

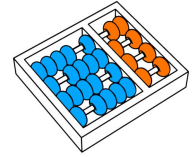
Lucas Ismaily Bezerra Freitas

**“A conjectura de Tuza sobre triângulos em grafos”**

CAMPINAS

2014





**Universidade Estadual de Campinas  
Instituto de Computação**

**Lucas Ismaily Bezerra Freitas**

## **“A conjectura de Tuza sobre triângulos em grafos”**

Orientador(a): **Prof. Dr. Orlando Lee**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Instituto de Computação da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO  
FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA POR  
LUCAS ISMAILY BEZERRA FREITAS, SOB  
ORIENTAÇÃO DO PROF. DR. ORLANDO LEE

A handwritten signature in blue ink that reads "Orlando Lee".

---

Assinatura do Orientador

CAMPINAS

2014

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

F884c Freitas, Lucas Ismaily Bezerra, 1987-  
A conjectura de Tuza sobre triângulos em grafos / Lucas Ismaily Bezerra  
Freitas. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Orlando Lee.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Computação.

1. Empacotamento e cobertura combinatória. 2. Teoria dos grafos. I. Lee,  
Orlando, 1969-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Computação.  
III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** The conjecture of Tuza about triangles in graphs

**Palavras-chave em inglês:**

Combinatorial packing and covering

Graph theory

**Área de concentração:** Ciência da Computação

**Titulação:** Mestre em Ciência da Computação

**Banca examinadora:**

Orlando Lee [Orientador]

Christiane Neme Campos

Daniel Morgato Martin

**Data de defesa:** 02-06-2014

**Programa de Pós-Graduação:** Ciência da Computação

## TERMO DE APROVAÇÃO

Defesa de Dissertação de Mestrado em Ciência da Computação, apresentada pelo(a) Mestrando(a) **Lucas Ismaily Bezerra Freitas**, aprovado(a) em **02 de junho de 2014**, pela Banca examinadora composta pelos Professores Doutores:



**Prof(a). Dr(a). Daniel Morgato Martin**  
Titular



**Prof(a). Dr(a). Christiane Neme Campos**  
Titular



**Prof(a). Dr(a). Orlando Lee**  
Presidente



## A conjectura de Tuza sobre triângulos em grafos

Lucas Ismaily Bezerra Freitas

02 de junho de 2014

### Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Orlando Lee (*Orientador*)
- Prof<sup>a</sup>. Dra. Christiane Neme Campos  
Instituto de Computação - UNICAMP
- Prof. Dr. Daniel Morgato Martin  
Centro de Matemática, Computação e Cognição - UFABC
- Prof<sup>a</sup>. Dra. Célia Picinin de Mello (*Suplente*)  
Instituto de Computação - UNICAMP
- Prof. Dr. Jair Donadelli Junior (*Suplente*)  
Centro de Matemática, Computação e Cognição - UFABC





# Abstract

In this thesis we study the conjecture of Tuza, which relates covering of triangles (by edges) with packing of edge-disjoint triangles in graphs. In 1981, Tuza conjectured that for any graph, the maximum number of edge-disjoint triangles is at most twice the size of a minimum cover of triangles by edges. The general case of the conjecture remains open. However, several attempts to prove it appeared in the literature, which contain results for several classes of graphs. In this thesis, we present the main known results for the conjecture of Tuza. Currently, there are several versions of Tuza's conjecture. Nevertheless, we emphasize that our focus is on conjecture applied to simple graphs. We also present a conjecture that, if verified, implies the validity of the conjecture of Tuza. We also show that if  $G$  is a minimum counterexample to the conjecture of Tuza, then  $G$  is 4-connected. We can deduce from this result that the conjecture of Tuza is valid for graphs with no  $K_5$  minor.

keywords: Graph Theory, Covering, Packing, Conjecture of Tuza.



# Resumo

Neste trabalho estudamos a conjectura de Tuza, que relaciona cobertura mínima de triângulos por arestas com empacotamento máximo de triângulos aresta-disjuntos em grafos. Em 1981, Tuza conjecturou que para todo grafo, o número máximo de triângulos aresta-disjuntos é no máximo duas vezes o tamanho de uma cobertura mínima de triângulos por arestas. O caso geral da conjectura continua aberta. Contudo, diversas tentativas de prová-la surgiram na literatura, obtendo resultados para várias classes de grafos. Nesta dissertação, nós apresentamos os principais resultados obtidos da conjectura de Tuza. Atualmente, existem várias versões da conjectura. Contudo, ressaltamos que nosso foco está na conjectura aplicada a grafos simples. Apresentamos também uma conjectura que se verificada, implica na veracidade da conjectura de Tuza. Demonstramos ainda que se  $G$  é um contra-exemplo mínimo para a conjectura de Tuza, então  $G$  é 4-conexo. Deduzimos desse resultado que a conjectura de Tuza é válida para grafos sem minor do  $K_5$ .

Palavras-chaves: Teoria dos Grafos, Cobertura, Empacotamento, Conjectura de Tuza.



# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, não só pela dissertação, mas por tudo. Depois, a minha família, em especial minha mãe. Mãe, muito obrigado. A você, sempre você, irmão todos os créditos por todos os trabalhos que um dia eu possa realizar!

Ao meu orientador Lee, é complicado expressar em palavras o tamanho de minha gratidão, não pela orientação nesse trabalho, mas por você ter a capacidade de usar a palavra certa no momento certo. Lee, muito obrigado!

A professora Christiane. Chris, você é um exemplo a ser seguido por todos. Muito obrigado por todas as valiosas dicas e ‘puxões de orelha’.

Ao professor Daniel por todas as imensuráveis sugestões neste trabalho. Daniel, muito obrigado.

Agradeço profundamente ao CNPq pela ajuda financeira durante todo o mestrado.

A Priscila, minha namorada, por todo apoio e compreensão nas horas de stress.

Por fim, agradeço a todos que de alguma forma ajudaram neste trabalho, sintam-se todos cumprimentados. Em especial, aos colegas do LOCo.



*Se não puder destacar-se pelo talento,  
vença pelo esforço.*

Dave Weinbaum.





# Sumário

<b>Abstract</b>	<b>ix</b>
<b>Resumo</b>	<b>xi</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>xiii</b>
<b>Epigraph</b>	<b>xv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Teoria dos Grafos</b>	<b>3</b>
2.1 Conceitos básicos . . . . .	3
2.2 Cobertura de triângulos em grafos . . . . .	14
2.3 Empacotamento de triângulos em grafos . . . . .	14
2.4 Relação entre cobertura e empacotamento . . . . .	15
<b>3 Conjectura de Tuza</b>	<b>17</b>
3.1 Conjectura de Tuza . . . . .	17
3.1.1 Variantes da Conjectura . . . . .	20
3.2 Histórico da conjectura . . . . .	24
3.2.1 Principais resultados . . . . .	25
3.2.2 Organização cronológica da conjectura . . . . .	26
<b>4 Resultados Conhecidos</b>	<b>29</b>
4.1 Prova para grafos densos . . . . .	29
4.2 Prova para grafos planares . . . . .	31
4.3 Prova para grafos sem subdivisões do $K_{3,3}$ . . . . .	39
4.4 Prova para grafos cordais . . . . .	43
4.5 Prova para grafos tripartidos . . . . .	46
4.6 Melhor resultado conhecido para o caso geral . . . . .	51



4.7	Prova para grafos com grau médio máximo menor que sete . . . . .	59
4.7.1	Grafos sem subdivisões do $K_5$ . . . . .	61
4.7.2	Grafos sem minor do $K_{3,3}$ . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Nossas Contribuições</b>	<b>65</b>
5.1	Conjectura que implica a conjectura de Tuza . . . . .	65
5.2	Conexidade de um contra-exemplo mínimo . . . . .	66
5.2.1	Grafo sem minor do $K_5$ . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>77</b>
6.1	Trabalhos futuros . . . . .	78
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>80</b>



# Lista de Tabelas

3.1	Cronologia da conjectura de Tuza. . . . .	27
-----	---	----



# Lista de Figuras

2.1	Exemplo de um grafo $G = (V, E)$ com o conjunto de vértices $V = \{u, v, r, w, t\}$ e arestas $E = \{e, f, g, h\}$ . . . . .	4
2.2	Exemplo de grafos isomorfos. Mapeamento: $\theta(1) = u, \theta(2) = r, \theta(3) = v, \theta(4) = t, \theta(5) = w$ . . . . .	4
2.3	Exemplo de grafo cíclico, acíclico, ciclo e roda. . . . .	7
2.4	Grafo Planar, com $d(f_1) = 4, d(f_2) = 3, d(f_3) = 5$ . . . . .	8
2.5	Grafo Dual $G^*$ com vértices $V(G^*) = \{f_1^*, f_2^*, f_3^*\}$ construído a partir do grafo da Figura 2.4. . . . .	9
2.6	Grafos não planares. . . . .	12
2.7	Exemplo de uma subdivisão. . . . .	12
2.8	Exemplo de um digrafo. . . . .	13
2.9	Exemplo de uma cobertura $C = \{vr, xt\}$ . . . . .	14
2.10	Exemplo de empacotamento $P = \{t_1, t_2\}$ , $t_1 = \{rv, vt, tr\}$ e $t_2 = \{tx, xu, ut\}$ . . . . .	15
3.1	Exemplo da conjectura de Tuza. . . . .	19
3.2	Exemplo de um grafo $G$ com $\tau(G) = 2\nu(G)$ . . . . .	20
4.1	Exemplo de vértice próprio e coroa em um hipergrafo 3-uniforme. . . . .	31
4.2	Construção de um hipergrafo 3-uniforme a partir de um grafo. . . . .	32
4.3	Ilustração para a prova do Lema 4.2.1 no caso de uma coroa de tamanho par. . . . .	34
4.4	Ilustração para a prova do Lema 4.2.1 no caso de uma coroa de tamanho ímpar. . . . .	35
4.5	Exemplo da associação entre um hipergrafo 3-uniforme e um grafo $G$ na prova da conjectura para grafos planares. . . . .	36
4.6	Ilustração de um vértice $v$ que não satisfaz a Propriedade (1). . . . .	37
4.7	Exemplo do caso $t_1 \subset t_2 \subset t_3$ . . . . .	37
4.8	Caso $v_1$ não possua a Propriedade (1). . . . .	38
4.9	Caso nenhum conjunto com duas arestas de $t$ seja uma cobertura. . . . .	40
4.10	Se $G$ não é 2-conexo, então ele pode ser decomposto em dois grafos $G_1$ e $G_2$ que não compartilham arestas. . . . .	43
4.11	Caso $d_{G'}(v_p) > 2$ , com os vértices adjacentes $v_i, v_j, v_k$ . . . . .	45





4.12	As arestas mais escuras estão em $M$ , as demais em $E(G) - M$ . . . . .	46
4.13	As arestas mais escuras estão em $M$ , as demais em $E(G) - M$ . . . . .	47
4.14	Exemplo da denominação dos vértices e arestas de um grafo tripartido. . . . .	48
4.15	Se um triângulo contém $v$ e outro não contém $v$ , eles só podem compartilhar uma aresta de $E_i$ . . . . .	49
4.16	Ilustração do triângulo $t \in T(G)$ , com a aresta $uz \in E_i$ . . . . .	50
4.17	O subgrafo induzido por cada par $t \in P_1, t' \in \mathcal{F}$ induzem um $K_4$ , possivelmente sem uma aresta, denotada por $e'(t)$ . . . . .	52
4.18	Se $t_1$ compartilha aresta com $t \in P_1$ e $t' \in \mathcal{F}$ , então $t_1$ contém $e(t)$ ou $e'(t)$ . . .	53
4.19	Exemplo da aplicação da operação de identificação de vértices. . . . .	62
4.20	Exemplo de contração de aresta. . . . .	62
5.1	Os vértices $\{u, v, z\}$ formam um conjunto independente. . . . .	67
5.2	Existe exatamente uma aresta com ambos os extremos em $\{u, v, z\}$ . . . . .	68
5.3	Existem exatamente duas arestas com ambos os extremos em $\{u, v, z\}$ . . . . .	70
5.4	Os vértices $\{u, v, z\}$ induzem um triângulo. . . . .	71
5.5	O grafo de Wagner. . . . .	74



# Capítulo 1

## Introdução

A teoria dos grafos pertence a um ramo da matemática, porém com uma forte ligação com a computação. Durante muitos anos a evolução da teoria dos grafos foi guiada por uma conjectura de Francis Guthrie, denominada *conjectura das quatro cores* [3]. Em 1852, Francis Guthrie conjecturou que dado um mapa plano, dividido em regiões, quatro cores são suficientes para colori-lo de forma que regiões vizinhas não partilhem a mesma cor. Embora possua um enunciado intuitivo e de fácil compreensão, a conjectura das quatro cores se mostrou bastante complexa e perdurou por muitos anos em aberto. Muitos conceitos fundamentais de grafos surgiram na tentativa de resolvê-la. A evolução e criação de novos conceitos, agregada ao brilhantismo de muitos pesquisadores da área, culminou na resolução do problema (com auxílio de um computador IBM 360) por K. Appel e W. Haken em 1976. Em 1994, P. Seymour, N. Robertson, D. Sanders e R. Thomas produziram uma prova mais simplificada, porém até hoje ninguém conseguiu uma demonstração do teorema das quatro cores que não recorra a um computador [29]. Em resumo, queremos exprimir que um problema complexo, mesmo sem solução conhecida, pode gerar vários conceitos e conhecimentos que podem ser aplicados em diversos contextos e cenários. Esta é nossa motivação para estudar um problema em aberto, além, é claro, do apurado desafio intelectual que esse tipo de tema proporciona.

Na computação, muitos problemas podem ser modelados como problemas em grafos. Um cenário claro é o contexto de redes sociais, que são perfeitamente modeladas utilizando grafos. Até mesmo alguns problemas do cotidiano podem ser modelados como problemas em grafos, por exemplo, traçar uma melhor rota de uma cidade  $A$  para uma cidade  $B$ . A teoria dos grafos vem desempenhando um papel importante no avanço da computação, sendo muito útil e, por vezes, necessária em muitos contextos.

Com os diversos estudos em grafos, muitas conjecturas foram propostas e estudadas, várias tornaram-se teoremas (foram provadas), outras foram refutadas e muitas ainda permanecem sem solução conhecida. De fato, a teoria dos grafos possui muitos problemas complexos que despertam o interesse da comunidade acadêmica, problemas que insistem em tirar o sono de

muitos pesquisadores.

Nesta dissertação, abordamos um destes problemas, um problema que permanece em aberto. O problema de que tratamos aqui foi proposto por Zsolt Tuza [27], um matemático húngaro, em 1981 [23]. Tuza conjecturou que se um grafo simples  $G$  não contém mais do que  $k$  triângulos aresta-disjuntos, então existe um conjunto com no máximo  $2k$  arestas que interceptam todos os triângulos de  $G$ . Depois de lançada por Tuza, esta conjectura vem sendo estudada por diversos pesquisadores, alguns exemplos são: P. Haxell [5, 11, 12, 15], G. J. Puleo [21], M. Krivelevich [16] e o próprio autor Z. Tuza [22, 23, 26]. Assim, vários resultados foram obtidos para diversas classes de grafos. Contudo, o problema geral permanece em aberto há mais de três décadas. Naturalmente, em termos de importância, a conjectura de Tuza não pode ser equiparada ao teorema das quatro cores, porém ela é tão desafiadora quanto. Tal qual o teorema das quatro cores, a conjectura de Tuza possui um enunciado bem intuitivo e de fácil compreensão, mas tem se mostrado bastante complexa, uma vez que existe apenas um trabalho que a aborda no seu caso geral [11].

Neste trabalho, nós apresentamos os principais resultados obtidos no decorrer destes anos. Atualmente, existem várias versões da conjectura de Tuza. Contudo, ressaltamos que nosso foco está na conjectura aplicada a grafos simples. Apresentamos também uma conjectura que se verificada, implica na veracidade da conjectura de Tuza. Uma curiosidade é que a conjectura proposta não aborda um conjunto de arestas que cobre todos os triângulos, ela trata apenas do conjunto de triângulos aresta-disjuntos. Demonstramos ainda que se  $G$  é um contra-exemplo mínimo para a conjectura de Tuza, então  $G$  é 4-conexo. Deduzimos desse resultado que a conjectura de Tuza é válida para grafos sem minor do  $K_5$ .

Os capítulos desta dissertação estão organizados da seguinte forma: no Capítulo 2, definimos os principais conceitos de teoria dos grafos que são utilizados neste trabalho. No Capítulo 3, dissertamos sobre a conjectura de Tuza, apresentamos seu enunciado e a exemplificamos. Exibimos também suas diversas variantes conhecidas na literatura. Apresentamos ainda uma breve descrição do seu histórico e uma tabela que exhibe os principais resultados da conjectura (e quem os obteve) em ordem cronológica. No Capítulo 4, nos aprofundamos nos principais resultados conhecidos da conjectura aplicada a grafos simples. No Capítulo 5, apresentamos nossas contribuições ao estudo da conjectura de Tuza. Nele, propomos uma conjectura que implica na veracidade da conjectura de Tuza. Outrossim, mostramos que se  $G$  é um contra-exemplo mínimo para a conjectura de Tuza, então  $G$  é 4-conexo. Deduzimos desse resultado que a conjectura de Tuza é verificada em grafos sem minor do  $K_5$ . No Capítulo 6, fazemos um desfecho deste trabalho e sugerimos alguns trabalhos futuros. Em seguida, listamos todas as referências que utilizamos nesta dissertação.

# Capítulo 2

## Teoria dos Grafos

Apresentamos, neste capítulo, os conceitos de teoria dos grafos que serão utilizados neste trabalho. Para detalhes além do que apresentamos a seguir, indicamos Bondy e Murty [2], Wilson [30] e Diestel [6].

### 2.1 Conceitos básicos

Um *grafo*  $G$  é uma tripla ordenada  $(V(G), E(G), \psi_G)$ , onde  $V(G)$  é um conjunto finito de elementos chamado *vértices*,  $E(G)$  é um conjunto finito de elementos, disjunto de  $V(G)$ , chamado *arestas* e  $\psi_G$  uma *função de incidência* que para cada aresta  $e \in E(G)$  associa um par não ordenado de vértices, não necessariamente distintos,  $\psi_G(e) = \{u, v\}$ . Quando  $G$  estiver claro no contexto, escreveremos apenas  $V, E$  em vez de  $V(G)$  e  $E(G)$ .

Dado um grafo  $G = (V, E, \psi_G)$ , dizemos que  $u, v \in V$  são *adjacentes* e  $e \in E$  é *incidente* a  $u$  e  $v$  se  $\psi_G(e) = \{u, v\}$ . Dizemos também que  $u$  e  $v$  são os *extremos* de  $e$ . Duas arestas são *adjacentes* se possuem pelo menos um extremo em comum. A *vizinhança* de um vértice  $v$ , denotado por  $N_G(v)$  (ou  $N(v)$  quando  $G$  for claro no contexto), é o conjunto dos vértices adjacentes a  $v$ . Portanto, um vértice  $u$  pertence a  $N_G(v)$  se existe uma aresta  $e \in E$ , tal que  $\psi_G(e) = \{u, v\}$ . Um *laço* é uma aresta da forma  $\psi_G(e) = \{v, v\}$ . Duas arestas  $e, f$  são *múltiplas* se possuem os mesmos extremos, ou seja,  $\psi_G(e) = \{u, v\}$  e  $\psi_G(f) = \{u, v\}$ . Um grafo  $G$  é dito *simples* se não possui laços e arestas múltiplas. Caso contrário, dizemos que  $G$  é um *multigrafo*. Dizemos ainda que  $G$  é *nulo* se os conjuntos de vértices e arestas são vazios; é *trivial* se possui apenas um vértice; e  $G$  é *vazio* se o conjunto de arestas é vazio. Neste trabalho, abordamos apenas grafos simples. Assim, geralmente deixamos implícita a função de incidência, uma vez que dois vértices definem unicamente uma aresta em um grafo simples. Portanto, denotamos um grafo por  $G = (V, E)$  e usamos  $e = uv$  em vez de  $\psi_G(e) = \{u, v\}$ . Em geral, escrevemos grafo com o sentido de grafo simples, casos especiais são explicitados ao leitor.

A representação gráfica de um grafo utiliza-se de pontos (pequenos círculos) e linhas. As linhas indicam as arestas e os pontos os vértices. O uso de rótulos nos vértices e/ou arestas para sua identificação pode ser útil nessa representação, conforme mostrado na Figura 2.1.

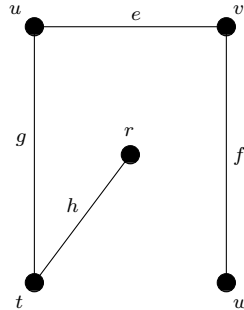


Figura 2.1: Exemplo de um grafo  $G = (V, E)$  com o conjunto de vértices  $V = \{u, v, r, w, t\}$  e arestas  $E = \{e, f, g, h\}$ .

Dois grafos  $G_1$  e  $G_2$  são iguais, se  $V(G_1) = V(G_2)$  e  $E(G_1) = E(G_2)$ . Outrossim, dois grafos podem não ser exatamente iguais, mas diferir apenas nos rótulos dos vértices e/ou arestas. Nesse caso, se por meio de um mapeamento dos vértices e arestas pudermos deixá-los iguais, dizemos que os grafos são isomorfos. Formalmente, dizemos que dois grafos  $G_1, G_2$  são *isomorfos*, denotado por  $G_1 \cong G_2$ , se há bijeções  $\theta : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$  e  $\phi : E(G_1) \rightarrow E(G_2)$ , tal que  $e = uv \in E(G_1)$  se, e somente se,  $\phi(e) = \theta(u)\theta(v) \in E(G_2)$ . Se os grafos são simples, torna-se desnecessário explicitar o mapeamento  $\phi$ . Na Figura 2.2, ilustramos dois grafos isomorfos  $G_1$  e  $G_2$ .

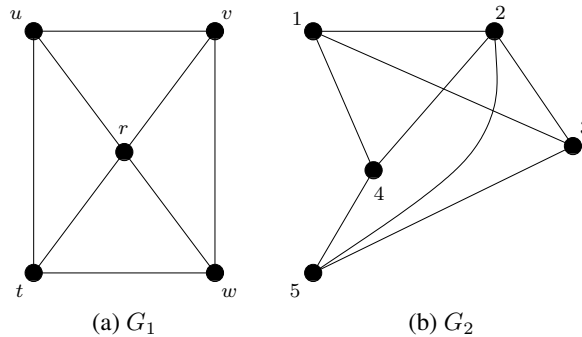


Figura 2.2: Exemplo de grafos isomorfos. Mapeamento:  $\theta(1) = u, \theta(2) = r, \theta(3) = v, \theta(4) = t, \theta(5) = w$ .

Seja  $G$  um grafo. Para todo vértice  $v \in V$ , o *grau* de  $v$  em  $G$ , denotado por  $d_G(v)$  (ou apenas  $d(v)$ ), é o número de arestas incidentes em  $v$ , onde cada laço é contado duas vezes. Se  $G$  é um grafo simples, então  $d(v) = |N(v)|$ . O *grau mínimo* de  $G$  é definido como  $\delta(G) = \min\{d(v) :$

para todo  $v \in V$ . De forma similar, define-se o *grau máximo* de  $G$  como  $\Delta(G) = \max\{d(v) : \text{para todo } v \in V\}$ . O *grau médio* de  $G$  é dado por  $d(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$ . Graus mínimo, máximo e médio de um grafo estão relacionados de acordo com a seguinte desigualdade:

$$\Delta(G) \geq d(G) \geq \delta(G).$$

Para  $k$  um inteiro não negativo, dizemos que  $G$  é *k-regular* se  $d(v) = k$ , para todo  $v \in V$ . Ademais,  $G$  é *regular* se é *k-regular* para algum  $k$ .

O seguinte teorema relaciona os graus dos vértices de um grafo com o seu número de arestas, é um dos mais básicos na teoria dos grafos, e por vezes, denominado teorema Fundamental.

**Teorema 2.1.1.** *Se  $G$  é um grafo, então*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

*Demonstração.* Prova por indução no número de arestas,  $|E| = m$ .

Se  $E = \emptyset$ , então  $0 = \sum_{v \in V} d(v) = 2m = 0$ , e o resultado segue. Desse modo, podemos supor que  $m \geq 1$ . Sejam  $e$  uma aresta de  $E(G)$  e  $G'$  um grafo obtido a partir de  $G$  removendo a aresta  $e$ . Portanto,  $|E(G')| = m' = m - 1$ . Assim, por hipótese de indução em  $G'$ , temos que

$$\sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v) = 2m' \quad (2.1)$$

Ao recolocar  $e$  em  $G$ , os graus dos extremos de  $e$  são aumentados em uma unidade cada. Dessa forma,

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = \sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v) + 2 \quad (2.2)$$

Por fim, utilizando (2.1) e (2.2), concluímos:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v) + 2 &= 2m' + 2 \\ \sum_{v \in V(G)} d_G(v) &= 2(m' + 1) \\ \sum_{v \in V(G)} d_G(v) &= 2m \end{aligned}$$

□

Decorre do Teorema 2.1.1 o seguinte corolário.

**Corolário 2.1.1.** *Se  $G$  é um grafo, então o número de vértices de grau ímpar é par.*

*Demonstração.* Prova por contradição.

Seja  $G$  um grafo com um número ímpar de vértices cujos graus são ímpares. Então, o somatório dos graus de  $G$  é um valor ímpar, porém tal fato contradiz o Teorema 2.1.1, pois  $2m$  é um número par. Logo, o número de vértices de grau ímpar em  $G$  deve ser par.  $\square$

Seja  $e$  uma aresta de  $G$ , denotamos a remoção de  $e$  em  $E(G)$  por  $G - e$ . De modo análogo, denotamos a remoção de um vértice  $v$  de  $V(G)$  por  $G - v$ . Ressaltamos que ao remover um vértice  $v$ , todas as arestas que incidem em  $v$  são removidas. Dizemos que um grafo  $G'$  é um *subgrafo* de um grafo  $G$ , denotado por  $G' \subseteq G$ , se  $V(G') \subseteq V(G)$  e  $E(G') \subseteq E(G)$ , ou seja,  $G'$  é obtido a partir de  $G$  por remoções de vértices e/ou arestas. Em particular, todo grafo é subgrafo dele mesmo. Dizemos ainda que o subgrafo  $G'$  é *gerador* se possui o mesmo conjunto de vértices que  $G$ , ou seja,  $V(G') = V(G)$ . Obtemos um subgrafo gerador removendo apenas arestas. Por outro lado, um subgrafo  $G'$  de  $G$  é dito *induzido* se toda aresta  $e = uv$  de  $E(G)$  com os extremos  $u, v \in V(G')$  também está em  $E(G')$ . Obtemos um subgrafo induzido removendo apenas vértices. Ademais, dizemos que  $G'$  é *subgrafo próprio* de  $G$ , denotado por  $G' \subset G$ , se  $G'$  é um subgrafo de  $G$  com menos arestas ou menos vértices do que  $G$ .

Um *caminho* em um grafo  $G$  é definido como uma sequência de vértices distintos  $P = (v_1, \dots, v_n)$ , tal que para todo  $v_i \in V$ ,  $v_i v_{i+1} \in E$ , com  $1 \leq i \leq n - 1$ . Dizemos também que  $P$  é um caminho de  $v_1$  a  $v_n$ . Um grafo  $G$  é dito *conexo*, se para todo par  $u, v \in V$ , existe um caminho de  $u$  a  $v$  em  $G$ . Caso contrário, dizemos que  $G$  é *desconexo*. Um *circuito* em um grafo  $G$  é uma sequência de três ou mais vértices  $C = (v_1, \dots, v_n, v_1)$ , tal que dois vértices são adjacentes se são consecutivos na sequência, sendo  $v_1$  o único vértice que se repete na sequência. Um circuito com um vértice é um laço; com dois vértices consiste em arestas múltiplas entre eles. Dizemos que um grafo  $G$  é *cíclico*, se contém um circuito (Figura 2.3a). Caso contrário, dizemos que o grafo é *acíclico* (Figura 2.3b). Chamamos de *grafo ciclo*, denotado por  $C_n$ , o grafo que é um circuito com  $n$  vértices (Figura 2.3c). Definimos *grafo roda*, denotado por  $W_n$ , como um grafo formado por um  $C_n$  e um outro vértice adjacente a todos os vértices do  $C_n$  (Figura 2.3d).

Seja  $G$  um grafo desconexo. Denotamos as partes conexas que compõem  $G$  por *componentes conexas* ou apenas *componentes* de  $G$ . O número de componentes de um grafo  $G$  é expresso por  $c(G)$ . Em particular, se  $G$  é conexo, então  $c(G) = 1$ . Para todo grafo  $G$ ,  $c(G - e) \leq c(G) + 1$ ,  $e \in E$ . Se  $c(G - e) = c(G) + 1$ , dizemos que  $e$  é uma *aresta de corte*. No grafo da Figura 2.3b todas as arestas são de corte. Em contrapartida, o grafo da Figura 2.3a não possui aresta de corte.

A seguir, exibimos uma interessante relação (em forma de teorema) entre o grau mínimo de um grafo e a existência de circuito.

**Teorema 2.1.2.** *Se  $G$  é um grafo e  $\delta(G) \geq 2$ , então  $G$  é cíclico.*



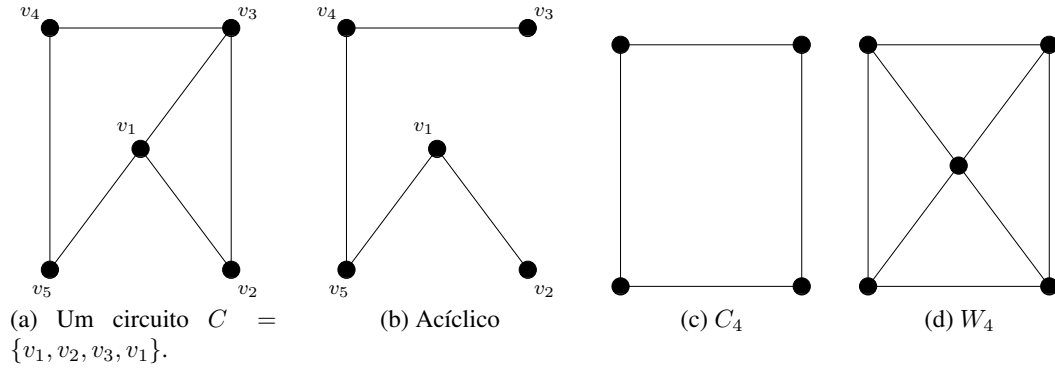


Figura 2.3: Exemplo de grafo cíclico, acíclico, ciclo e roda.

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo com  $\delta(G) \geq 2$ . Seja  $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  um caminho de comprimento máximo em  $G$ . Como  $d(v_k) \geq 2$ , existe  $v_j \neq v_{k-1}$  adjacente a  $v_k$ . Caso  $v_j \notin P$ , o caminho  $P' = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_j)$  contradiz a maximalidade de  $P$ . Assim,  $v_j = v_i$  para algum  $i$ , com  $1 \leq i \leq k - 2$ . Logo,  $C = v_i, \dots, v_k, v_i$  é um circuito em  $G$ .  $\square$

Um grafo  $G$  é dito *completo* se cada vértice é adjacente a todos os demais, ou seja, não existe um par  $u, v \in V$ , tal que  $uv \notin E$ . Denotamos um grafo completo por  $K_n$ , com  $n$  representando a quantidade de vértices. Por exemplo, a Figura 2.6a exibe o  $K_5$ . Uma *clique* de um grafo  $G$  é um conjunto  $S \subseteq V$ , tal que o subgrafo induzido por  $S$  é completo. Um conceito complementar ao de clique é o de conjunto independente. Um conjunto *independente* de um grafo é um conjunto  $I \subseteq V$ , com a seguinte propriedade: quaisquer dois vértices de  $I$  são não adjacentes em  $G$ . A relação entre estes dois conceitos envolve o conceito de grafo complementar. O grafo *complementar* de um grafo  $G = (V, E)$  é o grafo  $G^c = (V, E^c)$ , tal que

$$E^c = \{uv \in E^c \text{ se, e somente se, } uv \notin E\}.$$

Assim, dado um grafo  $G$ , um conjunto  $S \subseteq V$  é uma clique de  $G$  se e somente se  $S$  for um conjunto independente de  $G^c$ .

Um grafo  $G$  é *bipartido*, se o conjunto de seus vértices pode ser particionado em dois conjuntos  $\{X, Y\}$ , tal que para toda aresta  $e = uv \in E$  tem-se que  $u \in X$  e  $v \in Y$ . Em geral, usamos a notação  $G[X, Y]$  para afirmar que  $G$  é bipartido com partes  $X, Y$ . Um exemplo de grafo bipartido pode ser encontrado na Figura 2.6b. Um grafo  $G$  é *bipartido completo* se é bipartido ( $G[X, Y]$ ) e para cada vértice  $v \in X$  tem-se que  $N(v) = Y$ . Isso implica que para todo  $v \in Y$  vale que  $N(v) = X$ . Denotamos um grafo bipartido completo por  $K_{m,n}$ , onde  $m$  e  $n$  indicam o número de vértices em cada parte. Em 1936, König fez a seguinte caracterização dos grafos bipartidos.

**Teorema 2.1.3** (König, 1936). *Um grafo  $G$  é bipartido se e somente se não contém circuitos ímpares.*  $\square$

Uma prova do Teorema 2.1.3 pode ser vista em Bondy e Murty [3].

### Coloração

Uma *coloração de vértices* ou apenas *coloração* de um grafo  $G$  é um mapeamento  $\varrho : V \rightarrow C$ , sendo  $C$  um conjunto de cores. Geralmente, usamos números para representar as cores,  $C = \{1, 2, \dots, k\}$ . Dizemos que uma coloração é *própria* se nenhum par de vértices adjacentes são mapeados com a mesma cor. Escrevemos coloração com o sentido de coloração própria, casos especiais serão relatados ao leitor. Uma  $k$ -coloração é uma coloração com  $|C| = k$ . Um grafo é  $k$ -colorível se admite uma  $k$ -coloração. O *número cromático* de um grafo  $G$  é o menor  $k$ , de modo que  $G$  seja  $k$ -colorível. Denotamos o número cromático de um grafo por  $\chi(G)$ .

### Planaridade

Um grafo  $G$  é *planar* se admite um desenho no plano sem intersecção entre suas arestas (exceto nos vértices). Chamamos tal desenho de *imersão planar* de  $G$ . Em geral, nos referimos a uma imersão planar como *grafo plano*. As regiões fechadas no plano formadas pelas arestas são chamadas de *faces*. Em especial, a região ilimitada do plano forma a face *externa*. Denotamos o conjunto de faces de um grafo  $G$  por  $F(G)$  e o número de faces por  $f(G)$ . O grau de uma face  $f$ , denominado  $d(f)$ , é o número de arestas incidentes em  $f$ , onde cada aresta de corte é contada duas vezes. Na Figura 2.4, exibimos uma imersão planar de um grafo, assim como os graus de suas faces.

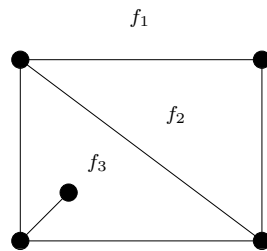


Figura 2.4: Grafo Planar, com  $d(f_1) = 4$ ,  $d(f_2) = 3$ ,  $d(f_3) = 5$ .

Seja  $G$  um grafo plano. O grafo *dual* de  $G$ , denotado por  $G^*$ , é o grafo obtido a partir de  $G$  da seguinte maneira: para cada face  $f \in F(G)$  existe um vértice correspondente  $f^*$  em  $V(G^*)$ ; para cada aresta  $e$  em  $E(G)$  existe uma aresta correspondente  $e^*$  em  $E(G^*)$ ; e dois vértices  $f^*$  e  $g^*$  são extremos de uma aresta  $e^*$  em  $G^*$  se, e somente se, as faces correspondentes  $f$  e  $g$  incidem na aresta  $e$  em  $G$ . Desse modo, temos as seguintes relações:  $f(G) = |V(G^*)|$ ,

$|E(G)| = |E(G^*)|$  e  $d_G(f) = d_{G^*}(f^*)$ , para todo  $f \in F(G)$ . A Figura 2.5 exhibe o grafo dual do grafo da Figura 2.4.

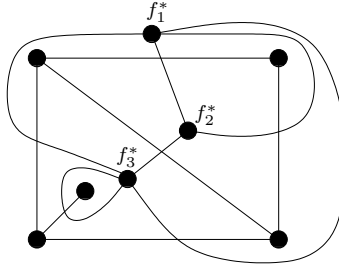


Figura 2.5: Grafo Dual  $G^*$  com vértices  $V(G^*) = \{f_1^*, f_2^*, f_3^*\}$  construído a partir do grafo da Figura 2.4.

O seguinte teorema, semelhante ao Teorema 2.1.1, relaciona o grau das faces de um grafo plano com o seu número de arestas.

**Teorema 2.1.4.** *Se  $G$  é um grafo plano, então*

$$\sum_{f \in F(G)} d(f) = 2|E|.$$

*Demonstração.* Sejam  $G$  um grafo plano e  $G^*$  o dual de  $G$ . Sabemos que,

$$\sum_{f \in F(G)} d(f) = \sum_{f^* \in V(G^*)} d(f^*) \tag{2.3}$$

$$|E(G)| = |E(G^*)|. \tag{2.4}$$

Pelo Teorema 2.1.1,

$$\sum_{f^* \in V(G^*)} d(f^*) = 2|E(G^*)|. \tag{2.5}$$

Por fim, utilizando (2.3), (2.4) e (2.5), concluímos:

$$\sum_{f \in F(G)} d(f) = 2|E(G^*)|$$

$$\sum_{f \in F(G)} d(f) = 2|E(G)|.$$

□

Em 1752, Leonard Euler [3] relacionou os conceitos de face, vértice e aresta em grafos planares em uma elegante fórmula, exibida em forma de teorema como segue.

**Teorema 2.1.5** (Euler, 1752). *Se  $G$  é um grafo plano e conexo, então*

$$|V| - |E| + f(G) = 2.$$

Para provar o Teorema 2.1.5, faremos uso de dois lemas auxiliares. O primeiro é como segue.

**Lema 2.1.1.** *Se  $G$  é um grafo conexo e acíclico, então todas as arestas de  $G$  são de corte e  $|E| = |V| - 1$ .*

*Demonstração.* Prova por indução no número de vértices.

Seja  $G$  um grafo conexo e acíclico. Como  $G$  não possui circuitos, existe pelo menos um vértice  $v$  em  $G$ , tal que  $d(v) = 1$ . Do contrário, se todos os vértices em  $G$  possuísem grau maior ou igual a dois, pelo Teorema 2.1.2,  $G$  possuiria um circuito. Assim, seja  $G' = G - v$ , tal que  $d(v) = 1$ . O grafo  $G'$  é conexo e acíclico, uma vez que  $d(v) = 1$  e a remoção de um vértice não gera circuito. Desse modo, por hipótese de indução em  $G'$ , temos que todas as arestas de  $G'$  são de corte e que  $|E(G')| = |V(G')| - 1$ . Seja  $e$  a aresta incidente em  $v$ . Como  $G - e$  desconecta o vértice  $v$  dos demais vértices de  $G$ , então  $e$  é uma aresta de corte. Ademais,  $|E(G')| = |E(G)| - 1$  e  $|V(G')| = |V(G)| - 1$ , pois  $d(v) = 1$ . Logo,  $|E| = |V| - 1$ . Assim, todas as arestas de  $G$  são de corte e  $|E(G)| = |V(G)| - 1$ .  $\square$

O segundo lema é como segue. Não provamos o Lema 2.1.2 neste momento. Contudo, apresentamos uma breve demonstração do mesmo no final desta seção.

**Lema 2.1.2.** *Se  $G$  é um grafo planar, então todo subgrafo  $G' \subseteq G$  é planar.*  $\square$

Com os Lemas 2.1.1 e 2.1.2, estamos aptos para provar o Teorema 2.1.5.

*Demonstração.* Prova por indução no número de faces.

Seja  $G$  um grafo plano e conexo. Se  $f(G) = 1$ , então  $G$  é acíclico. Do contrário, se  $G$  fosse cíclico, o interior de um circuito formaria pelo menos uma face, e teríamos ainda pelo menos mais uma face externa ao circuito, ou seja,  $f(G) > 1$ . Portanto, utilizando o Lema 2.1.1 obtemos  $|E| = |V| - 1$ . Como  $f(G) = 1$ , concluímos que  $|V| - |E| + f(G) = 2$ .

Suponha, agora, que  $f(G) > 1$ . Então,  $G$  é cíclico, uma vez que um grafo acíclico não forma nenhuma região fechada, logo, há apenas a face externa, ou seja,  $f(G) = 1$ . Assim, seja  $G' = G - e$ , onde  $e$  não é uma aresta de corte. Então,

$$|V(G)| = |V(G')| \tag{2.6}$$

$$|E(G)| - 1 = |E(G')|. \tag{2.7}$$

Uma vez que  $e$  não é aresta de corte, ela pertence a um circuito (uma região fechada no plano). Desse modo, a remoção de  $e$  elimina essa face gerada pelo circuito. Então,

$$f(G') = f(G) - 1. \quad (2.8)$$

Dado que  $G'$  é um subgrafo de  $G$ , pelo Lema 2.1.2 temos que  $G'$  é um grafo plano. Ademais,  $G'$  é conexo, pois  $e$  não é aresta de corte. Logo, por hipótese de indução em  $G'$ ,

$$|V(G')| - |E(G')| + f(G') = 2. \quad (2.9)$$

Por fim, utilizando (2.6), (2.7), (2.8) e (2.9), concluímos:

$$\begin{aligned} |V(G')| - |E(G')| + f(G') &= 2 \\ |V(G)| - |E(G)| - 1 + f(G) + 1 &= 2 \\ |V(G)| - |E(G)| + f(G) &= 2. \end{aligned}$$

□

**Corolário 2.1.2.** *Se  $G$  é um grafo planar com pelo menos três vértices, então*

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

□

Dois grafos são especialmente importantes no estudo de grafos planares, a saber: o grafo completo com cinco vértices,  $K_5$  (Figura 2.6a) e o grafo bipartido completo com seis vértices,  $K_{3,3}$  (Figura 2.6b). Tal importância se dá, a princípio, pelo fato de ambos serem não planares. Vamos nos limitar a provar a não planaridade do  $K_5$ . Contudo, para o  $K_{3,3}$  uma prova pode ser obtida de maneira similar, utilizando a fórmula de Euler.

**Teorema 2.1.6.** *O grafo  $K_5$  é não planar.*

*Demonstração.* Prova por contradição.

Suponha que  $G = K_5$  planar. Desse modo, pelo Corolário 2.1.2,

$$|E| \leq 3|V| - 6. \quad (2.10)$$

Porém, sabemos que  $|E| = 10$  e  $|V| = 5$ . Substituindo em (2.10), obtemos

$$10 = |E| \leq 3|V| - 6 = 9.$$

Portanto, concluímos que  $G = K_5$  não é planar.

□

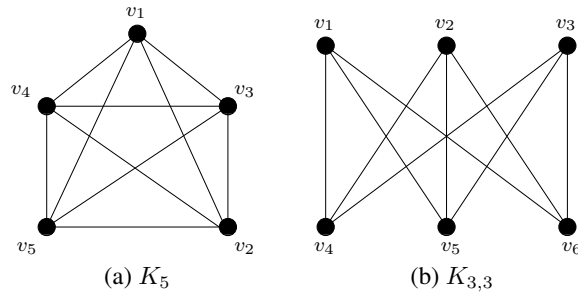


Figura 2.6: Grafos não planares.

Uma *subdivisão* de uma aresta  $e = uv$  de um grafo  $G$ , é uma operação que insere um novo vértice  $w$ , duas arestas  $f = uw$ ,  $g = vw$  e remove a aresta  $e$ . Na Figura 2.7 as arestas  $uv$  e  $vr$  do grafo 2.7a foram subdivididas e o resultado da operação pode ser visto no grafo  $G'$  (Figura 2.7b). Um grafo obtido a partir de um grafo  $G$  por operações de subdivisões de arestas, é chamado de uma *subdivisão* de  $G$  (Figura 2.7). Em particular, todo grafo é uma subdivisão dele mesmo.

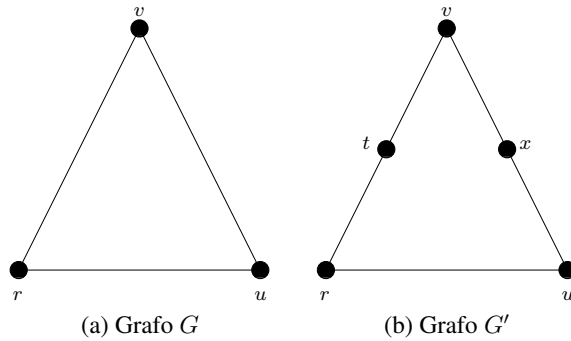


Figura 2.7: Exemplo de uma subdivisão.

Em 1930, Kazimierz Kuratowski, um matemático polonês do século XX, caracterizou grafos planares da seguinte maneira [17].

**Teorema 2.1.7** (Kuratowski, 1930). *Um grafo é planar se e somente se não contém subdivisões do  $K_5$  ou do  $K_{3,3}$ .*  $\square$

Não apresentamos uma prova do Teorema 2.1.7. Contudo, para ver uma prova detalhada deste, indicamos Diestel [6]. O Lema 2.1.2, utilizado para provar a célebre fórmula de Euler é uma decorrência direta do Teorema 2.1.7, pois se um grafo  $G$  não contém nenhum subgrafo homeomorfo ao  $K_5$  ou ao  $K_{3,3}$ , tal fato também ocorre em todo subgrafo de  $G$ .

## Digrafos

Um *digrafo*  $D$  é uma tripla ordenada  $(V(D), A(D), \psi_D)$ , onde  $V(D)$  é um conjunto finito de elementos chamado *vértices*,  $A(D)$  é um conjunto finito de elementos, disjunto de  $V(D)$ , chamado *arcos* e  $\psi_D$  é uma função de incidência que para cada arco  $a \in A(D)$  associa um par ordenado de vértices, não necessariamente distintos,  $\psi_D(a) = (u, v)$ . Dizemos que  $u$  e  $v$  são *unidos* por  $a$ . Dizemos também que  $u$  é a *cauda* de  $a$  e  $v$  é a *cabeça* (ou *ponta*) de  $a$ . Um *laço* em um digrafo é um arco da forma  $\psi_D(a) = (v, v)$ . Dois arcos  $a_1, a_2$  são *múltiplos* se possuem os mesmos vértices cauda e cabeça, ou seja,  $\psi_D(a_1) = (u, v)$  e  $\psi_D(a_2) = (u, v)$ . Um digrafo  $D$  é dito *simples* se não possui laços e arcos múltiplos. Caso contrário, dizemos que  $D$  é um *multidigrafo*. Neste trabalho, abordamos apenas digrafos simples. Visualmente, usamos setas para representar os arcos, sendo o vertice próximo a ponta da seta um vértice cabeça, conforme ilustrado na Figura 2.8.

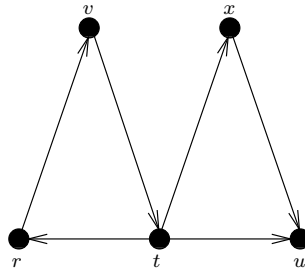


Figura 2.8: Exemplo de um digrafo.

Em geral, deixamos implícita a função de incidência, uma vez que um vértice cauda e um vértice ponta definem unicamente um arco em um digrafo simples. Assim, denotamos um digrafo por  $D = (V, A)$  e usamos  $a = uv$  em vez de  $\psi_D(a) = (u, v)$ .

Seja  $D$  um digrafo com  $n$  vértices. Dizemos que  $D$  é *completo*, denotado por  $K_n$ , se todos os pares de vértices em  $V(D)$  são unidos por algum arco. Um digrafo  $D'$  é um *subdigrafo* de  $D$ , se  $V(D') \subseteq V(D)$  e  $A(D') \subseteq A(D)$ .

Um *circuito* em um digrafo  $D$  é uma sequência  $C = (v_1, \dots, v_n, v_1)$  de três ou mais vértices distintos, exceto  $v_1$ , tais que dois vértices  $v_i, v_{i+1}$  consecutivos na sequência são unidos por um arco  $a_i = v_i v_{i+1}$  ou  $a_i = v_{i+1} v_i$ , com  $v_{n+1} = v_1$ . Note que não importa o sentido do arco, por exemplo, na Figura 2.8 temos dois circuitos  $C_1 = (r, v, t, r)$  e  $C_2 = (t, x, u, t)$ . Um *circuito orientado* é definido como um circuito  $C = (v_1, \dots, v_n, v_1)$ , tal que todos os arcos que unem os vértices da sequência são da forma  $a_i = v_i v_{i+1}$ , com  $v_{n+1} = v_1$ . Na Figura 2.8, o circuito  $C_1 = (r, v, t, r)$  é um circuito orientado. Outrossim, definimos um *circuito transitivo* como circuito que não é orientado. Na Figura 2.8, o circuito  $C_2 = (t, x, u, t)$  é um circuito transitivo. Ademais, dizemos que  $D$  é *planar* se admite um desenho no plano sem intersecção entre seus arcos (exceto nos vértices).

## 2.2 Cobertura de triângulos em grafos

Em um grafo  $G$ , um *triângulo*  $t$  é um circuito com três arestas. Em geral, pensamos em  $t$  como um conjunto de arestas. Denotamos as arestas de um triângulo  $t$  por  $E(t)$ , e os vértices por  $V(t)$ . Escrevemos  $T(G)$  para indicar o conjunto de todos os triângulos de  $G$ . Quando  $G$  estiver claro dentro do contexto, usaremos apenas  $T$  em vez de  $T(G)$ . Dois triângulos  $t_1, t_2$  são *aresta-disjuntos* se  $E(t_1) \cap E(t_2) = \emptyset$ .

Uma *cobertura de triângulos* (ou *transversal*) em um grafo  $G$  é um conjunto  $C \subseteq E$ , tal que todo triângulo de  $G$  contém pelo menos uma aresta em  $C$  (veja Figura 2.9), ou seja, a remoção das arestas de  $C$  resulta em um grafo sem triângulos. Uma *cobertura mínima de triângulos* é definida como uma cobertura de triângulos com menor cardinalidade. Denotamos o tamanho de uma cobertura mínima de triângulos por  $\tau(G)$ . Em geral, escrevemos cobertura com o sentido de cobertura de triângulos. Visualmente, para indicar as arestas de uma cobertura  $C$  no desenho de um grafo, faremos as arestas de  $C$  em negrito, conforme a Figura 2.9.

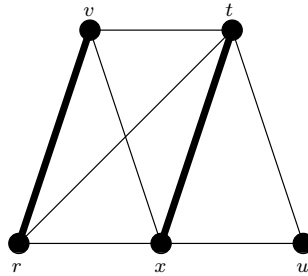


Figura 2.9: Exemplo de uma cobertura  $C = \{vr, xt\}$ .

O conjunto de arestas  $C = \{vr, xt\}$  do grafo  $G$  da Figura 2.9 é uma cobertura mínima. Justificando:  $C$  é uma cobertura, pois  $G - C$  resulta em um grafo sem triângulos. Ela é mínima, pois em  $G$  existem dois triângulos aresta-disjuntos e, desse modo, toda cobertura deverá conter pelo menos duas arestas para cobri-los. Logo,  $\tau(G) \geq 2$ . Como  $|C| = 2$ , temos que  $|C| = \tau(G)$ . Infelizmente, não há uma forma geral para verificar se uma cobertura de fato é mínima.

## 2.3 Empacotamento de triângulos em grafos

Um *empacotamento de triângulos* em um grafo  $G$  é um conjunto  $P \subseteq T$  de triângulos aresta-disjuntos, ou seja, para todo par  $t_1, t_2 \in P$  tem-se  $E(t_1) \cap E(t_2) = \emptyset$  (veja Figura 2.10). Dizemos que um empacotamento de triângulos  $P$  em  $G$  é *maximal* se não existe em  $G$  nenhum outro empacotamento de triângulos  $P'$ , tal que  $P \subset P'$ . Dizemos ainda que  $P$  é *máximo* se ele é um empacotamento de triângulos de maior cardinalidade em  $G$ . Denotamos o tamanho de um empacotamento máximo de triângulos por  $\nu(G)$ . Em geral, escrevemos empacotamento



com o sentido de empacotamento de triângulos. Visualmente, destacamos os triângulos de um empacotamento tracejando as suas arestas, conforme a Figura 2.10.

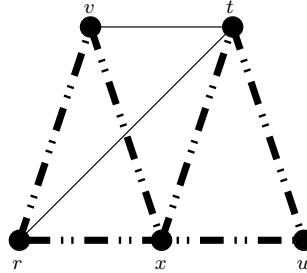


Figura 2.10: Exemplo de empacotamento  $P = \{t_1, t_2\}$ ,  $t_1 = \{rv, vt, tr\}$  e  $t_2 = \{tx, xu, ut\}$ .

O conjunto de triângulos  $P$  do grafo  $G$  da Figura 2.10 é um empacotamento máximo. Justificando:  $P$  é um empacotamento, uma vez que os triângulos são aresta-disjuntos. Ele é máximo, pois  $G$  tem oito arestas, logo, permite no máximo dois triângulos aresta-disjuntos. Portanto,  $\nu(G) \leq 2$ . Como  $P$  é um empacotamento com dois triângulos, temos que  $|P| = \nu(G)$ . Assim como em uma cobertura, não há um modo geral para verificar se um empacotamento é máximo.

## 2.4 Relação entre cobertura e empacotamento

Na literatura há diversos problemas que relacionam os conceitos de empacotamento e cobertura, e destes, vários permanecem em aberto [22]. Contudo, para um grafo  $G$ , duas relações entre  $\tau(G)$  e  $\nu(G)$  são bem conhecidas, a saber:

$$\nu(G) \leq \tau(G) \quad (2.11)$$

$$\tau(G) \leq 3\nu(G) \quad (2.12)$$

Já utilizamos a desigualdade (2.11) para justificar a veracidade da minimalidade da cobertura exibida na Figura 2.9. Ela segue do fato que toda cobertura tem que interceptar todos os triângulos aresta-disjuntos. Portanto, pelo menos  $\nu(G)$  arestas são necessárias para cobrir todos os triângulos de  $T$ . Se todos os triângulos de um grafo são aresta-disjuntos ( $\nu(G) = |T|$ ), então  $\tau(G) = \nu(G)$ .

A segunda desigualdade, (2.12), decorre do fato que se construirmos um conjunto  $C$  com todas as arestas de todos os triângulos de um empacotamento máximo  $P$  ( $|P| = \nu(G)$ ), obtemos uma cobertura de  $G$  de tamanho  $3|P| = 3\nu(G)$ . Caso contrário, se  $G - C$  contiver pelo menos um triângulo  $t$ , então  $t$  é aresta-disjunto dos triângulos de  $P$ . Desse modo, podemos construir

um empacotamento  $P' = P \cup t$ , que fere a maximalidade de  $P$ . Portanto,  $C$  é uma cobertura de  $G$  com tamanho  $3\nu(G)$ . Logo,  $\tau(G) \leq |C| = 3|P| = 3\nu(G)$ .

# Capítulo 3

## Conjectura de Tuza

Apresentamos neste capítulo a conjectura de Tuza, um problema sobre cobertura mínima e empacotamento máximo. Exibimos suas variantes conhecidas e uma breve descrição do seu histórico.

### 3.1 Conjectura de Tuza

Apresentamos no capítulo anterior duas relações envolvendo cobertura mínima e empacotamento máximo. A primeira delas, (2.11), apresenta um limite inferior para o tamanho de uma cobertura mínima,  $\tau$ , em termos do tamanho de um empacotamento máximo,  $\nu$ . A segunda, (2.12), apresenta um limite superior para o tamanho de uma cobertura mínima em três vezes o tamanho de um empacotamento máximo. Zsolt Tuza [27], um matemático húngaro, propôs em 1981 um melhor ajuste na segunda relação. Ele propôs uma diminuição do limite superior de  $\tau$ . O problema lançado por Tuza ficou conhecido como a conjectura de Tuza e permanece aberto há mais de três décadas [23]. Tuza enunciou sua conjectura da seguinte maneira:

**Conjectura 3.1.1** (Tuza, 1981). *Se um grafo  $G$  contém no máximo  $k$  triângulos aresta-disjuntos, então existe um conjunto com no máximo  $2k$  arestas que interceptam todos os triângulos de  $G$ .*

A Conjectura 3.1.1 pode ser reescrita como a seguir.

**Conjectura 3.1.2** (Tuza, 1981). *Para todo grafo  $G$ ,*

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

Sejam  $G$  um grafo e  $P$  um empacotamento máximo de  $G$ . Uma maneira intuitiva de interpretar a conjectura de Tuza, é pensar que obtemos uma cobertura de  $G$ , removendo em média duas arestas de cada triângulo de  $P$ , diferente da Relação 2.12, na qual obtemos uma cobertura

de tamanho  $3|P|$  removendo todas as arestas de todos os triângulos de  $P$ . Caso seja possível obter uma cobertura  $C$  de  $G$  dessa forma, então  $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ .

Neste trabalho, abordamos a conjectura de Tuza conforme enunciada na Conjectura 3.1.2. Portanto, não raramente nos referimos a conjectura de Tuza como Conjectura 3.1.2. A seguir, apresentamos um exemplo.

**Exemplo 3.1.1.** Dois grafos  $G_1$  (Figura 3.1a e 3.1b) e  $G_2$  (Figura 3.1c e 3.1d) exemplificam a conjectura de Tuza:

- Para  $G_1 = K_4$ , mostramos a seguir que  $\nu(G_1) = 1$  e  $\tau(G_1) = 2$ :
  - Caso  $\nu(G_1) = 1$ . Sabemos que  $G_1$  possui quatro vértices e cada triângulo possui três. Sabemos também que  $\nu(G_1) \geq 1$ , pois  $T(G_1) \neq \emptyset$ . Suponha, pois,  $\nu(G_1) > 1$ . Seja  $P$  um empacotamento máximo de  $G_1$ , ou seja,  $|P| = \nu(G_1)$ . Sejam  $t_1, t_2 \in P$ . Como  $t_1$  e  $t_2$  são aresta-disjuntos, eles possuem no máximo um vértice em comum. Portanto,  $|V| \geq 5$ . Porém, sabemos que  $|V| = 4$ . Logo,  $\nu(G_1) = 1$ .
  - Caso  $\tau(G_1) = 2$ . Sabemos pelo item anterior que  $\nu(G_1) = 1$ , isso implica  $\tau(G_1) \geq 1$  (pela relação 2.11). Seja  $C = \{vr, tu\}$  um conjunto de arestas.  $C$  é uma cobertura, pois o grafo  $G_1 - C$  não contém triângulos. Portanto,  $\tau(G_1) \leq 2$ . Ademais, basta mostrar que não existe um conjunto  $C'$  com apenas uma aresta que seja uma cobertura de  $G_1$ . Seja  $C' = \{e\}$ . Apenas dois casos podem acontecer:  $e$  pertence ao triângulo externo induzido pelos vértices  $\{v, u, r\}$ ; ou  $e$  possui o vértice  $t$  como extremo. Se  $e$  pertence ao triângulo externo induzido pelos vértices  $\{v, u, r\}$ , suponha  $e = vr$ . Então, existe um triângulo não coberto por  $C'$ , pois o vértice  $t$  forma triângulo com qualquer par de vértices do grafo. Em particular,  $t_1 = \{vt, tu, uv\}$ . Agora, se  $e$  tem o vértice  $t$  como extremo, suponha  $e = tu$ . Como no caso anterior, temos que  $t$  forma triângulo com qualquer par de vértices do grafo. Desse modo, existe um triângulo não coberto por  $C'$ . Em particular,  $t_1 = \{tr, tv, rv\}$ . Logo,  $\tau(G_1) = 2$ . Note que, pela argumentação, as arestas de  $C$  são não adjacentes.
  - Desse modo,  $\tau(G_1) \leq 2\nu(G_1)$  e a Conjectura 3.1.2 é verificada em  $G_1$ . Embora essa demonstração faça uso da estrutura do grafo, ela é válida para todos os grafos  $G = K_4$ , uma vez que todo grafo completo com quatro vértices é isomorfo ao grafo  $G_1$ .
- Para  $G_2 = K_5$ , como demonstrado a seguir, temos que  $\nu(G_2) = 2$  e  $\tau(G_2) = 4$ :
  - Caso  $\nu(G_2) = 2$ . Sabemos que  $|V| = 5$ . Sabemos também que dois triângulos são aresta-disjuntos se compartilham no máximo um vértice. Seja  $P$  o empacotamento exibido na Figura 3.1c. Como  $|P| = 2$ , temos que  $\nu(G_2) \geq 2$ . Suponha  $\nu(G_2) > 2$ . Seja  $P'$  um empacotamento, tal que  $|P'| = \nu(G_2)$ . Sejam  $t_1, t_2 \in P'$ . Como

$\nu(G_2) > 2$ , existe  $t \in P'$  diferente de  $t_1$  e  $t_2$ . Dado que  $|V| = 5$ , decorre que  $t$  compartilha, necessariamente, dois vértices com algum  $t_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , ou seja,  $t$  não é aresta-disjunto dos demais triângulos. Portanto,  $\nu(G_2) = 2$ .

- Caso  $\tau(G_2) = 4$ . Seja  $C$  a cobertura exibida na Figura 3.1d. Como  $|C| = 4$ , temos que  $\tau(G_2) \leq 4$ . Suponha  $\tau(G_2) < 4$ . Seja  $C'$  uma cobertura de  $G_2$ , tal que  $|C'| = \tau(G_2) < 4$ . Seja  $G'$  um subgrafo induzido de  $G_2$  com quatro vértices. Sabemos que  $G'$  é um  $K_4$ . Logo,  $\tau(G') = 2$  (exemplo anterior). Sejam  $C''$  as arestas de  $C'$  (são duas) que cobrem  $G'$  e  $v$  o vértice de  $V(G_2)$  que não está em  $V(G')$ . Como as arestas de  $C''$  são não adjacentes (exemplo anterior), existem duas arestas  $e, f \in E(G')$  não adjacentes tal que  $e, f \notin C''$ . Ademais,  $v$  é adjacente a todos os vértices de  $G'$ . Desse modo, forma triângulo com qualquer par de vértices de  $G'$ . Logo, mais dois triângulos aresta-disjuntos são formados usando o vértice  $v$  e os extremos de  $e$  e  $f$ . Como  $|C'| \leq 3$ ,  $C'$  cobrirá no máximo um desses triângulos aresta-disjuntos formados. Portanto,  $\tau(G_2) = 4$ .
- Assim,  $\tau(G_2) \leq 2\nu(G_2)$  é igualmente verdadeiro. Como no caso anterior, essa demonstração é válida para todos os grafos  $G = K_5$ .

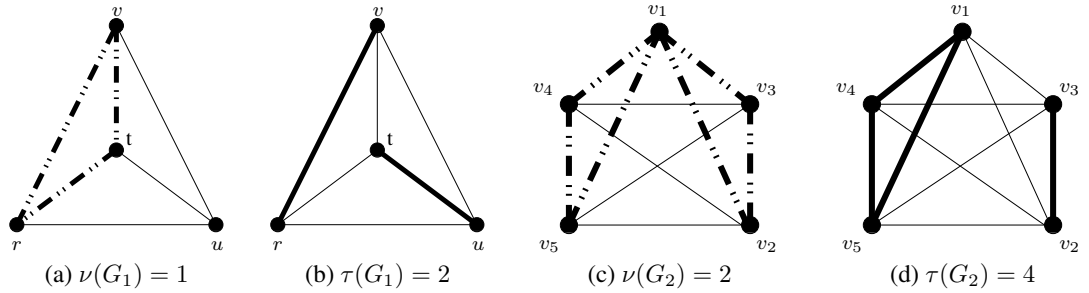


Figura 3.1: Exemplo da conjectura de Tuza.

Geralmente fazemos um abuso de notação no uso de  $\tau$  e  $\nu$ , aplicando-os não somente em um grafo, mas também em outros contextos, por exemplo, multigrafos. A diferenciação se dá pelo argumento recebido por  $\tau$  e  $\nu$ .

A conjectura de Tuza é bem justa, ou seja, em muitos grafos  $G$ , temos que  $\tau(G)$  é próximo a  $2\nu(G)$  [26]. Entretanto, existem casos em que há uma grande folga, por exemplo, grafos que não contêm triângulos ou são compostos por triângulos aresta-disjuntos; nesses casos  $\tau(G) = \nu(G)$ . Podemos ilustrar a justeza da Conjectura 3.1.2 ( $\tau(G) = 2\nu(G)$ ) por meio dos grafos completos  $K_4$  e  $K_5$ , conforme mostrado no Exemplo 3.1.1. Se provada, a conjectura de Tuza é o melhor limite superior de  $\tau(G)$  em termos de  $\nu(G)$ , para grafos arbitrários [13]. De fato, não é possível

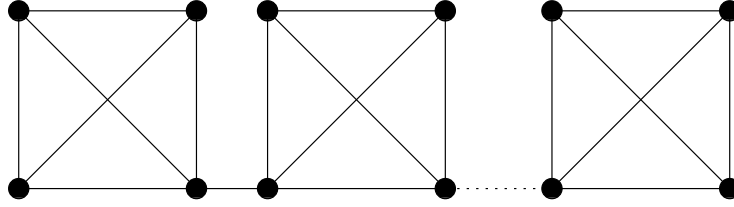


Figura 3.2: Exemplo de um grafo  $G$  com  $\tau(G) = 2\nu(G)$ .

diminuir o limitante de  $\tau$ . Imaginemos, por exemplo, um grafo  $G$  composto por uniões de  $K_4$  conectados por uma aresta (conforme Figura 3.2), então  $G$  exige  $\tau(G) = 2\nu(G)$ .

Depois de lançada em 1981, a conjectura de Tuza vem sendo alvo de diversos estudos. Desse modo, vários resultados foram obtidos em diversas classes de grafos, assim como muitas variações da conjectura surgiram na literatura. A seguir, apresentamos as variantes conhecidas da conjectura de Tuza.

### 3.1.1 Variantes da Conjectura

Neste trabalho, focamos a conjectura de Tuza aplicada a grafos simples, conforme enunciada na Conjectura 3.1.2. Contudo, para dar uma maior abrangência a este texto, descrevemos brevemente algumas das variantes encontradas na literatura.

#### Versão para digrafo

Definimos um *triângulo-ciclo*  $t_c$  em um digrafo  $D$ , como um circuito orientado de tamanho três. Denotamos o conjunto de todos os triângulos-ciclo em  $D$  por  $T_c(D)$ . Denotamos o conjunto de arcos de um triângulo-ciclo  $t_c$  por  $E(t_c)$ . Dizemos que dois triângulos-ciclo  $t_c, t'_c \in T_c(D)$  são *arco-disjuntos* se  $E(t_c) \cap E(t'_c) = \emptyset$ . Definimos um *empacotamento de triângulos-ciclo*  $P$  como um conjunto de triângulos-ciclo arco-disjuntos. Dizemos que  $P$  é *máximo* se é um empacotamento de triângulos-ciclo de maior cardinalidade dentre todos os empacotamentos de triângulos-ciclo em  $D$ . Denotamos o tamanho de um empacotamento máximo de triângulos-ciclo por  $\nu(D)$ . Por outro lado, uma *cobertura de triângulos-ciclo* é um conjunto de arcos  $C$ , tal que todo triângulo-ciclo em  $T_c(D)$  possui pelo menos um arco em  $C$ . Dizemos que  $C$  é *mínima* se é uma cobertura de triângulos-ciclo de cardinalidade mínima dentre todas as coberturas de triângulos-ciclo em  $D$ . Denotamos o tamanho de uma cobertura mínima de triângulos-ciclo por  $\tau(D)$ . Ademais, dizemos que um digrafo  $D$  que não contém nenhum circuito induzido de tamanho maior que três é *cordal*.

Esta versão da Conjectura 3.1.2 possui o mesmo limitante de  $\tau$ .

**Conjectura 3.1.3.** *Para todo digrafo  $D$ ,*

$$\tau(D) \leq 2\nu(D).$$

A Conjectura 3.1.3 permanece aberta. Contudo, resultados para algumas classes de digrafos foram desenvolvidos. Em 1990, Tuza a provou para os seguintes digrafos [26]. Lembrando que neste contexto  $K_n$  é um digrafo completo com  $n$  vértices.

**Teorema 3.1.1** (Tuza, 1990). *Seja  $D$  um digrafo cordal.*

1. *Se  $D$  não contém  $K_4$  como subdigrafo, então  $\tau(D) = \nu(D)$ ;*
2. *Se  $D$  não contém  $K_5$  como subdigrafo, então  $\tau(D) \leq 2\nu(D)$ ;*
3. *Se  $D$  não contém  $K_6$  como subdigrafo, então  $\tau(D) \leq 2\nu(D)$ .*

□

Em 1994, Tuza [22] estudou digrafos planares e provou o seguinte teorema.

**Teorema 3.1.2** (Tuza, 1994). *Se  $D$  é um digrafo planar, então*

$$\tau(D) = \nu(D).$$

□

Em um digrafo  $D$ , além dos triângulos-ciclo, há também os triângulos-transitivo. Definimos um *triângulo-transitivo*  $t_t$  em um digrafo  $D$ , como um circuito transitivo de tamanho três. Definimos empacotamento e cobertura de triângulo-transitivo de forma análoga a definição de triângulo-ciclo. Outrossim, utilizamos  $\tau_t(D)$  para denotar o tamanho de uma cobertura mínima de triângulos-transitivo e  $\nu_t(D)$  para denotar o tamanho de um empacotamento máximo de triângulos-transitivo.

A versão da conjectura de Tuza em digrafos com triângulos-transitivo possui o mesmo limite superior da Conjectura 3.1.3.

**Conjectura 3.1.4.** *Para todo digrafo  $D$ ,*

$$\tau_t(D) \leq 2\nu_t(D).$$

Como ocorre na versão com triângulos-ciclo, a Conjectura 3.1.4 permanece aberta. Contudo, resultados para algumas classes de digrafos foram desenvolvidos. Em 1990, Tuza a provou para os seguintes digrafos [26].

**Teorema 3.1.3** (Tuza, 1990). *Seja  $D$  um digrafo cordal.*

1. Se  $D$  não contém o  $K_4$  como subdigrafo, então  $\tau_t(D) = \nu_t(D)$ ;
2. Se  $D$  não contém o  $K_5$  como subdigrafo, então  $\tau_t(D) \leq 2\nu_t(D)$ ;

□

### Versão fracionária

Em 1995, Krivelevich [16] propôs duas versões fracionárias da conjectura de Tuza. Com este objetivo, ele redefiniu os conceitos de cobertura e empacotamento. Assim, uma *cobertura fracionária* em um grafo  $G$  é uma atribuição de valores não negativos (*pesos*) às arestas, de modo que o peso de cada triângulo é pelo menos um, sendo o peso de um triângulo o somatório dos pesos de suas arestas. Em outras palavras, uma cobertura fracionária é uma função  $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que

$$\sum_{e \in t} c(e) \geq 1, \text{ para todo } t \in T.$$

Definimos  $\tau^*(G)$  como  $\min \sum \{c(e) : e \in E\}$  dentre todas as coberturas fracionárias de  $G$ .

Por outro lado, um *empacotamento fracionário* é uma atribuição de valores não negativos (*pesos*) aos triângulos de  $T(G)$ , de modo que os valores de cada aresta (sendo o somatório dos pesos dos triângulos que a contém) é no máximo um. Em outras palavras, é uma função  $p : T \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que

$$\sum_{e \in t} p(t) \leq 1, \text{ para toda aresta } e \in E.$$

Definimos  $\nu^*(G)$  como  $\max \sum \{p(t) : t \in T\}$  dentre todos os empacotamentos fracionários em  $G$ . Obviamente,  $\tau^*(G) \leq \tau(G)$  e  $\nu(G) \leq \nu^*(G)$ .

Em 1995, Krivelevich propôs e provou as seguintes versões da Conjectura 3.1.2.

**Teorema 3.1.4** (Krivelevich, 1995). *Para todo grafo  $G$ ,*

- (i)  $\tau(G) \leq 2\nu^*(G)$ ;
- (ii)  $\tau^*(G) \leq 2\nu(G)$ .

□

Mesmo com os dois casos provados por Krivelevich, outros pesquisadores abordaram essa variação da conjectura de Tuza. Em 2010, Chapuy, DeVos, McDonald, Mohar e Scheide [4], provaram que a relação  $\tau(G) \leq 2\nu^*(G) - \frac{1}{4}\sqrt{\nu^*(G)}$  é o melhor limite possível para a Conjectura 3.1.4(i) de Krivelevich.

Em 2011, Haxell, Kostochka e Thomassé [14] versaram sobre a outra variante de Krivelevich (Conjectura 3.1.4(ii)), eles provaram que se em um grafo  $G$  ocorre  $\tau^*(G) \geq 2\nu(G) - \epsilon$  para algum  $\epsilon \geq 0$ , então  $G$  contém  $\nu(G) - \lfloor 10\epsilon \rfloor$  subgrafos  $K_4$  aresta-disjuntos e  $\lfloor 10\epsilon \rfloor$



triângulos aresta-disjuntos. Provaram ainda que se  $G$  é um grafo sem  $K_4$  como subgrafo, então  $\tau^*(G) \leq 1.8\nu(G)$ .

Em 2001, Haxell e Rödl [15] provaram que para um grafo  $G$  com  $n$  vértices, temos que  $|\nu(G) - \nu^*(G)| = o(n^2)$ , ou seja, para um grafo com um número quadrático de triângulos aresta-disjuntos,  $\nu$  e  $\nu^*$  são assintoticamente iguais. Recentemente (2012), Yuster [31] utilizou a relação provada por Krivelevich,  $\tau(G) \leq 2\nu^*(G)$ , e o resultado obtido por Haxell e Rödl para concluir que

$$\tau(G) \leq 2\nu(G) + o(n^2),$$

mostrando que a conjectura de Tuza é assintoticamente verdadeira para grafos com um número quadrático em  $n$  de triângulos.

### Versão para multigrafos

Seja  $G$  um grafo com laços e arestas múltiplas. Por definição, nenhum triângulo de  $T(G)$  contém arestas que são laços. Desse modo, laços são irrelevantes para a Conjectura 3.1.2. Contudo, o mesmo não ocorre com arestas múltiplas. Um multigrafo  $\mathbb{G}$  possui mais triângulos do que o grafo simples  $G$  associado, uma vez que todos os triângulos de  $G$  estão em  $\mathbb{G}$ , porém a recíproca não necessariamente é verdadeira. As definições de cobertura e empacotamento são as mesmas apresentadas no Capítulo 2, Seções 2.2 e 2.3. Embora um multigrafo contenha mais triângulos, o limite superior conjecturado para  $\tau$  é o mesmo.

**Conjectura 3.1.5.** *Se  $\mathbb{G}$  é um multigrafo, então*

$$\tau(\mathbb{G}) \leq 2\nu(\mathbb{G}).$$

O melhor resultado para a Conjectura 3.1.5 é devido a Chapuy, DeVos, McDonald, Mohar e Scheide [4]. Eles provaram o seguinte teorema.

**Teorema 3.1.5** (Chapuy, DeVos, McDonald, Mohar e Scheide, 2010). *Se  $\mathbb{G}$  é um multigrafo, então*

$$\tau(\mathbb{G}) \leq 3 - \frac{2}{25}\nu(\mathbb{G}).$$

□

O Teorema 3.1.5 é o melhor e único resultado para a Conjectura 3.1.5. Os autores também estudaram a versão fracionária em um multigrafo. Utilizando as mesmas definições de empacotamento fracionário e cobertura fracionária (conforme definido na subseção anterior). Os autores provam a seguinte relação.

**Teorema 3.1.6** (Chapuy, DeVos, McDonald, Mohar e Scheide, 2010). *Se  $\mathbb{G}$  é um multigrafo, então*

$$\tau(\mathbb{G}) \leq 2\nu^*(\mathbb{G}) - \frac{1}{4}\sqrt{\nu^*(\mathbb{G})}.$$

□

Embora um multigrafo tenha mais triângulos que o grafo simples associado, o limite de  $\tau$  na versão fracionária de Krivelevich (Conjectura 3.1.4(i)) para multigrafos é o mesmo que para grafos simples.

### Versão para hipergrafos 3-partidos

Definimos um *hipergrafo*  $\mathcal{H}$  como um par ordenado  $(V(\mathcal{H}), \mathcal{E}(\mathcal{H}))$ , onde  $V(\mathcal{H})$  é um conjunto finito de elementos chamado *vértices*,  $\mathcal{E}(\mathcal{H})$  é um conjunto de conjuntos finito de elementos chamado *hiperarestas*. Nesta seção, trabalhamos com hipergrafos 3-partidos. Dizemos que um hipergrafo  $\mathcal{H} = (V(\mathcal{H}), \mathcal{E}(\mathcal{H}))$  é *3-partido* se o conjunto de vértices  $V(\mathcal{H})$  pode ser particionado em  $V_1, V_2, V_3$ , tal que  $|E \cap V_i| = 1$ , para toda hiperaresta  $E \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$  e para todo  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Definimos uma *cobertura* em um hipergrafo 3-partido  $\mathcal{H}$  como um conjunto de vértices que intercepta todas as hiperarestas de  $\mathcal{E}$ . Denotamos o tamanho de uma cobertura mínima de  $\mathcal{H}$  por  $\tau(\mathcal{H})$ . Um *empacotamento* em  $\mathcal{H}$  é definido como um conjunto independente de hiperarestas. Denotamos o tamanho de um empacotamento máximo de  $\mathcal{H}$  por  $\nu(\mathcal{H})$ .

Desse modo, podemos enunciar a seguinte variação da Conjectura 3.1.2 aplicada a hipergrafos 3-partidos:

**Conjectura 3.1.6** (Tuza, 1990). *Se  $\mathcal{H}$  é um hipergrafo 3-partido, então*

$$\tau(\mathcal{H}) \leq 2\nu(\mathcal{H}).$$

De fato, a Conjectura 3.1.6 é um caso especial de um problema mais geral conhecido como a conjectura de Ryser, no qual aborda hipergrafos  $r$ -partidos. Mais informações sobre a conjectura de Ryser pode ser vista em [24].

Assim como para grafos, a Conjectura 3.1.6 permanece aberta. Contudo, alguns resultados são conhecidos. Em 1987, Tuza [25] verificou que  $\tau(\mathcal{H}) \leq \frac{8}{3}\nu(\mathcal{H})$ . Em 1995, Haxell [10] melhorou o limitante para  $\tau(\mathcal{H}) \leq \frac{5}{3}\nu(\mathcal{H})$ .

## 3.2 Histórico da conjectura

Esta seção tem por finalidade ilustrar a quantidade de estudos e a importância da conjectura de Tuza em teoria dos grafos. Por isso, apresentamos uma breve descrição do histórico da conjectura de Tuza.

### 3.2.1 Principais resultados

Em 1981, Tuza propôs a Conjectura 3.1.2 [23]. Nove anos depois, em 1990, o próprio autor publicou um artigo [26], no qual verifica a Conjectura 3.1.2 para várias classes de grafos, a saber: grafos planares, grafos com  $n$  vértices e pelo menos  $\frac{7}{16}n^2$  arestas, grafos linha, grafos cordais sem  $K_4$  como subgrafo, grafos cordais sem  $K_5$  como subgrafo e mostrou que para todo  $n$ , a relação  $\tau(K_n) \leq 2\nu(K_n)$  é verificada. Ele abordou ainda grafos tripartidos (vide Capítulo 4, Seção 4.5) e mostrou que a proposição  $\tau(G) \leq \frac{7}{3}\nu(G)$  é verdadeira se  $G$  é um grafo tripartido.

A partir do artigo publicado por Tuza em 1990 [26], vários pesquisadores abordaram a Conjectura 3.1.2, e surgiram resultados para outras classes de grafos, bem como melhorias nos limitantes demonstrados.

Em 1995, Krivelevich [16] expandiu a demonstração de Tuza para grafos planares, provando que em grafos sem subdivisões do  $K_{3,3}$  a Conjectura 3.1.2 é válida. Em 1998, Haxell e Kohayakawa [12] melhoraram o resultado obtido por Tuza em grafos tripartidos. Eles provaram que se  $G$  é tripartido, então  $\tau(G) \leq \alpha\nu(G)$ , onde  $\alpha = (38 + \sqrt{1948})/48 < 1,956$ . O primeiro e único resultado para o caso geral da conjectura de Tuza surgiu apenas em 1999 e é devido a Haxell. No seu artigo [11], Haxell mostra que a relação  $\tau(G) \leq \frac{66}{23}\nu(G)$  vale para todo grafo  $G$ . Em 2009, Haxell, Cui e Ma [5] desenvolveram uma caracterização para os grafos planares em que ocorre a igualdade na Conjectura 3.1.2 ( $\tau(G) = 2\nu(G)$ ).

Em 2012, Lakshmanan, Bujtás e Tuza [18] publicaram um artigo provando que a Conjectura 3.1.2 é válida para grafos triângulo-3-coloríveis. Um grafo  $G$  é dito ser *triângulo-3-colorível*, se admite uma colocação de suas arestas com no máximo três cores, de forma que todos os triângulos de  $G$  recebam cores distintas em suas arestas. Eles também expandiram esse resultado, para grafos com número  $t$ -cromático no máximo quatro. O *número  $t$ -cromático* de um grafo  $G$ , denotado por  $\chi_t(G)$ , é definido como o menor valor  $k$ , tal que o grafo seja triângulo- $k$ -colorível. Os autores provaram também que a Conjectura 3.1.2 é igualmente válida para grafos que não contém grafo roda de tamanho ímpar (*odd-wheel-free graphs*) como subgrafo. Ainda em 2012, Haxell, Kostochka e Thomassé [13] estudaram grafos planares que não contém cópias do  $K_4$ . Eles provaram que se um grafo planar  $G$  não contém cópias do  $K_4$ , então  $\tau(G) \leq \frac{3}{2}\nu(G)$ .

Mais recentemente, em 2013, Puleo [21] provou que a Conjectura 3.1.2 vale para grafos com grau médio máximo (vide Capítulo 4, Seção 4.7) menor que sete. Como decorrência do resultado obtido por Puleo, é possível mostrar que a conjectura de Tuza é verdadeira para grafos sem subdivisões do  $K_5$  e para grafos sem minor do  $K_{3,3}$ .

Como podemos notar, encontramos na literatura três abordagens que atacam o problema de diferentes formas, a saber:

1. Alguns pesquisadores abordaram a conjectura de Tuza para algumas classes de grafos.
2. Outros pesquisadores estudaram a Conjectura 3.1.2 em outros contextos, por exemplo,

multigrafos e versões fracionárias; e

3. Mais recentemente, uma abordagem que visa determinar uma constante  $\epsilon$  positiva em um grafo  $G$ , tal que  $\tau(G) \leq (3 - \epsilon)\nu$  seja verificado.

### 3.2.2 Organização cronológica da conjectura

A seguir, fazemos uma organização em ordem cronológica da conjectura de Tuza em forma de tabela. Na seguinte tabela nós destacamos o tipo de abordagem utilizada pelos pesquisadores, o artigo e o resultado obtido.

Abordagem	Ano/Artigo	Resultado
–	1981 [23]	A Conjectura 3.1.2 é proposta
1,2	1990 [26]	A Conjectura 3.1.2 é verificada para as seguintes classes: grafos planares; grafos com $n$ vértices e pelo menos $\frac{7}{16}n^2$ arestas; grafos linha; grafos e digrafos cordais sem $K_4$ como subgrafo; grafos e digrafos cordais sem $K_5$ como subgrafo; digrafo cordal sem $K_6$ como subgrafo; a relação $\tau(K_n) \leq 2\nu(K_n)$ é verificada para todo $n$ . Ademais, a proposição $\tau(G) \leq \frac{7}{3}\nu(G)$ é verdadeira se $G$ é um grafo tripartido..
2	1994 [22]	Se $D$ é um digrafo planar, então $\tau(D) = \nu(D)$ .
1,2	1995 [16]	A Conjectura 3.1.2 é verificada para grafos sem subdivisões do $K_{3,3}$ . Bem como as duas versões fracionárias criada por Krivelevich.
1	1998 [12]	Se $G$ é um grafo tripartido, então $\tau(G) \leq \alpha\nu(G)$ , tal que $\alpha = (38 + \sqrt{1948})/48 < 1,956$ .
3	1999 [11]	O melhor e único resultado para o caso geral da conjectura de Tuza: $\tau(G) \leq (3 - \frac{3}{23})\nu(G)$ .
2	2001 [15]	Para um grafo $G$ com $n$ vértices, temos que $ \nu(G) - \nu^*(G)  = o(n^2)$ , ou seja, para um grafo com um número quadrático de triângulos aresta-disjuntos, $\nu(G)$ e $\nu^*(G)$ são assintoticamente iguais.
1	2009 [5]	Uma caracterização para os grafos planares em que ocorre a igualdade $\tau(G) = 2\nu(G)$ .

2	2010 [4]	A relação $\tau(G) \leq 2\nu^*(G) - \frac{1}{4}\sqrt{\nu^*(G)}$ é o melhor limite possível para uma das variações da Conjectura 3.1.2 criada por Krivelevich. A relação $\tau(\mathbb{G}) \leq 3 - \frac{2}{25}\nu(\mathbb{G})$ é o melhor e único resultado para o caso geral da conjectura de Tuza no contexto de multigrafos.
2	2012 [14]	Se em um grafo $G$ ocorre $\tau^*(G) \geq 2\nu(G) - \epsilon$ , então $G$ contém $\nu(G) - \lfloor 10\epsilon \rfloor$ subgrafos $K_4$ aresta-disjuntos e $\lfloor 10\epsilon \rfloor$ triângulos aresta-disjuntos. Se $G$ é um grafo sem $K_4$ como subgrafo, então $\tau^*(G) \leq 1.8\nu(G)$ .
1	2012 [18]	A Conjectura 3.1.2 é verificada para todo grafo $G$ com número cromático, $\chi_t(G)$ , no máximo 4. A conjectura de Tuza é igualmente válida para grafos que não contém grafo roda de tamanho ímpar como subgrafo
1	2012 [13]	Se $G$ é um grafo planar que não contém cópias do $K_4$ , então $\tau(G) \leq \frac{3}{2}\nu(G)$ .
2	2012 [31]	Utilizando a relação provada por Krivelevich, $\tau(G) \leq 2\nu^*(G)$ , e o resultado obtido por Haxell e Rödl, $ \nu(G) - \nu^*(G)  = o(n^2)$ , podemos concluir que $\tau(G) \leq 2\nu(G) + o(n^2)$ , isso mostra que a Conjectura 3.1.2 é assintoticamente verdadeira.
1	2013 [21]	A Conjectura 3.1.2 é verificada para grafos com grau médio máximo menor que sete. Como decorrência, é possível mostrar que a conjectura de Tuza é verdadeira para grafos sem subdivisões do $K_5$ e para grafos sem minor do $K_{3,3}$ .

Tabela 3.1: Cronologia da conjectura de Tuza.



# Capítulo 4

## Resultados Conhecidos

Apresentamos, neste capítulo, algumas provas encontradas na literatura. Não detalhamos todas as provas, apenas as que julgamos mais relevantes para este trabalho.

### 4.1 Prova para grafos densos

Um grafo é *denso* se possui muitas arestas. Nesse contexto, queremos dizer com a palavra ‘muitas’ pelo menos  $\frac{7}{16}n^2$  arestas, sendo  $n$  o número de vértices.

Em 1990, Tuza verificou a Conjectura 3.1.2 para grafos densos [26]. Para provar a conjectura para esse tipo de grafo, Tuza utilizou um lema sobre a existência de subgrafos bipartidos e um teorema proposto por Györi e Tuza [8]. Considere a veracidade do Lema 4.1.1 e do Teorema 4.1.1.

**Lema 4.1.1.** *Todo grafo  $G$  possui um subgrafo bipartido  $G'$  com*

$$|E(G')| \geq |E(G)|/2.$$

□

**Teorema 4.1.1** (Györi e Tuza, 1987). *Seja  $G$  um grafo com  $|V| = n \geq 4$ . Se  $|E| = cn^2$ , para alguma constante  $c \geq \frac{7}{16}$ , então  $G$  possui pelo menos  $\frac{(4c^2-c)n^2}{3}$  triângulos aresta-disjuntos.* □

#### Resultado principal

O problema consiste em provar a Conjectura 3.1.2 para grafos com  $n$  vértices e pelo menos  $\frac{7}{16}n^2$  arestas, conforme o teorema a seguir.

**Teorema 4.1.2** (Tuza, 1990). *Se  $G$  é um grafo com  $n$  vértices e pelo menos  $\frac{7}{16}n^2$  arestas, então*

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo com  $|V| = n$ . Se  $n \leq 3$ , temos que  $\nu(G) \leq 1$ , pois  $G$  possui no máximo um triângulo. Se  $\nu(G) = 1$ , como  $G$  possui apenas um triângulo, qualquer aresta de  $G$  é uma cobertura. Logo,  $\tau(G) \leq 1$ , e o resultado segue. Se  $\nu(G) = 0$ , então  $G$  não contém triângulo e o resultado segue. Portanto, podemos supor  $n \geq 4$ . Por hipótese, temos que  $|E| = cn^2$ , onde  $c \geq \frac{7}{16}$ . Assim, pelo Teorema 4.1.1,  $G$  possui no mínimo  $\frac{(4c^2-c)n^2}{3}$  triângulos aresta-disjuntos, ou seja,

$$\nu(G) \geq \frac{(4c^2 - c)n^2}{3}. \quad (4.1)$$

Por outro lado, pelo Lema 4.1.1 existe um subgrafo bipartido  $G'$  em  $G$  com pelo menos  $\frac{cn^2}{2}$  arestas. Como  $G'$  é bipartido, pelo Teorema de König (2.1.3) não contém circuitos ímpares, ou seja, não possui triângulos. Logo, o conjunto de arestas  $E(G) - E(G')$  é uma cobertura em  $G$ . Desse modo,

$$\tau(G) \leq \frac{cn^2}{2}. \quad (4.2)$$

Por fim, devemos mostrar que  $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ . Então,

$$\begin{aligned} \frac{cn^2}{2} &\leq 2 \frac{(4c^2 - c)n^2}{3} \\ \frac{c}{2} &\leq 2 \frac{(4c^2 - c)}{3} \\ \frac{1}{2} &\leq 2 \frac{(4c - 1)}{3} \\ c &\geq \frac{7}{16}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Portanto, utilizando (4.1), (4.2) e (4.3), obtemos

$$\tau(G) \leq \frac{cn^2}{2} \leq 2 \frac{(4c^2 - c)n^2}{3} \leq 2\nu(G).$$

□

**Corolário 4.1.1.** Para todo natural  $n \geq 0$ ,

$$\tau(K_n) \leq 2\nu(K_n).$$

*Demonstração.* Se  $n \leq 7$ , o resultado pode ser comprovado manualmente. Se  $n > 8$ , o resultado segue pelo Teorema 4.1.2. □



## 4.2 Prova para grafos planares

Abordamos hipergrafos 3-partidos no capítulo anterior, na Seção 3.1.1. Nesta seção, trabalhamos com *hipergrafo 3-uniforme*, que são hipergrafos onde cada elemento de  $\mathcal{E}(\mathcal{H})$  é constituído por três elementos (não ordenados) de  $V(\mathcal{H})$ . Quando  $\mathcal{H}$  estiver claro no contexto, escreveremos apenas  $V, \mathcal{E}$  em vez de  $V(\mathcal{H})$  e  $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ . Visualmente, exibimos as hiperarestas de  $\mathcal{E}$  com um tracejado incluindo os seus três vértices, conforme a Figura 4.1.

Dado um hipergrafo 3-uniforme  $\mathcal{H}$ , dizemos que um conjunto  $C \subseteq V$  é uma *cobertura*, se para toda hiperaresta  $E \in \mathcal{E}$ , temos que  $C \cap E \neq \emptyset$ . O tamanho de uma cobertura mínima é denotado por  $\tau(\mathcal{E})$  (ou  $\tau(\mathcal{H})$ ). Note que, neste caso, uma cobertura é um conjunto de vértices. Por outro lado, definimos um *empacotamento*  $P$  em  $\mathcal{H}$  como um conjunto de hiperarestas disjuntas, ou seja, para qualquer par de hiperarestas  $E_1, E_2 \in P$  tem-se  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . Denotamos o tamanho de um empacotamento máximo por  $\nu(\mathcal{E})$  (ou  $\nu(\mathcal{H})$ ).

Dado  $E \in \mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ , um vértice  $v \in E$  é dito *próprio* (*own-vertex*) de  $E$  (em  $\mathcal{E}'$ ), se  $v \notin E'$  para todo  $E' \in \mathcal{E}'$ , com  $E' \neq E$  (ver Figura 4.1a). Uma *coroa* (*crown*) de tamanho  $p$  (em  $\mathcal{E}'$ ) é definida como uma coleção de  $p$  hiperarestas  $E_1, E_2, \dots, E_p \in \mathcal{E}'$  e  $2p$  vértices  $v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_p \in V$ , tal que  $E_i = \{v_i, v_{i+1}, w_i\}$ , sendo  $v_{p+1} = v_1$  e  $v_i$  não está contido em nenhuma hiperaresta de  $\mathcal{E}'$ , exceto  $E_i$  e  $E_{i-1}$ . Os vértices  $v_1, \dots, v_p$  são chamados de *núcleo* (*core*) e os vértices  $w_1, \dots, w_p$  são chamados de vértices *externos* da coroa (ver Figura 4.1b).

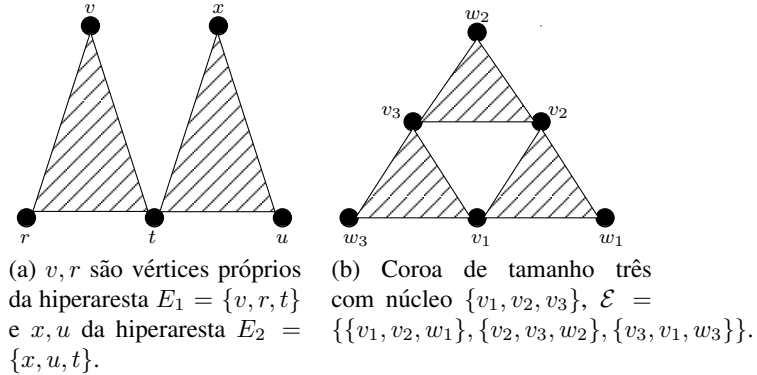


Figura 4.1: Exemplo de vértice próprio e coroa em um hipergrafo 3-uniforme.

Assim como no caso anterior, a prova da conjectura de Tuza para grafos planares é devida ao próprio autor. Tuza provou a Conjectura 3.1.2 para esta classe de grafos em 1990 [26]. Nesta prova, ele fez uma associação da Conjectura 3.1.2 entre um grafo e um hipergrafo 3-uniforme, da seguinte forma: seja  $\mathcal{H}$  um hipergrafo 3-uniforme construído a partir de um grafo  $G$ , onde os vértices de  $\mathcal{H}$  são as arestas de  $G$  e as hiperarestas de  $\mathcal{H}$  são os triângulos de  $G$ , ou seja,  $\{e, f, g\} \in \mathcal{E}$  se e somente se existe  $t \in T(G)$ , tal que  $E(t) = \{e, f, g\}$  (ver Figura 4.2). Denotamos tal construção por  $\mathcal{H}(G)$ . Desse modo, calcular uma cobertura em  $G$  (por arestas)

equivale a calcular uma cobertura em  $\mathcal{H}(G)$  (por vértices); e calcular um empacotamento em  $G$  (triângulos aresta-disjuntos) equivale a calcular um empacotamento em  $\mathcal{H}(G)$  (hiperarestas disjuntas). Em resumo, temos que  $\tau(\mathcal{H}) = \tau(G)$ , assim como  $\nu(\mathcal{H}) = \nu(G)$ . Portanto, a conjectura de Tuza vale para  $G$  se e somente se ela é válida para  $\mathcal{H}(G)$ .

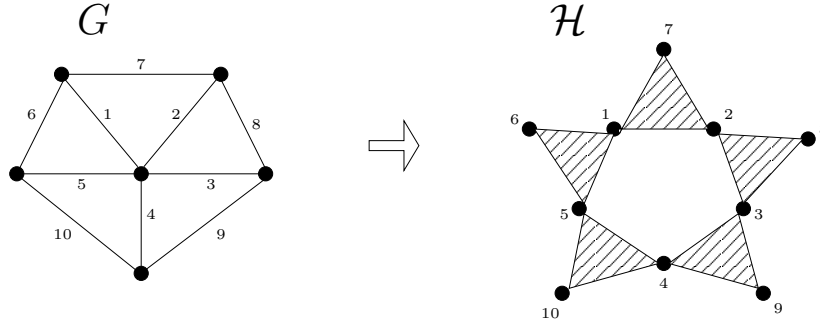


Figura 4.2: Construção de um hipergrafo 3-uniforme a partir de um grafo.

Para provar a Conjectura 3.1.2 para grafos planares, Tuza utilizou um lema sobre hipergrafos 3-uniformes, o qual apresentamos a seguir.

**Lema 4.2.1.** *Seja  $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$  um hipergrafo 3-uniforme. Se todo  $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$  contém uma coroa ou uma hiperaresta com pelo menos um vértice próprio, então*

$$\tau(\mathcal{E}) \leq 2\nu(\mathcal{E}).$$

*Demonstração.* Prova por indução em  $|\mathcal{E}|$ .

Seja  $\mathcal{H}$  um hipergrafo 3-uniforme. Como em todo subconjunto de  $\mathcal{E}$  existe uma coroa ou uma hiperaresta com pelo menos um vértice próprio, em  $\mathcal{E}$  tal fato também ocorre. Assim, vamos iniciar a prova supondo que exista uma hiperaresta com pelo menos um vértice próprio em  $\mathcal{E}$  e mostrar que o resultado segue. Em seguida, vamos supor que exista uma coroa em  $\mathcal{E}$  e mostrar que o resultado igualmente segue.

Desse modo, suponha que  $E = \{v, v', v''\}$  é uma hiperaresta de  $\mathcal{E}$  com  $v''$  um vértice próprio. Seja  $\mathcal{H}' = (V', \mathcal{E}')$  um hipergrafo 3-uniforme com o seguinte conjunto de hiperarestas:

$$\mathcal{E}' = \{E \in \mathcal{E} : v \notin E, v' \notin E\}.$$

Note que  $E \notin \mathcal{E}'$ . Outrossim, em todo subconjunto de  $\mathcal{E}'$  existe uma coroa ou uma hiperaresta com pelo menos um vértice próprio, uma vez que  $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ . Desse modo, por hipótese de indução em  $\mathcal{H}'$ , temos que

$$\tau(\mathcal{H}') \leq 2\nu(\mathcal{H}'). \quad (4.4)$$

Seja  $C'$  uma cobertura mínima de  $\mathcal{H}'$ . Todas as hiperarestas de  $\mathcal{H}$  que não estão em  $\mathcal{H}'$  contêm os vértices  $v$  e  $v'$ , por construção de  $\mathcal{E}'$ . Então,  $C = C' \cup \{v, v'\}$  é uma cobertura para  $\mathcal{H}$ . Logo,

$$\tau(\mathcal{H}) \leq \tau(\mathcal{H}') + 2. \quad (4.5)$$

Seja  $P'$  um empacotamento máximo em  $\mathcal{H}'$ . Como nenhuma hiperaresta de  $\mathcal{E}'$  contém os vértices  $v$  e  $v'$  (por construção de  $\mathcal{E}'$ ) e o vértice  $v''$  é um vértice próprio de  $E$ , o conjunto  $P = P' \cup E$  é um empacotamento em  $\mathcal{H}$ . Logo,

$$\nu(\mathcal{H}) \geq \nu(\mathcal{H}') + 1. \quad (4.6)$$

Por fim, utilizando (4.4), (4.5) e (4.6),

$$\begin{aligned} \tau(\mathcal{H}') &\leq 2\nu(\mathcal{H}') \\ \tau(\mathcal{H}') + 2 &\leq 2\nu(\mathcal{H}') + 2 \\ \tau(\mathcal{H}) &\leq \tau(\mathcal{H}') + 2 \leq 2(\nu(\mathcal{H}') + 1) \leq 2\nu(\mathcal{H}) \\ \tau(\mathcal{H}) &\leq 2\nu(\mathcal{H}). \end{aligned}$$

Suponha, agora, que exista uma coroa  $Q$  de tamanho  $p$  em  $\mathcal{E}$ . Vamos dividir a prova em dois casos ( $p$  par e  $p$  ímpar).

Caso  $p = 2k$ . Denote por  $E_1, \dots, E_p$  as hiperarestas de  $Q$ , e sejam  $v_1, \dots, v_p$  os vértices internos (núcleo) e  $w_1, \dots, w_p$  os vértices externos de  $Q$ . Seja  $\mathcal{H}' = (V', \mathcal{E}')$  um hipergrafo 3-uniforme com o seguinte conjunto de hiperarestas:

$$\mathcal{E}' = \{E \in \mathcal{E} : v_i \notin E, w_i \notin E, 1 \leq i \leq p\}.$$

Como as hiperarestas de  $Q$  não pertencem a  $\mathcal{H}'$ , temos que  $|\mathcal{E}'| < |\mathcal{E}|$ . Outrossim, em todo subconjunto de  $\mathcal{E}'$  existe uma coroa ou uma hiperaresta com pelo menos um vértice próprio, uma vez que  $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ . Logo, por hipótese de indução em  $\mathcal{H}'$ ,

$$\tau(\mathcal{H}') \leq 2\nu(\mathcal{H}'). \quad (4.7)$$

Seja  $C'$  uma cobertura mínima de  $\mathcal{H}'$ . Então,  $C = C' \cup \{w_1, \dots, w_p\}$  é uma cobertura de  $\mathcal{H}$ , uma vez que se existisse alguma hiperaresta  $E$  não coberta por  $C$ ,  $E$  deveria incluir pelo menos um vértice do núcleo de  $Q$  e ainda ser diferente de todas as hiperarestas  $E_1, \dots, E_p$  de  $Q$ , que por definição de coroa não é possível. Logo,

$$\tau(\mathcal{H}) \leq \tau(\mathcal{H}') + 2k. \quad (4.8)$$

Seja  $P'$  um empacotamento máximo de  $\mathcal{H}'$ . Como nenhuma hiperaresta de  $Q$  pertence a

$\mathcal{H}'$  e as hiperarestas  $E_1, E_3, \dots, E_{p-1}$  são disjuntas entre si (uma ilustração na Figura 4.3), o conjunto  $P = P' \cup \{E_1, E_3, \dots, E_{p-1}\}$  é um empacotamento em  $\mathcal{H}$ . Assim,

$$\nu(\mathcal{H}) \geq \nu(\mathcal{H}') + k. \quad (4.9)$$

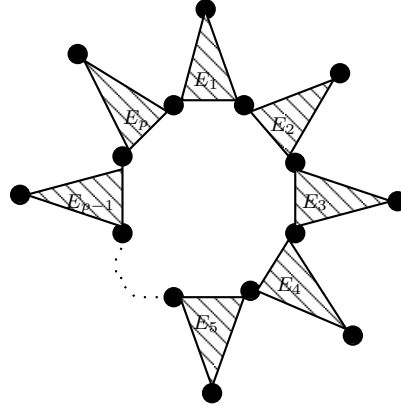


Figura 4.3: Ilustração para a prova do Lema 4.2.1 no caso de uma coroa de tamanho par.

Utilizando (4.7), (4.8) e (4.9),

$$\begin{aligned} \tau(\mathcal{H}') &\leq 2\nu(\mathcal{H}') \\ \tau(\mathcal{H}') + 2k &\leq 2\nu(\mathcal{H}') + 2k \\ \tau(\mathcal{H}) &\leq \tau(\mathcal{H}') + 2k \leq 2(\nu(\mathcal{H}') + k) \leq 2\nu(\mathcal{H}) \\ \tau(\mathcal{H}) &\leq 2\nu(\mathcal{H}). \end{aligned}$$

Caso  $p = 2k + 1$ . Como no caso anterior, denote por  $E_1, \dots, E_p$  as hiperarestas da coroa  $Q$ , e sejam  $v_1, \dots, v_p$  os vértices internos (núcleo) e  $w_1, \dots, w_p$  os vértices externos de  $Q$ . Seja  $\mathcal{H}' = (V', \mathcal{E}')$  um hipergrafo 3-uniforme com o seguinte conjunto de hiperarestas:

$$\mathcal{E}' = \{E \in \mathcal{E} : v_i \notin E, 1 \leq i \leq 2k + 1, w_i \notin E, 1 \leq i \leq 2k - 1\}.$$

Como as hiperarestas de  $Q$  não pertencem a  $\mathcal{H}'$ , temos que  $|\mathcal{E}'| < |\mathcal{E}|$ . Outrossim, em todo subconjunto de  $\mathcal{E}'$  existe uma coroa ou uma hiperaresta com pelo menos um vértice próprio, uma vez que  $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ . Logo, por hipótese de indução em  $\mathcal{H}'$ ,

$$\tau(\mathcal{H}') \leq 2\nu(\mathcal{H}'). \quad (4.10)$$

Seja  $C'$  uma cobertura mínima de  $\mathcal{H}'$ . Então,  $C = C' \cup \{w_1, \dots, w_{2k-1}, v_{2k+1}\}$  é uma cobertura de  $\mathcal{H}$ , pois se existisse alguma hiperaresta  $E$  não coberta por  $C$ ,  $E$  deveria ou incluir

pelo menos um vértice do núcleo de  $Q$  e ser diferente de todas as hiperarestas  $E_1, \dots, E_p$  de  $Q$  (que por definição de coroa não é possível), ou ser uma hiperaresta que contenha os vértices  $w_{2k}, w_{2k+1}$  diferente de  $E_{2k}, E_{2k+1}$ . Contudo, nesse caso tal hiperaresta seria coberta por  $C'$  (ilustrado na Figura 4.4). Logo,

$$\tau(\mathcal{H}) \leq \tau(\mathcal{H}') + 2k. \quad (4.11)$$

Seja  $P'$  um empacotamento máximo de  $\mathcal{H}'$ . Como nenhuma hiperaresta  $E_1, E_2, \dots, E_{2k-1}$  de  $Q$  pertence a  $\mathcal{H}'$  e as hiperarestas  $E_1, E_3, \dots, E_{2k-1}$  são disjuntas entre si (uma ilustração na Figura 4.4), o conjunto  $P = P' \cup \{E_1, E_3, \dots, E_{2k-1}\}$  é um empacotamento em  $\mathcal{H}$ . Assim,

$$\nu(\mathcal{H}) \geq \nu(\mathcal{H}') + k. \quad (4.12)$$

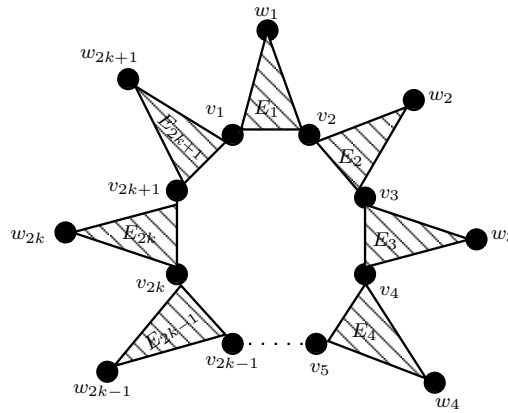


Figura 4.4: Ilustração para a prova do Lema 4.2.1 no caso de uma coroa de tamanho ímpar.

Finalmente, utilizando (4.10), (4.11) e (4.12),

$$\begin{aligned} \tau(\mathcal{H}') &\leq 2\nu(\mathcal{H}') \\ \tau(\mathcal{H}') + 2k &\leq 2\nu(\mathcal{H}') + 2k \\ \tau(\mathcal{H}) &\leq \tau(\mathcal{H}') + 2k \leq 2(\nu(\mathcal{H}') + k) \leq 2\nu(\mathcal{H}) \\ \tau(\mathcal{H}) &\leq 2\nu(\mathcal{H}). \end{aligned}$$

□

### Resultado principal

De posse do Lema 4.2.1, a prova da Conjectura 3.1.2 para grafos planares é como segue.

**Teorema 4.2.1** (Tuza, 1990). *Se  $G$  é um grafo planar, então*

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo planar e  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G)$  um hipergrafo 3-uniforme construído a partir de  $G$ . Uma vez que as arestas que não estão em triângulos são irrelevantes para a Conjectura 3.1.2, podemos supor que toda aresta de  $G$  pertence a algum triângulo. Pela associação entre  $G$  e  $\mathcal{H}$ , se mostrarmos que em todo subgrafo  $G'$  de  $G$  existe um vértice  $v$ , cujo subgrafo induzido por  $N(v)$  não possui vértice com grau maior que dois, ou seja, cada componente corresponde a circuito ou caminho, isto equivale a mostrar que o hipergrafo 3-uniforme  $\mathcal{H}'$  associado a  $G'$  possui uma coroa, caso alguma componente do subgrafo induzido por  $N(v)$  seja um circuito (ilustrado na Figura 4.5a) ou uma hiperaresta com pelo menos um vértice próprio, caso alguma componente do subgrafo induzido por  $N(v)$  seja um caminho (ilustrado na Figura 4.5b), ou seja, todo  $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$  contém uma coroa ou uma hiperaresta com pelo menos um vértice próprio. Assim, pelo Lema 4.2.1 obtemos o resultado desejado,

$$\tau(G) = \tau(\mathcal{H}) \leq 2\nu(\mathcal{H}) = 2\nu(G).$$

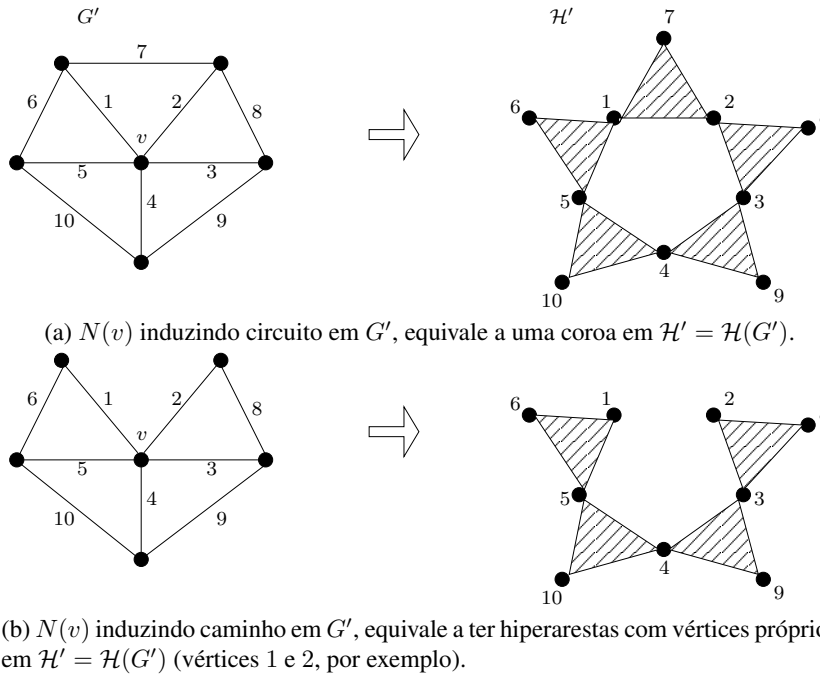


Figura 4.5: Exemplo da associação entre um hipergrafo 3-uniforme e um grafo  $G$  na prova da conjectura para grafos planares.

Dizemos que um vértice  $v$  tem a Propriedade (1) se o subgrafo induzido por  $N(v)$  não possui vértice com grau maior que dois. Devemos, pois, mostrar que em todo subgrafo de  $G$  existe um vértice que satisfaz a Propriedade (1). Assim, seja  $G'$  um subgrafo qualquer de  $G$ . Suponha que um vértice  $v_0 \in V(G')$  não satisfaz a Propriedade (1). Então, existe  $u_0 \in V(G')$  adjacente a  $v_0$  em  $G'$  com pelo menos três vizinhos em comum com  $v_0$ . Seja  $e$  a aresta com extremos  $u_0$  e  $v_0$  (ilustrado na Figura 4.6).

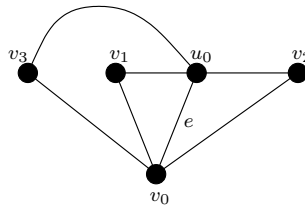


Figura 4.6: Ilustração de um vértice  $v$  que não satisfaz a Propriedade (1).

Os vértices  $u_0, v_0$  e os outros três vértices adjacentes a ambos induzem três triângulos em  $G'$  incidentes em  $e$  (Figura 4.6). Dado que  $G'$  é planar, pelo menos um triângulo está contido na região formada por outro triângulo no plano (ou contido em dois, conforme ilustrado na Figura 4.7). Por simplicidade, escrevemos  $t \subset t'$  para denotar que o triângulo  $t$  está contido na região formada por  $t'$  no plano. Sejam  $t_1, t'_1$  dois triângulos incidentes em  $e$ , tal que  $t_1 \subset t'_1$ .

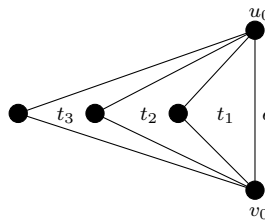


Figura 4.7: Exemplo do caso  $t_1 \subset t_2 \subset t_3$ .

Seja  $v_1$  o terceiro vértice do triângulo  $t_1$ . Assim, o vértice  $v_1$  é o novo candidato a possuir a Propriedade (1). Se  $v_1$  não contém a Propriedade (1), então existe  $u_1 \in V(G')$  adjacente a  $v_1$  ( $e_1 = u_1v_1$ ) com pelo menos três vizinhos em comum com  $v_1$  (ilustrado na Figura 4.8).

Novamente, os vértices  $u_1, v_1$  e os outros três vértices adjacentes a ambos induzem três triângulos em  $G'$  incidentes em  $e_1$ , conforme ilustrado na Figura 4.8. Destes, um está contido na região formada por outro(s). Sejam dois triângulos  $t_2, t'_2$  incidentes em  $e_1$ , tal que  $t_2 \subset t'_2$ . Defina  $v_2$  o terceiro vértice de  $t_2$ . Repetimos a operação com  $v_2$  sendo o novo candidato a Propriedade (1). Como  $G'$  é planar (e finito) e a cada etapa estamos escolhendo um triângulo mais interno no plano, em um número finito de passos encontraremos um vértice  $v_k$  com a Propriedade (1) e isto finaliza a prova.  $\square$

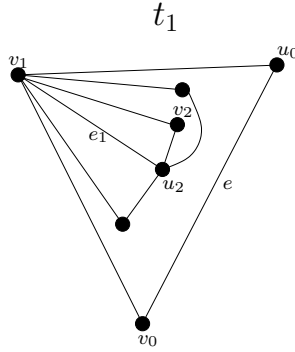


Figura 4.8: Caso  $v_1$  não possua a Propriedade (1).

O estudo da Conjectura 3.1.2 para grafos planares não cessou após a prova dada por Tuza. Em 2009, Haxell, Cui e Ma [5] caracterizaram os grafos planares em que ocorre a igualdade  $\tau(G) = 2\nu(G)$ . Dizemos que um grafo planar é *extremal* se  $\tau(G) = 2\nu(G)$ . Definimos  $\mathcal{G}$  como uma família de grafos planares, de modo que um grafo  $G$  pertence a  $\mathcal{G}$  se existe um subgrafo  $G'$  formado de cópias aresta-disjuntas do  $K_4$ , tal que toda aresta  $e$  de  $E(G)$  está em algum  $K_4$  de  $G'$  ou não existe  $t \in T(G)$ , tal que  $e \in E(t)$ .

Assim, Haxell, Cui e Ma provaram a seguinte caracterização de grafos extremais. Uma prova do Teorema 4.2.2 pode ser encontrada em Haxell, Cui e Ma [5].

**Teorema 4.2.2** (Haxell, Cui e Ma, 2009). *Um grafo planar  $G$  é extremal se, e somente se,  $G \in \mathcal{G}$ .* □

Mais recentemente, em 2012, Haxell, Kostochka e Thomassé [13] abordaram grafos planares que não contém cópia do  $K_4$ . Eles provaram o seguinte teorema.

**Teorema 4.2.3** (Haxell, Kostochka e Thomassé, 2012). *Se  $G$  é um grafo planar que não contém cópia do  $K_4$ , então*

$$\tau(G) \leq \frac{3}{2}\nu(G).$$

□

Não apresentamos aqui uma demonstração do teorema acima, porém uma prova pode ser vista em Haxell, Kostochka e Thomassé [13]. Ademais, a igualdade do Teorema 4.2.3 ocorre quando  $G$  é composto pela união de grafos roda aresta-disjuntos de tamanho cinco, com possivelmente algumas arestas que não estão em triângulos.

Lakshmanan, Bujtás e Tuza [18] publicaram um artigo que verifica a conjectura de Tuza é válida para grafos triângulo-3-coloríveis, uma classe de grafos que contém todos os triângulos 4-coloríveis [21]. Lembramos que um grafo  $G$  é dito ser triângulo-3-colorível, se admite uma colocação de suas arestas com no máximo três cores, de forma que todos os triângulos de  $G$



recebam cores distintas em suas arestas. A seguir, apresentamos uma extensão do resultado de Tuza para grafos planares.

### 4.3 Prova para grafos sem subdivisões do $K_{3,3}$

Sejam  $G$  um grafo e  $u, v$  dois vértices de  $V(G)$ . Dizemos que dois caminhos  $P_{uv}$  e  $Q_{uv}$ , ambos iniciando em  $u$  e terminando em  $v$ , são *internamente disjuntos* se  $P_{uv} \cap Q_{uv} = \{u, v\}$ . Denotamos o número de caminhos internamente disjuntos entre  $u$  e  $v$  por  $p(u, v)$ . Dizemos também que  $G$  é  $k$ -conexo se para todo par  $u, v \in V(G)$ , temos que  $p(u, v) \geq k$ . Em particular,  $G$  é 1-conexo se, e somente se, é conexo. Ademais, se um grafo é  $k$ -conexo, então não existe um conjunto  $S$  com menos do que  $k$  vértices, tal que  $G - S$  seja desconexo.

Em 1995, Krivelevich [16] estendeu o resultado de Tuza para grafos planares e verificou a Conjectura 3.1.2 para grafos sem subdivisões do  $K_{3,3}$ . Ele fez uso de um teorema devido aos estudos de Hall [9] e Asano [1].

**Teorema 4.3.1** (Hall e Asano, 1985). *Cada componente 3-conexa de um grafo sem subdivisões do  $K_{3,3}$  é planar ou isomorfo ao  $K_5$ .*  $\square$

Não apresentamos uma prova do Teorema 4.3.1. Contudo, indicamos Asano [1]. Além do Teorema 4.3.1, Krivelevich fez uso do resultado obtido por Tuza para grafos planares (Teorema 4.2.1) e os dois seguintes lemas.

**Lema 4.3.1.** *Se  $G$  é um subgrafo do  $K_5$ , então*

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

*Demonstração.* Seja  $G$  um subgrafo do  $K_5$ . Se  $T(G) = \emptyset$ , então

$$0 = \tau(G) \leq 2\nu(G) = 0.$$

Podemos, pois, supor que  $|T(G)| > 0$ . Sabemos  $\nu(K_5) = 2$  (Exemplo 3.1.1). Como  $G$  é um subgrafo do  $K_5$ , temos que  $\nu(G) \leq 2$ . Portanto, há dois casos a tratar:

1.  $\nu(G) = 2$ . Sabemos que  $\tau(K_5) = 4$  (Exemplo 3.1.1). Visto que  $G \subseteq K_5$ , temos que  $\tau(G) \leq 4$ . Logo,  $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ ;
2.  $\nu(G) = 1$ . Se mostrarmos que existe um conjunto com duas arestas que é uma cobertura de  $G$ , então  $\tau(G) \leq 2$  e o resultado segue. Desse modo, seja  $P$  um empacotamento de  $G$  e  $t = \{e, f, g\}$  o triângulo de  $P$ . Suponha que nenhum conjunto com duas arestas de  $t$  seja uma cobertura de  $G$ . Logo, existem  $t_1, t_2, t_3 \in T(G)$ , tal que  $f, e \notin t_1$  e  $g \in t_1$ ;  $e, g \notin t_2$  e  $f \in t_2$ ;  $f, g \notin t_3$  e  $e \in t_3$ , conforme ilustrado na Figura 4.9. Como  $\nu(G) = 1$ , o triângulo

$t$  e qualquer  $t_i$  formam um  $K_4$  menos uma aresta. Considere  $t, t_1$  dois triângulos que formam um  $K_4$  menos uma aresta. Suponha, sem perda de generalidade, que a aresta compartilhada por  $t, t_1$  seja  $g$ , conforme Figura 4.9. Seja  $t_3$  um terceiro triângulo de  $G$  incidente em  $e$ . Como  $\nu(G) = 1$ ,  $t_3$  deve compartilhar aresta com  $t_1$ . Contudo, há ainda o triângulo  $t_2$  incidente em  $f$ . Desse modo, não é possível  $t_2$  compartilhar aresta com  $t_1$ , uma vez que  $G$  é um grafo simples. Podemos, pois, construir um empacotamento  $P' = \{t_1, t_2\}$  que fere a maximalidade de  $P$ . Logo, existe um conjunto  $C$  com no máximo duas arestas que é uma cobertura em  $G$ . Portanto,  $\tau(G) \leq 2$  e o resultado segue.

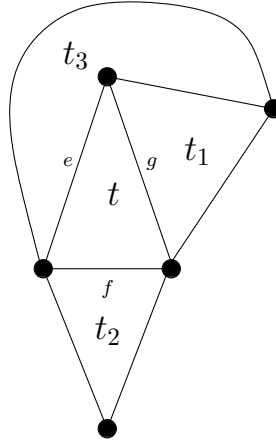


Figura 4.9: Caso nenhum conjunto com duas arestas de  $t$  seja uma cobertura.

□

O segundo lema utilizado por Krivelevich é como segue.

**Lema 4.3.2.** *Sejam  $G_1$  e  $G_2$  dois grafos, tais que  $V(G_1) \cap V(G_2) = \{u, v\}$ . Suponha a conjectura de Tuza verdadeira para  $G_1$  e  $G_2$ . Considere o grafo  $G = G_1 \cup G_2$  e a aresta  $e = uv$ .*

1. *Se  $e \notin E(G)$ , então*

$$\tau(G) \leq 2\nu(G);$$

2. *Se  $e \in E(G_1) \cap E(G_2)$  e  $\tau(G_i - e) \leq 2\nu(G_i - e)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , então*

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

*Demonstração.* Sejam  $G_1$  e  $G_2$  dois grafos, tais que  $V(G_1) \cap V(G_2) = \{u, v\}$ . Suponha que a Conjectura 3.1.2 é verdadeira para  $G_1$  e  $G_2$ . Seja  $G = G_1 \cup G_2$ .

Caso (1):  $e \notin E(G)$ . Neste caso, como  $E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset$ , temos que

$$\tau(G) = \tau(G_1) + \tau(G_2) \quad (4.13)$$

$$\nu(G) = \nu(G_1) + \nu(G_2). \quad (4.14)$$

Uma vez que a Conjectura 3.1.2 vale para  $G_1$  e  $G_2$ , segue que

$$\begin{aligned} \tau(G_1) &\leq 2\nu(G_1) \\ \tau(G_2) &\leq 2\nu(G_2) \\ \tau(G_1) + \tau(G_2) &\leq 2\nu(G_1) + 2\nu(G_2). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Por fim, utilizando (4.13), (4.14) e (4.15), concluímos que

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

Caso (2):  $e \in E(G_1) \cap E(G_2)$ . Sejam  $C_1, C_2$  coberturas mínimas de  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente. Uma vez que  $e \in E(G_1) \cap E(G_2)$ ,  $C_1$  cobre todos triângulos que contém  $e$  em  $G_1$ . O mesmo ocorre com  $C_2$  em  $G_2$ . Desse modo,  $C = C_1 \cup C_2$  é uma cobertura de  $G$ . Logo,

$$\tau(G) \leq \tau(G_1) + \tau(G_2). \quad (4.16)$$

Por outro lado, podemos limitar  $\nu(G)$  por:

$$\nu(G) \geq \nu(G_1) + \nu(G_2) - 1 \quad (4.17)$$

$$\nu(G) \leq \nu(G_1) + \nu(G_2). \quad (4.18)$$

Sejam dois empacotamentos máximos  $P_1 \subseteq T(G_1)$  e  $P_2 \subseteq T(G_2)$ . A desigualdade (4.17) segue do fato que, se  $e \in E(P_1) \cap E(P_2)$ , então podemos construir um empacotamento  $P = P_1 \cup \{P_2 - t\}$  para algum  $t$  contendo  $e$ , obtendo, assim, um empacotamento de tamanho  $\nu(G_1) + \nu(G_2) - 1$ . A desigualdade 4.18 segue da maximalidade de  $P_1$  e  $P_2$ , pois se houvesse um empacotamento  $P$  de  $G$ , tal que  $|P| > |P_1| + |P_2|$ , então  $P_1$  ou  $P_2$  não seriam empacotamentos máximos, uma vez que  $G = G_1 \cup G_2$ . Desse modo, de (4.17) e (4.18), temos dois casos a tratar:

(i):  $\nu(G) = \nu(G_1) + \nu(G_2)$ . Como a conjectura de Tuza vale para  $G_1$  e  $G_2$ , utilizando (4.15) e (4.16) obtemos

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

(ii):  $\nu(G) = \nu(G_1) + \nu(G_2) - 1$ . Se existissem empacotamentos  $P_1 \subseteq T(G_1), P_2 \subseteq T(G_2)$ ,

tais que  $e \notin E(P_1) \cap E(P_2)$ , então  $P = P_1 \cup P_2$  seria um empacotamento de  $G$  com tamanho  $\nu(G_1) + \nu(G_2)$ , o que fere a condição inicial do caso (ii). Então, para quaisquer empacotamentos

$$P_1 \subseteq T(G_1), P_2 \subseteq T(G_2) : E(P_1) \cap E(P_2) \neq \emptyset.$$

Desse modo,

$$\nu(G_1 - e) = \nu(G_1) - 1 \quad (4.19)$$

$$\nu(G_2 - e) = \nu(G_2) - 1. \quad (4.20)$$

Por hipótese,  $\tau(G_1 - e) \leq 2\nu(G_1 - e)$  e  $\tau(G_2 - e) \leq 2\nu(G_2 - e)$ . Utilizando (4.19) e (4.20),

$$\begin{aligned} \tau(G_1 - e) &\leq 2\nu(G_1) - 2 \\ \tau(G_2 - e) &\leq 2\nu(G_2) - 2 \\ \tau(G_1 - e) + \tau(G_2 - e) &\leq 2(\nu(G_1) + \nu(G_2) - 1) - 2 \\ \tau(G_1 - e) + \tau(G_2 - e) + 2 &\leq 2\nu(G). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Sejam  $C'_1, C'_2$  coberturas mínimas de  $G_1 - e$  e  $G_2 - e$ , respectivamente. Então,  $C = C'_1 \cup C'_2 \cup e$  é uma cobertura de  $G$ , dado que os únicos triângulos de  $G$  não cobertos por  $C'_1$  e  $C'_2$  são os que contém  $e$ . Portanto,

$$\tau(G) \leq \tau(G_1 - e) + \tau(G_2 - e) + 1. \quad (4.22)$$

Por fim, utilizando (4.21) e (4.22) concluímos que

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

□

### Resultado principal

Com os Lemas 4.3.1, 4.3.2 e os Teoremas 4.3.1 e 4.2.1, Krivelevich provou o seguinte resultado.

**Teorema 4.3.2** (Krivelevich, 1995). *Se  $G$  é um grafo sem subdivisões do  $K_{3,3}$ , então*

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

*Demonstração.* Prova por indução no número de vértices.

Seja  $G$  um grafo sem subdivisões do  $K_{3,3}$ . Se  $G$  é 3-conexo, então pelo Teorema 4.3.1,  $G$  é planar ou isomorfo ao  $K_5$ . Se  $G$  for planar, então pelo Teorema 4.2.1, o resultado segue. Se  $G$  for isomorfo ao  $K_5$ , pelo Lema 4.3.1, o resultado igualmente segue. Suponha, pois, que  $G$  não seja 3-conexo. Se  $G$  não é 2-conexo, então ele pode ser decomposto em dois grafos  $G_1, G_2$ , tal que  $E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset$  (Figura 4.10).

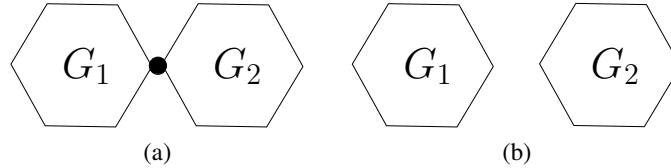


Figura 4.10: Se  $G$  não é 2-conexo, então ele pode ser decomposto em dois grafos  $G_1$  e  $G_2$  que não compartilham arestas.

Como quaisquer dois triângulos  $t_1 \in T(G_1)$  e  $t_2 \in T(G_2)$  são aresta-disjuntos, se a conjectura de Tuza vale para ambos, então ela vale para  $G$ . Podemos, pois, supor que  $G$  é 2-conexo. Então, existem  $u, v \in V(G)$ , tais que  $G - \{u, v\}$  é desconexo. Seja  $Q$  uma componente conexa de  $G - \{u, v\}$ . Sejam

$$G_1 = G[V(Q) \cup \{u, v\}], G_2 = G - Q.$$

Então,  $G = G_1 \cup G_2$  e  $V(G_1) \cap V(G_2) = \{u, v\}$ . Como  $G_1$  e  $G_2$  são subgrafos de  $G$ , não possuem subdivisões do  $K_{3,3}$ . Além disso,  $|V(G)| > |V(G_i)|$  para  $i \in \{1, 2\}$ . Portanto, podemos aplicar a hipótese de indução em  $G_1$  e  $G_2$  para garantir as condições do Lema 4.3.2. Logo,

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

□

## 4.4 Prova para grafos cordais

Dizemos que uma aresta  $e = uv$  é uma *corda* em um grafo  $G$ , se existe um circuito  $W$  em  $G$  que contém  $u, v$  e  $e \in E(W)$ . Dizemos também que  $G$  é *cordal* se todo circuito maior que três em  $G$  contém uma corda, ou seja,  $G$  não contém nenhum circuito induzido de tamanho maior que três.

A prova da conjectura de Tuza para esta classe de grafos foi desenvolvida em 1990 e é devida ao próprio autor [26]. Tuza verificou a Conjectura 3.1.2 para grafos cordais sem cópia do  $K_4$  e para grafos cordais sem cópia do  $K_5$ . Apresentamos, nesta seção, a prova para grafos cordais sem cópia do  $K_4$ . Para obter esse resultado, ele utilizou dois lemas auxiliares. O primeiro, um resultado obtido por Dirac (Lema 4.4.1). Mais detalhes em Dirac [7].

**Lema 4.4.1.** *Se  $G$  é um grafo cordal com  $n$  vértices, então o conjunto de vértices pode ser ordenado em  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , de tal modo que para  $1 \leq i < j < k \leq n$ ,  $v_i v_j, v_i v_k \in E(G)$  implica  $v_j v_k \in E(G)$ .  $\square$*

O segundo lema, assim como para o caso de grafos planares, é sobre hipergrafos 3-uniformes, o qual apresentamos uma prova a seguir.

**Lema 4.4.2.** *Seja  $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$  um hipergrafo 3-uniforme. Se todo  $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$  contém uma hiperaresta com pelo menos dois vértices próprios, então*

$$\tau(\mathcal{E}) = \nu(\mathcal{E}).$$

*Demonstração.* Prova por indução em  $|\mathcal{E}|$ .

Seja  $\mathcal{H}$  um hipergrafo 3-uniforme. Sabemos que  $\tau(\mathcal{E}) \geq \nu(\mathcal{E})$ , pois cada hiperaresta de um empacotamento deve ser coberta. Portanto, resta-nos mostrar que  $\tau(\mathcal{E}) \leq \nu(\mathcal{E})$ .

Se  $\mathcal{E} = \emptyset$ , então  $0 = \tau(\mathcal{E}) = \nu(\mathcal{E}) = 0$  e o resultado segue. Suponha, pois, que  $\mathcal{E} \neq \emptyset$ . Como em todo subconjunto de  $\mathcal{E}$  existe uma hiperaresta com pelo menos dois vértices próprios, em  $\mathcal{E}$  também existe tal hiperaresta. Seja  $E = \{v, v', v''\}$  uma hiperaresta de  $\mathcal{E}$  com os vértices próprios  $v'$  e  $v''$ . Então, seja  $\mathcal{H}' = (V', \mathcal{E}')$  um hipergrafo 3-uniforme com o seguinte conjunto de hiperarestas:

$$\mathcal{E}' = \{E \in \mathcal{E} : v \notin E\}.$$

Note que  $E \notin \mathcal{E}'$ . Outrossim, em todo subconjunto de  $\mathcal{E}'$  existe uma hiperaresta com pelo menos dois vértices próprios, uma vez que  $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ . Logo, por hipótese de indução em  $\mathcal{H}'$ ,

$$\tau(\mathcal{H}') \leq \nu(\mathcal{H}'). \quad (4.23)$$

Seja  $C'$  uma cobertura mínima de  $\mathcal{H}'$ . Todas as hiperarestas de  $\mathcal{H}$  que não estão em  $\mathcal{H}'$  contêm o vértice  $v$ , por construção de  $\mathcal{E}'$ . Então,  $C = C' \cup v$  é uma cobertura para  $\mathcal{H}$ . Portanto,

$$\tau(\mathcal{H}) \leq \tau(\mathcal{H}') + 1. \quad (4.24)$$

Por outro lado, seja  $P'$  um empacotamento máximo de  $\mathcal{H}'$ . Como nenhuma hiperaresta de  $\mathcal{E}'$  contém o vértice  $v$  (por construção de  $\mathcal{E}'$ ), e os vértices  $v', v''$  são vértices próprios de  $E$ , o conjunto  $P = P' \cup E$  é um empacotamento de  $\mathcal{H}$ . Desse modo,

$$\nu(\mathcal{H}) \geq \nu(\mathcal{H}') + 1. \quad (4.25)$$

Por fim, utilizando (4.23), (4.24) e (4.25),

$$\begin{aligned} \tau(\mathcal{H}') &\leq \nu(\mathcal{H}') \\ \tau(\mathcal{H}') + 1 &\leq \nu(\mathcal{H}') + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau(\mathcal{H}) &\leq \tau(\mathcal{H}') + 1 \leq \nu(\mathcal{H}') + 1 \leq \nu(\mathcal{H}) \\ \tau(\mathcal{H}) &\leq \nu(\mathcal{H}).\end{aligned}$$

Isto finaliza a prova. □

### Resultado principal

Com os Lemas 4.4.1 e 4.4.2 estamos aptos para provar o resultado principal desta seção.

**Teorema 4.4.1** (Tuza, 1990). *Seja  $G$  um grafo cordal. Se  $G$  não contém o  $K_4$  como subgrafo, então*

$$\tau(G) = \nu(G).$$

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo cordal com  $n$  vértices sem cópia do  $K_4$ . Uma vez que as arestas que não pertencem a nenhum triângulo são irrelevantes, podemos supor que toda aresta de  $G$  está contida em pelo menos um triângulo. Sejam  $v_1, v_2, \dots, v_n$  uma ordenação dos vértices de  $G$  (conforme o Lema 4.4.1) e  $\mathcal{H}$  um hipergrafo 3-uniforme criado a partir de  $G$  pela operação  $\mathcal{H}(G)$  (Seção 4.2).

Como  $G$  não possui cópia do  $K_4$ , em todo subgrafo  $G' \subseteq G$  o vértice  $v_p$  de menor índice em  $G'$  tem grau no máximo dois em  $G'$ . Caso contrário, suponha que exista  $G' \subseteq G$ , tal que  $v_p$  tenha grau pelo menos três. Sejam  $v_i, v_j, v_k \in V(G')$  vértices adjacentes a  $v_p$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $i < j < k$ . Como  $v_p v_i$  e  $v_p v_j$  pertencem a  $E(G')$ . Pelo Lema 4.4.1, temos que  $v_i v_j \in E(G')$ . De modo análogo, temos que  $v_j v_k \in E(G')$ , uma vez que  $v_p v_j, v_p v_k \in E(G')$ . Temos ainda que  $v_i v_k \in E(G')$ , dado que  $v_p v_i, v_p v_k \in E(G')$  (Figura 4.11). Assim, os vértices  $v_p, v_i, v_j, v_k$  induzem um  $K_4$  em  $G'$ . Contudo,  $G'$  é um subgrafo de  $G$  e, por hipótese,  $G$  não contém cópia do  $K_4$ . Logo,  $v_p$  possui grau no máximo dois.

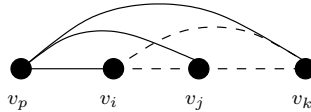


Figura 4.11: Caso  $d_{G'}(v_p) > 2$ , com os vértices adjacentes  $v_i, v_j, v_k$ .

Seja  $G'$  um subgrafo qualquer de  $G$ . Seja  $v_p$  o vértice de menor índice em  $G'$  na ordenação dos vértices de  $G$ , segundo o Lema 4.4.1. Então, temos que  $d_{G'}(v_p) = 2$ . Portanto, existe apenas um triângulo em  $G'$  que contém  $v_p$ . Seja  $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'(G')$  (Seção 4.2). Sejam  $e, f \in E(G')$  as arestas incidentes em  $v_p$  e  $t$  o triângulo de  $T(G')$  que contém  $v_p$ . Denote por  $E_{v_p}$  a hiperaresta de  $\mathcal{E}(\mathcal{H}')$  correspondente a  $t$ . Pelo mapeamento de  $G'$  em  $\mathcal{H}'$ , os vértices de  $V(\mathcal{H}')$  correspondentes as arestas  $e, f$  serão vértices próprios da hiperaresta  $E_{v_p}$ , pois não existe um triângulo em  $T(G')$  (hiperaresta em  $\mathcal{H}'$ ) diferente de  $t$  que use  $e$  e/ou  $f$ . Por fim, como esse argumento vale para

todo  $G' \subseteq G$ , mostramos, pois, que todo  $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$  contém uma hiperaresta com dois vértices próprios. Logo, pelo Lema 4.4.2, concluímos que

$$\tau(G) = \nu(G).$$

□

## 4.5 Prova para grafos tripartidos

A prova para esta classe de grafo foi desenvolvida por P. Haxell e Y. Kohayakawa em 1998 [12]. Antes de apresentar o resultado principal desta seção, precisamos introduzir alguns conceitos.

Seja  $G$  um grafo. Definimos um *emparelhamento* em  $G$ , como um conjunto  $M \subseteq E(G)$ , tal que todo par  $e, f \in M$  são não adjacentes. Denotamos os vértices que são extremos de alguma aresta de  $M$  por  *$M$ -saturados*. Caso contrário, dizemos que são  *$M$ -insaturados*. Dizemos que  $M$  é *máximo* se não existe um emparelhamento  $M'$ , tal que  $|M'| > |M|$ . Um emparelhamento que satura todos os vértices de  $G$  é dito *perfeito*. Um caminho  $P$  em  $G$  é dito ser  *$M$ -alternante* se as arestas de  $P$  estão alternadamente em  $M$  e  $E(G) - M$ , conforme ilustrado na Figura 4.12a. Dizemos também que  $P$  é  *$M$ -aumentante*, se é  $M$ -alternante e os extremos de  $P$  são  $M$ -insaturados (Figura 4.12b).

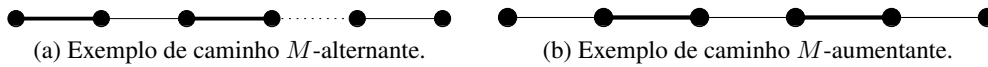


Figura 4.12: As arestas mais escuras estão em  $M$ , as demais em  $E(G) - M$ .

Em 1957, o matemático Berge provou uma importante relação entre caminho aumentante e emparelhamento. Uma prova do Teorema 4.5.1 pode ser vista em Bondy e Murty [3].

**Teorema 4.5.1** (Berge, 1957). *Um emparelhamento  $M$  em um grafo  $G$  não é máximo se, e somente se,  $G$  contém caminho  $M$ -aumentante.* □

Exibimos a seguir um importante corolário do Teorema de Berge.

**Corolário 4.5.1.** *Sejam  $G$  um grafo e  $M$  um emparelhamento que não é máximo em  $G$ . Então, existe um caminho  $M$ -aumentante  $P$ , tal que é possível obter um emparelhamento  $M'$  combinando  $M$  e  $P$ , de modo que*

$$|M'| = |M| + 1.$$

*Demonstração.* Sejam  $G$  um grafo e  $M$  um emparelhamento que não é máximo em  $G$ . Pelo Teorema 4.5.1 existe em  $G$  um caminho  $M$ -aumentante  $P$ . Seja

$$M' = (M - E(P)) \cup (E(P) - M).$$



Uma vez que os vértices inicial e final de  $P$  são  $M$ -insaturados, o número de arestas em  $E(P)$  que não estão em  $M$  é maior em uma unidade do que o número de arestas que estão em  $M$ . Então,  $|M'| = |M| + 1$ . Nos resta mostrar que  $M'$  é um emparelhamento, ou seja, todas as arestas em  $M'$  são não adjacentes. As arestas em  $E(P) - M$  são todas não adjacentes, por definição de caminho  $M$ -alternante. Por outro, as arestas em  $M - E(P)$  são não adjacentes, dado que  $M$  é um emparelhamento. Suponha, pois, que existam arestas  $e \in M - E(P)$  e  $f \in E(P) - M$ , de tal modo que  $e, f$  sejam adjacentes. Seja  $v \in V(G)$  o extremo comum de  $e$  e  $f$ . Dado que  $e \in M - E(P)$ , nenhum extremo de  $e$  pode ser um vértice interno no caminho  $P$ . Do contrário, teríamos duas arestas adjacentes em  $M$  (Figura 4.13a). Portanto, temos que  $v$  é o vértice inicial ou final de  $P$ , pois  $f \in E(P) - M$ . Contudo, nesse caso não teríamos um caminho  $M$ -aumentante em  $G$ , uma vez que  $e \in M$  (Figura 4.13b). Logo, não existe duas arestas adjacentes em  $M'$ .

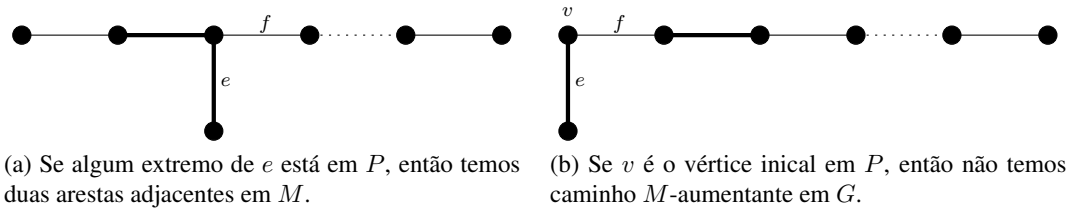


Figura 4.13: As arestas mais escuras estão em  $M$ , as demais em  $E(G) - M$ .

□

Uma *cobertura de vértices* em um grafo  $G$  é um conjunto  $C \subseteq V$ , tal que toda aresta de  $G$  contém pelo menos um extremo em  $C$ . Uma *cobertura mínima de vértices* é definida como uma cobertura de vértices com menor cardinalidade. Uma importante relação entre emparelhamento e cobertura de vértices foi mostrada por König e Egerváry, de forma independente, em 1931. O teorema ficou conhecido como Teorema de König-Egerváry. Uma prova do Teorema 4.5.2 pode ser encontrada em Diestel [6].

**Teorema 4.5.2** (König-Egerváry, 1931). *Sejam  $G$  um grafo bipartido,  $M$  um emparelhamento máximo e  $C$  uma cobertura por vértice mínima de  $G$ . Então,  $|M| = |C|$ .* □

Dizemos que um grafo  $G$  é *tripartido* se  $V(G)$  pode ser particionado em  $V_1, V_2, V_3$ , tal que para todo  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ , tem-se que  $G[V_i \cup V_j]$  é bipartido com partes  $V_i, V_j$ . Desse modo, se  $G$  é um grafo tripartido, então todo triângulo de  $T(G)$  possui um vértice em cada parte. Denotamos por  $E_i$  as arestas com extremos em  $V_{i+1}$  e  $V_{i+2}$ , sendo a operação de soma no índice modular (Figura 4.14). Ademais, para  $S \subseteq E(G)$ , escrevemos  $E_i(S)$  para denotar o conjunto de arestas em  $S$  que estão em  $E_i$ .

Para o resultado principal desta seção, necessitamos também do seguinte lema.

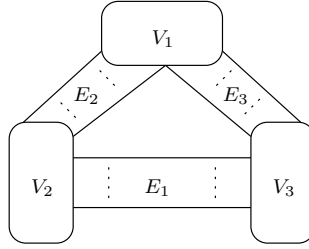


Figura 4.14: Exemplo da denominação dos vértices e arestas de um grafo tripartido.

**Lema 4.5.1.** *Seja  $G$  um grafo tripartido com partes  $V_1, V_2, V_3$ . Sejam  $i \in \{1, 2, 3\}$  fixo e  $P$  um empacotamento de  $G$ . Então, uma das assertivas é verdadeira:*

1. *Existe um empacotamento  $P'$  em  $G$  com  $|P'| = |P| + 1$ ;*
2. *Existe uma cobertura  $C$  em  $G$ , tal que  $|C| \leq 2|P|$ .*

*Demonstração.* Se  $P$  não é maximal, o item (1) é verificado, por definição. Podemos, pois, supor que  $P$  é maximal, ou seja, todo triângulo de  $G$  possui pelo menos uma aresta em  $E(P)$ .

Seja  $i \in \{1, 2, 3\}$  fixo. Para cada  $v \in V_i$ , seja  $P_v \subseteq P$  o conjunto dos triângulos de  $P$  que contém  $v$ . Seja  $G_v$  um grafo bipartido, sendo  $V(G_v) = V_{i+1} \cup V_{i+2}$  e o conjunto de arestas  $E(G_v)$  definido como:  $xy \in E(G_v)$  se existe um triângulo em  $G$  com vértices  $v, x, y$  e  $xy$  não é uma aresta de  $t$ , para qualquer  $t \in P - P_v$ . Denotamos o emparelhamento máximo de  $G_v$  por  $M_v^*$ . Uma vez que todos os triângulos de  $P_v$  são aresta-disjuntos, as arestas em  $E(P_v) \cap E(G_v)$  correspondem a um emparelhamento em  $G_v$ , denotado por  $M_v$ . Note que  $M_v$  é maximal, dado que  $P$  é maximal. Assim, temos dois possíveis casos.

Caso (1). Existe algum  $v \in V_i$ , tal que  $|M_v| < |M_v^*|$ . Se  $M_v$  não é um emparelhamento máximo em  $G_v$ , então existe em  $G_v$ , pelo Teorema 4.5.1, um caminho  $M_v$ -aumentante  $Q = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k)$ , tal que  $x_j y_j \notin M_v (1 \leq j \leq k)$ ,  $y_j x_{j+1} \in M_v (1 \leq j < k)$  e o par  $x_1, y_k$  são  $M_v$ -insaturados. Pelo Corolário 4.5.1, existe um emparelhamento  $M'_v$  em  $G_v$ , com  $|M'_v| = |M_v| + 1$ . Então, seja  $P'$  o seguinte conjunto de triângulos:

$$P' = (P - \{t : xy \in E(Q) \cap M_v\}) \cup \{t : xy \in E(Q) \cap M'_v\}.$$

Pelo Corolário 4.5.1, temos que  $|P'| = |P| + 1$ . Resta-nos mostrar que  $P'$  é um empacotamento, ou seja, todos os seus triângulos são aresta-disjuntos. Os triângulos de  $P'$  que contém  $v$  são todos aresta-disjuntos, pois  $M'_v$  é um emparelhamento em  $G_v$ . Ademais, um triângulo  $t \in P'$  que não contém  $v$  só pode compartilhar uma aresta  $e$  com algum triângulo que contém  $v$  se  $e \in E_i$  (Figura 4.15). Porém, por construção de  $G_v$ , nenhuma aresta  $e$  de  $E_i$  aparece em  $E(G_v)$  se  $e$  pertence a algum triângulo de  $P - P_v$ . Logo,  $P'$  é um conjunto de triângulos aresta-disjuntos de tamanho  $|P| + 1$ .

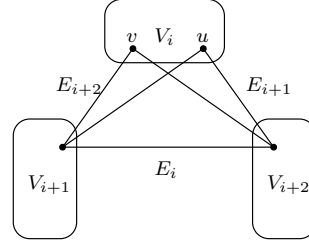


Figura 4.15: Se um triângulo contém  $v$  e outro não contém  $v$ , eles só podem compartilhar uma aresta de  $E_i$ .

Caso (2). Para todo  $v \in V_i$ , temos que  $|M_v| = |M_v^*|$ . Neste caso, construiremos uma cobertura de tamanho no máximo  $2|P|$ .

Para cada  $v \in V_i$ , seja  $C_v$  uma cobertura de vértices mínima em  $G_v$ . Uma vez que  $G_v$  é bipartido, pelo Teorema de 4.5.2 temos que  $|C_v| = |M_v^*|$ . Desse modo, seja  $C$  o seguinte conjunto de arestas:

$$C = E_i(E(P)) \cup \bigcup_{v \in V_i} \{vz : z \in C_v\}.$$

Devemos mostrar que  $C$  é uma cobertura em  $G$  e que  $|C| \leq 2|P|$ . Primeiramente, vamos estimar  $|C|$ . Uma vez que  $G$  é tripartido, sabemos que

$$|E_i(E(P))| = |P|. \quad (4.26)$$

Como para todo  $v \in V_i$ , temos que  $|M_v| = |M_v^*|$ , então

$$\sum_{v \in V_i} |M_v^*| = \sum_{v \in V_i} |M_v| = |P|. \quad (4.27)$$

Por outro lado, dado que  $G_v$  é bipartido, pelo Teorema 4.5.2 obtemos

$$\sum_{v \in V_i} |M_v^*| = \sum_{v \in V_i} |C_v| \quad (4.28)$$

Desse modo, utilizando (4.27) e (4.28), temos

$$\left| \bigcup_{v \in V_i} \{vz : z \in C_v\} \right| = |P|. \quad (4.29)$$

Utilizando (4.26) e (4.29), concluímos que

$$|C| \leq 2|P|.$$

Finalmente, resta mostrar que  $C$  é uma cobertura em  $G$ , ou seja, mostrar que todo triângulo

de  $G$  possui pelo menos uma aresta em  $C$ . Seja  $t$  um triângulo qualquer de  $G$  com  $V(t) = \{v, u, z\}$  e  $v \in V_i$ . Se  $E(t) \cap E_i(E(P)) \neq \emptyset$ , então o resultado segue. Suponha que  $E(t) \cap E_i(E(P)) = \emptyset$  e  $uz \in E_i$  (Figura 4.16).

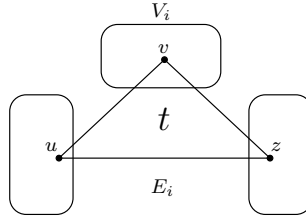


Figura 4.16: Ilustração do triângulo  $t \in T(G)$ , com a aresta  $uz \in E_i$ .

Na cobertura de vértices  $C_v$  de  $G_v$ , temos que  $u$  e/ou  $z$  pertencem a  $C_v$ . Portanto,  $vu$  e/ou  $vz$  pertencem à segunda parte da união que compõe  $C$ . Logo,  $C$  é uma cobertura em  $G$  com tamanho no máximo  $2|P|$  e isso finaliza a prova do Lema 4.5.1.  $\square$

### Resultado principal

Utilizando o Lema 4.5.1, estamos aptos para provar o resultado principal desta seção.

**Teorema 4.5.3** (Haxell e Kohayakawa, 1998). *Se  $G$  é um grafo tripartido, então*

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

*Demonstração.* Sejam  $G$  um grafo tripartido e  $P$  um empacotamento máximo de  $G$ . Pela maximalidade de  $P$ , o Item (1) do Lema 4.5.1 não pode ser verificado. Então, existe uma cobertura  $C$  em  $G$ , tal que  $|C| \leq 2|P|$ . Logo,

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

$\square$

Embora tenhamos apresentado aqui uma prova para a conjectura de Tuza em grafo tripartidos, P. Haxell e Y. Kohayakawa provaram um resultado um pouco mais forte. Eles provaram o seguinte teorema.

**Teorema 4.5.4** (Haxell e Kohayakawa, 1998). *Se  $G$  é um grafo tripartido, então*

$$\tau(G) \leq \alpha\nu(G), \text{ onde } \alpha = (38 + \sqrt{1948})/48 < 1,956.$$

$\square$

Uma prova completa do Teorema 4.5.4 pode ser vista em Haxell e Kohayakawa [12]. Haxell e Kohayakawa não foram os únicos a abordar o caso da conjectura de Tuza em grafos tripartidos. Em 1990, Tuza [26] abordou o problema neste contexto. Ele provou que se  $G$  é um grafo tripartido, então

$$\tau(G) \leq \frac{7}{3}\nu(G).$$

## 4.6 Melhor resultado conhecido para o caso geral

A prova que apresentamos nesta seção foi originalmente publicada em 1999 e é devida a P. Haxell [11].

Sejam  $G$  um grafo e  $P$  um empacotamento máximo fixo em  $G$ . Dizemos que um triângulo  $t \in T(G)$  é do tipo  $(P, i)$ , se  $t$  possui exatamente  $i$  arestas em  $E(P)$ . Todo triângulo é de algum tipo  $(P, i)$ , com  $i \in \{1, 2, 3\}$ , uma vez que todo triângulo tem pelo menos uma aresta em  $E(P)$ . Seja  $P_1$  um empacotamento máximo do tipo  $(P, 1)$  em  $G$ . Seja  $\gamma$ , tal que

$$|P_1| = \gamma\nu(G). \quad (4.30)$$

Antes de provarmos o resultado principal desta seção, necessitamos de quatro lemas auxiliares, os quais provaremos a seguir. Definições necessárias serão dadas no decorrer do texto.

**Lema 4.6.1.** *Se  $G$  é um grafo, então*

$$\tau(G) \leq (3 - \gamma)\nu(G).$$

*Demonstração.* Para cada  $t \in P_1$ , denote por  $t'$  o triângulo em  $P$  que compartilha uma aresta com  $t$ , denotada por  $e(t)$ . Seja  $\mathcal{F}$  o seguinte conjunto de triângulos

$$\mathcal{F} = \{t' \in P : t \in P_1\}.$$

Para cada  $t' \in \mathcal{F}$  existe exatamente um triângulo  $t$  em  $P_1$ . Do contrário, se para um  $t' \in \mathcal{F}$ , existem  $t_1, t_2 \in P_1$  que compartilham aresta com  $t'$ , então podemos construir um empacotamento maior que  $P$ , trocando  $t'$  por  $t_1$  e  $t_2$ . Por outro lado, uma vez que todos os triângulos em  $P_1$  são do tipo  $(P, 1)$ , existe exatamente um triângulo  $t' \in \mathcal{F}$  que compartilha aresta com  $t$ . Desse modo, temos que

$$|\mathcal{F}| = |P_1|. \quad (4.31)$$

O subgrafo induzido por cada par  $t \in P_1, t' \in \mathcal{F}$  é uma cópia do  $K_4$  menos uma aresta, caso essa aresta exista em  $G$ , denotamos por  $e'(t)$  (Figura 4.17).

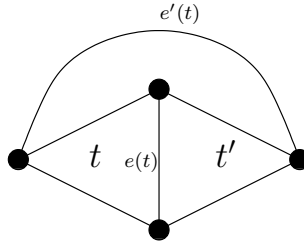


Figura 4.17: O subgrafo induzido por cada par  $t \in P_1, t' \in \mathcal{F}$  induzem um  $K_4$ , possivelmente sem uma aresta, denotada por  $e'(t)$ .

Seja  $C$  o seguinte conjunto de arestas

$$C = E(P - \mathcal{F}) \cup \{e(t) : t \in P_1\} \cup \{e'(t) : t \in P_1 \text{ e } e'(t) \text{ existe}\}.$$

Devemos mostrar que  $C$  é uma cobertura em  $G$  de tamanho no máximo  $(3 - \gamma)\nu(G)$  e daí o resultado segue. Inicialmente, vamos estimar  $|C|$ . A primeira parcela da união,  $E(P - \mathcal{F})$ , tem tamanho  $3|P| - 3|\mathcal{F}|$ . Assim, utilizando (4.31) e (4.30), temos que

$$|E(P - \mathcal{F})| = 3|P| - 3\gamma|P| \quad (4.32)$$

A segunda parcela da união,  $\{e(t) : t \in P_1\}$ , tem tamanho  $|P_1|$ , pois somente uma aresta de cada triângulo de  $P_1$  é usada. A terceira parcela,  $\{e'(t) : t \in P_1 \text{ e } e'(t) \text{ existe}\}$ , tem tamanho no máximo  $|P_1|$ , pois  $e'(t)$  não necessariamente existe em  $G$ . Logo, a segunda e terceira parcelas juntas tem tamanho no máximo  $2|P_1|$ . Desse modo, utilizando (4.30) e (4.32), temos que  $C$  é no máximo  $3|P| - 3\gamma|P| + 2\gamma|P|$ , ou seja,

$$|C| \leq (3 - \gamma)|P|.$$

Finalmente, resta-nos mostrar que  $C$  é uma cobertura em  $G$ . Note que toda família de triângulos da forma  $(P - \mathcal{F}) \cup \bigcup_{t \in P_1} \{t \text{ ou } t'\}$  corresponde a um empacotamento em  $G$  de tamanho  $|P| = \nu(G)$ , pois todos os triângulos  $t'$  são aresta-disjuntos entre si e com todos os triângulos de  $P$ , uma vez que originalmente pertencem a  $P$ . Por outro lado, os triângulos  $t \in P_1$  compartilham aresta com os triângulos de  $\mathcal{F}$ , os quais foram removidos de  $P$ . Logo, são aresta-disjuntos com  $(P - \mathcal{F})$ . Outrossim,  $|(P - \mathcal{F}) \cup \bigcup_{t \in P_1} \{t \text{ ou } t'\}| = |P| = \nu(G)$ , dado que  $|P_1| = |\mathcal{F}|$  por (4.31). Ademais, seja  $t_1$  um triângulo qualquer de  $T(G)$ . Se  $E(t_1) \cap E(P - \mathcal{F}) = \emptyset$ , então  $t_1$  compartilha aresta com os triângulos  $t \in P_1$  e  $t' \in \mathcal{F}$ , para algum  $t \in P_1$ , uma vez que  $(P - \mathcal{F}) \cup \bigcup_{t \in P_1} \{t \text{ ou } t'\}$  é um empacotamento máximo em  $G$ . Logo,  $t_1$  contém  $e(t)$  ou  $e'(t)$  (Figura 4.18), sendo, pois, coberto por  $C$ .

□

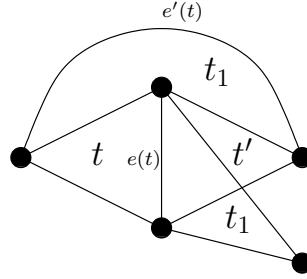


Figura 4.18: Se  $t_1$  compartilha aresta com  $t \in P_1$  e  $t' \in \mathcal{F}$ , então  $t_1$  contém  $e(t)$  ou  $e'(t)$ .

Cabe aqui uma importante ressalva. Muito embora o Lema 4.6.1 possa parecer um resultado para Conjectura 3.1.2, ele não o é. Note que não definimos um valor (ou uma faixa de valores) para  $\gamma$ . De fato,  $\gamma$  pode inclusive ser zero, por exemplo, um grafo onde todos os triângulos são aresta-disjuntos implica  $\gamma = 0$ . Desse modo, necessitamos de mais informações e ferramentas. Nesse sentido, seguimos com os lemas auxiliares.

Seja  $G'$  o grafo obtido a partir de  $G$  removendo todas as arestas de todos os triângulos de  $P_1$ , ou seja,  $G' = G - E(P_1)$ . Uma vez que  $P - \mathcal{F}$  é um empacotamento de  $G'$ , utilizando (4.30) e (4.31) temos que  $\nu(G') \geq (1 - \gamma)\nu(G)$ . Por outro lado, se existir um empacotamento  $P'$  em  $G'$ , tal que  $|P'| > (1 - \gamma)\nu(G)$ , então podemos construir um empacotamento  $P'' = P' \cup P_1$  que fere a maximalidade de  $P$  em  $G$ . Logo,

$$\nu(G') = (1 - \gamma)\nu(G). \quad (4.33)$$

Note que todos os triângulos em  $G'$  são do tipo  $(P, 2)$  ou  $(P, 3)$ . Caso contrário, se existe  $t \in T(G')$  do tipo  $(P, 1)$ , então podemos criar, em  $G$ , um empacotamento  $P'_1 = P_1 \cup t$  do tipo  $(P, 1)$ , que fere a maximalidade de  $P_1$ . Seja  $P_2$  um empacotamento máximo do tipo  $(P, 2)$  em  $G'$ . Seja  $\beta$ , tal que

$$|P_2| = \beta\nu(G). \quad (4.34)$$

Assim, estamos aptos a provar o segundo lema desta seção.

**Lema 4.6.2.** *Se  $G$  é um grafo, então*

$$\tau(G) \leq \left(\frac{3}{2} + \frac{5\gamma}{2} + 2\beta\right)\nu(G).$$

*Demonstração.* Basta mostrar uma cobertura  $C$  em  $G$  de tamanho no máximo  $(\frac{3}{2} + \frac{5\gamma}{2} + 2\beta)\nu(G)$  e o resultado segue. Seja  $H = G[E(P) - (E(P_1) \cup E(P_2))]$ . Seja  $C'$  o menor conjunto de arestas, tal que  $H - C'$  seja um grafo bipartido. Pelo Lema 4.1.1, temos que  $C' \leq \frac{E(H)}{2}$ . Seja

$C$  o seguinte conjunto de arestas

$$C = E(P_1) \cup E(P_2) \cup C'.$$

Vamos inicialmente estimar  $|C'|$ . Temos que  $E(P_1)$  tem tamanho  $3|P_1|$  e que  $E(P_2)$  tem tamanho  $3|P_2|$ . Resta-nos estimar  $|C'|$ . Uma vez que cada triângulo em  $P_1$  tem exatamente uma aresta em  $E(P)$  (são do tipo  $(P, 1)$ ), temos que  $E(P_1)$  tem  $|P_1|$  arestas em  $E(P)$ . De modo similar, como todo triângulo em  $P_2$  tem exatamente duas arestas em  $E(P)$  (são do tipo  $(P, 2)$ ), temos que  $E(P_2)$  tem  $2|P_2|$  arestas em  $E(P)$ . Desse modo,  $|C'| \leq \frac{3|P| - |P_1| - 2|P_2|}{2}$ . Assim,  $|C| \leq 3|P_1| + 3|P_2| + \frac{3|P| - |P_1| - 2|P_2|}{2}$ . Logo, utilizando (4.30) e (4.34), temos que

$$\begin{aligned} |C| &\leq 3|P_1| + 3|P_2| + \frac{3|P| - |P_1| - 2|P_2|}{2} \\ |C| &\leq \frac{6|P_1| + 6|P_2| + 3|P| - |P_1| - 2|P_2|}{2} \\ |C| &\leq \frac{3|P| + 5|P_1| + 4|P_2|}{2} \\ |C| &\leq \frac{3|P| + 5\gamma|P| + 4\beta|P|}{2} \\ |C| &\leq \left(\frac{3}{2} + \frac{5\gamma}{2} + 2\beta\right)|P|. \end{aligned}$$

Resta-nos mostrar que  $C$  é uma cobertura em  $G$ . Todos os triângulos do tipo  $(P, 1)$  são cobertos por  $E(P_1)$ . Do contrário, se existisse um triângulo  $t$  do tipo  $(P, 1)$  não coberto por  $E(P_1)$ , poderíamos criar um empacotamento  $P'_1 = P_1 \cup t$ , ferindo a maximalidade de  $P_1$ . De modo similar, todos os triângulos do tipo  $(P, 2)$  são cobertos por  $E(P_2)$ . Ademais, os triângulos do tipo  $(P, 3)$  são cobertos por  $C'$ , uma vez que  $H - C'$  é um grafo bipartido (não contém triângulos). Logo,  $C$  é uma cobertura para  $G$ .  $\square$

Uma ressalva semelhante a que foi feita ao Lema 4.6.1 se aplica ao Lema 4.6.2. Desse modo, continuamos com os lemas auxiliares.

Seja  $P'$  um empacotamento máximo de  $G' = G - E(P_1)$  sujeito a seguinte condição:  $|E(P') - E(P)| \geq \beta\nu(G)$ . Sabemos que existe um empacotamento sujeito a essa condição por causa de  $P_2$ , uma vez que  $|E(P_2) - E(P)| = |P_2| = \beta\nu(G)$  por (4.34). Como  $\nu(G') = (1 - \gamma)\nu(G)$  por (4.33), temos que

$$|P'| \leq (1 - \gamma)\nu(G). \quad (4.35)$$

Definimos  $\mathcal{L}$  como o seguinte conjunto de triângulos em  $G'$

$$\mathcal{L} = \{t \in T(G') : E(t) \cap E(P') = e, e \in E(P') - E(P)\}.$$



Em outras palavras, um triângulo está em  $\mathcal{L}$  se contém exatamente uma aresta em  $E(P')$  e esta aresta pertencem a  $E(P') - E(P)$ . Seja  $P'_1$  um empacotamento máximo em  $\mathcal{L}$ . Seja  $\delta$ , tal que

$$|P'_1| = \delta\nu(G). \quad (4.36)$$

Assim, estamos preparados para provar o terceiro Lema desta seção.

**Lema 4.6.3.** *Se  $G$  é um grafo, então*

$$\tau(G) \leq (3 - \delta)\nu(G).$$

*Demonstração.* A prova deste lema é similar a prova do Lema 4.6.1.

Vamos, inicialmente, construir uma cobertura em  $G' = G - E(P_1)$ . Para cada  $t \in P'_1$ , denote por  $t'$  o triângulo em  $P'$  que compartilha uma aresta com  $t$ , denotada por  $e(t)$ . Seja  $\mathcal{F}'$  o seguinte empacotamento

$$\mathcal{F}' = \{t' \in P' : t \in P'_1\}.$$

Temos que  $|P'_1| \geq |\mathcal{F}'|$ , pois para cada  $t' \in \mathcal{F}'$  existe um  $t \in P'_1$ , por construção de  $\mathcal{F}'$ . Por outro lado, sabemos que para todo par  $t \in P'_1, t' \in \mathcal{F}'$ , a aresta  $e(t)$  pertence a  $E(P') - E(P)$ , por construção de  $\mathcal{L}$ . Ademais, para cada  $t' \in \mathcal{F}'$ , a única aresta de  $t'$  em  $E(P') - E(P)$  é a aresta  $e(t)$ . Do contrário, se em  $t'$  houvesse duas arestas em  $E(P') - E(P)$ , então  $t'$  seria do tipo  $(P, 1)$ , porém não existe esse tipo de triângulo em  $G'$ . Portanto, para cada triângulo  $t' \in \mathcal{F}'$  existe exatamente um triângulo  $t \in P'_1$ . Logo,

$$|\mathcal{F}'| = |P'_1|. \quad (4.37)$$

De forma similar ao ocorrido na prova do Lema 4.6.1, o subgrafo induzido por cada par  $t \in P'_1, t' \in \mathcal{F}'$  é uma cópia do  $K_4$  ou do  $K_4$  menos uma aresta, caso essa aresta exista, denotamos por  $e'(t)$  (semelhante a Figura 4.17). Seja  $C'$  o seguinte conjunto de arestas

$$C' = E(P' - \mathcal{F}') \cup \{e(t) : t \in P'_1\} \cup \{e'(t) : t \in P'_1 \text{ e } e'(t) \text{ existe}\}.$$

Vamos estimar  $|C'|$ . Sabemos que a primeira parcela da união que compõe  $C'$ ,  $E(P' - \mathcal{F}')$ , tem tamanho  $3|P'| - 3|\mathcal{F}'|$ , ou seja,  $3|P'| - 3|P'_1|$  por (4.37). A segunda parcela da união,  $\{e(t) : t \in P'_1\}$ , tem tamanho  $|P'_1|$ , pois apenas uma aresta de  $P'_1$  é usada. A terceira parcela,  $\{e'(t) : t \in P'_1 \text{ e } e'(t) \text{ existe}\}$ , mede no máximo  $|P'_1|$ , pois  $e'(t)$  não necessariamente existe em  $G'$ . Logo, a segunda e terceira parcelas juntas medem no máximo  $2|P'_1|$ . Desse modo, utilizando (4.36), temos que  $C'$  é no máximo  $3|P'| - 3\delta|P| + 2\delta|P|$ , ou seja,

$$|C'| \leq 3|P'| - \delta|P|. \quad (4.38)$$

Agora, mostraremos que  $C'$  é uma cobertura em  $G'$ . Note que toda família  $\mathcal{T}$  de triângulos

da forma  $(P' - \mathcal{F}') \cup \bigcup_{t \in P'_1} \{t \text{ ou } t'\}$  corresponde a um empacotamento em  $G'$  que contém todas as arestas de  $E(P') - E(P)$ , pois todos os triângulos  $t'$  são aresta-disjuntos entre si e com todos os triângulos de  $P'$ , uma vez que originalmente pertencem a  $P'$ . Por outro lado, os triângulos  $t \in P'_1$  compartilham aresta com os triângulos de  $\mathcal{F}'$ , os quais foram removidos de  $P'$ . Logo, são aresta-disjuntos com  $(P' - \mathcal{F}')$ . Outrossim,  $|\mathcal{T}| = |P'|$ , dado que  $|P'_1| = |\mathcal{F}'|$  por (4.37). Ademais,  $\mathcal{T}$  utiliza todas as arestas de  $E(P') - E(P)$ , uma vez que contém as arestas  $e(t)$ . Desse modo, se existisse um triângulo  $t_1 \in T(G')$ , tal que  $E(t) \cap E(\mathcal{T}) = \emptyset$  para algum  $\mathcal{T}$ , poderíamos construir um empacotamento  $\mathcal{T} \cup t$  que fere a maximalidade de  $P'$ . Logo, utilizando o mesmo argumento usado no Lema 4.6.1,  $C'$  é uma cobertura em  $G'$ .

Por fim, seja  $C$  o seguinte conjunto de arestas

$$C = C' \cup E(P_1).$$

Mostraremos que  $C$  é uma cobertura em  $G$  de tamanho no máximo  $(3 - \delta)\nu(G)$ . Vamos estimar  $|C|$ . Sabemos que  $|E(P_1)| = 3|P_1|$ . Desse modo, utilizando (4.30), (4.35) e (4.38),

$$\begin{aligned} |C| &\leq |C'| + 3|P_1| \\ |C| &\leq (3|P'| - \delta|P|) + 3|P_1| \\ |C| &\leq (3[(1 - \gamma)|P|] - \delta|P|) + 3|P_1| \\ |C| &\leq (3|P| - 3\gamma|P| - \delta|P|) + 3\gamma|P| \\ |C| &\leq 3|P| - \delta|P| \\ |C| &\leq (3 - \delta)|P|. \end{aligned}$$

Finalmente, resta-nos mostrar que  $C$  é uma cobertura em  $G$ . Vimos que  $C'$  é uma cobertura em  $G'$ , ou seja, cobre todos os triângulos do tipo  $(P, 2)$  e  $(P, 3)$ . Ademais, os triângulos do tipo  $(P, 1)$  são cobertos por  $E(P_1)$ , uma vez que  $P_1$  é um empacotamento máximo dos triângulos do tipo  $(P, 1)$ .  $\square$

A observação feita aos lemas anteriores também se aplica ao Lema 4.6.3. Não podemos interpretar cada lema, isoladamente, como um resultado para a Conjectura 3.1.2. A seguir provamos o último lema auxiliar desta seção.

**Lema 4.6.4.** *Se  $G$  é um grafo, então*

$$\tau(G) \leq (3 + 3\delta - \beta)\nu(G).$$

*Demonstração.* Nesta prova, vamos proceder como no Lema 4.6.2. Desse modo, seja  $C$  o

seguinte conjunto de arestas

$$C = E(P_1) \cup E(P'_1) \cup (E(P) \cap E(P')).$$

Mostraremos que  $C$  é uma cobertura de tamanho no máximo  $(3 + 3\delta - \beta)\nu(G)$ . Como nos casos anteriores, vamos inicialmente estimar  $|C|$ . A primeira parcela da união que compõe  $C$ ,  $E(P_1)$ , tem tamanho  $3|P_1|$ . A segunda parcela da união,  $E(P'_1)$ , tem tamanho  $3|P'_1|$ . Podemos reescrever a terceira parcela da seguinte forma:

$$E(P) \cap E(P') = E(P') - (E(P') - E(P)).$$

Desse modo, sabendo que  $P'$  respeita a condição  $|E(P') - E(P)| \geq \beta\nu(G)$ , temos que  $|E(P') - (E(P') - E(P))|$  tem tamanho no máximo  $3|P'| - \beta|P|$ . Utilizando (4.35), concluímos que a terceira parcela tem tamanho no máximo  $3[(1 - \gamma)|P|] - \beta|P|$ . Logo, fazendo uso de (4.30) e (4.36), obtemos

$$\begin{aligned} |C| &\leq 3|P_1| + 3|P'_1| + 3[(1 - \gamma)|P|] - \beta|P| \\ |C| &\leq 3|P_1| + 3|P'_1| + 3|P| - 3\gamma|P| - \beta|P| \\ |C| &\leq 3\gamma|P| + 3|P'_1| + 3|P| - 3\gamma|P| - \beta|P| \\ |C| &\leq 3\delta|P| + 3|P| - \beta|P| \\ |C| &\leq (3 + 3\delta - \beta)|P|. \end{aligned}$$

Resta-nos mostrar que  $C$  é uma cobertura em  $G$ . Note que  $P'$  é maximal em  $G'$ . Do contrário, se existisse  $P'' \supset P'$ , uma vez que  $P'$  satisfaz a condição  $|E(P') - E(P)| \geq \beta\nu(G)$ ,  $P''$  também a satisfaz, pois  $P''$  contém  $P'$ . Assim,  $P''$  seria escolhido como empacotamento máximo em  $G'$  que satisfaz a condição  $|E(P') - E(P)| \geq \beta\nu(G)$ , e não  $P'$ .

Todos os triângulos do tipo  $(P, 1)$  são cobertos por  $E(P_1)$ . Desse modo, restam apenas os triângulos em  $G'$  para serem cobertos. Seja  $t$  um triângulo em  $G'$ . Podemos supor que  $E(t) \cap (E(P) \cap E(P')) = \emptyset$ . Se  $t$  contém duas arestas em  $E(P') - E(P)$ , então  $t$  é do tipo  $(P, 1)$ , porém não existe triângulo desse tipo em  $G'$ . Se  $t$  contém três arestas em  $E(P') - E(P)$ , podemos construir um empacotamento  $P \cup t$  que fere a maximalidade de  $P$ . Portanto,  $t$  contém exatamente uma aresta em  $E(P') - E(P)$ , visto que  $P'$  é maximal em  $G'$ . Logo,  $t$  pertence a  $\mathcal{L}$  e é, pois, coberto por  $E(P'_1)$ .  $\square$

### Resultado principal

Utilizando os Lemas 4.6.1, 4.6.2, 4.6.3 e 4.6.4, Haxell provou o seguinte teorema.

**Teorema 4.6.1** (Haxell, 1999). *Se  $G$  é um grafo, então*

$$\tau(G) \leq \frac{66}{23}\nu(G).$$

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo. Seja  $C$  uma cobertura mínima de  $G$ . Podemos escrever a fração  $\frac{23}{5}|C|$  como segue,

$$\frac{23}{5}|C| = |C| + \frac{2}{5}|C| + \frac{12}{5}|C| + \frac{5}{5}|C|. \quad (4.39)$$

Utilizando o Lema 4.6.1 em (4.39),

$$\frac{23}{5}|C| \leq ((3 - \gamma)\nu(G)) + \frac{2}{5}|C| + \frac{12}{5}|C| + \frac{5}{5}|C|. \quad (4.40)$$

Agora, fazendo uso do Lema 4.6.2 em (4.40) e simplificando, temos

$$\begin{aligned} \frac{23}{5}|C| &\leq ((3 - \gamma)\nu(G)) + [(\frac{3}{5} + \gamma + \frac{4}{5}\beta)\nu(G)] + \frac{12}{5}|C| + \frac{5}{5}|C| \\ \frac{23}{5}|C| &\leq (3 + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\beta)\nu(G) + \frac{12}{5}|C| + \frac{5}{5}|C|. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Nesse ponto, utilizando o Lema 4.6.3 em (4.41),

$$\begin{aligned} \frac{23}{5}|C| &\leq (3 + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\beta)\nu(G) + [(\frac{36}{5} - \frac{12}{5}\delta)\nu(G)] + \frac{5}{5}|C| \\ \frac{23}{5}|C| &\leq (\frac{54}{5} + \frac{4}{5}\beta - \frac{12}{5}\delta)\nu(G) + \frac{5}{5}|C| \end{aligned} \quad (4.42)$$

Agora, utilizando o Lema 4.6.4 em (4.42),

$$\frac{23}{5}|C| \leq (\frac{54}{5} + \frac{4}{5}\beta - \frac{12}{5}\delta)\nu(G) + (\frac{12}{5} + \frac{12}{5}\delta - \frac{4}{5}\beta)\nu(G). \quad (4.43)$$

Finalmente, simplificando (4.43), concluímos que

$$\tau(G) \leq \frac{66}{23}\nu(G).$$

□

Este engenhoso resultado devido a Haxell é o melhor e único resultado conhecido para o caso geral da conjectura de Tuza.

## 4.7 Prova para grafos com grau médio máximo menor que sete

Nesta seção vamos mostrar os resultados obtidos por Puleo em 2013 [21].

Definimos o *grau médio máximo* de um grafo  $G$ , denotado por  $\text{Mad}(G)$ , como

$$\text{Mad}(G) = \max \left\{ \frac{2|E(H)|}{|V(H)|} : H \subseteq G \right\}.$$

A seguir, apresentamos uma importante definição desta seção, a definição de conjunto removível.

**Definição 4.7.1** (Conjunto removível). Dado um grafo  $G$ , dizemos que um conjunto  $V_0 \subseteq V(G)$  não vazio é *removível*, se existem um empacotamento  $S$  e um conjunto de arestas  $X$ , tal que as seguintes condições são atendidas:

- (a)  $|X| \leq 2|S|$ ;
- (b)  $G - X$  não contém nenhum triângulo com algum vértice em  $V_0$ ;
- (c)  $X$  contém todas as arestas  $e = uv \in E(S)$ , tal que  $u, v \notin V_0$ .

Dizemos também que  $V_0$  é removível usando  $S$  e  $X$ . Desse modo, para um grafo  $G$ , a conjectura de Tuza é válida se, e somente se,  $V(G)$  é removível.

Um grafo  $G$  é *robusto*, se para todo  $v \in V(G)$  tem-se  $d(v) \geq 5$ . Desse modo, é fácil ver que se  $G$  é robusto, então  $\delta(G) \geq 5$ . Como nos casos anteriores, necessitamos de alguns lemas auxiliares para provar o resultado principal desta seção. A seguir, apresentamos dois lemas, os quais não apresentamos uma demonstração aqui. Contudo, tais provas podem ser vista em Puleo [21].

**Lema 4.7.1.** *Se  $G$  é um grafo robusto com  $\text{Mad}(G) < 7$ , então  $G$  tem um conjunto removível.* □

**Lema 4.7.2.** *Se o grafo  $G$  é um contra-exemplo mínimo para a conjectura de Tuza, então  $G$  é robusto.* □

Para provar o resultado principal desta seção é preciso de mais um lema, o qual enunciamos e apresentamos uma demonstração a seguir.

**Lema 4.7.3.** *Sejam  $G$  um grafo e  $V_0$  um conjunto removível usando  $S \subseteq T(G)$  e  $X \subset E(G)$ . Seja  $G' = (G - X) - V_0$ . Se  $\tau(G') \leq 2\nu(G')$ , então*

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

*Demonstração.* Sejam  $P'$  um empacotamento máximo e  $C'$  uma cobertura mínima de  $G'$ . Por hipótese,  $|C'| \leq 2|P'|$ . Sejam  $C = C' \cup X$  e  $P = P' \cup S$ . Mostraremos que  $P$  é um empacotamento em  $G$  e que  $C$  é uma cobertura em  $G$  de tamanho no máximo  $2|P|$ . Vamos inicialmente mostrar que  $P$  é um empacotamento.

Todos os triângulos em  $P'$  são aresta-disjuntos, uma vez que  $P'$  é um empacotamento. De maneira análoga, os triângulos de  $S$  são aresta-disjuntos. Desse modo, basta mostrar que nenhuma aresta de algum triângulo em  $P'$  é também uma aresta de algum triângulo em  $S$ , ou seja, basta mostrar que  $E(P') \cap E(S) = \emptyset$ . Sabemos que toda aresta de  $E(P')$  pertence a  $E((G - X) - V_0)$ , por construção de  $G'$ . Por outro lado, decorre da Definição 4.7.1(b-c) que toda aresta de  $E(S)$  é incidente em  $V_0$  ou está contida em  $X$ . Portanto, nenhuma aresta de  $E(S)$  está contida em  $E(G')$ . Logo,  $P$  é um empacotamento em  $G$ .

Agora, vamos mostrar que  $C$  é uma cobertura de tamanho no máximo  $2|P|$ . Vamos inicialmente estimar  $|C|$ . Temos que  $|P| = |P'| + |S|$  e  $|C| = |C'| + |X|$ . Pela Definição 4.7.1(a),  $|X| \leq 2|S|$ . Ademais, temos que  $|C'| \leq 2|P'|$ , por hipótese. Logo,  $|C| \leq 2|P|$ . Resta-nos mostrar que  $C$  é uma cobertura para  $G$ . Desse modo, seja  $t$  um triângulo em  $T(G)$ . Se  $t \in T(G')$ , então  $t$  é coberto por  $C$ , uma vez que ele é coberto por  $C'$ . Suponha, pois, que  $C' \cap E(t) = \emptyset$ . Desse modo, todas as arestas de  $t$  estão em  $X$  ou são incidentes em  $V_0$ . Portanto, pela Definição 4.7.1(b-c),  $t$  é coberto por  $X$ . Logo,  $C$  é uma cobertura em  $G$ .  $\square$

### Resultado principal

Com os Lemas 4.7.3, 4.7.2 e 4.7.1, Puleo demonstrou o seguinte teorema.

**Teorema 4.7.1** (Puleo, 2013). *Se  $G$  é um grafo com  $\text{Mad}(G) < 7$ , então*

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

*Demonstração.* Prova por contradição.

Seja  $G$  um grafo com  $\text{Mad}(G) < 7$ . Suponha que  $G$  é um contra-exemplo mínimo para a conjectura de Tuza, ou seja,  $G$  é menor grafo, tal que  $\tau(G) > 2\nu(G)$ . Pelo Lema 4.7.2, temos que  $G$  é robusto e pelo Lema 4.7.1, temos que  $G$  tem um conjunto removível  $V_0$  usando  $S \subseteq T(G)$  e  $X \subseteq E(G)$ . Seja  $G' = (G - X) - V_0$ . Como  $\text{Mad}(G) < 7$ , temos que  $\text{Mad}(G') < 7$ , por definição de  $\text{Mad}$ . Temos ainda que  $\tau(G') \leq 2\nu(G')$ , uma vez que  $G$  é um contra-exemplo mínimo para conjectura de Tuza. Portanto, pelo Lema 4.7.3, concluímos que  $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ . Contudo, estamos supondo que  $\tau(G) > 2\nu(G)$ , temos, pois, uma contradição. Logo,

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

$\square$

### 4.7.1 Grafos sem subdivisões do $K_5$

A partir do Teorema 4.7.1, Puleo demonstrou que a conjectura de Tuza é válida para grafos sem subdivisões do  $K_5$  [21]. Para esta prova, ele utilizou um teorema devido a W. Mader. Uma prova do Teorema 4.7.2 pode ser encontrada em Mader [19].

**Teorema 4.7.2** (Mader, 1998). *Se  $G$  é um grafo sem subdivisões do  $K_5$  com  $|V(G)| \geq 3$ , então*

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

□

Com os Teoremas 4.7.1 e 4.7.2, Puleo demonstrou o seguinte teorema.

**Teorema 4.7.3** (Puleo, 2013). *Se  $G$  é um grafo sem subdivisões do  $K_5$ , então*

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo que não possui subdivisões do  $K_5$ . Pelo Teorema 4.7.2, temos que  $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$ . Uma vez que todo subgrafo  $G'$  de  $G$  não possui subdivisões do  $K_5$ , temos que  $|E(G')| \leq 3|V(G')| - 6$ . Sabemos que

$$\text{Mad}(G) = \max \left\{ \frac{2|E(G')|}{|V(G')|} : G' \subseteq G \right\}.$$

Como para todo  $G'$ , vale que  $|E(G')| \leq 3|V(G')| - 6$ , temos que

$$\text{Mad}(G) \leq \frac{2(3|V(G)| - 6)}{|V(G)|}$$

$$\text{Mad}(G) \leq 6 - \frac{12}{|V(G)|}$$

$$\text{Mad}(G) < 6.$$

Logo, pelo Teorema 4.7.1, concluímos que

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

□

### 4.7.2 Grafos sem menor do $K_{3,3}$

Seja  $G_1$  e  $G_2$  dois grafos. Sejam  $u, v$  dois vértices, tais que  $u \in V(G_1)$  e  $v \in V(G_2)$ . Sejam  $z$  um novo vértice e  $G$  o grafo obtido de  $G_1$  e  $G_2$ , de modo que  $V(G) = (V(G_1) - u) \cup (V(G_2) - v) \cup z$  e  $E(G) = (E(G_1) - E_u) \cup (E(G_2) - E_v) \cup E_z$ , onde  $E_u, E_v, E_z$  são todas as arestas incidentes em  $u, v$  e  $z$ , respectivamente. Dizemos que  $G$  foi obtido pela *identificação* de  $u$  e  $v$ . O grafo da Figura 4.19b foi obtido pela identificação dos vértices  $u, v$  dos grafos das Figuras 4.19a. A operação de identificação também pode ocorrer em um mesmo grafo com um par de vértices não adjacentes, ou seja, é possível identificar dois vértices  $x, y \in V(G)$ , tais que  $xy \notin E(G)$ . Note que esta operação pode gerar arestas múltiplas em  $G$ .

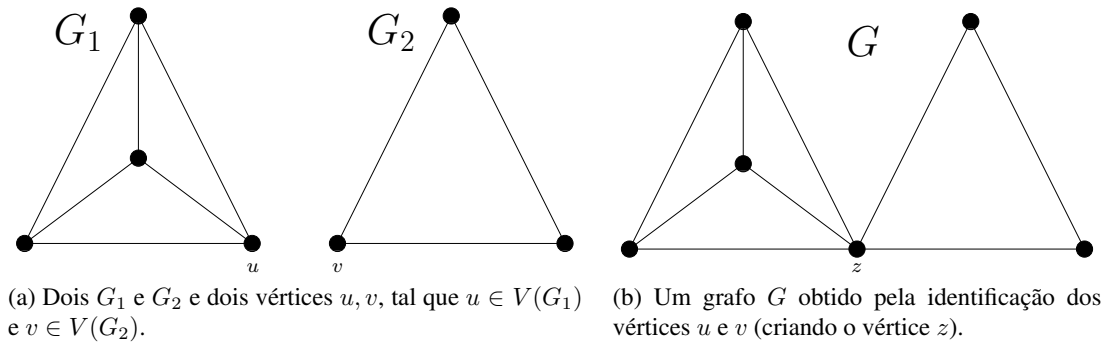


Figura 4.19: Exemplo da aplicação da operação de identificação de vértices.

Sejam  $G$  um grafo e  $e$  uma aresta de  $G$ . A operação de remover  $e$  e identificar os seus extremos é chamada de *contração* de  $e$ . Denotamos a contração de  $e$  em  $G$  por  $G/e$  (Figura 4.20).

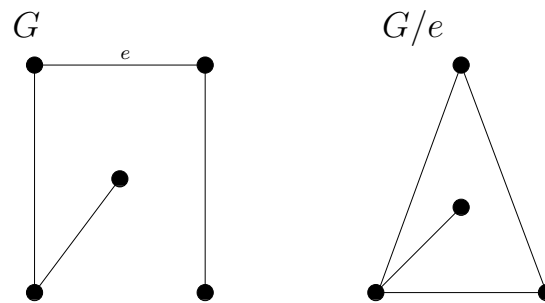


Figura 4.20: Exemplo de contração de aresta.

Um *minor* de um grafo  $G$  é qualquer grafo  $G'$  obtido a partir de  $G$  por uma sequência de zero ou mais remoções de vértices, arestas ou contrações de arestas.

Sejam  $G_1$  e  $G_2$  dois grafos, de modo que  $G_1 \cap G_2$  é um grafo completo com  $k$  vértices (uma clique de tamanho  $k$ ). O grafo obtido da união de  $G_1$  e  $G_2$ , removendo possivelmente algumas



arestas de  $G_1 \cap G_2$ , é chamado de uma  $k$ -soma de  $G_1$  e  $G_2$ . Dito de outra forma, uma  $k$ -soma de  $G_1$  e  $G_2$  é qualquer grafo obtido pela identificação dos vertices de uma clique de tamanho  $k$  em  $G_1$  com uma clique de tamanho  $k$  em  $G_2$ , removendo possivelmente algumas arestas da clique de tamanho  $k$  gerada. Em particular, uma 0-soma é uma união disjunta de  $G_1$  e  $G_2$ . Ademais, para qualquer  $k$ -soma  $G$  de  $G_1$  e  $G_2$ , temos que

$$|V(G)| = |V(G_1)| + |V(G_2)| - k. \quad (4.44)$$

A partir do Teorema 4.7.1, Puleo demonstrou que a conjectura de Tuza é válida para grafos sem minor do  $K_{3,3}$  [21]. Para esta prova, Puleo utilizou uma decorrência do teorema devido a Wagner. Uma prova do Teorema 4.7.4 pode ser encontrada em Wagner [28].

**Teorema 4.7.4** (Wagner, 1937). *Qualquer grafo sem minor do  $K_{3,3}$  pode ser obtido por uma sequência de 0-, 1-, ou 2-somas começando por grafos planares e/ou isoformos ao  $K_5$ .*  $\square$

**Corolário 4.7.1.** *Se  $G$  é um grafo sem minor do  $K_{3,3}$ , então*

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 5.$$

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo sem minor do  $K_{3,3}$ . Se  $G$  é planar, então pelo Corolário 2.1.2, o resultado segue. Se  $G = K_5$ , então o resultado segue. Desse modo, é suficiente mostrar que se  $G_1$  e  $G_2$  são grafos que satisfazem o limite  $|E(G_i)| \leq 3|V(G_i)| - 5$  ( $i \in \{1, 2\}$ ), então qualquer 0-, 1-, ou 2-soma de  $G_1$  e  $G_2$  também o satisfaz. Assim, seja  $G'$  uma  $k$ -soma de  $G_1$  e  $G_2$ , para  $k \in \{0, 1, 2\}$ . Então, utilizando (4.44), temos que

$$\begin{aligned} |E(G')| &\leq |E(G_1)| + |E(G_2)| - \binom{k}{2} \\ |E(G')| &\leq (3|V(G_1)| - 5) + (3|V(G_2)| - 5) - \binom{k}{2} \\ |E(G')| &\leq 3|V(G_1)| + 3|V(G_2)| - 10 - \binom{k}{2} \\ |E(G')| &\leq 3|V(G')| + 3k - 10 - \binom{k}{2} \\ |E(G')| &\leq 3|V(G')| - 5 - (5 + \binom{k}{2} - 3k) \\ |E(G')| &\leq 3|V(G')| - 5. \end{aligned}$$

$\square$

Com o Teorema 4.7.1 e o Corolário 4.7.1, Puleo provou o seguinte teorema.

**Teorema 4.7.5** (Puleo, 2013). *Se  $G$  é um grafo sem minor do  $K_{3,3}$ , então*

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo sem minor do  $K_{3,3}$ . Uma vez que todo subgrafo  $G'$  de  $G$  não possui minor do  $K_{3,3}$ , pelo Corolário 4.7.1 temos que  $|E(G')| \leq 3|V(G')| - 5$ . Sabemos que

$$\text{Mad}(G) = \max \left\{ \frac{2|E(G')|}{|V(G')|} : G' \subseteq G \right\}.$$

Como para todo  $G'$ ,  $|E(G')| \leq 3|V(G')| - 5$ , temos que

$$\text{Mad}(G) \leq \frac{2(3|V(G)| - 5)}{|V(G)|}$$

$$\text{Mad}(G) \leq 6 - \frac{10}{|V(G)|}$$

$$\text{Mad}(G) < 6.$$

Logo, pelo Teorema 4.7.1, concluímos que

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

□

# Capítulo 5

## Nossas Contribuições

Apresentamos, neste capítulo, nossas contribuições para o estudo da conjectura de Tuza.

### 5.1 Conjectura que implica a conjectura de Tuza

Apresentamos, nesta seção, uma conjectura que se verificada implica na veracidade da conjectura de Tuza. Uma curiosidade é que a conjectura proposta aborda apenas um dos parâmetros da Conjectura 3.1.2, o tamanho do empacotamento máximo.

**Conjectura 5.1.1.** *Se  $G$  é um grafo, então existe um conjunto de arestas  $C$  de cardinalidade no máximo dois, tal que*

$$\nu(G - C) \leq \nu(G) - 1.$$

Embora aparente ser mais simples que a conjectura de Tuza, a Conjectura 5.1.1 tem se mostrado bastante difícil de provar. Isto não é surpreendente, uma vez que demonstramos que a Conjectura 5.1.1 implica na veracidade da conjectura de Tuza.

**Teorema 5.1.1.** *Seja  $G$  um grafo. Se a Conjectura 5.1.1 é válida, então*

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

*Demonstração.* Prova por indução no número de arestas.

Seja  $G$  um grafo. Vamos mostrar a validade da conjectura de Tuza utilizando indução no número de arestas. Desse modo, se  $T(G) = \emptyset$ , então tanto o empacotamento máximo quanto a cobertura mínima tem cardinalidade zero. Logo,

$$0 = \tau(G) \leq 2\nu(G) = 0.$$

Podemos, pois, supor que  $T(G) \neq \emptyset$ . Por hipótese, temos que a Conjectura 5.1.1 é válida, então existe um conjunto de arestas  $C$  com tamanho no máximo dois, tal que  $\nu(G - C) \leq \nu(G) - 1$ . Seja  $G' = G - C$ . Portanto,

$$\nu(G') \leq \nu(G) - 1. \quad (5.1)$$

Como  $|E(G')| < |E(G)|$ , por hipótese de indução em  $G'$ , obtemos

$$\tau(G') \leq 2\nu(G'). \quad (5.2)$$

Pela Conjectura 5.1.1, temos que  $|C| = k$ , com  $k \in \{1, 2\}$ . Seja  $C'$  uma cobertura mínima de  $G'$ . Em  $G$ , o conjunto de arestas  $C'' = C' \cup C$  é uma cobertura, uma vez que todos os triângulos de  $G'$  são cobertos por  $C'$  e todos os triângulos que não estão em  $G'$ , utilizam as arestas de  $C$ , por construção de  $G'$ . Logo,

$$\tau(G) \leq \tau(G') + |C|. \quad (5.3)$$

Utilizando (5.1) e (5.2), temos que

$$\begin{aligned} \tau(G') &\leq 2\nu(G') \\ \tau(G') &\leq 2\nu(G) - 2 \\ \tau(G') + 2 &\leq 2\nu(G). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Uma vez que  $|C|$  é no máximo 2, utilizando (5.3) e (5.4), concluímos que

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

□

A Conjectura 5.1.1 pode ser útil aos pesquisadores, uma vez que fornece aos mesmos uma maneira de tentar resolver a Conjectura 3.1.2 sob uma nova perspectiva.

## 5.2 Conexidade de um contra-exemplo mínimo

Mostramos, nesta seção, que se  $G$  é um contra-exemplo mínimo para a conjectura de Tuza, então  $G$  é 4-conexo.

Relembrando ao leitor alguns conceitos: sejam  $u, v$  dois vértices de  $V(G)$ . Dois caminhos  $P_{uv}$  e  $Q_{uv}$ , ambos iniciando em  $u$  e terminando em  $v$ , são internamente disjuntos se  $P_{uv} \cap Q_{uv} = \{u, v\}$ . Denotamos o número máximo de caminhos internamente disjuntos entre  $u$  e

$v$  por  $p(u, v)$ . Dizemos também que  $G$  é  $k$ -conexo se para todo par  $u, v \in V(G)$ , temos que  $p(u, v) \geq k$ .

Seja  $G$  um grafo e  $u, v$  dois vértices de  $G$ . Definimos um  $uv$ -corte (ou simplesmente *corte*) como um conjunto  $S \subset V(G)$ , tal que  $u$  e  $v$  pertencem a componentes distintas de  $G - S$ . Dizemos também que  $S$  *separa*  $u$  e  $v$ . Denotamos o tamanho mínimo de um  $uv$ -corte por  $c(u, v)$ .

Em 1927, Menger [20] demonstrou um importante resultado entre o número máximo de caminhos internamente disjuntos entre dois vértices  $u$  e  $v$  e o tamanho mínimo de um  $uv$ -corte. Menger verificou o seguinte teorema. Não apresentamos uma demonstração do teorema de Menger. Contudo, indicamos Bondy e Murty [2].

**Teorema 5.2.1** (Menger, 1927). *Seja  $G$  um grafo e  $u, v$  dois vértices não adjacentes. Então,*

$$p(u, v) = c(u, v).$$

□

Antes de provar o resultado principal desta seção, precisamos demonstrar o seguinte lema.

**Lema 5.2.1.** *Sejam  $G_1$  e  $G_2$  dois grafos, tais que  $V(G_1) \cap V(G_2) = \{u, v, z\}$ . Se a conjectura de Tuza é válida para  $G_1$  e  $G_2$ , então no grafo  $G = G_1 \cup G_2$  temos que*

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

*Demonstração.* Sejam  $G_1$  e  $G_2$  dois grafos, tais que  $V(G_1) \cap V(G_2) = \{u, v, z\}$ . Suponha a conjectura de Tuza verdadeira para  $G_1$  e  $G_2$ . Seja  $G = G_1 \cup G_2$ . Assim, temos quatro casos a tratar:

Caso (1). Os vértices  $\{u, v, z\}$  formam um conjunto independente em  $G$ , conforme ilustrado na Figura 5.1.

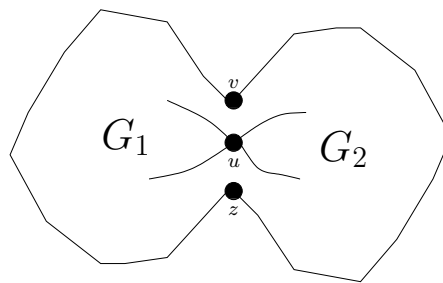


Figura 5.1: Os vértices  $\{u, v, z\}$  formam um conjunto independente.

Nesse caso, como  $E(G_1)$  e  $E(G_2)$  são disjuntos, temos que

$$\tau(G) = \tau(G_1) + \tau(G_2) \quad (5.5)$$

$$\nu(G) = \nu(G_1) + \nu(G_2). \quad (5.6)$$

Uma vez que a Conjectura 3.1.2 vale para  $G_1$  e  $G_2$ ,

$$\begin{aligned} \tau(G_1) &\leq 2\nu(G_1) \\ \tau(G_2) &\leq 2\nu(G_2) \\ \tau(G_1) + \tau(G_2) &\leq 2\nu(G_1) + 2\nu(G_2). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Por fim, utilizando (5.5), (5.6) e (5.7), concluímos que

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

Caso (2). Existe em  $G$  exatamente uma aresta com ambos os extremos em  $\{u, v, z\}$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $e = uv$ , conforme ilustrado na Figura 5.2.

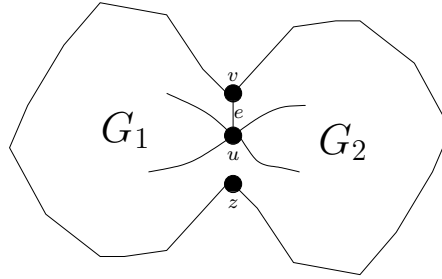


Figura 5.2: Existe exatamente uma aresta com ambos os extremos em  $\{u, v, z\}$ .

Sejam  $G'_1 = G_1 - e$  e  $G'_2 = G_2 - e$ . Sejam  $C_1$  e  $C_2$  duas coberturas mínimas em  $G'_1$  e  $G'_2$ , respectivamente. Então, o conjunto  $C = C_1 \cup C_2 \cup e$  é uma cobertura em  $G$ , uma vez que os únicos triângulos que eventualmente não estão cobertos por  $C_1$  e  $C_2$  em  $G$  são os incidentes em  $e$ . Desse modo,

$$\tau(G) \leq \tau(G'_1) + \tau(G'_2) + 1. \quad (5.8)$$

Sejam  $P_1$  e  $P_2$  dois empacotamentos máximos em  $G'_1$  e  $G'_2$ , respectivamente. A desigualdade (5.9) segue do fato que o conjunto  $P = P_1 \cup P_2$  é um empacotamento em  $G$  com tamanho  $\nu(G'_1) + \nu(G'_2)$ . A desigualdade (5.10) decorre do fato que  $e$  pode aumentar no máximo em uma unidade o empacotamento em  $G$ .

$$\nu(G) \geq \nu(G'_1) + \nu(G'_2) \quad (5.9)$$

$$\nu(G) \leq \nu(G'_1) + \nu(G'_2) + 1. \quad (5.10)$$

Então, temos que  $\nu(G) = \nu(G'_1) + \nu(G'_2) + k$ , sendo  $k \in \{0, 1\}$ . Por hipótese, sabemos que a Conjectura 3.1.2 vale para  $G'_1$  e  $G'_2$ . Então,

$$\begin{aligned} \tau(G'_1) &\leq 2\nu(G'_1) \\ \tau(G'_2) &\leq 2\nu(G'_2) \\ \tau(G'_1) + \tau(G'_2) &\leq 2\nu(G'_1) + 2\nu(G'_2) \\ \tau(G'_1) + \tau(G'_2) + 2k &\leq 2\nu(G'_1) + 2\nu(G'_2) + 2k \\ \tau(G'_1) + \tau(G'_2) + 2k &\leq 2(\nu(G'_1) + \nu(G'_2) + k) \\ \tau(G'_1) + \tau(G'_2) + 2k &\leq 2\nu(G). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Combinando (5.8) e (5.11), obtemos o resultado para  $k = 1$ . Portanto, resta-nos tratar o caso  $k = 0$ , ou seja,  $\nu(G) = \nu(G'_1) + \nu(G'_2)$ . Sejam  $G_1 = G'_1 + e$  e  $G_2 = G'_2 + e$ . Temos que  $\nu(G_i) = \nu(G'_i)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Do contrário, se  $\nu(G_i) = \nu(G'_i) + 1$ , para algum  $i$ , então podemos construir um empacotamento de tamanho  $\nu(G'_1) + \nu(G'_2) + 1$ , porém estamos supondo que  $\nu(G) = \nu(G'_1) + \nu(G'_2)$ . Logo, temos que

$$\nu(G_1) = \nu(G'_1) \quad (5.12)$$

$$\nu(G_2) = \nu(G'_2). \quad (5.13)$$

Por outro lado, sejam  $C_1^*$  e  $C_2^*$  duas coberturas mínimas em  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente. Então, o conjunto  $C = C_1^* \cup C_2^*$  é uma cobertura em  $G$ , uma vez que todos os triângulos são cobertos, inclusive os incidentes em  $e$ . Desse modo,

$$\tau(G) \leq \tau(G_1) + \tau(G_2). \quad (5.14)$$

Por hipótese, temos que a Conjectura 3.1.2 vale para  $G_1$  e  $G_2$ , então utilizando (5.12), (5.13) e (5.14),

$$\tau(G_1) \leq 2\nu(G_1)$$

$$\tau(G_2) \leq 2\nu(G_2)$$

$$\begin{aligned}
\tau(G_1) + \tau(G_2) &\leq 2\nu(G_1) + 2\nu(G_2) \\
\tau(G) &\leq \tau(G_1) + \tau(G_2) \leq 2\nu(G_1) + 2\nu(G_2) \\
\tau(G) &\leq 2(\nu(G_1) + \nu(G_2)) \\
\tau(G) &\leq 2\nu(G).
\end{aligned}$$

Caso (3). Existem em  $G$  exatamente duas arestas com ambos os extremos em  $\{u, v, z\}$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $e = uv$  e  $f = uz$ , conforme ilustrado na Figura 5.3.

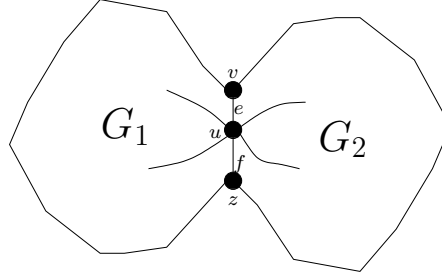


Figura 5.3: Existem exatamente duas arestas com ambos os extremos em  $\{u, v, z\}$ .

Sejam  $G'_1 = G_1 - \{e, f\}$  e  $G'_2 = G_2 - \{e, f\}$ . Sejam  $C_1$  e  $C_2$  duas coberturas mínimas em  $G'_1$  e  $G'_2$ , respectivamente. Então, o conjunto  $C = C_1 \cup C_2 \cup \{e, f\}$  é uma cobertura em  $G$ , uma vez que os únicos triângulos não cobertos por  $C_1$  e  $C_2$  em  $G$  são os incidentes em  $e$  e  $f$ . Desse modo,

$$\tau(G) \leq \tau(G'_1) + \tau(G'_2) + 2. \quad (5.15)$$

Sejam  $P_1$  e  $P_2$  dois empacotamentos máximos em  $G'_1$  e  $G'_2$ , respectivamente. A desigualdade (5.16) segue do fato que o conjunto  $P = P_1 \cup P_2$  é um empacotamento em  $G$  com tamanho  $\nu(G'_1) + \nu(G'_2)$ . A desigualdade (5.17) decorre do fato que  $e, f$  podem aumentar no máximo em duas unidades o empacotamento em  $G$ , que é o caso onde  $e$  e  $f$  pertencem a diferentes triângulos aresta-disjuntos em  $G$ .

$$\nu(G) \geq \nu(G'_1) + \nu(G'_2) \quad (5.16)$$

$$\nu(G) \leq \nu(G'_1) + \nu(G'_2) + 2. \quad (5.17)$$

Então, temos que  $\nu(G) = \nu(G'_1) + \nu(G'_2) + k$ , sendo  $k \in \{0, 1, 2\}$ . Por hipótese, sabemos que a Conjectura 3.1.2 vale para  $G'_1$  e  $G'_2$ . Então, utilizando os mesmos cálculos realizados no Caso (2), temos

$$\tau(G'_1) + \tau(G'_2) + 2k \leq 2\nu(G). \quad (5.18)$$



Combinando (5.15) e (5.18), obtemos o resultado para  $k \in \{1, 2\}$ . Portanto, resta-nos tratar o caso  $k = 0$ , ou seja,  $\nu(G) = \nu(G'_1) + \nu(G'_2)$ . Temos  $G_1 = G'_1 + \{e, f\}$  e  $G_2 = G'_2 + \{e, f\}$ . Temos ainda que  $\nu(G_i) = \nu(G'_i)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Do contrário, se  $\nu(G_i) = \nu(G'_i) + 1$ , para algum  $i$ , então podemos construir um empacotamento de tamanho  $\nu(G'_1) + \nu(G'_2) + 1$ , porém estamos supondo que  $\nu(G) = \nu(G'_1) + \nu(G'_2)$ . Portanto, recorremos aos mesmos cálculos efetuados quando  $k = 0$  no Caso (2). Logo,

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

Caso (4). Os vértices  $\{u, v, z\}$  induzem um triângulo  $t$  em  $G$  com as arestas  $\{e, f, g\}$ , conforme ilustrado na Figura 5.4.

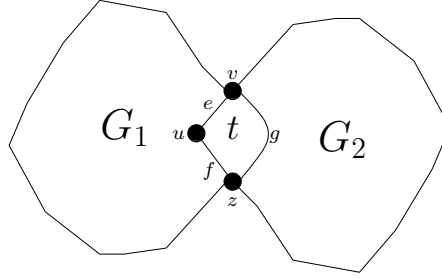


Figura 5.4: Os vértices  $\{u, v, z\}$  induzem um triângulo.

Sejam  $G'_1 = G_1 - \{e, f, g\}$  e  $G'_2 = G_2 - \{e, f, g\}$ . Sejam  $C_1$  e  $C_2$  duas coberturas mínimas em  $G'_1$  e  $G'_2$ , respectivamente. Então, o conjunto  $C = C_1 \cup C_2 \cup \{e, f, g\}$  é uma cobertura em  $G$ , uma vez que os únicos triângulos não cobertos por  $C_1$  e  $C_2$  em  $G$  são os incidentes em  $e, f$  e  $g$ . Desse modo,

$$\tau(G) \leq \tau(G'_1) + \tau(G'_2) + 3. \quad (5.19)$$

Sejam  $P_1$  e  $P_2$  dois empacotamentos máximos em  $G'_1$  e  $G'_2$ , respectivamente. A desigualdade (5.20) segue do fato que o conjunto  $P = P_1 \cup P_2 \cup t$  é um empacotamento em  $G$  com tamanho  $\nu(G'_1) + \nu(G'_2) + 1$ . A desigualdade (5.21) decorre do fato que  $e, f, g$  podem aumentar no máximo em três unidades o empacotamento em  $G$ , que é o caso onde as arestas de  $t$  pertencem a diferentes triângulos de um empacotamento máximo em  $G$ .

$$\nu(G) \geq \nu(G'_1) + \nu(G'_2) + 1 \quad (5.20)$$

$$\nu(G) \leq \nu(G'_1) + \nu(G'_2) + 3. \quad (5.21)$$

Então, temos que  $\nu(G) = \nu(G'_1) + \nu(G'_2) + k$ , sendo  $k \in \{1, 2, 3\}$ . Por hipótese, sabemos que a Conjectura 3.1.2 vale para  $G'_1$  e  $G'_2$ . Então, efetuando cálculos similares como ocorrido no Caso (2), temos

$$\tau(G'_1) + \tau(G'_2) + 2k \leq 2\nu(G). \quad (5.22)$$

Combinando (5.19) e (5.22), obtemos o resultado para  $k \in \{2, 3\}$ . Portanto, resta-nos tratar o caso  $k = 1$ , ou seja,  $\nu(G) = \nu(G'_1) + \nu(G'_2) + 1$ .

Se para toda aresta  $e'$  de  $t$  vale  $\nu(G'_i + e') = \nu(G'_i) + 1$  ( $i \in \{1, 2\}$ ), então podemos construir um empacotamento de tamanho  $\nu(G'_1) + \nu(G'_2) + 2$ , porém estamos supondo que  $\nu(G) = \nu(G'_1) + \nu(G'_2) + 1$ . Então, existe pelo menos uma aresta  $e'$  em  $t$ , tal que  $\nu(G) = \nu(G'_1 + e') + \nu(G'_2 + e') + 1$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $e' = e$ . Sejam  $G_1^* = G'_1 + e$  e  $G_2^* = G'_2 + e$ . Desse modo,

$$\nu(G) = \nu(G_1^*) + \nu(G_2^*) + 1. \quad (5.23)$$

Por outro lado, sejam  $C_1^*$  e  $C_2^*$  duas coberturas mínimas em  $G_1^*$  e  $G_2^*$ , respectivamente. Então, o conjunto  $C = C_1^* \cup C_2^* \cup \{f, g\}$  é uma cobertura em  $G$ , uma vez que os únicos triângulos em  $G$  não cobertos por  $C_1^*$  e  $C_2^*$  são os incidentes em  $f$  e  $g$ . Desse modo,

$$\tau(G) \leq \tau(G_1^*) + \tau(G_2^*) + 2. \quad (5.24)$$

Por hipótese, temos que a conjectura de Tuza vale para  $G_1^*$  e  $G_2^*$ , então utilizando (5.23) e (5.24), concluímos que

$$\begin{aligned} \tau(G_1^*) &\leq 2\nu(G_1^*) \\ \tau(G_2^*) &\leq 2\nu(G_2^*) \\ \tau(G_1^*) + \tau(G_2^*) &\leq 2\nu(G_1^*) + 2\nu(G_2^*) \\ \tau(G_1^*) + \tau(G_2^*) + 2 &\leq 2\nu(G_1^*) + 2\nu(G_2^*) + 2 \\ \tau(G) &\leq \tau(G_1^*) + \tau(G_2^*) + 2 \leq 2(\nu(G_1^*) + \nu(G_2^*) + 1) \\ \tau(G) &\leq 2\nu(G). \end{aligned}$$

Isto finaliza a prova. □

### Resultado principal

Com o Lema 5.2.1 e o teorema de Menger desta seção e o Lema 4.3.2 do Capítulo 4, Seção 4.3, o resultado principal desta seção pode ser demonstrado como a seguir.

**Teorema 5.2.2.** *Se  $G$  é um contra-exemplo mínimo para a conjectura de Tuza, então  $G$  é 4-conexo.*

*Demonstração.* Prova por contradição.

Seja  $G$  um contra-exemplo mínimo para a conjectura de Tuza. Se  $G$  não é 2-conexo, então ele pode ser decomposto em dois grafos  $G_1, G_2$ , tais que  $E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset$ , conforme ilustrado na Figura 4.10. Pela minimalidade de  $G$ , temos que a conjectura de Tuza vale para  $G_1$  e  $G_2$ . Desse modo, como quaisquer dois triângulos  $t_1 \in T(G_1)$  e  $t_2 \in T(G_2)$  são aresta-disjuntos, temos que  $\tau(G) = \tau(G_1) + \tau(G_2)$  e  $\nu(G) = \nu(G_1) + \nu(G_2)$ . Logo, a conjectura de Tuza é válida para  $G$ .

Suponha, pois, que  $G$  seja 2-conexo, mas não seja 3-conexo. Assim, existem pelo menos um par de vértices  $x, y \in V(G)$ , tal que  $p(x, y) = 2$ . Pelo teorema de Menger, temos que  $c(x, y) = p(x, y) = 2$ . Portanto, seja  $S = \{u, v\}$  um  $xy$ -corte de tamanho dois. Desse modo,  $G$  pode ser decomposto em dois grafos  $G_1, G_2$ , tais que  $G_1 \cap G_2 = \{u, v\}$ . Pela minimalidade de  $G$ , temos que a conjectura de Tuza vale para  $G_1$  e  $G_2$ . Logo, pelo Lema 4.3.2, temos que a conjectura de Tuza é verificada para  $G$ .

Então, podemos supor que  $G$  seja 3-conexo, mas não seja 4-conexo. Portanto, existem pelo menos um par de vértices  $x, y \in V(G)$ , tal que  $p(x, y) = 3$ . Pelo teorema de Menger, temos que  $c(x, y) = p(x, y) = 3$ . Seja  $S = \{u, v, z\}$  um  $xy$ -corte de tamanho três. Desse modo,  $G$  pode ser disposto em dois grafos  $G_1, G_2$ , tais que  $G_1 \cap G_2 = \{u, v, z\}$ . Pela minimalidade de  $G$ , temos que a conjectura de Tuza vale para  $G_1$  e  $G_2$ . Logo, pelo Lema 5.2.1, temos que a conjectura de Tuza é válida para  $G$ , temos, pois, uma contradição. Logo,  $G$  deve ser 4-conexo.  $\square$

Em 2012, Lakshmanan, Bujtás e Tuza [18] provaram que a conjectura de Tuza é válida pra grafos triângulo-4-coloríveis, os quais, segundo mostrado por Wagner [28], inclui todos os grafos sem menor do  $K_5$ . Embora este resultado já seja conhecido, com o Lema 5.2.1 e um teorema provado por Wagner [28], apresentamos uma nova prova para grafos sem menor do  $K_5$ , conforme apresentamos a seguir.

### 5.2.1 Grafo sem menor do $K_5$

Antes de provarmos a conjectura de Tuza para esta classe de grafo, necessitamos de algumas definições. Assim, o *grafo de Wagner* é um grafo bipartido obtido por Wagner em 1937 [28]. Exibimos o grafo de Wagner na Figura 5.5.

Relembramos ao leitor algumas definições. Uma  $k$ -soma de dois grafos  $G_1$  e  $G_2$  é o grafo obtido pela união de  $G_1$  e  $G_2$ , removendo possivelmente algumas arestas de  $E(G_1) \cap E(G_2)$ , sendo  $G_1 \cap G_2$  um grafo completo com  $k$  vértices (uma clique de tamanho  $k$ ).

Sejam  $G$  um grafo e  $e$  uma aresta de  $E(G)$ . A operação de remover  $e$  e identificar os seus extremos é chamada de contração de  $e$ . Denotamos a contração de  $e$  em  $G$  por  $G/e$ . Um menor de um grafo  $G$  é qualquer grafo  $G'$  obtido a partir de  $G$  por uma sequência de zero ou mais remoções de vértices, arestas ou contrações de arestas.

Em 1937, Wagner provou o seguinte teorema. Não apresentamos uma prova do Teorema 5.2.3. Contudo, uma demonstração deste pode ser vista em Wagner [28].

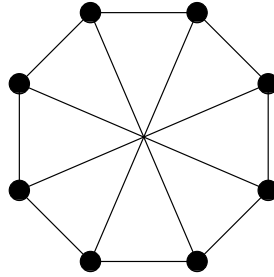


Figura 5.5: O grafo de Wagner.

**Teorema 5.2.3** (Wagner, 1937). *Todo grafo sem minor do  $K_5$  pode ser obtido por uma sequência de 0-, 1-, 2- ou 3-somas começando por grafos planares e/ou isomorfos ao grafo de Wagner.*  $\square$

### Resultado principal

Com o Lema 5.2.1 e o Teorema 5.2.3 desta seção, o Lema 4.3.2 (Capítulo 4, Seção 4.3) e o Teorema 4.2.1 (Capítulo 4, Seção 4.2), estamos aptos para provar o resultado principal desta seção.

**Teorema 5.2.4.** *Se  $G$  é um grafo sem minor do  $K_5$ , então*

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

*Demonstração.* Prova por indução no número de vértices.

Seja  $G$  um grafo sem minor do  $K_5$ . Se  $G$  é planar, então o resultado segue pelo Teorema 4.2.1. Se  $G$  é isomorfo ao grafo de Wagner, nada há a ser feito, uma vez que o grafo de Wagner é bipartido, logo não possui triângulos. Então, pelo Teorema 5.2.3,  $G$  é uma  $k$ -soma ( $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ ) de dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ . Como  $G_1$  e  $G_2$  são subgrafos de  $G$ , não possuem minor do  $K_5$ . Além disso,  $|V(G)| > |V(G_i)|$  para  $i \in \{1, 2\}$ . Portanto, podemos aplicar a hipótese de indução em  $G_1$  e  $G_2$  para garantir as condições dos Lemas 4.3.2 e 5.2.1. Desse modo, temos que analisar três casos:

Caso (1). Se  $G$  é obtido por uma 0- ou 1-soma de  $G_1$  e  $G_2$ , então as arestas  $E(G_1)$  e  $E(G_2)$  são disjuntas. Logo,

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

Caso (2). Se  $G$  é obtido por uma 2-soma de  $G_1$  e  $G_2$ , então utilizando o Lema 4.3.2, obtemos

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

Caso (3). Se  $G$  é obtido por uma 3-soma de  $G_1$  e  $G_2$ , então utilizando o Lema 5.2.1,

concluimos que

$$\tau(G) \leq 2\nu(G).$$

Isto finaliza a prova.

□



# Capítulo 6

## Conclusão

Nós estudamos nesta dissertação a conjectura de Tuza na sua versão para grafo simples e seus principais resultados. No Capítulo 2, definimos os principais conceitos de teoria dos grafos utilizados neste trabalho, nele definimos triângulo, cobertura e empacotamento de triângulos. Mostramos também duas desigualdades entre  $\tau$  e  $\nu$ : para todo grafo  $G$ , temos que

$$\nu(G) \leq \tau(G) \leq 3\nu(G).$$

No Capítulo 3, apresentamos a conjectura de Tuza e exibimos as diferentes variantes encontradas na literatura, a saber: versão para digrafos, multigrafos, hipergrafos 3-uniformes e versões fracionárias. Identificamos três abordagens que atacam a conjectura de Tuza de diferentes formas, são elas:

1. Alguns pesquisadores abordaram a conjectura de Tuza para algumas classes de grafos. Destes trabalhos, vários resultados foram obtidos, por exemplo, a conjectura de Tuza foi verificada para grafos planares, tripartidos e grafos sem minor  $K_{3,3}$ ;
2. Outros pesquisadores estudaram a Conjectura 3.1.2 em diferentes contextos, por exemplo, multigrafos e versões fracionárias;
3. Determinar uma constante  $\epsilon$  positiva em um grafo  $G$ , tal que  $\tau(G) \leq (3 - \epsilon)\nu(G)$  seja verificado. Nesta abordagem, mostramos o engenhoso resultado obtido por P. Haxell [11].

Em seguida, ainda no Capítulo 3, fizemos uma organização cronológica da conjectura de Tuza em forma de tabela. Na Tabela 3.1, nós destacamos o tipo de abordagem utilizada pelos pesquisadores, o resultado por eles obtido e o artigo publicado. No Capítulo 4, nós reproduzimos as principais provas da Conjectura 3.1.2 para grafos simples e algumas decorrências destas provas, a saber:

1. Se  $G$  é um grafo com  $n$  vértices e pelo menos  $\frac{7}{16}n^2$  arestas, então  $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ ; Decorre desse resultado:
  - (a) Para todo  $n$ ,  $\tau(K_n) \leq 2\nu(K_n)$ ;
2. Se  $G$  é um grafo planar, então  $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ ;
3. Se  $G$  é um grafo sem subdivisões do  $K_{3,3}$ , então  $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ ;
4. Seja  $G$  um grafo cordal.
  - (i) Se  $G$  não contém o  $K_4$  como subgrafo, então  $\tau(G) = \nu(G)$ ;
  - (ii) Se  $G$  não contém o  $K_5$  como subgrafo, então  $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ ;
5. Se  $G$  é um grafo tripartido, então  $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ ;
6. Se  $G$  é um grafo, então  $\tau(G) \leq \frac{66}{23}\nu(G)$ ;
7. Se  $G$  é um grafo com  $Mad(G) < 7$ , então  $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ ; Decorre desse resultado:
  - (a) Se  $G$  é um grafo sem subdivisões do  $K_5$ , então  $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ ;
  - (b) Se  $G$  é um grafo sem minor do  $K_{3,3}$ , então  $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ .

No Capítulo 5, nós apresentamos a Conjectura 5.1.1 que se verificada, implica na veracidade da conjectura de Tuza. Demonstramos ainda que se  $G$  é um contra-exemplo mínimo para conjectura de Tuza, então  $G$  é 4-conexo. Outrossim, deduzimos desse resultado que a conjectura de Tuza é válida para grafos sem minor do  $K_5$ .

## 6.1 Trabalhos futuros

A seguir sugerimos alguns trabalhos futuros. A principal sugestão que deixamos aos leitores é, se possível, provar ou exibir um contra-exemplo para a conjectura de Tuza. Outras opções um pouco mais modestas são:

1. Reunir um maior conjunto de provas conhecidas da conjectura de Tuza, não apenas a versão aplicada a grafos simples, mas todos os resultados conhecidos em todas as versões atualmente disponíveis na literatura. Tal trabalho tem por finalidade facilitar o processo de pesquisa dos resultados obtidos ao longo de vários artigos, assim como unificar a notação utilizada pelos diversos pesquisadores.
2. Provar, ou refutar, que a Conjectura 3.1.2 implica a Conjectura 5.1.1, ou seja, tentar mostrar que a Conjectura 5.1.1 é tão difícil quanto a conjectura de Tuza;



3. Caracterizar as classes de grafos para as quais a Conjectura 5.1.1 é válida;
4. Construir mais conjecturas que impliquem na conjectura de Tuza; isto permite tentar resolver a Conjectura 3.1.2 sob novas perspectivas;
5. Tentar provar a conjectura de Tuza para outras classes de grafos.



# Referências Bibliográficas

- [1] Takao Asano. An approach to the subgraph homeomorphism problem. *Theoretical Computer Science*, 38(0):249 – 267, 1985.
- [2] J.A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory with Applications*. Macmillan, 1976.
- [3] J.A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory*. Springer, 2008.
- [4] G. Chapuy, M. DeVos, J. McDonald, B. Mohar, and D. Scheide. Packing triangles in weighted graphs. 2010.
- [5] Qing Cui, Penny Haxell, and Will Ma. Packing and covering triangles in planar graphs. *Graphs and Combinatorics*, 25(6):817–824, 2009.
- [6] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer, 3th. edition, 2005.
- [7] G.A. Dirac. On rigid circuit graphs. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 25(1-2):71–76, 1961.
- [8] E. Györi and Zs. Tuza. Decompositions of graphs into complete subgraphs of given order. *Studia scientiarum mathematicarum Hungarica*, 22:315 – 320, 1987.
- [9] Dick Wick Hall. A note on primitive skew curves. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49(12):935–936, 12 1943.
- [10] P.E. Haxell. A note on a conjecture of ryser. *Periodica Mathematica Hungarica*, 30(1):73–79, 1995.
- [11] Penny E. Haxell. Packing and covering triangles in graphs. *Discrete Mathematics*, 195(1-3):251–254, 1999.
- [12] Penny E. Haxell and Yoshiharu Kohayakawa. Packing and covering triangles in tripartite graphs. *Graphs and Combinatorics*, 14(1):1–10, 1998.
- [13] Penny E. Haxell, Alexandr V. Kostochka, and Stéphan Thomassé. Packing and covering triangles in  $k_4$ -free planar graphs. *Graphs and Combinatorics*, 28(5):653–662, 2012.

- [14] Penny E. Haxell, Alexandr V. Kostochka, and Stéphan Thomassé. A stability theorem on fractional covering of triangles by edges. *Eur. J. Comb.*, 33(5):799–806, 2012.
- [15] Penny E. Haxell and Vojtech Rödl. Integer and fractional packings in dense graphs. *Combinatorica*, 21(1):13–38, 2001.
- [16] Michael Krivelevich. On a conjecture of Tuza about packing and covering of triangles. *Discrete Mathematics*, 142(1-3):281–286, 1995.
- [17] K. Kuratowski. Sur le Probleme des Courbes Gauches en Topologie. *Fundamenta Mathematicae*, 15:271–283, 1930.
- [18] S. Aparna Lakshmanan, Csilla Bujtás, and Zsolt Tuza. Small edge sets meeting all triangles of a graph. *Graphs and Combinatorics*, 28(3):381–392, 2012.
- [19] W. Mader.  $3n - 5$  edges do force a subdivision of  $k_5$ . *Combinatorica*, 18(4):569–595, 1998.
- [20] Karl Menger. Zur allgemeinen kurventheorie. *Fundamenta Mathematicae*, 10(1):96–115, 1927.
- [21] G. J. Puleo. Tuza’s Conjecture for Graphs of Maximum Average Degree Less Than 7. *ArXiv e-prints*, August 2013.
- [22] Z. Tuza. Perfect triangle families. *Bull. London Math. Soc.* 26:321–324, 1994.
- [23] Zs. Tuza. Conjecture, finite and infinite sets, Eger, Hungary 1981. *Proc. Colloq. Math. Soc. J. Bolyai*, Vol. 37:p. 888, 1981. In: Hajnal, A. and Lovász, L. and Sós, V.T. North-Holland, Amsterdam (1984).
- [24] Zs. Tuza. Ryser’s conjecture for transversals of  $r$ -partite hypergraphs. *Ars Combinatoria*, 16:201–209, 1983.
- [25] Zs. Tuza. On the order of vertex sets meeting all edges of a 3-partite hypergraph. *Ars Combinatoria*, 24:59–63, 1987.
- [26] Zsolt Tuza. A conjecture on triangles of graphs. *Graphs and Combinatorics*, 6(4):373–380, 1990.
- [27] Zsolt Tuza. Zsolt Tuza home page. <http://www.dcs.vein.hu/tuza/index.html>, 2012. Department of Computer Science and Systems Technology, University of Pannonia.
- [28] K. Wagner. Über eine eigenschaft der ebenen komplexe. *Mathematische Annalen*, 114(1):570–590, 1937.

- [29] R.J. Wilson. *Four Colors Suffice: How the Map Problem was Solved*. Princeton Paperbacks. Princeton University Press, 2002.
- [30] Robin J. Wilson. *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, 4th. edition, 1996.
- [31] Raphael Yuster. Dense graphs with a large triangle cover have a large triangle packing. *Combinatorics, Probability & Computing*, 21(6):952–962, 2012.