UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO EM MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOSÉ DEIBSOM DA SILVA

UMA EXTENSÃO DO TEOREMA DE BARTA E APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS

FORTALEZA-CE

2010

JOSÉ DEIBSOM DA SILVA

UMA EXTENSÃO DO TEOREMA DE BARTA E APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Gregório Pacelli Feitosa Bessa

FORTALEZA-CE

2010

S58e Silva, José Deibsom da

Uma extensão do teorema de Barta e aplicações geométricas/ José Deibsom da Silva. - Fortaleza: 2010.

41 f.

Orientador: Prof. Gregório Pacelli Feitosa Bessa

Área de concentração: Matemática

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Departamento de Matemática, 2010.

1-Geometria diferencial

CDD 516.36

A mim e aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Primeiro a agradeço a toda minha família, especialmente os meus pais, Sr. Antonio e Dona Da Paz, pois eles são os responsáveis por eu estar aqui hoje. Aos meus irmãos, em ordem de idade, Janice, Marcos, Adriana, Jean e Márcio pela força e por sempre terem acreditado em mim. E aos meus sobrinhos Janaina, Jailson, Geanne, André, Layssa, Jean Júnior, Arthur, Júlia, Layane, Adriele e Vitor pelo amor que eles têm por mim e eu por eles.

A minha namorada Letícia por ter me esperado todo esse tempo e pelo apoio que me dera durante esses dois anos.

Aos meus grandes amigos de jornada Filipe, Leon e Tiago. Amizade essa que perdura desde a graduação e fez com que esses dois anos longe de minha família fossem menos tristes. E espero que sejamos sempre assim: amigos.

Ao meu grande amigo Bartolomeu pela ajuda, pela força e pela amizade sem nunca ter cobrado nada em troca, a não ser meu sucesso.

A todos os novos amigos do mestrado e do doutorado da UFC, sem citar para não esqucer de nenhum, que fiz no decorrer do percurso. Lembrarei sempre de todos.

A todos o professores que fizeram parte de minha formação, contando de meu ensino médio. Meus sinceros agradecimentos.

À Capes pelo apoio financeiro.

E por último, porém mais importante, ao meus Deus por ter me dado saúde e inteligência para chegar onde cheguei.

Obrigado a todos!

RESUMO

Apresentamos uma extensão do Teorema de Barta devido a G. P. Bessa and J. F. Montenegro e fazemos algumas aplicações geométricas do resultado obtido. A primeira aplicação geométrica da extensão do Teorema de Barta é uma extensão do Teorema de Cheng sobre estimativas inferiores de autovalores do Laplaciano em bolas geodésicas normais. A segunda aplicação geométrica éuma generalização do Teorema de Cheng-Li-Yau de estimativas de autovalores para uma subvariedade mínima do espaço forma.

Palvras-chave: Teorema de Barta. Teorema de comparação de autovalores de Cheng.

ABSTRACT

We present an extension to Barta's Theorem due to G. P. Bessa and J. F. Montenegro and we show some geometric applications of the obtained result. As first application, we extend Chang's lower eigenvalue estimates of the Laplacian in normal geodesic balls. As second application, we generalize Cheng-Li-Yau's eigenvalue estimates to a minimal submanifold of the space forms.

Keywords: Barta's theorem. Chang's eigenvalue comparison Theorem

Sumário

Introdução

O problema de Dirichlet consiste em encontrar todos os números reais λ para os quais se tem pelo menos uma função não nula $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ que seja solução da equação $\Delta f + \lambda f = 0$ com $f|\Omega > 0$ e $f|\partial\Omega = 0$ onde, $\Omega \subset M$ é um aberto limitado da variedade Riemanniana M. A existencia de tais autovalores é garantida pelo teorema espectral que diz que tais autovalores consistem de uma sequência $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots \leq +\infty$. Definimos também o tom fundamental de um subconjunto aberto conexo $\Omega \subset M$ por

$$\lambda^*(\Omega) = \inf\left\{ \frac{\int_\Omega |\mathrm{grad} f|^2}{\int_\Omega f^2}, \ f \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \right\}.$$

Quando Ω é compacto com bordo $\partial\Omega$ suave por partes, possivelmente vazio, o tom fundamental $\lambda^*(\Omega)$ é o primeiro autvalor $\lambda_1(\Omega)$ de Ω. Neste trabalho provaremos uma extensão do Teorema de Barta, Teorema (2.3) devido a G.P. Bessa e J.F. Montenegro que pode ser encontrado em [2], que dá uma limitação inferior para o tom fundamental λ^* de uma variedade Riemanniana M. Tal resultado será usado para dar-se alguma aplicações geométricas. A primeira delas é uma extensão do teorema de estimativas de autovalores de Cheng, que pode ser encontrado em [5]. Este resultado dá, sob determinadas hipóteses, uma comparação entre o tom fundamental λ^* de uma bola geodésica numa variedade Riemanniana M e o primeiro autovalor do laplaciano λ_1, numa bola geodésica no espaço forma $\mathbb{N}^n(c)$ e garante que se eles são iguais então tais bolas são isométricas.

A segunda aplicação geométrica também é baseada no Teorema (2.3), e é de fato uma generalização do Teorema de Cheng-Li-Yau [6], para estimativas de autovalores em subvariedades mínimas do espaço forma $\mathbb{N}^n(c)$.

Tais resultados aqui apresentados visam aumentar o conhecimento dos autovalores do laplaciano que é um tema de bastante interesse na pesquisa Matemática.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 O Gradiente, Divergente e o Laplaciano

Nesta seção iremos dar as definições de gradiente, divergente e laplaciano de uma função $f\colon M \to \mathbb{R}$ de classe C^k onde M é uma variedade riemanniana, visto que esses são objetos que serão usados no decorrer deste trabalho.

1.1.1 O Gradiente

Definição 1.1. *Seja $f\colon M \to \mathbb{R}$ defininos o gradiente de f, como o campo vetorial* $\mathrm{grad} f \in \mathcal{X}(M)$ *onde $\mathcal{X}(M)$ é o conjuto dos campos de vetores de classe C^∞ em M, por*

$$\langle \mathrm{grad} f, V\rangle = df(V),\ \forall V \in \mathcal{X}(M).$$

Propriedades 1.1.1.
a) $\mathrm{grad}(f+g) = \mathrm{grad} f + \mathrm{grad} g$

b) $\mathrm{grad}(fg) = g(\mathrm{grad} f) + f(\mathrm{grad} g)$

Prova.

a)

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{grad}(f+g), V\rangle &= d(f+g)(V)\\ &= (df+dg)(V)\\ &= df(V)+dg(V)\\ &= \langle \mathrm{grad} f, V\rangle + \langle \mathrm{grad} g, V\rangle\\ &= \langle \mathrm{grad} f + \mathrm{grad} g, V\rangle.\end{aligned}$$

Como V é arbitrário segue-se que $\mathrm{grad}(f+g) = \mathrm{grad} f + \mathrm{grad} g$.

b)

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{grad}(fg), V\rangle &= d(fg)(V)\\ &= (fdg+gdf)(V)\\ &= fdg(V)+gdf(V)\\ &= f\langle \mathrm{grad} g, V\rangle + g\langle \mathrm{grad} f, V\rangle\\ &= \langle f(\mathrm{grad} g) + g(\mathrm{grad} f), V\rangle.\end{aligned}$$

como V é qualquer então $\mathrm{grad}(fg) = g(\mathrm{grad} f) + f(\mathrm{grad} g)$. □

Se $(x_1, x_2, ..., x_n)$ é uma sistema de coordenadas em M temos

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

e

$$V = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

asim em coordenadas,

$$df(V) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i.$$

onde $v_i\colon M \to \mathbb{R}$ são as coordenadas de V. Se fizermos $\mathrm{grad} f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ onde $a_i\colon M \to \mathbb{R}$ então

$$\langle \mathrm{grad} f, V\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i a_j \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i a_j g_{ij}.$$

Portanto pela definição de gradiente

$$\sum_{i=1}^{n} v_i a_j g_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i, \forall V.$$

Dado $V = \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ daí temos que

$$\sum_j a_j g_{kj} = \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

e

$$\sum_{j,k} a_j g_{kj} g^{kl} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} g^{kl}$$

onde $(g^{kl}) = (g_{kl})^{-1}$, o que implica

$$\sum_j a_i \delta_{jl} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} g^{kl}$$

e assim

$$a_l = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} g^{kl}.$$

Logo

$$\mathrm{grad} f = \sum_{i,k} \frac{\partial f}{\partial x_k} g^{ki} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

1.1.2 Divergência

Definição 1.2. *Dado o campo de vetores $X \in \mathcal{X}(M)$, o divergente de X no ponto p é definido como*

$$(\mathrm{div} X)(p) = \mathit{traço}(v \longmapsto \nabla_v X)$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de M. Se $e_1, e_2, ..., e_n$ é uma base ortonormal, então

$$(\mathrm{div} X)(p) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle.$$

Propriedades 1.1.2.

a) $\mathrm{div}(X+Y) = \mathrm{div} X + \mathrm{div} Y$

b) $\mathrm{div}(fX) = f \mathrm{div} X + \langle \mathrm{grad} f, X \rangle \ \forall f \in C^\infty(M)$

Prova.

a)

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(X+Y) &= \text{traço}(v \longmapsto \nabla_v (X+Y)) \\ &= \text{traço}(v \longmapsto (\nabla_v X + \nabla_v Y) \\ &= \text{traço}(v \longmapsto \nabla_v X) + \text{traço}(v \longmapsto \nabla_v Y) \\ &= \mathrm{div} X + \mathrm{div} Y \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(fX) &= \text{traço}(v \longmapsto \nabla_v fX) \\
&= \text{traço}(v \longmapsto f\nabla_v X + v(fX)) \\
&= \text{traço}(v \longmapsto f\nabla_v X) + \text{traço}(v \longmapsto v(f)X) \\
&= f\operatorname{div}X + \textstyle\sum_{i=1}^n \langle e_i(fX), e_i\rangle \\
&= f\operatorname{div}X + \textstyle\sum_{i=1}^n f_i x_i \\
&= f\operatorname{div}X + \langle \operatorname{grad} f, X\rangle.
\end{aligned}$$

□

Em coordenadas temos que

$$\operatorname{div}X = \sum_{i,j} \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X, \frac{\partial}{\partial x_j}\rangle g^{ij}.$$

Então se $X = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, onde $a_i\colon M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, teremos

$$\operatorname{div}X = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_j \Gamma^i_{ij}$$

De fato,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X = \sum \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum a_j \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Assim,

$$\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X, \frac{\partial}{\partial x_k}\rangle = \sum \frac{\partial a_j}{\partial x_i} g_{jk} + \sum a_j \Gamma^k_{ij} g_{lk}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}X &= \sum \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X, \frac{\partial}{\partial x_k}\rangle g^{ik} \\
&= \sum \frac{\partial a_j}{\partial x_i} g_{jk} g^{ik} + \sum a_j \Gamma^l_{ij} g_{lk} g^{ik} \\
&= \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_i \Gamma^i_{ij}.
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Lema 1.1. *Seja* $g = \det(g_{ij})$. *Então*

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_k}(\sqrt{g} a_k) = \frac{\partial a_k}{\partial x_k} + \sum_{i,k} a_k \Gamma^i_{ik}.$$

Em coordenadas $\operatorname{div}X = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}(\sqrt{g} a_k)$.

Prova. Temos que $g = \det(g_{ij}) = \det(\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle)$ então

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_k}(\sqrt{g} a_k) = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial x_k} a_k + \sqrt{g} \frac{\partial a_k}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x_k} a_k + \frac{\partial a_k}{\partial x_k}$$

basta então calcular $\frac{\partial g}{\partial x_k}$ e o lema será mostrado. Ora, mas observe que g pode ser visto como

$$g = \langle \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \rangle.$$

onde $\wedge$ é o produto vetorial. Sendo assim temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x_k} &= 2 \sum_i \langle \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge ... \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge ... \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \rangle \\
&= 2 \sum_i \langle \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge ... \wedge \sum_l \Gamma_{ki}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \rangle \\
&= 2 \sum_{i,k} \Gamma_{ki}^i \langle \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \rangle \\
&= 2g \sum_{i,k} \Gamma_{ki}^i.
\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_k}(\sqrt{g} a_k) = \frac{1}{2g} 2g \sum_{i,k} \Gamma_{ki}^i a_k + \frac{\partial a_k}{\partial x_k} = \sum_{i,k} a_k \Gamma_{ki}^i + \frac{\partial a_k}{\partial x_k},$$

como queríamos. □

1.1.3 Laplaciano

Definição 1.3. *Seja $f\colon M \to \mathbb{R}$ uma função suave na variedade Riemanniana M. Definimos o Laplaciano de f, que denotamos por Δf, como sendo*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f).$$

Propriedades 1.1.3.

Se $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis, então

a)$\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$

b) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle$.

Prova.

a)
$$\begin{aligned}\Delta(f+g) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f+g))\\ &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}f+\operatorname{grad}g)\\ &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}f)+\operatorname{div}(\operatorname{grad}g)\\ &= \Delta f+\Delta g\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\Delta(fg) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(fg))\\ &= \operatorname{div}(f(\operatorname{grad}g)+g(\operatorname{grad}f))\\ &= \operatorname{div}(f(\operatorname{grad}g))+\operatorname{div}(g(\operatorname{grad}f))\\ &= f(\operatorname{div}(\operatorname{grad}g)+\langle\operatorname{grad}f,\operatorname{grad}g\rangle\\ &+ g(\operatorname{div}(\operatorname{grad}f))+\langle\operatorname{grad}g,\operatorname{grad}f\rangle\\ &= f\Delta g+g\Delta f+2\langle\operatorname{grad}f,\operatorname{grad}g\rangle.\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Em coordenadas temos

$$\begin{aligned}\Delta f &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}f)\\ &= \operatorname{div}\left(\sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right).\end{aligned}$$

1.2 Hessiano

Sejam M e N variedades Riemannianas completas de dimensão m e n, respectivamente. Seja $\varphi : M \longrightarrow N$ uma imersão isométrica, isto é, uma aplicação satisfazendo

$$\langle X,Y\rangle_p = \langle d\varphi(X),\, d\varphi(Y)\ \rangle_{\varphi(p)}\ \forall p\in \text{M e } \forall \text{ X} \in T_pM.$$

Considere a função diferenciável $g\colon N \to \mathbb{R}$ e a composição $f = g\circ\varphi\colon M \to \mathbb{R}$. Indentifique X com $d\varphi(X)$.
Então, temos

$$\langle\operatorname{grad}f,X\rangle = dg(X) = \langle\operatorname{grad}g,X\rangle\ \forall p\in M \text{ e } \forall X\in T_pM,$$

visto que

$$\operatorname{grad}g = \operatorname{grad}f + (\operatorname{grad}g)^\perp$$

onde $(\text{grad}g)^{\perp}$ é perpendicular a T_pM e $\langle(\text{grad}g)^{\perp}$, X $\rangle$ =0.

Nosso objetivo nessa seção é calcular o Hessiano de $f = g \circ \varphi$. Para isso, denote por ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões Riemannianas de M e N respectivamente.

Definição 1.4. *Seja $f \colon M \to \mathbb{R}$. Definimos a forma Hessiana de f por*

$$Hess(f)(X,Y) = \langle \nabla_X \text{grad} f, Y\rangle \text{ em } p \in M, \text{ para } X,\ Y \in T_pM.$$

Definição 1.5. *Seja $\varphi : M \longrightarrow N$ uma imersão. Definimos a segunda forma fundamental $\alpha : T_pM \times T_pM \longrightarrow (T_pM)^{\perp}$ da imensão φ por*

$$\alpha(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \text{ em } p \in M \text{ para } X,\ Y \in T_pM.$$

A proposição a seguir é devido a L. Jorge e D. Koutrofiotis [7]

Proposição 1.1. *Pelas difinições acima e para todo $X,\ Y \in T_pM$, temos que o Hessiano de $f = g \circ \varphi$ é dado por*

$$Hess(f)(X,Y) = Hess(g(\varphi))(X,Y) + \langle \text{grad} f, \alpha(X,Y)\rangle \tag{1.1}$$

Prova. Como

$$\alpha(X, \text{grad} f) = \overline{\nabla}_X \text{grad} f - \nabla_X \text{grad} f$$

temos

$$\begin{aligned} Hess(f)(X,Y) &= \langle \nabla_X \text{grad} f, Y\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X \text{grad} f - \alpha(X, \text{grad} f), Y\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X \text{grad} f, Y\rangle - \langle \alpha(X, \text{grad} f), Y\rangle. \end{aligned}$$

Lembrando que $\alpha(X,Y) \in (T_pM)^{\perp}$ para todo X,Y $\in T_pM$
obtemos

$$\langle \alpha(X, \text{grad} f), Y\rangle = 0.$$

Usando

$$X\langle Y, \text{grad} f\rangle = \langle \overline{\nabla}_X \text{grad} f, Y\rangle + \langle \overline{\nabla}_X Y, \text{grad} f\rangle \tag{1.2}$$

e

$$\langle \text{grad} f, X\rangle = df(X) = \langle \text{grad} g, X\rangle \tag{1.3}$$

segue-se que

$$\begin{aligned} Hessf(X,Y) &= \langle \overline{\nabla}_X \mathrm{grad} f, Y\rangle \\ &= X\langle \mathrm{grad} f, Y\rangle - \langle \overline{\nabla}_X Y, \mathrm{grad} f\rangle \\ &= X\langle \mathrm{grad} g, Y\rangle - \langle \overline{\nabla}_X Y, \mathrm{grad} f\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X \mathrm{grad} g, Y\rangle + \langle \overline{\nabla}_X Y, \mathrm{grad} g\rangle - \langle \overline{\nabla}_X Y, \mathrm{grad} f\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X \mathrm{grad} g, Y\rangle + \langle \overline{\nabla}_X Y, \mathrm{grad} g - \mathrm{grad} f\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X \mathrm{grad} g, Y\rangle + \langle \overline{\nabla}_X Y, (\mathrm{grad} g)^{\perp}\rangle \\ &= Hess(g)(X,Y) + \langle (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp}, \mathrm{grad} g\rangle \\ &= Hess(g)(X,Y) + \langle \mathrm{grad} g, \alpha(X,Y)\rangle. \end{aligned}$$

Como consequência, se calcularmos o traço em 1.1 com respeito a base $\{e_1, \ldots, e_m\}$ para T_pM, temos para o Laplaciano de f,

$$\begin{aligned} \triangle f &= TrHess(f)(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} Hess(f)(e_i, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} Hess(g)(e_i, e_i) + \langle \mathrm{grad} g, \sum_{i=1}^{n} \alpha(e_i, e_i)\rangle. \end{aligned}$$

□

Iremos agora enunciar e demonstrar um teorema que será muito usado neste trabalho de dissertação e que é de grande improtancia na literatura matemática. Para isto necessitaremos de mais alguns resultados que daremos a seguir.

1.2.1 A Função Distância

Seja M uma variedade Riemanniana defina o conjunto

$$E_p = \{v \in T_pM; \exp_p(tv) \in M\backslash Cut(p),\ \forall\ 0 \le t \le 1\}. \tag{1.4}$$

Proposição 1.2. $\exp_p : E_p \longrightarrow M\backslash Cut(p)$ *é um difeomorfismo.*

Fixando $p \in M$ denotaremos por $\rho : M\backslash(Cut(p) \cup \{p\}) \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ a função distâcia apartir de p, i.e., $\rho(q) = d(p,q)$.

Proposição 1.3. *Seja* $\gamma : [0,a] \longrightarrow M\backslash Cut(p)$ *uma geodésica normalizada partindo de* p. *Então*

$$\mathrm{grad}\rho(\gamma(t)) = \gamma'(t),\ \forall\ 0 < t < a. \tag{1.5}$$

Em particular, $|\mathrm{grad}\rho| = 1$

Prova. Seja $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, $0 \le t \le a$, e $q = \gamma(t_0)$. Se $w \in T_qM$, $w \perp \gamma'(t_0)$, segue da proposição anterior e do Lema de Gauss a existêcia de $W \in T_v(T_pM)$ tal que $\langle W, v\rangle = 0$ e $(d\exp_p)_{t_0v}W = w$. Tomemos então $\alpha\colon (-\epsilon,\epsilon) \to E_p$ tal que $|\alpha(s)| = t_0$, $\alpha(0) = t_0v$ e $\alpha'(0) = W$. Segue da unicidade de geodésica minimizante que liga $\exp_p(\alpha(s))$ a p que

$$\rho(\exp_p(\alpha(s))) = t_0,$$

e daí

$$0 = \langle \text{grad}\rho(q), (d\exp_p)_{t_0v}W\rangle = \langle \text{grad}\rho(q), w\rangle.$$

Como a igualdade acima é válida para todo $w \perp \gamma'(t_0)$, segue que grad$\rho(q)$ é múltiplo de $\gamma'(t_0)$. Mas desde que $\rho(\gamma(t)) = t$ para $0 \le t \le a$, temos

$$\langle \text{grad}\rho(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = 1,\ \forall\ 0 < t < a,$$

e daí grad$\rho(\gamma(t)) = \gamma'(t)$, para $0 < t < a$. □

Vamos então ao teorema.

Teorema 1.1 (Teorema de Comparação do Hessiano)**.** *Sejam M_1 e M_2 variedades de dimensão n e $\gamma_i : [0,a] \longrightarrow M_i$ com $i = 1,2$, duas geodésicas parametrizada pelo comprimento de arco, onde γ_i não intersecta o cut locus de $\gamma_i(p)$. Seja ρ_i a função distância de $\gamma_i(0)$ sobre M_i e K_i a curvatura secional de M_i. Suponha que em γ_1 e γ_2 com $0 \le t \le a$, tenhamos*

$$K_1(X_1, \frac{\partial}{\partial\gamma_1}) \ge K_2(X_2, \frac{\partial}{\partial\gamma_2}),$$

onde X_i é um vetor unitário qualquer em $T_{\gamma_i(t)}M_i$, perpendicular a $\frac{\partial}{\partial\gamma_i}$, então

$$Hess(\rho_1)(X_1,X_1) \le Hess(\rho_2)(X_2,X_2).$$

Prova. Seja E_1^i,. . .,E_n^i um sistema de campos de vetores ortonormais paralelo ao longo de γ_i com $E_n^i = \frac{\partial}{\partial\gamma_i}$.
Assim temos,

$$Hess(f)(X,X) = \int_0^a (|\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\widetilde{X_i}|^2 - \langle\widetilde{X_i}, R(\widetilde{X_i}, \frac{\partial}{\partial\gamma_i})\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\rangle)dt, \tag{1.6}$$

sendo $\widetilde{X_i}$ um campo de Jacobi ao longo de γ_i com $\widetilde{X_i}(\gamma_i(0)) = 0$ e $\widetilde{X_i}(\gamma_i(0)) = X$.

O campo $\widetilde{X_i}$ é decomposto como $\widetilde{X_i} = c\frac{\partial}{\partial\gamma_i} + (\widetilde{X_i})^\perp$ para algum c real.
Logo

$$0 = \langle \widetilde{X_i}, \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \rangle (\gamma(a)) = \langle c \frac{\partial}{\partial \gamma_i}, \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \rangle$$

segue-se que $c = 0$, e portanto, $\langle \widetilde{X_i}, \frac{\partial}{\partial \gamma_i} (\gamma_i(t)) = 0$ para todo $0 \leq t \leq a$. Dessa forma, $\widetilde{X_i}$ é perpendicular a E_n^i em cada ponto de γ_i.

Considere

$$\widetilde{X_2} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(t) E_i^2.$$

Tomemos $E_1^1, \ldots, E_n^1$ tal que

$$X_1 = \widetilde{X_1}(a) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(a) E_i^1(\gamma_1(a)).$$

Defina agora um campo de vetores Z ao longo de γ_1 por

$$Z = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(t) E_i^1.$$

Então Z assume os mesmos valores de $\widetilde{X_i}$ em $t = 0$ e $t = a$.
Além disso,

$$|Z| = |\widetilde{X_2}|$$

e

$$|\nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma_2}} \widetilde{X_2}| = |\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i'(t) E_i^2| = |\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i'(t) E_i^1| = |\nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma_2}} Z|.$$

Sabemos que o campo de Jacobi minimiza a forma do índice entre todos os campos de vetores ao longo da mesma geodésica com os mesmos valores de fronteira, concluimos

$$\begin{aligned}
Hess(\rho_1)(X_1, X_1) &= \int_0^a (|\frac{\partial}{\partial \gamma_1} \widetilde{X_1}|^2 - \langle \widetilde{X_1}, R(\widetilde{X_1}, \frac{\partial}{\partial \gamma_1}) \frac{\partial}{\partial \gamma_1} \rangle) dt \\
&\leq \int_0^a (|\nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma_1}} Z|^2 - \langle Z, R(Z, \frac{\partial}{\partial \gamma_1}) \frac{\partial}{\partial \gamma_1} \rangle) dt \\
&= \int_0^a (|\frac{\partial}{\partial \gamma_1} \widetilde{X_2}|^2 - K_1(Z, \frac{\partial}{\partial \gamma_1})) dt \\
&\leq \int_0^a (|\frac{\partial}{\partial \gamma_2} \widetilde{X_2}|^2 - K_2(\widetilde{X_2}, \frac{\partial}{\partial \gamma_2})) dt \\
&= Hess(\rho_2)(X_2, X_2),
\end{aligned}$$

isso prova o teorema. $\square$

1.3 Tom Fundamental

Seja M uma variedade riemanniana e $\Omega \subset M$ um aberto conexo. O tom fundamental $\lambda^*(\Omega)$ de Ω é definido por

$$\lambda^*(\Omega) = \inf\left\{\frac{\int_\Omega |\nabla f|^2}{\int_\Omega f^2}, f \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}\right\} \tag{1.7}$$

onde $f \in H_0^1(\Omega)$ é o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito a norma

$$\| \varphi \|_\Omega^2 = \int_\Omega \varphi^2 + \int_\Omega |\nabla\varphi|^2.$$

Se $\Omega_1 \subset \Omega_2$ são abertos, então

$$\lambda^*(\Omega_1) \geq \lambda^*(\Omega_2) \geq 0.$$

Se $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots \subset M$ é uma exaustão de M então $\lim_{n\to\infty} \lambda^*(\Omega_n)$ existe e se tem

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^*(\Omega_n) = \lambda^*(M)$$

onde $\lambda^*(M)$ é dada por (1.7)

Capítulo 2

Uma Extensão do Teorema de Barta

Neste capítulo iremos nos dedicar a demonstração do teorema que pode ser considerado uma extensão do Teorema de Barta.

Necessitaremos no decorrer do seguinte teorema:

Teorema 2.1 (Fórmula de Green)**.** *Sejam $f\colon M \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2(M)$, $h\colon M \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1(M)$, de modo que pelo menos uma delas tenha com suporte compacto. Então,*

$$\int_M \{h\Delta f + \langle \mathrm{grad} h, \mathrm{grad} f\rangle\} dV = 0.$$

Se ambas são de classe $C^2(M)$, então

$$\int_M \{h\Delta f - f\Delta h\} dV = 0.$$

Vamos então enunciar o teorema que iremos estender.

Teorema 2.2 (Barta)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana limitada com fronteira não-vazia seccionalmente suave ∂M e $f \in C^2(M) \cap C^0(\overline{M})$ com $f|M > 0$ e $f|\partial M = 0$ e seja $\lambda_1(M)$ o primeiro autovalor de Dirichlet de M. Então*

$$\sup_M \left(-\frac{\triangle f}{f}\right) \geq \lambda_1(M) \geq \inf_M \left(-\frac{\triangle f}{f}\right) \tag{2.1}$$

com igualdade em (2.1) se, e somente se, f é uma primeira auto-função de M.

Prova. Seja ϕ uma auto-função associada a $\lambda_1(M)$ com $\phi|M > 0$ e $\phi|\partial M = 0$. Então

$$\lambda_1(M) = -\frac{\Delta\phi}{\phi} = -\frac{\Delta f}{f} + \frac{\phi\Delta f - f\Delta\phi}{f\phi}.$$

Observe que por hipótese $f\phi|M > 0$ e pela fórmula de Green, enunciado no teorema (2.1),

$$\int_M \{\phi\Delta f - f\Delta\phi\} dV = 0.$$

Então ou $\phi\Delta f - f\Delta\phi \equiv 0$ e o resultado segue-se, ou existem $x_1, x_2 \in M$ tais que $(\phi\Delta f - f\Delta\phi)(x_1) > 0$ e $(\phi\Delta f - f\Delta\phi)(x_2) < 0$. Se $\phi\Delta f - f\Delta\phi$ não é identicamente nulo, temos

$$\lambda_1(M) > -\frac{\Delta f}{f}(x_1) \geq \inf\left(-\frac{\Delta f}{f}\right)$$

analogamente

$$\lambda_1(M) < -\frac{\Delta f}{f}(x_2) \leq \sup\left(-\frac{\Delta f}{f}\right).$$

Se ocorre a igualdade, então

$$\phi\Delta f - f\Delta\phi \equiv 0$$

e assim $f = \phi$, ou seja , f é uma auto-função associada a $\lambda_1(M)$.

□

Para fazermos o que foi dito no início deste capítulo, precisaremos de algumas definições e resultados que apresentaremos a seguir. Para o que se seguirá, suporemos M uma variedade riemanniana com bordo $\partial M \neq \varnothing$ e $f \in C^2(M) \cap C^0(\overline{M})$ uma função positiva.

Definição 2.1. *Seja M uma variedade Riemanniana e um campo de vetores $X \in L^1_{loc}(M)$ (significando que $|X| \in L^1_{loc}(M)$). Uma função $g \in L^1_{loc}(M)$ é uma divergência fraca de X se*

$$\int_M \phi g = -\int_M \langle \mathrm{grad}\phi, X\rangle, \forall \phi \in C_0^\infty(M).$$

É claro que existe, no máximo, no sentido de funções mensuráveis, uma divergência fraca $g \in L^1_{loc}(M)$ para um dado campo $X \in L^1_{loc}(M)$ e escrevemos $g = \mathrm{Div}X$. Para campos de vetores $X \in C^1$ a divergência usual $\mathrm{div}X$ coincide com a divergência fraca, isto é, $\mathrm{div}X = \mathrm{Div}X$ se X é de classe C^1.

Definição 2.2. *Denotamos por $\mathcal{W}^{1,1}$ o espaço de Sobolev de todos os campos de vetores $X \in L^1_{loc}(M)$ que possuem divergência fraca $\mathrm{Div}X \in L^1_{loc}(M)$.*

Observação 2.1. *Se $X \in \mathcal{W}^{1,1}(M)$ e $f \in C^1(M)$ então $fX \in \mathcal{W}^{1,1}(M)$ com $\mathrm{Div}(fX) = \langle \mathrm{grad}f, X\rangle + f\mathrm{Div}X$. Em particular se $f \in C_0^\infty(M)$ temos, pela definição (2.1), que*

$$\int_M \mathrm{Div}(fX) = \int_M (\langle \mathrm{grad} f, X\rangle - \langle \mathrm{grad} f, X\rangle) = 0.$$

Reciprocamente, se $fX \in \mathcal{W}^{1,1}(M)$ *para toda* $f \in C_0^\infty(M)$ *então* $X \in \mathcal{W}^{1,1}(M)$.

Vamos agora ao nosso Teorema.

Primeiro observe que se definirmos o campo de vetores $X = -\mathrm{grad}(\log f)$, onde f é uma função positiva, então

$$\mathrm{div} X - |X|^2 = -\frac{\Delta f}{f}. \tag{2.2}$$

De fato, temos que se Y é um campo de vetores então $\langle \mathrm{grad} f, Y\rangle = df(Y)$. Da mesma forma

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{grad}(\log f), Y\rangle &= d(\log f)(Y) = \frac{1}{f} df(Y) = \frac{1}{f}\langle \mathrm{grad} f, Y\rangle = \langle \frac{\mathrm{grad} f}{f}, Y\rangle \\ &\Rightarrow \langle \mathrm{grad}(\log f), Y\rangle = \langle \frac{\mathrm{grad} f}{f}, Y\rangle \\ &\Rightarrow \mathrm{grad}(\log f) = \frac{\mathrm{grad} f}{f}. \end{aligned}$$

Então $X = -\mathrm{grad}(\log f) = -\dfrac{\mathrm{grad} f}{f}$. Também se g é uma função de classe $C^k(M)$, $k > 0$, e Z é um campo de vetores então $\mathrm{div}(gZ) = g\mathrm{div} Z + \langle \mathrm{grad} g, Z\rangle$. Assim

$$\begin{aligned} \mathrm{div} X = \mathrm{div}\left(-\frac{\mathrm{grad} f}{f}\right) &= -\frac{1}{f}\mathrm{div}(\mathrm{grad} f) + \langle \frac{\mathrm{grad} f}{f^2}, \mathrm{grad} f\rangle \\ &= -\frac{\Delta f}{f} + \langle \frac{\mathrm{grad} f}{f}, \frac{\mathrm{grad} f}{f}\rangle \\ &= -\frac{\Delta f}{f} + |X|^2 \end{aligned}$$

o que nos dá

$$\mathrm{div} X - |X|^2 = -\frac{\Delta f}{f}$$

e (2.2) é provado.

2.1 Teorema Principal

Teorema 2.3 (Bessa-Montenegro)**.** *Seja M uma variedade riemanniana. Então*

$$\lambda^*(M) \geq \sup_{\mathcal{W}^{1,1}(M)} \left\{ \inf_M (\mathrm{Div}X - |X|^2) \right\}. \tag{2.3}$$

Se M é uma variedade riemanniana compacta com fronteira suave não-vazia, então

$$\lambda_1(M) = \sup_{\mathcal{W}^{1,1}(M)} \left\{ \inf_M (\mathrm{Div}X - |X|^2) \right\}. \tag{2.4}$$

Prova. Seja $X \in \mathcal{W}^{1,1}(M)$ e $f \in C_o^\infty(M)$. Pela observção (2.1), temos

$$\begin{aligned}
0 = \int_M \mathrm{Div}\,(f^2 X) \;&=\; \int_M \langle \mathrm{grad} f^2, X\rangle + \int_M f^2 \mathrm{Div} X \\
&\geq\; -\int_M |\mathrm{grad} f^2||X| + \int_M f^2 \mathrm{Div} X \\
&=\; -\int_M 2|f||\mathrm{grad} f|X| + \int_M f^2 \mathrm{Div} X \\
&\geq\; -\int_M f^2|X|^2 - \int_M |\mathrm{grad} f|^2 + \int_M f^2 \mathrm{Div} X \;. \\
&=\; \int_M (\mathrm{Div}X - |X|^2) f^2 - \int_M |\mathrm{grad} f|^2 \\
&\geq\; \int_M \inf_M (\mathrm{Div}X - |X|^2) f^2 - \int_M |\mathrm{grad} f|^2 \\
&=\; \inf_M (\mathrm{Div}X - |X|^2) \int_M f^2 - \int_M |\mathrm{grad} f|^2
\end{aligned}$$

onde a terceira igualdade e segunda desigualdade seguem, reespectivamente, do fato que

$\mathrm{grad}(fg) = f(\mathrm{grad} g) + g(\mathrm{grad} f)$

e

$(|f||X| - |\mathrm{grad} f|)^2 \geq 0 \Longrightarrow -2|f||\mathrm{grad} f||X| \geq -f^2|X|^2 - |\mathrm{grad} f|^2.$

Portanto,

$$\inf_M (\mathrm{Div}X - |X|^2) \int_M f^2 - \int_M |\mathrm{grad} f|^2 \leq 0$$

e assim

$$\inf_M(\mathrm{Div}X - |X|^2)\int_M f^2 \leq \int_M |\mathrm{grad} f|^2.$$

Daí temos

$$\frac{\int_M |\mathrm{grad} f|^2}{\int_M f^2} \geq \left\{\inf_M(\mathrm{Div}X - |X|^2)\right\}$$

Portanto,

$$\frac{\int_M |\mathrm{grad} f|^2}{\int_M f^2} \geq \sup_{\mathcal{W}^{1,1}(M)}\left\{\inf_M(\mathrm{Div}X - |X|^2)\right\}$$

e assim,

$$\lambda^*(M) \geq \sup_{\mathcal{W}^{1,1}(M)}\left\{\inf_M(\mathrm{Div}X - |X|^2)\right\}.$$

O que prova (2.3). Para provar (2.4), suponhamos agora que M é compacta com fronteira suave não-vazio e seja v uma primeira auto-função positiva de M. Fixamos $X_0 = -\mathrm{grad}(\log v)$, de modo que

$$\mathrm{div}X_0 - |X_0|^2 = -\frac{\Delta v}{v} = \lambda_1(M)$$

e assim

$$\lambda_1(M) = \sup_{\mathcal{W}^{1,1}(M)}\left\{\inf_M(\mathrm{div}X_0 - |X_0|^2)\right\}$$

uma vez que para campos de vetores $X \in C^1$, $\mathrm{div}X = \mathrm{Div}X$ temos

$$\lambda_1(M) = \sup_{\mathcal{W}^{1,1}(M)}\left\{\inf_M(\mathrm{Div}X_0 - |X_0|^2)\right\}$$

o que demonstra (2.4). □

Observação 2.2. *A mesma demonstração mostra que*

$$\lambda^*(M) \geq \sup_{\mathcal{W}^{1,1}(M)} \inf_{M\setminus F}(\mathrm{Div}X_0 - |X_0|^2),$$

onde F tem volume riemanniano nulo.

Capítulo 3

Aplicações Geométricas

Este capítulo será destinado a algumas aplicações geométricas do Teorema (2.3). Necessitaremos no entanto de mais alguns resultados que irão ser apresentados no decorrer do mesmo. No que se segue suporemos o campo de vetores $X \in \mathcal{W}^{1,1}(M)$, onde M é uma variedade riemanniana. Pela Teoria Espectral, sabe-se que dado um domínio limitado $\Omega \subset M$ existe uma auto-função $u \in C^{\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, positivo em Ω satisfazendo

$$\Delta u + \lambda_1(\Omega) u = 0,$$

onde $\lambda_1(\Omega) = \lambda^*(\Omega)$.

Proposição 3.1. *Seja $\Omega \subset M$ um domínio limitado na variedade riemanniana M. Seja $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $v > 0$ em Ω e $v|\partial\Omega = 0$. Então*

$$\lambda^*(\Omega) \geq \inf_{\Omega} \left(-\frac{\Delta v}{v} \right). \tag{3.1}$$

Além disso

$$\lambda^*(\Omega) = \inf_{\Omega} \left(-\frac{\Delta v}{v} \right) \tag{3.2}$$

se, e somente se, $v = u$, onde u é uma auto-função positiva de Ω, isto é $\Delta u + \lambda^*(\Omega) = 0$.

Prova. Seja $\epsilon_i \to 0$ uma sequência de valores regular positivo de v e seja $\Omega_{\epsilon_i}^v = \{x \in \Omega; v(x) > \epsilon_i\}$. Aplicando o Teorema de Barta (2.2) temos que

$$\lambda^*(\Omega_{\epsilon_i}^v) = \lambda_1(\Omega_{\epsilon_i}^v) \geq \inf_{\Omega_{\epsilon_i}^v} \left(-\frac{\Delta v}{v} \right) \geq \inf_{\Omega} \left(-\frac{\Delta v}{v} \right)$$

Mas $\lim_{\epsilon_i \to 0} \lambda^*(\Omega_{\epsilon_i}^v) = \lambda^*(\Omega)$, ver em [4]. Seja agora $u \in C^{\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ uma auto-função positiva de Ω. Então

$$\lambda^*(\Omega) = -\frac{\Delta u}{u} = -\frac{\Delta v}{v} + \frac{u\Delta v - v\Delta u}{uv}. \tag{3.3}$$

Pela fórmula de *Green*, teorema (2.1), temos que

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) = 0$$

Então ou $u\Delta v - v\Delta u \equiv 0$ e o resultado segue-se ou existem $x_1, x_2 \in \Omega$ tais que $(u\Delta v - v\Delta u)(x_1) > 0$ e $(u\Delta v - v\Delta u)(x_2) < 0$. Se $u\Delta v - v\Delta u$ não é identicamente nulo temos de (3.3) que

$$\lambda^*(\Omega) > -\frac{\Delta v}{v}(x_1) \geq \inf_\Omega\left(-\frac{\Delta v}{v}\right).$$

Dessa forma se

$$\lambda^*(\Omega) = \inf_\Omega\left(-\frac{\Delta v}{v}\right)$$

então $u\Delta v - v\Delta u \equiv 0$ e assim v é uma auto-função.

$\square$

Seja X um espaço métrico dotado de uma métrica ρ. O diâmetro de um conjunto $U \subset X$ é dado por

$$\operatorname{diam}(U) = \sup\{\rho(x,y) : x, y \in X\}.$$

e

$$\operatorname{diam}(\emptyset) := 0.$$

Seja $S \subset X$ um subconjunto qualquer e $\delta > 0$ um número real qualquer. Defina

$$H^n_\delta(S) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\operatorname{diam}(U_i)^n : \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supset S, \operatorname{diam}(U_i) < \delta\right\}.$$

Note que $H^n_\delta(S)$ é monótona decrescente em δ. Dessa forma o limite $\lim_{\delta\to 0} H^n_\delta(S)$ existe. Definimos então a n-medida de Hausdorff de S, $\mathcal{H}^n$ por

$$\mathcal{H}^n(S) := \sup_{\delta>0} H^n_\delta(S) = \lim_{\delta\to 0} H^n_\delta(S)$$

Lema 3.1. *Seja $\Omega \subset M$ um domínio limitado na variedade Riemanniana M e $F \subset M$ um subconjunto fechado com (n-1)-medida de Hausdorff $\mathcal{H}^{n-1}(F \cap \Omega) = 0$. Seja X um campo de vetores de classe $C^1(\Omega \setminus F) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $\operatorname{div} X \in L^1(\Omega)$. Então $X \in \mathcal{W}^{1,1}(\Omega)$ com $\operatorname{Div} X = \operatorname{div} X$ em $\Omega \setminus F$.*

Uma demonstração completa desse lema pode ser encontrada em [2].

3.1 Coordenadas Geodésicas

Sejam M uma variedade riemanniana e um ponto $p \in M$. Para cada vetor $\xi \in T_pM$, seja γ_ξ a única geodésica satisfazendo $\gamma_\xi(0) = p$ e $\gamma'_\xi(0) = \xi$ e $d(\xi) = \sup\{t > 0 : dist_M(p, \gamma_\xi(t)) = t\}$. Considere o maior subconjunto aberto

$$\mathcal{D}_p = \{t\xi \in T_pM : 0 \leq t \leq d(\xi), |\xi| = 1\}$$

de T_pM tal que para todo $\xi \in \mathcal{D}_p$ a geodésica $\gamma_\xi(t) = \exp_p(t\xi)$ minimiza a distância de p a $\gamma_\xi(t)$ para todo $t \in [0, d(\xi)]$. O Cut Locus de p é dada por

$$Cut(p) = \{\exp_p(d(\xi)\xi), \xi \in T_pM, |\xi| = 1\}$$

e

$$M = Cut(p) \cup \exp_p(\mathcal{D}_p).$$

A aplicaçao exponencial $\exp_p : \mathcal{D}_P \longrightarrow \exp_p(\mathcal{D}_P)$ é um difeomorfismo e define coordenadas geodésicas em $M \setminus Cut(p)$.

Fixado um vetor $\xi \in T_pM, |\xi| = 1$, denote por $\xi^\perp$ o complemento ortogonal de $\{\mathbb{R}\xi\}$ em T_pM. Seja

$$\tau_t : T_pM \longrightarrow T_{\exp_p(t\xi)}M$$

o transporte paralelo ao longo de γ_ξ. Defina o caminho da transformações lineares

$$\mathcal{A}(t,\xi) : \xi^\perp \longrightarrow \xi^\perp$$

por

$$\mathcal{A}(t,\xi)\eta = (\tau_t)^{-1}Y(t)$$

onde $Y(t)$ é o campo de Jacobi ao longo de γ_ξ determinado pelas condições iniciais

$$Y(0) = 0, \quad e \quad (\nabla_{\gamma'_\xi}Y)(0) = \eta$$

onde ∇ denota a conexão Levi-Civita de M.

Defina agora a função

$$\mathcal{R} : \xi^\perp \longrightarrow \xi^\perp$$

por

$$\mathcal{R}(t)\eta = (\tau_t)^{-1}R(\gamma'_\xi(t), \tau_t\eta)\gamma'_\xi(t)$$

onde R é o tensor curvatura de M. Verifica-se que a aplicação $\mathcal{R}(t)$ é uma aplicação autoadjunta, e o caminho de transformações lineares $\mathcal{A}(t,\xi)$ satisfaz a equação diferencial

$$\mathcal{A}'' + \mathcal{R}\mathcal{A} = 0$$

com condições iniciais

$$\mathcal{A}(0,\xi) = 0 \;\; e \;\; \mathcal{A}'(0,\xi) = I.$$

No conjunto $\exp_p(\mathcal{D}_p)$ a métrica riemanniana de M pode ser expressa por

$$ds^2(\exp_p(t\xi)) = dt^2 + |\mathcal{A}(t,\xi)d\xi|^2.$$

Se a variedade M tem curvatura seccional constante igual a c temos

$$\mathcal{A}(t,\xi) = S_c(t) \cdot I$$

onde $S_c(t)$ é dada no enunciado teorema de *Bishop*, que apresentaremos a seguir.

Daqui em diante chamaremos $\sqrt{g(t,\xi)} = \det \mathcal{A}(t,\xi)$.

Teorema 3.1 (Bishop)**.** *Se a curvatura seccional ao longo da geodésica γ_ξ satisfaz*

$$\langle \mathrm{R}(\gamma'_\xi, v)\gamma'_\xi, v\rangle \leq c|v|^2, \forall t \in (0,r),$$

onde c é constante, e se $S_c(t)$ não se anula em $(0,r)$ então

$$\left[\frac{\sqrt{g(t,\xi)}}{S_c^{n-1}(t)}\right]' \geq 0, \forall t \in (0,r) \tag{3.4}$$

e

$$\sqrt{g(t,\xi)} - S_c^{n-1}(t) \geq, \forall t \in (0,r) \tag{3.5}$$

Além disso a igualdade ocorre em um ponto $t_0 \in (0,r)$ se, e somente se, $\mathcal{R} = c \cdot I$ e $\mathcal{A} = S_c \cdot I$ em todo $[0,t_0]$. Aqui $C_c(t) = S'_c(t)$ e $S_c(t)$ é dada por

$$S_c(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c}}\sin(\sqrt{c}t), & se \;\; c > 0 \\ t, & se \;\; c = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-c}}\sinh(\sqrt{-c}t), & se \;\; c < 0. \end{cases}$$

Uma demonstração do teorema acima é dada em [4].

Definição 3.1. *Definimos o espaço forma n-dimensional simplesmente conexo de curvatura seccional constante igual a c, e denotamos $\mathbb{N}^n(c)$, por:*

$$\mathbb{N}^n(c) = \begin{cases} \mathbb{S}^n(c), & se \;\; c > 0 \\ \mathbb{R}^n, & se \;\; c = 0 \\ \mathbb{H}^n(c) & se \;\; c < 0. \end{cases}$$

3.2 Teoremas Principais

Nesta seção encontram-se os teoremas que são de maior importância deste capítulo, os quais são aplicações geométricas do trabalho feito no capitulo anterior.

A primeira aplicação é uma extensão do Teorema de Cheng para estimativas de autovalores, cuja demonstração pode ser encontrada em [5].

Definimos o raio de injetividade de um ponto p na variedade riemanniana M, e denotamos $inj(p)$, por $inj(p) = \inf\{d(\xi) : |\xi| = 1,\ \xi \in T_pM\}$

Teorema 3.2 (Cheng). *Seja N uma n-variedade Riemanniana e $B_N(p,r)$ uma bola geodésica centrada em p com raio $r < inj(p)$. Seja c uma limitação superior para todas as curvaturas seccionais em $B_N(p,r)$ e seja $\mathbb{N}^n(c)$ o n-espaço forma simplesmente conexo de curvatura seccional constante c. Então*

$$\lambda_1(B_N(p,r)) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^n(c)}(r)).$$

Vamos então ao nosso teorema.

Teorema 3.3. *Seja N uma n-variedade Riemanniana com curvatura seccional radial $K(x)(\frac{\partial}{\partial t}, v) \leq c, x \in B_N(p,r)\backslash Cut(p)$ e $v \in T_xN \cap (\frac{\partial}{\partial t})^{\perp}$ com $|v| \leq 1$. Seja $\mathbb{N}^n(c)$ o n-espaço forma simplesmente conexo de curvatura seccional constante c e suponha que $\mathcal{H}^{n-1}(B_N(p,r) \cap Cut(p)) = 0$. Então*

$$\lambda^*(B_N(p,r)) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^n(c)}(r)). \tag{3.6}$$

Com igualdade se, e somente se $B_{\mathbb{N}^n(c)}(r)$ e $B_N(p,r)$ são isométricos.

Prova. Primeiro observemos que se $c > 0$ e $r > \frac{\pi}{\sqrt{c}}$, então $\mathbb{N}^n(c) = \mathbb{S}^n(c) = B_{\mathbb{N}^n(c)}(r)$, mas $\lambda_1(\mathbb{S}^n(c)) = 0$, o que assegura que $\lambda_1(B_{\mathbb{N}^n(c)}(r)) = 0$. Como $\lambda^*(B_N(p,r)) \geq 0$, por definição, não há o que fazer. Portanto vamos assumir que $r < \frac{\pi}{\sqrt{c}}$ se $c > 0$. Seja v uma uma primeira auto-função positiva de $B_{\mathbb{N}^n(c)}(r)$. Ocorre que v é uma função radial que satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\Delta v + \lambda_1(B_{\mathbb{N}^n(c)}(r))v = 0,$$

que em coordenadas geodésicas se escreve

$$v''(t) + (n-1)\frac{S_c'(t)}{S_c(t)}v'(t) + \lambda_1(B_{\mathbb{N}^n(c)}(r))v(t) = 0, \tag{3.7}$$

onde $S_c(t)$ é dada no Teorema de *Bishop* (3.1), com $v'(t) \leq 0$ e $v'(t) = 0$ se, somente se, $t = 0$. Defina a função $u\colon B_N(p,r) \to [0,\infty)$ por:

$$u(x) = \begin{cases} v(t) & \textit{se } x = \exp_p(t\xi), t \in [0, d(\xi)) \cap [0,r] \\ & \\ 0 & \textit{se } x = \exp_p(d(\xi)\xi) \in Cut(p) \end{cases}$$

Defina agora o campo de vetores

$$X(x) = \begin{cases} -\mathrm{grad}(\log u(x)) & se\ x \in B_N(p,r) \setminus (\{p\} \cup Cut(p)) \\ \\ 0 & se\ x \in B_N(p,r) \cap (\{p\} \cup Cut(p)) \end{cases}$$

O qual escrito em coordenadas geodésicas fica

$$X(x) = \begin{cases} -\dfrac{v'(t)}{v(t)}\dfrac{\partial}{\partial t} & se\ x = \exp_p(t\xi), t \in (0, d(\xi)) \cap (0, r] \\ \\ 0 & se\ x = p\ ou\ x = \exp_p(d(\xi)\xi) \end{cases}$$

Chamando $B = B_N(p,r)$ e $F = \{p\} \cup Cut(p)$, por simplicidade de notação, temos pelo teorema (2.3) e observação (2.2) que

$$\lambda^*(B) \geq \inf_{B \setminus F}\{\mathrm{Div}X - |X|^2\} = \inf_{B \setminus F}\{\mathrm{div}X - |X|^2\} = \inf_{B \setminus F}\left(-\frac{\Delta u}{u}\right) \tag{3.8}$$

pois para campos de vetores C^1 temos que $\mathrm{Div}X = \mathrm{div}X$, e $-\dfrac{\Delta u}{u} = \mathrm{div}X - |X|^2$ foi feito no capítulo 2. Mas em coordenadas geodésicas temos

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{\sqrt{g(t,\xi)}}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(g^{11}\sqrt{g(t,\xi)}\frac{\partial}{\partial t}\right) + \sum_{i,j>1}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(g^{ij}\sqrt{g(t,\xi)}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)\right] v \\ &= \frac{1}{\sqrt{g(t,\xi)}}\left((\sqrt{g(t,\xi)})'\frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{g(t,\xi)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) v \\ &= v'' + \frac{(\sqrt{g(t,\xi)})'}{\sqrt{g(t,\xi)}} v' \end{aligned}$$

onde $\sqrt{g(t,\xi)} = det\mathcal{A}(t,\xi)\ e\ g^{11} = 1$. Assim se $t \in [0, d(\xi)) \cap [0, r]$, temos

$$-\frac{\Delta u}{u}(\exp_p(t\xi)) = -\frac{1}{v(t)}\left\{v''(t) + \frac{(\sqrt{g(t,\xi)})'}{\sqrt{g(t,\xi)}}v'(t)\right\}. \tag{3.9}$$

Mas pelo Teorema de *Bishop* (3.1), se $t \in (0, r)$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\sqrt{g(t,\xi)}}{S_c^{n-1}(t)}\right)' \geq 0 \\ \Rightarrow\ &\frac{(\sqrt{g(t,\xi)})' S_c^{n-1}(t) - (n-1)\sqrt{g(t,\xi)} S_c^{n-2}(t) S_c'(t)}{(S_c^{n-1}(t))^2} \geq 0 \\ \Rightarrow\ &\frac{(\sqrt{g(t,\xi)})'}{S_c^{n-1}(t)} - \frac{(n-1)\sqrt{g(t,\xi)} S_c^{-1}(t) S_c'(t)}{S_c^{n-1}(t)} \geq 0 \\ \Rightarrow\ &\frac{(\sqrt{g(t,\xi)})'}{\sqrt{g(t,\xi)}} \geq (n-1)\frac{S_c'(t)}{S_c(t)} \end{aligned}$$

então por (3.9) e (3.7) temos que

$$-\frac{\Delta u}{u}(\exp_p(t\xi)) \geq -\frac{1}{v}\left\{v'' + (n-1)\frac{S_c'(t)}{S_c(t)}v'\right\} = \lambda_1(B_{\mathbb{N}^n(c)}(r)). \tag{3.10}$$

Assim por (3.8) e por (3.10)

$$\lambda^*(B_N(p,r)) \geq \inf_{B\setminus F}\left(-\frac{\Delta u}{u}\right) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^n(c)}(r)),$$

o que implica

$$\lambda^*(B_N(p,r)) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^n(c)}(r))$$

e assim (3.6) é provado.

Tomemos agora uma primeira auto-função positiva $\psi \in C^\infty(B_N(p,r)) \cap H_0^1(B_N(p,r))$, isto é $\psi|B_N(p,r) > 0$ tal que $\Delta\psi + \lambda^*(B_N(p,r))\psi = 0$. Então pela proposição (3.1) temos que $u = \psi$ é uma primeira auto-função em $B_N(p,r)$, isto é,

$$\lambda^*(B_N(p,r)) = -\frac{\Delta u}{u}(\exp_p(t\xi)), \forall t \in (0, d(\xi)).$$

Então se ocorre a igualdade em (3.6) teremos de (3.9) e (3.10) que

$$\frac{(\sqrt{g(t,\xi)})'}{\sqrt{g(t,\xi)}} = (n-1)\frac{S_c'(t)}{S_c(t)} \quad se\ t \in [0,r] \tag{3.11}$$

Novamente pelo Teorema de *Bishop* (3.1), temos que a igualdade em (3.11) ocorre se, e somente se, $\mathcal{R} = c \cdot I$ e $\mathcal{A} = S_c \cdot I$ o que ocorre se, e somente se, $B_N(p,r)$ e $B_{\mathbb{N}^n(c)}(r)$ são isométricos.

Iremos provar agora que o campo de vetores X está contido em $\mathcal{W}^{1,1}(B_N(p,r))$ terminando assim a prova do teorema. Pela observação (2.1) basta provar que $fX \in \mathcal{W}^{1,1}(B_N(p,r))$ para toda $f \in C_0^\infty(B_N(p,r))$. Mas pra isso basta provar, pelo lema (3.1), que $\operatorname{div}(fX) \in L^1(B_N(p,r))$ e $fX \in C^1(B_N(p,r) \setminus F) \cap L^\infty(B_N(p,r))$, onde $F = \{p\} \cup Cut(p)$. Observe que sendo $X(x) = -\operatorname{grad}(\log u(x))$, $x \in B_N(p,r) \setminus F$, então X é diferenciável neste conjunto, assim $\operatorname{div}X = \operatorname{Div}X$ e $\operatorname{div}(fX) = \langle \operatorname{grad} f, X\rangle + f\operatorname{div}X$. Daí temos

$$|\operatorname{div}(fX)| \leq |\langle \operatorname{grad} f, X\rangle| + |f\operatorname{div}X| \leq |\operatorname{grad} f||X| + |f||\operatorname{div}X|$$

Integrando em $D = B_N(p,r) \cap \operatorname{supp}(f)$ temos

$$\int_D |\operatorname{div} fX| \leq \int_D |\operatorname{grad} f||X| + \int_D |f||\operatorname{div}X|. \tag{3.12}$$

Como

$$|\operatorname{grad} f||X| \leq \sup_{\operatorname{supp}(f)} (|\operatorname{grad} f||X|),$$

então

$$\int_D |\text{grad} f||X| \leq \int_D \sup_{\text{supp}(f)} (|\text{grad} f||X|) = \sup_{\text{supp}(f)} (|\text{grad} f||X|) \int_D 1$$
$$= \sup_{\text{supp}(f)} (|\text{grad} f||X|).Vol(B_N(p,r)) < \infty \tag{3.13}$$

pois $|X(x)| \leq |(v'/v)(t)| < \infty$, se $x = \exp_p(t\xi) \in B_N(p,r) \cap \text{supp}(f)$ e $|\text{grad} f| < \infty$ em $B_N(p,r)$. Também temos que

$$\text{div} X = -\frac{\Delta u}{u} + |X|^2 = -\frac{v''}{v}(t) + \left(\frac{v'}{v}(t)\right)^2 - \frac{v'}{v}(t)\frac{(\sqrt{g(t,\xi)})'}{\sqrt{g(t,\xi)}}$$

assim

$$\begin{aligned} |f||\text{div} X| &= |f| \left| -\frac{v''}{v}(t) + \left(\frac{v'}{v}(t)\right)^2 - \frac{v'}{v}(t)\frac{(\sqrt{g(t,\xi)})'}{\sqrt{g(t,\xi)}} \right| \\ &\leq \left(\left|\frac{v''}{v}(t)\right| + \left|\frac{v'^2}{v^2}(t)\right| \right) |f| + \left|\frac{v'}{v}(t)\right| \frac{(\sqrt{g(t,\xi)})'}{\sqrt{g(t,\xi)}} |f| \end{aligned}$$

Integrando em D e usando o Teorema de *Fubini* temos

$$\begin{aligned} \int_D |f||\text{div} X| &\leq \int_\xi \int_0^{t(\xi)} \left(\left|\frac{v''}{v}(t)\right| + \left|\frac{v'^2}{v^2}(t)\right| \right) |f| \sqrt{g(t,\xi)} dt d\xi \\ &+ \int_\xi \int_0^{t(\xi)} \left|\frac{v'}{v}(t)\right| \frac{(\sqrt{g(t,\xi)})'}{\sqrt{g(t,\xi)}} |f| \sqrt{g(t,\xi)} dt d\xi \\ &= \int_\xi \int_0^{t(\xi)} \left(\left|\frac{v''}{v}(t)\right| + \left|\frac{v'^2}{v^2}(t)\right| \right) |f| \sqrt{g(t,\xi)} dt d\xi \\ &+ \int_\xi \int_0^{t(\xi)} \left|\frac{v'}{v}(t)\right| (\sqrt{g(t,\xi)})' |f| dt d\xi < \infty \end{aligned} \tag{3.14}$$

onde $t(\xi)$ é o maior valor de $t < \min\{d(\xi), r\}$ tal que $\exp_p(t\xi) \in \text{supp}(f)$ e cada termo de (3.14) é finito. Juntando agora (3.13) e (3.14) temos que (3.12) é finito e assim $\text{div}(fX) \in L^1(B_N(p,r))$.

O fato de $fX \in C^1(B_N(p,r) \backslash F) \cap L^\infty(B_N(p,r))$ vem de que $|X(x)| \leq |(v'/v)(t)| < \infty$ se $x = \exp_p(t\xi) \in B_N(p,r) \cap \text{supp}(f)$ e $\text{supp}(f)$ é compacto. □

Uma segunda aplicação geométrica é o Teorema (3.5) que é uma generalização do Teorema de Cheng-Li-Yau cuja demonstração pode ser encontrada em [6].

Teorema 3.4 (Cheng-Li-Yau). *Seja $M^m \subset \mathbb{N}^n$ uma subvariedade m-dimensional mínima do n-espaço forma simplesmente conexo de curvatura seccional constante $c \in \{-1, 0, 1\}$ e $D \subset M$ um domínio C^2 compacto. Seja*

$$a = \inf_{p \in D} \sup_{z \in D} dist_{\mathbb{N}^n(c)}(p, z) > 0$$

o raio exterior de D. Se $c = 1$ suponha que $a \leq \frac{\pi}{2}$. Então

$$\lambda_1(D) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^n(c)}(a))$$

Com igualdade se, e somente se, M é totalmente geodésica em $\mathbb{N}^n(c)$ e $D = B_{\mathbb{N}^n(c)}(a)$.

Para o nosso próximo teorema usaremos o lema a seguir:

Lema 3.2. *Seja $\upsilon : B_{\mathbb{N}^n(c)}(r) \to \mathbb{R}$ a primeira auto-função positiva de $B_{\mathbb{N}^n(c)}(r) \subset \mathbb{N}^n(c)(r)$ associado ao primeiro autovalor $\lambda_1(B_{\mathbb{N}^n(c)}(r))$. Então*

$$n\frac{C_c(t)}{S_c(t)}\upsilon'(t) + \lambda_1(B_{\mathbb{N}^n(c)}(r)) < 0, \ 0 < t < r. \tag{3.15}$$

Prova. Trataremos os casos $c < 0$, $c = 0$ e $c = 0$ separadamente. Suponha primeiro que $c < 0$, i.e., $S_c(t) = \operatorname{senh}(\sqrt{-c} \cdot t) \setminus \sqrt{-c}$. Por simplicidade admitimos a notação $\lambda = \lambda_1(B_{\mathbb{N}^n(c)}(r))$. Lembrando que em coordenadas geodésicas $\upsilon(t)$ satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\upsilon''(t) + (n-1)\frac{C_c}{S_c}(t)\upsilon'(t) + \lambda\upsilon(t) = 0, \ 0 < t < r \tag{3.16}$$

Considere a seguinte função $\mu(t) = C_c(t)^{\frac{\lambda}{nc}}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mu'(t) &= \frac{\lambda}{nc}C_c(t)^{\frac{\lambda}{nc}-1}C_c'(t) \\
&= -\frac{\lambda}{n}S_c(t)C_c(t)^{\frac{\lambda}{nc}-1}.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\upsilon'(t)\mu(t) - \mu'(t)\upsilon(t) &= \upsilon'(t)C_c(t)^{\frac{\lambda}{nc}} + \frac{\lambda}{nc}S_c(t)C_c(t)^{\frac{\lambda}{nc}-1}\upsilon'(t) \\
&= \upsilon'(t)C_c(t)^{\frac{\lambda}{nc}} + \frac{1}{n}S_c(t)\frac{C_c(t)^{\frac{\lambda}{nc}}}{C_c(t)}\lambda\upsilon(t) \\
&= \frac{1}{n}C_c(t)^{\frac{\lambda}{nc}-1}S_c(t)\left(n\frac{C_c(t)}{S_c(t)}\upsilon'(t) + \lambda\upsilon(t)\right).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Como

$$\frac{1}{n}C_c(t)^{\frac{\lambda}{nc}-1}S_c(t) > 0,$$

observamos em (3.17) que para provar que $n\frac{C_c(t)}{S_c(t)}\upsilon'(t) + \lambda\upsilon(t) < 0$ basta verificar que

$$\upsilon'(t)\mu(t) - \mu'(t)\upsilon(t) < 0.$$

Para isso, multiplique a equação (3.16) por $S_c^{n-1}(t)$ obtendo a seguinte equação diferencial:

$$\left(S_c^{n-1}\upsilon'\right)'(t) + \lambda S_c^{n-1}(t)\upsilon(t) = 0,\ 0 < t < r. \tag{3.18}$$

Agora, usando o fato de $C_c^2(t) + cS_c^2(t) = 1$ temos que

$$\begin{aligned}
\mu''(t) &= -\frac{\lambda}{n}\left[C_c(t)^{\frac{\lambda}{nc}} - cS_c^2(t)\left(\frac{\lambda}{n} - 1\right)\frac{C_c(t)^{\frac{\lambda}{nc}}}{C_c^2(t)}\right] \\
&= -\frac{\lambda}{n}\left[1 + \frac{cS_c^2(t)}{C_c^2(t)} - \frac{\lambda}{n}\frac{S_c^2(t)}{C_c^2(t)}\right]\mu(t) \\
&= -\lambda\left[\frac{1}{nC_c^2(t)} - \frac{\lambda}{n^2}\frac{S_c^2(t)}{C_c^2(t)}\right]\mu(t),
\end{aligned}$$

isto é, a função $\mu(t)$ satisfaz a equação diferencial:

$$\mu''(t) = -\lambda\left(\frac{1}{nC_c^2(t)} - \frac{\lambda}{n^2}\frac{S_c^2(t)}{C_c^2(t)}\right)\mu(t). \tag{3.19}$$

Multiplicando a equação (3.19) por $S_c^{n-1}(t)$ obtemos

$$S_c^{n-1}(t)\mu''(t) + \lambda S_c^{n-1}(t)\left(\frac{1}{nC_c^2(t)} - \frac{\lambda}{n^2}\frac{S_c^2(t)}{C_c^2(t)}\right)\mu(t) = 0. \tag{3.20}$$

Adicionando e subtraindo o termo $(n-1)\mu'(t)S_c^{n-2}(t)C_c(t)$ em (3.20) obtemos

$$(S_c^{n-1}\mu')'(t) + \lambda S_c^{n-1}(t)\left(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{nC_c^2(t)} - \frac{\lambda}{n^2}\frac{S_c^2(t)}{C_c^2(t)}\right)\mu(t) = 0. \tag{3.21}$$

Em suma, as funções υ e μ satisfazem as seguintes identidades:

$$(S_c^{n-1}\upsilon')'(t) + \lambda S_c^{n-1}(t)\upsilon(t) = 0,$$

$$(S_c^{n-1}\mu)'(t) + \lambda S_c^{n-1}(t)\left(\tfrac{n-1}{n} + \tfrac{1}{nC_c^2(t)} - \tfrac{\lambda}{n^2}\tfrac{S_c^2(t)}{C_c^2(t)}\right)\mu(t) = 0.$$

Multiplicando a primeira identidade por $\mu(t)$ e a segunda por $-\upsilon(t)$ temos

$$(S_c^{n-1}\upsilon')'\mu(t) + \lambda S_c^{n-1}(t)\upsilon(t)\mu(t) = 0, \tag{3.22}$$

$$-(S_c^{n-1}\mu'(t))'\upsilon(t) - \lambda S_c^{n-1}(t)\left(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{nC_c^2(t)} - \frac{\lambda}{n^2}\frac{S_c^2(t)}{C_c^2(t)}\right)\mu(t)\upsilon(t) = 0. \tag{3.23}$$

Somando (3.22) e (3.23) e integrando de 0 a t obtemos

$$S_c^{n-1}(\upsilon'\mu - \mu'\upsilon)(t) = -\int_0^t \lambda S_c^{n-1}(t)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{nC_c^2(t)} + \frac{\lambda}{n^2}\frac{S_c^2(t)}{C_c^2(t)}\right)\mu(t)\upsilon(t)dt. \tag{3.24}$$

Como

$$\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{nC_c^2(t)}+\frac{\lambda}{n^2}\frac{S_c^2(t)}{C_c^2(t)}\right)=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n\cosh^2(\sqrt{-c}\cdot t)}+\frac{\lambda}{(-c)n^2}\frac{\operatorname{senh}^2(\sqrt{-c}\cdot t)}{\cosh^2(\sqrt{-c}\cdot t)}\right)>0,$$

pois $-c>0$ e $\cosh^2(\sqrt{-c}\cdot t)>1$ para $0<t<r$. Consequentemente,

$$\lambda S_c^{n-1}(t)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{nC_c^2(t)}+\frac{\lambda}{n^2}\frac{S_c^2(t)}{C_c^2(t)}\right)\mu(t)\upsilon(t)>0$$

Portanto, $\upsilon'(t)\mu(t)-\mu'(t)\upsilon(t)<0$ para $0<t<r$. Isso resolve o caso $c<0$.

Suponha que $c>0$. Temos $S_c(t)=\frac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{sen}(\sqrt{c}\cdot t)$ para $t\in(0,r)$ com $r<\frac{\pi}{\sqrt{c}}$. Defina $\mu(t)=C_c(t)^{\frac{-\lambda}{nc}}$. Assim, $\mu'(t)=\frac{\lambda}{n}S_c(t)C_c(t)^{\frac{-\lambda}{nc}-1}$. Procedendo de maneira similar como no caso anterior obtemos que υ e μ satisfazem as seguintes identidades diferenciais:

$$(S_c^{n-1}\upsilon')'(t)+\lambda S_c^{n-1}(t)\upsilon(t)=0,$$

$$(S_c^{n-1}\mu)'(t)+\lambda S_c^{n-1}(t)\left(\tfrac{n-1}{n}+\tfrac{1}{nC_c^2(t)}+\tfrac{\lambda}{n^2}\tfrac{S_c^2(t)}{C_c^2(t)}\right)\mu(t)=0.$$

Acima, multiplicando a primeira identidade por μ e a segunda por $-\upsilon$. Adicioná-las e integrando de 0 a t resulta em

$$S_c^{n-1}(\upsilon'\mu-\mu'\upsilon)(t)=-\int_0^t\lambda S_c^{n-1}(t)\left(2-\frac{1}{n}+\frac{1}{nC_c^2(t)}+\frac{\lambda}{n^2}\frac{S_c^2(t)}{C_c^2(t)}\right)\mu(t)\upsilon(t)dt. \tag{3.25}$$

Claramente,

$$\lambda S_c^{n-1}(t)\left(2-\frac{1}{n}+\frac{1}{nC_c^2(t)}+\frac{\lambda}{n^2}\frac{S_c^2(t)}{C_c^2(t)}\right)\mu(t)\upsilon(t)>0,\ t\in(0,r),r>\frac{\pi}{\sqrt{c}}.$$

Portanto, temos que $\upsilon'(t)\mu(t)-\mu'(t)\upsilon(t)$ para $0<t<r,r>\frac{\pi}{\sqrt{c}}$.

Finalmente, para $c=0$ usaremos o mesmo precedimento. Defina $\mu(t)=e^{-\frac{\lambda t^2}{2n}}$. A funções υ e μ satisfazem as seguintes identidades:

$$(t^{n-1}\upsilon'(t))'+\lambda t^{n-1}\upsilon(t)=0,$$

$$(t^{n-1}\mu'(t))'=\lambda t^{n-1}(1-\tfrac{\lambda t^2}{n^2})\mu(t)=0.$$

Acima, multiplicamos a primeira identidade por μ e a segunda identidade por $-\upsilon$. Adicioná-las e integrando de 0 a t o resultado obtido será

$$t^{n-1}(\upsilon'(t)\mu(t)-\upsilon(t)\mu'(t))=-\frac{\lambda^2}{n^2}\int_0^t\mu(t)\upsilon(t)dt<0,\ \forall t\in(0,r).$$

Então $\upsilon'(t)\mu(t)-\mu'(t)\upsilon(t)<0$. Isto prova o lema. $\square$

Teorema 3.5. *Seja N uma n-variedade Riemanniana com curvatura raadial seccional constante $K(x)(\frac{\partial}{\partial t}, v) \leq c$, $x \in B_N(p,r) \setminus Cut(p)$, $v \perp \frac{\partial}{\partial t}$ e $|v| \leq 1$. Suponha que $\mathcal{H}^{n-1}(Cut(p) \cap B_N(p,r)) = 0$. Seja $\varphi : M \longrightarrow N$ uma subvariedade m-dimensional mínima e seja $\Omega \subset \varphi^{-1}(B_N(p,r))$ uma componente conexa. Se $c > 0$ suponha que $r < \frac{\pi}{2\sqrt{c}}$. Então*

$$\lambda^*(\Omega) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{N}^m(c)}(r)), \tag{3.26}$$

onde $B_{\mathbb{N}^m(c)}(r)$ é a bola geodésica de raio r no espaço forma simplesmente conexo $\mathbb{N}^m(c)$ de curvatura seccional constante constante c. Se Ω é limitado a igualdade em (3.26) ocorre se, e somente se, $\Omega = B_{\mathbb{N}^m(c)}(r)$.

Prova. Seja $v\colon B_{\mathbb{N}^m(c)}(r) \to \mathbb{R}$ uma auto-função positiva associada ao primeiro autovalor de Dirichlet de $B_{\mathbb{N}^m(c)}(r)$. Temos que v é uma função radial com $v'(t) \leq 0$ e $v'(t) = 0$ se, e somente se, $t = 0$. Sem perda de generalidade suponhamos $v(0) = 1$. v satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\Delta v(t) + \lambda_1(B_{\mathbb{N}^m(c)}(r))v(t) = 0$$

que em coordenadas geodésicas se escreve

$$v''(t) + (m-1)\frac{C_c(t)}{S_c(t)}v'(t) + \lambda_1(B_{\mathbb{N}^m(c)}(r))v(t) = 0, \ \forall t \in [0,r], \tag{3.27}$$

onde $S_c(t)$ é dada no teorema de *Bishop* 3.1. Lembremos que para cada $\xi \in T_pN$, $|\xi| = 1$, $d(\xi) > 0$ é o maior número real tal que a geodésica $\gamma_\xi = \exp_p(t\xi)$ minimiza a distância de $\gamma_\xi(0) = p$ a $\gamma_\xi(t)$ para todo $t \in [0, d(\xi)]$. Também temos que

$$B_N(p,r) = \exp_p(\{t\xi \in T_pN : 0 \leq t < \min\{r, d(\xi)\}, \ |\xi| = 1\}).$$

Defina agora a função $u\colon B_N(p,r) \to \mathbb{R}$ dada por
$u(\exp_p(t\xi)) = v(t), \ se \ t < \min\{r, d(\xi)\}$ e $u(r\xi) = u(d(\xi)\xi) = 0$.

Defina também a função $\psi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ por $\psi = u \circ \varphi$, onde φ é dada no enunciado do teorema. Temos que o campo de vetores $X = -\mathrm{grad}\log\psi$, identificado com $d\varphi(X)$, não é diferenciável em $F = \varphi^{-1}(Cut_N(p))$. Por hipótese temos $\mathcal{H}^{m-1}(\Omega \cap F) = 0$ e como foi feito no teorema (3.3) temos que $X \in \mathcal{W}^{1,1}(\Omega)$, então pelo teorema (2.3) e pela observação(2.2) feita no final de sua demonstração temos que

$$\lambda^*(\Omega) \geq \inf_{\Omega \setminus F}(\mathrm{Div}X - |X|^2) = \inf_{\Omega \setminus F}(\mathrm{div}X - |X|^2) = \inf_{\Omega \setminus F}\left(-\frac{\Delta\psi}{\psi}\right).$$

Agora se $\{e_1, ..., e_m\}$ é uma base ortonormal de $T_{\varphi(x)}\Omega$ então

$$\begin{aligned}\Delta\psi(x) &= \sum_{i=1}^m Hess\, u(\varphi(x))(e_i, e_i) + \langle \mathrm{grad}u, \overrightarrow{H}\rangle \\ &= \sum_{i=1}^m Hess\, u(\varphi(x))(e_i, e_i)\end{aligned}$$

onde $\varphi(x) = \exp_p(t\xi)$ e o vetor curvatura média $\overrightarrow{H} = 0$, pois a imersão é mínima. Escolhendo esta base de modo que $e_2, e_3, ..., e_m$ sejam tangentes a $\partial B(p,t) \subset N$ e fazendo $e_1 = \cos\beta\frac{\partial}{\partial t} + \sin\beta\frac{\partial}{\partial\theta}$, onde $\beta = \beta(x)$ e $\frac{\partial}{\partial\theta} \in \{e_2, ..., e_m\}$ com $|\frac{\partial}{\partial\theta}| = 1$, teremos então que

$$\begin{aligned}\Delta\psi(x) &= \sum_{i=1}^{m} Hess\, u(\varphi(x))(e_i, e_i)\\ &= v''(t)(1-\sin^2\beta) + v'(t)\sin^2\beta Hess(t)\left(\tfrac{\partial}{\partial\theta}, \tfrac{\partial}{\partial\theta}\right)\\ &+ v'(t)\sum_{i=2}^{m} Hess(t)(e_i, e_i),\end{aligned}$$

onde $t = dist_N(p,x)$. Agora somando e subtraindo os termos $\frac{C_c}{S_c}(t)v'(t)\sin^2\beta$ e $(m-1)\frac{C_c}{S_c}(t)v'(t)$ na igualdade acima temos

$$\begin{aligned}\Delta\psi(x) &= v''(t)(1-\sin^2\beta) + v'(t)\sin^2\beta Hess(t)\left(\tfrac{\partial}{\partial\theta}, \tfrac{\partial}{\partial\theta}\right)\\ &+ v'(t)\sum_{i=2}^{m} Hess(t)(e_i, e_i) + \frac{C_c}{S_c}(t)v'(t)\sin^2\beta\\ &- \frac{C_c}{S_c}(t)v'(t)\sin^2\beta + (m-1)\frac{C_c}{S_c}(t)v'(t)\\ &- (m-1)\frac{C_c}{S_c}(t)v'(t)\end{aligned}$$

que agrupando os termos em comum fica

$$\begin{aligned}\Delta\psi(x) &= v''(t) + (m-1)\frac{C_c}{S_c}(t)v'(t)\\ &+ \left(Hess(t)\left(\tfrac{\partial}{\partial\theta}, \tfrac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{C_c}{S_c}(t)\right)v'(t)\sin^2\beta\\ &+ \sum_{i=2}^{m}\left[Hess(t)(e_i, e_i) - \frac{C_c}{S_c}(t)\right]v'(t)\\ &+ \left(\frac{C_c}{S_c}(t)v'(t) - v''(t)\right)\sin^2\beta\end{aligned}$$

que por (3.27) fica

$$\begin{aligned}-\frac{\Delta\psi}{\psi}(x) &= \lambda_1(B_{N^m(c)}(r))\\ &- \left(Hess(t)\left(\tfrac{\partial}{\partial\theta}, \tfrac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{C_c}{S_c}(t)\right)\frac{v'(t)}{v(t)}\sin^2\beta\\ &- \sum_{i=2}^{m}\left[Hess(t)(e_i, e_i) - \frac{C_c}{S_c}(t)\right]\frac{v'(t)}{v(t)}\\ &- \frac{1}{v(t)}\left(\frac{C_c}{S_c}(t)v'(t) - v''(t)\right)\sin^2\beta.\end{aligned} \tag{3.28}$$

Como por hipótese a curvatura radial $K(x)(\frac{\partial}{\partial t}, v) \leq c$, $\forall x \in B_N(p,r) \setminus Cut(p)$ para todo $v \perp \frac{\partial}{\partial t}$ com $|v| \leq 1$, temos então pelo teorema da comparação do hessiano(ver [8]) que

$$Hess(t(x))(v,v) \geq \frac{C_c}{S_c}(t),$$

para todo $v \perp \frac{\partial}{\partial t}$ onde $t(x) = t,\ x = \exp_p(t\xi)$. Mas $v'(t) \leq 0$, então temos

$$-\left(Hess(t)\left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) - \frac{C_c}{S_c}(t)\right)\frac{v'(t)}{v(t)}\sin^2\beta \geq 0$$

e

$$-\sum_{i=2}^{m}\left[Hess(t)(e_i,e_i) - \frac{C_c}{S_c}(t)\right]\frac{v'(t)}{v(t)} \geq 0.$$

Se tivermos também

$$-\frac{1}{v(t)}\left(\frac{C_c}{S_c}(t)v'(t) - v''(t)\right)\sin^2\beta \geq 0$$

teremos

$$-\frac{\Delta\psi}{\psi} \geq \lambda_1(B_{N^m(c)}(r))$$

e pelo teorema (2.3) teremos

$$\lambda^*(\Omega) \geq \inf_{\Omega\setminus F}\left(-\frac{\Delta\psi}{\psi}\right) \geq \lambda_1(B_{N^m(c)}(r))$$

e a primeira parte do teorema fica provada. Mas para termos

$$-\frac{1}{v(t)}\left(\frac{C_c}{S_c}(t)v'(t) - v''(t)\right)\sin^2\beta \geq 0$$

temos que ter

$$\left(\frac{C_c}{S_c}(t)\frac{v'(t)}{v(t)} - \frac{v''(t)}{v(t)}\right) \leq 0,\ \forall t \in (0,r)$$

ou equivalentemente, de (3.27)

$$m\frac{C_c}{S_c}(t)v'(t) + \lambda_1(B_{\mathbb{N}^m(c)}(r))v(t) \leq 0,\ \forall t(0,r)$$

o que acontece pelo lema (3.2), o que prova a primeira parte do teorema. Para provar a segunda parte seja Ω limitado e suponha que $\lambda^*(\Omega) = \lambda_1(B_{N^m(c)}(r))$. Temos que $\varphi(\partial\Omega) \subset \partial B_N(p,r)$ e pela proposição (3.1) temos que $\psi \in C^2(\Omega)$ é uma auto-função de Ω, ou seja,

$$\Delta\psi + \lambda^*(\Omega)\psi = 0,$$

o que nos dá $\lambda^*(\Omega) = -\dfrac{\Delta\psi}{\psi}$. Então de (3.28) temos que

$$\begin{array}{rcl}
\left(Hess(t)(\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\theta}) - \dfrac{C_c}{S_c}(t)\right)\dfrac{v'(t)}{v(t)}\sin^2\beta & = & 0 \\
\displaystyle\sum_{i=2}^{m}\left[Hess(t)(e_i,e_i) - \dfrac{C_c}{S_c}(t)\right]\dfrac{v'(t)}{v(t)} & = & 0 \\
\dfrac{1}{v(t)}\left(\dfrac{C_c}{S_c}v'(t) - v''(t)\right)\sin^2\beta & = & 0
\end{array}$$

paro todo t tal que $\varphi(x) = \exp_p(t\xi)$. O que implica que $\sin^2\beta = 0$ e daí temos que $e_1(\varphi(x)) = \dfrac{\partial}{\partial t}$. E integrando o campo $\dfrac{\partial}{\partial t}$ teremos uma geodésica minimizante, de $N \cap \varphi(\Omega)$, ligando $\varphi(x)$ ao centro p. O que nos dá que Ω é uma bola geodésica em M de raio r e centro $\varphi^{-1}(p)$, ou seja,

$$\Omega = B_M(\varphi^{-1}(p), r).$$

Como supomos $\lambda^*(\Omega) = \lambda_1(B_{\mathbb{N}^m(c)}(r))$ temos então que ψ é também uma autofunção de $\lambda_1(B_{N^m(c)}(r))$ daí temos que

$$-\frac{\Delta_M v(t)}{v(t)} = -\frac{\Delta_{\mathbb{N}^m(c)} v(t)}{v(t)},\ t = dist_N(p,\varphi(q)),\ \forall q \in \Omega$$

o que nos dá

$$\Delta_M v(t) = \Delta_{\mathbb{N}^m(c)} v(t),\ t = dist_N(p,\varphi(q)),\ \forall q \in \Omega$$

que escrevendo em coordendas gedésicas fica

$$\frac{\sqrt{g(t,\xi)}'}{\sqrt{g(t,\xi)}}v'(t) + v''(t) = (m-1)\frac{C_c}{S_c}v'(t) + v''(t)$$

ou seja,

$$\frac{\sqrt{g(t,\xi)}'}{\sqrt{g(t,\xi)}} = (m-1)\frac{C_c}{S_c}(t)$$

que pelo torema de *Bishop* (3.1) ocorre se, e somente se, $\mathcal{R} = c\cdot I$ e $\mathcal{A} = S_c\cdot I$, ou seja, se e somente se $\Omega = B_M(\varphi^{-1}(p), r)$ e $B_{\mathbb{N}^m(c)}(r)$ são isométricos, como queríamos.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Bessa,G.P.; Costa, *Eigenvalues estimates for submanifolds with locally bounded Mean curvature in* $N \times \mathbb{R}$. American Mathematical Society, v. 137, p. 1093-1103 2009

[2] Bessa, G.P.; Montenegro, J.F. *An extension of Barta's Theorem and geometrics applications.* Ann Global Analysi and Geometry. v. 31, p. 345-362, 2007

[3] A. Caminha:*Tópicos de geometria diferencial.* Preprint

[4] I. Chavel, Eigenvalues in Riemannian Geometry. Orlando: Academic Press, 1984. 362 p.(Pure and applied mathematics; 115)

[5] Cheng, S.Y. *Eigenfunctions and eigenvalues of the Laplacian.* Am. Math. Soc Proc. Symp. Pure Math. v. 27, part II, p. 185-193, 1975.

[6] Cheng, S.Y.; Li, P.; Yau, S.T. *Heat equations on minimal submanifolds and their applications.* Amer. J. Math., v. 106, p. 1033-1065,1984.

[7] Jorge, L.; Koutroufiotis, D. *An estimate for the curvature of bounded submanifolds.* Amer. J. Math., v. 103, p.1033-1035, 1984.

[8] Schoen, R.; Yau, S.T., Lectures on differential geometry. Cambridge: MA International Press, 1984. 414 p. (Conference proceedings an lecture notes in geometry and topology, vol. 1)