UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FRANCISCO CALVI DA CRUZ JUNIOR

FOLHEAÇÕES COMPLETAS DE FORMAS ESPACIAIS POR HIPERSUPERFÍCIES

FORTALEZA-CE

2010

FRANCISCO CALVI DA CRUZ JUNIOR

FOLHEAÇÕES COMPLETAS DE FORMAS ESPACIAIS POR HIPERSUPERFÍCIES

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Antônio Caminha Muniz Neto

FORTALEZA-CE

2010

C957f Cruz Junior, F. C.

Folheações completas de formas especiais por hipersuperfíceis/ Francisco Calvi da Cruz Junior. 2010.

77 f.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Caminha Muniz Neto

Área de concentração: Matemática

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Departamento de Matemática, Fortaleza, 2010.

1- Geometria Diferencial

CDD 516.36

Aos meus pais, aos meus irmãos
e aos meus grandes amigos.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, pelo amor, pelo afeto e por sempre acreditar em mim.

Ao meu pai, pelo amor e pela forte presença nos momentos de dificuldade.

Aos meus irmãos Abraão e Otávio, por sempre estarem ao meu lado e pelo amor sincero e verdadeiro.

À minha irmã Marta, pela amizade, pelo respeito, pelo amor e pelos conselhos valiosos. Ao meu cunhado Leilson, pela amizade e pelo respeito e aos meus sobrinhos Gabriel e Danilo, pelos inúmeros momentos de felicidade.

À minha baixinha Antônia Evandécia, pelo amor, pela força e por sempre estar ao meu lado em todos os momentos.

Ao Professor Antônio Caminha Muniz Neto, pela participação essencial e efetiva neste trabalho, por sua paciência com minhas deficiências, pelo seu apoio e pela orientação.

Aos professores Abdênago Barros, Lucas Barbosa, Luquésio, Marcos Melo, Fábio Montenegro, Robério e Othon, pela dedicação nas disciplinas ministradas.

À Andrea, pela prestatividade e eficiência nos assuntos burocráticos da pós-graduação.

Aos professores Mário de Assis e Francisco Eduardo, pela amizade, pelo convívio, pelo apoio e por serem meus maiores incentivadores durante o período de graduação na URCA. Em especial aos professores Wilson Hugo e Francisco Augusto, pelo apoio, incentivo e pelos ensinamentos durante a iniciação científica.

Ao meu amigo Flávio França, pela amizade, pelos ensinamentos e por ser parte responsável da minha história de sucesso.

Ao amigo Marco Antonio Lázaro, pela amizade, pelos ensinamentos, pelo apoio e pelos conselhos.

Ao meu amigo Leon Denis, pela amizade sincera e verdadeira, por sempre oferecer um ombro amigo e por seus valiosos conselhos.

Aos meus amigos e companheiros de pós-graduação José Deibson e Filipe, pela amizade, pelo convívio saudável e pelos momentos de descontração.

Aos companheiros Adam, Alexsandro Belém, Ernani Junior, Kelton, Tiago Veras, Edinardo, Cícero de Aquino, José Nazareno, Rondinelle, João Francisco (Piaget), Tiago Cruz, Tiarlos, Francisco Chaves e Serginho ("Malandro"), pelas reflexões, críticas, sugestões e momentos de descontração durante o período de pós-graduação.

Aos meus grandes amigos, conterrâneos e companheiros de todas as horas, André Borges ("O bacana"), Brunos Borges, Fagner França, Gilberto ("Bebel") e José Carlos ("Carne Moída"), pelo apoio, pelo incentivo e, claro, pelos momentos de descontração. Em especial ao meu grande amigo Adriano Delfino ("Cumpadi"), por sua amizade sincera e verdadeira, por sempre acreditar em mim e por ser parte importante em minha vida.

Aos meus amigos de graduação Eryvelton, Alci, Ricarte e Ariane, pelas amizades sinceras e pelo convívio. Aos meus professores de graduação Paulo César, Ricardo, Humberto, Carlos Alberto e Evandro, por seus ensinamentos.

Ao Cnpq, pelo auxílio financeiro.

RESUMO

Estudamos folheações de formas espaciais por hipersuperfícies completas, sob certas condições sobre as suas curvaturas médias de ordem superior. Em particular, no espaço euclidiano obtemos um Teorema tipo-Bernstein para gráficos cujas curvaturas média e escalar não mudam de sinal (podendo ser não constantes). Nós também estabelecemos a não existência de folheações da esfera padrão cujas folhas são completas e têm curvatura escalar constante, alargando assim um teorema de Barbosa, Kenmotsu e Oshikiri. Para o caso mais geral de folheações r-mínimas do espaço euclidiano, possivelmente com um conjunto singular, somos capazes de invocar um teorema de D. Ferus para dar condições sob as quais as folhas não-singulares são folheadas por hiperplanos.

ABSTRACT

We study foliations of space forms by complete hypersurfaces, under some mild conditions on its higher order mean curvatures. In particular, in Euclidean space we obtain a Bernstein-type theorem for graphs whose mean and scalar curvature do not change sign but may otherwise be nonconstant. We also establish the nonexistence of foliations of the standard sphere whose leaves are complete and have constant scalar curvature, thus extending a theorem of Barbosa, Kenmotsu and Oshikiri. For the more general case of r-minimal foliations of the Euclidean space, possibly with a singular set, we are able to invoke a theorem of Ferus to give conditions under which the nonsigular leaves are foliated by hyperplanes.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Estudaremos neste trabalho folheações de formas espaciais por hipersuperfícies completas, supondo que as folhas da folheação tenham segunda forma fundamental limitada e que duas curvaturas médias de ordem superior não mudam de sinal. Primeiro estudamos o caso particular em que a variedade é o gráfico de uma função diferenciável. Assim, obtemos o

Teorema 6.1. *Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o gráfico de uma função $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|\nabla u - V| \in \mathcal{L}^1(M)$, para algum $V \in \mathbb{R}^n$ e $\|Hessu\|^2 \leq c\big(1 + |\nabla u|^2\big)$, para algum $c > 0$. Se existem $0 \leq r \leq n-1$ tais que as funções simétricas elementares S_{r+1} e S_{r+2} não mudam de sinal em M, então M possui nulidade relativa $\nu \geq n - r$. Em particular, se $S_r \neq 0$, então o gráfico é folheado por hiperplanos de dimensão $n - r$.*

Que fornece uma estimativa para a nulidade relativa da variedade e, por um Teorema de D. Ferus, mostra que a variedade é folheada por hiperplanos de uma determinada dimensão. Mostramos, por dois exemplos, que nossas hipóteses não são supérfluas. Como conseqüência interessante do Teorema 6.1, obtemos, no Corolário 6.2, um Teorema tipo-Bernstein para este gráfico, desde que a curvatura média e escalar não mudem de sinal (podendo ser não constantes).

Passando para o caso geral, isto é, folheações transversalmente orientadas de formas espaciais, seguimos a abordagem de [2], calculando na Proposição 7.1 a divergência do campo vetorial $P_r\overline{\nabla}_N N$ sobre as folhas da folheação, onde N é um campo vetorial normal unitário e P_r é a $r-$ésima transformação de Newton da folheação com respeito a N. Com isso, mostramos o

Teorema 7.3. *Não existem, na esfera Euclidiana, folheações transversalmente orientadas e diferenciáveis, cujas folhas são completas e possuem curvatura escalar constante e maior que um.*

Consideramos também uma generalização mais direta do problema de Bernstein, ou seja, o estudo de folheações $r-$mínimas (possivelmente com um conjunto singular) do espaço Euclidiano. Nesse sentido, também somos capazes de invocar um teorema de Ferus para provar o

Teorema 7.5. *Seja $\mathcal{F}$ folheação transversalmente rientada e diferenciável de codimensão um de $\mathbb{R}^{n+1}$, cujas folhas são completas, $r-$minimais e tais que S_r não mudam de sinal sobre elas. Se $|X| \in \mathcal{L}^1$ e $|A|$ é limitada ao longo de cada folha, então a nulidade relativa de cada folha é, pelo menos, $n - r$. Em particular, se $S_r \neq 0$ em uma folha, então esta folha é folheada por hiperplanos de dimensão $n - r$.*

Além da fórmula para a divergência de $P_r \overline{\nabla}_N N$, outra ferramenta central para o nosso trabalho é uma análise mais aprofundada, realizada na Proposição 5.3 e no Corolário 5.4, da extensão de S. T. Yau para o Teorema de H. Hopf de funções subharmônicas em variedades Riemannianas completas e não-compactas.

Este trabalho se baseia no artigo *Complete foliations of space forms by hypersurfaces* de F. Camargo, A. Caminha e P. Sousa [3].

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Campos de Vetores

Seja M^n uma variedade diferenciável $n-$dimensional e considere uma função $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$.

Definição 2.1. *Dizemos que f é uma* **função diferenciável** *se, para todo $p \in M^n$, existe uma carta diferenciável (U, φ) para M^n cujo domínio contém p e tal que a função composta $f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável sobre o subconjunto aberto $\tilde{U} = \varphi(U)$ de $\mathbb{R}^n$*

Podemos destacar as funções $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis em M^n. Sendo assim, denotaremos o conjuno de tais funções por $C^\infty(M)$.

Definição 2.2. *Um* **campo de vetores** *X em M^n é uma função que associa a cada ponto $p \in M^n$ um vetor $X_p \in T_pM$. Dizemos que o campo X é* **diferenciável** *se a aplicação $X : M^n \longrightarrow TM$ for diferenciável.*

Denotaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em M^n.

Se X é um campo de vetores em M^n e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função difrenciável definida em um subconjunto aberto U de M^n, então obtemos uma nova função $Xf : U \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$Xf(p) = X_pf.$$

Lema 2.3. *Sejam M^n uma variedade diferenciável e X um campo de vetores.*

X é diferenciável se, e somente se, $Xf : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, para todo conjunto aberto $U \subset M^n$ e toda função $f \in C^\infty(M)$.

Demonstração. Ver Lee [12], página 86. $\square$

Assim, um campo $X \in \mathcal{X}(M)$ define uma aplicação, claramente $\mathbb{R}$-linear, $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$. E, pela regra do produto para vetores tangentes em M^n, tal função satisfaz a regra de Liebniz

$$X(fg) = fX(g) + gX(f),$$

para todas as funções $f, g \in C^\infty(M)$.

Definição 2.4. *Uma aplicação $Y : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ é uma* **derivação** *se ela é linear sobre $\mathbb{R}$ e satisfaz a regra de Liebniz para todas as funções de $C^\infty(M)$.*

Pode-se mostrar que uma aplicação $\xi : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ é uma derivação se, e somente se, ξ é da forma $\xi f = Xf$ para algum campo $X \in \mathcal{X}(M)$. Assim, podemos identificar as derivações de $C^\infty(M)$ com campos de vetores diferenciáveis.

Se $X \in \mathcal{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$, então obtemos um novo campo de vetores $fX : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ definido por

$$(fX)(g) = fX(g).$$

Sejam $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$. Assim, aplicando X a f, obtemos outra função $Xf \in C^\infty(M)$ e, por sua vez, podemos aplicar o campo Y a Xf e obter, ainda, outra função $YXf = Y(Xf)$ em $C^\infty(M)$. Sendo assim, podemos definir

Definição 2.5. *O* **colchete de Lie** *dos campos $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ é o operador $[X, Y] : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ definido por*

$$[X, Y]f = XYf - YXf.$$

Lema 2.6. *O colchete de Lie de qualquer par de vetores $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ é um campo de vetores em M^n.*

Demonstração. Basta mostrar que $[X,Y]$ é uma derivação de $C^\infty(M)$. Note que

$$\begin{aligned}
[X,Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) \\
&= X(fYg + gYf) - Y(fYg + gYf) \\
&= fXYg + gXYf - fYXg - gYXf \\
&= f[X,Y]g + g[X,Y]f,
\end{aligned}$$

para todas as funções $f, g \in C^\infty(M)$.

E o resultado segue-se, pois, claramente, $[X,Y]$ é $\mathbb{R}$-linear. □

Claramente temos que $[X,Y] = -[Y,X]$, para quaisquer campos de vetores $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Com isso, pode-se mostrar, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, que

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0.$$

A igualdade acima é dita a **identidade de Jacobi**.

2.2 Variedades Riemannianas

Seja M^n uma variedade diferenciável $n-$dimensional.

Definição 2.7. *Uma* **métrica Riemanniana** *em M^n é uma forma bilinear, simétrica e positiva definida*

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M).$$

É imediato que a restrição de $\langle\ ,\ \rangle$ a cada espaço tangente T_pM está bem definida e torna T_pM um espaço vetorial com produto interno.

Definição 2.8. *Uma* **variedade Riemanniana** *é uma varidade diferenciável M^n munida com uma métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$.*

Se $(M^n, \langle\ ,\ \rangle)$ é uma variedade Riemanniana e $(U, (x^i))$ uma carta coordenada em M^n, com campos coordenados $\partial_1, \partial_2, ..., \partial_n$. Então, podemos definir n^2 funções diferenciáveis $g_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle .$$

Definição 2.9. *As n^2 funções diferenciáveis $g_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ são ditas* **coeficientes da métrica** *de M^n em U.*

Sejam M^n uma variedade Riemanniana $n-$dimensional com métrica Riemanniana $\langle \ , \ \rangle$ e $p \in M^n$, considere uma base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormal positiva em T_pM. Dados os campos de vetores $x_1, x_2, ..., x_n \in T_pM$, temos que

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Sendo assim, podemos definir

$$\omega(x_1, x_2, ..., x_n) = \det(a_{ij}).$$

Evidentemente ω é uma $n-$forma diferencial em M^n. Agora note que

$$\langle x_i, x_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, \sum_{s=1}^{n} a_{sj} e_s \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj},$$

e portanto $\det(\langle x_i, x_j \rangle) = (\det(a_{ij}))^2 = \omega^2(x_1, x_2, ..., x_n)$. Supondo que x_1, x_2, ..., x_n são linearmente independentes, obtemos que $\det(\langle x_i, x_j \rangle) > 0$ e, consequentemente,

$$\omega(x_1, x_2, ..., x_n) = \pm\sqrt{\det(\langle x_i, x_j \rangle)},$$

onde $+$ ou $-$ é o sinal de $\det(a_{ij})$. Assim, $\omega(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$ quando os vetores $x_1, x_2, ..., x_n$ formam (nesta ordem) uma base positiva de T_pM e $\omega(x_1, x_2, ..., x_n) < 0$ se a base $x_1, x_2, ..., x_n$ for negativa.

Observação 2.10. *No caso de $x_1, x_2, ..., x_n$ forem linearmente dependentes, tem-se que $\det(\langle x_i, x_j \rangle) = 0$ e, dessa forma, $\omega(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$.*

Definição 2.11. *A forma diferencial ω de grau n definida por*

$$\omega(x_1, x_2, ..., x_n) = \pm\sqrt{\det(\langle x_i, x_j \rangle)},$$

é chamada de **elemento de volume** *de M^n.*

Pode-se mostrar que uma $n-$forma em M^n define uma orientação. Sendo assim, o elemento de volume define uma orientação em M^n.

Se ω_i, $i = 1, 2, ..., n$, são formas diferenciais de grau um definidas em uma vizinhança de $p \in M^n$ por $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$, então $\omega = \omega_1 \wedge ... \wedge \omega_n$.

2.3 Conexões e Geodésicas

Seja M^n uma variedade diferenciável.

Definição 2.12. *Uma* **conexão** *em* M^n *é uma aplicação* $\mathbb{R}-$*bilinear*

$$\begin{array}{rcl} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) & \longrightarrow & \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) & \longmapsto & \nabla_X Y \end{array}$$

satisfazendo as seguintes condições:

(a) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$;

(b) $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y$.

Para $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ *e* $f \in C^\infty(M)$.

Se M^n é uma variedade Riemannnina, então é possível mostrar que existe uma única conexão ∇ satisfazendo:

(a) $X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$ (compatibilidade com a métrica).

(b) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (simetria).

Tal conexão é dita **conexão Riemanniana**, ou **conexão de Levi-Civita**.

Definição 2.13. *Uma* **curva** *em uma variedade diferenciável* M^n *é uma aplicação diferenciável* $\gamma : I \longrightarrow M^n$, *onde* $I \subset \mathbb{R}$ *é um intervalo. Um* **campo de vetores** X **ao longo de uma curva** $\gamma : I \longrightarrow M^n$ *é uma aplicação diferenciável que associa à cada* $t \in I$ *um vetor* $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$. *Dize-se que* X *é* **diferenciável** *se a função* $t \longrightarrow X(t)f$ *é diferenciável em* I, *para toda função* $f \in C^\infty(M)$.

Suponha que $\gamma : I \longrightarrow M^n$ é uma curva e $\tilde{X} \in \mathcal{X}(M)$. Para cada $t \in I$, seja $X(t) = \tilde{X}_{\gamma(t)}$. É fácil verificar, em coordenadas, que X é diferenciável. Sendo assim,

Definição 2.14. *Um campo de vetores* X *ao longo de uma curva* γ *é dito* **estendível** *se existe um campo de vetores* $\tilde{X}$ *em uma vizinhança da imagem de* γ *tal que* $X(t) = \tilde{X}_{\gamma(t)}$.

Nem todos os campos de vetores ao longo de uma curva podem ser extendidos, por exemplo, se $\gamma : I \longrightarrow M^n$ é tal que, para $t_1, t_2 \in I$ com $t_1 \neq t_2$, $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ e $\dot{\gamma}(t_1) \neq \dot{\gamma}(t_2)$, então $\dot{\gamma}$ não é estendível.

Sejam M^n uma variedade diferenciável com uma conexão ∇ e $p \in M^n$. Escolhendo um sistema de coordenadas $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ em torno de p temos, para $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, que

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_i \quad e \quad Y = \sum_{j=1}^{n} y_j \partial_j,$$

onde $\partial_i = \partial / \partial x_i$. Assim,

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_{i=1}^{n} x_i \nabla_{\partial_i} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \partial_j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \nabla_{\partial_i} \partial_j + \sum_{i,j=1}^{n} x_i \partial_i (y_j) \partial_j. \end{aligned}$$

Fazendo $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k$, concluímos que Γ_{ij}^k são funções diferenciáveis.

Definição 2.15. *As funções* Γ_{ij}^k *são chamadas de* **símbolos de Christoffel** *de* ∇ *com respeito aos campos coordenados* $\{\partial_1, \partial_2, ..., \partial_n\}$.

Pode-se mostrar que

$$\sum_{l} \Gamma_{ij}^{l} g_l = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\}.$$

Como a matriz (g_{km}) admite uma inversa (g^{km}), obtemos

$$\Gamma_{ij}^{m} g_l = \frac{1}{2} \sum_{k} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}.$$

Observação 2.16. *Para o espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$ *temos que* $\Gamma_{ij}^k = 0$.

Assim,

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) e_k,$$

o que mostra que $\nabla_X Y(p)$ depende somente do valor de $X(p)$ e do valor de Y ao longo de uma curva tangente a X em p. Sendo assim, faz sentido falar em $\nabla_X \tilde{X}$, onde X é um campo de vetores ao longo de uma curva $\gamma : I \longrightarrow M^n$ e $\tilde{X}$ uma extensão de X (supondo X estendível). Logo,

Proposição 2.17. *Seja M^n uma variedade diferenciável com uma conexão ∇. Então ∇ determina um único opertador que associa a um campo vetorial X ao longo de uma cuva $\gamma : I \longrightarrow M^n$ um outro campo vetorial $\frac{DX}{dt}$ ao longo de γ tal que:*

(a) $\frac{D}{dt}(aX + bY) = a\frac{DX}{dt} + b\frac{DY}{dt}$.

(b) $\frac{D}{dt}(fX) = \frac{df}{dt}X + f\frac{DX}{dt}$.

(c) *Se X é estendível, então para qualquer extensão $\tilde{X}$ de X.*

$$\frac{DX}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}}\tilde{X}.$$

para quaisquer campo de campo Y ao longo de γ, $a, b \in \mathbb{R}$ e $f \in C^\infty(M)$.

Demonstração. Ver Lee [13], página 57. □

Definição 2.18. *O campo $\frac{DX}{dt}$ definido como acima é a* **derivada covariante** *de X ao longo da curva γ.*

Seja M^n uma variedade diferenciável com uma conexão ∇.

Definição 2.19. *A* **aceleração** *de um curva $\gamma : I \longrightarrow M^n$ é o campo de vetores $\frac{D\dot{\gamma}}{dt}$ ao longo de γ. A curva γ é dita uma* **geodésica em** t_0 *com respeito a ∇ se sua aceleração em t_0 é nula, isto é, $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} \equiv 0$. Se $\gamma : I \longrightarrow M^n$ for uma geodésica para todo $t \in I$, dizemos que γ é uma* **geodésica**.

2.4 Operadores Diferenciais

Vamos considerar, neste tópico, M^n uma variedade Riemanniana com métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$ e conexão Riemanniana ∇.

Definição 2.20. *O* **gradiente** ∇f *de uma função $f \in C^\infty(M)$ é um campo vetorial sobre M^n tal que*

$$\langle \nabla f, X \rangle = df(X) = X(f).$$

Para todo $X \in \mathcal{X}(M)$.

Decorre diretamente da definição que se $f, g \in C^\infty(M)$, então

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;

2. $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

Seja $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M^n$. Assim, se $X \in \mathcal{X}(M)$, temos

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Logo,

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i(f) = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} e_j(f) e_j \right\rangle = \left\langle X, \sum_{j=1}^{n} e_j(f) e_j \right\rangle.$$

Daí

$$\nabla f = \sum_{j=1}^{n} e_j(f) e_j.$$

Definição 2.21. *Seja X um campo vetorial em M^n. A* **divergência** $divX$ *de X é a função suave $divX : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$(divX)(p) = tr\left\{v \longmapsto \nabla_v X(p)\right\},$$

onde $v \in T_pM$ e $tr\{v \longmapsto \nabla_v X(p)\}$ denota o traço de $\{v \longmapsto \nabla_v X(p)\}$.

Em outras palavras, temos que

$$div\, X = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle,$$

onde $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ é um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M^n$.

Decorre diretamente da definição que

1. $div(X+Y) = divX + divY$;

2. $div(fX) = f divX + \langle \nabla f, X \rangle$,

para quaisquer $X, Y \in TM$ e qualquer $f \in C^\infty(M)$.

Considere, em M^n, o elemento de volume dV (que é uma $n-$forma em M^n) e, para todo $X \in \mathcal{X}(M)$, definamos o **produto interior** de X por dV, que denotaremos por $\iota_X dV$, como a $(n-1)-$forma dada por

$$\iota_X dV(X_2, ..., X_n) = dV(X, X_2, ..., X_n).$$

Sejam $p \in M^n$ e $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ um referencial geodésico em p. Assim, $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ e

$$\begin{aligned} \iota_X dV(X_2, ..., X_n) &= dV(X, X_2, ..., X_n) = dV(X = \sum_{i=1}^n x_i e_i, X_2, ..., X_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} x_i \omega_1 \wedge ... \wedge \widehat{\omega_i} \wedge ... \wedge \omega_n (X_2, ..., X_n). \end{aligned}$$

Portanto $\iota_X dV = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} x_i \omega_1 \wedge ... \wedge \widehat{\omega_i} \wedge ... \wedge \omega_n$ e

$$\begin{aligned} d(\iota_X dV) &= d(\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} x_i \omega_1 \wedge ... \wedge \widehat{\omega_i} \wedge ... \wedge \omega_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} d(x_i) \wedge \omega_1 \wedge ... \wedge \widehat{\omega_i} \wedge ... \wedge \omega_n \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} x_i d(\omega_1 \wedge ... \wedge \widehat{\omega_i} \wedge ... \wedge \omega_n). \end{aligned}$$

Mas $d(\omega_1 \wedge ... \wedge \widehat{\omega_i} \wedge ... \wedge \omega_n) = 0$ em p, pois

$$d\omega_k(e_i, e_j) = e_i \omega_k(e_j) - e_j \omega_k(e_i) - \omega_k([e_i, e_j]) = \omega_k(\nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i) = 0,$$

já que $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ é um referencial geodésico em p e, portanto, $\nabla_{e_i} e_j = 0$. Assim,

$$d(\iota_X dV) = \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} e_i(x_i) \right) dV = div(X) dV.$$

Integrando ambos os membros da igualdade acima e utilizando o teorema de Stokes, um pouco mais de trabalho permite mostrar o seguinte

Teorema 2.22 (Teorema da Divergência). *Se M^n é uma variedade Riemanniana compacta, orientada pelo elemento de volume dV e com bordo ∂M, então, para $X \in \mathcal{X}(M)$,*

$$\int_M div X dV = \int_{\partial M} \langle X, N \rangle d\tilde{V},$$

onde N é o campo unitário normal à ∂M apontando para fora de M^n e $d\tilde{V}$ é o elemento de volume da métrica induzida em ∂M.

Demonstração. Ver Lee [12], página 43. □

Definição 2.23. *O* **laplaciano** Δf *de uma função* $f \in C^{\infty}(M)$ *é a função* $\Delta f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$\Delta f = divf(\nabla f).$$

Pelas propriedades do gradiente e da divergência, temos que

1. $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$;

2. $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$.

Para quaisquer $f, g \in C^{\infty}(M)$.

Mais adiante precisaremos da seguinte

Definição 2.24. *Dizemos que* $f \in C^{\infty}(M)$ *é uma função* **hamônica** *(respec.,* **subharmônica***) se* $\Delta f = 0$ *(respec.,* $\Delta f \geq 0$*).*

Definição 2.25. *O* **hessiano** *de uma função* $f \in C^{\infty}(M)$*, denotado por* $Hessf$*, é o campo de operadores lineares* $Hessf : T_P M \longrightarrow T_p M$ *definido, para cada* $v \in T_p M$*, por*

$$(Hessf)(v) = \nabla_v \nabla f.$$

Proposição 2.26. *: O operador linear* $(Hessf)_p : T_P M \longrightarrow T_p M$*, com* $p \in M^n$ *e* $f \in C^{\infty}(M)$*, é auto-adjunto.*

Demonstração. Sejam $v, w \in T_p M$ e V, W usas extensões as campos em uma vizinhança $U \subset M^n$ de p. Temos

$$\begin{aligned}
\langle (Hessf)_p(v), w \rangle &= \langle \nabla_V \nabla f, W \rangle_p \\
&= (V \langle \nabla f, W \rangle)(p) - \langle \nabla f, \nabla_V W \rangle_p \\
&= (V(Wf))(p) - \langle \nabla f, \nabla_W V + [V, W] \rangle_p \\
&= (W(Vf))(p) + ([V, W] f)(p) - \langle \nabla f, \nabla_W V + [V, W] \rangle_p \\
&= (W(Vf))(p) - \langle \nabla f, \nabla_W V \rangle_p \\
&= \langle (Hessf)_p(w), v \rangle .
\end{aligned}$$

□

Denotaremos também por $Hessf$, $f \in C^\infty(M)$, a forma bilinear simétrica em T_pM dada por

$$(Hessf)(v,w) = \langle \nabla_v \nabla f, w\rangle = v(w(f)) - (\nabla_v w)f.$$

Para $v, w \in T_pM$. Daí,

$$(Hessf)(v,w) = \langle \nabla_v \nabla f, w\rangle = v\left\langle \nabla f, w\right\rangle - \left\langle \nabla f, \nabla_v w\right\rangle.$$

Se $\partial_1, \partial_2, ..., \partial_n$ são os campos coordenados em uma vizinhança coordenada $U \subset M^n$, temos

$$\begin{aligned}
(Hessf)(\partial_i, \partial_j) &= \partial_i \left\langle \nabla f, \partial_j\right\rangle - \left\langle \nabla f, \nabla_{\partial_i}\partial_j\right\rangle \\
&= \partial_i\partial_j(f) - \left\langle \sum_l \partial_l(f)\partial_l, \Gamma_{ij}^k \partial_k \right\rangle \\
&= \partial_i\partial_j(f) - \sum_l \partial_l(f)\Gamma_{ij}^k g_{lk}.
\end{aligned}$$

Observação 2.27. *Já que em $\mathbb{R}^n$ temos $\Gamma_{ij}^k = 0$, teremos em $\mathbb{R}^n$ que*

$$(Hessf)(\partial_i, \partial_j) = \partial_i\partial_j(f).$$

Proposição 2.28. *Se $f \in C^\infty(M)$, então $\Delta f = tr(Hessf)$.*

Demonstração. Seja $U \subset M^n$ uma vizinhança de p e considere o referencial ortonormal $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
tr(Hessf)_p &= \sum_{i=1}^n \left\langle (Hessf)_p(e_i, e_i\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \left\langle \nabla_{e_i}\nabla f, e_i\right\rangle_p \\
&= div(\nabla f)(p) \\
&= \Delta f(p).
\end{aligned}$$

$\square$

2.5 Curvatura, Curvatura Seccional, Curvatura de Ricci e Escalar

Seja M^n uma variedade Riemanniana com conexão Riemanniana ∇.

Definição 2.29. *A* **curvatura** *R de M^n é a aplicação $R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z.$$

É imediato a partir das propriedades de ∇ que R é uma aplicação $C^\infty(M)$ -linear. Por outro lado, pela simetria da conexão Riemanniana ∇, temos que

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z \\ &+ \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_{[Y,Z]} X \\ &+ \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_{[Z,X]} Y \\ &= [Y,[X,Z]] + [Z,[Y,X]] + [X,[Z,Y]]. \end{aligned}$$

Pela identidade de Jacobi para campos de vetores, obtemos a **primeira identidade de Bianchi**

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

De agora em diante, escreveremos por conveniência

$$\langle R(X,Y)Z, T\rangle = (X,Y,Z,T),$$

para todos $X,Y,Z,T \in \mathcal{X}(M)$.

Proposição 2.30. *Para $X,Y,Z,T \in \mathcal{X}(M)$, temos*

(a) $(X,Y,Z,T) + (Y,Z,X,T) + (Z,X,Y,T) = 0$;

(b) $(X,Y,Z,T) = -(Y,X,Z,T)$;

(c) $(X,Y,Z,T) = -(X,Y,T,Z)$;

(d) $(X,Y,Z,T) = (Z,T,X,Y)$.

Demonstração. Ver do Carmo [11], página 102. □

Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM e considere dois vetores $x, y \in \sigma$ linearmente independentes. Pode-se mostrar que

$$K(x,y) = \frac{(x,y,x,y)}{\left(\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2\right)^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$. Com isso temos a seguinte

Definição 2.31. *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_pM$, o número real $K(x,y) = K(\sigma)$, onde $\{x,y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamado* **curvatura seccional** *de σ em p.*

Lema 2.32. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana e p um ponto de M^n. Defina uma aplicação tri-linear $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \longrightarrow T_pM$ por*

$$\left\langle R'(X,Y,W), Z \right\rangle = \langle X,W\rangle \langle Y,Z\rangle - \langle Y,W\rangle \langle X,Z\rangle ,$$

para todos $X,Y,Z,W \in T_pM$. Então M tem curvatura seccional constante igual a K_0 se, e somente se, $R = K_0R'$, onde R é a curvatura de M.

Demonstração. Ver do Carmo [11], página 107. □

Seja $x = e_n$ um vetor unitário em T_pM e considere uma base $\{e_1, e_2, ..., e_{n-1}\}$ ortonormal do hiperplano de T_pM ortogonal a x.

Definição 2.33. *As médias*

$$\begin{aligned} Ric_p(x) &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} \langle R(x,e_i)x, e_i\rangle \\ e \\ K(p) &= \frac{1}{n}\sum_{j}^{n} Ric_p(e_j) \end{aligned}$$

são chamadas de **curvatura de Ricci** *na direção de x e* **curvatura escalar** *em p, respectivamente.*

Definamos agora a seguinte forma em T_pM

$$Q(x,y) = tr\{z \mapsto R(x,z)y\},$$

para $x, y \in T_pM$.

Obviamente Q é bilinear. Escolhendo x unitário e uma base ortonormal $\{e_1, e_2, ..., e_{n-1}, e_n = x\}$ para T_pM temos

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} \langle R(x,e_i)y, e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle R(y,e_i)x, e_i\rangle = Q(y,x). \end{aligned}$$

Assim, Q é uma forma bilinear simétrica e $Q(x,x) = (n-1)Ric_p$.

Por outro lado, à forma bilinear Q em T_pM corresponde uma aplicação linear auto-adjunta F, dada por

$$\langle F(x), y\rangle = Q(x, y).$$

Daí, denotando por $tr\,F$ o traço de F, temos

$$\begin{aligned} trF &= \sum_{j=1}^{n} \langle F(e_j), e_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} Q(e_j, e_j) \\ &= (n-1)\sum_{j=1}^{n} Ric_p(e_j) = n(n-1)K(p). \end{aligned}$$

Portanto, as curvaturas de Ricci e escalar não dependem da escolha das correspondentes bases ortonormais.

2.6 Tensores em Variedades Riemannianas

Note que $\mathcal{X}(M)$ tem uma estrutura linear quando tomamos como "escalares" os elementos de $C^\infty(M)$.

Definição 2.34. *Um* **tensor** T **de ordem r** *em uma variedade Riemanniana* M^n *é uma aplicação multilinear*

$$T : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}_{r-vezes} \longrightarrow C^\infty(M).$$

Isto quer dizer que, dados $X_1, ..., X_r \in \mathcal{X}(M)$, $T(X_1, ..., X_r)$ é uma diferenciável em M^n e que T é linear em cada entrada, isto é,

$$T(X_1, ..., fX + gY, X_r) = fT(X_1, ...X, ..., X_r) + gT(X_1, ..., Y, ..., X_r),$$

para todos $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e todas $f, g \in C^\infty(M)$.

Definição 2.35. *Seja* M^n *uma variedade Riemanniana* $n-$*dimensional e considere uma vizinhança* $U \subset M^n$ *de* $p \in M^n$ *onde seja possível definir campos* e_1, e_2, ...,$e_n \in \mathcal{X}(M)$ *de modo que, em cada* $q \in U$, *os vetores* $e_1(q)$, $e_2(q)$, ...,$e_n(q)$ *formam uma base de* T_qM. *Diremos, neste caso, que* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *é um* **referencial móvel** *em* U.

Assim, podemos restringir os campos $X_1, ..., X_r$ a U e expressá-los no referencial móvel $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ da seguinte maneira

$$X_1 = \sum_{i_1} x_{i_1} e_{i_1}, ..., X_r = \sum_{i_r} x_{i_r} e_{i_r}, \quad i_1, ..., i_r = 1, ..., n.$$

Pela linearidade de T, temos que

$$T(X_1, ..., X_r) = \sum_{i_1, ..., i_r} x_{i_1} ... x_{i_r} T(e_{i_1}, ... e_{i_r}).$$

Portanto temos que o valor de $T(X_1, ..., X_r)$ em $p \in M^n$ depende apenas dos valores de $T(e_{i_1}, ... e_{i_r})$ e de $X_1, ..., X_r$ em p.

Definição 2.36. *As funções $T(e_{i_1}, ... e_{i_r}) = T_{i_1, ..., i_r}$ em U, são ditas* **as componentes** *de T no referencial $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$.*

Exemplo 2.37. *O* **tensor curvatura** *de uma variedade Riemanniana M^n é definido por*

$$\begin{aligned} R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow C^{\infty}(M) \\ (X, Y, Z, W) &\longrightarrow R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle . \end{aligned}$$

É imediato verificar que R é um tensor de ordem 4, cujas componentes no referencial $\{\partial/\partial x_1, ..., \partial/\partial x_n\}$, associado ao sistema de coordenadas $\{x_1, ..., x_n\}$, são

$$R(X_i, X_j, X_k, X_l) = R_{ijkl}.$$

Definição 2.38. *Seja T um tensor de ordem r. A* **diferencial covariante** *∇T de T é um tensor de ordem $(r + 1)$ dado por*

$$\begin{aligned} \nabla T(X_1, ..., X_r, Z) &= Z(T(X_1, ..., X_r)) - T(\nabla_Z X_1, ..., X_r) \\ &- \cdots - T(X_1, ..., X_{r-1}, \nabla_Z X_r). \end{aligned}$$

Definição 2.39. *Seja T um tensor de ordem r. Para cada $Z \in \mathcal{X}(M)$, a* **derivada covariante** *∇_Z de T em relação a Z é um tensor de ordem r dado por*

$$\nabla_Z T(X_1, ..., X_r) = \nabla T(X_1, ..., X_r, Z).$$

2.7 Imersões Isométricas

Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis e considere uma aplicação diferenciável $\varphi : M^m \longrightarrow N^n$.

Definição 2.40. *Um ponto $p \in M^m$ é dito* **ponto regular** *de φ quando $d\varphi_p : T_pM^m \longrightarrow T_{\varphi(p)}N^n$ é injetiva. Dizemos que φ é uma* **imersão** *se todo ponto $p \in M^m$ é um ponto regular de φ, isto é, $d\varphi_p : T_pM^m \longrightarrow T_{\varphi(p)}N^n$ é injetiva para todo $p \in M^m$. Se, além disso, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N^n, então diz-se que φ é um* **mergulho**.

Note que se $\varphi : M^m \longrightarrow N^n$ é uma imersão, então $m \leq n$. A diferença $n - m$ é chamada a **codimensão** da imersão φ. As **hipersuperfícies** de N são as imersões isométricas com codimensão 1.

Definição 2.41. *Se $M^m \subset N^n$ e a aplicação inclusão $\iota : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M^m é uma* **subvariedade** *de N^n.*

Proposição 2.42. *Seja $\varphi : M^m \longrightarrow N^n$ uma imersão. Para todo ponto $p \in M^m$, existe uma vizinhança $V \subset M^m$ de p tal que a restrição $\varphi\,|_V : V \longrightarrow N^n$ é um mergulho.*

Demonstração. Ver do Carmo [11], página 14. □

Seja agora $\varphi : M^n \longrightarrow \overline{M}^k$ uma imersão de uma variedade diferenciável M^n de dimensão n em uma variedade Riemanniana $\overline{M}^k$ de dimensão $k = n+m$ com métrica Riemanniana $g = \langle\ ,\ \rangle$. A métrica Riemanniana g de $\overline{M}^k$ induz, de maneira natural, uma métrica Riemanniana $\tilde{g}$ em M^n: se $v_1, v_2 \in T_pM$, define-se $\tilde{g}(v_1, v_2) = g(d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2))$.

Definição 2.43. *Sejam M^n e $\overline{M}^k$ variedades Riemannianas com métricas Riemannianas $\tilde{g}$ e g, respectivamente. Dizemos que uma imersão diferenciável $\varphi : M^n \longrightarrow \overline{M}^k$ é uma* **imersão isométrica** *se $\tilde{g}(v_1, v_2) = g(d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2))$.*

2.8 A Segunda Forma Fundamental

Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ uma imersão. Dado $p \in M$, existe, pela proposição 2.42, uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $\varphi(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Isto quer dizer que existem uma vizinhança $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $\varphi(p)$ e um difeomorfismo $\phi : \overline{U} \subset \overline{M} \to V \subset \mathbb{R}^{n+m}$ em uma aberto V de $\mathbb{R}^{n+m}$, tal que ϕ aplica difeomorficamente $\varphi(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

Para simplificar a notação, identificamos U com $\varphi(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, $q \in U$, com $d\varphi_q(v) \in T_{\varphi(q)}\overline{M}$. Usaremos tais identificações para estender, por exemplo, um campo local (isto é, definido em U) de vetores de M a um campo local (isto é, definido em $\overline{U}$) de vetores em $\overline{M}$; se U é suficientemente pequeno, tal extensão é sempre possível, como se vê facilmente usando o difeomorfismo φ.

Para cada $p \in M^n$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

onde $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Se $v \in T_p\overline{M}$, $p \in M^n$, podemos escrever

$$v = v^\top + v^\perp, \quad v^\top \in T_pM, \quad v^\perp \in (T_pM)^\perp.$$

Tal decomposição é evidentemente diferenciável no sentido que as aplicações de $T\overline{M}$ em $T\overline{M}$ dadas por $(p,v) \to (p, v^\top)$ e $(p,v) \to (p, v^\perp)$ são diferenciáveis.

Definição 2.44. *Dizemos que* $v^\top$ *é a* **componente tangencial** *de* v *e que* $v^\perp$ *é a* **componente normal** *de* v.

Seja $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\overline{M}^{n+m}$ e considere campos de vetores locais X e Y em M^n. Para $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ extensões locais de X e Y a $\overline{M}^{n+m}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\top.$$

Supondo que M^n tem a métrica Riemanniana induzida por φ, pode-se mostrar que ∇ é a conexão Riemanniana de M^n. Assim,

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em $\overline{M}^{n+m}$ normal a M^n.

Agora note que, sendo $\overline{X}_1$ e $\overline{Y}_1$ outras extensões locais de X e Y, respectivamente, temos

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}_1}\overline{Y} - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}-\overline{X}_1}\overline{Y}$$

se anula em M^n, pois $\overline{X} - \overline{X}_1 = 0$ em M^n. Por outro lado,

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}_1 - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}(\overline{Y} - \overline{Y}_1) = 0,$$

pois $\overline{Y} - \overline{Y}_1 = 0$ ao longo de uma trajetória de X.

Portanto $B(X,Y)$ não depende das extensões $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ e, consequentemente, está bem definida. No que se segue, indicaremos por $\mathcal{X}(U)^{\perp}$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais a $\varphi(U) \approx U$.

Proposição 2.45. *Se $X, Y \in \mathcal{X}(U)$, a aplicação $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \to \mathcal{X}(U)^{\perp}$ dada por*

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Demonstração. Pelas propriedades de linearidade de uma conexão, conclui-se imediatamente que B é aditiva em X e Y e que $B(fX,Y) = fB(X,Y)$, $f \in C^{\infty}(U)$. Resta mostrar que $B(X,fY) = fB(X,Y)$, $f \in C^{\infty}(U)$. Indicando por $\overline{f}$ uma extensão de f a $\overline{U}$, teremos

$$\begin{aligned} B(X,fY) &= \overline{\nabla}_{\overline{X}}(\overline{fY}) - \nabla_X(fY) \\ &= \overline{f}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - f\nabla_X Y + \overline{X}(\overline{f})\overline{Y} - X(f)Y. \end{aligned}$$

Como em M, $f = \overline{f}$ e $\overline{X}(\overline{f}) = X(f)$, concluímos que as duas últimas parcelas se anulam, donde $B(X,fY) = fB(X,Y)$, isto é, B é bilinear. Para mostrar que B é simétrica, utilizaremos a simetria da conexão Riemanniana, obtendo

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y = \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} + [\overline{X},\overline{Y}] - \nabla_Y X - [X,Y].$$

Como em M, $[\overline{X},\overline{Y}] = [X,Y]$, concluímos que $B(X,Y) = B(Y,X)$. $\square$

Como B é bilinear, concluímos, exprimindo B em um sistema de coordenadas , que o valor de $B(X,Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$.

Seja $p \in M^n$ e considere a aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle, \qquad x, y \in T_pM,$$

onde $\eta \in (T_pM)^{\top}$.

Temos, pela proposição 2.45, que H_η é uma forma bilinear simétrica.

Definição 2.46. *A forma quadrática* II_η *definida em* T_pM *por*

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x),$$

é chamada **a segunda forma fundamental** *de* φ *em* p *segundo o vetor normal* η.

Observe que à aplicação bilinear H_η fica associada uma aplicação linear auto-adjunta, chamada **aplicação de Weingarten**, $A_\eta : T_pM \to T_pM$ dada por

$$\langle A_\eta(x), y\rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta\rangle.$$

Proposição 2.47. *Sejam* $p \in M$*,* $x \in T_pM$ *e* $\eta \in (T_pM)^\perp$*. Se* N *é uma extensão local de* η *normal a* M*, então*

$$A_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^\top.$$

Demonstração. Seja $y \in T_pM$ e considere X, Y extensões locais de x, y, respectivamente, e tangentes a M. Então, $\langle N, Y\rangle = 0$, e portanto,

$$\begin{aligned} \langle A_\eta(x), y\rangle &= \langle B(X, Y)(p), N\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N\rangle(p) \\ &= \langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle(p) = -\langle Y, \overline{\nabla}_X N\rangle(p) \\ &= \langle -\overline{\nabla}_x N, y\rangle, \end{aligned}$$

para todo $y \in T_pM$. □

Sejam K e $\overline{K}$ as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente, definidas por

$$K(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)X, Y\rangle}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2},$$

e

$$\overline{K}(\overline{X}, \overline{Y}) = \frac{\langle R(\overline{X}, \overline{Y})\overline{X}, \overline{Y}\rangle}{\|\overline{X}\|^2 \|\overline{Y}\|^2 - \langle \overline{X}, \overline{Y}\rangle^2},$$

onde

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

$$\overline{R}(X, Y)Z = \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z.$$

Teorema 2.48 (Gauss). *Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de T_pM. Então*

$$K(x,y) - \overline{K}(x,y) = \langle B(x,x), B(y,y)\rangle - \|B(x,y)\|^2.$$

Demonstração. Ver do Carmo [11], página 143. □

Definição 2.49. *Uma imersão $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ é* **geodésica** *em $p \in M^n$ se, para todo $\eta \in (T_pM)^\perp$, a segunda forma fundamental II_η é identicamente nula em p. A imersão φ é* **totalmente geodésica** *se ela é geodésica para todo $p \in M$.*

Proposição 2.50. *Uma imersão $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ é geodésica em $p \in M$ se, e só se, toda geodésica γ de M^n partindo de p é geodésica de $\overline{M}^{n+m}$ em p.*

Demonstração. Suponhamos que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = x$ e sejam N uma extensão local, normal a M, de um vetor normal η em p e X uma extensão local, tangente a M, de $\gamma'(t)$. Como $\langle X, N\rangle = 0$, obteremos em p,

$$\begin{aligned} H_\eta(x,x) &= \langle A_\eta(x), x\rangle = -\langle \overline{\nabla}_X N, X\rangle \\ &= -X\langle N, X\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_X X\rangle = \langle N, \overline{\nabla}_X X\rangle. \end{aligned}$$

Decorre daí que φ é geodésica em p se, e só se, para todo $x \in T_pM$, a geodésica γ de M que é tangente a x em p satisfaz a condição: $\overline{\nabla}_X X(p)$ não tem componente normal. Portanto, φ é geodésica em p se, e só se, toda geodésica γ de M^n partindo de p é geodésica de $\overline{M}^{n+m}$ em p. □

Definição 2.51. *Uma imersão $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ é* **mínima** *se para todo $p \in M^n$ e todo $\eta \in (T_pM)^\perp$ tem-se que $trA_\eta = 0$.*

Sendo $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ um referencial ortonormal de vetores em $\mathcal{X}(U)^\perp$, onde U é uma vizinhança de p na qual φ é um mergulho, podemos escrever, em p,

$$B(x,y) = \sum_i H_{e_i}(x,y)e_i, \quad x, y \in T_pM, \quad i = 1, ..., m.$$

Não é difícil verificar que o vetor normal dado por

$$H = \frac{1}{n}\sum_i (trA_{e_i})e_i$$

não depende do referencial $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ escolhido.

Definição 2.52. *O vetor H dado acima é chamado o* **vetor curvatura média** *de φ.*

É claro que φ é mínima se, e só se, $H(p) = 0$ para todo $p \in M$.

2.9 As Equações Fundamentais de Uma Imersão Isométrica

Dada uma imersão isométrica $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+m}$, temos, em cada $p \in M^n$, a decomposição

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp$$

que varia diferenciavelmente com p. Isto significa que, localmente, a parte do fibrado tangente $T\overline{M}$ que se projeta sobre M se decompõe em um fibrado tangente TM e em um fibrado normal $TM^\perp$. No que se segue, usaremos sistematicamente as letras latinas $X, Y, Z, etc.$, para indicar os campos diferenciáveis de vetores tangentes e as letras gregas $\xi, \eta, \zeta, etc.$, para indicar os campos diferenciáveis de vetores normais.

Dados X e η, já vimos que a componente tangente de $\overline{\nabla}_X\eta$ é dada por $(\overline{\nabla}_X\eta)^\top = -A_\eta X$. A componente normal de $\overline{\nabla}_X\eta$, chamada **conexão normal** $\nabla^\perp$ da imersão é dada por

$$\nabla^\perp_X\eta = (\overline{\nabla}_X\eta)^\perp = \overline{\nabla}_X\eta - (\overline{\nabla}_X\eta)^\top = \overline{\nabla}_X\eta + A_\eta X.$$

Verifica-se facilmente que a conexão normal $\nabla^\perp$ possui as propriedades usuais de uma conexão, isto é, é linear em X, aditiva em η, e

$$\nabla^\perp_X(f\eta) = f\nabla^\perp_X\eta + X(f)\eta, \qquad f \in C^\infty(M).$$

De maneira análoga ao caso do fibrado tangente, introduz-se a partir de $\nabla^\perp$ uma noção de curvatura no fibrado normal que é chamada **curvatura normal** $R^\perp$ da imersão e definida por

$$R^\perp(X,Y)\eta = \nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\eta - \nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y\eta + \nabla^\perp_{[X,Y]}\eta.$$

Proposição 2.53. *Com as notações acima, as seguintes equações se verificam*

(a) *(Equação de Gauss)*

$$\begin{aligned}\langle\overline{R}(X,Y)Z,T\rangle &= \langle R(X,Y)Z,T\rangle - \langle B(Y,T),B(X,Z)\rangle \\ &+ \langle B(X,T),B(Y,Z)\rangle.\end{aligned}$$

(b) (Equação de Ricci)

$$\langle \overline{R}(X,Y)\eta,\zeta\rangle - \langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\zeta\rangle = \langle [A_\eta, A_\zeta]X, Y\rangle.$$

onde $[A_\eta, A_\zeta]$ indica o operador $A_\eta \circ A_\zeta - A_\zeta \circ A_\eta$.

Demonstração. Ver do Carmo [11], página 149. □

Observação 2.54. *Dizemos que o fibrado normal de uma imersão é plano (flat) se $R^{\perp} = 0$. Admita que o espaço ambiente $\overline{M}^{n+m}$ tem curvatura seccional constante. Então a equação de Ricci se escreve*

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\zeta\rangle = -\langle [A_\eta, A_\zeta]X, Y\rangle.$$

Decorre daí que $R^{\perp} = 0$ se, e só se, $[A_\eta, A_\zeta] = 0$ para todo η e ζ, isto é, se, e só se, para todo $p \in M^n$ existe uma base de T_pM que diagonaliza simultaneamente todos os A_η.

Dada uma imersão isométrica, convém indicar por $\mathcal{X}(M)^{\perp}$ o espaço dos campos diferenciáveis de vetores normais a M. A segunda forma fundamental da imersão pode então ser considerada como um tensor

$$\begin{aligned} B : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)^{\perp} &\longrightarrow C^{\infty}(M) \\ (X,Y,\eta) &\longmapsto B(X,Y,\eta) = \langle B(X,Y), \eta\rangle\,. \end{aligned}$$

A definição de derivada covariante se estende a este tipo de tensor de maneira natural

$$\begin{aligned} (\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta) &= X(B(Y,Z,\eta)) - B(\nabla_X Y, Z, \eta) \\ &- B(Y, \nabla_X Z, \eta) - B(Y, Z, \nabla^{\perp}_X \eta). \end{aligned}$$

Proposição 2.55 (Equação de Codazzi)**.** *Com a notação acima, vale*

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,\eta\rangle = (\overline{\nabla}_Y B)(X,Z,\eta) - (\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta).$$

Demonstração. Ver do Carmo [11], página 151. □

Observação 2.56. *Se o espaço ambiente $\overline{M}^{n+m}$ tem curvatura seccional constante, a equação de Codazzi se escreve como*

$$(\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta) = (\overline{\nabla}_Y B)(X,Z,\eta).$$

Se, além disto, a codimensão da imersão é um, tem-se $\nabla^{\perp}_X \eta = 0$. *Donde,*

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X B(Y, Z, \eta) &= X\langle A_\eta Y, Z\rangle - \langle A_\eta(\nabla_X Y), Z\rangle - \langle A_\eta Y, \nabla_X Z\rangle \\ &= \langle \nabla_X(A_\eta Y), Z\rangle - \langle A_\eta(\nabla_X Y), Z\rangle.\end{aligned}$$

Portanto, neste caso, a equação de Codazzi se escreve

$$\nabla_X(A_\eta Y) - \nabla_Y(A_\eta X) = A_\eta([X, Y]).$$

Capítulo 3

Transformações de Newton

Seja $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão, onde M^n é uma variedade diferenciável compacta, conexa, orientável, com bordo ∂M (podendo ser $\partial M = \emptyset$) e $\overline{M}^{n+1}(c)$ uma variedade riemanniana simplesmente conexa, orientada e com curvatura seccional constante c. Considere em $\overline{M}^{n+1}$ a métrica riemanniana $\langle , \rangle$, a conexão Riemanniana $\overline{\nabla}$ e $d\overline{M}$ sua forma volume e tome em M^n a métrica induzida por x, de modo que x se torne uma imersão isométrica.

A segunda forma fundamental $A : TM \longrightarrow TM$ da imersão $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ com respeito a um campo vetorial normal unitário $N \in \mathcal{X}^{\perp}(M)$ induz, em cada $p \in M$, um operador linear auto-adjunto $A : T_pM \longrightarrow T_pM$. Seus autovalores são as curvaturas principais $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ da imersão x.

Associadas a A, tem-se as n funções simétricas elementares

$$S_r = S_r(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n),$$

com $1 \leq r \leq n$, dadas por

$$p(t) = \det(tI - A) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_r t^{n-r},$$

onde $p(t)$ é o polonômio caractístico de A e I é o operador identidade.

Em outras palavras, $S_0 = 1$ e, para $1 \leq r \leq n$,

$$S_r = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_r \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} ... \lambda_{i_r}.$$

Note, em particular, que

$$\begin{aligned} S_1^2 - 2S_2 &= (\sum_i \lambda_i)^2 - 2\sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j \\ &= \sum_i \lambda_i^2 \\ &= |A|^2. \end{aligned}$$

onde $|A|^2 = \langle A, A\rangle = tr(A^2)$. Portanto,

$$2S_2 + |A|^2 = S_1^2,$$

Dado $p \in M$, seja $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial ortonormal (um referencial geodésico, por exemplo) numa vizinhança de p tal que $\{e_1(p), ..., e_n(p)\}$ seja uma base ortonormal de T_pM formada por autovetores de A_p. Se R é a curvatura escalar de M, segue da equação de Gauss que

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i\neq j} \langle R(e_i, e_j)e_j, e_i\rangle \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i\neq j} (c + \langle A(e_i, e_i), A(e_j, e_j)\rangle - \|A(e_i, e_j)\|^2) \\ &= c + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i\neq j} (\langle A(e_i, e_i), A(e_j, e_j)\rangle - \|A(e_i, e_j)\|^2). \end{aligned}$$

Como $\langle N, N\rangle = 1$ e a codimensão é 1, segue que $A(e_i, e_j) = \langle A(e_i, e_j), N\rangle N$. Assim, temos em p

$$\begin{aligned} \langle A(e_i, e_i), A(e_j, e_j)\rangle &= \langle A(e_i, e_i), N\rangle\langle A(e_j, e_j), N\rangle \\ &= \langle A_p(e_i), e_i\rangle\langle A_p(e_j), e_j\rangle \\ &= \lambda_i\lambda_j. \end{aligned}$$

Por um argumento análogo, $\|A(e_i, e_j)\|^2 = 0$ se $i \neq j$.

Segue então que

$$\begin{aligned} R &= c + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i\neq j} \lambda_i\lambda_j \\ &= c + \frac{2}{n(n-1)} S_2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$2S_2 = n(n-1)(R - c).$$

Para $1 \leq r \leq n$, nós definimos a $r-$**ésima curvatura média** H_r de x por

$$H_r = \frac{(-1)^r}{\binom{n}{r}} S_r.$$

Em particular, $H_1 = H$ é a curvatura média de x. Tais funções satisfazem certas desigualdades algébricas muitos úteis, usualmente conhecidas como desigualdades de Newton. Os dois resultados que se seguem foram obtidos de [5].

Lema 3.1. *Se $f \in \mathbb{R}[x]$ é um polinômio com $k \geq 1$ raízes reais, contadas as multiplicidades, então f' tem pelo menos $k-1$ raízes reais, contadas as multiplicidades. Em particular, se todas as raízes de f são reais, o mesmo ocorre com f'.*

Demonstração. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ uma raiz de multiplicidade $k \geq 1$ de f, isto é, $f(x) = (x-\alpha)^k g(x)$, com $g(\alpha) \neq 0$. Derivando obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= k(x-\alpha)^{k-1} g(x) + (x-\alpha)^k g'(x) \\ &= (x-\alpha)^{k-1}(kg(x) + (x-\alpha)g'(x)). \end{aligned}$$

Como $kg(\alpha) + (\alpha - \alpha)g'(\alpha) \neq 0$, segue que α é raiz de multiplicidade $k-1$ de f'.

Agora sejam $\alpha_1, ..., \alpha_l \in \mathbb{R}$ as raízes distintas de f, isto é,

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_l)^{k_l} g(x),$$

onde $k_1, ..., k_l$ são inteiros positivos e $g(\alpha_i) \neq 0$, $i = 1, ..., l$. Como vimos acima, α_i é raiz de multiplicidade $k_i - 1$ de f'. Contadas as multiplicidades, f tem $k = k_1 + ... + k_l$ raízes reais. Supondo, sem perda de generalidade, que $\alpha_1 < ... < \alpha_l$, obtemos mais $l-1$ raízes para f', distintas dos α_i, aplicando o Teorema do Valor Médio aos intervalos $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$. Assim, f' tem pelo menos $(k_1 - 1) + ... + (k_l - l) + (l-1) = k - l + l - 1 = k - 1$ raízes reais. □

Proposição 3.2. *Sejam $n > 1$ inteiro, e $\lambda_1, ..., \lambda_n$ números reais. Defina, para $0 \leq r \leq n$, $S_r = S_r(\lambda_i)$ como acima, e $H_r = H_r(\lambda_i) = \binom{n}{r}^{-1} S_r(\lambda_i)$.*

(a) Para $1 \leq r < n$, tem-se $H_r^2 \geq H_{r-1}H_{r+1}$. Além disso, se a igualdade ocorre para $r = 1$ ou para algum $1 < r < n$, com $H_{r+1} \neq 0$ neste caso, então $\lambda_1 = ... = \lambda_n$.

(b) *Se* $H_1, H_2, ..., H_r > 0$ *para algum* $1 < r \leq n$, *então* $H_1 \geq \sqrt{H_2} \geq \sqrt[3]{H_3} \geq ... \geq \sqrt[r]{H_r}$. *Mais ainda, se a igualdade ocorre para algum* $1 \leq j < r$, *então* $\lambda_1 = ... = \lambda_n$.

(c) *Se, para algum* $1 \leq r < n$, *tem-se* $H_r = H_{r+1} = 0$, *então* $H_j = 0$ *para todo* $r \leq j \leq n$. *Em particular, no máximo* $r - 1$ *dos* λ_i *são diferentes de zero.*

Demonstração. Para provar (a) nós usamos indução sobre o número $n > 1$ de números reais. Para $n = 2$, temos somente $r = 1$, e a desigualdade segue de

$$\begin{aligned} H_1^2 - H_0H_2 &= (\frac{1}{2}S_1)^2 - S_2 \\ &= (\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2))^2 - \lambda_1\lambda_2 \\ &= \frac{1}{4}((\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2) \\ &= \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

valendo a igualdade se e só se $\lambda_1 = \lambda_2$. Suponha agora que as desigualdades sejam verdadeiras para $n - 1$ números reais, com igualdade para $r = 1$ ou $1 < r < n$ e $H_{r+1} \neq 0$ se e só se todos os λ_i são iguais. Dados $n \geq 3$ números reais $\lambda_1, ..., \lambda_n$, seja

$$f(x) = (x + \lambda_1)...(x + \lambda_n) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} H_r(\lambda_i)x^{n-r}.$$

Então

$$f'(x) = \sum_{r=0}^{n-1}(n - r)\binom{n}{r} H_r(\lambda_i)x^{n-r-1}.$$

Como as raízes de f são todas reais, o mesmo ocorre com f', de modo que existem números reais $\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}$ tais que

$$\begin{aligned} f'(x) &= n(x + \gamma_1)...(x + \gamma_{n-1}) = n\sum_{r=0}^{n-1} S_r(\gamma_i)x^{n-r-1} \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} n\binom{n-1}{r} H_r(\gamma_i)x^{n-r-1}. \end{aligned}$$

Desde que $n\binom{n-1}{r} = (n - r)\binom{n}{r}$, comparando os coeficientes temos que $H_r(\lambda_i) = H_r(\gamma_i)$ para $0 \leq r \leq n - 1$. Daí, segue da hipótese de indução que, para $1 \leq r \leq n - 2$,

$$H_r^2(\lambda_i) = H_r^2(\gamma_i) \geq H_{r-1}(\gamma_i)H_{r+1}(\gamma_i) = H_{r-1}(\lambda_i)H_{r+1}(\lambda_i).$$

Além disso, se a igualdade ocorre para os λ_i com $r = 1$, respectivamente $1 < r < n-1$ e $H_{r+1}(\lambda_i) \neq 0$, ela também ocorre para os γ_i com $r = 1$, respectivamente $1 < r < n-1$ e $H_{r+1}(\gamma_i) \neq 0$. Segue então da hipótese de indução que $\gamma_1 = ... = \gamma_{n-1}$, e assim $\lambda_1 = ... = \lambda_n$.

Por fim, temos que mostrar que $H_{n-1}^2(\lambda_i) \geq H_{n-2}(\lambda_i)H_n(\lambda_i)$, com igualdade para $H_n \neq 0$ se e só se todos os λ_i são iguais. Se $\lambda_i = 0$ para algum $1 \leq i \leq n$, temos $H_n(\lambda_i) = 0$ e a desigualdade é óbvia. Se não, $H_n \neq 0$ e

$$\begin{aligned} H_{n-1}^2 \geq H_{n-2}H_n \quad &\Leftrightarrow \quad \left[\binom{n}{n-1}^{-1} \sum_i \frac{H_n}{\lambda_i}\right]^2 \geq \left[\binom{n}{n-2}^{-1} \sum_{i<j} \frac{H_n}{\lambda_i\lambda_j}\right] H_n \\ &\Leftrightarrow \quad (n-1)\left(\sum_i \frac{1}{\lambda_i}\right)^2 \geq 2n \sum_{i<j} \frac{1}{\lambda_i\lambda_j}. \end{aligned}$$

Por simplicidade, façamos $\alpha_i = \frac{1}{\lambda_i}$. Assim, a desigualdade acima equivale a

$$(n-1)(\sum_{i=1}^n \alpha_i)^2 \quad \geq \quad 2n \sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j.$$

Fazendo $T(\alpha_i) = (n-1)(\sum_{i=1}^n \alpha_i)^2 - 2n\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j$, nós temos

$$\begin{aligned} T(\alpha_i) &= n(\sum_{i=1}^n \alpha_i)^2 - (\sum_{i=1}^n \alpha_i)^2 - 2n\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j \\ &= n[(\sum_{i=1}^n \alpha_i)^2 - 2\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j] - (\sum_{i=1}^n \alpha_i)^2 \\ &= n\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 - (\sum_{i=1}^n \alpha_i)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para os vetores $u = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ e $v = (1, ..., 1)$. Assim, vale a igualdade se e só se existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $u = tv$, isto é, se e só se todos os α_i(e então todos os λ_i) são iguais.

Para a prova de (b), observe que $H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}}$ segue de (a), pois aqui temos $H_1, H_2 > 0$. Suponha então que $H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}} \geq ... \geq H_k^{\frac{1}{k}}$ para algum $2 \leq k < r$. Então,

$$H_k^2 \geq H_{k-1}H_{k+1} \geq H_k^{\frac{k-1}{k}}H_{k+1}.$$

Dividindo por $H_k^{\frac{k-1}{k}}$, obtemos $H_k^{\frac{1}{k}} \geq H_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}$. Segue imediatamente das desigualdades acima que se $H_k^{\frac{1}{k}} = H_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}$ para algum $1 \leq k < r$, então $H_k^2 = H_{k-1}H_{k+1}$. Assim, o item (a) nos dá $\lambda_1 = ... = \lambda_n$.

Para provar o item (c), podemos supor $r < n-1$, pois o caso $r = n-1$ é direto. Pelo item (a), $H_{r+1}^2 \geq H_r H_{r+2}$, e como $H_r = H_{r+1} = 0$, vale a igualdade, de sorte que se $H_{r+2} \neq 0$, segue ainda de (a) que $\lambda_1 = ... = \lambda_n = \lambda$. Mas $H_r = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow H_{r+2} = 0$ (veja a definição dos H_r), uma contradição. Assim $H_{r+2} = 0$, e analogamente $H_{r+3} = ... = H_n = 0$. Para finalizar, é suficiente notar que o polinômio $f(x)$ do item (a) é, neste caso,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} S_j x^{n-j} = \sum_{j=0}^{r-1} S_j x^{n-j}.$$

□

Para $0 \leq r \leq n$ definimos a $r-$**ésima transformação de Newton** P_r em M por $P_0 = I$ (operador identidade) e, para $1 \leq r \leq n$, por

$$P_r \quad = \quad (-1)^r S_r I + A P_{r-1}.$$

Segue facilmente por indução que

$$P_r \quad = \quad (-1)^r (S_r I - S_{r-1} A + S_{r-2} A^2 - ... + (-1)^r A^r),$$

Em particular, cada P_r, sendo um polinômio em A, é auto-adjunto e tem os mesmos autovetores de A. Daí, A e todos os P_r podem ser simultaneamente diagonalizados. Pelo teorema de Cayley - Hamilton, temos

$$0 = p(A) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_r A^{n-r} = (-1)^n P_n.$$

Sejam $e_1, e_2, ..., e_n$ autovetores linearmente independentes de A e $k_1, k_2, ..., k_n$ os autovalores correspondentes. Denotando por A_i a restrição de A a $\{e_i\}^{\perp} \subset T_pM$ e por $S_r(A_i)$ a $r-$ésima função simétrica associada a A_i, segue-se que

$$\det(tI - A_i) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k S_k(A_i) t^{n-1-k},$$

onde

$$S_k(A_i) \quad = \quad \sum_{(1 \leq j_1 < ... < j_k \leq n)_{j_s \neq i}} k_{j_1} k_{j_2} \cdots k_{j_n}.$$

Observe que os autovalores de A_i são $k_1, k_2, ..., \hat{k_i}, k_n$.

Proposição 3.3. *Para* $0 \leq r \leq n$,

(a) $P_r e_i = S_r(A_i)e_i$.

(b) $tr(P_r) = \sum_{i=1}^{n} S_r(A_i) = (n-r)S_r$.

(c) $tr(AP_r) = \sum_{i=1}^{n} k_i S_r(A_i) = (r+1)S_{r+1}$.

(d) $tr(A^2P_r) = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 S_r(A_i) = S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}$.

Demonstração. (a) - Fixemos $1 \leq i \leq n$ e façamos indução em r. Para $r = 0$ temos $P_0 e_i = e_i = (-1)^0 e_i = (-1)^0 S_0(A_i)e_i$. Para $r = 1$,

$$\begin{aligned} P_1(e_i) &= (S_1 I + A)e_i \\ &= (S_1 - k_i)e_i \\ &= S_1(A_i)e_i. \end{aligned}$$

Suponhamos, por indução, que $P_r(e_i) = S_r(A_i)e_i$, para $0 \leq r < n-1$. Assim,

$$\begin{aligned} P_{r+1}(e_i) &= (S_{r+1} I - AP_r)e_i \\ &= (S_{r+1} - k_i S_r(A_i))e_i \\ &= \left(\sum_{(j_1 < \ldots < j_{r+1})_{j_s \neq i}} k_{j_1} k_{j_2} \cdots k_{j_{r+1}} \right) e_i \\ &= S_{r+1}(A_i)e_i. \end{aligned}$$

(b) - Pelo item (a) temos que

$$\begin{aligned} tr(P_r) &= \sum_{i=1}^{n} \langle P_r e_i, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} S_r(A_i). \end{aligned}$$

No somatório $\sum_{i=1}^{n} S_r(A_i)$, para $1 \leq j_1 < ... < j_r \leq n$, o termo $k_{j_1} k_{j_2} \cdots k_{j_r}$ comparece em $S_r(A_i)$ exatamente uma vez para cada índice $1 \leq i \leq n$ diferente de $j_1, j_2, ..., j_r$, isto é, $(n-r)$ vezes. Logo,

$$tr(P_r) = (n-r)S_r.$$

(c) - De $P_{r+1} = S_{r+1} I - AP_r$, temos que

$$\begin{aligned} tr(AP_r) &= tr(S_{r+1} I - P_{r+1}) \\ &= nS_{r+1} - (n-(r+1))S_{r+1} \\ &= (r+1)S_{r+1}. \end{aligned}$$

Observe ainda que

$$AP_r e_i = A(S_r(A_i)e_i) = S_r(A_i)k_i.$$

Donde

$$tr(AP_r) \;=\; \sum_{i=1}^{n} k_i S_r(A_i).$$

(d) - De $P_{r+1} = S_{r+1}I - AP_r$, obtemos $A^2P_{r+1} = S_{r+1}A - AP_r$. Então,

$$\begin{aligned} tr(A^2P_r) &= tr(S_{r+1}A - AP_{r+1})) \\ &= S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}. \end{aligned}$$

Por fim

$$A^2P_r e_i \;=\; A^2(S_r(A_i)e_i) = k_i^2 S_r(A_i).$$

Donde

$$tr(A^2P_r) \;=\; \sum_{i=1}^{n} k_i^2 S_r(A_i).$$

□

Associada a cada transformação de Newton P_r de uma imersão $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$, temos o operador diferencial linear de segunda ordem $L_r : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ dado por

$$L_r f = tr(P_r Hessf).$$

Em particular, $L_0 f = tr(Hessf) = \Delta f$. O próximo resultado consta de Rosenberg [16].

Proposição 3.4. *: Se $\overline{M}^{n+1}$ tiver curvatura seccional constante, então*

$$L_r f = div(P_r \nabla f).$$

Demonstração. Note que, sendo β uma base de T_pM, temos

$$\begin{aligned} tr(Hessf \circ P_r) &= \sum_{X\in\beta} Hessf(P_rX, X) = \sum_{X\in\beta} \nabla df(P_rX, X) \\ &= \sum_{X\in\beta} \langle \nabla_X \nabla f, P_rX \rangle \\ &= \sum_{X\in\beta} \langle \nabla_{P_rX} \nabla f, X \rangle . \end{aligned}$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned} div(P_r\nabla f) &= tr(X \longmapsto \nabla_X P_r(\nabla f)) \\ &= \sum_{X\in\beta} \langle \nabla_X P_r(\nabla f), X\rangle . \end{aligned}$$

Logo

$$tr(Hessf \circ P_r) \;=\; div(P_r\nabla f) \Longleftrightarrow \sum_{X\in\beta} \langle \nabla_X P_r(\nabla f), X\rangle = \sum_{X\in\beta} \langle \nabla_{P_rX}\nabla f, X\rangle .$$

Assim, para provar $L_r f = div(P_r\nabla f)$ basta mostrar que

$$tr(X \longmapsto \nabla_{P_rX}Y) = tr(X \longmapsto \nabla_X P_rY).$$

Afirmamos agora que se $tr(X \longmapsto \nabla_{P_rX}Y) = tr(X \longmapsto \nabla_X P_rY)$ for válido para um campo Y, então também será válido para o campo ϕY, para toda função $\phi \in C^\infty(M)$. De fato, sendo β é uma base de T_pM formada por autovetores X de P_r, com autovalores λ, então

$$\sum_{X\in\beta} \langle \nabla_{P_rX}\phi Y, X\rangle = \sum_{X\in\beta} (\phi \langle \nabla_{P_rX}Y, X\rangle + (P_rX)(\phi)\langle X, Y\rangle)$$

e

$$\sum_{X\in\beta} \langle \nabla_X P_r(\phi Y), X\rangle = \sum_{X\in\beta} (\phi \langle \nabla_X P_rY, X\rangle + X(\phi)\langle X, P_rY\rangle),$$

uma vez que P_r é auto-adjunto. Agora, $(P_rX)(\phi)X = \lambda X(\phi)X = X(\phi)\lambda X = X(\phi)P_rX$, e as equações acima são iguais desde que $tr(X \longmapsto \nabla_{P_rX}Y) = tr(X \longmapsto \nabla_X P_rY)$ seja válido pra Y. Assim, basta estabelecer que $tr(X \longmapsto \nabla_{P_rX}Y) = tr(X \longmapsto \nabla_X P_rY)$ é válido para $Y = e_1$, onde $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ é um referencial ortonormal, em uma vizinhança $U \subset M$ de p, geodésico em P e que diagonaliza A em p.

Supunhamos, por indução, que $tr(X \longmapsto \nabla_{P_rX}Y) = tr(X \longmapsto \nabla_X P_rY)$ seja válido para $r-1$. Como os e_i diagonalizam também P_r, digamos $P_re_i = \mu_ie_i$, temos

$$tr(X \longmapsto \nabla_{P_rX}e_1) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{P_re_i}e_1, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{\mu_ie_i}e_1, e_i\rangle = 0.$$

Assim, basta mostrar que $tr(X \longmapsto \nabla_X P_re_i) = 0$ em P.

Porém note que

$$\begin{aligned}
tr(X \longmapsto \nabla_X P_{r-1}Ae_1) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} P_{r-1}Ae_1, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{P_{r-1}e_i} Ae_1, e_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{\tilde{\mu}_i e_i} Ae_1, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} Ae_1, \tilde{\mu}_i e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} Ae_1, P_{r-1}e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle P_{r-1}\nabla_{e_i} Ae_1, e_i \rangle .
\end{aligned}$$

Logo,

$$tr(X \longrightarrow \nabla_X P_{r-1}Ae_1) = tr(X \longrightarrow \nabla_X S_r Ae_1).$$

Portanto,

$$tr(X \longmapsto \nabla_X P_r e_i) = 0,$$

já que $P_r = S_r I - AP_{r-1}$ e, consequentemente,

$$tr(X \longrightarrow \nabla_X P_r e_i) = tr(X \longrightarrow \nabla_X P_{r-1}Ae_1) - tr(X \longrightarrow \nabla_X S_r Ae_1).$$

Como, por hipótese, $\overline{M}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante, segue-se,pela equação de Codazzi, que

$$(\nabla_{e_i} A)e_1 = (\nabla_{e_1} A)e_i.$$

Donde,

$$\nabla_{e_i} Ae_1 - A\nabla_{e_i} e_1 = \nabla_{e_1} Ae_i - A\nabla_{e_1} e_i \Longrightarrow \nabla_{e_i} Ae_1 = \nabla_{e_1} Ae_i.$$

Logo

$$\begin{aligned}
tr(X \longrightarrow \nabla_X P_{r-1}Ae_1) &= \sum_{i=1}^{n} \langle P_{r-1}\nabla_{e_1} Ae_i, e_i \rangle \\
&= tr(P_{r-1}\nabla_{e_i} A) = \langle \nabla S_r, e_1 \rangle ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
tr(X \longmapsto \nabla_X S_r e_1) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} S_r e_1, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} e_i \langle S_r e_1, e_i \rangle \\
&= \langle S_r e_1, e_i \rangle = e_1(S_r) \\
&= \langle \nabla S_r, e_1 \rangle .
\end{aligned}$$

Agora, para r=1, basta mostrarmos que

$$tr(X \longmapsto \nabla_X Ae_1) = tr(X \longmapsto \nabla_X S_1 e_1),$$

pois $P_1 = S_1 I - P_0 A = S_1 I - A$. Ora,

$$\begin{aligned} tr(X \longmapsto \nabla_X A e_1) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} A e_1, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_1} A e_i, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_1 \langle A e_i, e_i \rangle = e_1 \sum_{i=1}^{n} \langle A e_i, e_i \rangle \\ &= e_1(S_1). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} tr(X \longmapsto \nabla_X S_1 e_1) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} S_1 e_1, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} e_1 \langle S_1 e_1, e_i \rangle \\ &= e_1 \langle S_1 e_1, e_1 \rangle = e_1(S_1), \end{aligned}$$

e com isso concluímos a demonstração do teorema.

$\square$

Proposição 3.5. *: Seja $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão, onde $\overline{M}^{n+1}(c)$ representa $\mathbb{R}^{n+1}$, a esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ ou o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$. Considere um vetor fixo U de $\mathbb{R}^{n+2}$ (nos dois primeiros casos) ou de $\mathbb{L}^{n+2}$ (no terceiro caso), N um campo unitário de vetores normal a M e as funções $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por*

$$f(p) = \langle N(p), U \rangle \quad e \quad g(p) = \langle X(p), U \rangle .$$

Então

(a) $\nabla f = -A(U^{\top})$ *e* $\nabla g = U^{\top}$;

(b) $L_r(g) = tr(AP_r)f - ctr(P_r)g$;

(c) $L_r(f) = -tr(A^2 P_r)f + ctr(AP_r) - U^{\top}(S_{r+1})$.

Demonstração. : Faremos a prova para o caso em que $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{S}^{n+1}$. Os demais casos seguem-se de forma análoga.

Seja $\{X = e_0, e_1, e_2, ..., e_n, e_{n+1} = N\}$ um referencial ortonormal adaptado à imersão x, $\tilde{\nabla}$ a conexão de $\mathbb{R}^{n+2}$, $\overline{\nabla}$ a de $\overline{M}^{n+1}$ e ∇ a de M. Suponhamos que $\{e_1, e_2, ..., e_n,\}$ é geodésico em $p \in M$ e diagonaliza A em p.

Note que

$$g = \langle X, U \rangle \Longrightarrow e_i(g) = \left\langle \tilde{\nabla}_{e_i} X, U \right\rangle = \langle e_i, U \rangle .$$

Suponha agora, sem perda de generalidade, que $|U| = 1$. Então,

$$\begin{cases} \nabla g = \sum_{i=1}^{n} e_i(g)e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, U\rangle = U^{\top}; \\ |\nabla g|^2 + f^2 + g^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, U\rangle^2 + \langle e_{n+1}, U\rangle^2 + \langle e_0, U\rangle^2 = |U|^2 = 1. \end{cases}$$

Agora

$$\begin{aligned} g_{ij} = e_j(e_i(g)) &= e_j \langle e_i, U\rangle = \left\langle \tilde{\nabla}_{e_j} e_i, U \right\rangle = \langle \overline{\nabla}_{e_j} e_i, U\rangle + \left\langle (\tilde{\nabla}_{e_j} e_i)^{\perp}, U \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{e_j} e_i, U \right\rangle + \left\langle (\overline{\nabla}_{e_j} e_i)^{\perp}, U \right\rangle + \left\langle \tilde{\nabla}_{e_j} e_i, X \right\rangle \langle X, U\rangle \\ &= \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} e_i, N \right\rangle \langle N, U\rangle + (e_j \langle e_i, X\rangle - \left\langle e_i, \tilde{\nabla}_{e_j} X \right\rangle) g \\ &= \langle Ae_i, e_j\rangle f - \langle e_i, e_j\rangle g \\ &= h_{ij} f - \delta_{ij} g. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} L_r(g) &= tr(P_r Hessg) = \sum_{k=1}^{n} \langle P_r Hessg(e_k), e_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} S_r(A_k) g_{kk} \\ &= \sum_{k=1}^{n} S_r(A_k)(h_{kk} f - g) = \left(\sum_{k=1}^{n} S_r(A_k)\lambda_k\right) f - \left(\sum_{k=1}^{n} S_r(A_k)\right) g \\ &= tr(AP_r) f - tr(P_R) g. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} f &= \langle N, U\rangle \Longrightarrow e_i(f) = \left\langle \tilde{\nabla}_{e_i} N, U \right\rangle = \langle \overline{\nabla}_{e_i} N, U\rangle + \left\langle (\tilde{\nabla}_{e_i} N)^{\perp}, U \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_j \right\rangle \langle e_j, U\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, N \right\rangle \langle N, U\rangle + \left\langle \tilde{\nabla}_{e_i} N, X \right\rangle \langle X, U\rangle \\ &= -\sum_{j=1}^{n} h_{ij} \langle e_j, U\rangle + (e_i \langle N, X\rangle - \left\langle N, \tilde{\nabla}_{e_i} X \right\rangle) g \\ &= -\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\lambda_j \langle e_j, U\rangle - \langle N, e_i\rangle g \\ &= -\lambda_i \langle e_i, U\rangle . \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \nabla f &= \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -\sum_{i=1}^{n} \left\langle Ae_i, U^{\top} \right\rangle e_i \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \left\langle AU^{\top}, e_i \right\rangle e_i \\ &= -AU^{\top}. \end{aligned}$$

Para o que falta, note que

$$f_i = -\left\langle AU^\top, e_i \right\rangle \Longrightarrow f_{ij} = e_j(f_i) = -e_j \left\langle AU^\top, e_i \right\rangle = -\left\langle \nabla_{e_j} AU^\top, e_i \right\rangle.$$

Assim, pela equação de Codazzi, temos que

$$\begin{aligned}
f_{ij} &= -\left\langle \nabla_{U^\top} Ae_j + A[e_j, U^\top], e_i \right\rangle = -\langle \nabla_{U^\top} Ae_j, e_i \rangle - \left\langle Ae_i, [e_j, U^\top] \right\rangle \\
&= -U^{top}(h_{ij}) + \langle Ae_j, \nabla_{U^\top} e_i \rangle - \left\langle Ae_i, \nabla_{e_j} U^\top - \nabla_{U^\top} e_i \right\rangle \\
&= -U^\top(h_{ij}) - \left\langle Ae_i, \nabla_{e_i} U^\top \right\rangle,
\end{aligned}$$

em p, pois $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ em p implica em $\nabla_v e_i = 0$, $\forall v \in T_pM$. Então, em p,

$$\begin{aligned}
f_{ij} &= -\sum_{k=1}^{n} g_k e_k(e_{ij}) - \sum_{k=1}^{n} \left\langle Ae_i, \nabla_{e_j}(g_k e_k) \right\rangle \\
&= -\sum_{k=1}^{n} g_k h_{ijk} - \sum_{k=1}^{n} e_j(g_k) \langle Ae_i, e_k \rangle \\
&= -\sum_{k=1}^{n} g_k h_{ijk} - \sum_{k=1}^{n} (h_{kj} f - \delta_{kj} g) h_{jk}.
\end{aligned}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}
L_r(f) &= \sum_{j=1}^{n} P_r e_j(e_j(f)) = \sum_{j=1}^{n} S_r(A_j) f_{jj} \\
&= \sum_{j=1}^{n} S_r(A_j) \left[-\sum_{k=1}^{n} g_k h_{jjk} - \sum_{k=1}^{n} (h_{kj} f - \delta_{kj} g) h_{jk} \right] \\
&= -\sum_{j,k=1}^{n} S_r(A_j) h_{jjk} g_k - \sum_{j,k=1}^{n} S_r(A_j) \lambda_j^2 \delta_{kj} f + \sum_{j,k=1}^{n} S_R(A_j) \\
&= -\sum_{j,k=1}^{n} \langle P_r e_j, e_j \rangle e_k(h_{jj}) g_k - \left(\sum_{j=1}^{n} S_r(A_j) \lambda_j^2 \right) g \\
&= -\sum_{j,k=1}^{n} \left\langle P_r e_j, \nabla_{e_j} h_{jj} e_j \right\rangle g_k - tr(A^2 P_r) f + tr(AP_r) g.
\end{aligned}$$

Porém temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=1}^{n} \left\langle P_r e_j, \nabla_{e_j}(h_{jj} e_j) \right\rangle g_k &= \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, \nabla_{\nabla g}(h_{jj} e_j) \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, P_r \nabla_{U^\top}(Ae_j) \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, (P_r \nabla_{U^\top} A) e_j \rangle \\
&= tr(P_r \nabla_{U^\top} A) = U^\top(S_{r+1}).
\end{aligned}$$

Portanto

$$L_r(f) = -tr(A^2P_r)f + tr(AP_r)g - U^\top(S_{r+1}).$$

$\square$

Observação 3.6. *Note que, pela proposição 3.3, temos*

$$\begin{aligned} L_r(f) &= -tr(A^2P_r)f + ctr(AP_r)g - U^\top(S_{r+1}) \\ &= -(S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f + c((r+1)S_{r+1})g + U^\top(S_{r+1}) \end{aligned}$$

e

$$L_r(g) = tr(AP_r)f - ctr(P_R)g = ((r+1)S_{r+1})f - c((n-r)S_r)g.$$

Assim, se a curavtura seccional c for nula, teremos

$$L_r(f) = -(S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f + U^\top(S_{r+1})$$

e

$$L_r(g) = -((r+1)S_{r+1})f.$$

Capítulo 4

Folheações

4.1 Distribuições Tangentes

Definição 4.1. *Seja M uma variedade Riemanniana. A escolha de um subespaço linear $k-$dimensional $D_p \subset T_pM$ em cada ponto $p \in M$ é chamada uma* **distribuição tangente $k-$dimensional** *em M, ou simplesmente uma* **distribuição**, *se não houver risco de confusão. Uma distribuição é chamada diferenciável se $D = \coprod_{p\in M} D_p$ for um subfibrado suave do fibrado tangente TM.*

Definição 4.2. *Seja D uma distribuição diferenciável sobre M. Uma subvariedade imersa $N \subset M$ é dita uma* **variedade integral** *de D se $T_pN = D_p$ para cada ponto $p \in N$. Dizemos que D é* **integrável** *se cada ponto de M está contido em uma variedade integral de D.*

Definição 4.3. *Dizemos que D é* **involutiva** *se dados campos diferenciáveis X e Y em um aberto U de M tais que $X_p, Y_p \in D_p$ para todo $p \in U$, então o colchete de Lee $[X, Y]$ é tal que $[XY]_p \in D_p$, para todo $p \in U$.*

Proposição 4.4. *: Toda distribuição integrável é involutiva.*

Demonstração. Seja $D \subset TM$ uma distribuição integrável. Suponha que X e Y são seções locais diferenciaveis de D definidas em algum aberto U de M. Sejam $p \in U$ qualquer e N uma variedade integral de D contendo p. Como X e Y são seções de D, segue-se que X e Y são tangentes à N e, consequentemente, $[X, Y]$ também o é. Já que $p \in U$ é qualquer, D é involutiva. □

Definição 4.5. *Dada uma distribuição $D \subset TM$ de dimensão k, dizemos que uma carta coordenada (U, ϕ) sobre M é* **plana** *se $\phi(U)$ é o produto de abertos conexos $U', U'' \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ e, em pontos de U, D é gerado pelos primeiros k campos vetoriais coordenados $\partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, ..., \partial/\partial x^k$. Uma distribuição $D \subset TM$ é* **completamente integrável** *se existe uma carta plana para D em uma vizinhança de todo ponto de M.*

Segue-se facilmente que toda distribuição completamente integrável é integrável e, portanto, involutiva. A recíproca é dada pelo

Teorema 4.6 (Frobenius). *Toda distribuição involutiva é completamente integrável.*

Demonstração. Ver Lee [13], página 501. □

Corolário 4.7. *Toda distribuição involutiva é integrável.*

4.2 Folheações

Definição 4.8. *Se U é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, uma* **fatia** *de dimensão k é qualquer subconjunto de forma*

$$S = \left\{(x^1, x^2, ..., x^k, x^{k+1}, ..., x^n) \subset U; x^{k+1} = c^{k+1}, ..., x^n = c^n\right\},$$

para algumas constantes $c^{k+1}, ..., c^n$.

Sejam M uma variedade diferenciável $n-$dimensional e (U, ϕ) uma carta diferenciável em M.

Definição 4.9. *Se S é um subconjunto de U tal que $\phi(S)$ é uma fatia $k-$dimensional de $\phi(U)$, então dizemos que S é uma* **fatia $k-$dimensional** *de U.*

Definição 4.10. *Uma* **folheação** *de dimensão k sobre uma variedade $n-$dimensional M é uma coleção de subvariedades de dimensão k, disjuntas, conexas e imersas de M (chamadas de* **folhas** *da folheação) cuja união é M e tais que, em uma vizinhança de cada ponto $p \in M$, existe uma carta (U, ϕ) com a propriedade que $\phi(U)$ é o produto de dois abertos conexos $U' \times U'' \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ e cada folha da folheação intersepta U ou em um conjunto vazio ou em uma* *coleção enumerável de fatias de dimensão k da forma $x^{k+1} = c^{k+1}, ..., x^n = c^n$ (tal carta é chamada de* **carta plana da folheação***).*

Uma folheação de dimensão k de uma variedade diferenciável M^n é, a grosso modo, uma decomposição de M^n em subvariedades conexas de dimensão k chamadas folhas, as quais se aglomeram localmente como os subconjuntos de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ com segunda coordenada constante.

Definição 4.11. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão k de uma variedade diferenciável $n-$dimensional M^n. O número $n-k$ é dito a* **codimensão** *da folheação $\mathcal{F}$.*

Proposição 4.12. *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um de uma variedade Riemanniana conexa compacta M^n e $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função constante ao longo das folhas de $\mathcal{F}$. Se f é não constante em M^n, então*

$$S = \left\{ x \in M^n; f(x) = \max_M (f(x)) \right\}$$

contém pelo menos uma folha compacta.

Demonstração. Ver proposição 2.31 de [1]. $\square$

Toda folha L de uma folheação $\mathcal{F}$ possui uma estrutura de variedade diferenciável induzida pelas cartas de $\mathcal{F}$. Esta estrutura é chamada **estrutura intrínseca** de L.

Seja agora $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana orientável e $\mathcal{F}$ uma folheação diferenciável de codimensão 1 sobre M. Dado $p \in M$, se N é um campo de vetores unitário normal às folhas de $\mathcal{F}$ em alguma vizinhança de p em M, podemos obter um referencial ortonormal adaptado $\{e_1, e_2, ..., e_n, e_{n+1} = N\}$ de modo que $e_1, e_2, ..., e_n$ sejam tangentes às folhas de $\mathcal{F}$. A imersão de cada folha em M nos permite considerar o vetor de curvatura média H na direção de N.

Definição 4.13. *Considerando o contexto acima, para campos de vetores V tangentes às folhas de $\mathcal{F}$, podemos definir a divergência ao longo da folha por*

$$\operatorname{div}_L(V) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} N, e_i \rangle .$$

Como $\langle N, N\rangle = 1$, segue que $2\langle \nabla_N N, N\rangle = 0$ e, consequentemente, o campo de vetores $\nabla_N N$ é tangente às folhas de $\mathcal{F}$. Assim, para todo campo X tangente às folhas de $\mathcal{F}$, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(X) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i\rangle + \langle \nabla_N X, N\rangle \\ &= \operatorname{div}_L(V) + N\langle X, N\rangle - \langle X, \nabla_N N\rangle . \end{aligned}$$

Fazendo $X = \nabla_N N$, obtemos

$$= \operatorname{div}_L(V) - |X|^2 .$$

4.3 O Teorema de D. Ferus

Considere uma variedade Riemanniana M^n e uma distribuição suave $\mathcal{D}$, definida em um subconjunto aberto $U \subset M$, a qual é involutiva e tem folhas totalmente geodésicas. Defina a distribuição $\mathcal{D}^\perp$ sobre U, associando a cada $x \in U$ o complemento ortogonal $(\mathcal{D}_x)^\perp$ de $\mathcal{D}_x$ em T_xM. Nós associamos a cada $X \in \mathcal{D}$ a aplicação $C_X : \mathcal{D}^\perp \to \mathcal{D}^\perp$ definida por

$$C_X Y = -P(\nabla_Y X).$$

onde $P : TU \to \mathcal{D}^\perp$ é a projeção ortogonal e ∇ é a conexão de Levi-Civita de M. A aplicação $C : \mathcal{D} \times \mathcal{D}^\perp \to \mathcal{D}^\perp$ dada por $C(X,Y) = C_X Y$, $X \in \mathcal{D}$ e $Y \in \mathcal{D}^\perp$, é um tensor, uma vez que, para $f \in C^\infty(U)$,

$$\begin{aligned} C(fX, Y) &= C_{fX} Y = -P(\nabla_Y fX) = -P(Y(f)X + f\nabla_Y X) \\ &= fC_X Y = fC(X,Y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C(X, fY) &= C_X fY = -P(\nabla_{fY})X = -P(f\nabla_Y X) \\ &= fC_X Y = fC(X,Y). \end{aligned}$$

Note que $\mathcal{D}^\perp$ é involutiva se, e somente se, C_X for simétrico para todo $X \in \mathcal{D}$. De fato, para $Y, Z \in \mathcal{D}^\perp$ e $X \in \mathcal{D}$, temos

$$\begin{aligned} \langle C_X Y, Z\rangle &= -P(\nabla_Y X, Z)\rangle = -\langle \nabla_Y X, Z\rangle \\ &= -Y\langle X, Z\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle = \langle X, \nabla_Y Z\rangle, \end{aligned}$$

de maneira que

$$\begin{aligned}\langle C_X Y, Z\rangle = \langle Y, C_X Z\rangle \quad &\Leftrightarrow \quad \langle X, \nabla_Y Z\rangle = \langle X, \nabla_Z Y\rangle \\ &\Leftrightarrow \quad \langle X, [Y, Z]\rangle = 0,\end{aligned}$$

isto é, C_X é simétrico para todo $X \in \mathcal{D}$ se e só se $[Y, Z] \in \mathcal{D}^\perp$ para todos $Y, Z \in \mathcal{D}^\perp$. Por outro lado, caso C_X seja simétrico para todo $X \in \mathcal{D}$, ele será o operador de forma, na direção X, da inclusão das folhas de $\mathcal{D}^\perp$ em M, uma vez que

$$C_X Y = -P(\nabla_Y X) = -(\nabla_Y X)^\perp$$

em que $\perp$ indica a projeção ortogonal sobre $\mathcal{D}^\perp$.

Voltando ao caso geral, desde que as folhas de $\mathcal{D}$ são totalmente geodésicas temos $\nabla_Z W \in \mathcal{D}$ para todos para $Z, W \in \mathcal{D}$. Portanto, para $Y \in \mathcal{D}^\perp$, segue que

$$0 = Z\langle Y, W\rangle = \langle \nabla_Z Y, W\rangle$$

e concluímos que

$$\nabla_Z Y \in \mathcal{D}^\perp, \ \forall\ Z \in \mathcal{D},\ Y \in \mathcal{D}^\perp. \tag{4.1}$$

Em particular, para $X \in \mathcal{D}$, podemos definir a derivada covariante de C_X pondo

$$(\nabla_Z C_X)Y = \nabla_Z(C_X Y) - C_X(\nabla_Z Y).$$

O caráter tensorial de C dá sentido ao enunciado da seguinte

Proposição 4.14. *Se $\gamma : I \to M$ é uma geodésica de M contida em uma folha de $\mathcal{D}$, então o operador $C_{\gamma'}$ satisfaz, ao longo de γ, a equação diferencial ordinária*

$$\frac{D}{dt} C_{\gamma'} = C_{\gamma'}^2 + P(R(\,\cdot\,, \gamma'), \gamma'). \tag{4.2}$$

Demonstração. Seja $Y \in TM$ e $Z \in \mathcal{D}$. Como $Y - PY \in \mathcal{D}$ e as folhas de $\mathcal{D}$ são totalmente geodésicas, temos $\nabla_Z(Y - PY) \in \mathcal{D}$. Portanto,

$$P(\nabla_Z Y) = P(\nabla_Z(Y - PY) + \nabla_Z PY) = P(\nabla_Z PY) = \nabla_Z PY, \tag{4.3}$$

onde utilizamos (4.1) na última igualdade.

Seja $X \in \mathcal{D}$ uma extensão local de γ' e seja $Y \in \mathcal{D}^{\perp}$. Utilizando (4.3), obtemos ao longo de γ que

$$\begin{aligned}
(\nabla_X C_X)Y &= \nabla_X Z(C_X Y) - C_X(\nabla_X Y) \\
&= \nabla_X(-P(\nabla_Y X)) + P(\nabla_{\nabla_X Y} X) \\
&= -P(\nabla_X \nabla_Y X) + P(\nabla_{\nabla_X Y} X) \\
&= P(R(Y,X)X - \nabla_Y \nabla_X X + \nabla_{[Y,X]} X) + P(\nabla_{\nabla_X Y} X) \\
&= P(R(Y,X)X) + P(\nabla_{\nabla_Y X} X);
\end{aligned}$$

a última igualdade segue de que $P(\nabla_Y \nabla_X X) = -C_{\nabla_X X} Y = 0$, uma vez que C é um tensor e $\nabla_X X = 0$ ao longo de γ.

Por fim, utilizando novamente o fato de $\mathcal{D}$ ter folhas totalmente geodésicas, obtemos

$$\begin{aligned}
P(\nabla_{\nabla_Y X} X) &= P(\nabla_{P(\nabla_Y X)} X + \nabla_{(\nabla_Y X)_{\text{comp. em } \mathcal{D}}} X) \\
&= P(\nabla_{P(\nabla_Y X)}) X = -C_{\gamma'}(P(\nabla_Y X)) = C_{\gamma'}^2 Y,
\end{aligned}$$

e basta substituir a última relação acima na expressão para $(\nabla_X C_X)Y$ ao longo de γ. □

Seja $f : M^n \to \tilde{M}^{n+p}$ uma imersão isométrica. Para $x \in M$, o conjunto

$$\Delta(x) = \{X \in T_x M;\ \alpha(X,Y) = 0,\ \forall\, Y \in T_x M\} \tag{4.4}$$

é um subespaço de $T_x M$, denominado o **subespaço de nulidade relativa** de f em x; sua dimensão $\nu(x)$ é o **índice de nulidade relativa** de f em x. Denotamos ainda por ν_0 o **índice de nulidade relativa mínima** de f, isto é,

$$\nu_0 = \min_{x \in M} \nu(x).$$

Nas notações acima, temos o seguinte

Lema 4.15. *Se $f : M^n \to \tilde{M}^{n+p}$ é uma imersão isométrica e $x \in M$, então*

$$\Delta^{\perp}(x) = span\{A_\xi X,\ \forall\, X \in T_x M,\ \xi \in T_x M^{\perp}\}. \tag{4.5}$$

Demonstração. Se $\mathcal{V}$ denota o subespaço do segundo membro em (4.5), basta provarmos que $\mathcal{V} \subset \Delta^{\perp}(x)$ e que $\mathcal{V}^{\perp} \subset \Delta(x)$. Para $\mathcal{V} \subset \Delta^{\perp}(x)$, dado $Y \in \Delta(x)$, temos

$$\langle A_{\xi}X, Y\rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi\rangle = 0;$$

como isso vale para todo $Y \in \Delta(x)$, segue que $A_{\xi}X \in \Delta^{\perp}(x)$. Quanto à inclusão $\mathcal{V}^{\perp} \subset \Delta(x)$, dado $Z \in \mathcal{V}^{\perp}$ temos

$$\langle \alpha(Z, X), \xi\rangle = \langle Z, A_{\xi}X\rangle = 0,$$

para todos $X \in T_xM$, $\xi \in T_xM^{\perp}$; daí, $\alpha(Z, X) = 0$, para todo $X \in T_xM$, o que é o mesmo que dizer que $Z \in \Delta(x)$. □

Proposição 4.16. *Para uma imersão isométrica $f : M^n \to \tilde{M}^{n+p}$, tem-se que:*

(a) *A distribuição de nulidade relativa $x \mapsto \Delta(x)$ é suave sobre qualquer subconjunto aberto em que ν seja constante.*

(b) *O conjunto $\mathcal{O} = \{x \in M;\ \nu(x) = \nu_0\}$ é aberto.*

Demonstração. (a) Suponha que $\dim\Delta(x) = m$ em todos os pontos do subconjunto aberto U de M. Segue de (4.5) que, dado $x_0 \in U$, existem $X_1, \ldots, X_{n-m} \in T_{x_0}M$ e $\xi_1, \ldots, \xi_{n-m} \in T_{x_0}M^{\perp}$ tais que

$$\Delta(x_0) = \operatorname{span}\{A_{\xi_j}X_j;\ 1 \leq j \leq n-m\}.$$

Tome extensões locais suaves de $X_1, \ldots, X_{n-m}$ e $\xi_1, \ldots, \xi_{n-m}$ em TM e $TM^{\perp}$, respectivamente. Por continuidade, os campos vetoriais $A_{\xi_j}X_j$, $1 \leq j \leq n-m$, permanecem linearmente independentes em uma vizinhança $V \subset U$ de x_0, e portanto geram $\Delta^{\perp}$, uma vez que a dimensão de $\Delta^{\perp}$ não muda em U. Portanto, $\Delta^{\perp}$ é uma distribuição suave sobre U, logo o mesmo é válido em relação a Δ.

(b) Nas notações de (a), seja $x_0 \in \mathcal{O}$ e $\{A_{\xi_j}X_j(x_0);\ 1 \leq j \leq n-\nu_0\}$ uma base para $\Delta^{\perp}(x_0)$. Novamente por continuidade, o conjunto $\{A_{\xi_j}X_j;\ 1 \leq j \leq n-m\}$ permanece linearmente independente numa vizinhança de x_0; nessa vizinhança, temos então $\dim\Delta^{\perp}(x) \geq \dim\Delta^{\perp}(x_0)$, e daí

$$\dim\Delta(x) \leq \dim\Delta(x_0) = \nu_0.$$

Pela minimalidade de ν_0, temos igualdade na desigualdade acima, e basta agora aplicar o item (a). □

O teorema a seguir (cf. [7], capítulo 5) é o resultado que procuramos.

Teorema 4.17 (Ferus). *Seja $f : M^n \to \tilde{M}_c^{n+p}$ uma imersão isométrica, e $U \subset M$ um conjunto aberto no qual o índice de nulidade relativa mínima ν da imersão é constante e igual a m. Então, temos sobre U que:*

(a) *A distribuição de nulidade relativa Δ é suave e integrável, e suas folhas são totalmente geodésicas em M^n e em $\tilde{M}_c^{n+p}$.*

(b) *Se $\gamma : [0, b] \to M$ é uma geodésica tal que $\gamma([0, b))$ está contido em uma folha de Δ, então $\nu(\gamma(b)) = m$.*

(c) *As folhas da distribuição de nulidade relativa mínima são completas sempre que M for completa.*

Demonstração. (a) Se $X, Y \in \Delta$ e $Z \in TM$, então

$$(\nabla_Z^\perp \alpha)(X, Y) = \nabla_Z^\perp \alpha(X, Y) - \alpha(\nabla_Z X, Y) - \alpha(X, \nabla_Z Y) = 0.$$

Segue agora da equação de Codazzi que

$$0 = (\tilde{R}(X, Z)Y)^\perp = (\nabla_X^\perp \alpha)(Z, Y) - (\nabla_Z^\perp \alpha)(X, Y) = -\alpha(Z, \nabla_X Y).$$

Assim, $\nabla_X Y \in \Delta$ e, analogamente, $\nabla_Y X \in \Delta$. Isto implica que $[X, Y] \in \Delta$, i.e., que Δ é involutiva; ademais, desde que

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y) = \nabla_X Y \in \Delta,$$

segue que as folhas de Δ são totalmente geodésicas em M e em $\tilde{M}$.

(b) Seja $\mathcal{L}$ uma folha de Δ contendo $\gamma([0, b))$, e $X_1, \ldots, X_m$ campos paralelos ao longo de $\gamma([0, b])$ e formando uma base de Δ em cada ponto de $\gamma([0, b))$. Então, para todo campo Y ao longo de γ, temos $\alpha(X_i(t), Y(t)) = 0$, donde segue por continuidade que $\alpha(X_i(b), Y(b)) = 0$. Como isso é válido para todo Y, obtemos a desigualdade $\nu(\gamma(b)) \geq \nu(\gamma(0))$.

A fim de estabelecer a desigualdade contrária, seja Z um campo paralelo ao longo de γ, tal que $Z(\gamma(b)) \in \Delta(\gamma(b))$. É claramente suficiente mostrar que $Z(\gamma(0)) \in \Delta(\gamma(0))$, para o quê precisamos da seguinte

Afirmação: para cada $W \in \Delta^\perp(\gamma(0))$, existe um único campo vetorial Y ao longo de $\gamma_{|[0,b)}$ tal que

(i) $Y(0) = W$,

(ii) $\frac{D}{dt}Y + C_{\gamma'}Y = 0$ para $0 \leq t < b$ e

(iii) Y se estende suavemente a $t = b$.

Os itens (i) e (ii) são imediatos a partir do teorema de existência e unicidade para o problema de Cauchy para EDO's de primeira ordem (veja que, em princípio, só é possível resolver a EDO em $[0, b)$, pois $\Delta^\perp$ é suave em U mas só sabemos que $\gamma([0, b)) \subset U$). Para (iii), calculemos a segunda derivada, utilizando (ii) e (4.2):

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{D^2}{dt^2}Y + \frac{D}{dt}C_{\gamma'}Y \\
&= \frac{D^2}{dt^2}Y + \left(\frac{D}{dt}C_{\gamma'}\right)Y + C_{\gamma'}\left(\frac{D}{dt}Y\right) \\
&= \frac{D^2}{dt^2}Y + \left(\frac{D}{dt}C_{\gamma'}\right)Y - C_{\gamma'}^2 Y \\
&= \frac{D^2}{dt^2}Y + P(R(Y, \gamma')\gamma')) \\
&= \frac{D^2}{dt^2}Y + cY.
\end{aligned}$$

Portanto, Y é uma solução de uma EDO linear de segunda ordem com coeficientes constantes em $[0, b)$, e assim admite uma extensão suave a $t = b$.

Para o que falta, seja X uma extensão de γ' em Δ e seja Y como na afirmação acima. Primeiramente, temos que

$$\tilde{\nabla}_{\gamma'}\alpha(Y, Z) = -A_{\alpha(Y,Z)}\gamma' + \nabla^\perp_{\gamma'}\alpha(Y, Z) = \nabla^\perp_{\gamma'}\alpha(Y, Z).$$

Por outro lado, o paralelismo de Z e a equação de Codazzi fornecem

$$\begin{aligned}
\nabla^\perp_{\gamma'}\alpha(Y, Z) &= (\nabla^\perp_X \alpha)(Y, Z) + \alpha\left(\frac{D}{dt}Y, Z\right) + \alpha\left(Y, \frac{D}{dt}Z\right) \\
&= (\nabla^\perp_Y \alpha)(X, Z) + \alpha\left(\frac{D}{dt}Y, Z\right) \\
&= -\alpha(\nabla_Y X, Z) + \alpha\left(\frac{D}{dt}Y, Z\right) \\
&= \alpha\left(C_{\gamma'}Y + \frac{D}{dt}Y, Z\right) = 0,
\end{aligned}$$

onde, na penúltima igualdade, utilizamos a definição de $C_{\gamma'}Y$ e o fato de a componente tangente de $\nabla_X Y$ estar em Δ.

Segue das relações acima que $||\alpha(Y, Z)||$ é constante ao longo de γ e se anula em $\gamma(b)$, uma vez que $Z(\gamma(b)) \in \Delta(\gamma(b))$. Assim, $\alpha(Y(\gamma(0)), Z(\gamma(0))) = 0$, e segue que $Z(\gamma(0)) \in \Delta(\gamma(0))$, conforme desejado.

(c) Como em (b), seja $\mathcal{L}$ uma folha contendo $\gamma([0, b))$. Como $\nu(\gamma(b)) = \nu_0$ e U é aberto, temos $\nu(x) = \nu_0$ numa vizinhança de $\gamma(b)$, de maneira que $\mathcal{L}$ contém uma vizinhança de $\gamma(b)$ na topologia induzida de M (pela unicidade da folha por um ponto). Assim, a extensão de γ para além de b está contida em $\mathcal{L}$, de modo que $\mathcal{L}$ é completa. $\square$

Exemplos 4.18.

(a) Seja $f : M^2 \to \mathbb{R}^3$ uma superfície *flat*, totalmente geodésica em ponto algum, i.e., tal que $\nu = 1$ sobre M. Então a distribuição Δ é integrável e tem folhas totalmente geodésicas, as quais são retas. Tal fato concorda com a classificação local das superfícies *flats* em $\mathbb{R}^3$ como cilindros, cones e superfícies tangentes (cf. [11]).

(b) Analogamente, seja $f : M^2 \to \mathbb{S}^3$ uma imersão isométrica de uma superfície de curvatura Gaussiana constante $K = 1$ em $\mathbb{S}^3$, sem pontos totalmente geodésicos. Pela equação de Gauss, f tem nulidade relativa 1 sobre M, de maneira que a superfície é folheada por grandes círculos. Neste caso a superfície nunca pode ser completa, pois, do contrário, os levantamentos das folhas da folheação ao recobrimento universal $\mathbb{S}^2$ de M^2 (munido com a métrica do recobrimento) seriam grandes círculos completos, os quais se intersectariam.

Capítulo 5

Um Teorema Tipo Hopf para Variedades Completas

Seja M^n uma variedade Riemanniana completa $n-$dimensional. No paper [17], S.T. Yau obteve a seguinte verão do Teorema de Stokes:

Lema 5.1. *Seja ω uma $(n-1)-$forma diferenciável e integrável em M^n, então existe uma sequência de domínios B_i, em M^n, tais que $M^n = \bigcup_i B_i$, $B_i \subset B_{i+1}$ e*

$$\lim_{i\to\pm\infty} \int_{B_i} d\omega = 0.$$

Demonstração. Seja r a função lipshitz definida em M^n que assume em cada ponto a distância de um ponto fixado p. Para cara $R > 0$, seja $B(R)$ a bola de raio R e centro p. Então, através da aproximação da função r, podemos encontrar uma função diferenciável nã-nula g_R tal que

(1) Para todo número finito $t < R$, $g_R^{-1}(t)$ é uma hipersuperfície regular compacta;

(2) $|dg_R| \leq 3/2$ em $g_R^{-1}([0,R])$;

(3) $g_R^{-1}(t) \subset B(t+1) \setminus B(t-1)$, para $t \leq R$.

Por outro lado, pode-se mostrar (ver teorema 3.2.22 de [6]) que

$$\int_{g_R^{-1}([0,R])} |dg_R|\,|\omega| = \int_0^R \left(\int_{g_R^{-1}(t)} |\omega| \right) dt.$$

Segue-se, de (2), que

$$\int_0^R \left(\int_{g_R^{-1}(t)} |\omega| \right) dt \leq \frac{3}{2} \int_M |\omega| \,.$$

Portanto, para algum $R/2 \leq t_R \leq R$ onde $g_{-1}(t_R)$ é uma hyersuperfície regular compacta,

$$\int_{g_R^{-1}(t_R)} |\omega| \leq \frac{3}{R} \int_M |\omega| \,.$$

Assim,pelo teorema de Stokes, temos que

$$\left| \int_{g_R^{-1}([0,t_R])} |\omega| \right| \leq \int_{g_R^{-1}(t_R)} |\omega| \leq \frac{3}{R} \int_M |\omega| \,,$$

já que $g_R^{-1}(t) \subset B(t+1)\ B(t-1)$, para $t \leq R$, segue-se que

$$M^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} g_i^{-1}([o,t_i])$$

e

$$\lim_{i \to \pm\infty} \int_{g_i^{-1}([0,]t_i} d\omega = 0.$$

Provando assim o lema. □

Considere agora a função diferenciável $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ e seja $\omega = i_{\nabla f}$, onde $i_{\nabla f}$ denota a contração (ou produto interior) na direção de ∇f. Yau estabelece, aplicando o lema acima, a seguinte extensão do teorema de Hopf em uma variedade Riemanniana completa não-compacta:

Corolário 5.2. *Se f é uma função subharmônica definida em M^n com*

$$\int_M |df| < \infty.$$

então f é harmônica.

No que se segue, vamos estudar os resultados obtidos no artigo *Complete Foliations of Space Forms by Hypersurfaces* de F. Camargo, A. Caminha e P. Sousa (cf. [3]).

Suponhamos M^n orientada pelo elemento de volume dM e seja $\mathcal{L}^1(M)$ o conjunto de funções Lebesgue integráveis em M.

Proposição 5.3. *Seja X um campo de vetores diferenciáves em uma variedade Riemanniana M^n $n-$dimensional orientada, completa e não compacta tal que $divX$ não muda de sinal em M. Se $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $divX = 0$ em M*

Demonstração. Como $divX$ não muda de sinal em M, podemos supor, sem perda de generalidade, que $divX \geq 0$ sobre M. Seja ω a $(n-1)-$forma em M dada por $\omega = i_X dM$.

Se $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ é um referencial ortonormal em um conjunto aberto $U \subset M$, com co-referencial $\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, então

$$i_X dM = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \omega_i(X) \omega_1 \wedge ... \wedge \widehat{\omega_i} \wedge ... \wedge \omega_n.$$

Porém temos que

$$X = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \omega_i(X) &= \omega_i\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \omega_j(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \delta_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \langle e_j, e_i \rangle = \langle X, e_i \rangle . \end{aligned}$$

Donde

$$i_X dM = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \langle X, e_i \rangle \omega_1 \wedge ... \wedge \widehat{\omega_i} \wedge ... \wedge \omega_n,$$

já que as $(n-1)-$formas $\omega_1 \wedge ... \wedge \widehat{\omega_i} \wedge ... \wedge \omega_n$ são ortonormais em $\Omega^{n-1}(M)$, obtemos

$$|\omega|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle X, e_i \rangle^2 = |X|^2 .$$

Então $|\omega| \in \mathcal{L}^1(M)$ e já que $d\omega = d(i_X dM) = (divX)dM$, segue-se, pelo lema anterior, que existem domínios B_i em M tais que $M = \bigcup_i B_i$, $B_i \subset B_{i+1}$ e

$$\lim_{i \to \pm\infty} \int_{B_i} (divX) dM = \lim_{i \to \pm\infty} \int_{B_i} d\omega = 0.$$

Portanto temos que $divX = 0$ em M, uma vez que $divX \geq 0$ em M. $\square$

Corolário 5.4. *Seja $x : M^n \longrightarrow Q^{n+1}(a)$ uma hipersuperfície orientada completa de uma forma espacial Q^{n+1}, com segunda forma fundamental limitada. Se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $|\nabla f| \in \mathcal{L}^1(M)$ e $L_r f$ não muda de sinal em M, então $L_r f = 0$ em M.*

Demonstração. Se A é a segunda forma fundamental da imersão x, então seus autovalores são funções contínuas em M^n. Já que

$$P_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j S_{r-j} A^j$$

e A é limitada em M^n, segue-se que $\|P_r\|$ é limitado em M^n e, consequentemente, existe uma constante $c > 0$ tal que $\|P_r\| \leq c$ em M^n. Logo

$$|P_r \nabla f| \leq \|P_r\| \, |\nabla f| \leq c \, |\nabla f| \in \mathcal{L}^1(M).$$

Por outro lado, temos que $L_r f = div(P_r \nabla f)$ e $L_r f$ não muda de sinal em M. Portanto temos, pela proposição 1, que $L_r f = 0$ em M^n. $\square$

Capítulo 6

Gráficos No Espaço Euclidiano

Este capítulo se refere, ainda, aos resultados obtidos no artigo *Complete Foliations of Space Forms by Hypersurfaces* de F. Camargo, A. Caminha e P. Sousa (cf. [3]).

Sejam $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o gráfico de u (isto é, $M^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n, u(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n\})$ e $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientada completa. Assim, podemos considerar a seguinte parametrização $X : \mathbb{R}^n \longrightarrow M^n$ dada por

$$X(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1, x_2, ..., x_n, u(x_1, x_2, ..., x_n)).$$

Daí, obtemos os campos coordenados $X_1, X_2, ...X_n, X_{n+1}$, onde

$$X_i = \frac{\partial X}{\partial x_i} = e_i + \frac{\partial(u)}{\partial x_i} e_{n+1}$$

e $e_1, e_2, ..., e_{n+1}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$

Queremos, agora, encontrar um campo normal unitário N em M^n. Isto é, um campo $N = \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i$ tal que

I. $\langle N, X_i \rangle = 0$.

II. $\|N\| = 1$.

A partir de (I) e (II) vamos determinar os a_i e, portanto, o campo N.

Note que, de (I), temos

$$\begin{aligned}
0 = \langle N, X_i \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i + a_{n+1} e_{n+1}, e_k + \partial_k(u) e_{n+1} \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, e_k \right\rangle + \underbrace{\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \partial_k(u) e_{n+1} \right\rangle}_{=0} \\
&+ \underbrace{\langle a_{n+1} e_{n+1}, e_k \rangle}_{=0} + \langle a_{n+1} e_{n+1}, \partial_k(u) e_{n+1} \rangle .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$a_k = -a_{n+1} \partial_k(u) \tag{6.1}$$

Já em (II) obtemos

$$\begin{aligned}
1 = \|N\|^2 &= \langle N, N \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i + a_{n+1} e_{n+1}, \sum_{i=1}^{n} a_i e_i + a_{n+1} e_{n+1} \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\rangle + 2 \underbrace{\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, a_{n+1} e_{n+1} \right\rangle}_{=0} \\
&+ \langle a_{n+1} e_{n+1}, a_{n+1} e_{n+1} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\rangle + a_{n+1}^2 .
\end{aligned}$$

Segue-se, por (6.1), que

$$\begin{aligned}
1 &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} (-a_{n+1} \partial_i(u) e_i), \sum_{i=1}^{n} (-a_{n+1} \partial_i(u) e_i) \right\rangle + a_{n+1}^2 \\
&= a_{n+1}^2 \left\langle \sum_{i=1}^{n} \partial_i(u) e_i, \sum_{i=1}^{n} \partial_i(u) e_i \right\rangle + a_{n+1}^2 \\
&= a_{n+1}^2 \left(\|\nabla u\|^2 + 1 \right) .
\end{aligned}$$

Daí

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} . \tag{6.2}$$

Portanto, temos que

$$N = \frac{1}{W} (-\nabla u, 1).$$

onde $W = \sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}$.

Assim, se A denota a sgunda forma fundamental de M^n com respeito a $N = \frac{1}{W}(-\nabla u, 1)$, temos

$$\begin{aligned} A(e_i, e_j) &= -\left\langle \overline{\nabla}_{X_i} N, X_j \right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{X_i} X_j, N \right\rangle \\ &= \left\langle \overline{\nabla}_{(e_i + \partial_i(u) e_{n+1})} (e_j + \partial_j(u) e_{n+1}), N \right\rangle. \end{aligned}$$

Porém temos que os Símbolos de Christofel são nulos em $\mathbb{R}^{n+1}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{(e_i + \partial_i(u) e_{n+1})} (e_j + \partial_j(u) e_{n+1}) &= \underbrace{\overline{\nabla}_{e_i} e_j}_{=0} + e_i \partial_j(u) e_{n+1} + \partial_j(u) \underbrace{\overline{\nabla}_{e_i} e_{n+1}}_{=0} \\ &+ \partial_i(u) \underbrace{\overline{\nabla}_{e_{n+1}} e_j}_{=0} + \partial_i(u) \partial_j(u) \underbrace{\overline{\nabla}_{e_{n+1}} e_{n+1}}_{=0} \\ &= e_i \partial_j(u) e_{n+1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} A(e_i, e_j) &= \langle e_i \partial_j(u) e_{n+1}, N \rangle = \frac{e_i \partial_j(u)}{W} \left\langle e_{n+1}, -\sum_{i=1}^{n} \partial_i e_i + e_{n+1} \right\rangle \\ &= \frac{e_i \partial_j(u)}{W}. \end{aligned}$$

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned} (Hessu)(e_i, e_j) &= e_i \langle \nabla u, e_j \rangle - \langle \nabla u, \nabla_{e_i} e_j \rangle \\ &= e_i \partial_j(u). \end{aligned}$$

Portanto a segunda forma fundamental de M^n com respeito a $N = (-\nabla u, 1)$ é

$$\frac{Hessu}{W}.$$

Logo, a condição de limitação se deve a existência de uma constante $c > 0$ para a qual

$$\|A\|^2 \leq c \Longrightarrow \|Hessu\|^2 \leq c \left(1 + |\nabla u|^2\right).$$

Considere agora $f, g : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f = \langle N, U \rangle \quad e \quad g = \langle x, U \rangle,$$

onde U é um campo de vetores paralelo em $\mathbb{R}^{n+1}$ e N um campo de vetores normal sobre M. Denotando por $U^\top$ a projeção ortogonal de U para M, temos

(1) $\nabla f = -A(U^\top)$ e $\nabla g = U^\top$;

(2) $L_r f = -(S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f + U^\top(S_{r+1}),$;

(3) $L_r g = -(r+1)S_{r+1} f$.

Fazendo $U = (-V, 1)$, onde V é um campo de vetores paralelo em $\mathbb{R}^n$. Obtemos

$$\begin{aligned}
U \quad & - \langle U, N\rangle N = (-V,1) - \left\langle (-V,1), \frac{1}{W}(-\nabla u, 1) \right\rangle \frac{1}{W}(-\nabla u, 1) \\
&= \quad (-V,1) - \frac{1}{W^2}\Big(\langle (-V,1), (-\nabla u, 1)\rangle (-\nabla u), \langle (-V,1), (-\nabla u, 1)\rangle \Big) \\
&= \quad (-V,1) - \frac{1}{W^2}\Big(- V(\nabla u)^2 - \nabla u, V\nabla u + 1\Big) \\
&= \quad \frac{1}{W^2}\Big\{\Big(- VW^2, W^2\Big) - \Big(- V(\nabla u)^2 - \nabla u, V\nabla u + 1\Big)\Big\} \\
&= \quad \frac{1}{W^2}\Big(- VW^2 + V(\nabla u)^2 + \nabla u, W^2 - V\nabla u + 1\Big) \\
&= \quad \frac{1}{W^2}\Big(- V(1+|\nabla u|^2) + V(\nabla u)^2 + \nabla u, (1+|\nabla u|^2) - V\nabla u - 1\Big) \\
&= \quad \frac{1}{W^2}\Big(\nabla u - V, \langle \nabla u, \nabla u\rangle - \langle \nabla u, V\rangle \Big) \\
&= \quad \frac{1}{W^2}\Big(\nabla u - V, \langle \nabla u, \nabla u - V\rangle \Big).
\end{aligned}$$

Donde

$$U^\top = U - \langle U, N\rangle U = \frac{1}{W^2}\Big(\nabla u - V, \langle \nabla u, \nabla u - V\rangle \Big).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left|U^\top\right|^2 &= \langle U^\perp, U^\perp\rangle \\
&= \frac{1}{W^4}\Big\langle \Big(\nabla u - V, \langle \nabla u, \nabla u - V\rangle \Big), \Big(\nabla u - V, \langle \nabla u, \nabla u - V\rangle \Big)\Big\rangle \\
&= \frac{1}{W^4}\left\{|\nabla u - V|^2 + |\langle \nabla u, \nabla u - V\rangle|^2\right\} \\
&\leq \frac{1}{W^4}|\nabla u - V|^2 + \frac{1}{W^4}|\nabla u|^2 |\nabla u - V|^2 \\
&= \frac{1}{W^2}|\nabla u - V|^2 \left\{\frac{1}{W^2} + \frac{|\nabla u|^2}{W^2}\right\} \\
&= \frac{1}{W^2}|\nabla u - V|^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left|U^\top\right| \leq \frac{1}{W}|\nabla u - V|.$$

Portanto,

$$\int_M \left|U^\top\right| dM \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{W} \left|\nabla u - V\right| W dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\nabla u - V\right| dx.$$

E isto é finito se, por exemplo, exitirem constantes positivas R, c e α tais que

$$|\nabla u(p) - V| \leq \frac{c}{|p|^{n+\alpha}}. \tag{6.3}$$

Sempre que $|p| > R$.

De fato, denotando por B a bola unitária em $\mathbb{R}^n$, centrada na origem e com raio 1, basta mostrarmos que a função $p \mapsto \frac{1}{|p|^{n+\alpha}}$ é integrável sobre $B^c = \mathbb{R}^n \backslash B$. Para tanto, nos valemos da fórmula de integração em coordenadas polares (cf. Teorema 2.49 de [8]):

$$\begin{aligned}
\int_{B^c} \frac{1}{|x|^{n+\alpha}} dx &= \int_1^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{|r\omega|^{n+\alpha}} r^{n-1} dr d\omega \\
&= \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_1^{+\infty} r^{-\alpha-1} dr \\
&= \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \frac{r^{-\alpha}}{-\alpha}\bigg|_1^{+\infty} \\
&= \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \frac{1}{\alpha} < +\infty.
\end{aligned}$$

Teorema 6.1. *Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o gráfico de uma função $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|\nabla u - V| \in \mathcal{L}^1(M)$, para algum $V \in \mathbb{R}^n$ e $\|Hessu\|^2 \leq c\left(1 + |\nabla u|^2\right)$, para algum $c > 0$. Se existem $0 \leq r \leq n-1$ tais que as funções simétricas elementares S_{r+1} e S_{r+2} não mudam de sinal em M, então M possui nulidade relativa $\nu \geq n - r$. Em particular, se $S_r \neq 0$, então o gráfico é folheado por hiperplanos de dimensão $n - r$.*

Demonstração. Sejam $f = \langle N, U\rangle$ e $g = \langle x, U\rangle$ como anteriormente. Segue-se da nossa hipótese que $|\nabla f|$ e $|\nabla g|$ são integráveis em M. Por outro lado, já que M é um gráfico, a função f é positiva ou negativa em M. Já que S_{r+1} não muda de sinal em M, temos que o mesmo é verdade para $L_r g$, pois $L_r g = -(r+1)S_{r+1}f$. Portanto temos, pelo corolário 0.24, que $L_r g = 0$ em M. Por sua vez, esta informação garante que S_{r+1} se anula em M e, consequentemente, $L_r f = (r+2)S_{r+2}f$. Aplicando o mesmo raciocínio (já que S_{r+2} não muda de sinal em M), obtemos que $L_r f = 0$ em M e, assim,

$S_{r+2} = 0$. Já que $S_{r+1} = S_{r+2} = 0$, a proposição 3.2 dá que $S_j = 0$ para todo $j \geq r+1$, de modo que $\nu \geq n - r$.

Segue-se do teorema 4.17, que as folhas da folheação são totalmente geodésicas, portanto, hiperplanos. $\square$

Temos, agora, o seguinte resultado tipo-Bernstein, onde não assumimos que a hipersuperfície tem curvatura média constante.

Corolário 6.2. *Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o gráfico de uma função diferenciável $u : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|\nabla u - V| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ para algum $V \in \mathbb{R}^n$ em $\|Hessu\|^2 \leq c\left(1 + |\nabla u|^2\right)$, para algum $c > 0$. Se a curvatura escalar e média de M^n não mudam de sinal em M^n, então M^n é o hiperplano em $\mathbb{R}^{n+1}$ ortogonal à $(-V, 1)$.*

Demonstração. Sejam H e R a curvatura média e escalar, respectivamente, de M^n. Basta notar que $S_1 = nH$ e, pela equação de Gauss, $n(n-1)R = 2S_2$, de modo que S_1 e S_2 não mudam de sinal em M^n. Pelo resultado anterior, M^n possui nulidade relativa n e, já que ela pe completa, M^n é um hiperplano. O restante segue-se de nossas discussões anteriores. $\square$

Observação 6.3. *Para ver que as condições sobre u não são desnecessárias, considere os seguintes exemplos:*

(a) Seja
$$u(x_1, ..., x_n) = (x_1^2 + ... + x_r^2)(\alpha_{r+1}x_{r+1} + ... + \alpha_n x_n),$$
onde $\alpha_{r+1}, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ são constantes não todas nulas. Assim, se M é o gráfico de u, então, fora do hiperplano $\alpha_{r+1}x_{r+1} + ... + \alpha_n x_n = 0$, M possui índice de nulidade relativa exatamente igual a $n - r$. Em particular, $S_{r+1} = S_{r+2} = 0$. Por outro lado, $|\nabla u - V| \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $V \in \mathbb{R}^n$ e não existe $c > 0$ tal que
$$\|Hessu\|^2 \leq c\left(1 + |\nabla u|^2\right),$$
para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Se $u(x_1, ..., x_n) = x_1^2 + ... + x_n^2$ e M é o gráfico de u, então $S_1, S_2 > 0$ em M e $\|Hessu\|^2 \leq 4n\left(1 + |\nabla u|^2\right)$, apesar de $|\nabla u - V| \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $V \in \mathbb{R}^n$.

Capítulo 7

Folheações de Formas Espaciais

Este capítulo se refere, ainda, aos resultados obtidos no artigo *Complete Foliations of Space Forms by Hypersurfaces* de F. Camargo, A. Caminha e P. Sousa (cf. [3]).

Seja $\overline{M}^{n+1}$ é uma variedade Riemanniana $(n+1)-$dimensional orientável e $\mathcal{F}$ uma folheação diferenciável de codimensão 1 em $\overline{M}$. $\mathcal{F}$ é transversalmente orientável se pudermos escolher uma campo de vetores diferenciável unitário N definido em $\overline{M}$, que é normal às folhas de $\mathcal{F}$. Se este é o caso, então, para cada $p \in \overline{M}$, consideramos o operador linear $A : T_p\overline{M} \longrightarrow T_p\overline{M}$ definida por $A(Y(p)) = -\overline{\nabla}_{Y(p)}N$, onde $\overline{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}$. É claro que se Y é um campo de vetores diferenciável em $\overline{M}$, então o mesmo é verdade para $A(Y)$. Além disso, se A_L denota a segunda forma fundamental de uma folha L de $\mathcal{F}$, obtemos $A|_L = A_L$. Nesse sentido, seja $P_r : T_p\overline{M} \longrightarrow T_p\overline{M}$ o operador linear que coincide com a $r-$ésima transformação de Newton em cada folha da folheação.

Segundo [2], tomamos $X = \overline{\nabla}_N N$, de modo que X é tangente às folhas da folheação e independe da escolha do campo N. No que se segue, calculamos o divergente de $P_r(X)$ em $\overline{M}^{n+1}$ e em uma folha L de $\mathcal{F}$.

Proposição 7.1. *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação diferenciável, transversalmente orientada e de codimensão 1 de uma variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$, N um campo de vetores em $\overline{M}$, normal às folhas de $\mathcal{F}$ e $X = \overline{\nabla}_N N$. Se L é uma folha de $\mathcal{F}$, então*

$$\operatorname{div}_L(P_r(X)) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}(N, e_i)N, P_r(e_i) \right\rangle + \langle X, \operatorname{div}_L P_r \rangle$$

$$+ \quad \mathrm{tr}(A^2P_r) + \langle X, P_r(X)\rangle - N(S_{r+1}), \tag{7.1}$$

onde $\overline{R}$ *é o tensor curvatura de* $\overline{M}$, $e_1, e_2, ..., e_n$ *é um referencial ortonormal em* L *e* $\mathrm{tr}(\cdot)$ *denota o traço em* L *para o operador no parênteses. Além disso,*

$$\mathrm{div}_{\overline{M}} P_r(X) = \mathrm{div}_L P_r(X) - \langle P_r(X), X\rangle . \tag{7.2}$$

Demonstração. Dado um ponto $p \in L$, escolha um referencial adaptado e_1, e_2, ..., e_n, e_{n+1} definido em uma vizinhança de p em M, isto é, um conjunto ortonormal de campos de vetores tais que $e_1, e_2, ..., e_n$ são tangentes às folhas e $e_{n+1} = N$. Pedimos ainda que $A(e_i(p)) = \lambda_i e_i(p)$, para todo $1 \leq i \leq n$. Se chamarmos de ∇ a conexão de Levi-Civita de L (e, como antes, $\overline{\nabla}$ a de $\overline{M}$), então

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_L P_r(X) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} P_r(X), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} e_i\langle P_r(X), e_i\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle P_r(X), \nabla_{e_i} e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i\langle X, P_r(e_i)\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle X, P_r(\nabla_{e_i} e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i\langle \overline{\nabla}_N N, P_r(e_i)\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_N N, P_r(\nabla_{e_i} e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_N N, P_r(e_i)\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_N N, \nabla_{e_i} P_r(e_i)\rangle \\
&- \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_N N, P_r(\nabla_{e_i} e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{R}(N, e_i)N, P_r(e_i)\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_N \overline{\nabla}_{e_i} N, P_r(e_i)\rangle \\
&- \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{[N,e_i]} N, P_r(e_i)\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_N N, \nabla_{e_i} P_r(e_i)\rangle \\
&- \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_N N, P_r(\nabla_{e_i} e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{R}(N, e_i)N, P_r(e_i)\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_N A(e_i), P_r(e_i)\rangle \\
&- \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{[N,e_i]} N, P_r(e_i)\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_N N, \nabla_{e_i} P_r(e_i) - P_r(\nabla_{e_i} e_i)\rangle.
\end{aligned}$$

Agora, substituindo

$$[N, e_i] = \sum_{j=1}^{n} \langle [N, e_i], e_j\rangle e_j + \langle [N, e_i], N\rangle N$$

Na igualdade acima, obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}_L P_r(X) &= \sum_{i=1}^{n}\langle\overline{R}(N,e_i)N,P_r(e_i)\rangle - N\Big(\sum_{i=1}^{n}\langle A(e_i),P_r(e_i)\rangle\Big)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\langle A(e_i),\overline{\nabla}_N P_r(e_i)\rangle - \sum_{i,j=1}^{n}\langle [N,e_i],e_j\rangle\langle\overline{\nabla}_{e_j}N,P_r(e_i)\rangle\\
&\quad-\sum_{i=1}^{n}\langle [N,e_i],N\rangle\langle\overline{\nabla}_N N,P_r(e_i)\rangle + \langle X,\mathrm{div}_L P_r\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle\overline{R}(N,e_i)N,P_r(e_i)\rangle - N\Big(\sum_{i=1}^{n}\langle e_i,AP_r(e_i)\rangle\Big)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\langle A(e_i),\overline{\nabla}_N P_r(e_i)\rangle + \langle X,\mathrm{div}_L P_r\rangle\\
&\quad-\sum_{i,j=1}^{n}\langle\overline{\nabla}_{e_i}N,e_j\rangle\langle A(e_j),P_r(e_i)\rangle + \sum_{i,j=1}^{n}\langle\overline{\nabla}_N e_i,e_j\rangle\langle A(e_j),P_r(e_i)\rangle\\
&\quad+\overbrace{\sum_{i=1}^{n}\langle\overline{\nabla}_{e_i}N,N\rangle\langle X,P_r(e_i)\rangle}^{=0} - \sum_{i=1}^{n}\langle\overline{\nabla}_N e_i,N\rangle\langle X,P_r(e_i)\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle\overline{R}(N,e_i)N,P_r(e_i)\rangle - N(\mathrm{tr}AP_r) + \langle X,\mathrm{div}_L P_r\rangle\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\langle A(e_i),\overline{\nabla}_N P_r(e_i)\rangle + \sum_{i,j=1}^{n}\langle A(e_i),e_j\rangle\langle A(e_j),P_r(e_i)\rangle\\
&\quad+\sum_{i,j=1}^{n}\langle\overline{\nabla}_N e_i,e_j\rangle\langle A(e_j),P_r(e_i)\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle e_i,\overline{\nabla}_N N\rangle\langle X,P_r(e_i)\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle\overline{R}(N,e_i)N,P_r(e_i)\rangle - N(\mathrm{tr}AP_r) + \langle X,\mathrm{div}_L P_r\rangle\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\langle A(e_i),\overline{\nabla}_N P_r(e_i)\rangle + \sum_{i,j=1}^{n}\langle A(e_i),e_j\rangle\langle e_j,AP_r(e_i)\rangle\\
&\quad+\sum_{i,j=1}^{n}\langle\overline{\nabla}_N e_i,e_j\rangle\langle A(e_j),P_r(e_i)\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle e_i,\overline{\nabla}_N N\rangle\langle P_r(X),e_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle\overline{R}(N,e_i)N,P_r(e_i)\rangle - N(\mathrm{tr}AP_r) + \langle X,\mathrm{div}_L P_r\rangle\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\langle A(e_i),\overline{\nabla}_N P_r(e_i)\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle A(e_i),AP_r(e_i)\rangle\\
&\quad+\sum_{i,j=1}^{n}\langle\overline{\nabla}_N e_i,e_j\rangle\langle A(e_j),P_r(e_i)\rangle + \langle\overline{\nabla}_N N,P_r(X)\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(N,e_i)N, P_r(e_i)\rangle - N(\mathrm{tr}AP_r) + \langle X, \mathrm{div}_L P_r\rangle \\
&+ \mathrm{tr}A^2P_r + \langle X, P_r(X)\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle A(e_i), \overline{\nabla}_N P_r(e_i)\rangle \\
&+ \sum_{i,j=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_N e_i, e_j\rangle\langle A(e_j), P_r(e_i)\rangle.
\end{aligned}
$$

Afim de entender os últimos dois somatórios acima, sejam $l_{ij} = \langle \overline{\nabla}_N e_i, e_j\rangle$ e $m_{ji} = \langle A(e_j), P_r(e_i)\rangle$. Não é difícil de verificar que $l_{ij} = -l_{ji}$ e $m_{ij} = m_{ji}$. Assim,

$$
\sum_{i,j=1}^{n}\langle \overline{D}_N e_i, e_j\rangle\langle A(e_j), P_r(e_i)\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} l_{ij}m_{ji} = 0.
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\langle A(e_i), \overline{\nabla}_N P_r(e_i)\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n}\langle A(e_i), e_j\rangle\langle \overline{\nabla}_N P_r(e_i), e_j\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\langle A(e_i), e_j\rangle N\Big(\langle P_r(e_i), e_j\rangle\Big) \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{n}\langle A(e_i), e_j\rangle\langle P_r(e_i), \overline{\nabla}_N e_j\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\langle A(e_i), e_j\rangle N\Big(\langle P_r(e_i), e_j\rangle\Big) \\
&\quad - \sum_{i,j,k=1}^{n}\langle A(e_i), e_j\rangle\langle P_r(e_i), e_k\rangle\langle e_k, \overline{\nabla}_N e_j\rangle.
\end{aligned}
$$

Sendo $h_{ij} = \langle A(e_i), e_j\rangle$ e $t_{ik} = \langle P_r(e_i), e_k\rangle$, obtemos $h_{ij} = h_{ji}$ e $t_{ik} = t_{ki}$, e, portanto,

$$
\sum_{i,j,k=1}^{n}\langle A(e_i), e_j\rangle\langle P_r(e_i), e_k\rangle\langle e_k, \overline{\nabla}_N e_j\rangle = \sum_{i,j,k=1}^{n} h_{ij}t_{ik}l_{jk} = 0.
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\langle A(e_i), \overline{D}_N P_r(e_i)\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n}\langle A(e_i), e_j\rangle N\Big(\langle P_r(e_i), e_j\rangle\Big) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}N(t_{ij}) \\
&= N\Big(\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}t_{ij}\Big) - \sum_{i,j=1}^{n} N(h_{ij})t_{ij} \\
&= N(\mathrm{tr}(AP_r)) - \sum_{i,j=1}^{n} N(h_{ij})t_{ij}.
\end{aligned}
$$

Concluímos que $\sum_{i,j=1}^{n} N(h_{ij})t_{ij} = N(S_{r+1})$ em p, e isso conclui a prova de (7.1).

Agora é fácil obter

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_{\overline{M}} P_r(X) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{e_i} P_r(X), e_i \rangle + \langle \overline{\nabla}_N P_r(X), N \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{e_i} P_r(X), e_i \rangle - \langle P_r(X), \overline{\nabla}_N N \rangle \\
&= \mathrm{div}_L P_r(X) - \langle P_r(X), X \rangle.
\end{aligned}$$

□

Observação 7.2. *Com relação aos cálculos acima, se $\overline{M}^{n+1}$ possui curvatura seccional constante, então Rosenberg prova em [16] que $div_L P_r = 0$, simplificando* (7.1). *Vamos usar este fato no que segue.*

Estudaremos, agora, folheações de codimensão um de $\mathbb{S}^{n+1}$ cujas folhas possuem curvatura escalar constante. Estendemos assim o Corolário 3.5 de [2].

Teorema 7.3. *Não existe folheação transversalmente orientada e diferenciável, cujas folhas são completas e possuem curvatura escalar constante maior que um, para a esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que existe uma folheação $\mathcal{F}$ de $\mathbb{S}^{n+1}$ com as propriedades acima. Já que, por hipótese, $\mathcal{F}$ é transversalmente orientada, existe um campo de vetores unitário N em $\mathbb{S}^{n+1}$ normal às folhas de $\mathcal{F}$. Considere o operador de forma $A_L(\cdot) = -\overline{\nabla}_{(\cdot)}N$ de uma folha L com respeito a N. Se R_L denota o valor constante da curvatura escalar da folha L de $\mathcal{F}$, decorre da equação de Gauss que

$$2S_2 = n(n-1)(R_L - 1),$$

de modo que S_2 é uma constante positiva.

Assim, se $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ são os autovalores de A_L, então

$$S_1^2 = |A|^2 + 2S_2 > |A|^2 \geq \lambda_i^2.$$

Escolhendo a orientação de tal forma que $S_1 > 0$, segue-se da desigualdade acima que $S_1 - \lambda_i > 0$. Com isso, temos que P_1 é positivo definito em L.

Considere, agora, a função curvatura escalar $R : \mathbb{S}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada ponto de $\mathbb{S}^{n+1}$ o valor da curvatura escalar da folha de $\mathcal{F}$ através desse ponto. Temos, por hipótese, que R é constante nas folhas. Assim obtemos dois casos:

I. R é constante em $\mathbb{S}^{n+1}$.

Neste caso temos que $N(S_2) = 0$ e, por (6) e (7), obtemos

$$divP_1(X) = tr(P_1) + tr(A^2P_1) > 0.$$

Porém, integração sobre $\mathbb{S}^{n+1}$ fornece

$$\int_{\mathbb{S}^{n+1}} divP_1(X) = 0,$$

que é um absurdo.

II. R é não-constante em $\mathbb{S}^{n+1}$.

Pela proposição 4.12, temos que

$$S = \left\{ p \in \mathbb{S}^{n+1}; R(p) = \max_{p \in \mathbb{S}^{n+1}} (R(p)) \right\}$$

contém pelo menos uma folha compacta.

Seja L uma folha compacta de $\mathcal{F}$, com curvatura escalar maximal $R_L = \max_{p \in \mathbb{S}^{n+1}} (R(p))$. Assim, $N(S_2) = 0$ ao longo de L. O operador curvatura da esfera, junto com a Observação 2 e (6), nos dão

$$div_L P_1(X) = tr(P_1) + tr(A^2P_1) + \langle X, P_1(X) \rangle > 0.$$

Por outro lado, obtemos, aplicando o teorema da divergência à L, que

$$\int_L div_L P_1(X) = 0,$$

uma vez que L é compacto. Mas isso é uma contradição. $\square$

Observação 7.4. *Ressaltamos que existem várias famílias de toros compactos $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura seccional constante maior que um, e remetemos o leitor para o Exemplo 4.4 de [4] para mais detalhes. Naturalmente, nenhum deles constitui uma folheação de $\mathbb{S}^{n+1}$.*

Finalizamos este trabalho com uma generalização do teorema 1 a uma folheação singular de $\mathbb{R}^{n+1}$, para a qual entendemos uma folheação $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ S, onde $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um conjunto de Lebesgue de medida nula. A fim de indicar este resultado, se $\mathcal{F}$ é uma tal folheação transversalmente orientável, com campo de vetores normal unitário N normal às folhas , então (como antes) seja $X = \overline{\nabla}_N N$, onde $\overline{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Teorema 7.5. *Seja $\mathcal{F}$ folheação transversalmente rientada e diferenciável de codimensão um de $\mathbb{R}^{n+1}$, cujas folhas são completas, $r-$minimais e tais que S_r não mudam de sinal sobre elas. Se $|X| \in \mathcal{L}^1$ e $|A|$ é limitada ao longo de cada folha, então a nulidade relativa de cada folha é pelo menos $n - r$. Em particular, se $S_r \neq 0$ em uma folha, então esta folha é folheada por hiperplanos de dimensão $n - r$.*

Demonstração. Seja L uma folha de $\mathcal{F}$. Já que S_r não muda de sinal em L, temos novamente P_r semi-definida por um resultado de J. Hounie M. L. Leite [9], de modo que $tr(A^2 P_r)$ e $\langle X, P_r(X)\rangle$ são ambas não-negativas ou ambas não-positivas em L. Portanto, aplicando (7.1) e a observação 7.4, obtemos

$$div_L P_1(X) = tr(P_1) + tr(A^2 P_1) + \langle X, P_1(X)\rangle\,,$$

que é ou maior que zero ou menor que zero em L. Portanto temos, pela proposição 1, que $div_L P_1(X) = 0$ e, já que $S_{r+1} = 0$ em L, obtemos

$$tr(A^2 P_r) = -(r+2)S_{r+2} = 0.$$

Dessa forma obtemos, como antes, $S_k = 0$ para todo $k \geq r+1$, e isso é suficiente, como no final da demonstração do teorema 1, ao invocar o teorema de . $\square$

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, J. L. ; BESSA, G. P. ; MONTENEGRO, J. F. *On Bernstein-Heinz-Chern Flanders inequalities. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 144, p. 457-464, 2008.

[2] BARBOSA, J. L. M. ; KENMOTSU, K. ; OSHIKIRI, G.. *Foliations by hypersurfaces with constant mean curvature. Math. Zeit.*, v. 207, p. 97-108, 1991.

[3] CAMARGO, F. ;CAMINHA, A. ; SOUSA, P. *Complete foliations of space forms by hypersurfaces. Bull. Braz. Math. Soc.*(to appear)

[4] CAMINHA, A. *On hypersurfaces into Riemannian spaces of constant sectional curvature. Kodai Mathematical Journal*, v. 29, p. 185-210, 2006.

[5] _________. *On spacelike hypersurfaces of constant sectional curvature Lorentz manifolds. J. of Geom. and Physics*, v. 56, p. 1144-1174, 2006.

[6] FEDERER, H. *Geometric Measure Theory.* New York: Springer-Verlag, 1969.

[7] FERUS, D. *On the completeness of nullity foliations. Mich. Math. J.*, v. 18, p. 61-64, 1971.

[8] FOLLAND, G. B. *Real Analysis. Modern Techniques and their Applications.* New York: John Wiley, 1999.

[9] HOUNIE, J. ; LEITE, M. L. *Two-Ended Hypersurfaces with Zero Scalar Curvature. Indiana Univ. Math. J.*, v. 18, p. 867-882, 1999.

[10] DAJCZER, M. *Submanifolds and isometric immersions.* Houston: Publish of Perish, 1990.

[11] CARMO, M. P. Do. *Riemannian Geometry*. Boston: Birkähuser, 1992.

[12] LEE, J.M., *Introduction to smooth manifolds*. New York: Springer, 1950.

[13] _________. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*. New York: Springer, 1950.

[14] O'NEILL, B. *Semi-Riemannian Geometry: with applications to Relativity*. Orlando: Academic Press, 1983.

[15] REILLY, R. *On the Hessian of a Function and the Curvatures of its Graph. Michigan Math. J.*, v. 20, p. 373-383, 1973.

[16] ROSENBERG, H. *Hypersurfaces of Constant Curvature in Space Forms. Bull. Sc. Math.*, v. 117, p. 217-239, 1993.

[17] YAU, S. T. *Some Function-Theoretic Properties of Complete Riemannian Manifolds and their Applications to Geometry. Indiana Univ. Math. J.*, v. 25, p. 659-670, 1976.