UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO EM MATEMÁTICA
DEPARTAMNETO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

LEON DENIS DA SILVA

ESTIMATIVA DE AUTOVALORES PARA SUBVARIEDADES DE CURVATURA MÉDIA LOCALMENTE LIMITADAS EM $N \times \mathbb{R}$

FORTALEZA-CE

2010

LEON DENIS DA SILVA

ESTIMATIVA DE AUTOVALORES PARA SUBVARIEDADES DE CURVATURA MÉDIA LOCALMENTE LIMITADAS EM $N \times \mathbb{R}$

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Gregório Pacelli Feitosa Bessa

FORTALEZA-CE

2010

S581e Silva, Leon Denis da

Estimativa de autovalores para subvariedades de curvatura média localmente limitadas em $N \times \mathbb{R}$ / Leon Denis da Silva - Fortaleza 2010.

42 f.

Orientador: Prof. Gregório Pacelli Feitosa Bessa

Área de concentração: Matemática

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Departamento de Matemática, Fortaleza, 2010.

1- geometria diferencial

CDD 516.36

A Giselly

AGRADECIMENTOS

Ao Cnpq, pelo auxilio financeiro.

Ao Prof. Gregório Pacelli Feitosa Bessa, pela orientação, escolha do tema, empenho e disponibilidade sempre que lhe foi solicitado.

Ao Prof. Aldir Chaves Brasil Junior, pelas diciplinas ministradas.

Ao Prof. João Marques Lucas Barbosa, por sua dedicação nas disciplinas ministradas nas quais obtive conhecimento necessários para dar inicio a esse trabalho.

À Profa. Maria Eulália de Morais Melo, por sempre acreditar no meu trabalho e ser parte responsável da minha história de sucesso.

Às Professoras Maité Kulesza e Marcia Pragana, pelo incentivo, recomendações e presença nos momentos cruciais.

Ao Prof. Adriano Regis, pois mesmo sem saber me provou que era possível.

À minha esposa, Giselly, por ser fonte de força e inspiração dos meus trabalhos acadêmicos.

Aos meus pais, por propocionar a oportunidade de viver esse momento.

Ao meu irmão Kahlil, pela presença em momentos de dificuldades.

Aos companheiros de pós-graduação, Alexandro Belém, Adam Oliveira, Ernani Junior, Rondinelle Marcolino, Priscila Rodrigues, Flávio França, José Nazareno, Cícero Thiarlos e Francisco Chaves, pelas reflexões, críticas, sugestões, companheirismo e momentos de descontração.

Ao paulistano com sotaque cearense, Francisco Calvi, pela amizade, presença e conselhos pertinentes.

Aos meus amigos, conterrâneos e companheiros de jornada, José Deibsom, Filipe Mendonça e Tiago Veras, pela longa data de amizade, pelo espírito de grupo, por estarem presentes no fracasso ou no sucesso, em momentos de difíceis ou de comemorações, enfim, por tudo.

RESUMO

Obtemos limites inferiores para o tom fundamental de conjuntos abertos em subvariedades com curvatura média localmente limitada no espaço produto $N \times \mathbb{R}$, onde N é uma variedade Riemanniana completa n-dimensional com curvatura seccional $K_N \leq \kappa$. Quando a imersão é mínima nossas estimativas são ótimas.

ABSTRACT

We give lower bounds for the fundamental of open sets in submanifolds with locally bounded mean curvature in $N \times \mathbb{R}$, where N is an n-dimensional complete Riemannian manifold with radial sectional curvature $K_N \leq \kappa$. When the immersion is minimal our estimates are sharp.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O Tom fundamental $\lambda^*(\Omega)$ de um conjunto aberto Ω em uma variedade Riemanniana M é definido como segue

$$\lambda^*(\Omega) = \inf\left\{\frac{\int_\Omega |\nabla f|^2}{\int_\Omega f^2}, f \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}\right\}. \tag{1.1}$$

Onde $H_0^1(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito a norma

$$\|\phi\|^2 = \int_\Omega \phi^2 + \int_\Omega |\mathrm{grad}\phi|^2$$

Quando $\Omega = M$ é uma variedade Riemanniana aberta, o tom fundamental $\lambda^*(\Omega)$ coincide com o infimum $\inf\Sigma$ do espectro $\Sigma \subset [0,\infty)$ da única extensão auto-adjunta do Laplaciano Δ agindo em $C_0^\infty(M)$. Quando Ω é compacta com fronteira $\partial\Omega$ suave por partes, então, $\lambda^*(\Omega)$ coincide com o primeiro auto-valor $\lambda_1(\Omega)$ do Laplaciano no problema de Dirichlet em Ω.

Um problema importante na geometria do Laplaciano são as relações entre o primeiro auto-valor/tom fundamental de conjuntos abertos de uma variedade Riemanniana e seus invariantes geométricos; ver [5], [6], [8]. Particularmente interessante é a obtenção de limites inferiores/superiores para o primeiro auto-valor/tom fundamental de conjuntos abertos em subvariedades mínimais de variedades Riemanniana; ver [7], [2],[3] , [10], [11]. Recentemente, tem havido um crescente interesse no estudo de superfícies minimais no espaço produto $N \times \mathbb{R}$. Isso nos motiva ao estudo de tom fundamental de subvariedades minimais do espaço produto $N \times \mathbb{R}$. Neste texto, apresentaremos estimativas inferiores para tom fundamental de certos domínios Ω. Aqui estudaremos em especial dois resultados provados por G. Pacelli Bessa e M. Silvana Costa em um artigo que é base fundamental desta dissertação. O primeiro resultado, Teorema 4.1 extende um teorema de G. Pacelli Bessa e J. Fábio Montenegro [2].

Teorema 4.1 *Seja $\varphi\colon M \hookrightarrow N \times \mathbb{R}$ uma subvariedade mínima completa de dimensão m, isometricamente imersa no produto $N \times \mathbb{R}$, onde N tem curvatura seccional radial $K(\gamma(t))(\gamma'(t), \upsilon) \leq \kappa$, $\upsilon \in T_{\gamma(t)}N$, $|\upsilon| = 1$, $\upsilon \perp \partial t$, ao longo da geodésica $\gamma(t)$ partindo do ponto $x_0 \in N$. Seja $\Omega \subset \varphi^{-1}(B_N(x_0, r) \times \mathbb{R})$ uma componente conexa, onde $r < \min\{\mathrm{inj}(x_0), \pi/2\sqrt{\kappa}\}(\pi/2\sqrt{\kappa} = \infty$ se $\kappa \leq 0)$. Então*

$$\lambda^*(\Omega) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r)). \tag{1.2}$$

Se Ω é limitado, então a desigualdade (4.12) é estrita. Aqui $\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)$ é o espaço forma simplesmente conexo de dimensão $(m-1)$ e curvatura seccional constante κ.

O segundo resultado, Teorema 4.2 é o estudo do tom fundamental de domínios em subvariedades com curvatura média localmente limitadas em $N \times \mathbb{R}$.

Dizemos que uma subvariedade imersa $\varphi : M \hookrightarrow N \times \mathbb{R}$ tem curvatura média localmente limitada $|H|$ em $N \times \mathbb{R}$ se para qualquer $p \in N$ e $r > 0$, o número

$$h(p, r) = \sup \{|H(x)|; x \in \varphi(M) \cap (B_N(p, r) \times \mathbb{R})\}$$

é finito.

Teorema 4.2 *Seja $\varphi : M \hookrightarrow N \times \mathbb{R}$ uma subvariedade completa de dimensão m com curvatura média localmente limitada isometricamente imersa no produto $N \times \mathbb{R}$, onde N tem curvatura seccional radial $K \leq \kappa$, ao longo das geodésicas partindo de um ponto $x_0 \in N$. Seja $\Omega(r) \subset \varphi^{-1}(B_N(p, r) \times \mathbb{R})$ uma componente conexa com $r \leq \min\{\mathrm{inj}_N(x_0), \pi/2\sqrt{\kappa}\}$. Suponha, além disso*

(*a*) Se $|h(x_0, r)| < \Lambda^2 < \infty$, então $r \leq (C_\kappa/S_\kappa)^{-1}(\Lambda^2/(m-2))$ ou

(*b*) Se $\lim_{r\to\infty} h(x_0, r) = \infty$ então $r \leq (C_\kappa/S_\kappa)^{-1}(h(x_0, r_0)/(m-2))$, onde r_0 é tal que $(m-2)\dfrac{C_\kappa}{S_\kappa}(r_0) - h(x_0, r_0) = 0$.

Então nós temos

$$\lambda^*(\Omega(r)) \geq \left[\frac{(m-2)\dfrac{C_\kappa}{S_\kappa}(r) - h(x_0, r)}{2}\right]^2 > 0,$$

onde

$$S_\kappa = \begin{cases} \mathrm{sen}(\sqrt{\kappa}\cdot \mathrm{t})/\sqrt{\kappa}, & \text{se} \quad \kappa > 0 \\ t, & \text{se} \quad \kappa = 0 \\ \mathrm{senh}(\sqrt{-\kappa}\cdot \mathrm{t})/\sqrt{-\kappa}, & \text{se} \quad \kappa < 0 \end{cases}$$

e $C_\kappa = S'_\kappa$.

Capítulo 2

Geometria de Comparação

2.1 Conceitos Básicos

Em todo texto nos referimos a M^n como uma variedade Riemanianna suave de dimensão n.

Definição 2.1. *Seja M^n uma variedade Riemanianna e $f\colon M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. O* ***gradiente*** *de f é o campo vetorial suave* $\operatorname{grad} f$*, definido sobre M por*

$$\langle \operatorname{grad} f, X \rangle = X(f),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

O campo gradiente satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição 2.1. *Se $f, g : M^n \to \mathbb{R}$ são funções suaves, então*

(a) $\operatorname{grad}(f+g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g$*.*

(b) $\operatorname{grad}(fg) = g(\operatorname{grad} f) + f(\operatorname{grad} g)$*.*

Prova. Se X é um campo de vetores suave em M, temos

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{grad}(f+g), X \rangle &= X(f+g) = X(f) + X(g) \\
&= \langle \operatorname{grad} f, X \rangle + \langle \operatorname{grad} g, X \rangle \\
&= \langle \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g, X \rangle
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{grad}(fg), X\rangle &= X(fg) = gX(f) + fX(g)\\ &= \langle g(\operatorname{grad} f), X\rangle + \langle f(\operatorname{grad} g), X\rangle\\ &= \langle g(\operatorname{grad} f) + f(\operatorname{grad} g), X\rangle.\end{aligned}$$

□

Proposição 2.2. *Se $f : M^n \to \mathbb{R}$ e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções suaves, então*

$$\operatorname{grad}(\phi \circ f) = \phi'(f)\operatorname{grad} f.$$

Prova. Se $p \in M$, $\upsilon \in T_pM$ e $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é uma curva suave tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = \upsilon$, então

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{grad}(\phi \circ f), \upsilon\rangle &= \frac{d}{dt}(\phi \circ f \circ \gamma)(t)\mid_{t=0}\\ &= \phi'(f(p))\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\mid_{t=0}\\ &= (\phi' \circ f)\langle \operatorname{grad} f, \upsilon\rangle_p.\end{aligned}$$

□

Definição 2.2. *Seja X um campo vetorial suave em uma variedade Riemanianna M^n. A **divergência** de X é a função suave $\operatorname{div}X : M^n \to \mathbb{R}$, dada por*

$$(\operatorname{div}X)(p) = \mathit{Traço}\{\upsilon \longmapsto (\nabla_\upsilon X)(p)\},$$

onde $\upsilon \in T_pM$.

Proposição 2.3. *Se X, Y são campos de vetores suaves em M^n e $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave, então*

(*a*) $\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div}X + \operatorname{div}Y$.

(*b*) $\operatorname{div}(fX) = f\operatorname{div}X + \langle \operatorname{grad} f, X\rangle$.

Prova. Para provar (b) lembre que para um referencial ortonormal $\{e_i, \ldots, e_n\}$ temos $\operatorname{grad} f = \Sigma_{j=1}^n e_j(f)e_j$, portanto, segue da definição que

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(fX) &= \Sigma_{j=1}^n \langle \nabla_{e_i}(fX), e_i\rangle = \Sigma_{j=1}^n \langle e_i(f)X + f\nabla_{e_i}X, e_i\rangle\\ &= \Sigma_{j=1}^n \langle e_i(f)e_i, X\rangle + \Sigma_{j=1}^n f\langle \nabla_{e_i}X, e_i\rangle\\ &= \langle \operatorname{grad} f, X\rangle + f\operatorname{div}X.\end{aligned}$$

O item (a) é trivial. □

Definição 2.3. *O operador de Beltrami-Laplace, (**Laplaciano**) definido por*

$$\Delta = \mathrm{div} \circ \mathrm{grad} \colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

age nas funções de classe $C^\infty(M)$.

Proposição 2.4. *Se $f : M^n \to \mathbb{R}$ e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções suaves, então*

$$\Delta(\phi \circ f) = (\phi'' \circ f)|\mathrm{grad}\, f|^2 + (\phi' \circ f)\Delta f.$$

Prova. Segue da definição acima e das proposições 2.2 e 2.3 que

$$\begin{aligned}
\Delta(\phi \circ f) &= \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,(\phi \circ f)) = \mathrm{div}((\phi' \circ f)\mathrm{grad}\, f) \\
&= \langle \mathrm{grad}\,(\phi' \circ f), \mathrm{grad}\, f \rangle + (\phi' \circ f)\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f) \\
&= \langle (\phi'' \circ f)\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f \rangle + (\phi' \circ f)\Delta f \\
&= (\phi'' \circ f)|\mathrm{grad}\, f|^2 + (\phi' \circ f)\Delta f.
\end{aligned}$$

□

2.2 Campos de Jacobi

Definição 2.4. *Seja $\gamma : [0, a] \to M^n$ uma geodésica. Um campo suave de vetores J ao longo de γ é um **campo de Jacobi** se J satisfazer a **equação de Jacobi***

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(J, \gamma')\gamma' = 0, \ \forall t \in [0, a]. \tag{2.1}$$

Aqui, sem perda generalidade, consideraremos campos de Jacobi J ao longo de geodésica tais que $\langle J, \gamma' \rangle = 0$.

Exemplo 2.1. *Seja M^n uma variedade Riemanniana, $\kappa \in \mathbb{R}$ e $\gamma : [0, a] \to M^n$ uma geodésica normalizada. Suponha que a curvatura seccional de M seja $K(\gamma'(t), X) = \kappa$ para $0 \leq t \leq a$ e todo $X \in T_{\gamma(t)}M$ não colinear com $\gamma'(t)$. Então sabemos que, ao longo de γ, o tensor curvatura R de M é dado, para X,Y,Z campos ao longo de γ por*

$$R(X, Y)Z = \kappa\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y,$$

de modo que a equação de Jacobi se reduz a (lembreque$\langle J, \gamma' \rangle = 0$)

$$J'' + \kappa \cdot J = 0.$$

Dado $w \in T_{\gamma(t)}M$ tal que $\langle w, \gamma'(0) \rangle = 0$, seja $t \longmapsto w(t)$ o transporte paralelo de w ao longo de γ. Se $S_k : [0, a] \to \mathbb{R}$ é a solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} S_k''(t) + \kappa \cdot S_k(t) = 0 \\ S_k(0) = 0, S_k'(0) = 1 \end{cases},$$

de imediato se verifica que

$$J(t) = S_k(t)w(t)$$

é o unico campo de jacobi ao longo de γ tal que $J(0) = 0$ e $J'(0) = w$. Note ainda que

$$S_k = \begin{cases} \mathrm{sen}(\sqrt{\kappa} \cdot \mathrm{t})/\sqrt{\kappa}, & se \quad \kappa > 0 \\ t, & se \quad \kappa = 0 \\ \mathrm{senh}(\sqrt{-\kappa} \cdot \mathrm{t})/\sqrt{-\kappa}, & se \quad \kappa < 0 \end{cases}.$$

Definição 2.5. *Seja $\gamma : [0, a] \to M^n$ uma geodésica. Dizemos que $\gamma(t_0)$, $0 \leq t_0 \leq a$, é **conjugado** a $\gamma(0)$ ao longo de γ se existir um campo de Jacobi não nulo J ao longo de γ tal que $J(0) = 0$ e $J(t_0) = 0$. Neste caso, a **multiplicidade** de $\gamma(t_0)$ como ponto conjugado a $\gamma(0)$ ao longo de γ é o maior número de campos de Jacobi linearmente independentes J ao longo de γ, com $J(0) = 0$ e $J(t_0) = 0$.*

Proposição 2.5. *Seja $\gamma : [0, a] \to M^n$ uma geodésica tal que $\gamma(a)$ não é conjugado a $\gamma(0)$ ao longo de γ. Então dados $w_1 \in T_{\gamma(0)}M$ e $w_2 \in T_{\gamma(a)}M$, existe um único campo de jacobi J ao longo de γ tal que $J(0) = w_1$ e $J(a) = w_2$.*

Prova. Para uma prova, ver Manfredo P. do Carmo [12]. □

Definição 2.6. *Seja M uma variedade Riemanniana, $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica e ν o espaço vetorial dos campos suaves por partes ao longo de γ. A **Forma do Índice** ao longo de γ é a forma bilinear simétrica $I_a : \nu \times \nu \to \mathbb{R}$ dada por*

$$I_a(V, W) = \int_0^a \{\langle V', \gamma' \rangle - \langle R(V, \gamma')\gamma', W \rangle\} dt.$$

Teorema 2.1 (Lema do Índice)**.** *Seja M^n uma variedade Riemanniana e $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica tal que $\gamma(t)$ não é conjugado a $\gamma(0)$ ao longo de γ, para todo $0 \leq t \leq a$. Se V é um campo suave por partes e J um campo de Jacobi ao longo de γ, com $V(0) = J(0) = 0$ e $V(t_0) = J(t_0)$ para algum $0 \leq t_0 \leq a$, então*

$$I_{t_0}(V, V) \leq I_{t_0}(J, J),$$

ocorrendo a igualdade se e só se $V(t) = J(t)$, para $0 \leq t \leq t_0$.

Prova. Para uma prova, ver Manfredo P. do Carmo [12].

□

Uma variedade Riemanianna M é **geodesicamente completa** se, para todo $p \in M$ e $X \in T_pM$ a geodésica máximal em M que parte de p com velocidade X for definida para todo tempo $t \in \mathbb{R}$. Uma variedade Riemanniana completa e com curvatura seccional constante é dita uma **forma espacial**. Em vários textos é comum denotar uma forma espacial simplesmente conexa de curvatura seccional constante κ e dimensão n por $\mathbb{N}^n_\kappa$.

Exemplo 2.2. *As variedades $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n(1)$ e $\mathbb{H}^n(-1)$ são formas espaciais simplesmente conexas de curvatura seccionais constantes.*

Teorema 2.2 (Cartan)**.** *Se $\mathbb{N}^n_\kappa$ é uma forma espacial simplesmente conexa de curvatura κ, então $\mathbb{N}^n_\kappa$ é isométrica a:*

(a) $\mathbb{H}^n(\kappa)$, *se* $\kappa < 0$

(b) $\mathbb{R}^n$, *se* $\kappa = 0$

(c) $\mathbb{S}^n(\kappa)$, *se* $\kappa > 0$.

2.3 Hessiano e Laplaciano

Sejam M e W variedades Riemannianas completas de dimensão m e n, respectivamente. Seja $\varphi : M \to W$ uma imersão isométrica, isto é :

$$\langle X, Y\rangle_p = \langle d\varphi(X),\, d\varphi(Y)\ \rangle_{\varphi(p)}\ \forall p \in \text{M e } \forall \text{ X} \in T_pM.$$

Considere a função diferenciável $g : N \to \mathbb{R}$ e a composição
$f = g \circ \varphi : M \to \mathbb{R}$. Indentifique X com $d\varphi$(X).
Então temos

$$\langle \operatorname{grad} f, X \rangle = dg(X) = \langle \operatorname{grad} g, X \rangle \ \forall p \text{ e } \forall X \in T_pM$$

pois

$$\operatorname{grad} g = \operatorname{grad} f + (\operatorname{grad} g)^{\perp}$$

onde $(\operatorname{grad} g)^{\perp}$ é perpendicular a T_pM e $\langle (\operatorname{grad} g)^{\perp}, \text{X} \rangle = 0$.

Nosso objetivo nesta seção é calcular o Hessiano de $f = g \circ \varphi$. Denote por ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões Riemannianas de M e N, respectivamente.

Definição 2.7. *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. Definimos a forma bilinear **Hessiana** de f por*

$$Hess(f)(X, Y) = \langle \nabla_X \operatorname{grad} f, Y \rangle \ \text{em } p \in M, \text{ para } X, Y \in T_pM.$$

Definição 2.8. *Seja $\varphi : M \hookrightarrow N$ uma imersão. Definimos a **segunda forma fundamental** $\alpha : T_pM \times T_pM \to (T_pM)^{\perp}$ da imersão φ por*

$$\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \ \text{em } p \in M \text{ para } X, Y \in T_pM.$$

A seguinte proposição foi provada por L. Jorge and D. Koutrofiotis [13].

Proposição 2.6 (Jorge-Koutrofiotis)**.** *Pelas definições acima e para todo $X, Y \in T_pM$, temos que o Hessiano de $f = g \circ \varphi$ é dado por*

$$Hess(f)(X, Y) = Hess(g(\varphi))(X, Y) + \langle \operatorname{grad} f, \alpha(X, Y) \rangle \tag{2.2}$$

Prova. Como

$$\alpha(X, \operatorname{grad} f) = \overline{\nabla}_X \operatorname{grad} f - \nabla_X \operatorname{grad} f$$

temos

$$\begin{aligned} Hess(f)(X, Y) &= \langle \nabla_X \operatorname{grad} f, Y \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X \operatorname{grad} f - \alpha(X, \operatorname{grad} f), Y \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X \operatorname{grad} f, Y \rangle - \langle \alpha(X, \operatorname{grad} f), Y \rangle. \end{aligned}$$

Lembrando que $\alpha(X,Y) \in (T_pM)^{\perp}$ para todo X,Y $\in T_pM$ obtemos

$$\langle \alpha(X, \operatorname{grad} f), Y\rangle = 0.$$

Usando

$$X\langle Y, \operatorname{grad} f\rangle = \langle \overline{\nabla}_X \operatorname{grad} f, Y\rangle + \langle \overline{\nabla}_X Y, \operatorname{grad} f\rangle$$

e

$$\langle \operatorname{grad} f, X\rangle = df(X) = \langle \operatorname{grad} g, X\rangle$$

segue-se que

$$\begin{aligned}
Hessf(X,Y) &= \langle \overline{\nabla}_X \operatorname{grad} f, Y\rangle \\
&= X\langle \operatorname{grad} f, Y\rangle - \langle \overline{\nabla}_X Y, \operatorname{grad} f\rangle \\
&= X\langle \operatorname{grad} g, Y\rangle - \langle \overline{\nabla}_X Y, \operatorname{grad} f\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X grad\, g, Y\rangle + \langle \overline{\nabla}_X Y, \operatorname{grad} g\rangle - \langle \overline{\nabla}_X Y, \operatorname{grad} f\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X \operatorname{grad} g, Y\rangle + \langle \overline{\nabla}_X Y, grad\, g - \operatorname{grad} f\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X \operatorname{grad} g, Y\rangle + \langle \overline{\nabla}_X Y, (\operatorname{grad} g)^{\perp}\rangle \\
&= Hess(g)(X,Y) + \langle (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp}, \operatorname{grad} g\rangle \\
&= Hess(g)(X,Y) + \langle \operatorname{grad} g, \alpha(X,Y)\rangle.
\end{aligned}$$

□

Como consequência, se calcularmos o traço em (2.2) com respeito a base $\{e_1, \ldots, e_m\}$ para T_pM, temos para o Laplaciano de f,

$$\begin{aligned}
\triangle f &= TrHess(f)(e_i, e_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} Hess(f)(e_i, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} Hess(g)(e_i, e_i) + \langle \operatorname{grad} g, \sum_{i=1}^{n} \alpha(e_i, e_i)\rangle.
\end{aligned}$$

Frequentemente neste texto usaremos as fórmulas:

$$\begin{aligned}
Hessf(X,Y) &= Hess(g)(X,Y) + \langle \operatorname{grad} g, \alpha(X,Y)\rangle, && (2.3) \\
\triangle f &= \sum_{i=1}^{n} Hess(g)(e_i, e_i) + \langle \operatorname{grad} g, \sum_{i=1}^{n} \alpha(e_i, e_i)\rangle. && (2.4)
\end{aligned}$$

2.4 O Hessiano da Função Distância

Seja M uma variedade completa de dimensão m. Fixado $p \in M$, se $\gamma : [0, +\infty] \to M$ é uma geodésica normalizada em M tal que $\gamma(0) = p$, sabemos que, para $t > 0$ suficientemente pequeno, tem-se $d(p, \gamma(t)) = t$, i.e., $\gamma_{[0,t_0]}$ é minimizante. Por outro lado, se $\gamma_{[0,t_0]}$ não for minimizante, então $\gamma_{[0,t_1]}$ não será minimizante para todo $t_1 \geq t_0$. Por fim, se $(t_k)_{k\geq 1}$ é uma sequência de números reais positivos tal que $t_k \to t_0$ e $\gamma_{[0,t_k]}$ é minimizante para todo $k \geq 1$, então a continuidade da função distância a partir de p, juntamente com $d(p, \gamma(t_k) = t_k$ para todo $k \geq 1$ garante que $d(p, \gamma(t_0) = t_0$, i.e., $\gamma_{[0,t_0]}$ é minimizante. Portanto o conjunto dos $t \in [0, +\infty]$ tais que $\gamma_{[0,t_0]}$ é minimizante é um intervalo da forma $[0, t_0]$, para algum $t_0 > 0$, ou $[0, \infty]$.

Definição 2.9. *Seja M uma variedade Riemanniana completa e sejam dados $p \in M$ e $v \in T_pM$ unitário. Seja $\gamma_v \colon [0, +\infty) \to M$ o raio geodésico normalizado $\gamma_v(t) = \exp_v(tv)$. Se o conjunto dos $t \in (0, +\infty)$ tais que γ_v é minimizante em $[0, t]$ para um intervalo da forma $[0, t_0]$, dizemos que $\gamma_v(t_0)$ é o **ponto de mínimo** de p na direção de v. O **cut locus** $\mathrm{Cut}(p)$ de p em M é definido como o conjunto dos pontos mínimos de p em M (em alguma direção).*

Defina

$$E_p = \{v \in T_pM; \exp_p(tv) \in M\backslash\mathrm{Cut}(p),\ \forall\ 0 \leq t \leq 1\}. \tag{2.5}$$

Proposição 2.7. $\exp_p : E_p \to M\backslash\mathrm{Cut}(p)$ *é um difeomorfismo.*

Prova. Ver Manfredo P. do Carmo [12] □

Fixando $p \in M$ denotaremos por $\rho : M\backslash(\mathrm{Cut}(p) \cup \{p\}) \to \mathbb{R}_+^*$ a função distância a partir de p, i.e., $\rho(q) = d(p, q)$.

Proposição 2.8. *Seja $\gamma : [0, a] \to M\backslash\mathrm{Cut}(p)$ uma geodésica normalizada partindo de p. Então*

$$\mathrm{grad}\, \rho(\gamma(t)) = \gamma'(t),\ \forall\ 0 < t < a. \tag{2.6}$$

Em particular, $|\mathrm{grad}\, \rho| = 1$

Prova. Seja $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, $0 \leq t \leq a$, e $q = \gamma(t_0)$. Se $w \in T_qM$, $w \perp \gamma'(t_0)$, segue da proposição anterior e do Lema de Gauss a existêcia de $W \in T_v(TpM)$

tal que $\langle W, \upsilon\rangle = 0$ e $(d\exp_p)_{t_0\upsilon}W = w$. Tomemos então $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to E_p$ tal que $|\alpha(s)| = t_0$, $\alpha(0) = t_0\upsilon$ e $\alpha'(0) = W$. Segue da unicidade de geodésica minimizante que liga $\exp_p(\alpha(s))$ a p que

$$\rho(\exp_p(\alpha(s))) = t_0,$$

e daí

$$0 = \langle \operatorname{grad}\rho(q), (d\exp_p)_{t_0\upsilon}W\rangle = \langle \operatorname{grad}\rho(q), w\rangle.$$

Como a igualdade acima é válida para todo $w \perp \gamma'(t_0)$, segue que $\operatorname{grad}\rho(q)$ é múltiplo de $\gamma'(t_0)$. Mas desde que $\rho(\gamma(t)) = t$ para $0 \leq t \leq a$, temos

$$\langle \operatorname{grad}\rho(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = 1,\ \forall\ 0 < t < a,$$

e daí $\operatorname{grad}\rho(\gamma(t)) = \gamma'(t)$, para $0 < t < a$. $\square$

Agora fixe um ponto $p \in M$. Para $x \in M \setminus \mathrm{Cut}(p)$, seja γ uma geodésica minimizante ligando p a x, parametrizada pela distância, tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(a) = x$. Seja $X \in T_pM$ tal que $\langle X, \frac{\partial}{\partial\gamma}\rangle(x) = 0$. Já que x não é ponto conjugado de p, podemos estender X a um campo de Jacobi $\widetilde{X}$ ao longo de γ satisfazendo $\widetilde{X}(\gamma(0)) = 0$, $\widetilde{X}(\gamma(a)) = X$ e $[\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial\gamma}] = 0$.

Observe que por (2.6) temos, $\dfrac{\partial}{\partial\gamma} = \operatorname{grad}\rho$ e $[\widetilde{X}, \operatorname{grad}\rho] = 0$ então

$$\nabla_{\widetilde{X}}\operatorname{grad}\rho = \nabla_{\operatorname{grad}\rho}\widetilde{X}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
Hess(\rho)(X,X) &= \langle \nabla_{\widetilde{X}}\operatorname{grad}\rho, \widetilde{X}\rangle \\
&= \langle \nabla_{\operatorname{grad}\rho}\widetilde{X}, \widetilde{X}\rangle \\
&= \int_0^a \frac{d}{dt}\langle \widetilde{X}, \langle \nabla_{\operatorname{grad}\rho}\widetilde{X}\rangle dt \\
&= \int_0^a (\langle \nabla_{\operatorname{grad}\rho}\widetilde{X}, \nabla_{\operatorname{grad}\rho}\widetilde{X}\rangle + \langle \widetilde{X}, \nabla_{\operatorname{grad}\rho}\nabla_{\operatorname{grad}\rho}\widetilde{X}\rangle dt \\
&= \int_0^a \{|\nabla_{\operatorname{grad}\rho}\widetilde{X}|^2 + \langle \widetilde{X}, \nabla_{\operatorname{grad}\rho}\nabla_{\operatorname{grad}\rho}\widetilde{X}\}dt.
\end{aligned}$$

Usando o fato de $\widetilde{X}$ ser campo de Jacobi , temos que

$$\nabla_{\operatorname{grad}\rho}\nabla_{\operatorname{grad}\rho}\widetilde{X} + R(\widetilde{X}, \operatorname{grad}\rho)\operatorname{grad}\rho = 0.$$

Portanto,

$$Hess(\rho)(X,X) = \int_0^a (|\nabla_{\mathrm{grad}\,\rho}\widetilde{X}|^2 - \langle \widetilde{X}, R(\widetilde{X}, \mathrm{grad}\,\rho)\mathrm{grad}\ \rho\rangle)dt, \tag{2.7}$$

onde R é a curvatura da variedade Riemanniana M e o segundo membro acima é a forma do índice.

Na próxima seção apresentaremos o objetivo principal de nosso capítulo o **Teorema de Comparação do Hessiano**.

2.5 Teorema de Comparação do Hessiano

Teorema 2.3 (Teorema de Comparação do Hessiano)**.** *Sejam M e N variedades Riemannianas de dimensão n e $\gamma_i : [0,a] \to M_i$ com $i = 1,2$, duas geodésicas parametrizadas pelo comprimento de arco, onde γ_i não intersecta o cut locus de $\gamma_i(p)$. Seja ρ_i a função distância de $\gamma_i(0)$ sobre M_i e K_i a curvatura secional de M_i. Suponha que em γ_1 e γ_2 com $0 \leq t \leq a$, tenhamos*

$$K_1(X_1, \frac{\partial}{\partial\gamma_1}) \geq K_2(X_2, \frac{\partial}{\partial\gamma_2}),$$

onde X_i é um vetor unitário qualquer em $T_{\gamma_i(t)}M_i$, perpendicular a $\frac{\partial}{\partial\gamma_i}$, então

$$Hess(\rho_1)(X_1,X_1) \leq Hess(\rho_2)(X_2,X_2)$$

onde $X_i \in T_{\gamma_i(a)}M_i$, com $\langle X_i, \frac{\partial}{\partial\gamma_i}\rangle = 0$ e $|X_i| = 1$.

Prova. Seja E_1^i,. . .,E_n^i um sistema de campos de vetores ortonormais paralelo ao longo de γ_i com $E_n^i = \frac{\partial}{\partial\gamma_i}$.
Assim, por (2.7)

$$Hess(f)(X,X) = \int_0^a (|\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\widetilde{X}_i|^2 - \langle \widetilde{X}_i, R(\widetilde{X}_i, \frac{\partial}{\partial\gamma_i})\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\rangle)dt, \tag{2.8}$$

sendo $\widetilde{X}_i$ um campo de Jacobi ao longo de γ_i com $\widetilde{X}_i(\gamma_i(0)) = 0$ e $\widetilde{X}_i(\gamma_i(0)) = X$. O campo $\widetilde{X}_i$ é decomposto como $\widetilde{X}_i = c\frac{\partial}{\partial\gamma_i} + (\widetilde{X}_i)^\perp$ para algum c real.

Logo

$$0 = \langle \widetilde{X}_i, \frac{\partial}{\partial\gamma_i}\rangle(\gamma(a)) = \langle c\frac{\partial}{\partial\gamma_i}, \frac{\partial}{\partial\gamma_i}\rangle$$

segue-se que $c = 0$, e portanto, $\langle \widetilde{X}_i, \frac{\partial}{\partial \gamma_i}(\gamma_i(t)) = 0$ para todo $0 \leq t \leq a$. Dessa forma, $\widetilde{X}_i$ é perpendicular a E_n^i em cada ponto de γ_i.

Considere

$$\widetilde{X}_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(t) E_i^2.$$

Tomemos $E_1^1, \ldots, E_n^1$ tal que

$$X_1 = \widetilde{X}_1(a) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(a) E_i^1(\gamma_1(a)).$$

Defina agora um campo de vetores Z ao longo de γ_1 por

$$Z = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(t) E_i^1.$$

Então Z assume os mesmos valores de $\widetilde{X}_i$ em $t = 0$ e $t = a$.

Além disso,

$$|Z| = |\widetilde{X}_2|$$

e

$$|\nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma_2}} \widetilde{X}_2| = |\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i'(t) E_i^2| = |\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i'(t) E_i^1| = |\nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma_2}} Z|.$$

Sabemos que o campo de Jacobi minimiza a forma do índice entre todos os campos de vetores ao longo da mesma geodésica com os mesmos valores de fronteira, concluimos

$$\begin{aligned}
Hess(\rho_1)(X_1, X_1) &= \int_0^a (|\frac{\partial}{\partial \gamma_1} \widetilde{X}_1|^2 - \langle \widetilde{X}_1, R(\widetilde{X}_1, \frac{\partial}{\partial \gamma_1}) \frac{\partial}{\partial \gamma_1} \rangle) dt \\
&\leq \int_0^a (|\nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma_i}} Z|^2 - \langle Z, R(Z, \frac{\partial}{\partial \gamma_1}) \frac{\partial}{\partial \gamma_1} \rangle) dt \\
&= \int_0^a (|\frac{\partial}{\partial \gamma_1} \widetilde{X}_2|^2 - K_1(Z, \frac{\partial}{\partial \gamma_1})) dt \\
&\leq \int_0^a (|\frac{\partial}{\partial \gamma_1} \widetilde{X}_2|^2 - K_2(\widetilde{X}_2, \frac{\partial}{\partial \gamma_2})) dt \\
&= Hess(\rho_2)(X_2, X_2),
\end{aligned}$$

isso prova o teorema 2.3. $\square$

Para o que segue nos capítulos posteriores precisaremos da seguinte versão.

Corolário 2.1. *Seja M uma variedade Riemanniana completa e seja ρ a fun cão distância em M a partir de x_0. Seja γ uma geodésica minizante partindo de x_0 e suponha que a curvatura seccional radial de M ao longo de γ são limitadas superiormente, i.e., $K_\gamma \leq \kappa$. Então o Hessiano de ρ em $\gamma(t)$ satisfaz*

$$Hess\rho(\gamma(t))(X,X) \geq \frac{C_k}{S_k}(t) \cdot \|X\|^2,\ X \perp \gamma'(t), \tag{2.9}$$

onde

$$S_k = \begin{cases} \operatorname{sen}(\sqrt{\kappa} \cdot t)/\sqrt{\kappa}, & se \quad \kappa > 0 \\ t, & se \quad \kappa = 0 \\ \operatorname{senh}(\sqrt{-\kappa} \cdot t)/\sqrt{-\kappa}, & se \quad \kappa < 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

e $C_k(t) = S_k'(t)$.

Prova. Seja $X \in T_{\gamma(\rho)}M$ e $X \perp \gamma'(\rho)$ e denotemos por $X(t)$ o campo de vetores obtido pela extensão paralela de X ao longo de γ. Seja $\widetilde{X}(t)$ o campo de Jacobi ao longo de γ com $\widetilde{X}(0) = 0$ e $\widetilde{X}(\rho) = X$ da forma

$$\widetilde{X}(t) = f(t)X(t),$$

onde a função $f(t)$ satisfaz a equação de Jacobi

$$f(t)'' + \kappa f(t) = 0 \tag{2.11}$$

com as condições $f(0) = 0$ e $f(\rho) = 1$.
Seja $\left\{\dfrac{\partial}{\partial\gamma}, X_1, \ldots, X_{n-1}\right\}$ uma base ortonormal de $T_{\gamma(\rho)}M$ e paralela ao longo de γ.
Usando o campo de Jacobi

$$\widetilde{X}_i(t) = f(t)X_i(t)$$

com $\widetilde{X}_i(0) = 0$, $\widetilde{X}_i(\gamma(\rho)) = X_i$ e $|X_i| = 1$ em (2.7), obtemos

$$\begin{aligned} Hess(\rho)(X_i,X_i) &= \int_0^\rho (|\frac{\partial}{\partial\gamma}\widetilde{X}_i|^2 - \langle R(\widetilde{X}_i, \frac{\partial}{\partial\gamma})\frac{\partial}{\partial\gamma}, \widetilde{X}_i\rangle)dt \\ &= \int_0^\rho (|\frac{\partial}{\partial\gamma}f(t)X_i|^2 - f(t)^2\langle R(X_i, \frac{\partial}{\partial\gamma})\frac{\partial}{\partial\gamma}, X_i\rangle)dt \\ &= \int_0^\rho (|\frac{\partial f(t)}{\partial t}|^2 - \kappa f(t)^2)dt. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Assim, para $\kappa = -1$, a solução de (2.11) será

$$f(t) = \frac{\operatorname{senh}(t)}{\operatorname{senh}(\rho)},$$

e de (2.12) segue

$$\begin{aligned} Hess(\rho)(X_i, X_i) &= \int_0^\rho \left(\frac{\cosh^2(t)}{\operatorname{senh}^2(\rho)} - \frac{\operatorname{senh}^2(t)}{\operatorname{senh}^2(\rho)} \right) dt \\ &= \frac{1}{\operatorname{senh}(\rho)} \int_0^\rho \cosh(2t) dt \\ &= \frac{1}{2\operatorname{senh}^2(\rho)} \int_0^\rho \frac{d}{dt}(\operatorname{senh}(2t)) dt \\ &= \frac{1}{2\operatorname{senh}^2(\rho)} (\operatorname{senh}(2t)) \\ &= \frac{\operatorname{senh}(\rho)\cosh(\rho)}{\operatorname{senh}^2(\rho)} \\ &= \cosh(\rho). \end{aligned}$$

Logo

$$Hess(\rho)(X_i, (X_i) = \cosh(\rho).$$

Para $\kappa = 0$, a solução de (2.11) será

$$f(t) = \frac{t}{\rho},$$

e de (2.12) obtemos

$$Hess(\rho)(X_i, X_i) = \int_0^\rho |f'(t)| dt = \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho dt = \frac{1}{\rho}.$$

Para $\kappa = 1$, a equação (2.11) tem como solução

$$f(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{\operatorname{sen}(\rho)}.$$

Substituindo em (2.12), resulta em

$$\begin{aligned} Hess(\rho)(X_i, X_i) &= \int_0^\rho \left(\frac{\cos^2(t)}{\operatorname{sen}^2(\rho)} - \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{\operatorname{sen}^2(\rho)} \right) dt \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen}(\rho)} \int_0^\rho \cos(2t) dt \\ &= \frac{1}{2\operatorname{sen}^2(\rho)} \int_0^\rho \frac{d}{dt}(\operatorname{sen}(2t)) dt \\ &= \frac{1}{2\operatorname{sen}^2(\rho)} (\operatorname{sen}(2t)) \\ &= \cos(\rho). \end{aligned}$$

A desigualdade (2.10) segue do teorema da comparação do Hessiano e do que acabamos de provar. □

Capítulo 3

Estimativas do Espectro

Apresentaremos o Teorema de *Barta* na secção 3.1. O conteúdo da secção 3.2 consiste em apresentar estimativas de autovalores provadas por G. P. Bessa e J. Fábio Montenegro em [3] e [2]. O teorema 3.3 é uma generalização do teorema de Barta, já o teorema 3.4 se trata de uma generalização do resultado de Cheung-Leung [11].

3.1 Teorema de Barta

Teorema 3.1 (*Barta*). *Sejam M uma variedade Riemanniana limitada com fronteira não-vazia seccionalmente suave ∂M e $f \in C^2(M) \cap C^0(\overline{M})$ com $f|M > 0$ e $f|\partial M = 0$ e seja $\lambda_1(M)$ o primeiro autovalor de Dirichlet de M. Então*

$$\sup_M \left(-\frac{\triangle f}{f}\right) \geq \lambda_1(M) \geq \inf_M \left(-\frac{\triangle f}{f}\right) \tag{3.1}$$

com igualdade em (3.1) se, e somente se, f é uma primeira autofunção de M.

Para uma demonstração do teorema de *Barta* faremos uso da **Fórmula de *Green***

Teorema 3.2 (Fórmula de *Green*). *Seja $f\colon M \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2(M)$, $h\colon M \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1(M)$, pelo menos uma delas com suporte compacto. Então,*

$$\int_M \{h\Delta f + \langle \operatorname{grad} h, \operatorname{grad} f\rangle\} dV = 0.$$

Se ambas são de classe $C^2(M)$, então

$$\int_M \{h\Delta f - f\Delta h\} dV = 0.$$

Prova. Segue-se do teorema da divergência. □

Prova do Teorema de Barta. Seja ϕ uma auto-função associada a $\lambda_1(M)$ com $\phi|M > 0$ e $\phi|\partial M = 0$. Então

$$\lambda_1(M) = -\frac{\Delta\phi}{\phi} = -\frac{\Delta f}{f} + \frac{\phi\Delta f - f\Delta\phi}{f\phi}.$$

Observe que por hipótese $f\phi|M > 0$ e pela fórmula de *Green*

$$\int_M \{\phi\Delta f - f\Delta\phi\} dV = 0.$$

Então ou $\phi\Delta f - f\Delta\phi \equiv 0$ e o resultado segue-se ou existem $x_1, x_2 \in M$ tais que $(\phi\Delta f - f\Delta\phi)(x_1) > 0$ e $(\phi\Delta f - f\Delta\phi)(x_2) < 0$. Se $\phi\Delta f - f\Delta\phi$ não é identicamente nulo temos

$$\lambda_1(M) > -\frac{\Delta f}{f}(x_1) \geq \inf\left(-\frac{\Delta f}{f}\right).$$

Analogamente,

$$\lambda_1(M) < -\frac{\Delta f}{f}(x_2) \leq \sup\left(-\frac{\Delta f}{f}\right).$$

Se ocorre a igualdade então

$$\phi\Delta f - f\Delta\phi \equiv 0$$

e assim $-\triangle f/f = -\triangle\phi/\phi = \lambda_1(M)$, isto é , f é uma autofunção associada a $\lambda_1(M)$. □

3.2 Estimativas de Bessa-Montenegro

Seja M uma variedade Riemanniana e $\Omega \subset M$ um aberto conexo arbitrário. **O tom fundamental** $\lambda^*(\Omega)$ de Ω é definido por

$$\lambda^*(\Omega) = \inf\left\{\frac{\int_\Omega |\nabla f|^2}{\int_\Omega f^2}, f \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}\right\} \tag{3.2}$$

onde $f \in H_0^1(\Omega)$ é o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito a norma

$$\parallel \varphi \parallel_\Omega^2 = \int_\Omega \varphi^2 + \int_\Omega |\nabla\varphi|^2.$$

Definição 3.1. *Seja M uma variedade Riemanianna e X um campo de vetores pertencente a $L^1_{loc}(M)$ (significa que $|X| \in L^1_{loc}(M)$). A função $g \in L^1_{loc}(M)$ é uma divergência fraca de X se*

$$\int_M \phi g = -\int_M \langle \operatorname{grad} \phi, X\rangle \ \forall \phi \in C_0^\infty(M). \tag{3.3}$$

É claro que existe no máximo uma função $g \in L^1_{loc}$ com divergência fraca para cada $X \in L^1_{loc}(M)$ e podemos escrever $g = \operatorname{div} X$. Para campos de vetores X de classe C^1 a divergência clássica dada na definição 2.2 coincide com a divergência fraca $\operatorname{Div} X$.

Teorema 3.3. *Seja Ω um conjunto aberto em uma variedade Riemanianna M. Então*

$$\lambda^*(\Omega) \geq \sup_{\mathcal{C}(\Omega)} \left\{ \inf_\Omega (\operatorname{div} X - |X|^2) \right\}, \tag{3.4}$$

onde $\mathcal{C}(\Omega)$ é o conjunto de campos de vetores suaves em $\Omega \backslash F$ para algum conjunto fechado F com medida de Hausdorff $\mathcal{H}^{n-1}(F \cap \Omega) = 0$.

Prova. Se $X \in \mathcal{C}(\Omega)$ e $f \in C_0^\infty(M)$ temos $fX \in \mathcal{C}(\Omega)$. Logo, pela proposição 2.3 teremos

$$\int_\Omega \operatorname{div}(fX) = \int_\Omega \langle \operatorname{grad} f, X\rangle + \int_\Omega f \operatorname{div} X.$$

Além disso, se $g = \operatorname{Div} X$ segue de (3.3) que

$$\int_\Omega \operatorname{div}(fX) = 0.$$

Agora note que se

$$(|f||X| - |\operatorname{grad} f|)^2 \geq 0,$$

então

$$-2|f||\operatorname{grad} f||X| \geq -f^2|X|^2 - |\operatorname{grad} f|^2. \tag{3.5}$$

Munido destas informações obtemos, pela da proposição 2.1 e pela última desigualdade acima,

$$\begin{aligned}
0 = \int_\Omega \mathrm{div}(f^2X) &= \int_\Omega \langle \mathrm{grad}\, f^2, \rangle + \int_\Omega f^2 \mathrm{div} X \\
&\geq -\int_\Omega |\mathrm{grad}\, f^2||X| + \int_\Omega f^2 \mathrm{div} X \\
&= -\int_\Omega 2|f||\mathrm{grad}\, f|X| + \int_\Omega f^2 \mathrm{div} X \\
&\geq -\int_\Omega f^2|X|^2 - \int_\Omega |\mathrm{grad}\, f|^2 + \int_\Omega f^2 \mathrm{div} X \\
&= \int_\Omega (\mathrm{div} X - |X|^2) f^2 - \int_\Omega |\mathrm{grad}\, f|^2 \\
&\geq \int_\Omega \inf_\Omega (\mathrm{div} X - |X|^2) f^2 - \int_\Omega |\mathrm{grad}\, f|^2 \\
&= \inf_\Omega (\mathrm{div} X - |X|^2) \int_\Omega f^2 - \int_\Omega |\mathrm{grad}\, f|^2.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\inf_\Omega (\mathrm{div} X - |X|^2) \int_\Omega f^2 - \int_\Omega |\mathrm{grad}\, f|^2 \leq 0,$$

e assim,

$$\inf_\Omega (\mathrm{div} X - |X|^2) \int_\Omega f^2 \leq \int_M |\mathrm{grad}\, f|^2.$$

Portanto,

$$\int_\Omega |\mathrm{grad}\, f|^2 \geq \sup_{\mathcal{C}(\Omega)} \left\{ \inf_\Omega (\mathrm{div} X - |X|^2) \right\} \int_\Omega f^2.$$

Pela definição do tom fundamental (3.2) concluímos que

$$\lambda^*(\Omega) \geq \sup_{\mathcal{C}(\Omega)} \left\{ \inf_\Omega (\mathrm{div} X - |X|^2) \right\}.$$

$\square$

Teorema 3.4. *Seja Ω um conjunto aberto em uma variedade Riemanianna M e $c(\Omega)$ a constante definida por*

$$c(\Omega) = \sup_{\mathcal{C}_+(\Omega)} \frac{(\inf_\Omega \mathrm{div} X)}{\sup_\Omega |X|^2},$$

onde $\mathcal{C}_+(\Omega) = \{X \in \mathcal{C}(\Omega), \inf_\Omega \mathrm{div} X > 0 \text{ e } \sup_\Omega |X| < \infty\}$. *Então*

$$\lambda^*(\Omega) \geq \frac{c(\Omega)^2}{4}. \tag{3.6}$$

Prova. Sejam $X \in \mathcal{C}_+(\Omega)$ e $f \in C_0^\infty$. O campo vetorial f^2X tem suporte compacto em Ω. Temos que

$$\mathrm{div}(f^2X) = \langle \mathrm{grad}\, f^2, X \rangle + f^2 \mathrm{div} X.$$

Como

$$f^2 \mathrm{div} X \geq f^2 \inf \mathrm{div} X$$

e

$$|\langle \mathrm{grad}\, f^2, X \rangle| \leq |\mathrm{grad}\, f^2||X|,$$

segue que

$$\mathrm{div}(f^2 X) = \langle \mathrm{grad}\, f^2, X \rangle + f^2 \mathrm{div} X \geq -|\mathrm{grad}\, f^2||X| + f^2 \inf \mathrm{div} X.$$

Pelo fato de

$$|\mathrm{grad} f^2|^2 = \langle \mathrm{grad}\, f^2, \mathrm{grad}\, f^2 \rangle = 4f^2 \langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f \rangle = 4f^2 |\mathrm{grad}\, f|,$$

ou seja,

$$|\mathrm{grad}\, f^2| = 2|f||\mathrm{grad}\, f|,$$

tem-se

$$-|\mathrm{grad}\, f^2||X| + f^2 \inf \mathrm{div} X \geq -2|f||\mathrm{grad}\, f| \sup |X| + f^2 \inf \mathrm{div} X$$

pois $-|X| \geq -\sup |X|$. Temos ainda, para todo ϵ¿0,

$$\begin{aligned}
(\epsilon |f| - |\mathrm{grad}\, f|)^2 \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \epsilon^2 |f|^2 - 2\epsilon |f||\mathrm{grad}\, f| + |\mathrm{grad}\, f|^2 \geq 0 \\
&\Rightarrow \quad -2\epsilon |f||\mathrm{grad}\, f| \geq -\epsilon^2 |f|^2 - |\mathrm{grad}\, f|^2 \\
&\Rightarrow \quad -2|f||\mathrm{grad}\, f| \geq -\epsilon |f|^2 - \tfrac{1}{\epsilon} |\mathrm{grad}\, f|^2.
\end{aligned}$$

Assim

$$\mathrm{div}(f^2 X) \geq \sup |X| (-\epsilon |f|^2 - \frac{1}{\epsilon} |\mathrm{grad}\, f|^2) + \inf \mathrm{div} X.$$

Integrando a ultima expressão sobre um domínio normal $D \supset \Omega$ temos

$$\begin{aligned}
0 \quad &= \quad \int_D \mathrm{div}(f^2 X) \geq \sup |X| \int_D (-\epsilon |f|^2 - \frac{1}{\epsilon} |\mathrm{grad}\, f|^2) + \inf \mathrm{div} X \int_D f^2 \\
&\Rightarrow \quad \int_D |\mathrm{grad}\, f|^2 \geq \frac{\epsilon}{\sup |X|} (\inf \mathrm{div} X - \epsilon \sup |X|) \int_D f^2.
\end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon = \dfrac{\inf \mathrm{div} X}{2 \sup |X|}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\mathrm{grad}\, f|^2 \quad &= \quad \int_D |\mathrm{grad}\, f|^2 \\
&\geq \quad \left[\frac{\inf \mathrm{div} X}{2 \sup |X|} \right]^2 \int_D f^2 \\
&= \quad \left[\frac{\inf \mathrm{div} X}{2 \sup |X|} \right]^2 \int_\Omega f^2,
\end{aligned}$$

e segue que

$$\frac{\int_\Omega |\mathrm{grad}\, f|^2}{\int_\Omega f^2} \geq \frac{1}{4}\left[\frac{\inf \mathrm{div} X}{\sup_\Omega |X|}\right]^2. \tag{3.7}$$

Agora considerando em (3.7) o supremo de todos os campos $X \in \mathcal{C}_+(\Omega)$, conclui-se que

$$\begin{aligned}
\lambda^*(\Omega) &= \inf_\Omega \left\{\frac{\int_\Omega |\mathrm{grad}\, f|^2}{\int_\Omega f^2}\right\} \\
&\geq \sup_{\mathcal{C}_+(\Omega)} \frac{1}{4}\left[\frac{\inf \mathrm{div} X}{\sup_\Omega |X|^2}\right]^2 \\
&= \frac{c(\Omega)^2}{4}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 3.1. *Seja Ω um domínio limitado em uma variedade Riemanianna. Seja $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\Omega)$, $v > 0$ em Ω e $v \mid \partial\Omega = 0$. Então*

$$\lambda^*(\Omega) \geq \inf_\Omega(-\frac{\Delta v}{v}). \tag{3.8}$$

Além disso, $\lambda^*(\Omega) = \inf_\Omega(-\frac{\Delta v}{v})$ se, e somente se, $v = u$, onde u é uma autofunção positiva de Ω, i.e., $\Delta u + \lambda^*(\Omega)u = 0$.

Prova. Seja $\epsilon_i \to 0$ uma sequência de valores regular positivo de v e seja $\Omega^v_{\epsilon_i} = \{x \in \Omega; v(x) > \epsilon_i\}$. Aplicando o teorema de *Barta* temos que

$$\lambda^*(\Omega^v_{\epsilon_i}) = \lambda_1(\Omega^v_{\epsilon_i}) \geq \inf_{\Omega^v_{\epsilon_i}}\left(-\frac{\Delta v}{v}\right) \geq \inf_\Omega\left(-\frac{\Delta v}{v}\right)$$

Mas $\lim_{\epsilon_i \to 0} \lambda^*(\Omega^v_{\epsilon_i}) = \lambda^*(\Omega)$, ver [6]. Seja agora $u \in C^\infty(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ uma autofunão positiva de Ω. Então

$$\lambda^*(\Omega) = -\frac{\Delta u}{u} = -\frac{\Delta v}{v} + \frac{u\Delta v - v\Delta u}{uv}. \tag{3.9}$$

Pela fórmula de *Green* temos que

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) = 0$$

Então ou $u\Delta v - v\Delta u \equiv 0$ e o resultado segue-se ou existem $x_1, x_2 \in \Omega$ tais que $(u\Delta v - v\Delta u)(x_1) > 0$ e $(u\Delta v - v\Delta u)(x_2) < 0$. Se $u\Delta v - v\Delta u$ não é identicamente nulo temos de (3.9) que

$$\lambda^*(\Omega) > -\frac{\Delta v}{v}(x_1) \geq \inf_\Omega\left(-\frac{\Delta v}{v}\right).$$

Dessa forma se

$$\lambda^*(\Omega) = \inf_{\Omega}\left(-\frac{\Delta v}{v}\right)$$

então $u\Delta v - v\Delta u \equiv 0$ e assim v é uma autofunção. $\square$

Capítulo 4

Teoremas Principais

Motivados com o estudo do tom fundamental de subvariedades mínimais do espaço produto $N \times \mathbb{R}$ G. Pacelli Bessa e M. Silvana Costa apresentaram em [1] o teorema 4.1. Além disso, foi proposto o estudo de tons fundamentais de domínios em subvariedades com curvatura média localmente limitada em $N \times \mathbb{R}$, isso é representado pelo teorema 4.2. Como parte da prova dos teoremas citados, a primeira secção será destinada a verificação de um lema crucial para as demonstrações posteriores.

4.1 Lema Técnico

Para provar os resultados que apresentaremos na última seção deste capítulo precisaremos do seguinte lema técnico.

Lema 4.1. *Seja $\upsilon : B_{\mathbb{N}^n(\kappa)}(r) \to \mathbb{R}$ uma primeira autofunção positiva de $B_{\mathbb{N}^n(\kappa)}(r) \subset \mathbb{N}^n(\kappa)(r)$ associada ao primeiro autovalor $\lambda_1(B_{\mathbb{N}^n(\kappa)}(r))$. Então*

$$n\frac{C_\kappa(t)}{S_\kappa(t)}\upsilon'(t) + \lambda_1(B_{\mathbb{N}^n(\kappa)}(r))\upsilon(t) < 0,\ 0 < t < r, \tag{4.1}$$

onde as funções $S_k(t)$ e $C_k(t)$ foram definidas em (2.10)

Prova. Trataremos os casos $\kappa < 0$, $\kappa > 0$ e $\kappa = 0$ separadamente. Suponha primeiro que $\kappa < 0$, i.e., $S_\kappa(t) = \operatorname{senh}(\sqrt{-\kappa} \cdot t) \setminus \sqrt{-\kappa}$. Por simplicidade, denotaremos $\lambda = \lambda_1(B_{\mathbb{N}^n(\kappa)}(r))$. Lembre que em coordenadas geodésicas $\upsilon(t)$ satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\upsilon''(t) + (n-1)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t)\upsilon'(t) + \lambda\upsilon(t) = 0,\ 0 < t < r \tag{4.2}$$

Considere a equação suave $\mu(t) = C_\kappa(t)^{\frac{\lambda}{n\kappa}}$. Assim,

$$\begin{aligned} \mu'(t) &= \frac{\lambda}{n\kappa}C_\kappa(t)^{\frac{\lambda}{n\kappa}-1}C'_\kappa(t) \\ &= -\frac{\lambda}{n}S_\kappa(t)C_\kappa(t)^{\frac{\lambda}{n\kappa}-1}. \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} \upsilon'(t)\mu(t) - \mu'(t)\upsilon(t) &= \upsilon'(t)C_\kappa(t)^{\frac{\lambda}{n\kappa}} + \frac{\lambda}{n\kappa}S_\kappa(t)C_\kappa(t)^{\frac{\lambda}{n\kappa}-1}\upsilon'(t) \\ &= \upsilon'(t)C_\kappa(t)^{\frac{\lambda}{n\kappa}} + \frac{1}{n}S_\kappa(t)\frac{C_\kappa(t)^{\frac{\lambda}{n\kappa}}}{C_\kappa(t)}\lambda\upsilon(t) \qquad (4.3) \\ &= \frac{1}{n}C_\kappa(t)^{\frac{\lambda}{n\kappa}-1}S_\kappa(t)\left(n\frac{C_\kappa(t)}{S_\kappa(t)}\upsilon'(t) + \lambda\upsilon(t)\right). \end{aligned}$$

Como

$$\frac{1}{n}C_\kappa(t)^{\frac{\lambda}{n\kappa}-1}S_\kappa(t) > 0,$$

observamos em (4.3) que para provar que $n\frac{C_\kappa(t)}{S_\kappa(t)}\upsilon'(t)+\lambda\upsilon(t) < 0$ basta verificar que

$$\upsilon'(t)\mu(t) - \mu'(t)\upsilon(t) < 0.$$

Para isso, multiplique a equação (4.2) por $S_\kappa^{n-1}(t)$ obtendo a seguinte equação diferencial:

$$\left(S_\kappa^{n-1}\upsilon'\right)'(t) + \lambda S_\kappa^{n-1}(t)\upsilon(t) = 0,\ 0 < t < r. \tag{4.4}$$

Agora, usando o fato de $C_\kappa^2(t) + \kappa S_\kappa^2(t) = 1$ temos que

$$\begin{aligned} \mu''(t) &= -\frac{\lambda}{n}\left[C_\kappa(t)^{\frac{\lambda}{n\kappa}} - \kappa S_\kappa^2(t)\left(\frac{\lambda}{n}-1\right)\frac{C_\kappa(t)^{\frac{\lambda}{n\kappa}}}{C_\kappa^2(t)}\right] \\ &= -\frac{\lambda}{n}\left[1 + \frac{\kappa S_\kappa^2(t)}{C_\kappa^2(t)} - \frac{\lambda}{n}\frac{S_\kappa^2(t)}{C_\kappa^2(t)}\right]\mu(t) \\ &= -\lambda\left[\frac{1}{nC_\kappa^2(t)} - \frac{\lambda}{n^2}\frac{S_\kappa^2(t)}{C_\kappa^2(t)}\right]\mu(t), \end{aligned}$$

isto é, a função $\mu(t)$ satisfaz a equação diferencial:

$$\mu''(t) = -\lambda\left(\frac{1}{nC_\kappa^2(t)} - \frac{\lambda}{n^2}\frac{S_\kappa^2(t)}{C_\kappa^2(t)}\right)\mu(t). \tag{4.5}$$

Multiplicando a equação (4.5) por $S_\kappa^{n-1}(t)$ obtemos

$$S_\kappa^{n-1}(t)\mu''(t) + \lambda S_\kappa^{n-1}(t)\left(\frac{1}{nC_\kappa^2(t)} - \frac{\lambda}{n^2}\frac{S_\kappa^2(t)}{C_\kappa^2(t)}\right)\mu(t) = 0. \tag{4.6}$$

Adicionando e subtraindo o termo $(n-1)\mu'(t)S_\kappa^{n-2}(t)C_\kappa(t)$ em (4.6) obtemos

$$(S_\kappa^{n-1}\mu')'(t) + \lambda S_\kappa^{n-1}(t)\left(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{nC_\kappa^2(t)} - \frac{\lambda}{n^2}\frac{S_\kappa^2(t)}{C_\kappa^2(t)}\right)\mu(t) = 0. \tag{4.7}$$

Em suma, as funções υ e μ satisfazem as seguintes identidades:

$$(S_\kappa^{n-1}\upsilon')'(t) + \lambda S_\kappa^{n-1}(t)\upsilon(t) = 0,$$

$$(S_\kappa^{n-1}\mu)'(t) + \lambda S_\kappa^{n-1}(t)\left(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{nC_\kappa^2(t)} - \frac{\lambda}{n^2}\frac{S_\kappa^2(t)}{C_\kappa^2(t)}\right)\mu(t) = 0.$$

Multiplicando a primeira identidade por $\mu(t)$ e a segunda por $\upsilon(t)$ temos

$$(S_\kappa^{n-1}\upsilon')'\mu(t) + \lambda S_\kappa^{n-1}(t)\upsilon(t)\mu(t) = 0, \tag{4.8}$$

$$-(S_\kappa^{n-1}\mu'(t))'\upsilon(t) - \lambda S_\kappa^{n-1}(t)\left(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{nC_\kappa^2(t)} - \frac{\lambda}{n^2}\frac{S_\kappa^2(t)}{C_\kappa^2(t)}\right)\mu(t)\upsilon(t) = 0. \tag{4.9}$$

Somando (4.8) e (4.9) e integrando de 0 a t obtemos

$$S_\kappa^{n-1}(\upsilon'\mu - \mu'\upsilon)(t) = -\int_0^t \lambda S_\kappa^{n-1}(t)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{nC_\kappa^2(t)} + \frac{\lambda}{n^2}\frac{S_\kappa^2(t)}{C_\kappa^2(t)}\right)\mu(t)\upsilon(t)dt. \tag{4.10}$$

Como

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{nC_\kappa^2(t)} + \frac{\lambda}{n^2}\frac{S_\kappa^2(t)}{C_\kappa^2(t)}\right) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n\cosh^2(\sqrt{-\kappa}\cdot t)} + \frac{\lambda}{(-\kappa)n^2}\frac{\operatorname{senh}^2(\sqrt{-\kappa}\cdot t)}{\cosh^2(\sqrt{-\kappa}\cdot t)}\right)$$

é positivo, pois $-\kappa > 0$ e $\cosh^2(\sqrt{-\kappa}\cdot t) > 1$ para $0 < t < r$, temos

$$\lambda S_\kappa^{n-1}(t)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{nC_\kappa^2(t)} + \frac{\lambda}{n^2}\frac{S_\kappa^2(t)}{C_\kappa^2(t)}\right)\mu(t)\upsilon(t) > 0.$$

Portanto, $\upsilon'(t)\mu(t) - \mu'(t)\upsilon(t) < 0$ para $0 < t < r$. Isto resolve o caso $\kappa < 0$.

Suponha que $\kappa > 0$. Temos $S_\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\operatorname{sen}(\sqrt{\kappa}\cdot t)$ para $t \in (0, r)$ com $r < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Defina $\mu(t) = C_\kappa(t)^{\frac{-\lambda}{n\kappa}}$. Assim, $\mu'(t) = \frac{\lambda}{n}S_\kappa(t)C_\kappa(t)^{\frac{-\lambda}{n\kappa}-1}$. Procedendo de maneira similar como no caso anterior obtemos que υ e μ satisfazem as seguintes identidades diferenciais:

$$(S_\kappa^{n-1}\upsilon')'(t) + \lambda S_\kappa^{n-1}(t)\upsilon(t) = 0,$$

$$(S_\kappa^{n-1}\mu)'(t) + \lambda S_\kappa^{n-1}(t)\left(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{nC_\kappa^2(t)} + \frac{\lambda}{n^2}\frac{S_\kappa^2(t)}{C_\kappa^2(t)}\right)\mu(t) = 0.$$

Acima, multiplicando a primeira identidade por μ e a segunda por $-\upsilon$. Adicioná-las e integrando de 0 a t resulta em

$$S_\kappa^{n-1}(\upsilon'\mu - \mu'\upsilon)(t) = -\int_0^t \lambda S_\kappa^{n-1}(t)\left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{nC_\kappa^2(t)} + \frac{\lambda}{n^2}\frac{S_\kappa^2(t)}{C_\kappa^2(t)}\right)\mu(t)\upsilon(t)dt. \tag{4.11}$$

Claramente,

$$\lambda S_\kappa^{n-1}(t)\left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{nC_\kappa^2(t)} + \frac{\lambda}{n^2}\frac{S_\kappa^2(t)}{C_\kappa^2(t)}\right)\mu(t)\upsilon(t) > 0,\ t \in (0,r), r > \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

Portanto, temos que $\upsilon'(t)\mu(t) - \mu'(t)\upsilon(t)$ para $0 < t < r$, $r > \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$.

Finalmente, para $\kappa = 0$ usaremos o mesmo precedimento. Defina $\mu(t) = e^{-\frac{\lambda t^2}{2n}}$. A funções υ e μ satisfazem as seguintes idetidades:

$$(t^{n-1}\upsilon'(t))' + \lambda t^{n-1}\upsilon(t) = 0,$$

$$(t^{n-1}\mu'(t))' = \lambda t^{n-1}(1 - \frac{\lambda t^2}{n^2})\mu(t) = 0.$$

Acima, multiplicamos a primeira identidade por μ e a segunda identidade por $-\upsilon$. Adicioná-las e integrando de 0 a t o resultado obtido será

$$t^{n-1}(\upsilon'(t)\mu(t) - \upsilon(t)\mu'(t)) = -\frac{\lambda^2}{n^2}\int_0^t \mu(t)\upsilon(t)dt < 0,\ \forall t \in (0,r).$$

Então $\upsilon'(t)\mu(t) - \mu'(t)\upsilon(t) < 0$. Isto prova o lema. □

4.2 Prova dos Teoremas Principais

Definimos **raio de injetividade**, $\mathrm{inj}(x_0)$ em p, como o maior número real $r > 0$ tal que a aplicação exponencial $\exp_p\colon B(r) \subset E_p \subset T_pM \to \exp_p(B(r)) \subset M$ seja um difeomorfismo. Ver (2.5).

Teorema 4.1. *Seja $\varphi : M \hookrightarrow N \times \mathbb{R}$ uma subvariedade mínima completa de dimensão m, onde N tem curvatura seccional radial $K(\gamma(t))(\gamma'(t), \upsilon) \leq \kappa$, $\upsilon \in T_{\gamma(t)}N$, $|\upsilon| = 1$, $\upsilon \perp \partial t$, ao longo da geodésica $\gamma(t)$ partindo do ponto $x_0 \in N$. Seja $\Omega \subset \varphi^{-1}(B_N(x_0, r) \times \mathbb{R})$ uma componente conexa, onde $r < \min\{\mathrm{inj}(x_0), \pi/2\sqrt{\kappa}\}(\pi/2\sqrt{\kappa} = \infty$ se $\kappa \leq 0)$. Então*

$$\lambda^*(\Omega) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r)). \tag{4.12}$$

Se Ω é limitado, então a desigualdade (4.12) é estrita.

Prova. Seja $\rho_N(x) = \mathrm{dist}_N(x_0, x)$ a função distância em N para x_0 e seja $\upsilon : B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r) \to \mathbb{R}$ a primeira autofunção positiva associada ao primeiro autovalor $\lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r))$ da bola geodésica de raio r do espaço forma $\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)$. A autofunção υ é radial, i.e., $\upsilon(x) = \upsilon(|x|)$, e podemos olhar para υ definida em $[0, r]$ satisfazendo a equação

$$\upsilon''(t) + (m-2)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t)\upsilon'(t) + \lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r))\upsilon(t) = 0,\ t \in (0, t). \tag{4.13}$$

Escolha a primeira autofunção que satisfaz as condições iniciais $\upsilon(0) = 1$ e $\upsilon'(0) = 0$. Agora defina $g : B_N(r) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g = \upsilon \circ \rho_N \circ p$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ por $f = g \circ \varphi$, onde $p : N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a projeção no primeiro fator. Se fixado $X = -\mathrm{grad} \log f$, segue das proposições 2.2 e 2.4 que $\mathrm{div}X - |X|^2 = -\Delta f/f$. Assim, pelo teorema 3.3, temos

$$\lambda^*(\Omega) \geq \inf_\Omega(-\frac{\Delta f}{f}).$$

Para nosso objetivo encontraremos um limite inferior para $-\Delta f/f$. Seja $x \in \Omega$ e $\{e_1, \ldots, e_m\}$ uma base ortonormal qualquer para $T_x\Omega$. Lembramos que o Laplaciano de f em x é dado por

$$\Delta_M f(x) = \sum_{i=1}^m Hess_{(N\times\mathbb{R}}g(\varphi(x))(e_i, e_i) + \langle \mathrm{grad}\, g, \alpha(e_i, e_i)\rangle.$$

E se resume a

$$\Delta_M f(x) = \sum_{i=1}^m Hess_{(N\times\mathbb{R})}g(\varphi(x))(e_i, e_i), \tag{4.14}$$

pois a imersão φ é mínima. Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta_M f(x) &= \sum_{i=1}^m Hess_{(N\times\mathbb{R})}(\upsilon \circ \rho_N \circ p)(\varphi(x))(e_i, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^m Hess_{(N\times\mathbb{R})}(\upsilon \circ \rho_N)(p(\varphi(x)))(e_i, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^m Hess_N \upsilon \circ \rho_N(q)(e_i, e_i). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Considere $\{\mathrm{grad}\,\rho_N, \partial/\partial\theta_1, \ldots, \partial/\partial\theta_{n-1}, \partial/\partial s\}$ uma base ortonormal para $T_{(q,s)}(N\times\mathbb{R})$, onde $\{\mathrm{grad}\,\rho_N, \partial/\partial\theta_1, \ldots, \partial/\partial\theta_{n-1}\}$ é uma base ortornormal para T_qN (coordenadas polares). Seja $\{e_1, \ldots, e_m\}$ uma base ortonormal para $T_x\Omega$ e escreva

$$e_i = a_i \cdot \mathrm{grad}\,\rho_N + b_i \cdot \partial/\partial s + \sum_{j=1}^{n-1} c_i^j \cdot \partial/\partial\theta_j, \tag{4.16}$$

onde a_i, b_i, c_i^j são constantes satisfazendo $a_i^2+b_i^2+\sum_{j=1}^{n-1}(c_i^j)^2 = 1$, $i = 1, \ldots, m$. Para calcular $\Delta_M f(x)$ lembramos que $\varphi(x) = (q, s)$, e colocamos $t = \rho_N(q)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= \sum_i^m [e_i(\upsilon'(t))\langle \operatorname{grad} \rho_N, e_i\rangle + \upsilon'(t) Hess_N \rho_N(e_i, e_i)] \\ &= \upsilon''(t)\sum_{i=1}^m a_i^2 + \upsilon'(t)\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{n-1}(c_i^j)^2 Hess\rho_N(\partial/\partial\theta_j, \partial/\partial\theta_j).\end{aligned}$$

Já que $\upsilon'(t) \leq 0$ obtemos pelo corolário 2.1 (Teorema da Comparação do Hessiano) que

$$\begin{aligned}-\Delta f(x) &\geq -\upsilon''(t)\sum_{i=1}^m a_i^2 - \upsilon'(t)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t)\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{n-1}(c_i^j)^2 \\ &= -\upsilon''(t)\sum_{i=1}^m a_i^2 - \upsilon'(t)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t)\left[m - \sum_{i=1}^m a_i^2 - \sum_{i=1}^m b_i^2\right] \\ &= -\upsilon''(t) - (m-2)\upsilon'(t)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t) \\ &\quad +\upsilon''(t)\left[1 - \sum_{i=1}^m a_i^2\right] - \upsilon'(t)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t)\left[\left(1 - \sum_{i=1}^m a_i^2\right) + \left(1 - \sum_{i=1}^m b_i^2\right)\right] \\ &= \lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r))\upsilon(t) \\ &\quad +\upsilon''(t)\left[1 - \sum_{i=1}^m a_i^2\right] - \upsilon'(t)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t)\left[\left(1 - \sum_{i=1}^m a_i^2\right) + \left(1 - \sum_{i=1}^m b_i^2\right)\right].\end{aligned} \tag{4.17}$$

Agora vamos mostrar que a última linha de (4.17) é não negativa; isto é,

$$\upsilon''(t)\left[1 - \sum_{i=1}^m a_i^2\right] - \upsilon'(t)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t)\left[\left(1 - \sum_{i=1}^m a_i^2\right) + \left(1 - \sum_{i=1}^m b_i^2\right)\right] \geq 0. \tag{4.18}$$

Como consequência de (4.18) obteremos

$$-\frac{\Delta f}{f}(x) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r)). \tag{4.19}$$

Para isso, substitua $\upsilon''(t) = -(m-2)\upsilon'(t)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t) - \lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r))\upsilon(t)$ em (4.18) e obtenha

$$\upsilon''(t)\left[1 - \sum_{i=1}^m a_i^2\right] - \upsilon'(t)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t)\left[\left(1 - \sum_{i=1}^m a_i^2\right) + \left(1 - \sum_{i=1}^m b_i^2\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= -\left[(m-1)\upsilon'(t)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t) + \lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r))\upsilon(t)\right]\left[1-\sum_{i=1}^m a_i^2\right] \\
&\quad -\upsilon'(t)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t)\left[1-\sum_{i=1}^m b_i^2\right] \geq 0.
\end{aligned}
$$

A última igualdade segue do fato que

$$
(m-1)\upsilon'(t)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t)\lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r))\upsilon(t) < 0,
$$

pelo Lema Técnico, e

$$
\left[1-\sum_{i=1}^m a_i^2\right] \geq 0, \left[1-\sum_{i=1}^m b_i^2\right] \geq 0.
$$

De (4.19) concluímos que

$$
\lambda^*(\Omega) \geq \inf_\Omega(-\Delta f/f) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r)).
$$

Para provar a segunda afirmação do teorema, suponha que temos a igualdade $\lambda_1(\Omega) = \lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r))$, então $\lambda^*(\Omega) \geq \inf_\Omega(-\Delta f/f)$, e portanto, segue da proposição 3.1 que f é uma autofunção. Consequentemente, se observamos (4.18) temos (em cada ponto de Ω)

$$
\upsilon''(t)\left[1-\sum_{i=1}^m a_i^2\right] - \upsilon'(t)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t)\left[\left(1-\sum_{i=1}^m a_i^2\right) + \left(1-\sum_{i=1}^m b_i^2\right)\right] = 0,
$$

donde

$$
\begin{aligned}
&-\left[(m-1)\upsilon'(t)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t) + \lambda_1(B_{\mathbb{N}^{m-1}(\kappa)}(r))\upsilon(t)\right]\left[1-\sum_{i=1}^m a_i^2\right] \\
&-\upsilon'(t)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t)\left[1-\sum_{i=1}^m b_i^2\right] = 0,
\end{aligned}
$$

o que equivale a

$$
1 = \sum_{i=1}^m a_i^2 = \sum_{i=1}^m b_i^2.
$$

Por outro lado, podemos escrever, para cada $x \in \Omega$

$$
\operatorname{grad}_N \rho = \sum_{i=1}^m a_i e_i + (\operatorname{grad}_N \rho)^\perp,
$$

onde $(\operatorname{grad}_N \rho)^\perp$ é normal ao espaço tangente $T_x\Omega$. Da mesma forma, escrevemos

$$
\frac{\partial}{\partial s} = \sum_{i=1}^m b_i e_i + \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^\perp.
$$

Observe que

$$\begin{aligned}\|\mathrm{grad}_N\,\rho\|^2 &= \langle \mathrm{grad}_N\,\rho, \mathrm{grad}_N\,\rho\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^m a_i e_i + (\mathrm{grad}_N\,\rho)^\perp, \sum_{i=1}^m a_i e_i + (\mathrm{grad}_N\,\rho)^\perp \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^m a_i^2 + \|(\mathrm{grad}_N\,\rho)^\perp\|^2.\end{aligned}$$

e similarmente

$$\|\ \partial/\partial s\|^2 = \sum_{i=1}^m b_i^2 + \|(\partial/\partial s)^\perp\|^2.$$

Portanto,

$$(\mathrm{grad}_N \rho)^\perp = 0 = (\partial/\partial s)^\perp.$$

Assim, os vetores $\mathrm{grad}_N\,\rho$ e $\partial/\partial s$ pertencem a $T_x\Omega$ para cada $x \in \Omega$. Dessa forma, poderiamos ter escolhido em (4.16) uma base ortonormal para $T_x\Omega$ da seguinte forma: $e_1 = \mathrm{grad}_N\,\rho$, $e_2 = \partial/\partial s$ e $\{e_3, \ldots, e_m\} \subset \{\partial/\partial\theta_1, \ldots, \partial/\partial\theta_{n-1}\}$. Claramente o conjunto dos vetores $\mathrm{grad}_N\,\rho$ e $\partial/\partial s$ formam campos de vetores suaves em Ω uma vez que são restrições de campos de vetores suaves em $N\times\mathbb{R}$ para uma subvariedade imersa suave. As curvas integrais do campo de vetores $\partial/\partial s$ em Ω são $\{x\} \times \mathbb{R}$ contidas em $\varphi(M)$, e $\Omega = \varphi^{-1}(B_N(r) \times \mathbb{R})$ não é limidado. Isto prova o teorema 4.1.

□

Apartir de agora iremos propor o estudo de tons Fundamental de domínios em subvariedades com curvatura média localmente limitada em $N\times\mathbb{R}$ na qual definiremos a seguir.

Definição 4.1. *Uma subvariedade imersa $\varphi : M \hookrightarrow N \times \mathbb{R}$ tem curvatura média localmente limitada $|H|$ em $N \times \mathbb{R}$ se para qualquer $p \in N$ e $r > 0$, o número*

$$h(p, r) = \sup\{|H(x)|; x \in \varphi(M) \cap (B_N(p, r) \times \mathbb{R})\}$$

é finito.

Teorema 4.2. *Seja $\varphi : M \hookrightarrow N \times \mathbb{R}$ uma subvariedade imersa completa de dimensão m com curvatura média localmente limitada em $N \times \mathbb{R}$, onde N tem curvatura seccional $K \leq \kappa$, ao longo de uma geodésica partindo de um ponto $x_0 \in N$. Seja $\Omega(r) \subset \varphi^{-1}(B_N(p, r) \times \mathbb{R})$ uma componente conexa com $r \leq \min\{\mathrm{inj}_N(x_0), \pi/2\sqrt{\kappa}\}$. Suponha, além disso*

(a) *Se* $|h(x_0| < \Lambda^2 < \infty$, *então* $r \leq (C_\kappa/S_\kappa)^{-1}(\Lambda^2/(m-2))$ *ou*

(b) *Se* $\lim_{r\to\infty} h(x_0, r) = \infty$ *então* $r \leq (C_\kappa/S_\kappa)^{-1}(h(x_0, r_0)/(m-2))$, *onde* r_0 *é tal que* $(m-2)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(r_0) - h(x_0, r_0) = 0$.

Então nós temos

$$\lambda^*(\Omega(r)) \geq \left[\frac{(m-2)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(r) - h(x_0, r)}{2}\right]^2 > 0.$$

Prova. Defina $\widetilde{\rho}_N : N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\widetilde{\rho}_N(x, t) = \rho_N(x)$, $\rho_N = \mathrm{dist}_N(x_0, x)$. Seja $\Omega(r) = \varphi^{-1}(B_N(x_0, r) \times \mathbb{R})$, $f = \widetilde{\rho}_N \circ \varphi$ e $X = \mathrm{grad}\, f$. A idéia é escolher convenientemente $r < \min\{\mathrm{inj}(x_0), \pi/2\sqrt{\kappa}\}$, $\pi/2\sqrt{\kappa} = \infty$ se $\kappa \leq 0$ de tal sorte que $\inf_{\Omega(r)} \mathrm{div} X > 0$. Apartir daí, segue do teorema 3.4 que

$$\lambda^*(\Omega(r)) \geq \left(\frac{\inf \mathrm{div} X}{2 \sup |X|}\right)^2.$$

Lembrando que $\mathrm{div} X = \nabla_M f$ e usando (2.2) temos

$$\nabla_M f(x) = \left[\sum_{i=1}^m Hess_{N\times\mathbb{R}}\widetilde{\rho}_N(e_i, e_i) + \langle \mathrm{grad}_{N\times\mathbb{R}}\widetilde{\rho}_N, \overrightarrow{H}\rangle\right](\varphi(x)),$$

onde $\overrightarrow{H} = \sum_{i=1}^m \alpha(e_i, e_i)$ é o vetor curvatura média de $\varphi(M)$ em $\varphi(x)$ e $\{e_i, \ldots, e_m\}$ é uma base ortonormal de T_xM como em (4.16) identificados com $\{d\varphi \cdot e_1, \ldots, d\varphi \cdot e_m\}$. Agora, observe que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m Hess_{N\times\mathbb{R}\widetilde{\rho}_N}(e_i, e_i) &= \sum_{i=1}^m Hess_N \rho(e_i, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n-1} (c_j^i)^2 Hess_N \rho_N(\partial/\partial\theta_j, \partial/\partial\theta_j) \qquad (4.20) \\
&\geq \sum_{i=1}^m (1 - a_i^2 - b_i^2)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(r).
\end{aligned}$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{grad}_N \rho_N, \overrightarrow{H}\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^m a_i e_i + (\mathrm{grad}_N \rho_N)^\perp, \overrightarrow{H}\right\rangle \\
&= \langle (\mathrm{grad}_N \rho_N)^\perp, \overrightarrow{H}\rangle \\
&\leq |H|\sqrt{1 - \sum_{i=1}^m a_i^2} \qquad (4.21) \\
&\leq h(x_0, r)\sqrt{1 - \sum_{i=1}^m a_i^2},
\end{aligned}$$

a primeira desigualdade segue do Teorema de Schwarz e da igualdade

$$|(\mathrm{grad}_N \rho_N)^{\perp}|^2 = (1 - \sum_{i=1}^{m} a_i^2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{grad}_{N\times\mathbb{R}} \widetilde{\rho}_N, \overrightarrow{H} \rangle &= \langle \mathrm{grad}_N \rho_N, \overrightarrow{H} \rangle \\ &\leq h(x_0, r)\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{m} a_i^2}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Portanto, de (4.20), (4.21) e (4.22) temos que

$$\Delta_M f(x) \geq (m-2)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(r) - h(x_0, r) > 0.$$

Voltando ao teorema, observamos que temos dois casos a considerar. Para o primeiro caso, isto é , $|h(x_0, r)| < \Lambda^2 < \infty$ escolha

$$r \leq \min\{\mathrm{inj}(x_0), \pi/2\sqrt{\kappa}, (C_\kappa/S_\kappa)^{-1}\Lambda^2/(m-2))\}.$$

No caso em que $\lim_{r\to\infty} h(x_0, r) = \infty$ existe r_0 tal que $(m-2)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(r_0) - h(x_0, r_0) = 0$, já que podemos assumir sem perda de generalidade que $h(x_0, r)$ é uma função contínua e não decrescente em r. Então escolhemos

$$r \leq \min\{\mathrm{inj}(x_0), \pi/2\sqrt{\kappa}, (C_\kappa/S_\kappa)^{-1}(h(x_0, r_0)/(m-2))\}.$$

Lembrando que escolhemos r satisfazendo $\inf_{\Omega(r)} \mathrm{div} X > 0$. Portanto, em ambos os casos, temos

$$\lambda^*(\Omega(r)) \geq \left[\frac{(m-2)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(r) - h(x_0, r)}{2}\right]^2 > 0.$$

□

Referências Bibliográficas

[1] Bessa, G. P.;Costa, M. S. *Eigenvalues estimates for submanifolds with locally bounded Mean curvature in* $N \times \mathbb{R}$. American Mathematical Society, v. 137, p. 1093-1103, 2009.

[2] Bessa, G. P.; Montenegro, J. F. *An extension of Barta's Theorem and geometrics applications.* Ann. Global Anal and Geometry, v. 31, p. 345-362, 2007.

[3] Bessa, G. P.; Montenegro, J. F. *Eigenvalues estimates for submanifolds with locally bounded mean curvature.* Ann. Global Anal. and Geom. v. **24**,p. 279-290, 2003.

[4] Bessa, G. P.; Montenegro, J. F. *On compact H-hypersufaces of* $N \times \mathbb{R}$. Geom. Dedicata. v. **27** p. 1-5, 2007.

[5] Bérard, Pierre H. *Spectral geometry: direct and inverse problems.* Berlin: Springer-Verlag, 1986. 287 p.(Lectures Notes in Mathematics; 1207).

[6] Chavel, I. *Eigenvalues in Riemannian Geometry.* Orlando: Academic Press, 1984. 386 p. (Pure and Applied Mathematics; 115).

[7] Candel, A. *Eigenvalues in for minimal surfaces in hyperbolic espace.* Trans. Amer. Math. Soc. v. **359** p. 3567-3575, 2007.

[8] Berger, M.; Gauduchon, P.;Mazet, E.*Le spectre d'une variété riemannianne.* Berlin: Spriger-Verlag,1971. 251 p.(Lectures notes in mathematics; 1994).

[9] Cheng, S. Y. *Eigenfunctions and eigenvalues of the Laplacian.* In: Differencial geometry. Providence: American Mathematic Society, v. 27, part 2, p. 185-193, 1975.(Procedings os symposia in pure and mathematicas).

[10] Cheng, S. Y.; Li, P.; Yau, T. *Heat equations on minimal submanifolds and their applications*. Amer. J. Math., v. 106, p. 1033-1065, 1984.

[11] Cheung, L. -F.; Leung, P. F. e P. F. Leung, *Eigenvalues estimates for submanifolds with bounded mean curvature in the hyperbolic space*. Math. Z. v. **236**, p. 525-530, 2001.

[12] Carmo, M. P. do *Geometria Riemanniana*. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1988, 299 p.

[13] Jorge, L; Koutroufiotis, D. *An estimate for the curvature of bounded submanifolds*. Amer. J. Math. v. **103**, p. 1033-1035, 1981.

[14] Meeks, W.; Rosenberg, H. *The theory of minimal sufaces in* $M^2 \times \mathbb{R}$. Comment. Math. Helv. v. **80**, n. 4, p 811-858, 2005.

[15] Meeks, W.; Rosenberg, H. *Stable minimal surfaces in* $M^2 \times \mathbb{R}$. J. Differential Geom. v. **68**, n. 3, p. 515-534, 2004.

[16] A. Caminha, *Tópicos de Geometria Diferencial*. Preprint.

[17] Schoen, R; Yau, S. T. *Lectures on Differential Geometry*. Conference Proceedings an Lecture Notes in Geometry and Topology, v. 1, 1994