UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

Tiago Caúla Ribeiro

Homologia Métrica

Fortaleza – 2007

Tiago Caúla Ribeiro

Homologia Métrica

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes.

Fortaleza

2007

R372h

Ribeiro, Tiago Caúla

Homologia métrica/Tiago Caúla Ribeiro

Fortaleza: 2007

38 f.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes

1-Topologia

CDD 514

Dedico este trabalho a minha esposa Izabel e aos meus pais Aluizio e Isvalde. Que Deus nos abençoe.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela misericórdia e benevolência.

A minha esposa, pelo amor paciente.

Aos meus pais e irmãos, pelo apoio incondicional.

Ao professor Alexandre Fernandes, pelos ensinamentos que não se encontram em livros.

A todos os professores, funcionários, amigos e colegas do departamento que, direta ou indiretamente, contribuiram para minha edificação profissional.

A CNPq, pelo apoio financeiro.

"Portanto, não vos inquieteis com o dia de amanhã, pois o amanhã trará os seus cuidados; basta ao dia o seu próprio mal."

Jesus Cristo,
Mt 6.34.

RESUMO

No presente trabalho desenvolvemos e aplicamos a teoria de *homologia métrica*, criada por Jean Paul Brasselet e Lev Birbrair. A cada conjunto semialgébrico X associamos uma coleção de espaços vetoriais reais (ou grupos abelianos) $\{MH_k^\nu(X)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de forma que se é dado um outro semialgébrico X' que é semialgebricamente bi-Lipschitz equivalente a X, então $MH_k^\nu(X) \cong MH_k^\nu(X')$, para todo k. Assim, a coleção $\{MH_k^\nu(X)\}$ carrega alguma informação métrica do semialgébrico X. Em particular, teremos condições necessárias para que uma singularidade isolada $x_0 \in X$ seja *cônica*. Mais precisamente, dada uma subvariedade compacta L de uma esfera $S_{x_0,\varepsilon}$, calculamos os grupos $MH_k^\nu(x_0 * L)$ em termos da homologia singular de L, onde $x_0 * L$ denota o cone $\{tx_0 + (1-t)x\,;\, x \in L,\, t \in [0,1]\}$. Aliado à homologia métrica temos os *Ciclos de Chegger*, objetos geométricos que obstruem a natureza cônica de uma singularidade. Como uma aplicação da teoria, apresentamos uma classe de superfícies complexas cujas singularidades (isoladas) são não-cônicas.

Sumário

Introdução

Um corolário do Teorema de Trivialização de Hardt é a estrutura cônica local topológica (semialgébrica) dos conjuntos semialgébricos. Aqui vamos estudar o problema métrico relacionado:

Todo germe (X, x_0) de um conjunto semialgébrico X numa singularidade isolada x_0 é semialgebricamente bi-Lipschitz equivalente ao cone $x_0 * L_{x_0}(X)$ sobre o Link?

Quando isto ocorre, dizemos que x_0 é uma singularidade *cônica*.

Uma situação correlata à questão colocada acima é a seguinte. Considere uma variedade algébrica complexa projetiva V com um número finito de singularidades $x_1, ..., x_r \in V$. Se, para cada $i \in \{1, ..., r\}$, o germe (V, x_i) é quasi-isométrico a um cone $x_i * L_i$, onde L_i é uma variedade compacta (o "Link"), então pode-se provar que as *Cohomologias de interseção e* L_p são isomorfas sobre V, isto é, $H^k_{L_p}(V) \cong IH^k_{perv_{L_p}}(V)$ (veja [21] para este resultado e notações). Um primeiro resultado nessa direção (caso $p = 2$) foi obtido por J. Chegger em seu artigo *"On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds"*, Proc. Sympos. Pure Math., Vol 36, 1980. Mais tarde (1991), J. P. Brasselet, M. Goresky e R. MacPherson conjecturaram o caso geral (em "*Simplicial differential forms with poles"*, Amer. J. Math. Vol 113), isto é, que a cohomologia L_p de uma métrica com singularidades cônicas era isomorfa à cohomologia de interseção com uma perversidade $\overline{p}$ tal que $\overline{p}(k) = max\{i \in \mathbb{Z} | i < k/p\}$ (a *perversidade* L_p, $perv_{L_p}$). Em 1994, B. Youssin resolveu a conjectura (numa forma mais geral; veja [21]). Portanto, para gerar exemplos de variedades V como acima nas quais as cohomologias L_p e de interseção não coincidem, devemos, antes de tudo, dar exemplos de tais variedades onde as singularidades não são cônicas (no sentido quasi-isométrico).

A pergunta acima, na forma geral em que se encontra, admite a resposta negativa, como se vê considerando uma β-corneta em $\mathbb{R}^3$, $\beta > 1$ (veja a subseção 0.4). Mais geralmente, obtem-se a mesma conclusão para qualquer germe (X, x_0) sendo o cone tangente de X em x_0 degenerado. Estes exemplos são típicos do caso real. Com efeito, H. Whitney provou (veja "*Tangents to an Analytic Variety"*, Annals of Math., Vol 81, 1965) que dada uma variedade algébrica complexa $V \subset \mathbb{C}^n$ e um ponto $p \in V$ tem-se a igualdade $dim\, C(V, p) = dim_p V$, sendo $C(V, p)$ o cone tangente de V em p. Portanto, sob esse ponto de vista, é mais interessante abordar o problema acima no caso complexo.

Vamos descrever uma classe de superfícies complexas, a saber, as *superfícies de Brieskorn de peso k*, que têm a origem $0 \in \mathbb{C}^3$ como única singularidade, mas 0 não é cônica (no sentido que definimos). Este resultado aparece como uma aplicação de uma "teoria de homologia"cujo desenvolvimento é o objetivo primordial do nosso trabalho: a *homologia métrica*.

Dado um conjunto semialgébrico $X \subset \mathbb{R}^n$ existe uma decomposição canônica de X em variedades Lipschitz-semialgébricas (a *L-estratificação canônica de* X) e daí escolhemos os ciclos e bordos semialgébricos em X que "desaparecem rapidamente"nos estratos da L-estratificação, sendo o controle da velocidade de desaparecimento dado a partir de uma *função de perversidade* ν, como na *homologia de interseção* ([11]). Uma vez definida a homologia métrica, usamos a versão Lipschitz do Teorema de Hardt ([19]) para definir a *homologia métrica local* de X num ponto qualquer $x_0 \in X$, cujo k-ésimo grupo é denotado por $MH^{\nu}_{loc,k}(X, x_0)$. Um dos resultados principais que apresentamos é o cálculo de $MH^{\nu}_{loc,k}(X, x_0)$ para o caso em que x_0 é uma singularidade isolada cônica:

Teorema 2.7 *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto semialgébrico fechado n-dimensional e $x_0 \in X$ uma singularidade isolada cônica. Então*

$$MH^{\nu}_{loc,k}(X, x_0) = \begin{cases} 0 & se \quad \nu(n) \leq k+1 \\ H_k(L_{x_0}(X)) & se \quad \nu(n) > k+1. \end{cases}$$

Em particular, sabemos estimar $dim(MH^{\nu}_{loc,n-1}(X, x_0))$ quando o Link $L_{x_0}(X)$ é conexo, pois o grupo de homologia "top"de uma variedade compacta e conexa é $\mathbb{R}$ ou 0.

Uma aplicação interessante do teorema acima é a caracterização dos *Ciclos de Chegger* como objetos que atuam como uma obstrução à estrutura cônica de uma singularidade. Finalmente, provaremos na seção 3 que existem ciclos de Chegger em cada uma das superfícies de Brieskorn (de peso $k > 3$):

Teorema (3.7) *Para cada número inteiro positivo $k > 3$, seja X_k a superfície complexa definida pela equação*

$$x^2 + y^2 = z^{2k}.$$

Então, $0 \in \mathbb{C}^3$ não é uma singularidade cônica para X_k.

Capítulo 0

Preliminares

Nesta seção, definições e resultados básicos da teoria de conjuntos semi-algébricos são estabelecidos com o intuito de desobscurecer futuras afirmações. É também uma oportunidade do leitor leigo se familiarizar com a linguagem e estrutura destes conjuntos. Boa parte do material aqui apresentado é clássico; como referências temos [1] e [8].

0.1 Conjuntos Semialgébricos e Aplicações Semialgébricas

Definição 0.1.1 $X \subset \mathbb{R}^n$ é um *conjunto semialgébrico* quando existem polinômios $P_{i,j}(T) \in \mathbb{R}[T]$, $T = (T_1, ..., T_n)$, e símbolos $s_{i,j} \in \{>, =, <\}$, para cada $i \in \{1, ..., s\}$, $j \in \{1, ..., r_i\}$, tais que

$$X = \bigcup_{i=1}^{s} \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n\, ;\, P_{i,j}(x)\, s_{i,j}\, 0\}.$$

A proposição a seguir é trivial.

Proposição 0.1.2 *Os conjuntos semialgébricos de $\mathbb{R}^n$ formam a menor família $\mathfrak{F}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que satisfaz*

1. $\{x \in \mathbb{R}^n\, ;\, P(x) \geq 0\} \in \mathfrak{F}$, $\forall\, P(T) \in \mathbb{R}[T]$;

2. $\mathfrak{F}$ *é fechada com respeito as operações de união (finita), interseção (finita) e complementar de conjuntos.* $\square$

São exemplos de conjuntos semialgébricos:

- Reuniões finitas de pontos e intervalos abertos da reta $\mathbb{R}$. Na verdade, estes são *os* semialgébricos da reta.

- As bolas abertas $B_{x,\varepsilon}$ e as esferas $S_{x,\varepsilon}$ nos espaços euclideanos.

- Pré-imagem $F^{-1}(X)$, onde $X \subset \mathbb{R}^m$ é semialgébrico e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação polinomial.

- $X \times Y \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ quando $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ forem semialgébricos.

- O fecho $\overline{X}$ de um conjunto semialgébrico $X \subset \mathbb{R}^n$ (consequência do Teorema de Tarski-Seidenberg; veja 0.1.9).

- Todo poliedro (finito) $K \subset \mathbb{R}^n$ (ver 0.2).

- Uma classe importante de conjuntos semialgébricos é a dos *conjuntos algébricos reais*. Estes são os semialgébricos X tais que $s_{i,j} =$"="para todo i, j na definição 0.1.1 (como $\{x\,;\, P(x) = 0\} \cup \{x\,;\, Q(x) = 0\} = \{x\,;\, (P \cdot Q)(x) = 0\}$ e $\{x\,;\, P(x) = 0\} \cap \{x\,;\, Q(x) = 0\} = \{x\,;\, (P^2 + Q^2)(x) = 0\}$, para $P(T), Q(T) \in \mathbb{R}[T]$, segue-se que todo conjunto algébrico real é da forma $\{x\,;\, P(x) = 0\}$).

Se $V \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto algébrico e $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma projeção linear, então nem sempre $P(V)$ é um conjunto algébrico (tome $n = 2, m = 1$ e $V = S^1$). Portanto, é natural considerar a menor família de subconjuntos de $\mathbb{R}^m$ que contém todos os conjuntos algébricos e é fechada sobre projeções. Tal família nada mais é do que a família de todos os subconjuntos semialgébricos de $\mathbb{R}^m$ (veja [1], p. 63). Isto serve de motivação (razoável) para o estudo dos conjuntos semialgébricos.

Agora vamos estabelecer um resultado famoso (Teorema de Tarski-Seidenberg) que confirma a impressão deixada no parágrafo anterior: "projeção de semialgébrico é semialgébrico". Na verdade, existe um teorema fundamental (de decomposição cilíndrica) que além de revelar muito da estrutura dos conjuntos semialgébricos tem o Teorema de Tarski-Seidenberg por corolário. Portanto, vamos ao Teorema de Decomposição Cilíndrica.

Definição 0.1.3 Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos semialgébricos. Uma aplicação $f : X \to Y$ é chamada *semialgébrica* quando seu gráfico (que vamos denotar por $\mathfrak{g}_f$) for um subconjunto semialgébrico de $\mathbb{R}^{m+n}$. (por exemplo, toda aplicação polinomial é semialgébrica; mais geralmente, para $P_1(T), Q_1(T), ..., P_m(T), Q_m(T) \in \mathbb{R}[T]$, $T = (T_1, ..., T_n)$, $Q_i \neq 0$, a correspondência $x \mapsto (P_1(x)/Q_1(x), ..., P_m(x)/Q_m(x))$ define uma aplicação (racional) semialgébrica do semialgébrico $\mathbb{R}^n \setminus \{x\,;\, \prod_{i=1}^{m} Q_i(x) = 0\}$ em $\mathbb{R}^m$. Finalmente, é interessante notar que uma bijeção semialgébrica tem inversa semialgébrica.)

Teorema 0.1.4 (da Decomposição Cilíndrica) *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico e $(x, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ as coordenadas em $\mathbb{R}^n$. Então, existe* *uma partição finita $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ por conjuntos semialgébricos conexos tal que, para cada $A \in \mathcal{I}$, existem funções*

$$f_0^A, f_1^A, ..., f_{s_A+1}^A : A \to \overline{\mathbb{R}} \ (\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$$

satisfazendo

1. $f_0^A \equiv -\infty$, $f_{s_A+1}^A \equiv \infty$;

2. *cada* $f_k^A : A \to \mathbb{R}$, $k = 1, ..., s_A$, *é contínua e semialgébrica e* $f_k^A(x) < f_{k+1}^A(x)$, *para todo* $x \in A$;

3. *todos os conjuntos da forma*
   $\mathfrak{B}$ *(tipo "band")*

   $$\{(x,t) \in \mathbb{R}^n\,;\, x \in A,\ f_k^A(x) < t < f_{k+1}^A(x)\} \ k = 0, 1, ..., s_A$$

   ou
   $\mathfrak{g}$ *(tipo "gráfico")*

   $$\{(x,t) \in \mathbb{R}^n\,;\, x \in A,\ t = f_k^A(x)\} \ k = 1, ..., s_A$$

   são semialgébricos;

4. *a coleção dos conjuntos definidos em 3) forma uma partição de* $\mathbb{R}^n$ *com a propriedade que um membro desta partição só intersecta* X *se estiver contido em* X*; em particular, existe uma subcoleção que constitui uma partição de* X.

Prova: Veja [1], p. 54. $\square$

Observação 0.1.5 Os conjuntos do tipo $\mathfrak{B}$ ou $\mathfrak{g}$ que aparecem no item *3* do teorema acima (também chamados de *células da decomposição*) têm propriedades adicionais (ou podem ser escolhidos para terem). Com efeito, em [8] (veja na p. 38) estes conjuntos são construídos de tal forma que cada um deles é uma subvariedade semialgébrica analítica de $\mathbb{R}^n$ (uma *variedade de Nash*) semialgebricamente difeomorfa à algum hipercubo aberto $(0,1)^d (= \overbrace{(0,1) \times \cdots \times (0,1)}^{d\,vezes})$; mais ainda, o bordo (em X) de uma célula C de dimensão d é a reunião de células de dimensão menor do que d.

Em geral, quando um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ admite uma partição localmente finita $\mathfrak{P}$ de modo que cada membro de $\mathfrak{P}$ é uma subvariedade conexa de classe C^k $(k = 0, 1, ..., \infty, \omega)$ em $\mathbb{R}^n$ e $\mathfrak{P}$ satisfaz

$$A, B \in \mathfrak{P},\ B \cap (\overline{A} \setminus A) \neq \varnothing \Rightarrow B \subset (\overline{A} \setminus A) \text{ e } dim(B) < dim(A),$$

onde $\overline{A}$ significa o fecho de A em X, dizemos que $\mathfrak{P}$ é uma C^k-*estratificação de* X e um elemento de $\mathfrak{P}$ é chamado de *estrato*.

Corolário 0.1.6 *Todo conjunto semialgébrico* X *possui uma* C^ω*-estratificação semialgébrica finita.* □

Corolário 0.1.7 *Todo conjunto semialgébrico tem apenas um número finito de componentes conexas que são semialgébricas; em particular, todo semialgébrico é localmente conexo.*

Prova: Antes de começar a prova temos a

Definição 0.1.8 Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico e considere uma decomposição cilíndrica de X (como no Teorema 0.1.4) tal que X é a reunião de células $C_1, ..., C_k$. A *dimensão de* X, $dim(X)$, é definida como $dim(X) := \max_i \{dim(C_i)\}$, onde $dim(C_i)$ denota a dimensão de C_i como variedade diferenciável (veja a Observação 0.1.5).

É fácil ver que $dim(X)$ é um número bem definido. Se é dado $x \in X$ e existe $\varepsilon > 0$ tal que $X \cap B_{x,\varepsilon}$ é uma variedade suave de mesma dimensão que X, então dizemos que x é um *ponto suave de* X; caso contrário, x é dito um *ponto singular de* X.

Voltando à prova do Corolário 0.1.7 (e aproveitando a notação da definição acima), como cada C_i é um semialgébrico conexo, uma componente conexa de X deve ser a reunião de alguns $C_i's$, donde semialgébrica; consequentemente, X não tem mais do que k componentes conexas.

Finalmente, tome $x \in X$ e seja U uma vizinhança de x em X. Escolhendo $\varepsilon > 0$ tal que $B := B_{x,\varepsilon} \cap X \subset U$, seja A a componente conexa de B contendo x; pelo que já provamos, A é um aberto (em X) conexo tal que $x \in A \subset U$, donde X é localmente conexo. □

Corolário 0.1.9 (Tarski-Seidenberg) *Sejam* $X \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *um conjunto semialgébrico e* $P : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ *a projeção nas* n *primeiras coordenadas. Então,* $P(X)$ *é um semialgébrico de* $\mathbb{R}^n$*. Ademais, se* $f : X \to Y$ *é semialgébrica e* $B \subset Y$ *é semialgébrico, então* $f(X) \subset Y$ *e* $f^{-1}(B) \subset X$ *são conjuntos semialgébricos.*

Prova: Para $0 \leq i \leq m-1$, seja $P_i : \mathbb{R}^{n+m-i} \to \mathbb{R}^{n+m-i-1}$ a projeção nas $n+m-i-1$ primeiras coordenadas. Sendo $P = P_{m-1} \circ \cdots \circ P_0$, basta considerar o caso em que $m = 1$. Aproveitando a notação da prova do corolário anterior, temos $P(X) = \bigcup_{i=1}^{k} P(C_i)$. Acontece que cada C_i pertence a $\mathfrak{B}$ ou a $\mathfrak{g}$, isto é, $P(C_i)$ é um semialgébrico A da partição $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ citada no Teorema 0.1.4; logo, $P(X)$ é semialgébrico. Para provar a última afirmação observe que $f(X) = P'(\mathfrak{g}_f)$, sendo P' a projeção nas últimas m coordenadas, se $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m$. Por outro lado, temos $f^{-1}(B) = P(\mathfrak{g}_f \cap (X \times B))$. $\square$

Como uma primeira aplicação do Teorema de Tarski-Seidenberg, vamos mostrar que a função distância $d_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $d_X(y) = d(y, X)(= \inf_{x \in X} |y-x|)$, é semialgébrica, sendo $X \subset \mathbb{R}^n$ semialgébrico (como $d_X = d_{\overline{X}}$, podemos supor que X é fechado). Com efeito, considere os conjuntos semialgébricos $A := \{(y, x, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times X \times \mathbb{R} \, ; \, |y-x|^2 \leq \varepsilon^2\}$, $B := \{(y, x, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times X \times \mathbb{R} \, ; \, |y-x|^2 < \varepsilon^2\}$ e a projeção $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $\pi(y, x, \varepsilon) = (y, \varepsilon)$. Agora basta observar que $\mathfrak{g}_{d_X} = \pi(A) \cap (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \pi(B))$. Em particular, o fecho $\overline{X}$ de X é semialgébrico, pois $\overline{X} = d_X^{-1}(0)$.

Corolário 0.1.10 *$f = (f_1, f_2) : X \to Y \times Z$ é semialgébrica se, e somente se, f_1, f_2 são aplicações semialgébricas; a soma, o produto e a composição de aplicações semialgébricas é semialgébrica.*

Prova: Suponha $X \subset \mathbb{R}^m, Y \subset \mathbb{R}^n$ e $Z \subset \mathbb{R}^p$. Como $f_1 = P_1 \circ f, f_2 = P_2 \circ f$, onde $P_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n, P_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ são as projeções canônicas, fica fácil concluir a parte "somente se"da primeira afirmação. Se agora temos f_1, f_2 semialgébricas, então $(\mathfrak{g}_{f_1} \times \mathfrak{g}_{f_2}) = \{(x, f_1(x), y, f_2(y)) \, ; \, x, y \in X\}$ é um semialgébrico de $\mathbb{R}^{2m+n+p} \Rightarrow A := \{(x, y, f_1(x), f_2(y)) \, ; \, x, y \in X\}$ é um semialgébrico de $\mathbb{R}^{2m+n+p} \Rightarrow \{(x, x, f_1(x), f_2(x)) \, ; \, x \in X\} = A \cap \{(s, t, u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \, ; \, s = t\} \subset \mathbb{R}^{2m+n+p}$ é semialgébrico $\overset{\text{(por Tarski-Seidenberg)}}{\Longrightarrow}$ $\mathfrak{g}_f = \{(x, f_1(x), f_2(x)) \, ; \, x \in X\}$ é um semialgébrico de $\mathbb{R}^{m+n+p} \Rightarrow f$ é semialgébrica. Quanto à segunda afirmação, basta provar que a composição $g \circ f$ de aplicações semialgébricas $f : X \to Y, g : Y \to Z$ é semialgébrica, pois a soma e o produto (interno, no caso $n > 1$) definem aplicações semialgébricas de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}$, respectivamente. Ora, a aplicação $\psi : X \times Y \to X \times Z$, $\psi(x, y) = (x, g(y))$, é semialgébrica e $\mathfrak{g}_{g \circ f} = \psi(\mathfrak{g}_f)$. Assim, não há mais nada o que provar. $\square$

Observação 0.1.11 A proposição anterior nos conta que o conjunto de todas as funções (com valores reais) semialgébricas definidas num dado semialgébrico X tem uma estrutura natural de anel; costuma-se denota-lo por $\mathcal{S}(X)$.

0.2 Complexos Simpliciais e Triangulação

Definição 0.2.1 Um *complexo simplicial (finito)* em $\mathbb{R}^n$ é uma coleção finita $K = \{S_1, ..., S_p\}$ de simplexos geométricos de $\mathbb{R}^n$ satisfazendo às seguintes condições:

1. Toda face de S_i pertence a K, $i = 1, ..., p$.

2. A interseção $S_i \cap S_j$ de dois simplexos de K ou é vazia ou é uma face comum a S_i, S_j.

A reunião $|K| := \bigcup_{i=1}^{p} S_i$ e o subconjunto (de K) $K^q := \{S_i\, ;\, dim(S_i) \leq q\}$, são chamados de *poliedro* e *q-ésimo esqueleto* associados a K, respectivamente. Também dizemos que K é uma decomposição simplicial de $|K|$.

Portanto, um poliedro é um conjunto semialgébrico e "linear por partes", partes estas que se intersectam de uma maneira "regular". Nosso interesse nesta classe de conjuntos reside na estrutura *afim* que podemos explorar e que torna sua topologia mais simples de descrever. Por exemplo, se P é um poliedro, podemos considerar sua *homologia simplicial*, uma teoria de homologia específica da estrutura simplicial de P (cujas cadeias são todas semialgébricas) que é canonicamente isomorfa à homologia singular de P. Em particular, segue-se que a homologia singular de todo poliedro (finito) é finitamente gerada (pois sua homologia simplicial é finitamente gerada; para todos estes fatos, veja [14]). Assim, é natural se questionar quando um espaço topológico X é um poliedro topológico (alguns textos usam a terminologia "poliedro abstrato"), isto é, se existe um poliedro P em algum espaço euclideano e um homeomorfismo $\phi : P \to X$. Com isso, as boas propriedades topológicas de P serão transferidas para X. Um poliedro topológico é também o que se chama de *espaço triangulável* e um homeomorfismo como φ é chamado de *triangulação*. Nosso próximo resultado versa exatamente sobre isso: "todo semialgébrico compacto é (semialgebricamente) triangulável". Na verdade, o teorema abaixo é mais forte.

Teorema 0.2.2 *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico compacto e $X_1, ..., X_p$ subconjuntos semialgébricos de X. Então, existe um complexo simplicial K em $\mathbb{R}^n$ e um homeomorfismo semialgébrico $\varphi : |K| \to X$ tal que cada X_i é a imagem por φ da união de simplexos abertos de K.*

Prova: veja [8], p. 51. $\square$

Corolário 0.2.3 *Seja X como no teorema anterior. Se $H_k^{SA}(X)$ denota o k-ésimo grupo de homologia singular semialgébrica de X, então o "mergulho" canônico*

$$H_k^{SA}(X) \hookrightarrow H_k(X),\ [\xi] \mapsto [\xi],$$

é um isomorfismo.

Prova: Basta observar que o teorema é verdadeiro quando X é um complexo simplicial (veja [14], p. 326). Pelo Teorema de Triangulação, obtemos o resultado para qualquer semialgébrico X. $\square$

O resto dessa subseção é dedicado ao estudo de algumas propriedades concernentes a complexos simpliciais.

Lembramos que uma *subdivisão (simplicial)* de um complexo simplicial K significa um outro complexo simplicial K' tal que $|K'| = |K|$ e cada simplexo de K' está contido em algum simplexo de K. Se S é um simplexo com vértices $e_0, ..., e_p$ (notação: $S = [e_0, ..., e_p]$), uma aplicação $f : S \to \mathbb{R}^m$ é *linear* quando $f(\sum a_i e_i) = \sum a_i f(e_i)$, sempre que os $a_i's$ forem reais não-negativos tais que $\sum a_i = 1$.

Definição 0.2.4 Sejam K e L complexos simpliciais. Uma aplicação $f : |K| \to |L|$ é dita

- *linear (relativa a K e L)* quando f aplica cada simplexo de K linearmente num simplexo de L (por abuso de linguagem, diremos simplesmente que $f : K \to L$ é linear).
- *Linear por partes* se, para alguma subdivisão K' de K, $f : K' \to L$ é linear.

Seja K um complexo simplicial conexo em $\mathbb{R}^n$, isto é, tal que $P = |K|$ é conexo. Então, além da métrica induzida por $\mathbb{R}^n$, podemos definir em P uma "métrica poligonal" d_p: para $x, y \in P$, defina $d_p(x, y)$ como o ínfimo dos comprimentos das poligonais em P que ligam x a y. É claro que d_p é bem definida e a verificação que d_p é uma métrica é rotineira. Observamos que sempre existe a poligonal C que realiza a distância entre dois pontos x e y (use Ascoli-Arzelá), ou seja, $l(C) = d_p(x, y)$ ($l(C)$, como usual, denota o comprimento de C). A próxima proposição nos diz que todo poliedro conexo é "normalmente mergulhado".

Proposição 0.2.5 *Seja K um complexo simplicial conexo em $\mathbb{R}^n$. Existe uma constante $k > 0$ tal que*

$$d_p(x, y) \leq k|x - y|$$

quaisquer que sejam os pontos $x, y \in |K|$.

Prova: Vamos usar indução sobre a dimensão m de K. O caso $m = 1$ não oferece dificuldades, uma vez que K é, neste caso, uma poligonal. Agora suponha o teorema verdadeiro para $m-1$, $m \geq 2$. Se a proposição falhasse para K, existiriam sequências $(x_k), (y_k)$ em $|K|$ tais que

$$\tfrac{d_p(x_k,y_k)}{|x_k-y_k|} \longrightarrow +\infty \qquad (1).$$

Pela hipótese de indução, podemos supor que existem simplexos $S, S' \in K$ com $S \cap S' \neq \varnothing$ e $x_k \in int(S), y_k \in S'$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Assim, (1) ainda acontece se d_p é a métrica poligonal do poliedro $S \cup S'$. Se $S = [e_0, ..., e_m]$ e pomos $A := [e_0, ...e_{r-1}]$, $F := S \cap S' = [e_r, ..., e_m]$, sabemos que S é a *junção* de A com F, ou seja,

$$S = A * F := \{(1-t)x + ty\,;\, x \in A,\, y \in F \text{ e } t \in [0,1]\}.$$

Portanto, existem (para cada $k \in \mathbb{N}$) pontos $w_k \in A, z_k \in F$ e um $t_k \in (0,1)$ tais que $x_k = (1-t_k)w_k + t_k z_k$. Considere o triângulo $x_k y_k z_k$ e sejam $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ seus ângulos internos de vértices z_k, x_k, y_k, respectivamente.
Afirmação: $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$.
Com efeito, temos pela lei dos senos que

$$\begin{aligned} \frac{|x_k - z_k| + |y_k - z_k|}{|x_k - y_k|} = \frac{\text{sen}\beta_k + \text{sen}\gamma_k}{\text{sen}\alpha_k} &\leq \frac{2\text{sen}((\beta_k + \gamma_k)/2)}{\text{sen}\alpha_k} \\ &= \frac{2\text{sen}(\pi/2 - \alpha_k/2)}{\text{sen}\alpha_k} \\ &= (\text{sen}(\alpha_k/2))^{-1} \quad . \end{aligned}$$

Mas, por (1), vem $\frac{|x_k-z_k|+|y_k-z_k|}{|x_k-y_k|} \longrightarrow +\infty$, donde $\text{sen}(\alpha_k/2) \longrightarrow 0$ e fica provada a afirmação.

Agora escolhemos um hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$ com $H \supset F$ e tal que $S \setminus F$ e $S' \setminus F$ estejam em semiespaços (abertos) distintos determinados por H (logo, $A \cap H = \varnothing$). Cada segmento $\overline{x_k y_k}$ intersecta H num único ponto y'_k, e daí o ângulo θ_k do vértice z_k do triângulo $x_k y'_k z_k$ satisfaz $\theta_k \leq \alpha_k$, donde $\lim\limits_{k\to\infty} \theta_k = 0$.

Finalmente, seja (para cada k) u_k o único ponto do raio $\overrightarrow{z_k y'_k}$ que dista 1 de z_k. A menos de tomar subsequências, temos $w_k \to w \in A, z_k \to z \in F, u_k \to u \in H$ e o que já provamos acima nos garante que os vetores $w - z$ e $u - z$ são não-nulos e colineares, isto é, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ com $w - z = \lambda(u - z) \Rightarrow w = (1-\lambda)z + \lambda u \in H$, um absurdo. $\square$

Definição 0.2.6 Sejam $(M,d), (\widetilde{M}, \widetilde{d})$ espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to \widetilde{M}$ é dita *Lipschitziana* (ou *Lipschitz*) quando existe uma constante $\kappa > 0$ tal que

$$\widetilde{d}(f(x), f(y)) \leq \kappa\, d(x,y)$$

quaisquer que sejam os pontos $x, y \in M$. Se acontecer de uma bijeção Lipschitz f ter inversa Lipschitz, dizemos que f é *bi-Lipschitz* (e que X e Y são *bi-lipschitz equivalentes*).

Se $K = \{S_1, ..., S_p\}$ for um complexo simplicial, uma aplicação $f : |K| \to \mathbb{R}^m$ é *Lipschitziana por partes* quando cada restrição $f|_{S_i}$ for Lipschtiziana.

Corolário 0.2.7 *Toda aplicação Lipschitziana por partes $f : K \to \mathbb{R}^m$ é Lipschitziana. Em particular, aplicações lineares por partes entre complexos simpliciais são sempre Lipschitzianas.*

Prova: É claro que podemos supor K conexo, já que a distância entre duas componentes conexas de $|K|$ é sempre um número positivo. Seja $K = \{S_1, ..., S_p\}$. Então, cada restrição $f|_{S_i}$ é Lipschitziana, donde existe uma constante $M > 0$ satisfazendo

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|, \,\forall\, x, y \in S_i,\, i \in \{1, ..., p\}.$$

Agora, se $x, y \in |K|$ são pontos arbitrários, tome a "geodésica"C ligando x a y e nela escolha pontos $z_0 = x, z_1, ..., z_q, z_{q+1} = y$ tais que cada segmento $\overline{z_i z_{i+1}}$ esteja contido em algum simplexo de K. Com isso,

$$|f(x) - f(y)| \leq \sum |f(z_i) - f(z_{i+1})| \leq M \sum |z_i - z_{i+1}| \leq Mk|x-y|$$

onde k é a constante que figura na proposição anterior. $\square$

0.3 Teorema de Hardt e Estrutura Cônica Local

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico. Se construímos uma decomposição cilíndrica para X como no Teorema 0.1.4, notamos que a projeção $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ restrita a X é "trivial"sobre cada elemento da correspondente partição semialgébrica $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}^{n-1}$, no sentido dos espaços fibrados. Isso nos leva à seguinte

Definição 0.3.1 Uma aplicação contínua e semialgébrica $f : X \to \mathbb{R}^k$ é dita *semialgebricamente trivial sobre* C, $C \subset \mathbb{R}^k$ semialgébrico, se existe um conjunto semialgébrico F e um homeomorfismo semialgébrico $h : f^{-1}(C) \to C \times F$ tal que $\pi \circ h = f|_{f^{-1}(C)}$, sendo $\pi : C \times F \to C$ a projeção canônica. Dizemos que h é uma *trivialização de f sobre C*. Finalmente, diremos que a trivialização h é *compatível com A*, $A \subset X$ semialgébrico, se existe um subconjunto semialgébrico $G \subset F$ tal que $h(A \cap f^{-1}(C)) = C \times G$ (e daí, $h|_{A \cap f^{-1}(C)}$ é uma trivialização de $f|_A$ sobre C).

O próximo teorema garante que a propriedade observada acima para projeções acontece para qualquer aplicação contínua e semialgébrica.

Teorema 0.3.2 (Hardt) *Para $f : X \to \mathbb{R}^k$ contínua e semialgébrica existe uma partição semialgébrica finita $\{C_i\}$ de $\mathbb{R}^k$ tal que f é semialgebricamente trivial sobre cada C_i. Mais ainda, se $A_1, ..., A_r$ forem subconjuntos semialgébricos de X, é possível escolher cada trivialização $h_i : f^{-1}(C_i) \to C_i \times F_i$ compátivel com todos os A_j's.*

Prova: Veja [1], p. 98. $\square$

Se $B \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$, o *cone sobre B com vértice em a* é o conjunto

$$a * B := \{y \in \mathbb{R}^n \,;\, \exists\, t \in [0,1] \text{ e } x \in B \text{ com } y = ta + (1-t)x\}.$$

Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico e $x_0 \in X$ um ponto de acumulação. Uma consequência importante do Teorema de Hardt é a estrutura cônica local topológica dos conjuntos semialgébricos.

Teorema 0.3.3 (Estrutura Cônica Local) *Para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe um homeomorfismo semialgébrico $\varphi : X \cap \overline{B}_{x_0,\varepsilon} \to x_0 * (X \cap S_{x_0,\varepsilon})$ tal que $|\varphi(x) - x_0| = |x - x_0|$ e $\varphi|_{X \cap S_{x_0,\varepsilon}} = Id$.*

Prova: Vamos aplicar o Teorema de Hardt à aplicação $f : X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x - x_0|$. Assim, obtemos trivializações de f sobre uma partição semialgébrica finita de $\mathbb{R}$. Naturalmente, podemos supor que esta partição contém algum intervalo da forma $(0, \varepsilon_0)$. Portanto, existe um homeomorfismo semialgébrico

$$\widetilde{h} : f^{-1}((0, \varepsilon_0)) \to (0, \varepsilon_0) \times F$$

tal que $\widetilde{h}(x) = (|x - x_0|, \overline{h}(x))$. Agora escolhemos $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e notamos que $\mathfrak{h} := \overline{h}|_{f^{-1}(\varepsilon)}$ é um homeomorfismo semialgébrico de $f^{-1}(\varepsilon) = X \cap S_{x_0,\varepsilon}$ sobre F, donde

$$h(x) = (|x - x_0|, \mathfrak{h}^{-1}(\overline{h}(x)))$$

é um homeomorfismo semialgébrico de $f^{-1}((0, \varepsilon_0))$ sobre $(0, \varepsilon_0) \times (X \cap S_{x_0,\varepsilon})$ tal que $g := \mathfrak{h}^{-1} \circ \overline{h}$ restrita a $X \cap S_{x_0,\varepsilon}$ é a identidade. Agora definimos $\varphi : X \cap \overline{B}_{x_0,\varepsilon} \to x_0 * (X \cap S_{x_0,\varepsilon})$ por

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1 - \frac{|x-x_0|}{\varepsilon})x_0 + \frac{|x-x_0|}{\varepsilon} g(x) & \text{se} \quad x \neq x_0 \\ x_0 & \text{se} \quad x = x_0. \end{cases}$$

A inversa de φ é dada por

$$\varphi^{-1}(tx_0 + (1-t)x) = \begin{cases} h^{-1}((1-t)\varepsilon, x) & \text{se} \quad t \in [0,1),\, x \in X \cap S_{x_0,\varepsilon} \\ x_0 & \text{se} \qquad t = 1\,. \quad \square \end{cases}$$

Corolário 0.3.4 *Todo conjunto semialgébrico é localmente contrátil.*

Prova: Com efeito, qualquer cone é contrátil. $\square$

Observação 0.3.5 Como se observa em [9], o corolário anterior tem consequências importantes para a topologia algébrica de um semialgébrico X:
(i) todas as teorias usuais de cohomologia (singular, Alexander, Čech) são isomorfas sobre X;
(ii) se X for conexo, então X possui um recobrimento universal $\widetilde{X}$.

O teorema anterior permite definir um importante objeto (local) associado a um conjunto semialgébrico.

Definição 0.3.6 Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico e $x_0 \in X$ um ponto de acumulação. O *Link de X em x_0*, $L_{x_0}(X)$, é o semialgébrico $X \cap S_{x_0,\varepsilon}$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Observação 0.3.7 Graças ao Teorema 0.3.3, $L_{x_0}(X)$ é bem definido (a menos de homeomorfismos semialgébricos). Portanto, a essência do Teorema 0.3.3 é que, localmente, todo semialgébrico é um cone sobre o respectivo Link.

Quando x_0 é uma singularidade isolada, $L_{x_0}(X)$ é suave. Vamos registrar este fato.

Proposição 0.3.8 *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um semialgébrico com uma singularidade x_0 isolada. Então, $L_{x_0}(X)$ é uma variedade suave.*

Prova: Como nosso estudo é local, podemos supor que $A := X \setminus \{x_0\}$ é suave. Agora consideramos a aplicação suave e semialgébrica $f : A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x - x_0|$. Observe que A é não-transversal a $S_{x_0,\varepsilon}$ num ponto $x \in A \cap S_{x_0,\varepsilon}$ se, e somente se, x é um ponto crítico de f. Logo, se $C = \{x \in A\,;\, \nabla f(x) = 0\}$, o Teorema de Sard nos garante que $f(C) \subset (0, +\infty)$ é um conjunto de medida nula (e também é semialgébrico, pois C é semialgébrico), donde um conjunto finito. Portanto, para todo $\varepsilon \in (0, \min f(C))$, A intersecta $S_{x_0,\varepsilon}$ transversalmente, e daí $L_{x_0}(X)$ é suave. $\square$

0.4 Número de Crescimento de Volume

Dados os subconjuntos de $\mathbb{R}^3$

$$Z := \{(x,y,z)\,;\, x^2+y^2=z^2,\ z\geq 0\}$$
$$W := \{(x,y,z)\,;\, x^2+y^2=z^3,\ z\geq 0\}$$

como decidir se Z e W são (ou não) bi-Lipschitz equivalentes (com a métrica induzida, por exemplo)? Analisar a estrutura métrica destes conjuntos perto da singularidade talvez seja o ponto de partida mais natural na procura da solução. De fato, quando visualisamos Z e W no espaço euclideano percebemos que a porção $W \cap B_{x_0,\varepsilon}$ desaparece mais rapidamente do que a porção $Z \cap B_{x_0,\varepsilon}$ quando $\varepsilon \to 0$. Espera-se, então, que estes conjuntos apresentem tipos Lipschitz distintos. Logo mais, este fato estará provado, mas, primeiramente, vamos tornar preciso esse novo ponto de vista.

Definição 0.4.1 Sejam $Y, Z \subset \mathbb{R}^n$ e k um número real não-negativo. O *k-ésimo número de crescimento de volume de Y com relação a Z* é um número $\mu_k(Y,Z) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ satisfazendo à seguinte condição:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathcal{H}^k(Y\cap U_\varepsilon(Z))}{\varepsilon^r} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad r<\mu_k(Y,Z) \\ \infty, & \text{se} \quad r>\mu_k(Y,Z) \end{cases},$$

onde $\mathcal{H}^k$ denota a medida de Hausdorff k-dimensional e $U_\varepsilon(Z)$ é a ε-vizinhança de Z em $\mathbb{R}^n$.

Observação 0.4.2 Naturalmente, $\mu_k(Y,Z)$ é único, quando existe. Note que $\mu_k(Y,Z)=\infty$ sempre que $k > dim_{\mathcal{H}}(Y)$(= dimensão de Hausdorff de Y). Quando $k = dim_{\mathcal{H}}(Y)$, escreveremos $\mu(Y,Z)$ em vez de $\mu_k(Y,Z)$.

Não importa qual das três métricas usuais de $\mathbb{R}^n$ se considera para o cálculo de $\mu_k(Y,Z)$. De fato, se d é a métrica euclideana e d' é uma outra métrica equivalente à ela, no sentido que existem $k_1,k_2>0$ tais que

$$k_1^{-1}d(x,y)\leq d'(x,y)\leq k_2^{-1}d(x,y) \ \ \forall\, x,y\in\mathbb{R}^n,$$

tem-se (notação óbvia)

$$Y\cap U_{k_2\varepsilon}(Z)\subset Y\cap U'_\varepsilon(Z)\subset Y\cap U_{k_1\varepsilon}$$

para todo $\varepsilon>0$.

Agora daremos uma estimativa para o número de crescimento de volume de um semialgébrico Y com relação a um ponto $y_0\in Y$. Antes, vejamos um resultado de existência:

Teorema 0.4.3 *Sejam $Y, Z \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos semialgébricos dos quais pelo menos um é limitado. Então, existe um número $\beta \in \mathbb{Q}$ tal que, para cada par (δ, ε) de números reais positivos suficientemente pequenos,*

$$\varepsilon^{\beta+\delta} \leq \mathcal{H}^{dimY}(Y \cap U_\varepsilon(Z)) \leq \varepsilon^{\beta-\delta}.$$

Este teorema é uma consequência dos resultados obtidos em [15]. Como corolário imediato, temos que $\mu(Y, Z)$ sempre existe para Y, Z semialgébricos limitados, e mais: $\mu(Y, Z)(= \beta) \in \mathbb{Q}$.

Proposição 0.4.4 *Sejam $Y \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico e $y_0 \in Y$. Então, $\mu(Y, y_0) \geq dimY$.*

Para provar esta proposição necessitaremos do seguinte

Lema 0.4.5 *O número de crescimento de volume é um invariante Lipschitz, ou seja, se X e $\widetilde{X}$ forem subconjuntos de algum espaço euclideano, $Y, Z \subset X$ e $f : X \to \widetilde{X}$ for um homeomorfismo bi-Lipschitz (com relação à métrica induzida), então*

$$\mu_k(\widetilde{Y}, \widetilde{Z}) = \mu_k(Y, Z)$$

onde $\widetilde{Y} = f(Y)$ e $\widetilde{Z} = f(Z)$ (pressupomos na igualdade acima que $\mu_k(Y, Z)$ ou $\mu_k(\widetilde{Y}, \widetilde{Z})$ existem).

Prova: Existe $K > 0$ tal que $K^{-1}|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Portanto, se é dado $\varepsilon > 0$, são válidas as inclusões

$$Y \cap U_{K^{-1}\varepsilon}(Z) \subset f^{-1}(\widetilde{Y} \cap U_\varepsilon(\widetilde{Z})) \subset Y \cap U_{K\varepsilon}(Z)$$

donde

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{H}^k(f^{-1}(\widetilde{Y} \cap U_\varepsilon(\widetilde{Z}))}{\varepsilon^r} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad r < \mu_k(Y, Z) \\ \infty, & \text{se} \quad r > \mu_k(Y, Z). \end{cases}$$

Por outro lado, também é verdade que

$$K^{-k}\mathcal{H}^k(\widetilde{Y} \cap U_\varepsilon(\widetilde{Z})) \leq \mathcal{H}^k(f^{-1}(\widetilde{Y} \cap U_\varepsilon(\widetilde{Z})) \leq K^k\mathcal{H}^k(\widetilde{Y} \cap U_\varepsilon(\widetilde{Z}))$$

donde segue que $\mu_k(\widetilde{Y}, \widetilde{Z}) = \mu_k(Y, Z)$ (aqui usamos que $\pi : A \to B$ Lipschitz com constante Lipschitz C implica $\mathcal{H}^m(\pi(A)) \leq C^m\mathcal{H}^m(A)$; veja [10]). □

Prova da Proposição 0.4.4: Primeiro note que a conclusão é imediata se $Y \subset \mathbb{R}^n$ e $dim(Y) = n$, pois $\mathcal{H}^n(Y \cap B_\varepsilon(y_0)) \leq M\varepsilon^n$ para todo $\varepsilon > 0$ e para uma certa constante positiva M. Assim, o quociente de $\mathcal{H}^n(Y \cap B_\varepsilon(y_0))$ por ε^n é limitado para todo ε, o que mostra ser $\mu(Y, y_0) \geq n$. A idéia agora é reduzir o caso geral à este considerando um tipo de decomposição especial do conjunto Y chamada de *decomposição em panqueca* ([13]). Explicitamente, se $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto semialgébrico fechado, uma decomposição em panqueca de X é uma família finita $\{X_i\}_{i=1}^p$ de subconjuntos semialgébricos fechados de X satisfazendo às seguintes condições:

1. $X = \bigcup_{i=1}^{p} X_i$.

2. Quaisquer que sejam os inteiros $i, j \in \{1, ..., p\}$ vale $dim(X_i \cap X_j) < min\{dim(X_i), dim(X_j)\}$.

3. Para todo i existem um subespaço linear $E_i \subset \mathbb{R}^n$ com $dim(X_i) = dim(E_i)$ e uma projeção ortogonal $P_i : \mathbb{R}^n \to E_i$ tal que $P_i|_{X_i}$ é uma aplicação bi-Lipschitz sobre a imagem, onde a métrica de X_i é a intrínseca.

Portanto, seja $\{Y_i\}_{i=1}^p$ uma decomposição em panqueca de Y (é claro que podemos supor Y fechado, pois $\mu(Y, y_0) = \mu(\overline{Y}, y_0)$ e $dim(Y) = dim(\overline{Y})$). Sejam $Y_1, ..., Y_s$ as panquecas de dimensão $dim(Y) = m$ contendo y_0 e observe que $\mathcal{H}^m(Y \cap B_\varepsilon(y_0)) = \sum_{i=1}^{s} \mathcal{H}^m(Y_i \cap B_\varepsilon(y_0))$, donde $\mu(Y, y_0) = \min_i\{\mu(Y_i, y_0)\}$. Mas, aproveitando a notação acima, $\mu(Y_i, y_0) = \mu(P_i(Y_i), P_i(y_0)) \geq dim(E_i) = dim(Y)$, pelo Lema 0.4.5, e segue-se o resultado desejado. □

Agora vamos calcular $\mu(H_\beta, 0)$, sendo H_β a *β-corneta*

$$H_\beta := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x^2 + y^2 = z^{2\beta}, \quad z \geq 0\}$$

onde $\beta \geq 1$ é um racional. As β-cornetas desempenham um papel fundamental na classificação bi-Lipschitz de germes (X, x_0) sendo X um conjunto semialgébrico bi-dimensional e $x_0 \in X$ uma singularidade isolada; veja [2]. Vamos começar calculando $\mu(T_\beta, 0)$ para $T_\beta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 \leq y \leq x^\beta, \quad x \geq 0\}$(*$\beta$-triângulo de Hölder*). Ora, se $B' := B'_{0,\varepsilon}$ é a bola da métrica $d'((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$, temos (para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno) $T_\beta \cap B' = \{(x, y) \in T_\beta \,;\, x < \varepsilon\}$. Portanto,

$$\mathcal{H}^2(T_\beta \cap B') = \int_0^\varepsilon x^\beta dx = \frac{1}{\beta + 1}\varepsilon^{\beta+1}$$

donde $\mu(T_\beta, 0) = \beta + 1$. Agora observe que a Projeção $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $P(x, y, z) = (y, z)$, define um homeomorfismo bi-Lipschitz semialgébrico de $\Theta = H_\beta \cap \{|y| \leq x,\, x \geq 0\}$ sobre $\Xi = \{(y, z)\,;\, |y| \leq \frac{z^\beta}{\sqrt{2}},\quad z \geq 0\}$ (é claro que P define uma aplicação Lipschitz-semialgébrica entre estes conjuntos; como $\angle(T_p\Theta, \{x = 0\}) \leq \alpha$ para todo p na parte suave de Θ e para algum $\alpha \in (0, \pi/2)$, segue-se que P é bi-Lipschitz quando restrita à parte suave de Θ. Como tal parte suave é densa em Θ, $P|_\Theta : \Theta \to \Xi$ é bi-Lipschitz). Usando o Lema 0.4.5, temos $\mu(H_\beta, 0) = \mu(\Xi, 0) = \beta + 1$, pois $\Xi \cap \{y \geq 0\}$ é obviamente bi-Lipschitz equivalente a T_β.

Terminamos esta seção com algumas observações à respeito de um conjunto semialgébrico m-dimensional $X \subset \mathbb{R}^n$:

1. Quando calculamos $\mathcal{H}^m(X)$ estamos, na verdade, calculando o *volume m-dimensional de X*, ou seja, $\mathcal{H}^m(X) = vol_m(X)$. Também vale $dim_{\mathcal{H}}(X) = dim(X)$. Isto se deve pelo fato da medida m-dimensional de Hausdorff restrita à subvariedades m-dimensionais de $\mathbb{R}^n$ coincidir com a medida usual que ali se considera ([10], [20]). Já utilizamos esses fatos várias vezes acima.

2. Pode-se considerar em X duas métricas naturais: uma delas é a métrica induzida de $\mathbb{R}^n$, que denotaremos por d_{ind}, e a outra é a métrica intrínseca cuja notação é d_l. Lembramos que para $x, y \in X$, $d_l(x, y)$ é definido como o ínfimo dos comprimentos das curvas retificáveis $\gamma : [0, 1] \to X$ com $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Assim, d_l é bem definida quando X é conexo. Se consideramos a categoria cujos objetos são conjuntos semialgébricos e cujos isomorfismos são aplicações bi-Lipschitz semialgébricas, o seguinte resultado, cuja demonstração se encontra em [7], nos conta que não importa quais das duas métricas acima consideramos em X (pelo menos quando X é limitado).

   Teorema 0.4.6 *Para cada conjunto semialgébrico conexo e limitado $X \subset \mathbb{R}^n$ existe um conjunto semialgébrico $X' \subset \mathbb{R}^s$ tal que*

   (i) X' é normalmente mergulhado, isto é, existe uma constante $C > 0$ com $d_l(x, y) \leq C d_{ind}(x, y)$, quaisquer que sejam os pontos $x, y \in X'$.

   (ii) X' é bi-Lipschitz semialgebricamente equivalente a X com relação à métrica intrínseca.

3. $\mu_k(X, x_0)$ é intrínseco, ou seja, podemos calcular $\mu_k(X, x_0)$ usando a métrica intrínseca de X e mesmo assim obteremos o mesmo resultado quando utilizamos a métrica induzida. Para ver isso, considere uma decomposição em panqueca de X e note que cada panqueca é normalmente mergulhada (depois proceda como na prova da Proposição

0.4.4). Em particular, o Lema 0.4.5 continua válido se trocarmos a métrica induzida pela métrica intrínseca.

Capítulo 1

L-Estratificações e Homologia Métrica

Na construção da homologia métrica se faz uso de um tipo específico de estratificação que passamos a definir.

Definição 1.1 Dizemos que um conjunto semialgébrico $X \subset \mathbb{R}^n$ é *L-estratificado* quando existe uma partição finita $X = \bigcup_i X_i$ satisfazendo às seguintes condições:

1. Cada X_i é uma variedade Lipschitz-semialgébrica.

2. (Trivialidade Lipschitz Fraca) Dados dois pontos quaisquer $x, y \in X_i$, existem vizinhanças (abertas) U_x, U_y em X e uma aplicação bi-Lipschitz $h : U_x \to U_y$ tal que $h(x) = y$ e $h(X_j \cap U_x) = X_j \cap U_y \ \forall j$.

3. (Axioma do Bordo) Se $X_i \cap \partial X_j \neq \varnothing$, então $X_i \subset \partial X_j$.

A coleção $\{X_i\}$ é chamada uma *L-estratificação.*

Observamos que a condição 3 da definição acima segue da 2. Ora, suponha que em 2, $x \in X_i \cap \partial X_j$. Assim, para toda vizinhança B_y de y em $\mathbb{R}^n$, $B_x := h^{-1}(B_y \cap U_y)$ é uma vizinhança de x em X, donde $\varnothing \neq h(B_x \cap X_j) \supset B_y \cap X_j$ o que mostra que $y \in \overline{X}_j \backslash X_j = \partial X_j$.

Um resultado fundamental que decorre de [17] é o

Teorema 1.2 *Cada conjunto semialgébrico X admite alguma L-estratificação $\{X_i\}$.*

Dentre as várias L-estratificações que um conjunto semialgébrico X pode admitir, existe uma que não possui estrato "supérfluo". Mais explicitamente, defina uma relação de equivalência $\sim$ entre pontos do conjunto X por

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists U_x, U_y \text{ vizinhanças de } x \text{ e } y\text{, respectivamente, e uma aplicação bi-Lipschitz } h : U_x \to U_y \text{ tal que } h(x) = y.$$

Teorema 1.3 *O conjunto $X/\sim$ é finito; se $X/\sim = \{X^1, ..., X^s\}$, então $\{X^i\}_{i=1}^s$ é uma L-estratificação de X: a <u>L-estratificação canônica de X</u>.*

Prova: Para provar a primeira afirmação, usamos o Teorema 1.2 para garantir a existência de uma L-estratificação $\{X_j\}_{j=1}^k$ de X. Como todos os pontos de um dado estrato X_j são equivalentes segundo $\sim$, temos $\#\{X/\sim\} \leq k$. Agora provaremos que $\{X^i\}_{i=1}^s$ é uma L-estratificação de X. Como cada X^i é a união de alguns X_j resulta que X^i é semialgébrico e, portanto, existe x ponto suave de X^i; sendo este Lipschitz-homogêneo, concluímos que X^i é, de fato, uma variedade Lipschitz. Logo, $\{X^i\}_{i=1}^s$ cumpre todas as condições da Definição 1.1 como queríamos. $\square$

Corolário (da prova) 1.4 *Se $\{X_j\}$ é uma L-estratificação do conjunto semialgébrico X, então $\{X_j\}$ é um refinamento da L-estratificação canônica $\{X^i\}$.* $\square$

Como é de se esperar, aplicações bi-Lipschitz preservam L-estratificações canônicas como mostra a

Proposição 1.5 *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m, Y \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos semialgébricos, $h : X \to Y$ um homeomorfismo bi-Lipschitz e $\{X^i\}_{i=1}^s, \{Y^j\}_{j=1}^t$ as L-estratificações canônicas destes conjuntos. Então, $s = t$ e $h(X^i) = Y^i$ (a menos de uma reordenação de índices).*

Prova: Seja Z a união disjunta de X e Y em algum $\mathbb{R}^p$. É claro que a reunião das L-estratificações canônicas de X e Y fornece uma L-estratificação de Z. Por outro lado, $x \sim h(x)$ e $y \sim h^{-1}(y)$ em Z, $\forall\, x \in X, y \in Y$, isto é, cada $X_k \cup h(X_k)$ deve estar contido num estrato da L-estratificação canônica de Z. Pelo Corolário 1.4, tais estratos são reuniões de alguns $X_i's$ e $Y_j's$, e a única possibilidade é ter $h(X_k) = Y_j$ para algum j. $\square$

Agora passamos à definição da homologia métrica de um conjunto semialgébrico X.

Seja $\nu : [0, dim(X)] \cap \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}_+ \cup \{0\}$ uma *função de perversidade (de volume) em X*, isto é, $\nu(0) = 0$ e $\nu(i) \geq 1$ para $i > 0$. Fixe uma partição semialgébrica finita $\{X_j\}$ de X e considere uma k-cadeia semialgébrica $\eta = \sum a_i F_i$ (o que significa que as aplicações $F_i : \Delta_k \to X$ são semialgébricas), onde os coeficientes a_i pertencem a um grupo $\mathbb{G}$ ($\mathbb{G} = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$). Como usual, o *suporte de* η é o conjunto $|\eta| := \bigcup_{a_i \neq 0} F_i(\Delta_k)$. Dizemos que η é *admissível com respeito a* ν *e a partição* $\{X_j\}$ *se*

$$(*) \qquad \mu_k(|\eta|, X_j) \geq \nu(codim(X_j)) \text{ e } \mu_{k-1}(|\partial\eta|, X_j) \geq \nu(codim(X_j)), \ \forall\, j.$$

A condição $(*)$ permite que se considere o subcomplexo das cadeias (semialgébricas) admissíveis (com respeito a ν e $\{X_j\}$); a homologia métrica de X é, por definição, a homologia deste subcomplexo. Explicitamente:

Definição 1.6 Sejam $Z_k(\nu, \{X_j\})(X)$ o subgrupo dos k-ciclos semialgébricos admissíveis e $B_k(\nu, \{X_j\})(X)$ o subgrupo dos k-bordos semialgébricos admissíveis. Então, o grupo quociente

$$MH_k(\nu, \{X_j\})(X) := Z_k(\nu, \{X_j\})(X)/B_k(\nu, \{X_j\})(X)$$

é chamado o *k-ésimo grupo de homologia métrica de X com respeito à função de perversidade ν e a partição $\{X_j\}$.*

Observação 1.7 Quando $\{X_j\}$ for a L-estratificação canônica de X, chamaremos $MH_k(\nu, \{X_j\})(X)$ simplesmente de *k-ésimo grupo de homologia métrica de X com respeito a ν* e o denotaremos por $MH_k^{\nu}(X)$ (e as cadeias serão chamadas de ν-admissíveis ou, simplesmente, admissíveis, quando isso não causar confusão). Por exemplo, $MH_k^{\nu}(X) = H_k(X)$ se X é suave. Note que se η é uma k-cadeia semialgébrica degenerada ($dim(|\eta|) < k$) cujo bordo é ν-admissível, então η é ν-admissível para toda função de perversidade ν.

Teorema 1.8 (Invariância Lipschitz-semialgébrica da homologia métrica) *Se X e Y são semialgebricamente bi-Lipschitz equivalentes e ν é uma função de perversidade, então $MH_k^{\nu}(X)$ e $MH_k^{\nu}(Y)$ são isomorfos.*

Prova: Seja $h : X \to Y$ uma aplicação bi-Lipschitz semialgébrica. Assim, o Teorema 1.5 nos conta que $\{h(X_j)\}$ é a L-estratificação canônica de Y se $\{X_j\}$ for a L-estratificação canônica de X. Logo, uma cadeia semialgébrica η é ν-admissível em X se, e somente se, $h(\eta)$ é ν-admissível em Y (Lema 0.4.5). Segue-se que a correspondência $\eta \mapsto h(\eta)$ induz o isomorfismo desejado. $\square$

A homologia métrica tem-se mostrado útil no estudo da natureza de pontos singulares isolados em conjuntos semialgébricos. Por exemplo, uma pergunta relevante na teoria métrica das singularidades era se toda singularidade isolada de uma hipersuperfície complexa em $\mathbb{C}^n$ é do tipo cônico. Logo mais (seção 3), veremos que a resposta desta pergunta é não ([6]). O fato é que, para este tipo de questão, torna-se suficiente captar as informações métricas locais, ou seja, em torno do ponto singular:

Teorema 1.9 *Sejam X um conjunto semialgébrico e $x_0 \in X$ um ponto qualquer. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,*

$$MH^{\nu}_{loc,k}(X, x_0) := MH^{\nu}_{k}(X \cap B_{x_0,\varepsilon})$$

está bem definido e é chamado o k-ésimo grupo de homologia métrica local de X em x_0.

Prova: O que se precisa aqui é de uma versão bi-Lipschitz do Teorema de Hardt que pode ser encontrada em [19]. Depois usamos o Teorema 1.8. □

Observação 1.10 Se x_0 é um ponto singular isolado, o grupo $MH^{\nu}_{loc,k}(X, x_0)$ só depende do valor $\nu(dim(X))$, pois neste caso $\{X' := X \cap B_{x_0,\varepsilon} \setminus \{x_0\}, \{x_0\}\}$ é a L-estratificação canônica de $X \cap B_{x_0,\varepsilon}$. Assim, dada uma k-cadeia η (em $X \cap B_{x_0,\varepsilon}$) sempre vale $\mu_k(|\eta|, X') \geq 0 = \nu(codim(X'))$. Em outras palavras, o essencial na homologia métrica local é o conhecimento da velocidade de desaparecimento do suporte de cadeias em relação ao ponto singular.

Proposição 1.11 *Sejam X um conjunto semialgébrico e $x_0 \in X$ um ponto singular isolado com $dim(X) = n$. Então,*

$$MH^{\nu}_{loc,k}(X, x_0) = 0$$

para $\nu(n) \leq k + 1$.

Prova: Seja ξ um k-ciclo ν-admissível (em $X \cap B_{x_0,\varepsilon}$). Como $X \cap B_{x_0,\varepsilon}$ tem uma estrutura cônica semialgébrica, podemos construir uma $(k+1)$-cadeia semialgébrica "cônica"η tal que $\partial\eta = \xi$ (veja [14], p. 315; para concluir a existência de η também poderíamos utilizar o Corolário 0.2.3). Pela Proposição 0.4.4, $\mu_{k+1}(|\eta|, x_0) \geq k + 1 \geq \nu(n) \Rightarrow \eta$ é ν-admissível $\Rightarrow [\xi] = 0$ em $MH^{\nu}_{loc,k}(X, x_0)$. □

Observação 1.12 Já é hora de comentar alguns fatos peculiares da homologia métrica. O primeiro deles é que a homologia métrica *depende* da L-estratificação. De fato, se escolhermos uma função de perversidade ν tal que $\nu(0) = 0, \nu(1) = 1$ e $\nu(2) = a$, onde a é qualquer número racional maior do que 2, então $MH_1(\nu, \{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \{0\}\})(\mathbb{R}^2) \neq 0 = MH^{\nu}_1(\mathbb{R}^2)$. De fato, S^1 define um ciclo ξ ν-admissível e não-trivial em $MH_1(\nu, \{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \{0\}\})(\mathbb{R}^2)$, pois $\partial\eta = \xi \Rightarrow |\eta| \supset B_{0,1} \Rightarrow \mu(|\eta|, 0) = 2 < a = \nu(codim\{0\}) \Rightarrow \eta$ não é ν-admissível (para entender a primeira implicação, veja a prova do teorema abaixo).

Note que a perversidade escolhida acima, embora razoável, não satisfaz à condição de Goresky-MacPherson ([11]): $\nu(i+1) = \nu(i)$ ou $\nu(i)+1$. A razão de não adotarmos sistematicamente tais perversidades está na Proposição 1.11. Com efeito, uma perversidade ν de Goresky-MacPherson sempre satisfaz $\nu(n) \leq n$, donde $MH^{\nu}_{loc,n-1}(X, x_0) = 0$ pela proposição anterior. Assim, deixaríamos de captar objetos geométricos importantes como os *ciclos de Chegger* (seção 3).

Para finalizar, vamos calcular a homologia métrica local (em dimensão 1) do espaço M_{β_1,β_2} que é o conjunto semialgébrico em $\mathbb{R}^5$ definido pelo sistema:

$$\begin{cases} (x_1^2 + x_2^2) = y^{2\beta_1} \\ (x_3^2 + x_4^2) = y^{2\beta_2} \\ \quad y \geq 0 \ . \end{cases}$$

Escrevemos (x_1, x_2, x_3, x_4, y) para as coordenadas em $\mathbb{R}^5$, e β_1, β_2 são números racionais tais que $\beta_1 \geq \beta_2 \geq 1$. Como a interseção de M_{β_1,β_2} com cada hiperplano $y = a$ é (a menos de homeomorfismos) o toro bi-dimensional $\mathbb{T}^2$, visualizamos M_{β_1,β_2} como um cone sobre o toro e $0 \in \mathbb{R}^5$ é sua única singularidade.

Teorema 1.13

$$MH^{\nu}_{loc,1}(M_{\beta_1,\beta_2}, 0) = \begin{cases} 0 & se \quad 1 \leq \nu(3) \leq \beta_2 + 1 \\ \mathbb{R}^1 & se \quad \beta_2 + 1 < \nu(3) \leq \beta_1 + 1 \\ \mathbb{R}^2 & se \quad \beta_1 + 1 < \nu(3). \end{cases}$$

Prova: Começamos definindo as projeções $P_1, P_2 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ como

$$P_1(x_1, x_2, x_3, x_4, y) = (x_3, x_4, y) \text{ e } P_2(x_1, x_2, x_3, x_4, y) = (x_1, x_2, y)$$

e note que $P_1(M_{\beta_1,\beta_2}) = H_{\beta_2}$, $P_2(M_{\beta_1,\beta_2}) = H_{\beta_1}$ (veja a subseção 0.4). Se $\nu(3) = 1$, então $MH^{\nu}_{loc,1}(M_{\beta_1,\beta_2}, 0) = 0$, pela proposição anterior.

Agora deixamos $1 < \nu(3) \leq \beta_2 + 1$. Se ξ é um 1-ciclo admissível, então $|\xi| \subset X := (M_{\beta_1,\beta_2} \cap B_{0,\varepsilon}) \setminus \{0\}$. Como a inclusão $M_{\beta_1,\beta_2} \cap \{y = \frac{\varepsilon}{2}\} \approx \mathbb{T}^2 \hookrightarrow X$ induz um isomorfismo em homologia, temos que $[\xi] = k_1[\xi_1] + k_2[\xi_2]$, onde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ e ξ_1, ξ_2 são 1-ciclos em M_{β_1,β_2} definidos por:

$$\xi_1 : \ \ y = \tfrac{\varepsilon}{2}, \ \ x_1 = 0, \ \ x_2 = (\tfrac{\varepsilon}{2})^{\beta_1}$$

$$\xi_2 : \ \ y = \tfrac{\varepsilon}{2}, \ \ x_3 = 0, \ \ x_4 = (\tfrac{\varepsilon}{2})^{\beta_2}.$$

Naturalmente, $\xi_1 = \partial \eta_1$ e $\xi_2 = \partial \eta_2$ onde η_1, η_2 são as 2-cadeias em M_{β_1,β_2} dadas por

$$\eta_1: \quad y \le \tfrac{\varepsilon}{2}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = y^{\beta_1}$$

$$\eta_2: \quad y \le \tfrac{\varepsilon}{2}, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = y^{\beta_2}$$

(observe que $|\xi_1|, |\xi_2| \approx S^1$ e $|\eta_1|, |\eta_2| \approx 0 * S^1$). Pelos cálculos feitos na subseção 0.4, obtemos $\mu(|\eta_1|, 0) = \beta_2 + 1$ e $\mu(|\eta_2|, 0) = \beta_1 + 1$, donde segue que a 2-cadeia $\eta := k_1\eta_1 + k_2\eta_2$ é admissível. Como $\partial(\eta + \eta') = \xi$ para alguma 2-cadeia η' com $|\eta'| \cap \{0\} = \varnothing$, fica provado que $MH^{\nu}_{loc,1}(M_{\beta_1,\beta_2}) = 0$ para $1 \le \nu(3) \le \beta_2 + 1$.

Se agora $\beta_2 + 1 < \nu(3) \le \beta_1 + 1$, então a 2-cadeia η_2 construída acima continua sendo admissível, donde $[\xi_2] = 0$ em $MH^{\nu}_{loc,1}(M_{\beta_1,\beta_2}, 0)$. Provaremos agora que ξ_1 não pode ser o bordo de uma 2-cadeia admissível. Suponha $\xi_1 = \partial\eta$. Então, desde que $P_1(\xi_1)$ é um 1-ciclo em H_{β_2} com $\partial P_1(\eta) = P_1(\xi_1)$, concluímos que $(P_1(|\eta|) \supset)|P_1(\eta)| \supset H_{\beta_2} \cap B_{0,\frac{\varepsilon}{2}}$ (a razão é topológica: $H_{\beta_2} \approx \mathbb{R}^2$ e $P_1(\xi_1) = \xi_1 \approx S^1$; se uma 2-cadeia θ satisfaz $\partial\theta = S^1$, então $|\theta| \supset B_{0,1}$ simplesmente porque, para todo $p \in B_{0,1}$, $[S^1] \ne 0$ em $H_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\})$). Assim, $\mu(|\eta|, 0) \le \mu(P_1(|\eta|), 0) = \beta_2 + 1$, isto é, η é não-admissível. Com isso, ficamos com $MH^{\nu}_{loc,1}(M_{\beta_1,\beta_2}, 0) = \mathbb{R}^1$ para $\beta_2 + 1 < \nu(3) \le \beta_1 + 1$.

Finalmente, observamos que nada mais há o que fazer, pois se $\beta_1 + 1 < \nu(3)$, então $[\xi_1]$ e $[\xi_2]$ são linearmente independentes em $MH^{\nu}_{loc,1}(M_{\beta_1,\beta_2}, 0)$ pelo mesmo argumento usado no parágrafo anterior. $\square$

Capítulo 2

Expoentes Característicos e Cálculo da Homologia Métrica Local para Singularidades Isoladas do Tipo Cônico

Lembremos que o *Link* de X em x_0, $L_{x_0}(X)$, é a interseção de X com uma pequena esfera centrada em x_0, isto é, $L_{x_0}(X) := X \cap S_{x_0,\varepsilon}$, para $\varepsilon \sim 0$. Por [19], $L_{x_0}(X)$ está bem definido a menos de homeomorfismos bi-Lipschitz semialgébricos.

Existe um resultado clássico em teoria geométrica da medida que garante a existência de ciclos de massa mínima em cada classe de homologia (não nula) de uma variedade compacta M; em outras palavras, "ciclos pequenos são triviais":

Teorema 2.1 (Federer, Fleming) [10] *Seja M uma variedade riemanniana compacta. Para cada inteiro positivo k, existe uma constante $C(k) > 0$ tal que, se ξ for um ciclo k-dimensional em M com $vol(|\xi|) < C(k)$, então ξ é homologicamente trivial.*

O invariante que agora desejamos definir desempenha um papel semelhante à constante $C(k)$ do Teorema 2.1. Antes, vejamos como tal invariante surge nos exemplos já discutidos.

No cálculo da homologia métrica local de M_{β_1,β_2} feito na seção anterior, observamos como os números β_1, β_2 determinam $MH^{\nu}_{loc,1}(M_{\beta_1,\beta_2}, 0)$. Na verdade, um fato notável é que, para $\nu(3) > \beta_1 + 1$, $MH^{k}_{loc,1}(M_{\beta_1,\beta_2}, 0) \cong H_k(\underbrace{L_0(M_{\beta_1,\beta_2})}_{\mathbb{T}^2}) \cong \mathbb{R}^2$.

Alguma relação interessante entre a homologia métrica local e a homologia singular do Link sempre ocorre quando $\nu(dim(X))$ é muito "grande", e isso é consequência do fato que um ciclo do Link é trivial quando é bordo de uma cadeia que apresenta número de crescimento de volume muito alto no ponto singular. Por exemplo, considere uma β-corneta H_β. Se tomamos um 1-ciclo ξ no Link de H_β em 0 tal que $\xi = \partial\eta$ com $\mu(|\eta|, 0) > \beta + 1$, então ξ é (homologicamente) trivial. De fato, $L_0(H_\beta) \approx S^1$, donde $|\xi|$ deve omitir algum ponto de S^1 (e, então, acabou!), pois, não sendo este o caso, concluiríamos (como na prova do Teorema 1.13) que (para algum $\delta > 0$) $|\eta| \supset H_\beta \cap \{z \leq \delta\}$, o que contradiz $\mu(|\eta|, 0) > \beta + 1$. Continuando com essa linha de pensamento, transpomos a situação acima para M_{β_1,β_2}, sendo que agora $\mu(|\eta|, 0) > \beta_1 + 1$. Queremos $[\xi] = 0$ em $H_1(L_0(M_{\beta_1,\beta_2}))$. Ora, com a notação do Teorema 1.13, $P_1(\xi)$ e $P_2(\xi)$ são ciclos em H_{β_2} e H_{β_1}, com $\partial P_1(\eta) = P_1(\xi)$, $\partial P_2(\eta) = P_2(\xi)$. Pelo que vimos, $P_1(\xi)$ e $P_2(\xi)$ são triviais (pois $\mu(|P_i(\eta)|, 0) \geq \mu(|\eta|, 0) > \beta_i + 1$), donde ξ é trivial. (aqui usamos o fato que $H_1(M \times N) \cong H_1(M) \times H_1(N)$ por meio do isomorfismo

$$[\alpha] \mapsto ((P_M)_* \cdot [\alpha], (P_N)_* \cdot [\alpha])$$

quando M, N são conexos por caminhos e $\pi_1(M), \pi_1(N)$ são abelianos, consequência do *homomorfismo de Hurewicz*; veja [12], p. 48.) O seguinte teorema formaliza essa situação:

Teorema 2.2 [5] *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico e $x_0 \in X$ um ponto qualquer. Para cada inteiro positivo $k < dim(X)$ existe um número real positivo $\lambda_k \geq k + 1$ satisfazendo à seguinte condição:*

"Sejam U_{x_0} uma vizinhança suficientemente pequena de x_0 e ξ um k-ciclo semialgébrico em $U_{x_0} \setminus \{x_0\}$ que é bordo de uma $(k+1)$-cadeia semialgébrica η tal que $|\eta| \subset U_{x_0}$ e $\mu_{k+1}(|\eta|, x_0) > \lambda_k$. Então, $[\xi] = 0$ em $H_k(U_{x_0} \setminus \{x_0\})$."

Definição 2.3 O número $\lambda_k(X, x_0) := \inf \lambda_k$ (onde λ_k satisfaz à condição do Teorema 2.2) é chamado o *k-ésimo expoente característico de X em x_0*.

Assim, $\lambda_1(H_\beta, 0) = \beta + 1$ e $\lambda_1(M_{\beta_1,\beta_2}, 0) = \beta_1 + 1$. O próximo teorema trata da invariância Lipschitz-semialgébrica dos expoentes característicos.

Teorema 2.4 *Sejam (X, x_0), (Y, y_0) germes de conjuntos semialgébricos e $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ o germe de um homeomorfismo bi-Lipschitz semialgébrico. Então, $\lambda_k(X, x_0) = \lambda_k(Y, y_0)$ para todo k.*

Prova: Seja ξ um k-ciclo semialgébrico numa vizinhança U_{x_0} de x_0 com $x_0 \notin |\xi|$. Se $\xi = \partial\eta$, onde $\mu_{k+1}(|\eta|, x_0) > \lambda_k(Y, y_0)$, então $\mu_{k+1}(|f(\eta)|, y_0) > \lambda_k(Y, y_0)$, pelo Lema 0.4.5, donde $f(\xi)$ é trivial (pois $\partial f(\eta) = f(\xi)$) em

$U_{y_0} \setminus \{y_0\}$ para $U_{y_0} := f(U_{x_0})$, ou melhor, ξ é trivial em $U_{x_0} \setminus \{x_0\}$. Com isso, mostramos que $\lambda_k(X, x_0) \leq \lambda_k(Y, y_0)$. Para obter a desigualdade $\lambda_k(X, x_0) \geq \lambda_k(Y, y_0)$ basta considerar o germe f^{-1}. $\square$

Para complementar um comentário feito acima, mostraremos agora como os expoentes característicos podem produzir relações entre $H_k(L_{x_0}(X))$ e $MH^{\nu}_{loc,k}(X, x_0)$.

Teorema 2.5 *Sejam X e x_0 como no Teorema 1.11. O homomorfismo*

$$\sigma_k : H_k(L_{x_0}(X)) \to MH^{\nu}_{loc,k}(X, x_0),\ \sigma_k([\xi]) = [\xi],$$

é um:

- *mergulho, se $\nu(n) > \lambda_k(X, x_0)$;*
- *isomorfismo, se $k = 1$ e $\nu(n) > \lambda_1(X, x_0)$.*

Prova: Suponha que para um k-ciclo ξ em $L_{x_0}(X)$ tenha-se $[\xi] = 0$ em $MH^{\nu}_{loc,k}(X, x_0)$. Então, $\xi = \partial\eta$ com $\mu_{k+1}(|\eta|, x_0) > \lambda_k(X, x_0)$, já que η é ν-admissível, donde $[\xi] = 0$ em $H_k(L_{x_0}(X))$. Para a sobrejetividade no caso $k = 1$, basta notar que um 1-ciclo γ em $X \cap B_{x_0,\varepsilon}$ satisfazendo $\mu(|\gamma|, x_0) > 1$ deve ter seu suporte disjunto de $\{x_0\}$. Portanto, existe um 1-ciclo ξ em $L_{x_0}(X)$ com $[\xi] = [\gamma]$ em $H_1((X \cap B_{x_0,\varepsilon}) \setminus \{x_0\})$, logo, em $MH^{\nu}_{loc,1}(X, x_0)$ (lembre que a inclusão $L_{x_0}(X) \hookrightarrow (X \cap B_{x_0,\varepsilon}) \setminus \{x_0\}$ induz um isomorfismo em homologia). $\square$

Observe que, para sermos mais precisos, deveríamos trocar $H_k(L_{x_0}(X))$ por $H^{SA}_k(L_{x_0}(X))$ no teorema acima, já que trabalhamos com cadeias semialgébricas. No entanto, o Corolário 0.2.3 nos permite não tomar este tipo de cuidado. O Teorema 2.5 pode ser melhorado para o caso de uma singularidade *cônica*. De fato, se x_0 for do tipo cônico (ver definição abaixo), vamos provar que $\lambda_k(X, x_0) = k + 1$ e σ_k é um isomorfismo.

Definição 2.6 Sejam X um conjunto semialgébrico e $x_0 \in X$ uma singularidade. Dizemos que x_0 é uma *singularidade cônica* se existem $\varepsilon > 0$ e uma aplicação bi-Lipschitz semialgébrica de $X \cap \overline{B}_{x_0,\varepsilon}$ sobre $x_0 * L_{x_0}(X)$.

Teorema 2.7 *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto semialgébrico fechado n-dimensional e $x_0 \in X$ uma singularidade isolada cônica. Então*

$$MH^{\nu}_{loc,k}(X, x_0) = \begin{cases} 0 & se \quad \nu(n) \leq k + 1 \\ H_k(L_{x_0}(X)) & se \quad \nu(n) > k + 1. \end{cases}$$

Que $MH^{\nu}_{loc,k}(X,x_0)=0$ para $\nu(n)\leq k+1$, já sabíamos desde a Proposição 1.11 (mesmo sem a hipótese da singularidade ser cônica). Para o que falta, dividimos a prova em três partes: Proposições 2.8, 2.9 e 2.11 (veja também a Observação 2.10). Para ilustrar o esquema da demonstração imagine que X é um n-simplexo geométrico sendo x_0 um de seus vértices (aí, x_0 não é mais uma singularidade isolada!). Se uma cadeia semialgébrica η em X satisfaz $\mu_n(|\eta|,x_0)>n$, então existe um n-subsimplexo $\widetilde{X}$ de X (também com vértice em x_0) tal que $(\widetilde{X}\setminus\{x_0\})\cap(|\eta|\setminus\{x_0\})=\varnothing$ (Proposição 2.8). Logo, se é dado um k-ciclo ξ no Link de X em x_0 que é bordo de uma tal cadeia η, definimos uma "retração"(Lipschitz e semialgébrica) $\rho : X\setminus int(\widetilde{X})\to\partial X$ que aplica ξ em ξ', com o suporte de ξ' contido no $(n-2)$-ésimo esqueleto de $L_{x_0}(X)$, e η em η' de tal modo que $\mu_{k+1}(|\eta'|,x_0)\geq\mu_{k+1}(|\eta|,x_0)$. Ademais, vamos provar que $[\xi]=[\xi']$ em $H_k(L_{x_0}(X))$ e agora basta "iterar"este processo tantas vezes quanto for preciso para gerar um k-ciclo $\widehat{\xi}$ no $(k-1)$-esqueleto de $L_{x_0}(X)$ tal que $[\widehat{\xi}]=[\xi]$, donde $[\xi]=0$. Então, teremos provado que $\lambda_k(X,x_0)=k+1$ (Proposição 2.9). Finalmente (Proposição 2.11), usamos a mesma técnica da Proposição 2.9 para mostrar que, se $\nu(n)>k+1$, existe em cada classe $[\xi]\in MH^{\nu}_{loc,k}(X,x_0)$ um representante σ que tem suporte disjunto de $\{x_0\}$ (logo, pode ser considerado como um ciclo do Link). O Teorema 2.7 resulta facilmente destes resultados.

Proposição 2.8 *Sejam S um k-simplexo (geométrico) e s_0 um vértice de S. Seja ainda $A\subset S$ um subconjunto semialgébrico tal que $\mu_k(A,s_0)>k$. Nestas condições, existe um subsimplexo k-dimensional $\widetilde{S}\subset S$ com vértice em s_0 tal que $(A\setminus\{s_0\})\cap(\widetilde{S}\setminus\{s_0\})=\varnothing$.*

Prova: Vamos escrever $S=\{s_0\}*S_1$, sendo S_1 a face de S oposta a s_0. Naturalmente, a aplicação ("quociente") $\pi : S_1\times[0,1]\to S$, $\pi(x,t)=ts_0+(1-t)x$, é semialgébrica e aplica $S':=S_1\times(0,1]$ homeomorficamente sobre $S\setminus\{s_0\}$. Agora consideramos o conjunto semialgébrico $A':=\pi^{-1}(A)$ e exploramos a estrutura cilíndrica de A' com respeito à projeção canônica $p : S_1\times[0,1]\to S_0:=S_1\times\{0\}$ (Teorema 0.1.4).

Existe uma partição finita e semialgébrica $\{B_i\}$ de S_0 com a propriedade que $\{A'\cap(B_i\times[0,1])\}$ é uma coleção de conjuntos do "tipo-gráfico"e (ou) do "tipo-band". Se escolhemos B_i de tal modo que $int(B_i)\neq\varnothing$, então existe uma aplicação (contínua e semialgébrica) $f : B_i\to(0,1]$ tal que a "band"$B:=\{(x,t)\,;\,x\in B_i,\ 0<t<f(x)\}$ é um membro da decomposição cilíndrica considerada. O fato é que $A'\cap B\overset{(\star)}{=}\varnothing$, e com isso a proposição estará demonstrada. Com efeito, se $^{(\star)}$ acontece, podemos encontrar um $(k-1)$-simplexo $\Delta\subset int(B_i)$ cujas faces são paralelas às faces de S_0. Como existe $\varepsilon>0$ tal que $f(x)\geq 2\varepsilon$ para todo $x\in\Delta$, temos que $\widetilde{S}:=\pi(\Delta\times[0,\varepsilon])$

satisfaz às condições desejadas.

Agora verifiquemos a igualdade $^{(\star)}$. Se ela não ocorre, então $B \subset A'$. Agora procedemos como no parágrafo anterior para garantir a existência de um $(k-1)$-simplexo $\widetilde{\Delta}$ em B_i tal que (para algum $\delta > 0$) $\widetilde{\Delta} \times (0, \delta] \subset A'$. Se $\widehat{S} := \pi(\widetilde{\Delta} \times (0, \delta])$, então

$$\mu_k(A, s_0) \leq \mu(\widehat{S}, s_0) = k,$$

o que é um absurdo (note que $\widehat{S} \cup \{s_0\}$ é um k-simplexo em S com vértice em s_0). $\square$

Nas próximas proposições, X e x_0 são como no Teorema 2.7.

Proposição 2.9 *Seja ξ um k-ciclo em $L_{x_0}(X)$ ($k \leq n-1$) tal que $\xi = \partial\eta$ para uma certa cadeia semialgébrica η em $X \cap \overline{B}_{x_0,\varepsilon}$ satisfazendo $\mu_{k+1}(|\eta|, x_0) > k+1$. Então, $[\xi] = 0$ em $H_k(L_{x_0}(X))$.*

Prova: Para os nossos propósitos, podemos supor que $X \cap \overline{B}_{x_0,\varepsilon} = x_0 * L_{x_0}(X)$. Triangulando $L_{x_0}(X)$, obtemos uma triangulação natural associada a $x_0 * L_{x_0}(X)$. Seja $\{S_i\}$ a coleção dos simplexos de dimensão n que possuem o ponto x_0 como um de seus vértices. Para cada i existe um subsimplexo $\widetilde{S}_i$ de S_i com vértice em x_0 satisfazendo $(\widetilde{S}_i \setminus \{x_0\}) \cap (|\eta| \setminus \{x_0\}) = \varnothing$ (proposição anterior). H_t irá denotar um hiperplano do ambiente que intersecta transversalmente todos os simplexos S_i, $\widetilde{S}_i$ e $d(H_t, x_0) = t$. Obviamente, podemos escolher $\delta > 0$ com a propriedade que H_t pode ser definido para todo $t \in (0, \delta]$, $\{H_t\}_{0<t\leq\delta}$ é uma família de hiperplanos paralelos, e mais: $\xi_\delta := |\eta| \cap H_\delta$ define um k-ciclo que satisfaz $[\xi_\delta] = [\xi]$ em $H_k((x_0 * L_{x_0}(X)) \setminus \{x_0\})$. Se η_δ é a parte da cadeia η contida no semiespaço (fechado) definido por H_δ oposto àquele que contém ξ, então $\partial\eta_\delta = \xi_\delta$. Analogamente, define-se $S_{i,\delta}, \widetilde{S}_{i,\delta}$, e $X_\delta := \bigcup S_{i,\delta}$, $X'_\delta := X_\delta \setminus \bigcup int(\widetilde{S}_{i,\delta})$.

Para todo i, l_i denotará o segmento de reta que liga x_0 ao baricentro da face de $\widetilde{S}_{i,\delta}$ oposta a x_0. É claro que $H_t \cap l_i$ consiste de um único ponto x_t (sempre consideramos $t \in (0, \delta]$).

Agora vamos definir uma aplicação $\rho : X'_\delta \to X^{n-1}_\delta$, onde X^{n-1}_δ denota o $(n-1)$-ésimo esqueleto de X_δ. Primeiro, defina $\rho_i : S_{i,\delta} \setminus int(\widetilde{S}_{i,\delta}) \to \partial S_{i,\delta}$ da seguinte maneira: para $x \in (S_{i,\delta} \setminus int(\widetilde{S}_{i,\delta})) \cap H_t$, a reta $l(x)$ ligando x a x_t deve intersectar $\partial S_{i,\delta} \cap H_t$ em dois pontos; então, $\rho_i(x)$ é o único desses pontos tal que o segmento $[\rho_i(x), x]$ não intersecta $\widetilde{S}_{i,\delta}$. Defina $\rho_i(x_0) = x_0$. Cada ρ_i é Lipschitz e $\rho_i(x) = x$ para todo $x \in \partial S_{i,\delta}$. Assim, definimos ρ por restrição: $\rho|_{S_{i,\delta} \setminus int(\widetilde{S}_{i,\delta})} := \rho_i$ (e, é claro, $\rho(x_0) = x_0$). Segue-se que ρ é bem definida e Lipschitziana por partes, donde Lipschitz pelo Corolário 0.2.7.

Agora sejam $\xi' := \rho(\xi_\delta)$ e $\eta' := \rho(\eta_\delta)$. É claro que $\partial\eta' = \xi'$ e a aplicação $\psi : |\xi_\delta| \times [0,1] \to X'_\delta \cap H_\delta$,

$$\psi(x,s) = (1-s)x + s\rho(x),$$

mostra que $[\xi'] = [\xi_\delta]$ em $H_k((x_0 * L_{x_0}(X)) \setminus \{x_0\})$.

Vamos trabalhar agora para estabelecer a seguinte desigualdade:

$$\mu_{k+1}(|\eta'|, x_0) \overset{(*)}{\geq} \mu_{k+1}(|\eta_\delta|, x_0).$$

Como ρ é Lipschitz, existe uma constante $K > 0$ tal que

$$vol_{k+1}(\rho(|\eta_\delta| \cap B_{x_0,t})) \leq K vol_{k+1}(|\eta_\delta| \cap B_{x_0,t}). \qquad (1)$$

Por outro lado, se $\kappa := \max_i\{diam(S_{i,\delta} \cap H_\delta)\}$, então

$$(t/\delta)\kappa = \max_i\{diam(S_{i,\delta} \cap H_t)\}.$$

Portanto, se $y = \rho(x) \in |\eta'| \cap B_{x_0,t}$, $x \in |\eta_\delta|$, segue-se que $d(x, x_0) \leq d(x, \rho(x)) + d(\rho(x), x_0) < (t/\delta)\kappa + t = t(\kappa/\delta + 1)$, donde vem a inclusão

$$|\eta'| \cap B_{x_0,t} \subset \rho(|\eta_\delta| \cap B_{x_0,t(\kappa/\delta+1)})$$

o que, juntamente com (1), prova $^{(*)}$.

Se projetarmos o ciclo ξ' no Link, vamos obter um k-ciclo $\widetilde{\xi}$ no $(n-2)$-ésimo esqueleto de $L_{x_0}(X)$ tal que $[\widetilde{\xi}] = [\xi]$ em $H_k(L_{x_0}(X))$ e $\widetilde{\xi} = \partial\widetilde{\eta}$ para alguma cadeia $\widetilde{\eta}$ em $(x_0 * L_{x_0}(X))^{n-1}$ satisfazendo $\mu_{k+1}(|\widetilde{\eta}|, x_0) > k+1$. Isso mostra que, na pior das hipóteses, podemos repetir o argumento acima um certo número finito de vezes até encontrar um k-ciclo $\widehat{\xi}$ morando no $(k-1)$-ésimo esqueleto de $L_{x_0}(X)$ tal que $[\widehat{\xi}] = [\xi]$. Daí, $[\xi] = [\widehat{\xi}] = 0$ em $H_k(L_{x_0}(X))$, como queríamos. $\square$

Observação 2.10 Há como apresentar uma prova mais curta da proposição anterior (devida ao Prof. A. Fernandes). Suponha, para simplificar, que $L_{x_0}(X) = X \cap S_{x_0,1}$. Se $\xi_t := |\eta| \cap S_{x_0,t}$, vemos como antes que (para t suficientemente pequeno) ξ_t pode ser considerado como um k-ciclo homólogo em $(X \cap \overline{B}_{x_0,1}) \setminus \{x_0\}$ a ξ. Consequentemente, a projeção ζ_t de ξ_t em $L_{x_0}(X)$ (por meio da homotetia de centro em x_0 e razão $1/t$) é um k-ciclo do Link homólogo (ainda no Link) a ξ, sendo $vol_k(|\zeta_t|) = vol_k(|\xi_t|)/t^k$. A hipótese "$\mu_{k+1}(|\eta|, x_0) > k+1$"nos conta que, fixado $K \in (k, \mu(|\eta|, x_0) - 1)$, existe uma sequência (t_n) de números reais positivos convergindo para zero tal que $vol_k(|\xi_{t_n}|) < t_n^K$ (use a *fórmula da coarea*; veja [10]), donde $\lim_{n\to\infty} vol_k(|\zeta_{t_n}|) =$

0. Em particular, podemos encontrar um ciclo ζ_{t_n} tal que $vol_k(|\zeta_{t_n}|) < C(k)$, onde $C(k)$ é a constante que figura no Teorema 2.1 associada à variedade suave $L_{x_0}(X)$. Logo, $[\xi] = [\zeta_{t_n}] = 0$ em $H_k(L_{x_0}(X))$.

Proposição 2.11 *Seja $\nu(n) > k+1$. Se η é um k-ciclo admissível em $X \cap B_{x_0,\varepsilon}$, então existe σ, k-ciclo em $(X \cap B_{x_0,\varepsilon}) \setminus \{x_0\}$, satisfazendo $[\sigma] = [\eta]$ em $MH^{\nu}_{loc,k}(X, x_0)$.*

Prova: Vamos aproveitar a notação da prova da Proposição 2.9: sejam S_i, $\widetilde{S}_i$, H_δ , $S_{i,\delta}$, $\widetilde{S}_{i,\delta}$, X_δ, X'_δ, ξ_δ, η_δ e ρ definidos como antes. Pela Proposição 2.9, ξ_δ é trivial em $Y := (x_0 * L_{x_0}(X)) \cap H_\delta$. Portanto, $\xi_\delta = \partial\theta$ para alguma cadeia θ em Y. Seja $\eta' := \eta_\delta - \theta$ e $\sigma := \eta - \eta'$. Então, η' é um k-ciclo admissível e queremos agora que $[\eta'] = 0$ em $MH^{\nu}_{loc,k}(X, x_0)$. Com isso a proposição estará terminada, pois é claro que o suporte de σ é disjunto de $\{x_0\}$.

Seja $\psi : |\eta'| \times [0,1] \to X'_\delta$ dada por

$$\psi(x,s) = (1-s)x + s\rho(x).$$

Triangulamos $V := \psi(|\eta'| \times [0,1])$ de modo que a cadeia subjacente ω satisfaça $\partial\omega = \eta' - \underbrace{\rho(\eta')}_{\widetilde{\eta}}$. Mais uma vez se prova que $\widetilde{\eta}$ é um k-ciclo admissível (morando no $(n-1)$-ésimo esqueleto de X_δ) e agora vamos mostrar que

$$\mu_{k+1}(V, x_0) \overset{(\dagger)}{\geq} \nu(n).$$

Isto se faz de maneira completamente análoga à verificação de $^{(*)}$ (na prova da Prop. 2.9). Com efeito, basta observar que a aplicação ψ é Lipschitz e que existe uma constante $\kappa' > 0$ satisfazendo

$$V \cap B_{x_0,t} \subset \psi((|\eta'| \cap B_{x_0,\kappa' t}) \times [0,1]).$$

A desigualdade $^{(\dagger)}$ segue facilmente destas observações. Assim, $[\widetilde{\eta}] = [\eta']$ em $MH^{\nu}_{loc,k}(X, x_0)$.

Mais uma vez podemos iterar o argumento acima até que se encontre um k-ciclo admissível $\widehat{\eta}$ que more no $(k-1)$-esqueleto de X_δ e $[\widehat{\eta}] = [\eta']$ em $MH^{\nu}_{loc,k}(X, x_0)$. Logo, $[\eta'] = [\widehat{\eta}] = 0$ em $MH^{\nu}_{loc,k}(X, x_0)$. $\square$

Prova do Teorema 2.7: Seja $\nu(n) > k+1$. Considere a aplicação σ_k do Teorema 2.5 que, pela hipótese, deve ser um mergulho (consequência do Teorema 2.5 e da Proposição 2.9). A sobrejetividade de σ_k segue do teorema anterior. $\square$

Capítulo 3

Ciclos de Chegger e Superfícies de Brieskorn

O Teorema 2.7 fornece um primeiro critério substancial de obstrução à singularidade cônica. Uma parte útil deste resultado está no isomorfismo entre $MH^{\nu}_{loc,n-1}(X,x_0)$ e $H_{n-1}(L_{x_0}(X))$. Com efeito, sendo x_0 uma singularidade isolada e $X \subset \mathbb{R}^m$ fechado, sabemos que $L_{x_0}(X)$ é uma variedade suave e compacta $(n-1)$-dimensional. Se, além disso, $L_{x_0}(X)$ for conexa, obteremos que $H_{n-1}(L_{x_0}(X))$ é $\mathbb{R}$ ou 0 conforme $L_{x_0}(X)$ seja orientável ou não. Em particular, temos a

Proposição 3.1 *Sejam X e x_0 como no Teorema 2.7, sendo $L_{x_0}(X)$ conexo. Então*

$$dim(MH^{\nu}_{loc,n-1}(X,x_0)) \leq 1,$$

para toda ν. $\square$

O exemplo que segue providencia alguma naturalidade ao objeto que desejamos definir.

Exemplo 3.2 Sejam (x_1,x_2,x_3,t) as coordenadas de $\mathbb{R}^4$ e considere o conjunto semialgébrico $X \subset \mathbb{R}^4$ definido pela equação

$$((x_1-t)^2+x_2^2+x_3^2-t^2)((x_1+t)^2+x_2^2+x_3^2-t^2) = t^{4\beta},\ t \geq 0,\ \beta \in \mathbb{Z} \cap (2,+\infty).$$

Nota-se que o Link de X na origem é uma "esfera com uma cintura". Se tomamos o "cone" Y sobre esta cintura, ou mais precisamente, se definimos $Y = \{(x_1,x_2,x_3,t) \in X |\, x_1 = 0\}$, iremos obter uma β-corneta que divide X em duas componentes conexas W_1, W_2 (que são simétricas com relação a $\{x_1 = 0\}$) tais que $\mu(X,0) = \mu(W_1,0) = \mu(W_2,0) = 3 < \beta+1 = \mu(Y,0)$, um fato que indica que $0 \in X$ não é uma singularidade cônica. Com efeito, considere para o cálculo da homologia métrica local de X em 0 uma função de perversidade ν com $3 < \nu(3) < \mu(Y, 0)$. Como $0 \in Y$ é uma singularidade isolada, $C = Y \cap \underbrace{L_0(X)}_{X \cap S^3}$ é uma 1-variedade compacta, donde homeomorfa a S^1. Por Jordan, existem "discos fechados" V_1 e V_2 contidos em $L_0(X)$ tais que $V_1 \cap V_2 = C$. Assim, topologicamente falando, $\overline{W_1}$ e $\overline{W_2}$ são discos tridimensionais limitados, respectivamente, pelas esferas $\underbrace{Y \cap \overline{B}_{0,1}}_{\widetilde{Y}} \cup V_1$ e $\widetilde{Y} \cup V_2$, que se intersectam segundo o 2-disco $\widetilde{Y}$ e que juntos formam um 3-disco D limitado pela esfera $S := L_0(X)$. Os discos $\widetilde{Y}$ e V_1 podem ser considerados naturalmente como 2-simplexos em X. Defina um 2-ciclo ξ_1 por $\xi_1 = \widetilde{Y} - V_1$ e, analogamente, defina ξ_2. Claramente, ξ_1, ξ_2 são ciclos admissíveis, pois $\mu_2(|\xi_i|, 0) = \mu(Y, 0)$, $i = 1, 2$. Afirmamos que $0 \neq [\xi_1] \neq [\xi_2] \neq 0$ em $MH^{\nu}_{loc,2}(X, 0)$. De fato, suponha que $\partial\eta = \xi_1$ para alguma 3-cadeia η. Então, $|\eta| \supset W_1$. Se não, ξ_1 seria trivial em $D \setminus \{p\}$, $p \in W_1 \setminus |\eta|$. Como $\widetilde{Y}$ é homólogo a V_2 em $D \setminus \{p\}$, obteríamos que $S(= V_1 - V_2)$ é trivial em $D \setminus \{p\}$, o que é um absurdo (S é um gerador do grupo $H_2(D \setminus \{p\}) \neq 0$). Portanto, $W_1 \subset |\eta|$ o que implica $\mu(|\eta|, 0) = 3$, e daí η não é admissível. A prova que $[\xi_2] \neq 0$ e $[\xi_1] \neq [\xi_2]$ em $MH^{\nu}_{loc,2}(X, 0)$ admite argumentos similares. Portanto, $MH^{\nu}_{loc,2}(X, 0)$ possui um subespaço isomorfo a $\mathbb{R}^2$, e daí $0 \in X$ não pode ser uma singularidade cônica pela Proposição 3.1.

Definição 3.3 Sejam X um conjunto semialgébrico e $x_0 \in X$ uma singularidade isolada. Um subconjunto semialgébrico de codimensão 1 $Y \subset X$ é *base de um ciclo de Chegger em* x_0 quando as seguintes condições são satisfeitas:

1. Y é fechado em X;

2. $x_0 \in Y$ é singularidade isolada e $X \setminus Y$ tem exatamente duas componentes conexas W_1 e W_2;

3. $\mu(X, x_0) = \mu(W_1, x_0) = \mu(W_2, x_0) = k < \mu(Y, x_0)$.

O próximo teorema registra o fato que ciclos de Chegger são obstruções para singularidades cônicas.

Teorema 3.4 *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto semialgébrico fechado n-dimensional e $x_0 \in X$ uma singularidade isolada com Link $L_{x_0}(X)$ conexo. Se $Y \subset X$ é base de um ciclo de Chegger em x_0, então, para $k < \nu(n) < \mu(Y, x_0)$, o espaço $MH^{\nu}_{loc,n-1}(X, x_0)$ tem um subespaço isomorfo a $\mathbb{R}^2$.*

Prova: Adapte a prova do Exemplo 3.2. □

Corolário 3.5 *Sejam X e x_0 como no teorema anterior. Se X admite uma base para um ciclo de Chegger em x_0, então x_0 não é uma singularidade cônica.*

Prova: Consequência imediata do teorema acima e da Proposição 3.1. $\square$

Definição 3.6 Seja k um número inteiro. A *superfície de Brieskorn de peso k* é a superfície complexa X_k definida pela equação

$$x^2 + y^2 = z^{2k} \qquad (1).$$

Como comentamos na introdução deste trabalho, as superfícies de Brieskorn de peso k, $k > 3$, fornecem exemplos de superfícies complexas que possuem singularidades isoladas não-cônicas. As obstruções que vamos detectar em tais superfícies são exatamente bases de ciclos de Chegger.

Teorema 3.7 *Para $k > 3$, $0 \in X_k$ não é uma singularidade cônica.*

Prova: Antes de começar a prova vamos fazer o

Lema 3.8 *Sejam M uma variedade de classe C^q e dimensão n e $S \subset M$ uma subvariedade fechada $(n-1)$-dimensional, também de classe C^q, tais que M, S são conexas e $q \geq 0$. Então*

1. *$M \setminus S$ tem, no máximo, duas componentes conexas.*

2. *Se $q \geq 1$, M é orientada, $M \setminus S$ tem duas componentes conexas M_1, M_2 e $\varphi : M \to M$ é um difeomorfismo (de classe C^1, pelo menos) que inverte a orientação e satisfaz*

$$S = \{x \in M | \, \varphi(x) = x\},$$

então $\varphi(M_1) = M_2$ (e, logo, $\varphi(M_2) = M_1$).

Prova do lema: Para a primeira parte, seja $A \neq \varnothing$ uma componente conexa de $M \setminus S$ e defina $C = \{x \in S | \, x \in \overline{A}\}$. Note que $C \neq \varnothing$, pois A é aberto em M, que é conexo. É claro que C é fechado em S. Para ver que C é aberto em S, escolha $x \in C$ e uma carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ em torno de x com $\phi(U \cap S) = \mathbb{R}^{n-1}$. Por hipótese, existe $y \in U \cap A$ e, portanto, $\phi^{-1}(H) \subset A$, sendo $H \subset \mathbb{R}^n$ o semiespaço aberto que contem $\phi(y)$. Portanto, $\mathbb{R}^{n-1} \subset \overline{H} \Rightarrow U \cap S \subset U \cap \overline{A} \Rightarrow U \cap S \subset C$, donde $C \subset S$ é aberto. Sendo S conexo, obtemos que $C = S$ e agora fica fácil concluir *1.*

Quanto à segunda parte, sejam $x \in S$ e ϕ, U definidos como acima e $V \subset U$ um aberto contendo x e satisfazendo $\varphi(V) \subset U$. Se não fosse $\phi(M_1) = M_2$, então as componentes conexas de $M \setminus S$ seriam invariantes por ϕ. Em particular, se tomássemos $a \in M_1 \cap V$, $b \in M_2 \cap V$ tais que $\phi(a) \in M_1 \cap V$, $\phi(b) \in M_2 \cap V$ e uma curva de classe C^q γ em V ligando a até b cujo vetor tangente em x "apontasse para dentro"de M_2 (podemos supor que $\{\gamma\} \cap S = \{x\}$), obteríamos que $\varphi \circ \gamma$ também teria em x vetor tangente apontando para dentro de M_2, o que é um absurdo já que φ inverte a orientação.

Voltando à prova do Teorema 3.7, considere a ação

$$\alpha : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$$

dada por

$$\alpha(t, x_1, x_2, x_3) = (t^k x_1, t^k x_2, t x_3).$$

Seja $Y \subset X_k$ o resultado da ação α em $X_k(\mathbb{R})$, sendo $X_k(\mathbb{R})$ a solução real de (1). Vamos mostrar que Y é base de um ciclo de Chegger em 0. Considere a seção $\widehat{X} := X_k \cap \{z = 1\}$ que é a curva afim dada pela equação

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Observe que $\widehat{X}(\mathbb{R})$ é homeomorfo a S^1 e $\widehat{X}$ é homeomorfo ao cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ sobre S^1. Como S^1 divide o cilindro em duas componentes conexas e a conjugação define um automorfismo de $\widehat{X}$ que inverte a orientação e cujo conjunto dos pontos fixos é $\widehat{X}(\mathbb{R})$, concluímos do Lema 3.8 que as componentes de $\widehat{X} \setminus \widehat{X}(\mathbb{R})$ são conjugadas uma da outra. Sabemos (ainda pelo Lema 3.8) que $X_k \setminus Y$ tem, no máximo, duas componentes conexas. Agora vamos provar que para cada ponto $p \in X_k \setminus Y$ não existe curva contínua em $X_k \setminus Y$ ligando p a $\overline{p}$. Com efeito, suponha o contrário, e seja $\gamma : [0, 1] \to X_k \setminus Y$ contínua com $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = \overline{p}$. Como qualquer ponto de $X_k \cap \{z = 0\}$ pode ser conectado por uma curva contínua a um ponto de $X_k \setminus \{z = 0\}$, vamos supor que $p \notin X_k \cap \{z = 0\}$. Considere a aplicação

$$\rho : X_k \setminus \{z = 0\} \to \widehat{X}$$

dada por $\rho(x, y, z) = (z^{-k}x, z^{-k}y, 1)$. Note que por um argumento de transversalidade podemos supor que $\{\gamma\} := \gamma([0, 1]) \subset X_k \setminus \{z = 0\}$. Como ρ comuta com a conjugação complexa, segue-se que $\rho(p)$ e $\rho(\overline{p})$ pertencem à componentes conexas distintas de $\widehat{X} \setminus \widehat{X}(\mathbb{R})$, donde $\{\rho \circ \gamma\} \cap \widehat{X}(\mathbb{R}) \neq \varnothing \Rightarrow \{\gamma\} \cap Y \neq \varnothing$, pela definição de Y. Com esta contradição, não só mostramos que $X_k \setminus Y$ tem duas componentes conexas W, V (digamos) como também provamos que estas componentes são conjugadas. Portanto, $\mu(X_k, 0) = \mu(W, 0) = \mu(V, 0) = 4$, mas $\mu(Y, 0) \geq k + 1 > 4$.

Então, ficou provado que Y é base de um ciclo de Chegger em 0. Logo, $0 \in X_k$ não é uma singularidade cônica. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] BENEDETTI, R. & RISLER, J.-J. *Real algebraic and semialgebraic sets.* Paris : Hermann, 1990. 340 p.

[2] BIRBRAIR, L. Local bi-Lipschitz classification of 2-dimensional semialgebraic sets. *Houston Journal of Mathematics*, Houston, v. 25, n. 3, p. 453-472, 1999.

[3] BIRBRAIR, L. & BRASSELET, J.-P. Metric homology. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, New York, v. 53, p. 1434-1447, 2000.

[4] BIRBRAIR, L. & BRASSELET, J.-P. Metric homology for isolated conic singularities. *Bulletin des Sciences Mathematiques*, Paris, v. 126, p. 87-95, 2002.

[5] BIRBRAIR, L. & CANO, F. Characteristic exponents of semialgebraic singularities. *Mathematische Nachrichten,* Berlin, v. 276, p. 23-30, 2004.

[6] BIRBRAIR, L. & FERNANDES, A. *Metric geometry of complex algebraic surfaces with isolated singularities.* Preprint.

[7] BIRBRAIR, L. & MOSTOWSKI, T. Normal embedding of semialgebraic sets. *Michigan Mathematical Journal*, Michigan, v. 47, p. 125-132, 2000.

[8] COSTE, M. *An introduction to semialgebraic geometry.* Pisa-Roma : Institute Editoriali e Poligrafici Internazionali, 2000. 77 p.

[9] DIMCA, A. *Singularities and topology of hypersurfaces.* New York : Springer-Verlag, 1992. 263 p.

[10] FEDERER, H. *Geometric measure theory.* New York : Springer-Verlag, 1969. 676 p.

[11] GORESKY, M. & MACPHERSON, R. Intersection homology theory. *Topology*, Elmsford, NY, v. 19, p. 135-162, 1980.

[12] GREENBERG, M. *Lectures on algebraic topology.* New York : W.A. Benjamin, 1967. 235 p.

[13] KURDYKA, K. On a subanalytic stratification satisfying a Whitney property with exponent 1. In: *Lectures Notes in Mathematics.* Berlin : Springer-Verlag, 1992. v. 1524, p. 316-322.

[14] LEE, J. M. *Introduction to topological manifolds.* New York : Springer-Verlag, 1997. 385 p.

[15] LION, J.-M. & ROLIN, J.-P. Intégration des fonctions sous-analytiques et volumes des sous-ensembles sous-analytiques. *Annales delle Institute Fourier*, Grenoble, v. 48, n. 3, p. 755-767, 1998.

[16] LOJASIEWICZ, S. Triangulation of semi-analytic sets. *Annalli della Scuola Normale Superieore di Pisa*, Pisa, v. 18, n. 3, p. 449-474, 1964.

[17] MOSTOWSKI, T. *Lipschitz equisingularity.* Warszawa : Panstwowe Wydawn. Naukowe, 1985. 51 p.

[18] PARUSINSKI, A. Lipschitz estratification of subanalytic sets. *Annales Scientifique de L'Ecole Normale Superieore*, Pisa, v. 4, n. 27, p. 661-696, 1994.

[19] VALETTE, G. A bi-Lipschitz version of Hardt's theorem. *Comptes Rendus Academie des Sciences Paris*, Serie 1, Paris, v. 340, 2005.

[20] YOMDIN, Y. & COMTE, G. *Tame geometry with application in smooth analysis*. Universite de Nice-Sophia Antipoles, 186 p. 2002. Prépublication n^o 653.

[21] YOSSIN, B. L_p cohomology of cones and horns. *Journal of Differential Geometry*, Bethlehem, Pa., v. 39, p. 559-603, 1994.