\varepsilon_{min} \rightarrow \varepsilon_{max}$ e o caminho ótimo aproxima-se de uma linha reta, ou seja, o sistema está no regime de desordem fraca. Para grandes valores de β_D , a distribuição torna-se muito larga, atingindo o regime de desordem forte. Nesse limite, o peso acumulado total de um dado caminho é praticamente dominado por apenas um termo, referente ao sítio de maior peso pertencente àquele caminho ótimo. Tendo em vista os cortes na distribuição, para um determinado β_D , o sistema pode estar no regime de desordem fraca ou desordem forte, dependendo do tamanho L do sistema. Na Fig. 4.4, calculamos os expoentes do caminho ótimo para desordem fraca e forte em duas dimensões.

4.2 Fratura de caminhos ótimos

Como já dito, os caminhos ótimos tem papel fundamental em fenômenos de transporte. Comumente, esses caminhos são usados de forma muito intensa, sujeitando o sistema a possíveis falhas. Podemos imaginar que essas falhas acontecem com mais frequência nos sítios de maior peso dos caminhos ótimos, destruindo e inutilizando tais sítios para o transporte de qualquer informação. Nesta tese, introduzimos e investigamos um novo modelo para o processo

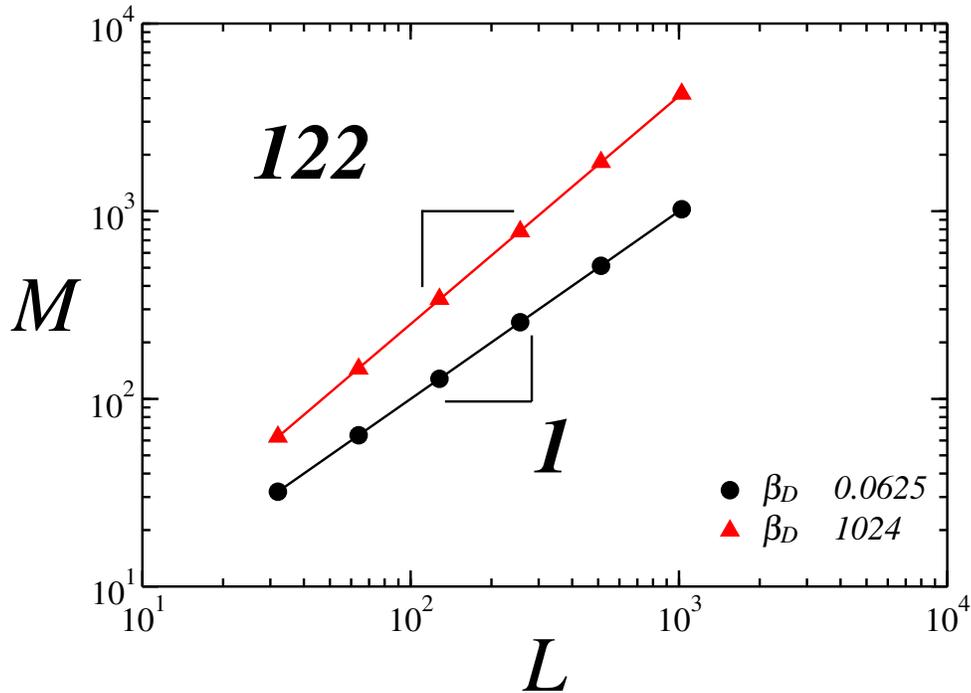


Figura 4.4: Gráfico em log-log do número médio de sítios do caminho ótimo M em função do tamanho L do sistema para duas dimensões. Simulamos sistemas de tamanhos $L = 1024, 512, 256, 128, 64, 32$ com 100, 200, 400, 800, 1600 e 3200 amostras, respectivamente. Encontramos um comportamento auto-afim para desordem fraca (círculos) e auto-similar com dimensão fractal $D = 1.22 \pm 0.01$ para desordem forte (triângulos). As barras de erro dos pontos individuais são menores que os símbolos.

de colapso de transporte, chamado de *fratura de caminhos ótimos*, ou, simplesmente, de *OPC* (*Optimal Path Crack*) [57]. Como no caso dos caminhos ótimos, podemos defini-lo considerando como substrato uma rede quadrada de lado L com condições de contorno fixas na vertical, periódicas na horizontal e com um peso ε_i para cada sítio i . Dado esse sistema, encontramos o seu caminho ótimo e bloqueamos irreversivelmente o sítio de maior peso pertencente a esse caminho ótimo. Isso é equivalente à impor um peso infinito para esse sítio, ou seja, depois de bloqueado, tal sítio não pode mais pertencer à nenhum outro novo caminho ótimo. Dando continuidade ao algoritmo, para minimizar o “custo” do transporte, encontramos um novo caminho ótimo sobre os sítios remanescentes, bloqueamos o sítio de maior peso desse caminho e assim por diante. Durante todo esse processo, o transporte de informação no sistema permanece possível, com um progressivo aumento no custo acumulado do caminho ótimo, até a formação de um caminho de sítios bloqueados que desconecta o sistema em duas partes, ou seja, até que haja a quebra de conectividade global da rede. Em suma, nessa configuração nenhuma informação de propagação local conseguirá “percolar” na estrutura.

4.2.1 Redes não-correlacionadas

Nessa seção, consideraremos o modelo de *OPC* em redes não-correlacionadas. Desse modo, sem perda de generalidade, podemos escolher apenas valores positivos distribuídos no intervalo $[0, 1]$ para ε_i . Para tais distribuições, como já mencionado, o *algoritmo de Dijkstra* torna-se uma ferramenta muito útil e eficiente nos cálculos dos caminhos ótimos. Dado o mesmo formalismo do caminho ótimo, a desordem é introduzida no nosso modelo pela distribuição de peso para cada sítio i ,

$$\varepsilon_i = \exp[\beta_D(p_i - 1)]. \quad (4.7)$$

Onde, p_i é um número aleatório distribuído uniformemente entre 0 e 1. De forma geral, a configuração final do modelo de *OPC* produz três quantidades básicas diferentes: A massa total de sítios bloqueados M_t , a massa de sítios bloqueados formando a fratura percolante M_f , ou seja, o maior agregado que desconecta o sistema, e a massa de sítios bloqueados que pertencem ao “esqueleto” da fratura M_b , isto é, o caminho mais curto sobre a fratura, suficiente para desconectar o sistema. Nas Figs. 4.5, 4.6, 4.7, mostramos três configurações finais, geradas através da mesma sequência de números aleatórios, para diferentes valores de desordem β_D . Podemos identificar três classes distintas de agregados: Agregados isolados (preto), o agregado da fratura percolante (vermelho) e o agregado do esqueleto da fratura percolante (azul). Claramente, a distribuição de sítios bloqueados é significativamente modificada pelo grau de desordem da distribuição de pesos do substrato, embora os sítios do esqueleto da fratura permaneçam os mesmos. Para redes não-correlacionadas, esse esqueleto de sítios bloqueados é sempre um objeto auto-similar com a mesma dimensão fractal independente do grau de desordem. Desse modo, para quantificar macroscopicamente o efeito de desordem na geometria do *OPC*, realizamos simulações computacionais para redes de tamanho $L = 1024, 512, 256, 128, 64, 32$ com 100, 200, 400, 800, 1600, 3200 amostras, respectivamente, e para diferentes valores de desordem β_D . Na Fig. 4.6, mostramos para $\beta_D = 0.0625$ o comportamento das três quantidades básicas do modelo. Encontramos que a massa total de sítios bloqueados é uma fração constante da massa total do sistema, isto é, $M_t \sim L^{D_t}$, com $D_t = 2.00 \pm 0.01$. De forma semelhante, observamos também que a massa dos sítios da fratura percolante cresce como uma lei de potência $M_f \sim L^{D_f}$, com $D_f = 1.56 \pm 0.01$. Por fim, a massa do esqueleto da fratura também escala com o tamanho do sistema da seguinte maneira, $M_b \sim L^{D_b}$, com o expoente $D_b = 1.22 \pm 0.01$.

Surpreendentemente, a dimensão fractal do esqueleto da fratura percolante é estatisticamente idêntica à dimensão fractal do caminho ótimo com desordem forte [53, 54, 55, 56], e muito próxima daquelas encontradas para as linhas divisoras de águas, como descrito no capí-

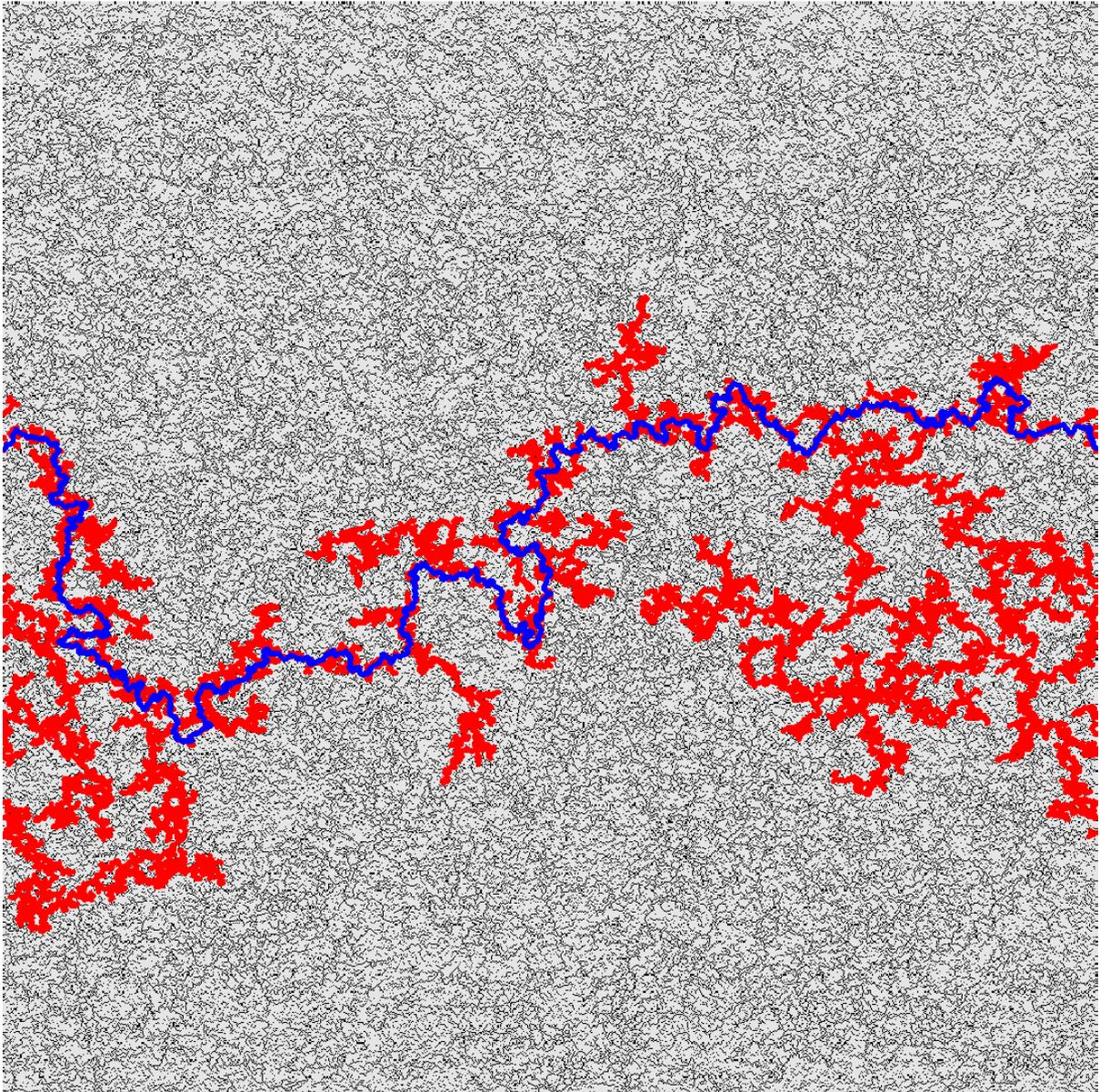


Figura 4.5: Rede não-correlacionada de tamanho $L = 1024$ com desordem fraca $\beta_D = 0.0625$ no qual o algoritmo de *OPC* foi aplicado. Identificamos os agregados isolados espalhados por toda a rede (preto), a fratura percolante com várias ramificações (vermelho) e seu esqueleto (azul).

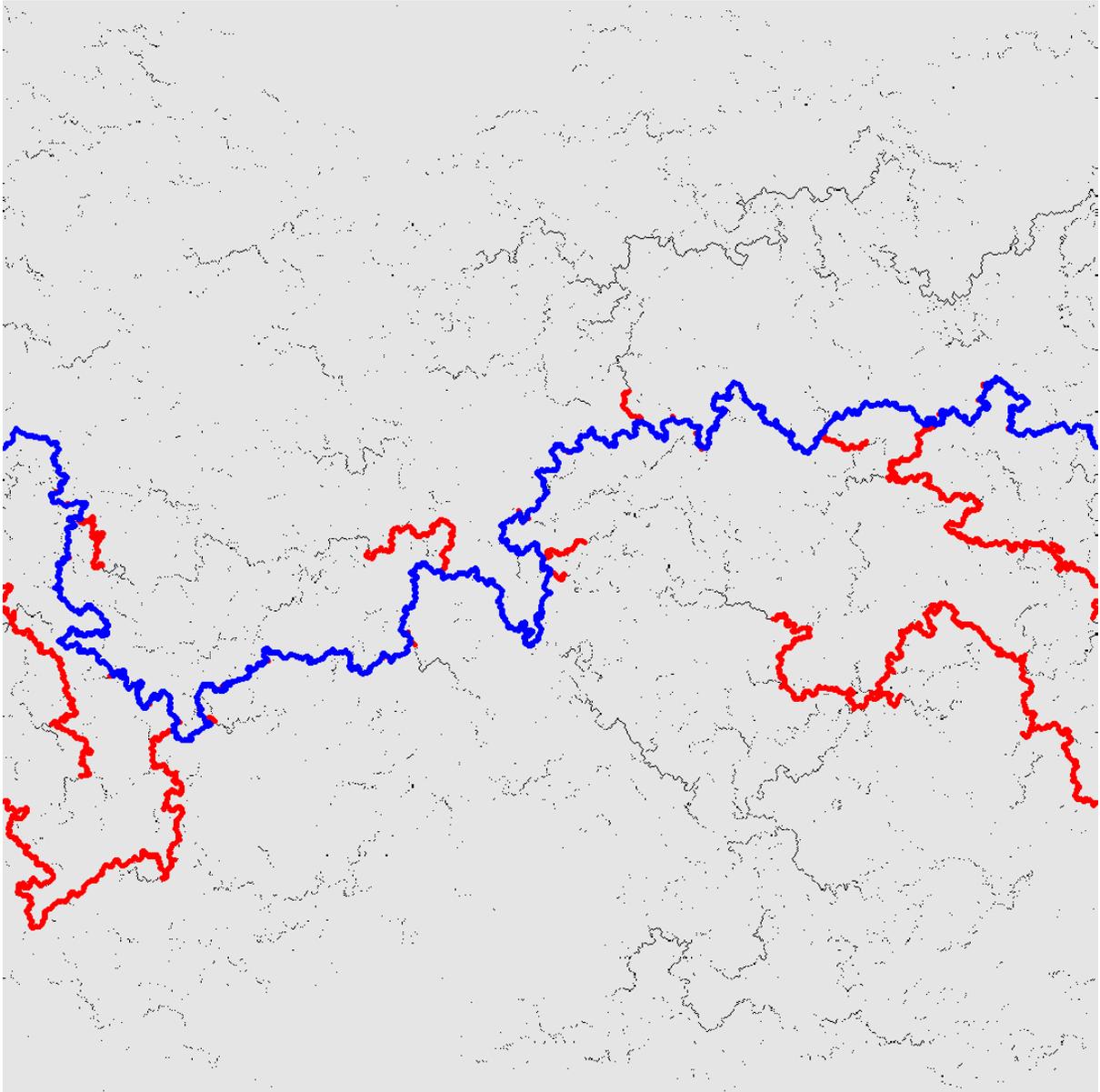


Figura 4.6: Rede não-correlacionada de tamanho $L = 1024$ com desordem moderada $\beta_D = 8$ no qual o algoritmo de *OPC* foi aplicado. Neste caso, o esqueleto é preservado, embora o número de ramificações da fratura e os agregados isolados sejam reduzidos substancialmente.

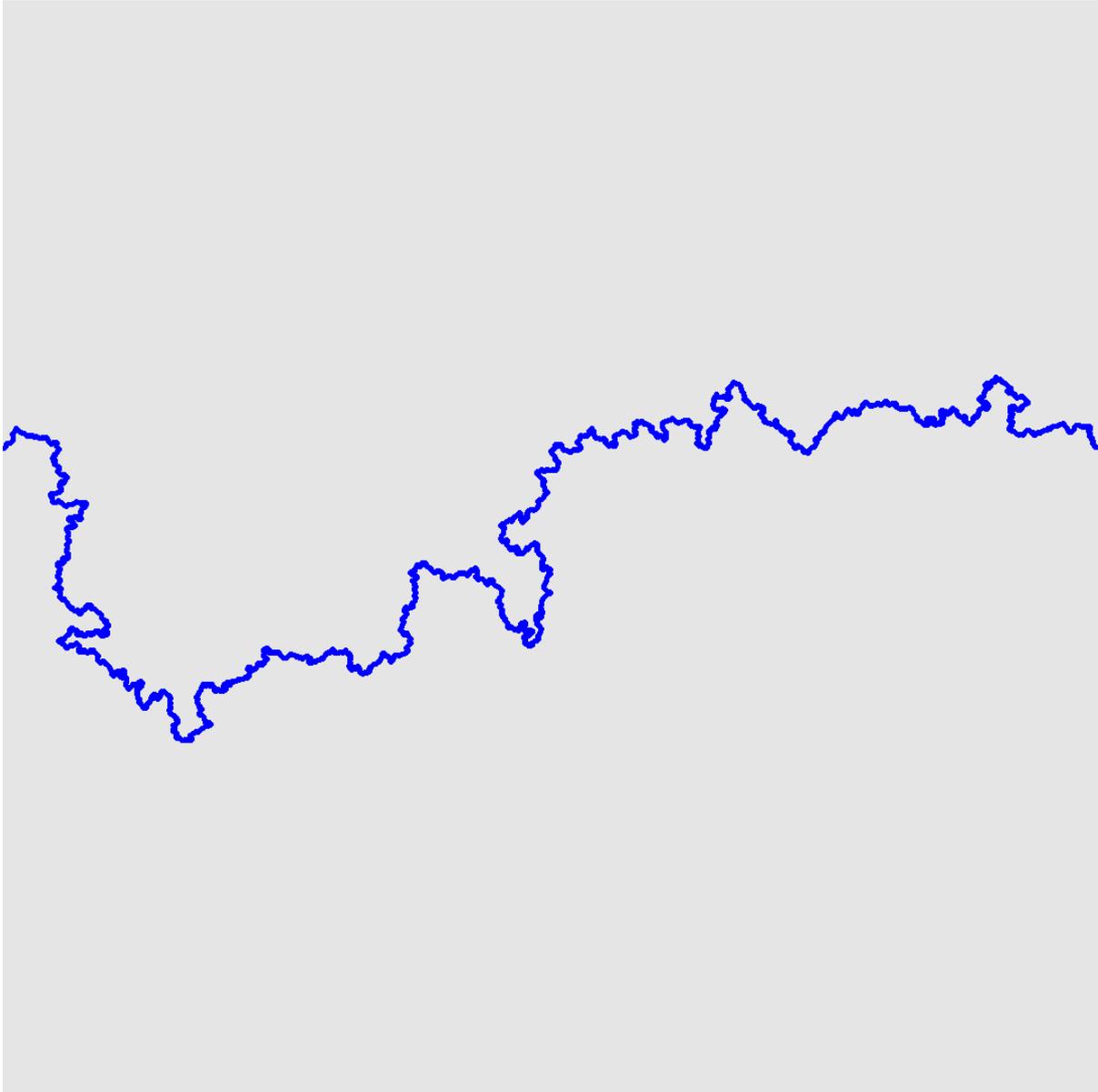


Figura 4.7: Rede não-correlacionada de tamanho $L = 1024$ com desordem forte $\beta_D = 1024$ no qual o algoritmo de *OPC* foi aplicado. Neste caso, somente o esqueleto da fratura percolante permanece.

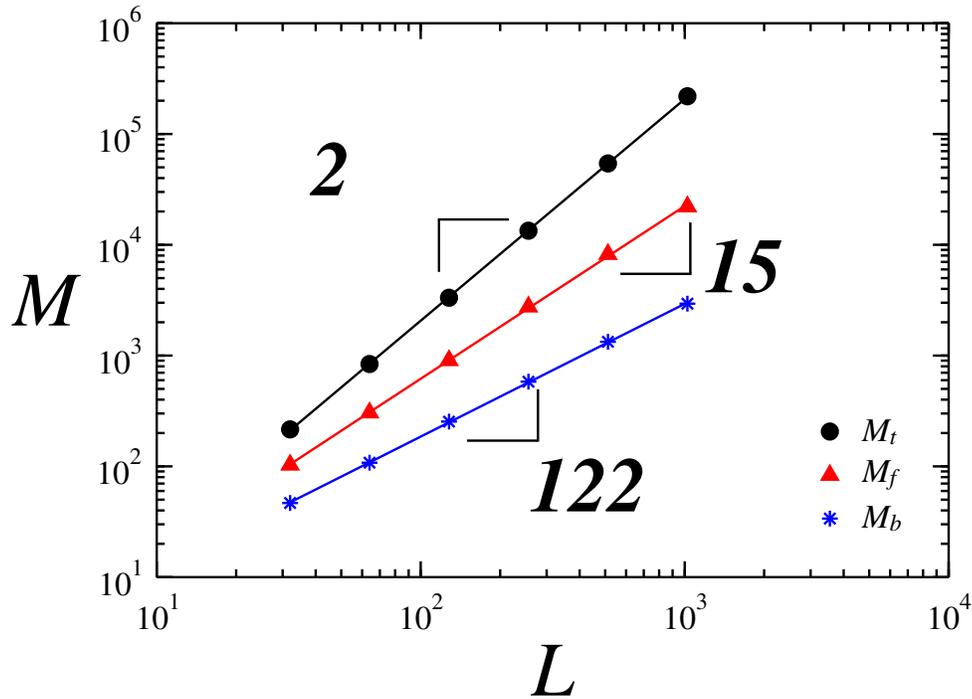


Figura 4.8: Gráfico em escala logarítmica da massa de todos os sítios bloqueados M_t (círculos), da massa do agregado de sítios da fratura percolante M_f (triângulos) e da massa do esqueleto da fratura percolante M_b (estrelas), para $\beta_D = 0.0625$ em função do tamanho do sistema L . Simulamos sistemas de tamanhos $L = 1024, 512, 256, 128, 64, 32$ com 100, 200, 400, 800, 1600 e 3200 amostras, respectivamente. Encontramos três leis de potência, $M_t \sim L^{D_t}$, $M_f \sim L^{D_f}$ e $M_b \sim L^{D_b}$, com expoentes $D_t = 2.00 \pm 0.01$, $D_f = 1.56 \pm 0.02$ e $D_b = 1.22 \pm 0.01$. As barras de erro dos pontos individuais são menores que os símbolos.

tulo 3 e nas referências [48, 50, 51], para os *strands* em percolação invasiva [53, 54] e para os caminhos em *minimum spanning trees* [59]. Embora, tais objetos exibam dimensões fractais semelhantes, eles são provenientes de processos diferentes. Em nosso caso, é importante salientar que o valor de D_b reflete uma propriedade não-local do sistema que é intrinsecamente associada com o processo de cálculo dos caminhos ótimos no *OPC*. Por exemplo, a remoção do sítio de maior peso de um caminho ótimo pode resultar em uma mudança global do próximo caminho ótimo, tal como no caso das linhas divisoras de águas [50]. Na Fig. 4.9, mostramos que os resultados para $\beta_D = 8$ indicam uma transição entre o regime de desordem forte e desordem fraca com o aumento do tamanho do sistema L . Como já mencionamos, podemos alcançar o limite de desordem forte para esses sistemas com tamanhos pequenos de L ou valores grandes de β_D . Dessa forma, com o aumento gradativo da desordem, observamos uma tendência dos sítios bloqueados pertencerem à linha do esqueleto da fratura percolante. No limite de desordem forte, observamos o colapso de todas as massas, $M_t \rightarrow M_b$, $M_f \rightarrow M_b$ e M_b escalando com o mesmo expoente $D_b = 1.22 \pm 0.01$ do regime de desordem fraca.

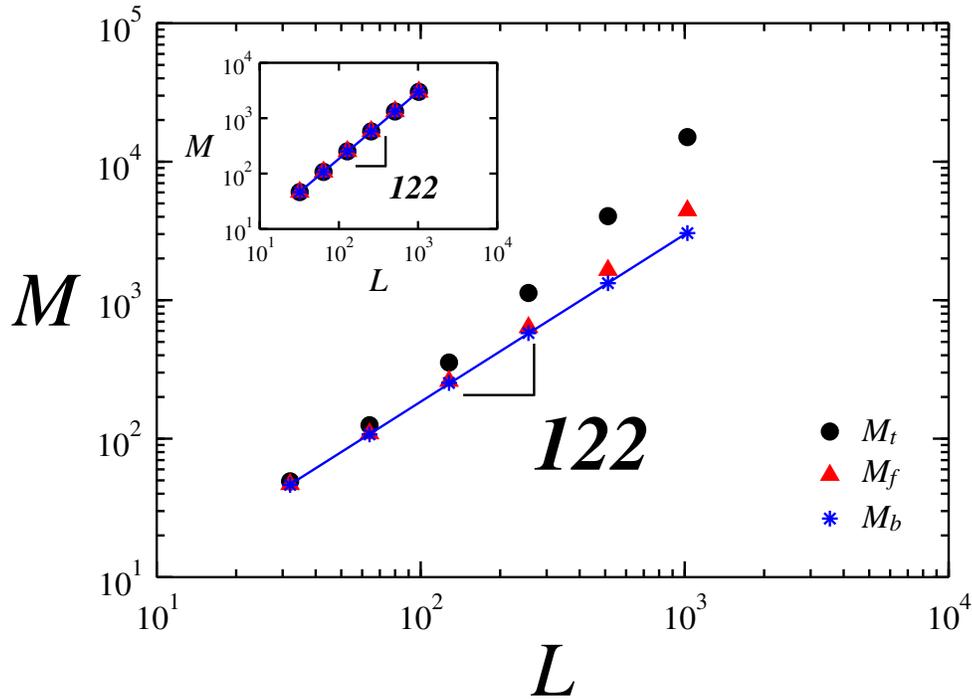


Figura 4.9: Gráfico em log-log das massas M_t (círculos), M_f (triângulos) e M_b (estrelas) contra o tamanho do sistema L para $\beta_D = 8$. Para esse valor intermediário de β_D , identificamos uma mudança de comportamento de desordem fraca para desordem forte dependendo do tamanho do sistema. Para redes pequenas, o sistema está submetido às condições de desordem forte. Como consequência, os sítios bloqueados tendem a pertencer ao esqueleto da fratura e as massas M_t , M_f e M_b tendem a ser iguais. Com o aumento da rede, alcançamos o regime de desordem fraca e as três curvas se separam. No sub-gráfico, mostramos as mesmas massas para o valor de desordem $\beta_D = 1024$. Nesse caso, para qualquer tamanho de sistema os valores das massas são idênticos, indicando que estamos no regime de desordem forte para todos os tamanhos de rede. Para o esqueleto da fratura percolante, encontramos o expoente $D = 1.22 \pm 0.01$ para ambos os casos. As barras de erro dos pontos individuais são menores que os símbolos.

A transição entre os regimes de desordem fraca e forte é melhor ilustrada com os resultados da Fig. 4.10. Analisamos a densidade de todos os sítios bloqueados, $\rho_t = M_t/L^2$, no final do processo de OPC como função do parâmetro de desordem β_D . As curvas exibem três regimes distintos, dependendo do valor de β_D . Para valores pequenos, $\beta_D < 1$, a densidade satura em $\rho_t \approx 0.22$. Para valores intermediários de β_D , a densidade decresce como uma lei de potência $\rho_t \sim \beta_D^{-\theta}$, com expoente $\theta \approx 4/3$. Nessas duas regiões, o sistema se encontra no regime de desordem fraca. Para valores maiores de β_D , as curvas apresentam outra mudança de comportamento em $\beta_{D \times}$. Essa mudança caracteriza a transição para o limite de desordem forte, dependendo do tamanho finito L do sistema, de tal forma que se o sistema é muito grande ($L \rightarrow \infty$), ele estará em desordem fraca para qualquer valor finito do parâmetro de desordem β_D . Para valores suficientemente grandes de β_D , no regime de desordem forte, a densidade alcança o seu valor mínimo quando todos os sítios bloqueados pertencem ao esqueleto da fratura

percolante. Neste caso, a massa total de sítios bloqueados segue a relação $M_t \rightarrow M_b$ e a massa dos sítios do esqueleto da fratura percolante M_b escala com L^{D_b} . Desse modo, no ponto de transição do comportamento em lei de potência para o comportamento dependente da escala, teremos,

$$\beta_{D_\times}^{-\theta} \sim \frac{M_t}{L^2} = L^{D_d-2} \Rightarrow \beta_D \sim L^\alpha, \quad (4.8)$$

onde, $\alpha = (2 - D_b)/\theta$. O colapso dos resultados para valores intermediários e grandes de β_D é obtido usando $D_b = 1.22$ e $\alpha = 0.59$ como o mostrado no gráfico da Fig. 4.10, demonstrando a consistência desta análise.

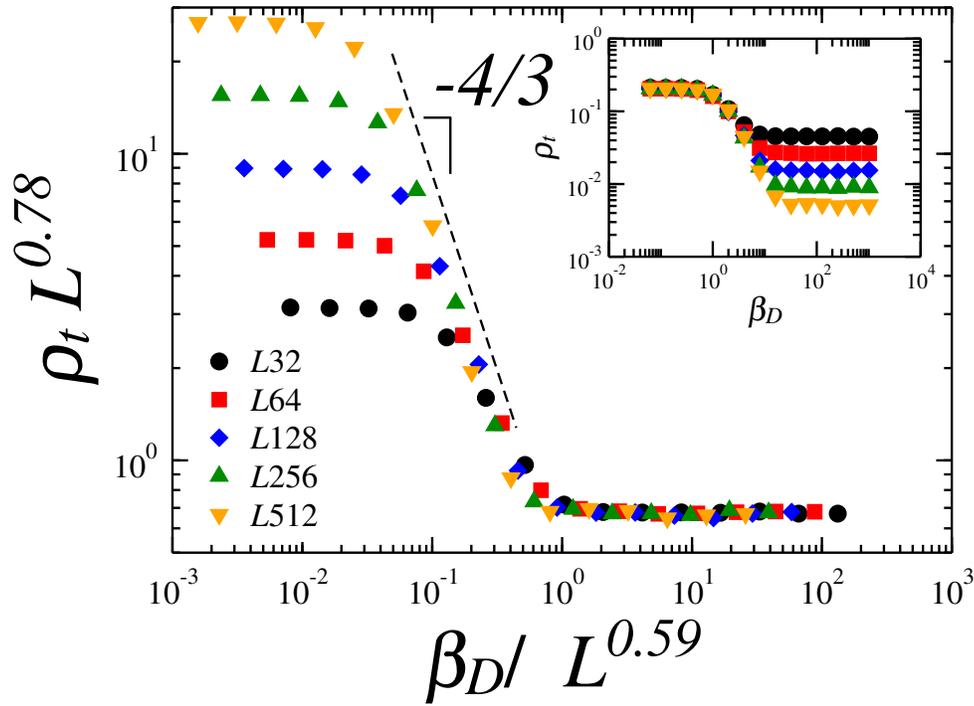


Figura 4.10: Gráfico da transição do comportamento de desordem fraca para desordem forte no modelo de *OPC*. Observamos que a densidade de todos os sítios bloqueados ρ_t apresenta três regimes distintos no final do processo. No sub-gráfico, para a desordem fraca ($\beta_D < 1$), observamos a saturação da densidade em torno da valor $\rho_t \approx 0.22$. Para um valor intermediário do parâmetro β_D , entretanto, não existe dependência com o tamanho L do sistema. Para valores altos de β_D , a densidade satura novamente, mas para valores que dependem do tamanho do sistema L . Esse último regime é aquele que caracteriza a desordem forte. A densidade saturada desse regime depende do tamanho do sistema L^{D_b-2} , onde $D_b \approx 1.22$ é a dimensão fractal para o esqueleto da fratura percolante do modelo de *OPC*. Para cada tamanho de sistema, observamos a transição do regime de desordem fraca para desordem forte em valores diferentes do parâmetro β_{D_\times} . Desse modo, mostramos que o colapso de dependência não-trivial das curvas para cada tamanho L do sistema segue a relação $\beta_{D_\times} \sim L^{0.59}$.

No contexto da *teoria de percolação*, podemos identificar a dimensão fractal da fratura percolante D_f , no regime de desordem fraca, como análoga a dimensão fractal do maior agregado

D. Desse modo, temos a relação [4],

$$D_f \equiv D = d - \frac{\beta}{\nu} \Rightarrow \frac{\beta}{\nu} = d - D_f = 0.44 \pm 0.02. \quad (4.9)$$

Considerando que $d = 2$ é a dimensão topológica do sistema, β é o expoente crítico relacionado com o parâmetro de ordem e ν é o expoente crítico relacionado com o comprimento de correlação. Além disso, podemos desconsiderar o maior agregado e investigar a média de tamanhos dos agregados remanescentes S com a seguinte relação,

$$S = \frac{1}{N} \sum_k s_k^2 - \frac{1}{N} \langle s_{max}^2 \rangle \sim L^{\gamma/\nu}. \quad (4.10)$$

Onde, $N = L^2$ é o número de sítios da rede, s_k é o tamanho do agregado k , s_{max} é a massa do maior agregado e γ é o expoente crítico. Encontramos o expoente $\gamma/\nu = 1.3 \pm 0.2$, como podemos ver no *inset* da Fig. 4.11. Por fim, observamos que a distribuição acumulativa de

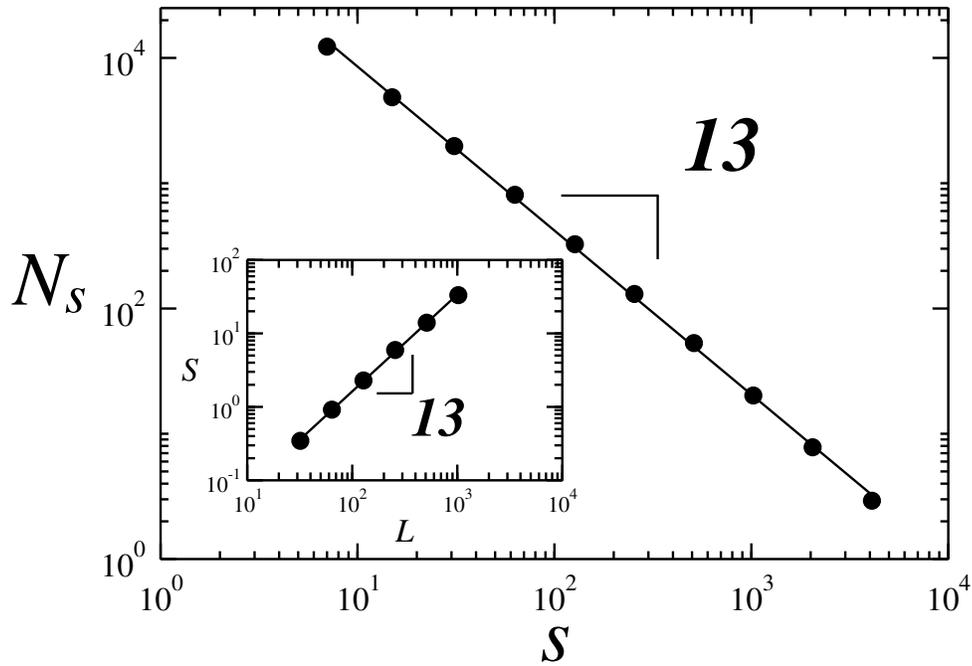


Figura 4.11: Gráfico em log-log da distribuição acumulada de tamanho dos agregados, N_s , como função do tamanho dos agregados, s . Encontramos uma lei de potência com o expoente $1 - \tau = -1.3 \pm 0.2$, implicando em um expoente de Fisher $\tau = 2.3 \pm 0.2$. No sub-gráfico, mostramos a média dos tamanhos dos agregados, S , em relação ao tamanho do sistema, L . Encontramos outro comportamento em lei de potência com expoente crítico $\gamma/\nu = 1.3 \pm 0.2$. Tais resultados foram obtidos com 100 amostras de redes de tamanho $L = 1024$.

tamanhos de agregados, N_s , também segue um comportamento em lei de potência,

$$N_s = \sum_{s'} n_{s'} \propto s^{-(\tau-1)}. \quad (4.11)$$

Onde, encontramos o expoente crítico de Fisher $\tau = 2.3 \pm 0.2$, como ilustra a Fig. 4.11. Desse modo, os expoentes encontrados estão de acordo com a relação de escala entre β , γ e τ da teoria da percolação [4],

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\tau - 2}{3 - \tau}. \quad (4.12)$$

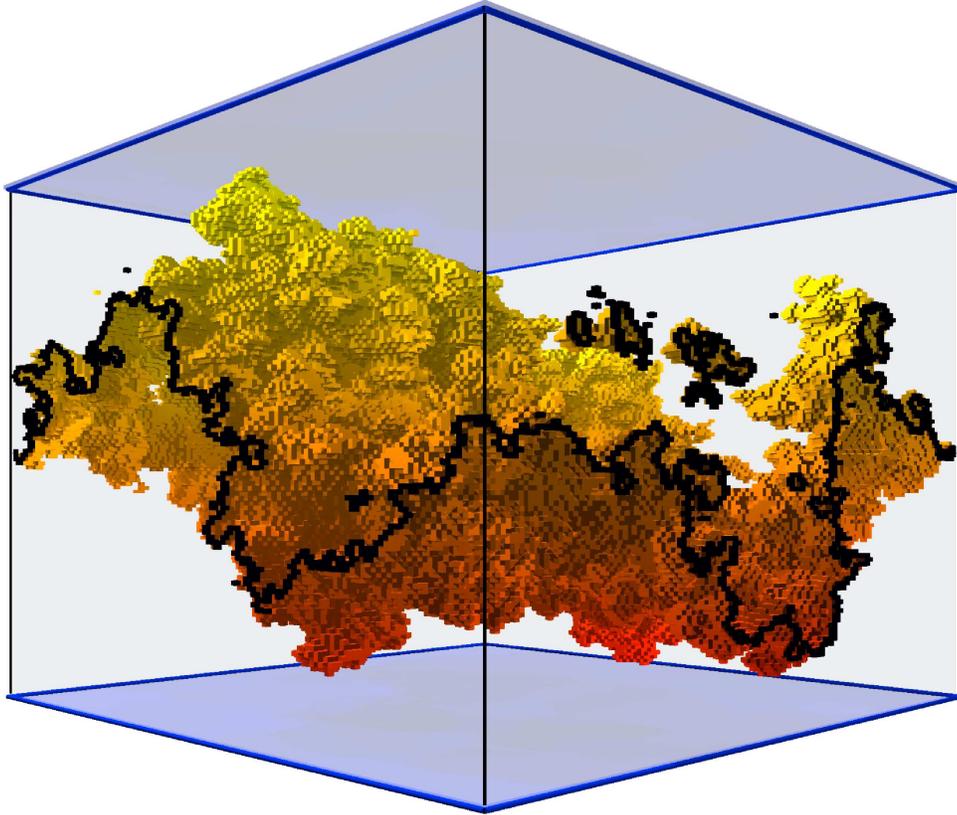


Figura 4.12: Representação de uma configuração do modelo de *OPC* tridimensional, para uma rede cúbica de tamanho $L = 128$ e para desordem forte $\beta_D = 1024$. Mostramos os sítios bloqueados formando a superfície percolante fractal (amarelo) e os sítios pertencentes à superfície que interceptam as bordas do sistema (preto).

Como outra extensão, estudamos o modelo de *OPC* tridimensional para um cubo de lado L . No limite de desordem forte, enquanto um sistema bidimensional pode ser desconectado por uma linha de sítios proibidos, para um sistema tridimensional é necessário uma superfície. Desse modo, bloqueamos os sítios de maior peso pertencentes aos caminhos ótimos obtidos da parte superior para parte inferior do sistema em um processo iterativo análogo ao caso bidimensional. Para paisagens de pesos distribuídos hiperbolicamente com $\beta_D = 1024$, a massa de todos os sítios bloqueados $M_t \rightarrow M_b$, produzindo uma superfície percolante que fratura o sistema, como ilustra a Fig. 4.12. Como no caso bidimensional, a massa de sítios bloqueados

M_t escala com o tamanho do sistema L da seguinte maneira,

$$M_b \equiv M_f \equiv M_t \sim L^{D_t}, \quad (4.13)$$

com dimensão fractal $D_t = 2.47 \pm 0.05$. Tal problema é de alta complexidade computacional, impossibilitando simulações com valores maiores do tamanho de rede L .

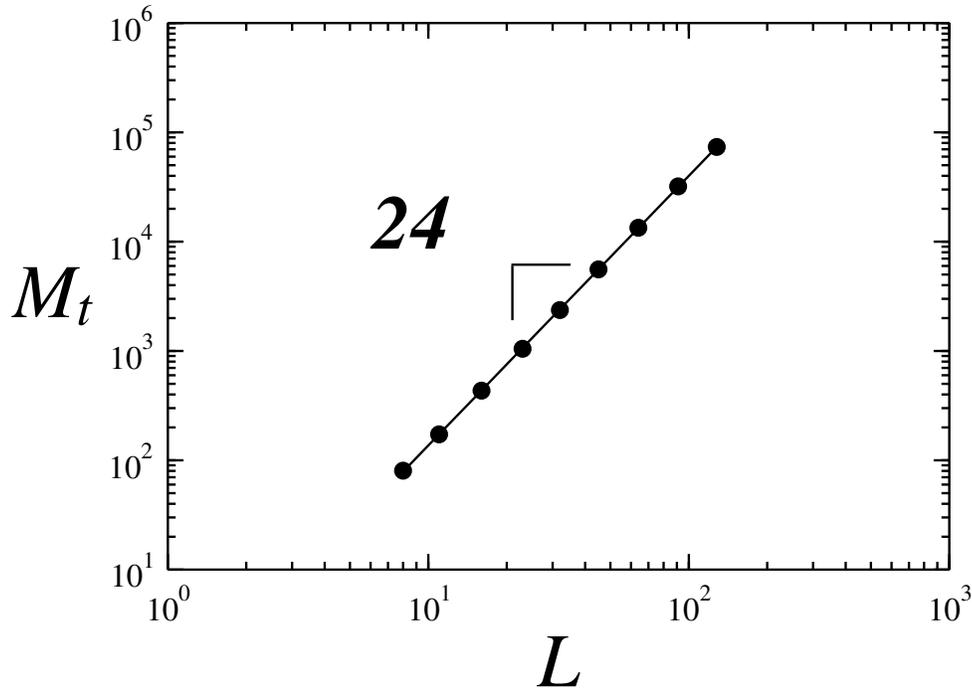


Figura 4.13: Gráfico em log-log da massa de todos os sítios proibidos, M_t , para redes não-correlacionadas, no regime de desordem forte e para três dimensões, como uma função do tamanho do sistema, L . Encontramos a dimensão fractal $D_t = 2.47 \pm 0.05$ para a massa da superfície. Simulamos sistemas de tamanhos $L = 128, 91, 64, 45, 32, 23, 16, 11, 8$ com 100, 150, 200, 300, 400, 600, 800, 1200 e 1600 amostras, respectivamente. As barras de erro dos pontos individuais são menores que os símbolos.

4.2.2 Redes correlacionadas

Para o modelo de *OPC*, todas as distribuições de pesos consideradas até agora foram espacialmente não-correlacionadas, isto é, o peso de um dado sítio independe da sua vizinhança. Nessa seção, introduziremos uma generalização deste problema, aplicando o modelo de *OPC* à superfícies espacialmente correlacionadas. Tais paisagens correlacionadas são obtidas através do *movimento Browniano fracionário (fBm)* e do método *Fourier filtering*, como discutido no Capítulo 2 dessa tese. Desse modo, as quantidades básicas do modelo de *OPC* estão presentes, de forma mais intensa ou menos intensa, nos três regimes do parâmetro de correlação β_C : Anti-

correlacionado ($2 < \beta_C < 3$), movimento Browniano ($\beta_C = 3$) e correlacionado ($3 < \beta_C < 4$). Analogamente ao caso não-correlacionado mostrado na seção passada, investigamos a densidade de sítios bloqueados $\rho = M_t/N$ como função do expoente de correlação β_C , como mostramos na Fig. 4.14. Desse modo, podemos inferir que a densidade de sítios bloqueados decresce com o grau de correlação espacial, ou seja, a massa de sítios que precisam ser bloqueados para quebrar a conectividade global do sistema diminui com o aumento da correlação. Para $\beta_C = 0$, recuperamos o caso não-correlacionado e observamos que a densidade de sítios bloqueados não apresenta efeitos de tamanho finito significantes. Entretanto, quando as correlações espaciais são levadas em conta, os efeitos de tamanho finito tornam-se relevantes, de forma que os maiores sistemas correspondem às menores densidades de sítios bloqueados.

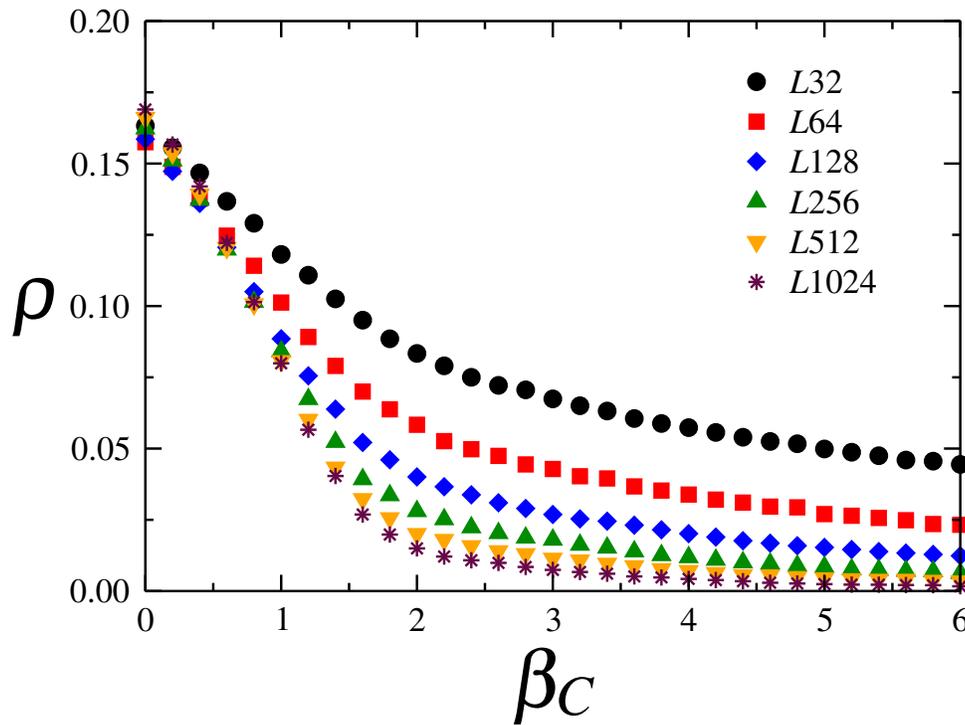


Figura 4.14: Densidade de todos os sítios bloqueados ρ para o modelo de *OPC* em substratos correlacionados como uma função do parâmetro de correlação espacial β_C . Para $\beta_C = 0$ ou $H = -1$, o *fBm* corresponde ao caso não-correlacionado, onde a densidade é praticamente insensível a efeitos de tamanhos finitos. Simulamos sistemas de tamanhos $L = 1024, 512, 256, 128, 64, 32$ com 100, 200, 400, 800, 1600 e 3200 amostras, respectivamente. As barras de erro dos pontos individuais são menores que os símbolos.

A dependência dos expoentes críticos do modelo de *OPC*, D_t , D_f e D_b com β_C são mostrados na Fig. 4.15. Esse gráfico indica que os expoentes críticos são não-universais em relação à correlação espacial e decrescem com o parâmetro de correlação β_C . Na ausência de correlações, ou seja, para $\beta_C = 0$, os valores dos expoentes para o caso não-correlacionado são obviamente recuperados. Para $\beta_C > 0$, os expoentes críticos decrescem monotonicamente com o parâmetro

de correlação. Para $2 < \beta_C < 4$, o que representa um intervalo análogo ao expoente de Hurst $0 < H < 1$, nenhuma diferença significativa é encontrada entre os regimes anti-correlacionado e correlacionado. No limite de fortes correlações espaciais de longo alcance, para valores suficientemente grandes de β_C , os expoentes parecem convergir para a unidade e o esqueleto da fratura percolante do OPC perde a sua característica auto-similar.

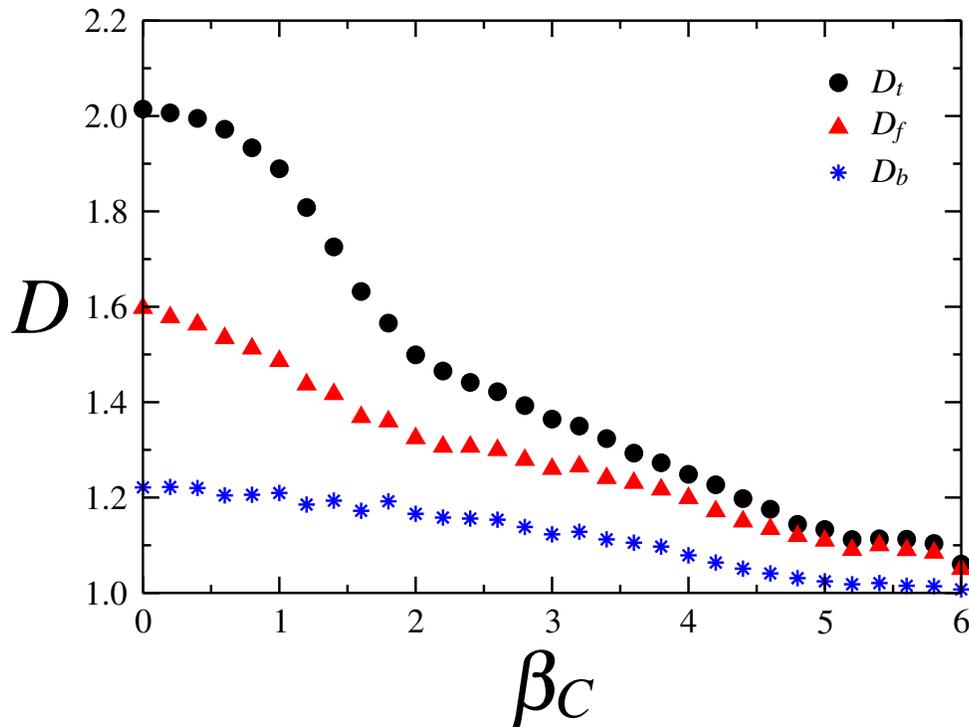


Figura 4.15: A dimensão fractal D_t , D_f e D_b como uma função do parâmetro de correlação β_C . Os gráficos mostram que a correlação de longo alcance espacial tende a reduzir a dimensão fractal do sistema. Simulamos sistemas de tamanhos $L = 1024, 512, 256, 128, 64, 32$ com 100, 200, 400, 800, 1600 e 3200 amostras, respectivamente. As barras de erro dos pontos individuais são menores que os símbolos.

Na Fig. 4.16, mostramos os esqueletos da fratura percolante e os primeiros caminhos ótimos para realizações típicas do substrato correlacionado com expoente de correlação $\beta_C = 0.0$, $\beta_C = 2.2$, $\beta_C = 3.0$ e $\beta_C = 3.8$. Desse modo, conjecturamos que os caminhos ótimos tendem a cruzar os vales do substrato, enquanto o esqueleto da fratura percolante tende à cruzar as cristas do substrato correlacionado. Na realidade, acreditamos que esse comportamento acontece para todas as distribuições, correlacionadas e não-correlacionadas, entretanto, é mais evidente quando as paisagens de pesos das redes são correlacionadas espacialmente.

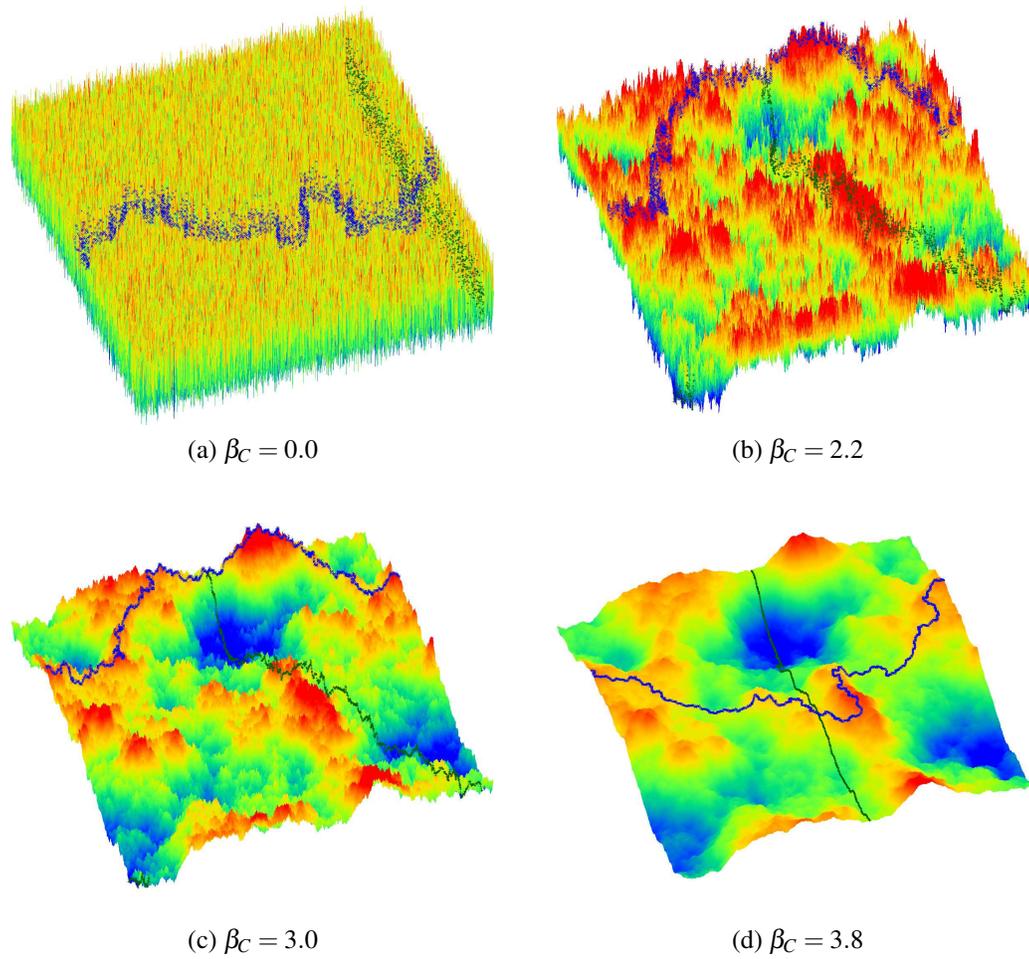


Figura 4.16: Redes quadradas de lado $L = 1024$ para alguns expoentes de correlação. Mostramos o esqueleto da fratura percolante (preto) e o primeiro caminho ótimo (verde).

5 *Conclusões e perspectivas*

Na primeira parte desse trabalho, definimos inicialmente o *algoritmo baseado em percolação invasiva (IPBA)* [48], apresentamos uma versão ligeiramente modificada do algoritmo comumente usado para os cálculos dos divisores de águas [35], chamado de *algoritmo de inundação (FA)* e mostramos a equivalência entre eles. Aplicamos o modelo de *IPBA* a redes não-correlacionadas e encontramos que a dimensão fractal para a linha divisora de águas é igual à 1.21 ± 0.001 . Logo, em função destes resultados numéricos, acreditamos que as linhas divisoras de águas pertençam à mesma classe de universalidade dos caminhos ótimos em redes com desordem forte [55, 56], das fraturas de caminhos ótimos mostradas no Capítulo 4 e nas referências [49, 57, 58], dos polímeros aleatórios [76], dos *strands* em percolação invasiva [53, 54] e dos caminhos em *minimum spanning trees* [59]. Em seguida, aplicamos o modelo de *IPBA* a substratos reais da região do Alpes e do Himalaia. Encontramos os expoentes críticos iguais à $D = 1.10 \pm 0.01$ e $D = 1.11 \pm 0.01$, para os Alpes e para o Himalaia, respectivamente. Desse modo, comprovamos a fractalidade dos divisores de águas e conjecturamos que os valores mais baixos para os expoentes de dimensão fractal em paisagens reais deve-se ao fato de haver correlações espaciais de longo alcance entre as alturas das montanhas, influenciando o comportamento das linhas divisoras de águas.

Na segunda parte dessa tese, definimos e estudamos o modelo de *fratura de caminhos ótimos (OPC)* [49, 57, 58], com uma pequena introdução do problema de *caminhos ótimos* com ênfase no *algoritmo de Dijkstra*. Para o caso não-correlacionado, estudamos dois tipos de desordem, a desordem fraca e a desordem forte. No regime de desordem fraca, o modelo de *OPC* apresenta a formação de muitos agregados isolados, uma fratura percolante com várias ramificações que divide o sistema em duas partes e, obviamente, um esqueleto da fratura percolante que corresponde àqueles sítios bloqueados que efetivamente dividem o sistema em dois. Para esse regime, encontramos as dimensões fractais $D_t = 2.00 \pm 0.01$, $D_f = 1.56 \pm 0.02$ e $D_b = 1.22 \pm 0.01$, respectivamente. Para o regime de desordem forte, o modelo de *OPC* apresenta apenas o esqueleto da fratura percolante com dimensão fractal $D_t \rightarrow D_f \rightarrow D_b = 1.22 \pm 0.01$, ou seja, existe uma localização de todas estas quantidades bási-

cas em tais circunstâncias. Ainda para o regime de desordem forte, estudamos o comportamento do modelo de *OPC* tridimensional [58]. Analogamente, observamos a existência de uma superfície, com dimensão fractal $D_t \rightarrow D_f \rightarrow D_b = 2.47 \pm 0.05$, que divide o sistema em duas partes. Além disso, aplicamos o modelo de *OPC* em redes com correlação espacial de longo alcance [58] e concluímos que o grau de correlação altera a característica auto-similar do *OPC*, isto é, o aumento do parâmetro de correlação β_C diminui a dimensão fractal dos objetos do *OPC*. Logo, como consequência destes resultados, inferimos que o esqueleto da fratura percolante do modelo de *OPC* pertence à mesma classe de universalidade dos caminhos ótimos [55, 56], das linhas divisoras de águas mostradas no Capítulo 3 e nas referências [48, 50, 51], dos polímeros aleatórios [76], dos *strands* em percolação invasiva [53, 54] e dos caminhos em *minimum spanning trees* [59].

Considerando os conhecimentos adquiridos nessa tese, um ambicioso desafio seria a extensão do modelo de *OPC* tridimensional para o caso de desordem fraca. De forma análoga ao caso bidimensional, haveria o surgimento de duas novas quantidades básicas no sistema, os sítios bloqueados isolados espalhados por todo o espaço e uma superfície percolante com várias ramificações que escalariam com o tamanho L do sistema, com dois novos expoentes críticos associados. Além disso, uma outra extensão para o modelo de *OPC* tridimensional seria inserir correlações de longo alcance na rede cúbica. Nesse caso, teríamos uma tarefa árdua, pois a solução desse problema depende, em parte, da solução do primeiro problema proposto, tendo em vista que as distribuições correlacionadas que geramos são tipicamente sujeitas à desordem fraca. Entretanto, a investigação desses sistemas nos possibilitaria fazer comparações diretas com superfícies rugosas de materiais reais fraturados. Uma terceira proposta de investigação seria estudar o comportamento do modelo de *OPC* na presença de ligações de longo alcance, ou seja, determinar o papel da influência do conhecimento das informações locais e globais do sistema. Recentemente, vários trabalhos dedicados ao problema de navegação em geometrias de redes complexas foram publicados [77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87]. De forma bastante simples, consideraríamos como substrato uma rede quadrada de sítios, análoga ao modelo de *OPC* original, com cada sítio i conectado com seus quatro vizinhos mais próximos. Além disso, definiríamos uma ligação extra de longo alcance entre cada sítio i e um sítio aleatório j com probabilidade $p_{ij} \sim r_{ij}^{-\alpha}$, onde r_{ij} é a distância de *Manhattan* entre os sítios i e j , definida como o número de conexões no substrato separando os dois sítios. Tal sistema é conhecido como a rede de *Kleinberg* [77], que pode ser comparada a uma rede integrada de ruas, avenidas e estações de metrô ou a uma rede de Internet com conexões à cabo (*wired connection*) e sem fio (*wireless connection*). Desse modo, nossa suspeita é de que os caminhos ótimos também têm um papel fundamental nos fenômenos de transporte, até mesmo quando sujeitos a falhas de tais

estruturas. Finalmente, poderíamos propor um outro modelo baseado no conceito de caminhos ótimos com aplicação direta no tráfego de veículos [88, 89, 90, 91, 92, 93], mais precisamente na identificação, descrição e caracterização de congestionamentos nas grandes metrópoles. Consideraríamos um modelo completamente análogo ao *OPC*, exceto pelo processo de formação dos caminhos ótimos, pois, em uma situação real, os motoristas são levados a procurar uma rota alternativa apenas no ponto de engarrafamento. Nesse novo modelo, investigaríamos a união de caminhos ótimos, isto é, o caminho ótimo da interação anterior, até o ponto bloqueado, e um novo caminho ótimo, com origem no último sítio do caminho ótimo preexistente. Conjecturamos que esse processo também leva à formação de uma fratura no sistema e, conseqüentemente, à perda da conectividade global. Em suma, acreditamos que os resultados de tais simulações por si só já garantiriam a inovação e a relevância de tal modelo. A aquisição de dados reais das malhas rodoviárias, utilizando o *Java Open Street Map Editor* ®, e dos fluxos de veículos, perante aos órgãos municipais de trânsito, validariam de forma incisiva a nossa pesquisa nesse tema.

Referências Bibliográficas

- [1] H. J. Herrmann e S. Roux. *Statistical models for the fracture of disordered media*. Amsterdam: North-Holland, 1990.
- [2] M. Sahimi. *Flow and transport in porous media and fractured rock*. Boston: VCH, 1995.
- [3] J. Feder. *Fractals*. New York: Plenum Press, 1988.
- [4] D. Stauffer e A. Aharony. *Introduction to percolation theory*. Philadelphia: Taylor & Francis, 1994.
- [5] D. ben-Avraham e S. Havlin. *Diffusion and reactions in fractals and disordered systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [6] B. B. Mandelbrot. *Les Objets Fractals: Forms, hasard et dimension*. Paris: Flammarion, 1975.
- [7] C. C. Barton e P.A. Hsieh. *Physical and hydrological-Flow properties of fractures*. Las Vegas: American Geophysical Union, 1989.
- [8] T. Hirata. Fractal dimension of fault systems in Japan: Fractal structure in rock fracture geometry at various scales. *Pure and Applied Geophysics*, 131, n. 1-2, p. 157, 1989.
- [9] P. G. Okubo e K. Aki. Fractal geometry in the San Andreas fault system. *Journal of Geophysical Research*, 92, n. B1, p. 345, 1987.
- [10] B. B. Mandelbrot. *Fractals: Form, chance, and dimension*. San Fransisco: W. H. Freeman, 1977.
- [11] B. B. Mandelbrot. *The Fractals geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman, 1982.
- [12] B. B. Mandelbrot. How long is the coast of Britain ? Statistical self-similarity and fracti-
onal dimension. *Science*, 156, n. 3775, p. 636, 1967.
- [13] S. R. Broadbent e J. M. Hammersley. Percolation processes I. crystals and mazes. *Proce-
edings of the Cambridge Phylosophical Society*, 53, p. 629–641, 1957.
- [14] D. Achlioptas, R. M. D’Souza e J. Spencer. Explosive percolation in random networks. *Science*, 323, n. 5920, p. 1453, 2009.
- [15] A. A. Moreira, E. A. Oliveira, S. D. S. Reis, H. J. Herrmann e J. S. Andrade Jr. Hamiltonian
approach for explosive percolation. *Physical Review E*, 81, n. 4, Part 1, 2010.
- [16] N. A. M. Araújo e H. J. Herrmann. Explosive percolation via control of the largest cluster. *Physical Review Letters*, 105, n. 3, 2010.

- [17] S. Dorogovtsev e J. F. F. Mendes. *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*. Oxford: Oxford University Press, 2003.
- [18] H. E. Stanley. *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*. New York: Oxford University Press, 1971.
- [19] D. Wilkinson e J. F. Willemsen. Invasion percolation - A new form of percolation theory. *Journal of Physics A - Mathematical and general*, 16, n. 14.
- [20] H. E. Hurst. Long-term storage capacity of reservoirs. *Trans. Amer. Soc. Civil Eng.*, 116, p. 770, 1951.
- [21] H. E. Hurst, R. P. Black e Y. M. Simaika. *Long-term Storage: An Experimental Study*. London: Constable, 1965.
- [22] R. Brown. A brief account of microscopical observations made on the particles contained in the pollen of plants. *London and Edinburgh philosophical magazine and journal of science*, 4, p. 161, 1928.
- [23] A. Einstein. On the movement of small particles suspended in stationary liquids required by the molecular-kinetic theory of heat. *Annalen der Physik*, 17, p. 549, 1905.
- [24] B. B. Mandelbrot e V. Ness. Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications. *SIAM Review*, 10, n. 4, p. 422, 1968.
- [25] H. Peitgen e D. Saupe. *The Science of Fractal Images*. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [26] C. J. Vörösmarty, C. A. Federer e A. L. Schloss. Potential evaporation functions compared on US watersheds: Possible implications for global-scale water balance and terrestrial ecosystem modeling. *Journal of Hydrology*, 207, n. 3-4, p. 147, 1998.
- [27] A. Y. Kwarteng, M. N. Viswanathan, M. N. Al-Senafy e T. Rashid. Formation of fresh ground-water lenses in northern Kuwait. *Journal of Arid Environments*, 46, n. 2, p. 137, 2000.
- [28] A. Sarangi e A. K. Bhattacharya. Comparison of Artificial Neural Network and regression models for sediment loss prediction from Banha watershed in India. *Agricultural Water Management*, 78, n. 3, p. 195, 2005.
- [29] A. S. Dhakal e R. C. Sidle. Distributed simulations of landslides for different rainfall conditions. *Hydrological Processes*, 18, n. 4, p. 757, 2004.
- [30] B. Pradhan, R. P. Singh e M. F. Buchroithner. Estimation of stress and its use in evaluation of landslide prone regions using remote sensing data. *Advances in Space Research*, 37, n. 4, p. 698, 2006.
- [31] K. T. Lee e Y. Lin. Flow analysis of landslide dammed lake watersheds: A case study. *Journal of the American Water Resources Association*, 42, n. 6, p. 1615, 2006.
- [32] M. Lazzari, E. Gherardi, V. Lapenna e A. Loperte. Natural hazards vs human impact: an integrated methodological approach in geomorphological risk assessment on the Tursi historical site, Southern Italy. *Landslides*, 3, p. 275, 2006.

- [33] P. Burlando, M. Mancini e R. Rosso. FLORA: a Distributed Flood Risk Analyser. *Proceedings of the IFIP TC5/WG5.11 Working Conference on Computer Support for Environmental Impact Assessment*, p. 91, 1993.
- [34] D. Yang, Y. Zhao, R. Armstrong, D. Robinson e M. Brodzik. Streamflow response to seasonal snow cover mass changes over large Siberian watersheds. *Journal of Geophysical Research Earth Surface*, 112, p. F02S22, 2007.
- [35] L. Vincent e P. Soille. Watersheds in digital spaces: an efficient algorithm based on immersion simulations. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 13, n. 6, p. 583, 1991.
- [36] H. Gao, W. Siu e C. Hou. Improved techniques for automatic image segmentation. *Circuits and Systems for Video Technology, IEEE Transactions on*, 11, n. 12, p. 1273, 2001.
- [37] L. G. Shapiro e G. C. Stockman. *Computer vision*. Hew Jersey: Prentice-Hall, 2001.
- [38] P. P. Bruyant e M. A. King. The Rain Algorithm: An edge-preserving smoothing filter using the watershed transform. *Journal OF Nuclear Medicine*, 43, n. 5, p. 206P, 2002.
- [39] K. Z. Mao, P. Zhao e P. Tan. Supervised learning-based cell image segmentation for P53 immunohistochemistry. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 53, n. 6, p. 1153, 2006.
- [40] F. P. Vidal, F. Bello, K. W. Brodlie, N. W. John, D. Gould, R. Phillips e N. J. Avis. Principles and Applications of Computer Graphics in Medicine. *Computer Graphics Forum*, 25, n. 1, p. 113, 2006.
- [41] J. Yan, B. Zhao, L. Wang, L. H. Schwartz e A. Zelenetz. Marker-controlled watershed for lymphoma segmentation in sequential CT images. *Medical Physics*, 33, n. 7, p. 2452, 2006.
- [42] Y. Ikedo, T. Hara e H. Fujita. Development of a fully automatic scheme for detection of masses in whole breast ultrasound images. *Medical Physics*, 34, n. 11, p. 4378, 2007.
- [43] Reports of international Arbitral Awards. The Cordillera of the Andes Boundary Case (Argentina, Chile). *United Nations Treaty Collection*, 2006. Disponível em: <http://untreaty.un.org/cod/riaa/cases/vol_IX/29-49.pdf>.
- [44] S. P. Breyer e R. S. Snow. Drainage basin perimeters: a fractal significance. *Geomorphology*, 5, n. 1-2, p. 143, 1992.
- [45] R. Ohlander, K. Price e D. R. Reddy. Picture segmentation using a recursive region splitting method. *Computer Graphics and Image Processing*, 8, n. 3, p. 313, 1978.
- [46] M. P. Pathegama e Ö. Göl. Edge-end pixel extration for edge-based image segmentation. *Engineering and Technology*, 2, p. 164, 1978.
- [47] J. Shi e J. Malik. Normalized cuts and image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22, n. 8, p. 888, 2000.
- [48] E. Fehr, *et al.* New efficient methods for calculating watersheds. *Journal of Statistical Mechanics-Theory and Experiment*, n. P09007, 2009.

- [49] J. S. Andrade Jr., S. D. S. Reis, E. A. Oliveira, E. Fehr e H. J. Herrmann. Ubiquitous fractal dimension of optimal paths. *Computing in science & Engineering*, 13, n. 1, p. 74–80, 2011.
- [50] E. Fehr, D. Kadau, J. S. Andrade Jr. e H. J. Herrmann. Impact of perturbations on watersheds. *Physical Review Letters*, 106, n. 4, 2011.
- [51] E. Fehr, D. Kadau, N. A. M. Araújo, J. S. Andrade Jr. e H. J. Herrmann. Scaling relations for watersheds. *Physical Review E*, 84, n. 3, p. 036116, 2011.
- [52] T. H. Cormen, C. E. Leiserson e R. L. Rivest. *Introduction to algorithms*. Cambridge & New York: McGraw-Hill Book Company & The MIT press, 1990.
- [53] M. Cieplak, A. Maritan e J. R. Banavar. Optimal paths and domain-walls in the strong disorder limit. *Physical Review Letters*, 72, n. 15, p. 2320, 1994.
- [54] M. Cieplak, A. Maritan e J. R. Banavar. Invasion percolation and Eden growth: Geometry and universality. *Physical Review Letters*, 76, n. 20, p. 3754, 1996.
- [55] M. Porto, S. Havlin, S. Schwarzer e A. Bunde. Optimal path in strong disorder and shortest path in invasion percolation with trapping. *Physical Review Letters*, 79, n. 21, p. 4060, 1997.
- [56] M. Porto, N. Schwartz, S. Havlin e A. Bunde. Optimal paths in disordered media: Scaling of the crossover from self-similar to self-affine behavior. *Physical Review E*, 60, n. 3, p. R2448, 1999.
- [57] J. S. Andrade Jr., E. A. Oliveira, A. A. Moreira, H. J. Herrmann. Fracturing the optimal paths. *Physical Review Letters*, 103, p. 225503, 2009.
- [58] E. A. Oliveira, K. J. Schrenk, N. A. M. Araújo, H. J. Herrmann e J. S. Andrade Jr. Optimal-path cracks in correlated and uncorrelated lattices. *Physical Review E*, 83, n. 4, p. 046113, 2011.
- [59] R. Dobrin e P. M. Duxbury. Minimum spanning trees on random networks. *Physical Review Letters*, 86, n. 22, p. 5076, 2001.
- [60] T. G. Farr, *et al.* The shuttle radar topography mission. *Reviews of Geophysics*, 45, n. 2, 2007.
- [61] M. Mézard, G. Parisi, N. Sourlas, G. Toulouse e M. Virasoro. Nature of the spin-glass phase. *Physical Review Letters*, 52, p. 1156, 1984.
- [62] A. Ansari, J. Berendzen, S. F. Bowne, H. Frauenfelder, I. E. T. Iben, T. B. Sauke, E. Shyamsunder e R. D. Young. Protein states and protein quakes. *Proceedings of the national academy of sciences of the United States of America*, 82, p. 5000, 1985.
- [63] D. A. Huse e C. L. Henley. Pinning and roughening of domain-walls in ising systems due to random impurities. *Physical Review Letters*, 54, p. 2708, 1985.
- [64] D. A. Huse, C. L. Henley e D. S. Fisher. Roughening by impurities at finite temperatures - response. *Physical Review Letters*, 55, p. 2924, 1985.
- [65] S. Kirkpatrick e G. Toulouse. Configuration space analysis of traveling salesman problems. *Journal de physique*, 46, p. 1277, 1985.

- [66] M. Kardar, G. Parisi e Y. C. Zhang. Dynamic scaling of growing interfaces. *Physical Review Letters*, 56, p. 889, 1986.
- [67] M. Kardar, G. Parisi e Y. C. Zhang. Dynamic scaling of eden-cluster surfaces - reply. *Physical Review Letters*, 57, p. 1810, 1986.
- [68] M. Kardar e Y. C. Zhang. Scaling of directed polymers in random-media. *Physical Review Letters*, 58, p. 2087, 1987.
- [69] E. Perlsman e M. Schwartz. Ultrametric tree structure in the directed polymer problem. *Europhysics Letters*, 17, p. 11, 1992.
- [70] J. Kertész, V. K. Horváth e F. Weber. Self-affine rupture lines in paper sheets. *Fractals*, 1, p. 67, 1993.
- [71] E. Perlsman e M. Schwartz. The directed polymer problem in general dimension. *Physica A*, 234, p. 523, 1996.
- [72] S. Havlin, L. A. Braunstein, S. V. Buldyrev, R. Cohen, T. Kalisky, S. Sreenivasan e H. E. Stanley. Optimal path in random networks with disorder: A mini review. *Physica A*, 346, p. 82, 2005.
- [73] E. W. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1, p. 269, 1959.
- [74] R. Bellman. On a routing problem. *Quarterly of applied mathematics*, 16, p. 87, 1958.
- [75] L. R. Ford e D. R. Fulkerson. *Flows in Networks*. Princeton: [s.n.], 1962.
- [76] N. Schwartz, A. L. Nazaryev e S. Havlin. Optimal path in two and three dimensions. *Physical review E*, 58, p. 7642, 1998.
- [77] K. M. Kleinberg. Navigation in a small world - It is easier to find short chains between points in some networks than others. *NATURE*, 406, n. 6798, p. 845, 2000.
- [78] M. R. Roberson e D. ben-Avraham. Kleinberg navigation in fractal small-world networks. *Physical review E*, 74, n. 1, 2006.
- [79] M. T. Gastner e M. E. J. Newman. Optimal design of spatial distribution networks. *Physical review E*, 74, n. 1, 2006.
- [80] S. Carmi, S. Carter, J. Sun e D. ben-Avraham. Asymptotic Behavior of the Kleinberg Model. *Physical Review Letters*, 102, n. 23, 2009.
- [81] C. C. Cartozo e P. De Los Rios. Extended Navigability of Small World Networks: Exact Results and New Insights. *Physical Review Letters*, 102, n. 23, 2009.
- [82] C. F. Moukarzel e M. A. de Menezes. Shortest paths on systems with power-law distributed long-range connections. *Physical Review E*, 65, n. 5, 2002.
- [83] R. Guimera, A. Diaz-Guilera, F. Vega-Redondo, A. Cabrales e A. Arenas. Optimal network topologies for local search with congestion. *Physical Review Letters*, 89, n. 24, 2002.

- [84] L. Danon, A. Arenas e A. Diaz-Guilera. Impact of community structure on information transfer. *Physical Review E*, 77, n. 3, 2008.
- [85] M. C. Santos, G. M. Viswanathan, E. P. Raposo e M. G. E. da Luz. Optimization of random searches on defective lattice networks. *Physical Review E*, 77, n. 4, 2008.
- [86] M. Boguna e D. Krioukov. Navigating Ultrasmall Worlds in Ultrashort Time. *Physical Review Letters*, 102, n. 5, 2009.
- [87] G. Li, S. D. S. Reis, A. A. Moreira, S. Havlin, H. E. Stanley e J. S. Andrade Jr. Towards Design Principles for Optimal Transport Networks. *Physical Review Letters*, 104, n. 1, 2010.
- [88] D. Helbing. *Verkehrsdynamik*. Berlin: Springer, 1997.
- [89] B. S. Kerner. *The Physics of traffic*. Berlin: Springer, 2004.
- [90] K. Nagel e M. Schreckenberg. A cellular automaton model for freeway traffic. *Journal de Physique I*, 2, n. 12, p. 2221, 1992.
- [91] B. S. Kerner e H. Rehborn. Experimental features and characteristics of traffic jams. *Physical Review E*, 53, n. 2, p. R1297, 1996.
- [92] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, Y. Sugiyama. Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation. *Physical Review E*, 51, n. 2, p. 1035, 1995.
- [93] A. Kimms, K. Maassen. Optimization and simulation of traffic flows in the case of evacuating urban areas. *OR SPECTRUM*, 33, n. 3, p. 571, 2011.

Publicações

New efficient methods for calculating watersheds

This article has been downloaded from IOPscience. Please scroll down to see the full text article.

J. Stat. Mech. (2009) P09007

(<http://iopscience.iop.org/1742-5468/2009/09/P09007>)

View [the table of contents for this issue](#), or go to the [journal homepage](#) for more

Download details:

IP Address: 200.17.35.253

The article was downloaded on 27/04/2011 at 21:59

Please note that [terms and conditions apply](#).

New efficient methods for calculating watersheds

E Fehr¹, J S Andrade Jr^{1,2}, S D da Cunha³, L R da Silva³,
H J Herrmann^{1,2}, D Kadau¹, C F Moukarzel^{1,4} and
E A Oliveira²

¹ IfB, HIF E12, ETH Zürich, 8093 Zürich, Switzerland

² Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará, 60451-970 Fortaleza, Ceará, Brazil

³ Departamento de Física, Teórica e Experimental, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 59072-970 Natal-RN, Brazil

⁴ CINVESTAV del IPN Unidad Mérida, Departamento de Física Aplicada, 97310 Mérida, Yucatán, Mexico

E-mail: ericfehr@ethz.ch, soares@fisica.ufc.br, sharon@dfte.ufrn.br,
luciano@dfte.ufrn.br, hans@ifb.baug.ethz.ch, dkadau@ethz.ch,
cristian@mda.cinvestav.mx and erneson@fisica.ufc.br

Received 9 July 2009

Accepted 5 August 2009

Published 11 September 2009

Online at stacks.iop.org/JSTAT/2009/P09007

[doi:10.1088/1742-5468/2009/09/P09007](https://doi.org/10.1088/1742-5468/2009/09/P09007)

Abstract. We present an advanced algorithm for the determination of watershed lines on digital elevation models (DEMs) which is based on the iterative application of invasion percolation (IP). The main advantage of our method over previously proposed ones is that it has a sub-linear time-complexity. This enables us to process systems comprising up to 10^8 sites in a few CPU seconds. Using our algorithm we are able to demonstrate, convincingly and with high accuracy, the fractal character of watershed lines.

We find the fractal dimension of watersheds to be $D_f = 1.211 \pm 0.001$ for artificial landscapes, $D_f = 1.10 \pm 0.01$ for the Alps and $D_f = 1.11 \pm 0.01$ for the Himalayas.

Keywords: percolation problems (theory), fractal growth (theory), fracture (theory)

Contents

1. Introduction	2
2. The two methods	3
3. Equivalence of methods	7
4. Results	8
5. Conclusions	10
Acknowledgments	10
References	11

1. Introduction

The concept of watershed arises naturally in the field of geomorphology, where it plays a fundamental role in e.g. water management [1]–[3] and landslide [4]–[7] and flood prevention [6, 8, 9]. Moreover, important applications can also be found in seemingly unrelated areas such as image processing [10]–[12] and medicine [13]–[17]. Watersheds divide adjacent water systems going into different seas and have been used since ancient times to delimit boundaries. Border disputes between countries, like for example the case of Argentina and Chile [18], have shown that it is important to fully understand the subtle geometrical properties of watersheds. Geographers and geomorphologists have studied watersheds extensively in the past. There have also been preliminary claims about fractality [19] but these were restricted to small-scale observations and therefore inconclusive. Despite the far reaching consequences of scaling properties on the hydrological and political issues connected to watersheds no detailed numerical or theoretical study has yet been performed.

In image processing or computer vision in particular interest in the development of efficient algorithms is high. There one tries to simplify and/or change an image's representation such that it is more meaningful or easier to analyze. This is done by image segmentation, e.g. partitioning a digital image into multiple segments (sets of pixels, also known as superpixels). Typically one locates objects and boundaries (lines, curves, etc) in images. More precisely, image segmentation is the process of assigning a label to every pixel in an image such that pixels with the same label share certain visual characteristics such as color, intensity or texture. Adjacent segments are significantly different with respect to the same characteristic(s) [12]. This sounds familiar, and although many other methods, such as clustering, histograms [20], edge-detection [21], region growing [10], level-set or graph partitioning [22], have been developed for that purpose, watersheds are also currently used. This is because if one transforms an image to its color gradient

representation and calculates the watersheds on the thus achieved digital elevation model (DEM) like data, one can identify the obtained catchment basins as the different (color) regions with their boundaries to be represented by the watersheds.

It is the purpose of the present paper to present an advanced method which allows us to study the geometrical properties of watersheds on huge landscapes and with high statistics. Applied to an artificial landscape model we show results on length scales spanning over three orders of magnitude and yielding very accurate estimates of the fractal dimension of watersheds. Our algorithm is based on an iterative invasion percolation (IP) like model. We make comparisons to other algorithms in use and show the advances of our method. Furthermore, we prove the equivalence of our IP-based method to the so-called flooding algorithm. Finally the method is applied to DEMs from regions including the Alps and the Himalayas.

2. The two methods

Traditional cartographical methods for basin delineation relied on manual estimation from iso-elevation lines and required a good deal of guess work. Modern procedures are based upon the automatic processing of DEM or grayscale digital images where gray intensity is transformed into height. One of the most popular algorithms for watershed determination [10] (compare also *flooding* later) uses rather complicated data structures and at least one pass over all pixels in order to calculate watersheds, and is adequate for grayscale images, i.e. integer-height spaces. In the following, we will present a much more efficient technique.

Let us consider a DEM with sites i having heights h_i . We define the set of sites S_k , $k = 0, 1, \dots, N_{\text{sinks}}$, to be the *sinks* of our system. On natural landscapes these sinks are the natural water-outlets of the terrain, as for example a lake, a river or an ocean. We consider that at each time step, water flows to the lowest-lying site on the perimeter of a flooded region. If when starting from i , sink S_k is flooded before any other, then site i and the whole flooded region is considered to belong to the *catchment basin* of sink S_k ; equivalently one says that i drains to S_k . This procedure introduces a classification of lattice sites, i.e. a subdivision into non-overlapping subsets whose union is the entire lattice. We call the sets of bonds separating neighboring basins *watersheds*. We are interested in the geometrical properties of a single watershed line. But as natural landscapes normally contain more than one sink and hence more than one single line, it is difficult to study long-range properties. We therefore restrict ourselves to the study of two-sink systems, or in other words studying only the main watershed with respect to these two sinks. Although we use these restrictions, our algorithm, which we will describe in the following, is able to also deal with multiple-sink systems. This because it is not restricted to certain numbers of sinks/labels but is free to deal with as many as one would like.

In our algorithm, that we call *IP-based algorithm*, a cluster is started from site i and grown by adding at each step, similar to IP, the smallest-height site on its perimeter until the first sink is reached (see figure 1). This can be done rather quickly when using binary heaps or other tree methods to sort the list of perimeter sites according to their height values. This procedure is related to Prim's algorithm for growing minimum spanning trees (MST) from i [24, 25]. When implemented blindly over the whole lattice, however, this

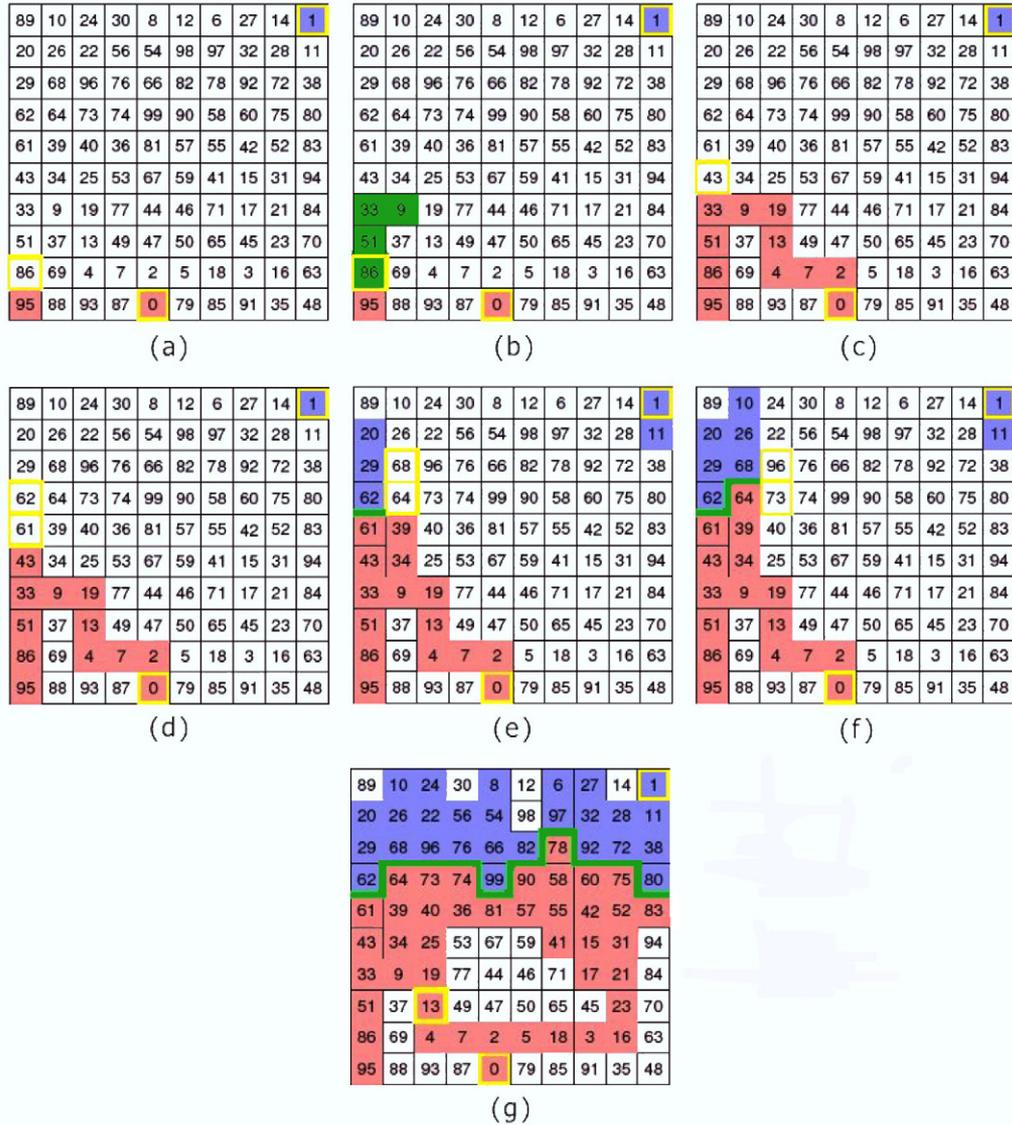


Figure 1. Different stages during the search for the main watershed (green lines): red/blue for the labels to the two sinks, green are visited but not yet labeled sites, the numbers mark the integer heights of the corresponding site and the yellow box surrounds the starting site of the current IP-cluster. Right and left periodic boundary conditions are applied. Uppermost and lowermost bonds connect to the sinks (which are entire rows). Further, the lowest two sites are already labeled. Parts (a)–(c) show the growth of an IP-cluster until reaching a sink. Parts (a)–(e) show the search for the first watershed bond, growing IP-clusters of each site along the first column consecutively. (e)–(g) Following the watershed.

process would be inefficient, since in principle a new cluster has to be grown from each site i . By noting that all sites occupied by a cluster at the time the sink is reached also drain to that sink, it becomes clear that we can set a link to that sink for each site in the cluster. This leads to two improvements: first, we do not need to treat again the sites contained in the cluster as we can directly link them to the sink reached by the cluster, and second, we can stop growing clusters when we reach a site which has an existing link to a sink. Like this, the algorithm has to visit each site only once. But each site on the map still has to be visited. Let us assume we already know a line dividing the system and we want to check if this line is really the watershed of the current system. To prove this we actually only need to test the sites adjacent to the watershed line if they belong to different sinks on the two sides of the line. Hence the subset of the system, formed by these adjacent sites, is the minimal subset we have to test, i.e. grow IP-clusters from, in order to clearly determine the watershed. Unfortunately we do not know in advance the exact form or position of the watershed, neither do we know any of the sites in that minimal subset. The only thing we know is that the watershed is located somewhere in between the two sinks. This means that, whatever path we follow, to go from one sink to the other we have to cross the watershed. The sites we visited on such a path, before the watershed traversal, belong to the sink we started from and the sites afterward belong to the second sink. This is what we now can use to find the first two sites of the minimal subset. We follow a straight line of sites connecting the two sinks. Starting from one sink we follow the connection site by site and grow IP-clusters from these sites. We proceed until we reach the first site that drains to the second sink, which means that we have crossed the watershed (see figure 1). The bond between the last two sites, that drain to different sinks, is part of the watershed line and the two sites belong to the minimal subset as mentioned above. Now we can reconstruct the minimal subset and the set of bonds forming the watershed line by just following step by step the direction of the already found watershed at one of its two ends and testing the next two sites to find if the direction changes by $\pm 90^\circ$ or remains the same. We just walk along the watershed and hence have only to test slightly more sites than in the minimal subset (see figure 1). Of course the IP-clusters for these sites have to be grown until they reach a sink or sink-connected site, but there are typically large parts of the terrain that need not be visited at all by the algorithm in order to determine the entire divide. For use in multiple-sink systems one would only have to consider additionally branching and joining of the watershed lines (also only one starting bond has to be found). That only a part of the system has to be considered (compare figure 2), and then each site only once, is probably the biggest advantage of this procedure. The described algorithm is fast enough to allow for the determination of watersheds on lattices comprising 10^8 sites in a few CPU seconds on a normal workstation.

In the following we describe a slightly adjusted version of the commonly used watershed algorithm for image segmentation [10] in order to compare efficiency and prove equivalency to our IP-based algorithm (actually it makes use of disjoint-set data structures). In this procedure, which we call *flooding*, the whole lattice is flooded (or occupied) in order of increasing height, i.e. at time t all sites with $h_i < h(t)$ are occupied and $h(t)$ grows site per site in time. This procedure is also related to Kruskal's algorithm for growing MSTs [24, 25]. It is assumed that each site has a height, which is a real number, such that after sorting them, a unique sequence of sites is defined. At the beginning,

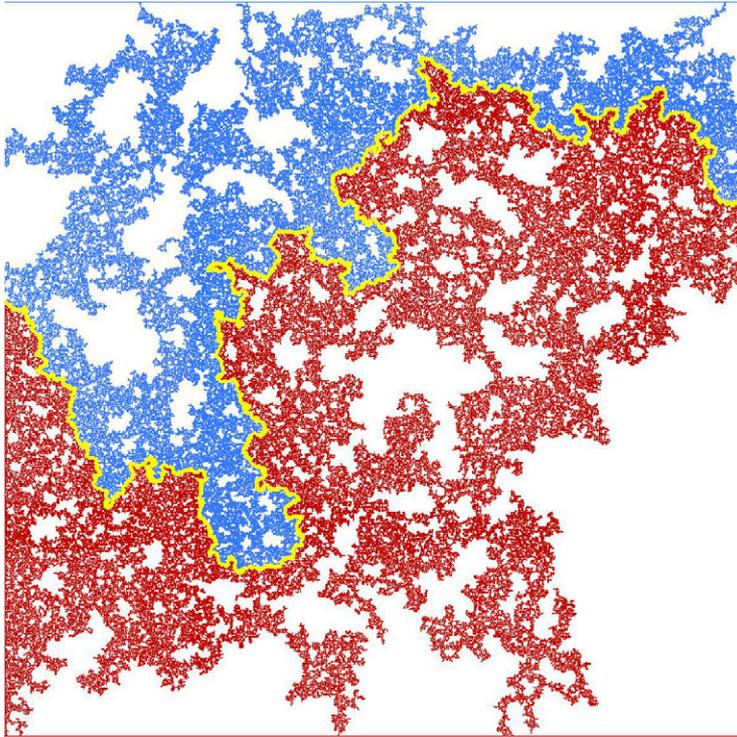


Figure 2. Labels of the sites for a random landscape obtained during the run of the IP-based algorithm. Red labels (lower part) belong to the sink at the bottom row and the blue ones (upper part) to the sink at the uppermost row. The watershed is marked in yellow. Only the colored sites are visited by the algorithm, meaning that white sites do not have to be considered by the algorithm in order to obtain the right set of watersheded bonds.

each sink is assigned a different label, and we will furthermore specify that a cluster of occupied sites that gets connected (through a path of occupied sites) with a sink is labeled accordingly, i.e. labels propagate from the sinks. Clusters of occupied sites not yet in contact with any sink remain unlabeled. Whenever two different labels come into contact with each other because of the addition of a new site, the (unique) bridging site is first labeled with the label of its lowest-lying neighbor. Next, all bonds connecting sites with different labels are ‘cut’ so that labels from different sinks never mix. Bonds connecting different labels are called *bridges*. When this flooding procedure is completed, the different labels identify the corresponding catchment basins and the set of bridges, i.e. the set of bonds separating the different basins, identifies the watershed(s). In the described form the sinks are predefined by hand or by applying some criteria. Of course one can reformulate this procedure to identify all intrinsic catchment basins automatically by just introducing new labels when a site that has only unoccupied neighbors becomes occupied. This will in fact return all possible watersheds on the current landscape, even those of the smallest basins, which is probably not what one would like to see. Unfortunately using the above described flooding algorithm one has in general to consider each site or pixel to completely determine the watershed, such that, already without considering the required sorting, this algorithm performs less efficiently than the presented IP-based algorithm.

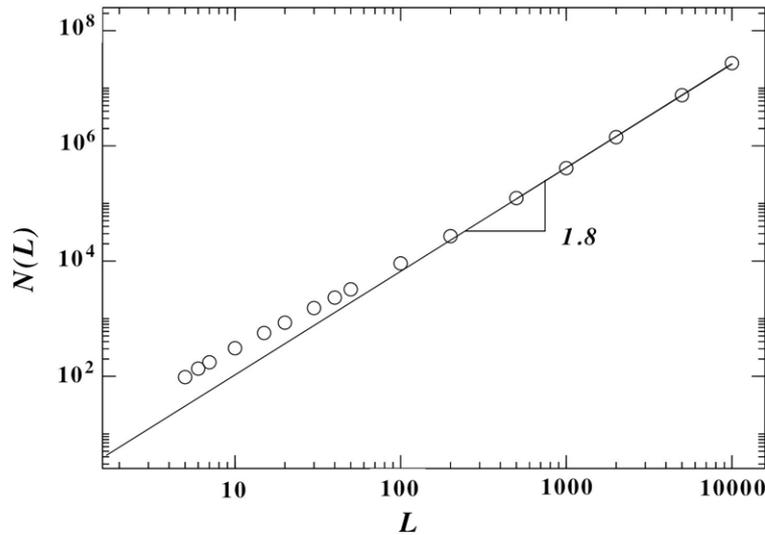


Figure 3. Log–log plot of the number $N(L)$ of sites visited by the IP-based algorithm, in order to determine the watersheds on artificial landscapes, as a function of linear dimension L (circles). Solid line shows the least squares fit to the five last data points, which gives a dimension $D_f = 1.8 \pm 0.01$ for large scales ($N \sim L^{D_f}$).

3. Equivalence of methods

We now sketch a simple proof for the equivalence of these two procedures. During the flooding growth a set of unlabeled sites that become labeled by occupying site b is called a *lake* and b is called its *outlet*. The height of all sites in a lake is bounded by that of its outlet, i.e. $h(i) \leq h(b(i))$. Let us stop the flood procedure when site i gets labeled for the first time, say with label S_k . Now start an IP-cluster from i and let it grow for as long as it takes until some sink is first occupied. During the growth of this cluster, which proceeds by always adding the lowest-lying site on the perimeter, several lakes and their outlets may be occupied. We need to demonstrate that no bridge will ever be traversed during this IP growth, and therefore that sink S_k will be occupied first. During the growth of the IP-cluster, a lake will be entirely flooded, i.e. the water will reach the level of its outlet. Since all bridges by definition are higher than the outlet of a lake (because by definition bridges were occupied later than the outlet), clearly the next occupation will proceed through the outlet and not through the bridge. Therefore no bridge will be ever traversed, thus proving the equivalence of both procedures.

It is important to note that, although conceptually equivalent, the IP and the flooding algorithms are markedly different in terms of computational performance. First, the flooding needs a sorting of the sites according to their heights, which needs a time of at least $O(N)$. Additionally it has been shown by Fredman and Saks [23] that building the disjoint-set data structure on which the algorithm is based needs in all cases at least $O(\alpha(N)N)$, where $\alpha(N)$ is the inverse Ackermann function which is constant for almost all values of N . Hence the flooding scales at least with $O(N)$. In figure 3, for the random artificial landscape case, the number of sites visited by the IP-based algorithm

is shown together with its scaling in linear dimension L , which clearly emphasizes the sub-linear time-complexity of this method. The total number of visited sites N scales as $N \sim L^{D_f}$ with $D_f = 1.8 \pm 0.01$. This is comparable to what is found in nature. There, river networks show fractal dimensions between 1.7 and 1.9 [26]–[31]. On large scales we expect this fractal dimension to be dominated by the largest IP-cluster we grow, for which we found a fractal dimension that is in good agreement with literature and the result for the total number of visited sites. Furthermore we expect that the algorithm is even more efficient on natural landscapes, as the largest IP-cluster will most probably follow the main stream. Hence scaling is like that of the main stream, which is reported to have fractal dimensions between 1.0 and 1.2 [26]–[31].

4. Results

As an example we applied the IP-based algorithm to artificial landscapes, where the height of each site on the lattice is an independent random variable uniformly distributed between 0 and 1,⁵ and two sinks are defined, respectively, as the upper- and lowermost lines of the lattice. Due to the high efficiency of the method we could process a huge amount of data and hence gather a lot of statistics. This enables us to very precisely estimate the fractal dimension of the watershed using mass-scaling. We measured the total length of the resulting watersheds and averaged this value over at least 10^4 samples for a given lattice size. The results for artificial landscapes are shown in figure 4. Our data are strikingly straight on a log–log plot, which warrants the neglect of finite size corrections. Hence, the fractal dimension is measured as the least squares fit to the slope of the data shown. We find that the watershed is a fractal, i.e. $M \sim L^{D_f}$, with a fractal dimension $D_f = 1.211 \pm 0.001$.⁶ This value of D_f is close to that found for disordered polymers (≈ 1.2 [32]), ‘strands’ in invasion percolation (1.22 ± 0.01 [33]), and paths on MSTs (1.22 ± 0.01 [24]). The roughness exponent found for the watersheds is equal to unity within the statistical error bars, supporting the fact that they are indeed self-similar fractal objects and not self-affine.

We also applied the IP algorithm to study the fractal properties of watersheds on naturally occurring landscapes, which clearly have long-range correlations [34]. Of course, if we would like to estimate the fractal dimension of a single watershed line of one given landscape, as is the case for these natural topographies, we cannot work with the statistical approach used above for the artificial ones. Therefore we have to choose another method. As we follow the watershed bond per bond, and hence have the correct ordered set of bonds, we can easily apply a yardstick method. Measuring now the length of the watershed in terms of a given yardstick size, meaning measuring the length on a certain resolution, we can define the corresponding fractal dimension again. We also checked this procedure on several realizations of artificial landscapes and found the newly estimated fractal dimension to agree with the above presented $D_f = 1.211 \pm 0.001$ within the error bars. Therefore we can assume that this equality is also true for natural landscapes. Now, using topographic data derived from the Shuttle Radar Topography Mission (SRTM) [35],

⁵ Since the watershed location only depends on the order in which sites are occupied, it is clear that any distribution of heights will produce the same statistical results, as discussed for example in [24].

⁶ We repeated the mass-scaling analysis using the box-counting method on individual samples of $L = 1.5 \times 10^4$, and obtained a consistent result $D_f = 1.21 \pm 0.01$.

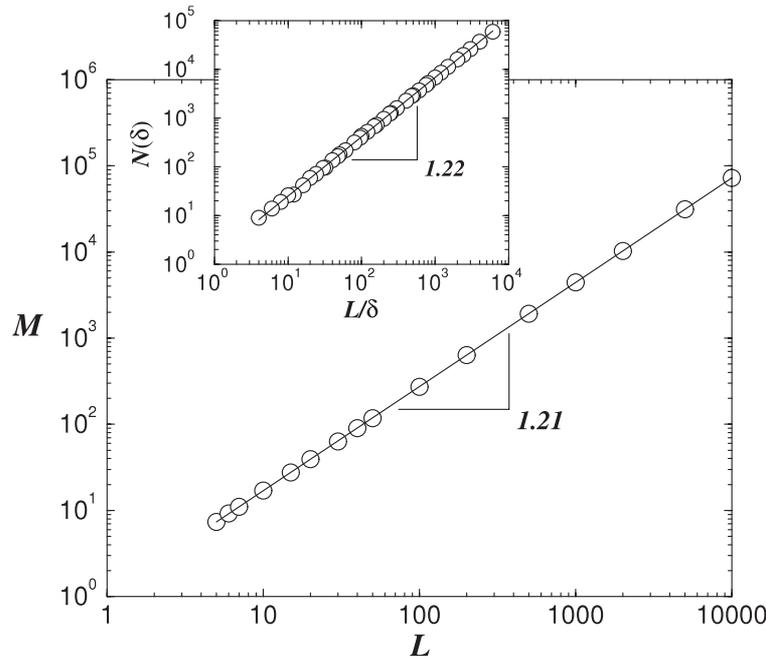


Figure 4. The mass M of the watershed of (uncorrelated) random-height maps scales with linear dimension as $M \sim L^{D_f}$, with $D_f = 1.211 \pm 0.001$. A box-counting procedure (inset) gives a consistent result. This fractal dimension is independent of the type of disorder, as long as each height is an uncorrelated random variable.

we analyzed several mountainous regions and determined their watersheds within the available resolution of 3 arcsec (i.e. roughly 90 m). As shown in figure 5, a yardstick analysis of the watershed performed in the range $100 \text{ m} < L < 200 \text{ km}$ for the Alps and Himalayas gives fractal dimensions that are indistinguishable within their error bars, namely $D_f^{\text{Al}} = 1.10 \pm 0.01$ and $D_f^{\text{Hi}} = 1.11 \pm 0.01$, respectively. The error bars were obtained by determining the lines of maximal and of minimal slope that would still be consistent with the data in figure 5. Again, the roughness exponent found for the watersheds is equal to unity within the statistical error bars, hence we still have self-similar fractal objects and not self-affine for intermediate to large scales. The origin of the upper and lower size scales is clear. On large scales ($>200 \text{ km}$) the watershed follows the direction of the main crust foldings, which depends on processes occurring on the scale of tectonic plates, which are non-fractal. Hence the scaling should be essentially linear ($D_f = 1$). Although beyond our resolution, at small scales ($<100 \text{ m}$), below the size of an individual mountain, the watershed would connect peaks and troughs, which are typically self-affine.

It is important to notice that the fractal dimension of the watershed line D_f is by definition independent of the type of disorder on the landscape, as long as each height is an uncorrelated random variable because only the spatial order of the random variables (heights) in the system matters and not their relative numerical differences. The small discrepancies (around 10%) between fractal dimensions of watersheds in the natural topographical data taken from the SRTM and the artificial random landscapes can be explained by the presence of correlations in the first case. In particular, long-range

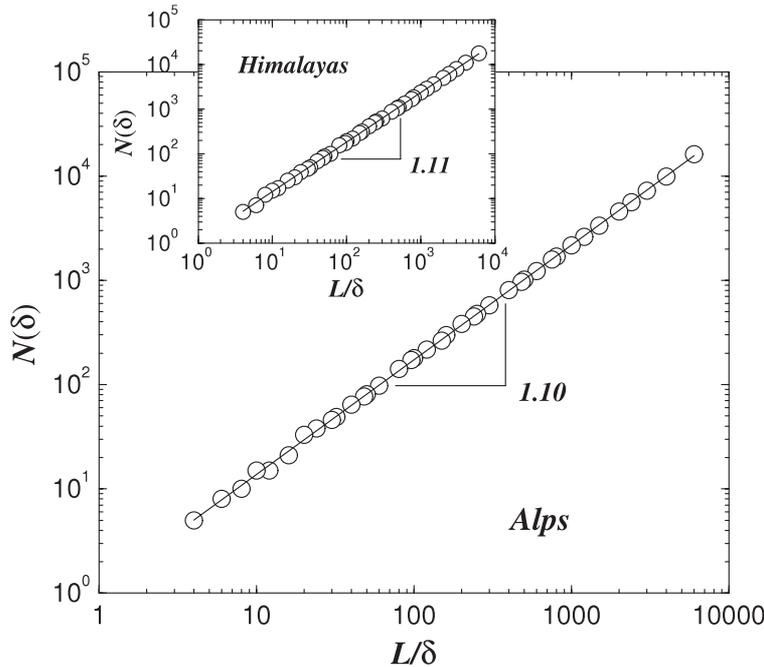


Figure 5. Log–log plot showing the box-counting results for the Alps watershed. The solid line is the best fit to the data which give a fractal dimension of $D_f^{\text{Al}} = 1.10 \pm 0.01$. The inset shows our results for the watershed calculated on the Himalayas. The fractal dimension in this case is $D_f^{\text{Hi}} = 1.11 \pm 0.01$.

correlations in space have been reported in a large variety of physical, biological and geological systems [36]–[40].

5. Conclusions

We have presented an advanced numerical algorithm of sub-linear time-complexity and showed its equivalence to a currently used watershed algorithm. Giving some qualitative arguments and analysis we point out the improved efficiency of the presented method. We further investigated the watershed topology of natural and synthetic DEMs. Our results show that watersheds generated on very large (10^8 sites) uncorrelated random landscapes are self-similar with fractal dimension $D_f = 1.211 \pm 0.001$. Natural watersheds calculated from landscapes of mountainous regions like the Alps and Himalayas also display self-similarity, but with slightly smaller fractal dimensions, $D_f^{\text{Al}} = 1.10 \pm 0.01$ and $D_f^{\text{Hi}} = 1.11 \pm 0.01$, respectively. The difference between the fractal dimensions probably arises due to the fact that long-range correlations exist in the natural system. The fractality of watersheds has widespread consequences for its susceptibility to perturbations of the topology and transport properties at the boundary of catchment basins. These are questions that will be investigated in the future.

Acknowledgments

We acknowledge useful discussions with P Duxbury, M Alava, H Seybold and A A Moreira. We also thank the agencies CONACYT (48783,74598), México, and CAPES, CNPq and FUNCAP, Brazil, for financial support.

References

- [1] Vorosmarty C J, Federer C A and Schloss A L, *Evaporation functions compared on US watersheds: possible implications for global-scale water balance and terrestrial ecosystem modeling*, 1998 *J. Hydrol.* **207** 147
- [2] Kwarteng A Y *et al*, *Formation of fresh ground-water lenses in northern Kuwait*, 2000 *J. Arid Environ.* **46** 137
- [3] Sarangi A and Bhattacharya A K, *Comparison of artificial neural network and regression models for sediment loss prediction from Banha watershed in India*, 2005 *Agric. Water Manage.* **78** 195
- [4] Dhakal A S and Sidle R C, *Distributed simulations of landslides for different rainfall conditions*, 2004 *Hydrol. Process.* **18** 757
- [5] Pradhan B, Singh R P and Buchroithner M F, *Estimation of stress and its use in evaluation of landslide prone regions using remote sensing data*, 2006 *Adv. Space Res.* **37** 698
- [6] Lee K T and Lin Y T, *Flow analysis of landslide dammed lake watersheds: a case study*, 2006 *J. Am. Water Resour. Assoc.* **42** 1615
- [7] Lazzari M *et al*, *Natural hazards versus human impact: an integrated methodological approach in geomorphological risk assessment on the Tursi historical site, Southern Italy*, 2006 *Landslides* **3** 275
- [8] Burlando P, Mancini M and Rosso R, *FLORA—a distributed flood risk analyzer*, 1994 *IFIP Trans. B* **16** 91
- [9] Yang D Q *et al*, *Streamflow response to seasonal snow cover mass changes over large Siberian watersheds*, 2007 *J. Geophys. Res.-Earth* **112** F02S22
- [10] Vincent L and Soille P, *Watersheds in digital spaces—an efficient algorithm based on immersion simulations*, 1991 *IEEE Trans. Pattern Anal.* **13** 583
- [11] Gao H, Siu W C and Hou C H, *Improved techniques for automatic image segmentation*, 2001 *IEEE Trans. Circuits Syst. Video Technol.* **11** 1273
- [12] Shapiro L G and Stockman G C, 2001 *Computer Vision* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall) pp 279–325
- [13] Bruyant P P and King M A, *The rain algorithm: an edge-preserving smoothing filter using the watershed transform*, 2002 *J. Nucl. Med.* **43** 206P
- [14] Mao K Z, Zhao P and Tan P H, *Supervised learning-based cell image segmentation for P53 immunohisto-chemistry*, 2006 *IEEE Trans. BioMed. Eng.* **53** 1153
- [15] Vidal F P *et al*, *Principles and applications of computer graphics in medicine*, 2006 *Comput. Graph. Forum* **25** 113
- [16] Yan J Y *et al*, *Marker-controlled watershed for lymphoma segmentation in sequential CT images*, 2006 *Med. Phys.* **33** 2452
- [17] Ikedo Y *et al*, *Development of a fully automatic scheme for detection of masses in whole breast ultrasound images*, 2007 *Med. Phys.* **34** 4378
- [18] Reports of International Arbitral Awards, 2006 *The Cordillera of the Andes Boundary Case (Argentina, Chile)* United Nations Treaty Collection Available at: http://untreaty.un.org/cod/riaa/cases/vol_IX/29-49.pdf
- [19] Breyer S P and Snow R S, *Drainage-basin perimeters—a fractal significance*, 1992 *Geomorphology* **5** 143
- [20] Ohlander R, Price K and Raj Reddy D, *Picture segmentation using a recursive region splitting method*, 1978 *Comput. Graph. Image Process.* **8** 313
- [21] Pathegama M P and Göl Ö, *Edge-end pixel extraction for edge-based image segmentation*, 2005 *World Acad. Sci., Eng. Technol.* **2** 164
- [22] Shi J and Malik J, *Normalized cuts and image segmentation*, 2000 *IEEE Trans. Pattern Anal.* **22** 888
- [23] Fredman M and Saks M, *The cell probe complexity of dynamic data structures*, 1989 *Proc. Twenty-First Ann. ACM Symp. on Theory of Computing* p 345
- [24] Dobrin R and Duxbury P M, *Minimum spanning trees on random networks*, 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 5076
- [25] Barabasi A L, *Invasion percolation and global optimization*, 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 3750
- [26] Rodriguez-Iturbe I and Rinaldo A, 1997 *Fractal River Basins* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [27] Maritan A, Rinaldo A, Rigon R, Giacometti A and Rodriguez-Iturbe I, *Scaling laws for river networks*, 1996 *Phys. Rev. E* **53** 1510
- [28] De Bartolo S G, Veltri M and Primavera L, 2006 *J. Hydrol.* **322** 181
- [29] Horton R E, *Drainage basin characteristics*, 1932 *EOS Trans. Am. Geophys. Union* **13** 350
- [30] Hack J T, *Studies of longitudinal profiles in Virginia and Maryland*, 1957 *USGS Professional Papers* vol 294-B, p 46
- [31] Melton M A, *Correlation structure of morphometric properties of drainage systems and their controlling agents*, 1958 *J. Geol.* **66** 35
- [32] Cieplak M, Maritan A and Banavar J R, *Optimal paths and domain-walls in the strong disorder limit*, 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 2320

- [33] Cieplak M, Maritan A and Banavar J R, *Invasion percolation and Eden growth: geometry and universality*, 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 3754
- [34] Turcotte D L, 1997 *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics* 2nd edn (Cambridge: Cambridge University Press)
- [35] Farr T G *et al*, *The shuttle radar topography mission*, 2007 *Rev. Geophys.* **45** RG2004
- [36] Family F and Vicsek T (ed), 1991 *Dynamics of Fractal Surfaces* (Singapore: World Scientific)
- [37] Bunde A and Havlin S, 1994 *Fractals in Science* (Berlin: Springer)
- [38] Sahimi M, *Non-linear and non-local transport processes in heterogeneous media: from long-range correlated percolation to fracture and materials breakdown*, 1998 *Phys. Rep.* **306** 213
- [39] Sapoval B, Baldassarri A and Gabrielli A, *Self-stabilized fractality of seacoasts through damped erosion*, 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 098501
- [40] Schorghofer N and Rothman D H, *Acausal relations between topographic slope and drainage area*, 2002 *Geophys. Res. Lett.* **29** 1633

Fracturing the Optimal Paths

J. S. Andrade, Jr.,^{1,2} E. A. Oliveira,¹ A. A. Moreira,¹ and H. J. Herrmann^{1,2}

¹*Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará, 60451-970 Fortaleza, Ceará, Brazil*

²*IfB, HIF E12, ETH Hönggerberg, 8093 Zürich, Switzerland*

(Received 30 July 2009; published 25 November 2009)

Optimal paths play a fundamental role in numerous physical applications ranging from random polymers to brittle fracture, from the flow through porous media to information propagation. Here for the first time we explore the path that is activated once this optimal path fails and what happens when this new path also fails and so on, until the system is completely disconnected. In fact many applications can also be found for this novel fracture problem. In the limit of strong disorder, our results show that all the cracks are located on a single self-similar connected line of fractal dimension $D_b \approx 1.22$. For weak disorder, the number of cracks spreads all over the entire network before global connectivity is lost. Strikingly, the disconnecting path (backbone) is, however, completely independent on the disorder.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.225503

PACS numbers: 62.20.mm, 05.45.Df, 64.60.ah

The identification and characterization of the optimal path in a disordered landscape represents an important problem in theoretical and computational physics as it can be intimately associated with many relevant scientific and technological applications [1–8] including brittle fracture, random polymers and transport in porous media. It has been shown that optimal paths extracted from energy landscapes generated with weak disorder are self-affine and belong to the same universality class of directed polymers [9]. In the strong disorder or ultrametric limit, on the other hand, numerical works [10–12] demonstrated the self-similar nature of the optimal path on two and three-dimensional lattices with fractal dimensions given by $D_f \approx 1.22$ and 1.43, respectively.

Optimal paths can be chosen by nature as those of minimum energy as occurs for instance in electrical or fluid flow through random media, or they can be chosen deliberately in man made devices to reduce a cost function as for instance in internet or car traffic. Since these paths are heavily used they are more likely prone to failure either by overload, overheating or congestion. Two questions that naturally arise are (i) how and when the system will eventually collapse and (ii) how the topology and inhomogeneity of this fracture affects its performance. It is the aim of the present Letter to provide a novel modelization for this complex problem that captures its essential features and gives some insight about the statistical physics of these important questions. We first introduce a new model to generate a macroscopic fault line, namely, the optimal path crack (OPC) method, that is based on an iterative application of the Dijkstra algorithm [13] to two-dimensional random landscapes. We then quantify the effect of disorder on the resulting crack topology to substantiate the relevance of the OPC method as a tool to understand the fracture of the random medium.

Our substrate is a square lattice of size L with fixed boundary conditions at the top and bottom, and periodic

boundary conditions in the transversal direction. Disorder is introduced in our model by assigning to each site i an energy value $\epsilon_i = \exp[\beta(p_i - 1)]$ [14], where p_i is a random variable uniformly distributed in the interval $[0, 1]$, and β is a positive parameter that has the physical meaning of inverse temperature. It can be readily shown that this transformation is equivalent to choosing the values of ϵ from a power-law distribution, namely $P(\epsilon_i) \sim 1/\epsilon_i$, subjected to a maximum cutoff given by $\epsilon_{\max} = e^\beta$. The existence of such a cutoff turns the hyperbolic distribution normalizable for any finite value of β . In this way, β represents the strength of disorder since it controls the broadness of the energy distribution.

The energy of any path in the system is defined here as the sum of all the energies of its sites. In particular, the optimal path is the one among all paths connecting the bottom to the top of the lattice that has the smallest sum over all energies of its sites. This definition is similar, but different from the definition of the shortest path in a network [15]. Without loss of generality, since we only consider positive p_i values, the Dijkstra algorithm becomes a suitable tool for finding the optimal path [13].

The OPC is formed as follows. Once the first optimal path connecting the bottom and the top of the lattice is determined, we search for the site in the optimal path having the highest energy which then becomes the first blocked site, i.e., that can no longer be part of any path. This is equivalent to imposing an infinite energy to this site. Next, the optimal path is calculated among the remaining accessible sites of the lattice, from which the highest energy site is again removed, and so on. The blocked sites can be viewed as “microcracks,” and the process continues iteratively until the system is disrupted and we can no longer find any path connecting bottom to top.

In Fig. 1(a) we show the resulting spatial distribution of blocked sites that constitutes the OPC in a typical random landscape generated under weak disorder conditions

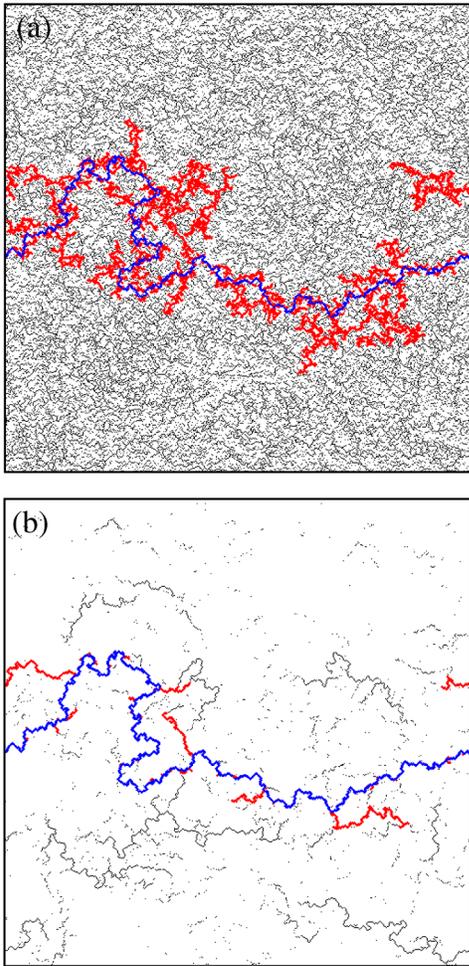


FIG. 1 (color online). Typical realizations of the OPC model on a 512×512 lattice. In (a) the blocked sites generated under weak disorder conditions ($\beta = 0.002$) can be categorized in three distinct types, namely, the loopless backbone of the OPC [shown in blue (dark gray)] at which multiple dangling ends [shown in red (medium gray)] are attached, and isolated clusters (shown in black) spread all over the network. As shown in (b), under moderate disorder conditions ($\beta = 6.0$), while the OPC backbone is preserved, the number of dangling ends and isolated clusters is substantially reduced. Under conditions of very strong disorder (not shown), only the OPC backbone remains.

($\beta = 0.002$). As depicted, the OPC structure has three basic elements. Besides the loopless backbone of the fracture [shown in blue (dark gray)] which effectively “breaks” the system in two, we can observe the presence of dangling ends [shown in red (medium gray)] as well as isolated clusters homogeneously distributed over the entire network (shown in black). The situation becomes very different when we increase the value of the disorder parameter β . As shown in Fig. 1(b), the amount of dangling ends and isolated clusters in an OPC generated under moderate disorder conditions ($\beta = 6.0$) becomes significantly smaller than in the case of weak disorder. By increasing further the value of β , finally only the backbone

remains. Interestingly this backbone is identical for all values of β , while the entire set of blocked sites is highly dependent on the way disorder is introduced in the system.

The behavior shown in Fig. 1 is somehow related to the problem of minimum path in disordered landscapes [12]. In that case, the passage from weak to strong disorder in the energy distribution reveals a sharp crossover between self-affine and self-similar behaviors of the optimal path. In the strong disorder regime the energy of the minimum path is controlled by the energy of a single site. This situation occurs when the distribution of energies cannot be normalized, for instance, in the case of a power-law distribution, $P(\epsilon_i) \sim \epsilon_i^{-\alpha}$, for $\alpha \leq 1$. The parameter β alone, however, does not determine the limit between weak and strong disorder, since this property also depends significantly on the system size. More precisely, if β is sufficiently high, or the lattice size is sufficiently small, the sampling of the distribution near the cutoff region is not so relevant. For any practical purpose, this network is considered to be in the strong disorder regime, resulting in a self-similar type of scaling for the minimum path. By increasing the network size, we may reach the point where one should expect to start sampling larger energy values that are beyond the cutoff of the distribution. Above this scale, the system will return to the weak disorder regime, leading to a self-affine behavior for the minimum path. In this way we should expect an abrupt transition from the weak disorder regime, at small values of β , to the strong disorder regime, at large values of β [12].

In order to quantify macroscopically the effect of disorder on the geometry of the OPC, we performed computer simulations for 1000 realizations of lattices with sizes varying in the range $32 \leq L \leq 512$, and generated with different values of the disorder parameter β . In Fig. 2 we show for $\beta = 0.002$ that the average mass of the OPC backbone scales as $M_b \simeq L^{D_b}$, with an exponent $D_b = 1.22 \pm 0.02$ [16]. Surprisingly, this exponent value is statistically identical to the fractal dimension previously found for the optimal path line, but obtained under strong disorder [10–12]. Although both lines exhibit the same fractal dimension, they are not the same object. Their fractal dimension is also very close to that found for “strands” in invasion percolation (1.22 ± 0.01 [10]), and paths on minimum spanning trees (1.22 ± 0.01 [17]). In our case, however, it is important to note that the value of D_b reflects a highly nonlocal property of the system that is intrinsically associated with the iterative process involved in the OPC calculation. The removal of the highest energy site in one step can result in a global change of the path, and potentially any site can be removed in the following step. Also shown in Fig. 2 is the mass of the OPC fracture in weak disorder, which consists of both the backbone and its dangling ends. While the crack itself grows as a power law with size, $M_f \simeq L^{D_f}$, with an exponent $D_f = 1.59 \pm 0.02$, the total mass of blocked sites (crack and isolated

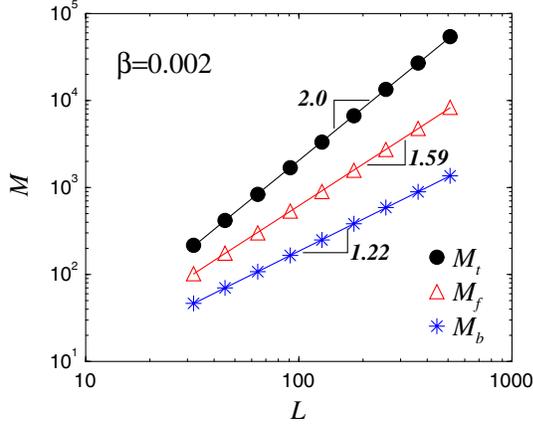


FIG. 2 (color online). Logarithmic dependence on size of the mass of all blocked sites M_t (circles) forming the OPC, the cluster of all sites in the fracture M_f (triangles), and the backbone mass M_b of the OPC that divides the system in two (stars), for $\beta = 0.002$. The system is considered to be in the weak disorder regime for this value of β and this range of system sizes. The three solid lines are the least-squares fits to the data of power-laws, $M_t \simeq L^{D_t}$, $M_f \simeq L^{D_f}$ and $M_b \simeq L^{D_b}$, with exponents $D_t = 2.00 \pm 0.01$, $D_f = 1.59 \pm 0.02$, and $D_b = 1.22 \pm 0.02$, respectively.

clusters), however, is a constant fraction of the total mass of the system, i.e., $M_t \simeq L^2$.

In Fig. 3, the results obtained for $\beta = 6.0$ clearly indicate the transition from strong to weak disorder regimes

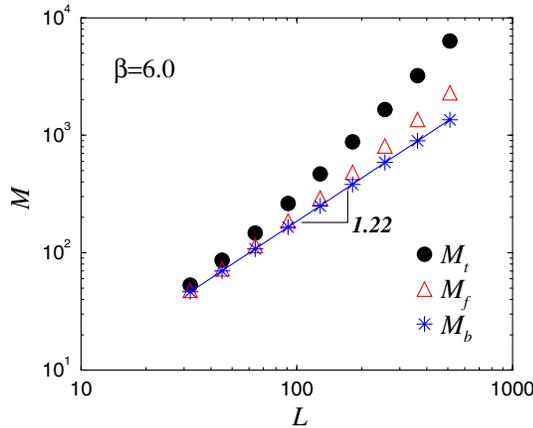


FIG. 3 (color online). Log-log plot of the masses M_t (circles), M_f (triangles) and M_b (stars) against system size L for $\beta = 6.0$. For this intermediate value of β , we can clearly identify the crossover from strong to weak disorder depending on the system scale. For small lattices, the system operates under strong disorder conditions. As a consequence, most of the blocked sites lie on the fracture path and the three masses M_t , M_f and M_b are identical. In this limit $M_t = cL^{1.22}$, with $c = 0.64$. As the system size increases, one reaches the weak disorder regime, and the three curves split apart. At larger scales, we should recover the same power-law behaviors found for sufficiently low values of β , as shown in Fig. 2.

by systematically increasing the size of the system. As already mentioned, the stronger the disorder in the system (low L or high β), the smaller is the number of final blocked sites that also become more and more localized in a singly-connected crack line. Precisely, in the limit of very strong disorder, we obtain that only the OPC backbone mass M_b remains, i.e., $M_t \rightarrow M_b$ and $M_f \rightarrow M_b$, scaling in the same way as in the weak disorder limit, namely, $M_b \simeq L^{D_b}$, with $D_b = 1.22 \pm 0.02$. As shown in Fig. 1, the backbone is indeed invariant under the change of β . By increasing the value of L , we observe a gradual departure of M_t and M_f from this behavior to their respective scaling laws in weak disorder (high L or low β), as displayed in Fig. 2.

The transition from weak to strong disorder is better illustrated by the results depicted in the inset of Fig. 4. There we plot the density of all blocked sites ρ_t at the end of the process as a function of the parameter β . The curves exhibit three different regimes, depending on the value of β . For small values, $\beta < 1$, the density saturates to a fixed

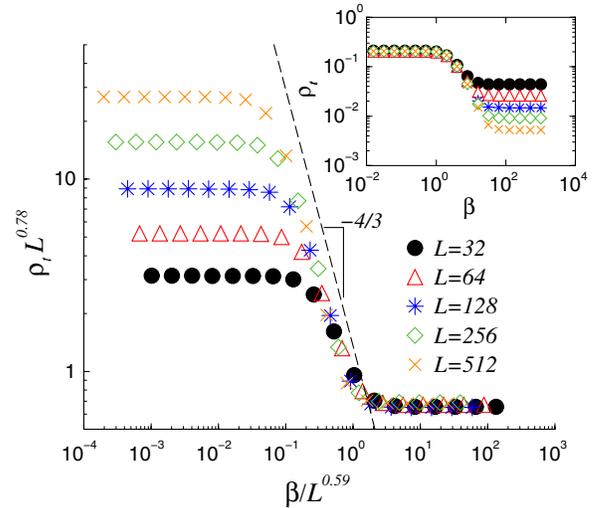


FIG. 4 (color online). Transition from weak to strong disorder in the OPC model. In these curves we plot the density of all blocked sites ρ_t at the end of the process when the top of the system disconnects from the bottom. These curves present three distinct regimes. For weak disorder $\beta < 1$ one sees a saturation in the density in a value around $\rho_t \approx 0.22$. For intermediate values one sees the density decreasing with the disorder parameter β , however, there is no dependence on the system size. For larger values of β we see the density saturating again, but now to a value that depends on the system size L . This last regime is the one that characterizes the strong disorder regime. The saturated density in this regime depends on the system size as L^{D_b-2} , where $D_b \approx 1.22$ is the fractal dimension of the OPC backbone. For each system size, we observe the transition to the strong disorder regime at a different value of the parameter β_\times . From the collapse shown in the inset, a nontrivial dependence is revealed between the onset of the transition and the system size, $\beta_\times \sim L^{0.59}$.

value. For larger values, the density decays as a power-law $\rho_t \sim \beta^{-\theta}$, with an exponent $\theta \approx 4/3$. Both regimes, saturation and power-law decay, are still in weak disorder. For finite lattices, the curves present another crossover to a minimum density that is now dependent on the system size. This second crossover, β_\times , which indicates the transition to strong disorder, should depend on the system size in such way that an infinite system is in weak disorder for any finite value of β . For large enough values of β , in the strong disorder regime, the density reaches a minimum value when all the blocked sites lie on the fracture dividing the system. As shown in Fig. 2, the mass of this fracture scales as L^{D_b} . At the onset of the transition, this power-law behavior crosses over to a scale dependent value. Thus, $\beta_\times^{-\theta} \sim L^{D_b-2}$, or $\beta_\times \sim L^\alpha$, with $\alpha = (2 - D_b)/\theta$. The collapse of the results for intermediate and large values of β obtained using $D_b = 1.22$ and $\alpha = 0.59$ shown in the main plot of Fig. 4 is consistent with this analysis. It is interesting to mention that, similar to the results for the OPC, the transition from weak to strong disorder of the first optimal path also shows three different regimes.

Concluding, we discover that for all disorders the line along which all minimum energy paths fracture is a fractal of dimension 1.22 in two dimensions. The role of disorder and system size can be fully cast in a crossover scaling law for the total number of blocked sites. Our model poses new challenges also from the theoretical point of view since the numerical resemblance of our fractal to the one of domain walls and optimal paths in the strong disorder limit [10] seems to hint towards some deeper relation. Potential applications of our model include for instance the optimal transportation of a military convoy crossing a landscape under attack, and the electrical breakdown of varistor ceramics. In the last case, the interplay between nonlinear conductivity and disorder can lead to strong current localization. Finally, it could be certainly interesting to study also the influence of the dimension of the system and of the substrate topology on our model by a generalization to three-dimensional systems or complex networks.

We thank the Brazilian agencies CAPES, CNPq, FUNCAP and FINEP, the National Institute of Science and Technology for Complex Systems in Brazil, and the

ETH Competence Center CCSS in Switzerland for financial support. The authors would like to thank Cristian Moukarzel for valuable discussions.

-
- [1] M. Mezard, G. Parisi, N. Sourlas, G. Toulouse, and M. Virasoro, Phys. Rev. Lett. **52**, 1156 (1984).
 - [2] A. Ansari, J. Beredzen, S.F. Bowne, H. Fraunfelder, I.E.T. Iben, T.B. Sauke, E. Shyamsunder, and R.D. Young, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **82**, 5000 (1985).
 - [3] D.A. Huse and C.L. Henley, Phys. Rev. Lett. **54**, 2708 (1985); D.A. Huse, C.L. Henley, and D.S. Fisher, Phys. Rev. Lett. **55**, 2924 (1985).
 - [4] S. Kirkpatrick and G. Toulouse, J. Phys. (Paris) **46**, 1277 (1985).
 - [5] M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **56**, 889 (1986); M. Kardar and Y.-C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **58**, 2087 (1987).
 - [6] J. Kertesz, V.K. Horvath, and F. Weber, Fractals **1**, 67 (1993).
 - [7] E. Perlsman and M. Schwartz, Europhys. Lett. **17**, 11 (1992); Physica A (Amsterdam) **234**, 523 (1996).
 - [8] S. Havlin, L.A. Braunstein, S.V. Buldyrev, R. Cohen, T. Kalisky, S. Sreenivasan, and H.E. Stanley, Physica (Amsterdam) **346A**, 82 (2005).
 - [9] N. Schwartz, A.L. Nazaryev, and S. Havlin, Phys. Rev. E **58**, 7642 (1998).
 - [10] M. Cieplak, A. Maritan, and J.R. Banavar, Phys. Rev. Lett. **72**, 2320 (1994); M. Cieplak, A. Maritan, and J.R. Banavar, Phys. Rev. Lett. **76**, 3754 (1996).
 - [11] M. Porto, S. Havlin, S. Schwarzer, and A. Bunde, Phys. Rev. Lett. **79**, 4060 (1997).
 - [12] M. Porto, N. Schwartz, S. Havlin, and A. Bunde, Phys. Rev. E **60**, R2448 (1999).
 - [13] E.W. Dijkstra, Numer. Math. **1**, 269 (1959).
 - [14] L.A. Braunstein, S.V. Buldyrev, S. Havlin, and H.E. Stanley, Phys. Rev. E **65**, 056128 (2002).
 - [15] D. Stauffer and A. Aharony, *Introduction to Percolation Theory* (Taylor and Francis, London, 1994).
 - [16] The roughness exponent found for the OPC backbone is equal to unity within the statistical error bars, supporting the fact that this is indeed a self-similar object and not self-affine for intermediate to large scales.
 - [17] R. Dobrin and P.M. Duxbury, Phys. Rev. Lett. **86**, 5076 (2001).



UBIQUITOUS FRACTAL DIMENSION OF OPTIMAL PATHS

By José S. Andrade, Jr., Saulo D.S. Reis, Erneson A. Oliveira, Eric Fehr, and Hans J. Herrmann

The fractal dimension of an optimal path in the strong disorder limit could be a fundamental property of many natural systems.

Searching for and characterizing a disordered landscape's optimal path is an important problem in theoretical and computational physics due to its often intimate association with relevant scientific and technological applications.¹⁻⁴ In physics, the optimal path through a random energy landscape is important in explaining problems ranging from flow through disordered porous media to transport network navigation. In the latter case, the optimal path is crucial because it represents precisely the most efficient navigation strategy if global information about the underlying network topology is available.

As we describe here, the literature shows that the fractal dimension of an optimal path in the strong disorder limit appears to be a ubiquitous exponent for many physical models and related natural systems. We present detailed descriptions of three recent applications in which interfaces generated on 2D landscapes possess the same optimal path fractal dimension in the strong disorder limit. As our discussion shows, this fact poses new challenges to the field because the resemblance of all these fractal dimensions seems to hint at some deeper relation among the associated physical systems. This should be further investigated in the future from both theoretical and experimental points of view.

Optimal Path Issues

We start by defining a disordered landscape's optimal path. On an n -dimensional lattice, we assign to each site i a given energy value ε_i according to a probability distribution $P(\varepsilon)$. We then define the energy of any system path as the sum of all of its sites' energies. In particular, the optimal path between lattice sites i and j is the one among all paths connecting these two sites that has the smallest sum of all constituting sites' energies. This definition is somewhat similar to the definition of the shortest path in a network.⁵ In the well-known *brachistochrone problem* of classical mechanics, for example, the optimal path is related to the minimum energy path—that is, the path joining two points at which a falling particle travels the fastest from a higher to a lower point. In contrast, the shortest path of the brachistochrone problem is the straight line joining the two points—that is, the Euclidean space's geodesic.

Research has shown that optimal paths extracted from energy landscapes generated with weak disorder are self-affine and belong to the same universality class of directed polymers.⁶ In contrast, the strong disorder or ultrametric limit as studied by Marek Cieplak and his colleagues revealed the self-similar nature of the optimal path on 2D and 3D lattices with fractal dimensions given by $D_{opt} \approx 1.22$ and 1.43, respectively.³ Surprisingly, the exponent value in two

dimensions is statistically identical to the fractal dimension found for disordered polymers ($\approx 1.2^3$), for strands in invasion percolation (IP; 1.22 ± 0.01^7), and for paths on minimum spanning trees (1.22 ± 0.01^8).

In the Cieplak study, they determine the fractality of the strong disorder limit's optimal path by associating the optimal path line with the minimum energy path on an isotropic two-dimensional lattice; this lattice is constructed by ranking bonds according to their energy values and removing the highest rank bonds thereafter. If removing a bond breaks the lattice connection, they keep the bond and remove the next ranked bond (if possible) and so on. Their results show that the optimal path ℓ scales with the lattice size L as $\ell \sim L^{D_{opt}}$ with $D_{opt} \approx 1.22$, defining a new universality class.

David Wilkinson and Jorge Willemssen introduced the IP model and its variants and used them extensively to simulate a non-wetting fluid's displacement through a porous medium by injecting a wetting fluid with different viscosity.⁹ Such a model has been very efficient when the injection process is quasi-static—that is, when it's in low velocity regimes. They then describe the displacement phenomenon using a cluster's growth on a lattice, assuming that its border (perimeter) represents the separation interface between the two fluids. Given its applicability, researchers have widely investigated the IP model to

determine its basic properties and improve its predictions for key practical problems. Two common IP process models are

- the *IP with trapping* (TIP) model and
- the *non-trapping* IP (NTIP) model.

These two IP model variants have been the focus of intense research, particularly because they exhibit self-organization into critical states.^{10,11}

The TIP model was originally devised to describe the invasion process of incompressible fluids in disordered porous media. As a microscopic rule, pore invasion is forbidden by the incompressibility constraint when the invaded fluid is completely surrounded by the invading one. In contrast, in the NTIP model, the displaced fluid is considered infinitely compressible and the injected fluid can penetrate into the fluid targeted for displacement through any of the separation interface's regions.

The NTIP model is implemented in several steps. Initially, we obtain a random value p_i from a uniform distribution in the range $[0,1]$ and assign it to each network site i . At this point, the fluid to be displaced occupies all network pores, while the invading fluid is pushed through the inlet. Next, we search among the inlet's neighboring sites for the one carrying the smallest random number p . We invade this site and it becomes part of the region occupied by the invading fluid; we then update the list of sites eligible for invasion. The invasion process continues until the outlet is reached, when we can identify an invaded cluster providing global connection to the system.

In a later work, Cieplak and his colleagues introduced a novel

compressible IP model that forbids the occurrence of loops.⁷ Their results indicate that the IP strands have a fractal dimension of 1.22 in 2D and 1.43 in 3D. These strands, defined as the unique path that excludes dead ends from an arbitrary site to the central (injection) seed site, are therefore in the same universality class as optimal paths in the strong disordered limit.³ In two subsequent works, Markus Porto¹² and Stefan Schwarzer¹³ and their colleagues investigated other shared percolation process properties—beyond the self-similarity of TIP and NTIP clusters—including the shortest path between two points l , which should scale with the Euclidean distance r as $l \sim r^{D_{min}}$, where the

and subsequent re-crystallization processes that determine the multiple IP model's the continuous change of these self-similar structures. A similar situation is found in vulcanology: when magma is repeatedly injected through the same pathway, it always melts through the most recent formations to find its way out.¹⁵ For example, researchers have numerically investigated a pore structure's evolution after several invasion-frost-thaw events; the results indicate that the invasion clusters' fractal dimension varies with the number of invasion cycles if the porous pathway's structure is allowed to heal after each invasion occurs.¹⁶ In such situations—as well as in other cases of repeated

In the NTIP model, the displaced fluid is considered infinitely compressible and the injected fluid can penetrate into the fluid targeted for displacement through any of the separation interface's regions.

exponent D_{min} is the shortest path dimension D_{min} . From their numerical findings in 2D lattices—namely, $D_{min} \approx 1.13$ for NTIP, and $D_{min} \approx 1.21$ for TIP—it's possible to conclude that the shortest TIP path belongs to the same universality class as the optimal path in strong disordered energy landscapes.

Multiple Invasion Percolation

Under a different framework, Ascânio Araújo and his colleagues investigated a multiple IP model to simulate corrosion and intrusion processes¹⁴ Inspired by the fact that gem and ore veins are often produced by multiple intrusions of reacting fluids into a porous soil, they studied the dissolution

invasions of corroding, dissolving, or melting fluids into a strongly heterogeneous substrate^{17–19}—slowly consolidating matrix fractal patterns are created that reflect the material's history.

Given this, Araújo and his colleagues developed a model of multiple invasion to simulate how these patterns form and how their fractal dimension changes.¹⁴ In this model, the first invasion occurs within a short time (geologically speaking) and leaves behind a certain damaged region. Slowly, the material is again strengthened (through, for example, crystallization or other chemical processes) partly repairing the damaged region. Then, suddenly, due to a tectonic mechanism such as an

earthquake or volcanic activity, another invasion occurs. It will favorably follow along the solid's weakest regions, which typically correspond to previously damaged regions. The goal is to understand to which degree this reinvasion will either fully or only partially coincide with the first invasion. Araújo and his colleagues calculated the invaded region's fractal dimension for different stages of the multiple invasion process. Their results reveal that the critical exponents vary as a function of the generation number G ; that is, they vary with the number of invasions. Finally, and more importantly, they show evidence that the fractal dimension of the invaded cluster changes from 1.887 ± 0.002 to 1.217 ± 0.005 . Thus, the multiple

we can view each person's trajectory as one decided on an entirely selfish basis—that is, on the existence of a possible optimal path (defined in terms of time and distance between home and work) in the absence of traffic.

If we now assume that this optimal path is unique and can accommodate only a finite flux of cars, we certainly expect a traffic jam somewhere along this special route. As a consequence, many people already en route will try to deviate from this traffic jam, while others who are continuously leaving their houses (and are fully aware of this situation) will try to follow a possible next-to-optimal path. Another traffic jam will then be generated and so on and so forth.

Once we determine the first optimal path connecting the lattice bottom and top, we search for its site with the highest energy. This becomes the first blocked site.

invasion process seems to display a continuous transition from the NTIP to the optimal path (under strong disorder) universality classes.

Optimal Path Cracks

A relevant application for optimal paths comes from a transportation network problem. Suppose that in a typical industrial city, a large fraction of the working population must, during every normal weekday, move by car from a residential zone to the city's industrial pole. To reach their work places, people must cross the city center (where most commercial establishments are located) through an intricate transportation network of streets, avenues, roads, and motorways. Following Wardrop's principle,²⁰

Two questions naturally arise from this daily problem:

- How and when will the transportation network eventually collapse?
- How will the network's topology and inhomogeneity affect its performance?

In a recent study, several of us provided a novel modelization for this complex problem that captures its essential features and offers insight on the statistical physics of these important questions.²¹ For completeness, we now describe this optimal path crack (OPC) model in detail.

The OPC substrate is a square lattice of size L with fixed boundary conditions at the top and bottom,

and periodic boundary conditions in the transversal direction. As noted earlier, we define the optimal path as the one among all paths connecting the lattice's bottom to its top with the smallest sum over all site energies. We introduce disorder in our model by assigning each site i an energy value $\varepsilon_i = \exp[\beta(p_i - 1)]$, where p_i is a random variable uniformly distributed in the interval $[0, 1]$ and β is a positive control parameter. This transformation is equivalent to choosing ε 's values from the power-law distribution $P(\varepsilon_i) \sim 1/\varepsilon_i$ subjected to a maximum cutoff of $\varepsilon_{max} = \varepsilon^\beta$. Such a cutoff's existence makes the hyperbolic distribution normalizable for any finite value of β . Without losing generality, because we consider only positive p_i values, the Dijkstra algorithm becomes a suitable tool for finding the optimal path.²²

We form the OPC as follows. Once we determine the first optimal path connecting the lattice bottom and top, we search for its site with the highest energy. This becomes the first blocked site—that is, it can no longer be part of any path. This is equivalent to imposing an infinite energy on the site. Next, we calculate the optimal path among the lattice's remaining accessible sites, remove its highest energy site, and so on.

As Figure 1 shows, we continue the process iteratively until the system is disrupted and no remaining paths connect bottom to top. This would be analogous to the transportation system's complete collapse.

Figures 1a, 1c, and 1e show typical optimal paths generated at the beginning and end of the OPC process for $\beta = 1.0, 10,$ and 100 , respectively. In Figure 1b, we can categorize the blocked sites that constitute the OPC in a typical random landscape generated under weak disorder conditions

($\beta = 1.0$) into three distinct types: the OPC's loopless backbone (blue), the multiple ends that dangle off it (red), and the network's numerous isolated clusters (black). As Figure 1d shows, moderate disorder conditions ($\beta = 10$) with a preserved OPC backbone substantially reduces the number of dangling ends and isolated clusters. Under very strong disorder ($\beta = 100$), only the OPC backbone remains (Figure 1f).

This behavior is closely related to the problem of minimum path in disordered landscapes.³ In the strong disorder regime, the minimum path's energy is controlled by a single site's energy. This situation occurs when we can't normalize the energy distribution—as in the case of a power-law distribution, $P(\varepsilon_i) \sim \{\varepsilon_i^{-\alpha}\}$, for $\alpha \leq 1$. The parameter β alone, however, doesn't determine the limit between weak and strong disorder, because system size is also a significant factor. More precisely, if β is sufficiently high, or the lattice size is sufficiently small, the distribution sampling near the cutoff region is less relevant. For any practical purpose, this network is considered in the strong disorder regime, resulting in a self-similar type of scaling for the minimum path. By increasing the network size, we might reach the point where we'd expect to start sampling larger energy values that are beyond the distribution's cutoff.

Above this scale, the system will return to the weak disorder regime, leading to a self-affine minimum path behavior; we'd thus expect an abrupt

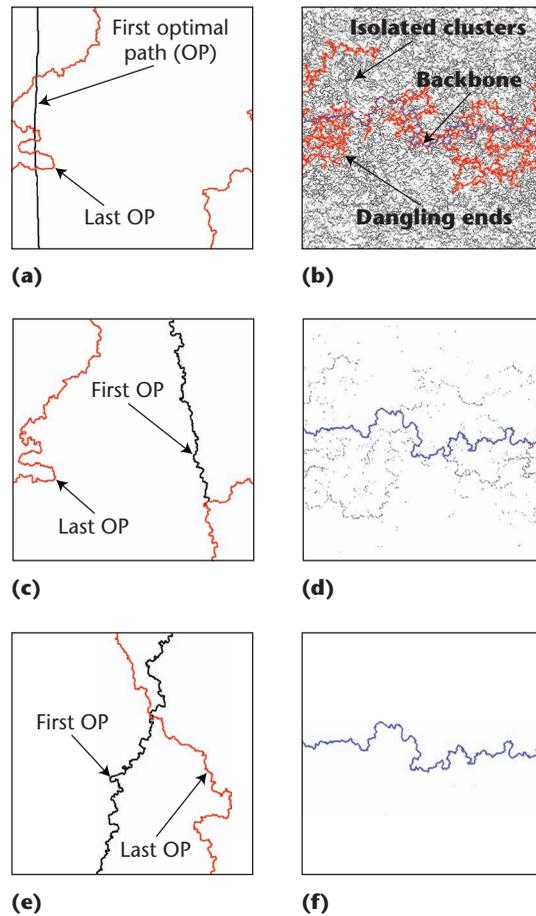


Figure 1. Typical realizations of the optimal path crack (OPC) model on a 512×512 lattice. In (a), (c), and (e), typical optimal paths generated at the beginning and end of the OPC process are shown for $\beta = 1.0, 10$, and 100 , respectively. (b) The resulting spatial distribution of blocked sites that constitutes the OPC in a typical random landscape generated under weak disorder conditions ($\beta = 1.0$). This OPC structure has three basic elements: the fracture's loopless backbone (blue), which effectively "breaks" the system in two; dangling ends (red); and isolated clusters homogeneously distributed over the entire network (black). The situation changes dramatically when the disorder parameter β 's value increases, as in (d), where the amount of dangling ends and isolated clusters in a OPC generated under moderate disorder conditions ($\beta = 6.0$) becomes significantly smaller than in the case of weak disorder. By increasing further the value of β , finally only the backbone remains, as in (f). Interestingly, this backbone is identical for all β values, while the entire set of blocked sites is highly dependent on how we introduce disorder into the system.

transition from the weak disorder regime, at small values of β , to the strong disorder regime, at large values of β .^{3,23}

Figure 2's inset shows that, for $\beta = 0.002$, the average mass of the OPC backbone scales is $M_b \sim L^{D_b}$, with an exponent $D_b = 1.22 \pm 0.02$. Once more, this exponent value is statistically identical to the fractal dimension previously found for the optimal path line under strong disorder.⁶ In this case, however, D_b 's value reflects a highly nonlocal system property that's intrinsically associated with the iterative process involved in the OPC calculation. As Figure 2 also shows, the OPC fracture's mass—which consists of both the backbone and its dangling ends—is in weak disorder. Although the crack itself grows as a power-law with size $M_f \sim L^{D_f}$ with an exponent $D_f = 1.59 \pm 0.02$, the total mass of blocked sites (crack and isolated clusters) is a constant fraction of the system's total mass—that is, $M_t \sim L^2$.

As Figure 2 shows, the results obtained for large values of β indicate that the stronger the system's disorder (low L or high β), the fewer the final blocked sites—that is, the OPC becomes increasingly localized in a singly connected crack line. Specifically, in the limit of very strong disorder, we find that only the OPC backbone mass M_b remains—that is, $M_t \rightarrow M_b$ and $M_f \rightarrow M_b$ —scaling in the same way as in the weak disorder limit ($M_b \sim L^{D_b}$, with $D_b = 1.22 \pm 0.02$).

Fractal Watersheds

A watershed line is another example in which the system's self-similar

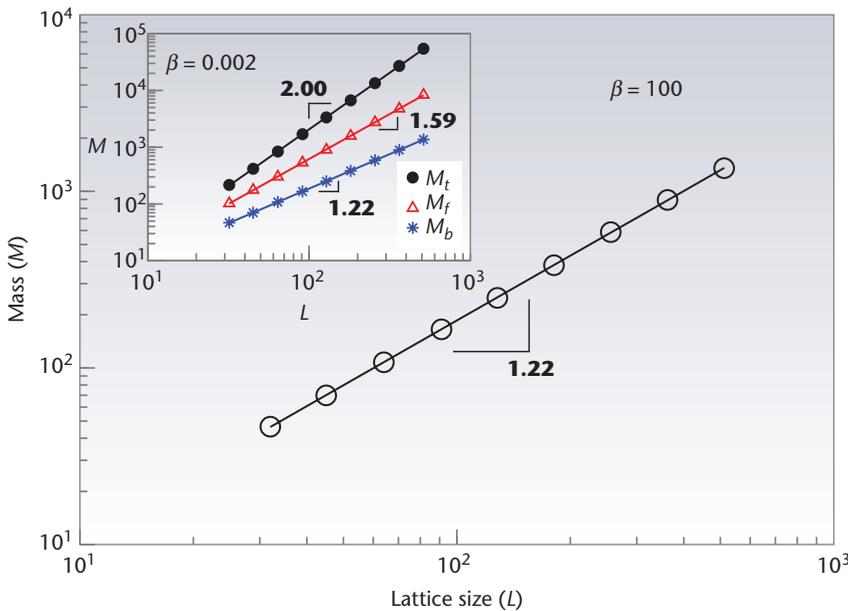


Figure 2. The effect of disorder on the optimal path crack (OPC) model’s geometry from simulations with 1,000 realizations of lattices and sizes varying in the range of $32 \leq L \leq 512$. Logarithmic dependence on the size L of the mass of all blocked sites M_t (circles) forming the OPC, the cluster of all sites in the fracture M_f (triangles), and the backbone mass M_b of the OPC that divides the system in two (stars) for $\beta = 0.002$. We consider the system in the weak disorder regime for this value of β and this range of system sizes. The three solid lines are the least-squares fits to the data of power-laws, $M_t \sim L^{D_t}$, $M_f \sim L^{D_f}$, and $M_b \sim L^{D_b}$, with exponents $D_t = 2.00 \pm 0.01$, $D_f = 1.59 \pm 0.02$, and $D_b = 1.22 \pm 0.02$, respectively. The inset shows the log-log plot of the masses M_t (circles), M_f (triangles) and M_b (stars) against system size L for $\beta = 6.0$. For this intermediate value of β , we can clearly identify the crossover from strong to weak disorder depending on the system scale. For small lattices, the system operates under strong disorder conditions. As a consequence, most of the blocked sites lie on the fracture path and the three masses M_t , M_f , and M_b are identical. As the system size increases, we reach the weak disorder regime and the three curves split apart. At larger scales, we should recover the same power-law behaviors found for sufficiently low values of β , as the main plot shows.

signature seems to fall in the same universality class as optimal paths in the strong disorder limit. Watersheds dividing adjacent water systems flowing into different seas have been used since ancient times to delimit boundaries. Border disputes between countries—such as between Argentina and Chile²⁴—have shown the importance of fully understanding a watershed’s subtle geometrical properties.

The watershed concept arises naturally in geomorphology, where it plays a fundamental role in areas such as water management, landslide, and flood prevention. Moreover, important applications can also be found in seemingly unrelated areas such as image processing and medicine. Slight

modifications of landscapes can produce large changes in the watershed and the effects can be highly nonlocal. Geographers and geomorphologists have studied watersheds extensively, but preliminary claims about fractality²⁵ have been restricted to small-scale observations and are therefore inconclusive. Despite the far-reaching consequences of scaling properties on watershed-related hydrological and political issues, researchers have dedicated few detailed numerical or theoretical studies to this subject.

Traditional cartographical methods for basin delineation have relied on manual estimation from iso-elevation lines and required considerable guesswork. Modern procedures are based upon

automatic processing of digital elevation map (DEM) or grayscale digital images, where gray intensity is transformed into height. A highly popular algorithm for watershed determination²⁶ uses rather complicated data structures and several passes over all pixels to calculate watersheds and is adequate for grayscale images (that is, for integer-height spaces). In a recent study, Eric Fehr and his colleagues investigated natural and synthetic watershed topology using novel numerical algorithms with highly improved efficiency.²⁷ Their results show that watersheds generated on large (10^8 sites) uncorrelated random landscapes are self-similar with fractal dimension $D_w = 1.211 \pm 0.001$. Once more, the exponent is close to the fractal dimension of optimal paths under strong disorder. We now show how one of Fehr’s two algorithms (the most efficient one) can calculate fractal watersheds.

First, let’s consider a DEM with sites i having heights h_i . For $k = 0, 1, \dots, N_{sinks}$, let *sink* S_k be the subset of the lattice sites, which have their heights at the minimal possible value (such as equal to zero). These sinks are the terrain’s natural water outlets (such as an ocean). We consider that, at each time step, water slowly flows to the lowest-lying site on a flooded region’s perimeter. If, when starting from i , sink S_k is flooded before any other, then we assign site i to sink S_k ’s *catchment basin*. Clearly, this procedure introduces a lattice sites classification because it subdivides the system into non-overlapping subsets whose union is the entire lattice. Watersheds are precisely the lines separating neighboring basins.

In Fehr and colleague’s *IP-based algorithm*,²⁷ a cluster starts from site i and (like IP) grows by adding, at each

step, the smallest-height site on its perimeter until the first sink is reached. As Figure 3 shows, by noting that all sites occupied by a cluster when the sink is reached also drain to that sink, Fehr and colleagues devised a much more efficient procedure that visits each site only once and can be easily implemented. Their IP-based algorithm is fast enough to let us determine watersheds on lattices comprising 10^8 sites using a few CPU seconds on a workstation. In addition, the researchers calculated natural watersheds from landscapes of mountainous regions such as the Alps and Himalayas. They showed that these watersheds also display self-similarity, but with slightly smaller fractal dimensions— $D_w^{Al} = 1.10 \pm 0.01$ and $D_w^{Hi} = 1.11 \pm 0.01$ in the Alps and Himalayas, respectively. They then explained the differences between the fractal dimensions by the presence of long-range correlations in real systems.

As our brief literature review shows, the fractal dimension of an optimal path in the strong disorder limit often appears in statistical physics models and therefore might represent a fundamental property for many different natural systems. To emphasize this common behavior and further support our hypothesis that all such systems fall in the same universality class, we presented three recent model applications in statistical physics; however, additional work in 3D and higher dimensions are needed to numerically confirm our hypothesis.

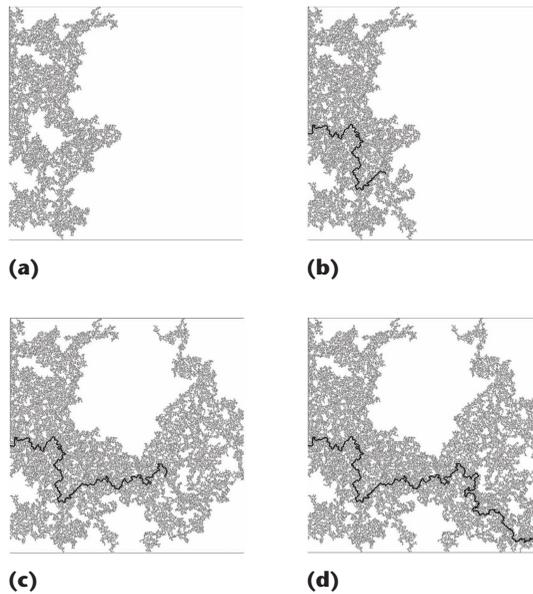


Figure 3. Three snapshots obtained at different stages from the invasion percolation (IP) algorithm developed by Eric Fehr and his colleagues to determine a typical watershed line (light gray) on an uncorrelated random landscape.²⁷ The algorithm visits only the sites in black; like IP, it starts a cluster from site i and grows it by adding, at each step, the smallest-height site on its perimeter until the first sink is reached. This procedure is somehow related to Prim's algorithm for growing minimum spanning trees (MST).⁸ The process is rather inefficient because, in principle, a new cluster must be grown from each site i . Noting that all sites occupied by a cluster when the sink is reached also drain to that sink, Fehr and his colleagues devised a more efficient algorithm that visits each site only once.²⁷ An additional modification permits an even more efficient algorithm. First, we test a line of points connecting two oceans by growing a cluster from each of them and determining where the drainage direction changes. This identifies a point of the water divide. Afterward, we test only points in that divide's vicinity. This procedure's advantage is that there are typically large parts of the terrain that the algorithm doesn't need to visit to determine the entire divide.

Acknowledgments

We thank the Brazilian agencies Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP) and Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP), and the Eidgenössische Technische Hochschule (ETH) Competence Center for "Coping with Crises in Complex Socio-Economic Systems"

(CCSS) in Switzerland for financial support.

References

1. M. Mezard et al., "Nature of the Spin-Glass Phase," *Physical Rev. Letters*, vol. 52, no. 13, 1984, pp. 1156–1159.
2. S. Kirkpatrick and G. Toulouse, "Configuration Space Analysis of Traveling Salesman Problems," *J. Physique*, vol. 46, no. 8, 1985, pp. 1277–1292.
3. M. Cieplak, A. Maritan, and J.R. Banavar, "Optimal Paths and Domain Walls in the Strong Disorder Limit," *Physical Rev. Letters*, vol. 72, no. 15, 1994, pp. 2320–2323.
4. S. Havlin et al., "Optimal Path in Random Networks with Disorder: A Mini Review," *Physica A*, vol. 346, no. 1, 2005, pp. 82–92.
5. D. Stauffer and A. Aharony, *Introduction to Percolation Theory*, Taylor and Francis, 1994.
6. N. Schwartz, A.L. Nazaryev, and S. Havlin, "Optimal Path in Two and Three Dimensions," *Physical Rev. Letters*, vol. 58, no. 6, 1998, pp. 7642–7644.
7. M. Cieplak, A. Maritan, and J.R. Banavar, "Invasion Percolation and Eden Growth: Geometry and Universality," *Physical Rev. Letters*, vol. 76, no. 20, 1996, pp. 3754–3757.
8. R. Dobrin and P.M. Duxbury, "Minimum Spanning Trees on Random Networks," *Physical Rev. Letters*, vol. 86, no. 22, 2001, pp. 5076–5079.
9. D. Wilkinson and J.F. Willemsen, "Invasion Percolation: A New Form of Percolation Theory," *J. Physics A*, vol. 16, no. 14, 1983, pp. 3365–3369.
10. P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, "Self-Organized Criticality: An Explanation of the $1/f$ Noise," *Physical*

- Rev. Letters*, vol. 59, no. 4, 1987, pp. 381–384.
11. A.P. Sheppard et al., "Invasion Percolation: New Algorithms and Universality Classes," *J. Physics A*, vol. 32, no. 49, 1999, pp. 521–529.
 12. M. Porto et al., "Optimal Path in Strong Disorder and Shortest Path in Invasion Percolation with Trapping," *Physical Rev. Letters*, vol. 79, no. 21, 1997, pp. 4060–4062.
 13. S. Schwarzer, S. Havlin, and A. Bunde, "Structural Properties of Invasion Percolation with and without Trapping: Shortest Path and Distributions," *Physics Rev. E*, vol. 59, no. 3, 1999, pp. 3262–3269.
 14. A.D. Araújo, J.S. Andrade, and H.J. Herrmann, "Multiple Invaded Consolidating Materials," *Physics Rev. E*, vol. 70, no. 6, 2004, 066150; <http://pre.aps.org/pdf/PRE/v70/i6/e066134>.
 15. E. Luijten, H.W.J. Blöte, and K. Binder, "Crossover Scaling in Two Dimensions," *Physics Rev. E*, vol. 56, no. 6, 1997, pp. 6540–6556.
 16. E. Salmon, M. Ausloos, and N. Vandewalle, "Aging of Porous Media Following Fluid Invasion, Freezing, and Thawing," *Physics Rev. E*, vol. 55, no. 6, 1997, pp. 6348–6351.
 17. M.T. Einandi, "6-km Vertical Cross Section Through Porphyry Copper Deposits, Yerington District, Nevada: Multiple Intrusions, Fluids, and Metal Sources," Int'l Exchange Lecture, Soc. Economic Geologists, June 1994; <http://pangea.stanford.edu/research/ODEX/marco-yerington.html>
 18. B.J. Wanamaker, T.F. Wong and B. Evans, "Decrepitation and Crack Healing of Fluid Inclusions in San Carlos Olivine," *J. Geophysical Research*, vol. 95, no. B10, 1990, pp. 15623–15641.
 19. D.L. Turcotte, *Fractals and Chaos in Geophysics*, Cambridge Univ. Press, 1992.
 20. H. Youn, M.T. Gastner, and H. Jeong, "Price of Anarchy in Transportation Networks: Efficiency and Optimality Control," *Physical Rev. Letters*, vol. 101, no. 12, 2008; doi:10.1103/PhysRevLett.101.128701.
 21. J.S. Andrade et al., "Fracturing the Optimal Paths," *Physical Rev. Letters*, vol. 103, no. 22, 2009; doi:10.1103/PhysRevLett.103.225503.
 22. E.W. Dijkstra, "A Note on Two Problems in Connexion with Graphs," *Numerische Mathematik*, vol. 1, 1959, pp. 269–271.
 23. M. Porto et al., "Optimal Paths in Disordered Media: Scaling of the Crossover from Self-Similar to Self-Affine Behavior," *Physics Rev. E*, vol. 60, no. 3, 1999, pp. R2448–R2451.
 24. Reports of Int'l Arbitral Awards, *The Cordillera of the Andes Boundary Case (Argentina, Chile)*, United Nations Treaty Collection, 2006; http://untreaty.un.org/cod/riaa/cases/vol_IX/29-49.pdf.
 25. S.P. Breyer and R.S. Snow, "Drainage Basin Perimeters: A Fractal Significance," *Geomorphology*, vol. 5, no. 1–2, 1992, pp. 143–157.
 26. L. Vincent and P. Soille, "Watersheds in Digital Spaces: An Efficient Algorithm Based on Immersion Simulations," *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 13, no. 6, 1991, pp. 583–598.
 27. E. Fehr et al., "New Efficient Methods for Calculating Watersheds," *J. Statistical Mechanics*, vol. 2009, Sept. 2009, P09007; doi:10.1088/1742-5468/2009/09/P09007.

José S. Andrade, Jr., is a professor in the Department of Physics Department of Universidade Federal do Ceará. His research interests include statistical physics, transport phenomena, and complex systems. Andrade has a PhD in chemical engineering from Universidade Federal do Rio de Janeiro. He is a member of the Brazilian

Physics Society. Contact him at soares@fisica.ufc.br.

Saulo D.S. Reis is a PhD student in the Department of Physics at the Universidade Federal do Ceará. His research interests include statistical mechanics, percolation theory, and the structure and functionality of complex networks. Reis has an MS in physics from Universidade Federal do Ceará. Contact him at saulo@fisica.ufc.br.

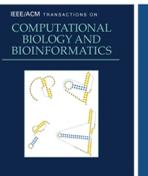
Erneson A. Oliveira is a PhD student in the Department of Physics at the Universidade Federal do Ceará. His research interests include fractals, the percolation process, and complex systems. Oliveira has an MSc in physics from Universidade Federal do Ceará. He is a member of the Brazilian Physics Society. Contact him at erneson@fisica.ufc.br.

Eric Fehr is a PhD student at the Institute of Building Materials at the Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich. His research interests include statistical properties of watersheds, corrections-to-scaling for high-precision estimates of scaling exponents, and cell migration in wound healing. Fehr has an MS ETH in theoretical physics from ETH Zurich. Contact him at ericfehr@ethz.ch.

Hans J. Herrmann is a professor at the Institute of Building Materials at the Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich. His research interests include statistical physics, computational physics, granular matter, and complex systems. Herrmann is a Guggenheim fellow, a member of the Brazilian Academy of Science, and a Max-Planck prize recipient. Contact him at hans@ifb.baug.ethz.ch.

 Selected articles and columns from IEEE Computer Society publications are also available for free at <http://ComputingNow.computer.org>.

13
magazines



Subscribe NOW for 2011

DEADLINE 28 FEB 2011



ONLINE PLUS™
publishing evolved

Three journals offer this new hybrid publishing model. Get online access, plus an abstract book and an interactive CD containing complete papers along with all of the supplemental files.

New in 2011

IEEE Computer Society Digital Library

Includes access to all periodicals shown above and *Computer* magazine, plus over 3,800 conference publications.

Order Full-Year subscriptions by 28 Feb 2011

NON-MEMBERS: Join IEEE Computer Society at www.computer.org/join for the best subscription rates. For non-member subscription rates, go to www.computer.org/portal/web/publications/nonmembersub

MEMBERS: You must renew your IEEE Computer Society membership for 2011 before ordering a subscription. Renew online at www.computer.org/nenewnow. Or call IEEE Customer Service +1 800 678 4333 ext. 2. For other promotion questions, email help@computer.org or call IEEE Computer Society at +1 800 272 6657 or +1 714 821 8380. Membership includes monthly issues of *Computer* magazine.

For fastest service, subscribe online at www.computer.org/portal/web/publications/membersub

Optimal-path cracks in correlated and uncorrelated lattices

E. A. Oliveira,^{1,*} K. J. Schrenk,^{2,†} N. A. M. Araújo,^{2,‡} H. J. Herrmann,^{1,2,§} and J. S. Andrade Jr.^{1,2,||}

¹*Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará, Campus do Pici, 60451-970 Fortaleza, Ceará, Brazil*

²*Computational Physics for Engineering Materials, IfB, ETH Zurich, Schafmattstrasse 6, CH-8093 Zurich, Switzerland*

(Received 31 January 2011; published 18 April 2011)

The optimal path crack model on uncorrelated surfaces, recently introduced by Andrade *et al.* [*Phys. Rev. Lett.* **103**, 225503 (2009)], is studied in detail and its main percolation exponents computed. In addition to $\beta/\nu = 0.46 \pm 0.03$, we report $\gamma/\nu = 1.3 \pm 0.2$ and $\tau = 2.3 \pm 0.2$. The analysis is extended to surfaces with spatial long-range power-law correlations, where nonuniversal fractal dimensions are obtained when the degree of correlation is varied. The model is also considered on a three-dimensional lattice, where the main crack is found to be a surface with a fractal dimension of 2.46 ± 0.05 .

DOI: [10.1103/PhysRevE.83.046113](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.83.046113)

PACS number(s): 62.20.mm, 64.60.ah, 64.60.al

I. INTRODUCTION

Finding the optimal path between two points in a disordered system is a relevant challenge for science and technology [1–11]. This optimization problem is present in our daily lives when, for example, we make use of the *global positioning system* (GPS) to trace the best route to arrive at our destination. This problem, however, is not only relevant for human transportation. In materials science, the characterization of the optimal path is of extreme importance to study fractures, polymers in random environments, and transport in porous media [12]. If intensively used, this path is prone to fail, and a new path needs to be found. Studying how the successive paths evolve until the final configuration—where connectivity is no longer possible—is a challenge in itself which we address in this work.

Recently, Andrade *et al.* [13] introduced a new model, named optimal-path crack (OPC), to study the evolution of successive optimal paths under constant failure. They have shown that, if a disordered energy landscape is considered, and each optimal path fails at its maximum energy site, the cracking process leads to a configuration where no more paths can be found. For uncorrelated systems, regardless the degree of disorder, the shortest path in the main crack—the minimal one to interrupt the connectivity—is always a self-similar object with a fractal dimension of 1.22 ± 0.02 . This fractal dimension has been reported in several different systems such as, e.g., the watershed line [14] and the perimeter of the percolative cluster at a discontinuous transition [15]. In this work, we first study in detail the properties of the OPC in uncorrelated lattices. The fractal dimensions are accurately obtained and, being a percolationlike process, the main critical exponents of percolation are computed for the crack at the final adsorbing state [16,17]. Besides the previously reported value of β/ν , in this work we show that $\gamma/\nu = 1.3 \pm 0.2$ and the Fisher exponent is $\tau = 2.3 \pm 0.2$. We then calculate and discuss the main properties of the model in three dimensions.

The interplay between correlation and randomness lies at the very core of emergent phenomena. Here we also extend the study of the OPC to correlated lattices. As in many previous studies [18–27], spatial long-range correlated energy distributions on the lattice are accessed by fractional Brownian motion (FBM) [28]—a generalized version of the classical Brownian motion, introduced by Mandelbrot and Ness [29]—where the degree of correlation between the successive steps can be tuned.

The paper is organized as follows. In Sec. II the OPC model is revised and its extension to correlated lattices is introduced. The results for uncorrelated lattices, in the weak and strong disorder regime, are presented and discussed in Sec. III, together with the main results for the three-dimensional (3D) system. The behavior of the OPC in correlated lattices is analyzed in Sec. IV. We leave the final remarks for Sec. V.

II. MODEL AND DEFINITIONS

A. The optimal path

The OPC is obtained by systematically interrupting the optimal path (OP) on a random landscape.

For simplicity, let us consider a simple square lattice of linear size L where an energy $\varepsilon_i \geq 0$ is assigned to every site. The energy of a path in a system is the sum over the energy of all sites in the path. The optimal path is the one, among all paths connecting two sites—e.g., the bottom and the top of the lattice—with the lowest energy. In the limit where all sites have the same energy, the OP is a straight line with mass (number of sites) $M_{op} = L$.

When the energies are randomly distributed, the OP is, in general, not a straight line—its mass is larger or equal to L —and its properties depend on the energy distribution [30,32–34]. In this work we take two energy distributions: uniform and infinite disorder (power law with exponent -1). In the former case, the mass of the OP, M_{op} , scales linearly with the system size as seen in Fig. 1, while this is not the case in the infinite disorder limit.

When the special case of a power-law distribution with exponent -1 is considered,

$$p(\varepsilon_i) \propto \frac{1}{\varepsilon_i}, \quad (1)$$

*erneson@fisica.ufc.br

†jschrenk@ethz.ch

‡nuno@ethz.ch

§hans@ifb.baug.ethz.ch

||soares@fisica.ufc.br

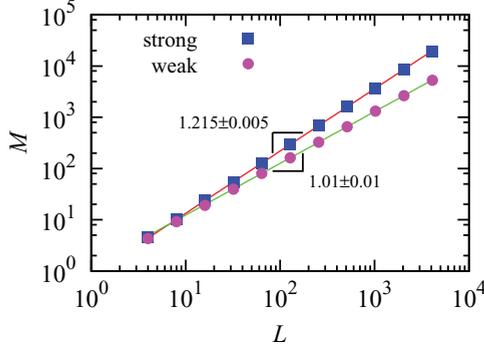


FIG. 1. (Color online) Double-logarithmic plot of the mass of the optimal path, M_{op} , in 2D as a function of the linear system size, L , for two different types of energy distribution. The lower points (\bullet) are measured for uniformly random site energies, being equivalent to weak disorder. The corresponding exponent is $d_{\text{op}} = 1.01 \pm 0.01$ and the optimal path is a self-affine object [30]. The upper line (\blacksquare) shows results obtained for site energies distributed according to a power law, Eq. (1), with $\beta_D = 1600$, such that the systems are in the strong disorder limit (for the considered system sizes). In the strong disorder limit the optimal path is a self-similar object with a fractal dimension $d_{\text{op}} = 1.215 \pm 0.005$. The optimal path search was performed using the Dijkstra algorithm [31]. Results have been averaged over 10^{10} samples for the smallest system size and 10^4 for the largest one. The error bars of the individual points are smaller than the symbols.

truncated between $\varepsilon_{\text{max}} = 1$ and $\varepsilon_{\text{min}} = \exp(-\beta_D)$, the disorder in the system is controlled by the disorder parameter $\beta_D \geq 0$. In the limit $\beta_D \rightarrow 0$, $\varepsilon_{\text{min}} \rightarrow \varepsilon_{\text{max}}$, and the OP approaches a straight line. For large values of β_D , the truncated distribution becomes very broad and the disorder strong (ultrametric limit). The total energy of a given path is then mainly driven by the site with the highest energy in the path (see Ref. [32] and references therein). For a certain β_D , the system can be either in a strong or weak disorder regime, depending on its size. The crossover from weak to strong disorder has been investigated in detail by Porto *et al.* [30]. For strong disorder, the OP is a self-similar object with a fractal dimension $d_{\text{op}} = 1.215 \pm 0.005$ (see Fig. 1).

The optimal path is typically the one heavily used in a system being liable to fail. This failure is most likely to occur in the highest-energy site. Under failure, this site is destroyed and can no longer be used. To optimize the transportation “cost” on the modified substrate, a new OP has to be found, which is again disrupted at its highest-energy site. During this process, transport in the system remains possible, with increasing cost, until the formation of a path of destroyed sites which disconnects the system into two parts. This process, denoted as *optimal path cracking*, was introduced recently by Andrade *et al.* [13], who discovered that the shortest path of destroyed sites necessary to disconnect the system has a fractal dimension of 1.22 ± 0.02 , an interesting exponent also found in several other systems [14,15,30,32,33,35].

B. Optimal path cracking

The starting configuration for each realization of OPC is a regular square or cubic lattice of linear size L where all sites and bonds are occupied (open). Notwithstanding the site

definition of the problem, the model can be straightforwardly extended to consider bonds instead of sites. Periodic boundary conditions are applied in all directions, except for one, where fixed boundary conditions are taken. For definiteness, this direction is called vertical, such that there are no bonds directly connecting the lowest row (layer) and the top row (layer) in two (three) dimensions. For each realization, a non-negative energy value ε_i , $i = 1, \dots, N = L^d$ (where d is the dimension of the system), is assigned to each site, either distributed uniformly [e.g., in $[0,1]$] or according to a truncated power law [Eq. (1)]. In the latter case, applying the transformation method for distributions yields

$$\varepsilon_i = \exp[\beta_D(x_i - 1)], \quad (2)$$

where x_i is a random number uniformly distributed in $[0,1]$.

Starting from this setup, the OPC is generated by the following procedure:

- (1) Find the OP through the lattice, connecting the lowest row and the highest one (the lowest layer and the top layer in 3D). Only occupied sites can be part of a path and only nearest neighbors are considered to be connected.
- (2) Identify and remove the most vulnerable site in the optimal path, i.e., the one with the highest energy.
- (3) Repeat steps 1 and 2 until there is no path connecting the bottom row (layer) to the top row (layer).
- (4) The configuration of unoccupied sites obtained in this way is the OPC.

It is convenient to use Hoshen-Kopelman-like labeling [36–38] to keep track of the properties of the clusters of removed sites, as the OPC emerges. The properties of the cracks are analyzed by monitoring three different masses: (i) The number of all removed sites in the system, M_{tot} —the density ρ is then defined as $\rho = M_{\text{tot}}/N$; (ii) the number of blocked sites forming the largest cluster disconnecting the system, which is called M_{lc} ; and (iii) the shortest path in the largest cluster, sufficient to disconnect the system, with a mass M_{sp} .

In Fig. 2 we show snapshots of the OPC for uncorrelated lattices with different degrees of disorder. The same sequence of uniformly distributed numbers was used for all configurations. Although the distribution of cracks and the number of dead ends are significantly affected by the degree of disorder, the shortest path in the main crack does not change. For uncorrelated lattices, the OPC shortest path is always a self-similar object with the same fractal dimension regardless of the degree of disorder.

To find the mass of the shortest path in the largest cluster, the burning method introduced by Herrmann *et al.* [39] is used. Since for the optimal path only the four nearest neighbors are considered to be connected and an OP consists of connected occupied sites, it is sufficient for the OPC to be connected by next-nearest neighbors. Therefore, for the investigation of the OPC properties, each site is considered to be directly connected to its four nearest and four next-nearest neighbors (in 3D six nearest and twenty next-nearest neighbors).

The three masses introduced above are expected to asymptotically scale with the linear system size, L ,

$$M_{\text{tot}} \sim L^{d_{\text{tot}}}, \quad M_{\text{lc}} \sim L^{d_{\text{lc}}}, \quad M_{\text{sp}} \sim L^{d_{\text{sp}}}, \quad (3)$$

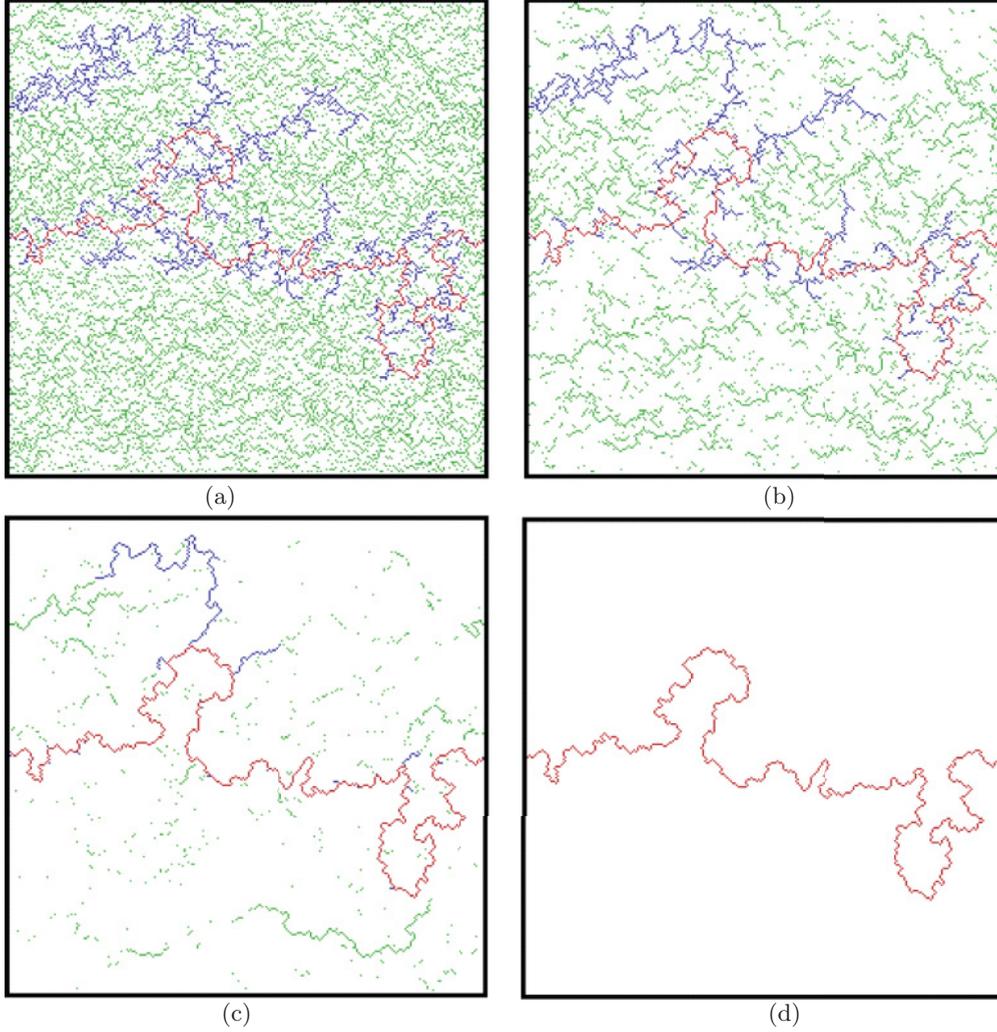


FIG. 2. (Color online) Snapshots of OPC clusters on uncorrelated lattices, generated with the same seed for the uniformly distributed pseudorandom numbers. (a) and (b) show equivalent realizations of the weak disorder limit: In (a) the site energies are distributed according to a power law, Eq. (1), with $\beta_D = 0.002$, while in (b) they are uniformly distributed. (c) and (d) show snapshots for $\beta_D = 6$ and $\beta_D = 100$, respectively, corresponding to the intermediate and the strong disorder regime. The shortest path in the largest optimal path crack cluster is shown in red (medium gray), the sites belonging to the largest cluster but not the shortest path are shown in blue (dark gray), and the sites belonging to other clusters than the largest one are shown in green (light gray). Notice that the shortest path in the largest cluster is independent on the distribution and on the disorder strength. Furthermore, since for the optimal path search only nearest neighbors are considered to be connected, the OPC clusters are connected via nearest and/or next-nearest neighbors. The optimal path crack clusters are trees by construction. For these pictures, the linear system size is 256.

where

$$d_{lc} = d - \frac{\beta}{\nu} \quad (4)$$

is the fractal dimension of the largest cluster, β is the critical exponent related to the order parameter, and ν is the exponent related to the correlation length. In addition, we measure the second moment of the OPC cluster size distribution n_s ,

$$M_2 = \sum_s s^2 n_s = \frac{1}{N} \sum_k s_k^2, \quad (5)$$

where n_s is the number of clusters of size s per lattice site, N , and s_k is the size of cluster k . Percolation theory predicts

that the second moment, excluding the contribution from the largest cluster, scales asymptotically as

$$M'_2 = M_2 - \frac{\langle s_{\max}^2 \rangle}{N} \sim L^{\gamma/\nu}, \quad (6)$$

where s_{\max} is the size of the largest OPC cluster and γ is a critical exponent. For d not larger than the upper critical dimension, the hyperscaling relation,

$$d = \frac{\gamma}{\nu} + 2\frac{\beta}{\nu}, \quad (7)$$

holds. The scaling behavior of the OPC cluster size distribution gives access to the Fisher exponent τ ,

$$n_s \sim s^{-\tau}. \quad (8)$$

The scaling relation between β , γ , and τ reads [16]

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\tau - 2}{3 - \tau}. \quad (9)$$

Andrade *et al.* [13] showed that the OPC depends on the value of the disorder parameter β_D . Small values of β_D , e.g., $\beta_D < 1$, lead to narrow energy distributions and thus weak disorder.

III. UNCORRELATED LATTICES

For uncorrelated OPC with uniform energy distribution, the total mass of the OPC, M_{tot} , the mass of the largest cluster of blocked sites, M_{lc} , and the mass of the shortest path, M_{sp} , as a function of the linear system size are shown in Fig. 3. As proposed in Eq. (3), the functional relation of the masses with the system size is, within the error bars, given by power laws. The obtained exponents are $d_{\text{tot}} = 2.00 \pm 0.01$, $d_{\text{lc}} = 1.54 \pm 0.03$, and $d_{\text{sp}} = 1.21 \pm 0.02$, consistent to the ones for $\beta_D = 0.002$ [13]. Thus, in the weak disorder regime, the three masses scale with different exponents. Furthermore, since the mass of all blocked sites scales linearly with the number of sites in the system, the density of cracks can be computed giving $\rho = 0.10 \pm 0.03$. When, instead of the site with highest energy, the one with *lowest* energy is removed, the same results as for OPC in the weak disorder regime are obtained, independently of the value of β_D .

The variation of the crossover with system size from weak to strong disorder can be observed in Fig. 4, through the behavior of the three masses as a function of the linear system size. Results are for the intermediate value of $\beta_D = 6$. One can observe that, for small system sizes, the system is in the strong disorder regime and the three masses coincide. The crack is then localized in a single line. For increasing L the three curves separate and tend toward their weak disorder

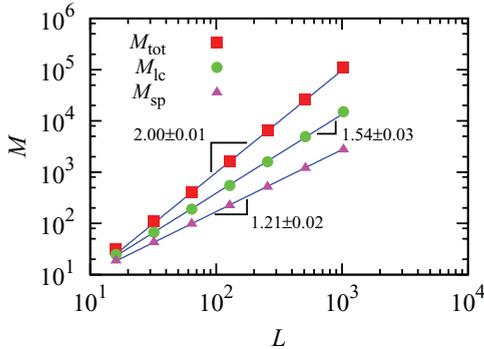


FIG. 3. (Color online) Double-logarithmic plot of the total mass, M_{tot} (■), mass of the largest cluster, M_{lc} (●), and mass of the shortest path, M_{sp} (▲), as a function of the linear system size, L , for OPC with uniformly distributed site energies. This energy distribution is equivalent to the weak disorder limit. The three masses scale with the system size according to three different exponents: $d_{\text{tot}} = 2.0 \pm 0.01$, $d_{\text{lc}} = 1.54 \pm 0.03$, and $d_{\text{sp}} = 1.21 \pm 0.02$. For weak disorder, the OPC consists of a largest cluster with dangling ends and many small isolated clusters [see Figs. 2(a) and 2(b)]. Results have been averaged over 10^8 samples for the smallest system size and 10^2 for the largest one. The error bars of the individual points are smaller than the symbols.

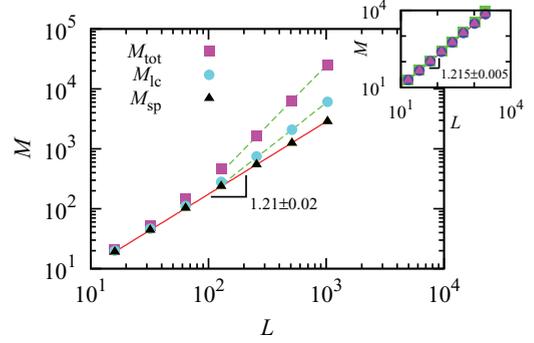


FIG. 4. (Color online) Double-logarithmic plot of the total mass, M_{tot} (■), mass of the largest cluster, M_{lc} (●), and mass of the shortest path, M_{sp} (▲), as a function of the linear system size, L , for site energies distributed according to a power law with disorder parameter $\beta_D = 6$. The behavior of the total mass and of the mass of the largest cluster reveals the crossover from strong disorder to weak disorder. For small system sizes—equivalent to high disorder—all three masses coincide, while for increasing system size—decreasing disorder—three different exponents emerge, as indicated by the asymptotic dashed lines which have slopes of 2.00 (for M_{tot} , upper dashed line) and 1.54 (for M_{lc} , lower dashed line). The solid straight line is a guide to the eye with a slope of $d_{\text{sp}} = 1.21 \pm 0.02$. For this intermediate value of the disorder there are less isolated clusters than for weak disorder and the largest cluster seems to be dominated by its shortest path [see Fig. 2(c)]. The inset shows the same masses as the main plot, measured for a higher value of the disorder parameter, $\beta_D = 30$. For almost the entire range of system sizes the three masses are identical, indicating that these systems are in the strong disorder regime [see Fig. 2(d)]. The slope of the line gives $d_{\text{sp}} = 1.215 \pm 0.005$. Results have been averaged over 10^8 samples for the smallest system size and 10^2 for the largest one. The error bars of the individual points are smaller than the symbols.

behavior. Andrade *et al.* [13] showed that the system size where the crossover occurs, L_{\times} , scales with the disorder parameter, $L_{\times} \sim \beta_D^{1/a}$, with $a \approx 0.59$. In contrast to the behavior of M_{tot} and M_{lc} , the mass of the shortest path in the largest cluster is independent of the system disorder and scales with the same exponent of $d_{\text{sp}} = 1.21 \pm 0.02$ as for $\beta_D = 0.002$ and for uniform energy distribution.

Three main features characterize the qualitative behavior of OPC clusters in the weak disorder limit. First, when searching the OP, only nearest neighbors are considered to be connected and the OPC growth ends when there is no path connecting opposite sites of the system. Thus the OPC clusters are connected via nearest and next-nearest neighbors. Second, by construction, every site in an OPC cluster was, at some point, part of an OP, therefore there can be no extended loops which would “trap” sites not belonging to the OPC. Compact loops, i.e., four OPC sites at lattice positions (x_0, y_0) , $(x_0, y_0 + 1)$, $(x_0 + 1, y_0)$, and $(x_0 + 1, y_0 + 1)$, can, however, arise in OPC clusters. An example for the treelike structure of OPC clusters is shown in Fig. 2(a). Finally, branching in OPC clusters is less frequent than, e.g., in loopless standard or invasion percolation clusters [33,34,40,41]. These properties cause the shortest path, in the largest OPC cluster, to be identical to the ordinary backbone in the strong disorder limit, where the backbone becomes localized [see Fig. 2(d)].

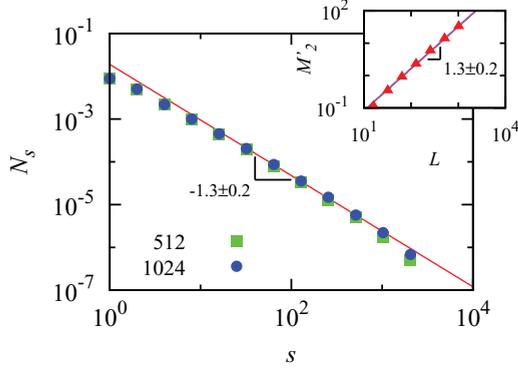


FIG. 5. (Color online) Double-logarithmic plot of the cluster size distribution and its second moment for energies uniformly distributed. The main figure shows $N_s = \sum_{r=s}^{2s-1} n_r$ ($s = 1, 2, 4, \dots$) as a function of the cluster size, s , for linear system sizes $L = 512$ (■) and $L = 1024$ (●). The slope of the line gives $1 - \tau = -1.3 \pm 0.2$. In the inset we see the second moment, M'_2 (▲), of the cluster size distribution as a function of the system size, L . The slope of the line gives $\gamma/\nu = 1.3 \pm 0.2$. Results have been averaged over 10^8 samples for the smallest system size and 10^2 for the largest one. The error bars of the individual points are smaller than the symbols.

Next we discuss further details for the weak and strong disorder limits.

A. Weak disorder

Let us analyze the properties of uncorrelated OPC clusters in the weak disorder limit. The critical exponents are estimated using the data for uniform site energy distribution.

In the previous section we obtained, using Eq. (4), $\beta/\nu = 0.46 \pm 0.03$. According to Eq. (6), the ratio γ/ν can be determined from the scaling behavior of the second moment of the cluster size distribution, excluding the contribution of the largest cluster; the corresponding plot is shown in the inset of Fig. 5. Asymptotically, the points follow a power law with exponent $\gamma/\nu = 1.3 \pm 0.2$. Within the error bars, the obtained results fulfill the hyperscaling relation given by Eq. (7).

From the behavior of the cluster size distribution for large cluster sizes we can extract the Fisher exponent τ , as shown in Fig. 5. The points can be fitted by a line with slope -1.3 ± 0.2 , such that $\tau = 2.3 \pm 0.2$ (details in the caption). This is consistent with the obtained values for β/ν and γ/ν and the scaling relation Eq. (9).

B. Strong disorder

For strong disorder, in contrast to weak disorder, the OPC cluster consists, mainly, in a localized crack, such that $M_{\text{tot}} \approx M_{\text{lc}} \approx M_{\text{sp}}$ [see Fig. 2(d)]. As an example, the mass scaling in OPC, with site energies distributed according to Eq. (2) and $\beta_D = 30$, is shown in the inset of Fig. 4. For the smaller system sizes the three masses coincide, while for increasing system sizes one can notice a crossover of the total mass, M_{tot} . Since M_{tot} grows more slowly for higher disorder (with exponent ≈ 1.2 instead of ≈ 2.0), the amount of OPs that have to be found to produce the OPC is smaller than in the weak disorder limit. Since the multiple OP searches correspond to the most time-consuming part of the algorithm, the required computation

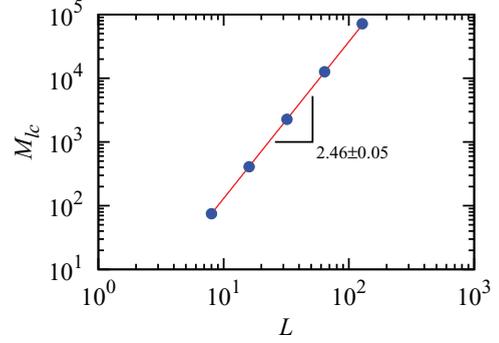


FIG. 6. (Color online) Double-logarithmic plot of the mass of the largest cluster, M_{lc} (●), for uncorrelated 3D optimal path cracks, as a function of the linear system size, L . The slope of the line gives $d_{\text{lc}} = 2.46 \pm 0.05$. A snapshot of one realization is shown in Fig. 7. Results have been averaged over 10^8 samples for the smallest system size and 50 for the largest one. The error bars of the individual points are smaller than the symbols.

effort tends to decrease with increasing disorder. This in turn allows to determine the fractal dimension of the shortest path in the largest cluster with higher precision; we have found $d_{\text{sp}} = 1.215 \pm 0.005$, which is, within the error bars, identical to the OP fractal dimension $d_{\text{op}} = 1.215 \pm 0.005$.

We also consider the uncorrelated OPC in 3D, on a simple cubic lattice. Geometrically, it is clear that while a 2D system can be disconnected by a line, a surface is needed in 3D. Therefore, in analogy to the 2D case, one expects d_{lc} to lie between two and three. For site energies distributed according to Eq. (1) with $\beta_D = 100$, the mass of the largest OPC cluster as a function of the linear system size is shown in Fig. 6. The obtained exponent is $d_{\text{lc}} = 2.46 \pm 0.05$. A snapshot of an OPC, in 3D, in the strong disorder regime, is shown in Fig. 7. Similar to the 2D case, for 3D also two different regimes are observed. While for the weak disorder regime several isolated clusters are found, in the strong disorder one the cracks become localized in a single surface. However, computational limitations solely allow to accurately study the

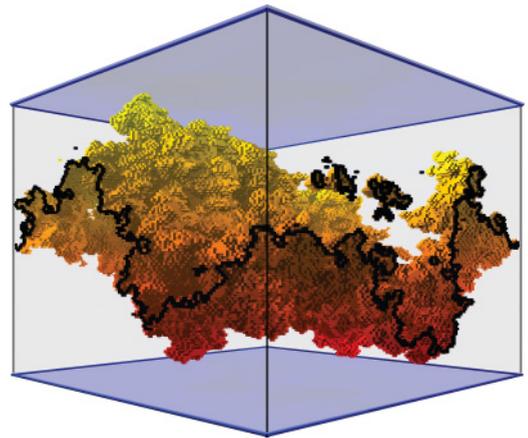


FIG. 7. (Color online) Snapshot of a representative configuration of the OPC in 3D, for a system with 128^3 lattice sites. Energies have been assigned to each site in the system according to a truncated power law with $\beta_D = 100$. In black are the sites where the OPC intercepts the borders of the box.

latter case. Simulations of systems in the weak disorder regime are actually limited to small system sizes and few samples.

IV. CORRELATED LATTICES

The distributions of energies in the system have been, so far, considered spatially uncorrelated. In this section, we introduce a generalization of the OPC study, described above, to correlated energy landscapes. These landscapes have been obtained from FBM [19,20,28,29]. We show that spatial long-range correlations lead to nonuniversal fractal dimensions.

A. Fractional Brownian motion by spectral synthesis

An ordinary Brownian motion [42] is a stochastic process $B(t)$ with the properties

$$\langle B(t) - B(t') \rangle = 0 \quad (10)$$

and

$$\langle [B(t) - B(t')]^2 \rangle \propto |t - t'|, \quad (11)$$

where t denotes time, and increments are mutually independent if, and only if, their time intervals do not overlap. Given a parameter H , called the Hurst exponent, a fractional Brownian motion, $B_H(t)$, is a moving average of $dB(t)$, in which past increments of $B(t)$ are weighted by the kernel $(t - s)^{H-1/2}$ [29]. This leads to the properties

$$\langle B_H(t) - B_H(t') \rangle = 0 \quad (12)$$

and

$$\langle [B_H(t) - B_H(t')]^2 \rangle \propto |t - t'|^{2H}. \quad (13)$$

For $H = 1/2$ ordinary Brownian motion is recovered. In contrast to ordinary Brownian motion, in FBM, for $H \neq 1/2$, the increments are correlated and the range of this correlation is infinite. It can be shown that the correlation between two increments of a FBM, $B_H(t)$, is positive if $1/2 < H < 1$ and negative if $0 < H < 1/2$.

To use the properties of FBMs to obtain a correlated energy landscape, it is convenient to apply the Fourier filtering method (FFM), based on the spectral synthesis [19,20,28]. In a nutshell, the idea is to generate random Fourier coefficients, distributed according to a given density, and to subsequently apply an inverse Fourier transform to obtain the energy landscape in the spatial domain. It is known that, in 1D, $1/f$ noise—a process with spectral density $S(f) \propto 1/f^{\beta_C}$ —is equivalent to FBM with $H = (\beta_C - 1)/2$. Furthermore, it can also be shown that the spectral density of an FBM in d dimensions can be written as

$$S(f_1, \dots, f_d) = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^d f_i^2} \right)^{-(2H+d)}, \quad (14)$$

such that $\beta_C = 2H + d$. Therefore, in 2D, for $2 < \beta_C < 3$ the increments are anticorrelated, $\beta_C = 3$ corresponds to $H = 1/2$ (ordinary Brownian motion), and $3 < \beta_C < 4$ leads to positively correlated increments. For white noise, the spectral density S is constant, i.e., $\beta_C = 0$ or $H = -d/2$, and both the increments and the obtained lattices are uncorrelated.

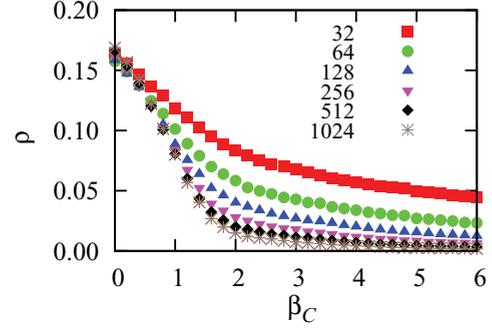


FIG. 8. (Color online) Density of all removed sites for correlated OPC as a function of the correlation parameter, β_C . For $\beta_C = 1$, $H = -d/2$, the FBM corresponds to white noise, i.e., the uncorrelated case where the density is independent of the system size. Data for the following system sizes are shown: $L = 32$ (■), $L = 64$ (●), $L = 128$ (▲), $L = 256$ (▼), $L = 512$ (◆), and $L = 1024$ (*). Results have been averaged over 3.2×10^3 samples for the smallest system size and 10^2 for the largest one. The error bars of the individual points are smaller than the symbols.

In practical terms, we obtain correlated site energies in the following way [28]. For the spectral synthesis, Fourier coefficients corresponding to the spectral density of Eq. (14) are needed. The given spectrum translates into conditions for the expectation of the absolute values of the Fourier coefficients. We generate these Fourier coefficients in reciprocal space through one random phase [in $[0, 2\pi]$] and one amplitude distributed according to a normal distribution and with maximum amplitude $(\sqrt{k_1^2 + k_2^2})^{-\beta_C}$, where k_i 's are the frequency indices of the discrete Fourier transform. After applying the inverse Fourier transform, we have to normalize in the range from zero to one the spatial domain distribution to represent the correlated topology. Separately, we generate several samples and compute the average variance σ . Afterward, for each sample, we truncate its correlated distribution such that, if the distribution value is smaller (larger) than -3σ (3σ), we assign this energy value equal to -3σ (3σ). This truncation affects less than 0.3% of the distribution.

B. Correlated optimal path cracking

In this section, we study the properties of OPC on correlated lattices. Energies distributed equivalently to the spectral density in Eq. (14) follow a FBM where β_C is the spectral exponent. Figure 8 shows the density of removed sites, $\rho = M_{\text{tot}}/N$, as a function of the correlation exponent β_C . The number of sites that need to fail to break the global connectivity in the system decreases with the degree of correlation. The stronger the correlations, the lower the density of removed sites. While in the uncorrelated case ($\beta_C = 0$), the density of removed sites shows no significant finite-size effects, when spatial correlations are taken into account, the larger the system size, the lower the density of removed sites.

The dependence of the exponents, d_{tot} , d_{lc} , and d_{sp} , on β_C is shown in Fig. 9. This plot shows that the critical exponents of correlated OPC are nonuniversal and change with the correlation parameter β_C . In the absence of correlations,

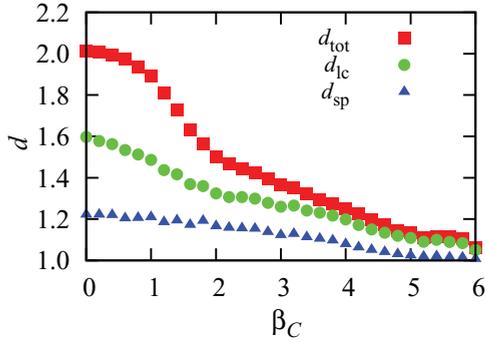


FIG. 9. (Color online) The fractal dimensions d_{tot} (■), d_{lc} (●), and d_{sp} (▲) as a function of the correlation parameter, β_C . The plot shows that the long-range spatial correlation changes the exponents of the system. Results have been averaged over 3.2×10^3 samples for the smallest system size and 10^2 for the largest one. The error bars of the individual points are smaller than the symbols.

the values of the exponents discussed before are recovered. For $\beta_C > 0$, the exponents decrease monotonically with the correlation parameter. No significant differences are found between correlated and anti-correlated regimes. In the limit

of strong long-range correlations, for sufficiently high values of β_C the exponents seem to converge toward unity.

The density of all removed sites decreases monotonically with β_C and the exponents for the different masses converge to unity, for large values of β_C . Therefore, the OPC becomes localized in a single line.

In Fig. 10 we see snapshots of the OPC shortest path and the first OP in four different energy landscapes, where the third dimension is the energy of the site. The snapshot (a) is for the uncorrelated case. Both the OP and the OPC have many upward and downward tilts. Increasing the correlation, (a)–(d), the OP tends to cross the valleys and the OPC tends to go mainly through the mountains. Even for the anticorrelated case (b), though a rough landscape is also obtained, mountains and valleys can be observed.

V. FINAL REMARKS

In this work we have studied in detail the optimal-path crack (OPC), recently introduced by Andrade *et al.* [13], for the weak and the strong disorder limits. An accurate value for the fractal dimension of the shortest path in the crack was obtained. We also computed the set of critical exponents, β/ν , γ/ν , and τ , to get more insight on the crack percolation

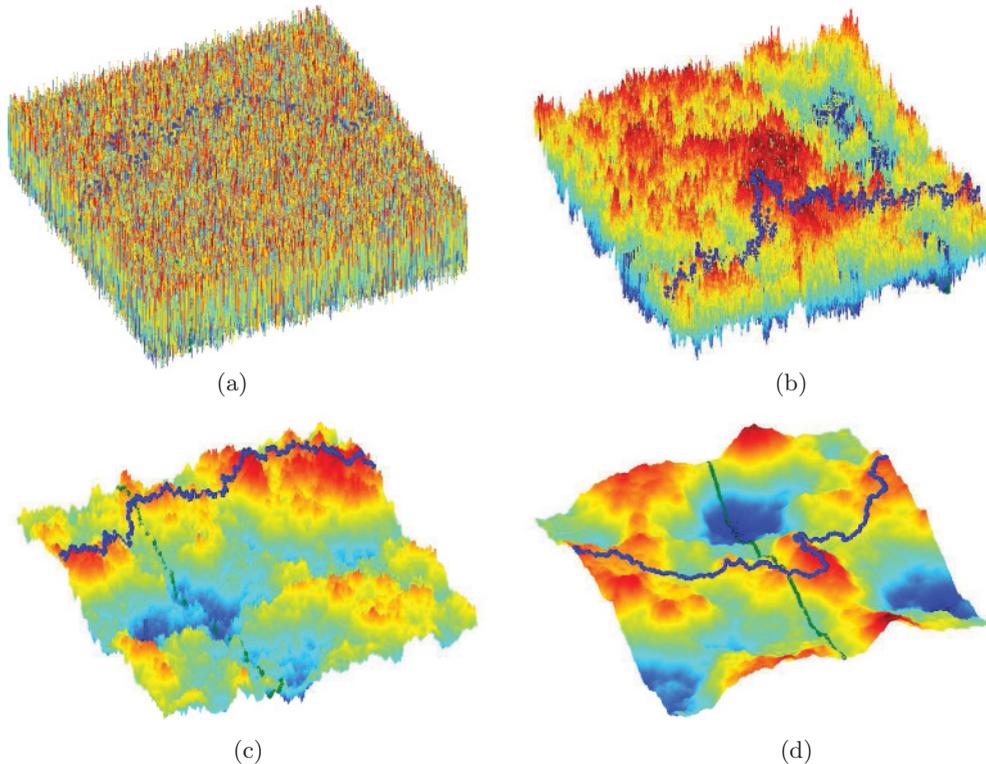


FIG. 10. (Color online) The shortest path in the OPC for correlated and uncorrelated energy landscapes. At each lattice site, given by two coordinates (x, y) , the third coordinate is the energy at this point. Red regions (mountains) have energy close to unity, while blue regions (valleys) have energy close to zero. The shortest path in the OPC is shown in dark blue (dark gray, left to right) and the first optimal path in dark green (medium gray, front to back). Four different correlation parameters, β_C , have been considered: (a) $\beta_C = 0$ ($H = -d/2$) corresponding to the uncorrelated case, - white noise; (b) $\beta_C = 2.2$ (anticorrelated); (c) $\beta_C = 3$ ($H = 1/2$) recovering the ordinary Brownian motion where the increments (but not the lattice) are uncorrelated; (d) $\beta_C = 3.8$, corresponding to strongly correlated lattices. While the crack passes mainly through the mountain tops, the first optimal path passes mainly through the valleys, - hidden in the noisy configurations (a) and (b). For these pictures, the linear system size is 1024.

properties, revealing an interesting set of exponents. We note that, within the error bars, the exponents β/ν and γ/ν are consistent with the ones for the parallel direction of directed percolation [43]. The Fisher exponent, τ , is compatible with the one for the cluster size distribution of subcritical invasion percolation clusters between two sites [44] and the exponent of the distribution of areas in perturbed watersheds [14]. The OPC has also been analyzed for a 3D system where the connectivity between opposite borders of the system is broken by a surface with a fractal dimension of 2.46 ± 0.05 .

We generalized the OPC on correlated energy landscapes generated by fractional Brownian motion with different values of the correlation parameter β_C . For different correlations nonuniversal exponents are obtained for the fractal dimension of the total mass of the crack, the size of the main crack, and the length of the shortest path. Moreover, a monotonic decrease of the exponents with the correlation parameter is observed together with a strong tendency to localize the crack in its

shortest path. An interesting extension of this work would be to consider, for example, in the 3D case, the role of correlations and to compute γ/ν and τ . The interplay between degree of disorder and the presence of long-range spatial correlations is still an open question. Besides, since the obtained fractal dimension of the OP and of the shortest path in the largest OPC cluster was found in several different models, it would be interesting to understand what would be the meaning of γ/ν and τ for these models.

ACKNOWLEDGMENTS

We acknowledge financial support from the ETH Competence Center Coping with Crises in Complex Socio-Economic Systems (CCSS) through ETH Research Grant No. CH1-01-08-2. We also acknowledge the Brazilian agencies CNPq, CAPES, and FUNCAP, and the Pronex grant CNPq/FUNCAP, for financial support.

-
- [1] M. Mézard, G. Parisi, N. Sourlas, G. Toulouse, and M. Virasoro, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1156 (1984).
 - [2] A. Ansari, J. Berendzen, S. F. Bowne, H. Frauenfelder, I. E. T. Iben, T. B. Sauke, E. Shyamsunder, and R. D. Young, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **82**, 5000 (1985).
 - [3] D. A. Huse and C. L. Henley, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2708 (1985).
 - [4] D. A. Huse, C. L. Henley, and D. S. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2924 (1985).
 - [5] S. Kirkpatrick and G. Toulouse, *J. Phys. (Paris)* **46**, 1277 (1985).
 - [6] M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 889 (1986).
 - [7] M. Kardar and Y.-C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2087 (1987).
 - [8] E. Perlsman and M. Schwartz, *Europhys. Lett.* **17**, 11 (1992).
 - [9] J. Kertész, V. K. Horváth, and F. Weber, *Fractals* **1**, 67 (1993).
 - [10] E. Perlsman and M. Schwartz, *Physica A* **234**, 523 (1996).
 - [11] S. Havlin, L. A. Braunstein, S. V. Buldyrev, R. Cohen, T. Kalisky, S. Sreenivasan, and H. E. Stanley, *Physica A* **346**, 82 (2005).
 - [12] N. Schwartz, A. L. Nazaryev, and S. Havlin, *Phys. Rev. E* **58**, 7642 (1998).
 - [13] J. S. Andrade Jr., E. A. Oliveira, A. A. Moreira, and H. J. Herrmann, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 225503 (2009).
 - [14] E. Fehr, J. S. Andrade Jr., S. D. da Cunha, L. R. da Silva, H. J. Herrmann, D. Kadau, C. F. Moukarzel, and E. A. Oliveira, *J. Stat. Mech.* (2009) P09007; E. Fehr, D. Kadau, J. S. Andrade Jr., and H. J. Herrmann, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 048501 (2011).
 - [15] N. A. M. Araújo and H. J. Herrmann, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 035701 (2010).
 - [16] D. Stauffer and A. Aharony, *Introduction to Percolation Theory*, 2nd ed. (Taylor & Francis, London, 1994).
 - [17] M. Sahimi, *Applications of Percolation Theory* (Taylor & Francis, London, 1994).
 - [18] S. Prakash, S. Havlin, M. Schwartz, and H. E. Stanley, *Phys. Rev. A* **46**, R1724 (1992).
 - [19] M. Sahimi, *J. Phys. I (France)* **4**, 1263 (1994).
 - [20] M. Sahimi and S. Mukhopadhyay, *Phys. Rev. E* **54**, 3870 (1996).
 - [21] H. A. Makse, S. Havlin, M. Schwartz, and H. E. Stanley, *Phys. Rev. E* **53**, 5445 (1996).
 - [22] E. S. Kikkiniades and V. N. Burganos, *Phys. Rev. E* **59**, 7185 (1999).
 - [23] H. E. Stanley, J. S. Andrade Jr., S. Havlin, H. A. Makse, and B. Suki, *Physica A* **266** (1999).
 - [24] H. A. Makse, J. S. Andrade Jr., and H. E. Stanley, *Phys. Rev. E* **61**, 583 (2000).
 - [25] A. D. Araújo, A. A. Moreira, H. A. Makse, H. E. Stanley, and J. S. Andrade Jr., *Phys. Rev. E* **66**, 046304 (2002).
 - [26] A. D. Araújo, A. A. Moreira, R. N. Costa Filho, and J. S. Andrade Jr., *Phys. Rev. E* **67**, 027102 (2003).
 - [27] C. Du, C. Satik, and Y. C. Yortsos, *AIChe J.* **42**, 2392 (1996).
 - [28] *The Science of Fractal Images*, edited by H. Peitgen and D. Saupe (Springer, New York, 1988).
 - [29] B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness, *SIAM Rev.* **10**, 422 (1968).
 - [30] M. Porto, N. Schwartz, S. Havlin, and A. Bunde, *Phys. Rev. E* **60**, R2448 (1999).
 - [31] E. W. Dijkstra, *Numer. Math.* **1**, 269 (1959).
 - [32] M. Cieplak, A. Maritan, and J. R. Banavar, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2320 (1994).
 - [33] M. Cieplak, A. Maritan, and J. R. Banavar, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3754 (1996).
 - [34] M. Porto, S. Havlin, S. Schwarzer, and A. Bunde, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4060 (1997).
 - [35] J. S. Andrade Jr., S. D. S. Reis, E. A. Oliveira, E. Fehr, and H. J. Herrmann, *Comput. Sci. Eng.* **13**, 74 (2011).
 - [36] J. Hoshen and R. Kopelman, *Phys. Rev. B* **14**, 3438 (1976).
 - [37] M. E. J. Newman and R. M. Ziff, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4104 (2000).
 - [38] M. E. J. Newman and R. M. Ziff, *Phys. Rev. E* **64**, 016706 (2001).
 - [39] H. J. Herrmann, D. C. Hong, and H. E. Stanley, *J. Phys. A* **17**, L261 (1984).
 - [40] D. Wilkinson and J. F. Willemsen, *J. Phys. A* **16**, 3365 (1983).
 - [41] F. Tzschichholz, A. Bunde, and S. Havlin, *Phys. Rev. A* **39**, 5470 (1989).
 - [42] A. Einstein, *Ann. Phys.* **322**, 549 (1905).
 - [43] M. Henkel, H. Hinrichsen, and S. Lübeck, *Non-Equilibrium Phase Transitions*, Vol. 1 (Springer, Dordrecht, 2008).
 - [44] A. D. Araújo, T. F. Vasconcelos, A. A. Moreira, L. S. Lucena, and J. S. Andrade Jr., *Phys. Rev. E* **72**, 041404 (2005).