UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO EM MATEMÁTICA

JOÃO FRANCISCO DA SILVA FILHO

GRÁFICOS COMPACTOS COM CURVATURA MÉDIA DE SEGUNDA ORDEM CONSTANTE SOBRE A ESFERA

FORTALEZA - CE

2009

JOÃO FRANCISCO DA SILVA FILHO

GRÁFICOS COMPACTOS COM CURVATURA MÉDIA DE SEGUNDA ORDEM CONSTANTE SOBRE A ESFERA

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros

FORTALEZA - CE

2009

Silva Filho, João Francisco da

S58g Gráficos compactos com curvatura média de segunda ordem constante sobre a esfera / João Francisco da Silva Filho - Fortaleza, 2009.

66 f.

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros

Dissertação(Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Depto de Matemática, Fortaleza, 2009.

1 - Geometria Diferencial

CDD 516.36

Em memória do meu pai João Francisco.

Agradecimentos

Inicialmente, agradeço a Deus por ter me dado força para superar mais esse desafio. Agradeço a minha mãe Maria de Nazareth e minhas irmãs Paula e Poliana pelo apoio e incentivo dado ao longo dessa caminhada.

Ao meu orientador Professor Abdênago Alves de Barros por ter aceitado me orientar, pelos conselhos, ensinamentos, pela paciência e prestatividade que teve durante o desenvolvimento desse trabalho.

Aos professores Antônio Caminha Muniz Neto e José Nelson Bastos Barbosa por terem aceitado o convite de participar da banca examinadora e pelas contribuições dadas a esse trabalho através das sugestões e correções.

Aos meus professores da Universidade Regional do Cariri, Mário de Assis Oliveira, Liane Mendes Feitosa Soares e Carlos Humberto Soares Júnior, pela amizade, pelos conselhos, apoio e incentivo que me deram durante e após a Graduação.

Agradeço aos grandes amigos, André Luiz, Maria Cláudia e Robério Gutemberg pela amizade e pelo apoio dado mesmo estando longe. Aos amigos de turma da Graduação, Allan Oliveira, Luciê Macedo, Maria Auxiliadora, Sabrina Alves e Tiago da Silva.

Aos amigos Damião Júnio, Flávio França e Jocel Faustino pelo apoio durante o Curso de Verão dos anos de 2006 e 2007.

Aos amigos Aurineide Fonseca, Flávio França e Marco Antônio, principalmente pelo apoio e pelos conselhos no momento mais dificil que enfrentei durante essa caminhada.

Aos amigos que contribuiram direta ou indiretamente com a realização e apresentação desse trabalho, Adam Oliveira, Damião Júnio, Halyson Baltazar, Kelton Silva, Marco Antônio e Nazareno Gomes, através de dicas, sugestões e indicação de fonte de pesquisa.

Aos demais amigos caririenses do Mestrado e Doutorado e aos outros amigos que fiz aqui na UFC durante esses dois anos de caminhada.

Não poderia deixar de agradecer à secretária Andréa Costa Dantas pela delicadeza e paciência mesmo quando estava tão atarefada, sempre se mostrando disposta a ajudar.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo dessa Dissertação é apresentar uma fórmula para o operador $L_r(g) = div(P_r \nabla g)$ de uma nova função suporte g, definida sobre uma hipersuperfície M^n em uma forma espacial Riemanniana M_c^{n+1}, bem como mostrar que uma hipersuperfície diferenciável estrelada compacta Σ^n, com segunda função simétrica S_2 constante positiva na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$, deve ser uma esfera geodésica $\mathbb{S}^n(\rho)$. Isso generaliza um resultado obtido por Jellett [9] em 1853 para tais tipos de superfícies no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$.

Palavras chave: Função suporte; Gráfico radial; Curvatura média constante.

Abstract

The purpose of this dissertation is to desire a formula for the operator $L_r(g) = div(P_r \nabla g)$ of a new support function g, defined over a hypersurface M^n in a Riemannian space form M_c^{n+1} and to show that a compact smooth starshaped hypersurface Σ^n in the Euclidean sphere $\mathbb{S}^{n+1}$, whose second symmetric function S_2 is positive and constant must be a geodesic sphere $\mathbb{S}^n(\rho)$. This generalizes a result obtained by Jellett [9] in 1853 for such surfaces in the Euclidean space $\mathbb{R}^3$.

Keywords: Support function; Radial graph; Constant mean curvature.

Conteúdo

Introdução

Os resutados centrais aqui apresentados, foram obtidos por A. Barros e P. Souza e estão presentes no artigo [5], o qual foi a principal referência dessa dissertação. Esse trabalho encontra-se dividido nos seguintes capítulos: Preliminares, Campos de Vetores Conformes, As r-ésimas curvaturas médias, O operador L_r de uma função suporte e Gráficos radiais compactos.

O primeiro capítulo traz as preliminares, onde introduzimos as principais notações, apresentamos definições e resultados importantes a serem utilizados nos demais capítulos. Nesse momento, definimos alguns operadores, tais como gradiente, divergente, laplaciano, hessiano e traço. Apresentamos também um pouco sobre imersões isométricas entre variedades Riemannianas, segunda forma fundamental e equações fundamentais de uma imersão isométrica.

O segundo capítulo destaca os campos de vetores conformes, apresentando definições, exemplos e um resultado envolvendo derivada de Lie em relação ao tensor métrica de uma variedade Riemanniana $\overline{M}$. O terceiro capítulo trata das funções simétricas S_r associadas ao operador de Weingarten A, as r-ésimas funções de curvatura média H_r e os tensores de Newton P_r.

O quarto capítulo apresenta um dos principais resultados do trabalho, o qual fornece uma fórmula para o operador $L_r(g) = div(P_r \nabla g)$ de uma nova função suporte g definida sobre uma hipersuperfície M^n em uma forma espacial Riemanniana M_c^{n+1}, bem como aplicações desse resultado.

Por fim, o último capítulo trata de gráficos radiais e apresenta o resultado central desse trabalho, o qual mostra que uma hipersuperfície diferenciável estrelada compacta Σ^n na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$, cuja segunda função simétrica S_2 é constante e positiva, deve ser uma esfera geodésica $\mathbb{S}^n(\rho)$.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Gradiente, Divergente e Laplaciano

Nesse trabalho vamos considerar M^n uma *variedade Riemanniana* de dimensão n e classe C^∞, $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M, $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e D a *conexão Riemanniana* de M. Se $p \in M$ então T_pM denotará o *espaço tangente* a M em p e TM o *fibrado tangente* de M.

Agora vamos introduzir algumas definições e apresentar alguns resultados que serão utilizados no decorrer do trabalho.

Definição 1.1 O *gradiente* de $f \in \mathcal{D}(M)$, denotado por ∇f, é o campo de vetores em M, definido pela seguinte condição:

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f), \qquad \forall X \in TM.$$

Decorrem da definição de gradiente, as propriedades

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$,
2. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$,

para quaisquer $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Definição 1.2 O *divergente* de $X \in TM$ é a função $divX : M \to \mathbb{R}$, definida por

$$divX(p) = tr[Y(p) \mapsto (D_Y X)(p)],$$

onde tr denota o traço da aplicação.

Decorrem da definição de divergente, as propriedades

1. $div(X+Y) = divX + divY$,
2. $div(fX) = fdivX + \langle \nabla f, X \rangle$,

para quaisquer $X, Y \in TM$ e qualquer $f \in \mathcal{D}(M)$.

Teorema 1.1 (Teorema da Divergência) Sejam M uma variedade Riemanniana compacta com bordo e $X \in C^1(M)$, então

$$\int_M divX \; dM = \int_{\partial M} \langle X, \eta \rangle \; dS,$$

onde η é o campo unitário normal a ∂M apontando para o exterior de M.

Demonstração: Pode ser encontrada em [10].

Definição 1.3 O *Laplaciano* de $f \in \mathcal{D}(M)$ é o operador $\Delta : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$ definido por:

$$\Delta f = div(\nabla f).$$

Usando as propriedades do gradiente e divergente, temos

1. $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$,
2. $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$,

para quaisquer $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Observação 1.1 (Referencial móvel) Seja M^n uma variedade Riemanniana de dimensão n e $p \in M$. Então existe uma vizinhança $U \subset M$ de p e n campos de vetores linearmente independentes $E_1, ..., E_n \in \mathcal{X}(U)$ ortonormais.

Proposição 1.1 Se $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal local em M, então

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} E_i(f) E_i.$$

Demonstração: Escrevendo $\nabla f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i E_i$, temos que

$$E_j(f) = \langle \nabla f, E_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i E_i, E_j \right\rangle = a_j$$

e assim

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} E_i(f) E_i.$$

□

Proposição 1.2 Se $X = \sum_{i=1}^{n} X_i E_i$, onde $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial local em M, então

$$divX = \sum_{i=1}^{n} (E_i(X_i) - \langle D_{E_i} E_i, X \rangle).$$

Demonstração: Usando a definição, temos

$$\begin{aligned}
divX &= \sum_{i=1}^{n} \langle D_{E_i} X, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle D_{E_i} \left(\sum_{j=1}^{n} X_j E_j \right), E_i \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} [\langle E_i(X_j) E_j, E_i \rangle + \langle X_j D_{E_i} E_j, E_i \rangle]
\end{aligned}$$

e como $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}$, tem-se que

$$0 = E_i \langle E_i, E_j \rangle = \langle D_{E_i} E_i, E_j \rangle + \langle E_i, D_{E_i} E_j \rangle,$$

ou seja,

$$\langle D_{E_i}E_j, E_i\rangle = -\langle D_{E_i}E_i, E_j\rangle.$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned} divX &= \sum_{i=1}^{n} E_i(X_i) - \sum_{i,j=1}^{n} X_j\langle D_{E_i}E_i, E_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} E_i(X_i) - \sum_{i=1}^{n}\langle D_{E_i}E_i, X\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}(E_i(X_i) - \langle D_{E_i}E_i, X\rangle). \end{aligned}$$

□

Definição 1.4 Definimos o *hessiano* de $f \in \mathcal{D}(M)$ em $p \in M$ como sendo o operador linear $Hessf : T_pM \to T_pM$, dado por:

$$(Hessf)Y = D_Y(\nabla f), \quad \forall Y \in TM.$$

Observação 1.2 *:* Prova-se que $\Delta f = tr(Hessf)$.

Observação 1.3 *:* Podemos considerar o hessiano de f como um tensor tal que para cada par de campos $X, Y \in TM$, temos

$$(hessf)(X, Y) = \langle (Hessf)(X), Y\rangle.$$

Definição 1.5 Definimos a *curvatura* R de uma variedade Riemanniana M, como sendo uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$, dada por

$$R(X, Y)Z = D_Y D_X Z - D_X D_Y Z + D_{[X,Y]}Z,$$

onde $Z \in \mathcal{X}(M)$ e D denota a conexão Riemanniana de M.

1.2 Imersões Isométricas

Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ de dimensão $n+m$, isto é, dado $p \in M^n$ temos que $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}\overline{M}$ é injetiva. A métrica Riemanniana de $\overline{M}$ induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M: se $v_1, v_2 \in T_pM$, define-se $\langle v_1, v_2\rangle_p = \langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2)\rangle_{\varphi(p)}$. Nessas condições, dizemos que φ é uma *imersão isométrica* de M em $\overline{M}$.

1.2.1 A segunda forma fundamental

Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ uma imersão. Dado $p \in M$, existe um aberto $U \subset M$ contendo p tal que $\varphi(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade mergulhada de $\overline{M}$. Isto quer dizer que existem uma vizinhança $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $\varphi(p)$ e um difeomorfismo $\phi : \overline{U} \subset \overline{M} \to V \subset \mathbb{R}^{n+m}$ em uma aberto V de $\mathbb{R}^{n+m}$, tal que ϕ aplica difeomorficamente $\varphi(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

Para simplificar a notação, identificamos U com $\varphi(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, $q \in U$, com $d\varphi_q(v) \in T_{\varphi(q)}\overline{M}$. Usaremos tais identificações para estender, por exemplo, um campo local (isto é, definido em U) de vetores de M a um campo local (isto é, definido em $\overline{U}$) de vetores em $\overline{M}$; se U é suficientemente pequeno, tal extensão é sempre possível, como se vê facilmente usando o difeomorfismo ϕ.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Se $v \in T_p\overline{M}$, $p \in M$, podemos escrever

$$v = v^T + v^N, \quad v^T \in T_pM, \quad v^N \in (T_pM)^{\perp},$$

onde v^T é denominada a *componente tangencial* de v e v^N a *componente normal* de v. Essa decomposição é evidentemente diferenciável no sentido que as aplicações de $T\overline{M}$ em $T\overline{M}$ dadas por

$$(p, v) \to (p, v^T) \quad e \quad (p, v) \to (p, v^N)$$

são diferenciáveis.

Denotando a conexão Riemanniana de $\overline{M}$ por $\overline{D}$, se X e Y são campos locais de vetores em M e $\overline{X}, \overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos

$$D_X Y = (\overline{D}_{\overline{X}} \overline{Y})^\top.$$

Observação 1.4 : Prova-se que D é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida de M por φ.

Queremos definir a segunda forma fundamental da imersão $\varphi : M \to \overline{M}$. Para isto convém introduzir previamente a seguinte definição. Se X, Y são campos locais em M, então

$$B(X, Y) = \overline{D}_{\overline{X}} \overline{Y} - D_X Y$$

é um campo local em $\overline{M}$ normal a M. Além disso, $B(X, Y)$ não depende das extensões $\overline{X}, \overline{Y}$. Com efeito, se $\overline{X}_1$ é uma outra extensão de X, teremos

$$(\overline{D}_{\overline{X}} \overline{Y} - D_X Y) - (\overline{D}_{\overline{X}_1} \overline{Y} - \nabla_X Y) = \overline{D}_{\overline{X} - \overline{X}_1} Y,$$

que se anula em M, pois $\overline{X} - \overline{X}_1 = 0$ em M. Por outro lado, se $\overline{Y}_1$ é outra extensão de Y, então

$$(\overline{D}_{\overline{X}} \overline{Y} - D_X Y) - (\overline{D}_{\overline{X}} \overline{Y}_1 - D_X Y) = \overline{D}_{\overline{X}} (\overline{Y} - \overline{Y}_1) = 0,$$

pois $\overline{Y} - \overline{Y}_1 = 0$ ao longo de uma trajetória de X. Portanto $B(X, Y)$ está bem definida.

Observação 1.5 No que se segue, indicaremos por $\mathcal{X}(U)^{\perp}$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais a $\varphi(U) \approx U$.

Proposição 1.3 Se $X, Y \in \mathcal{X}(U)$, a aplicação $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \to \mathcal{X}(U)^{\perp}$ dada por

$$B(X,Y) = \overline{D}_{\overline{X}}\overline{Y} - D_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Demonstração: Usando propriedades de linearidade de uma conexão, conclui-se imediatamente que B é aditiva em X e Y e que $B(fX, Y) = fB(X,Y)$, $f \in \mathcal{D}(U)$. Falta mostrar que $B(X, fY) = fB(X,Y)$, $f \in \mathcal{D}(U)$. Indicando por $\overline{f}$ uma extensão de f a $\overline{U}$, teremos

$$\begin{aligned} B(X, fY) &= \overline{D}_{\overline{X}}(\overline{fY}) - D_X(fY) \\ &= \overline{f}\,\overline{D}_{\overline{X}}\overline{Y} - fD_X Y + \overline{X}(\overline{f})\overline{Y} - X(f)Y. \end{aligned}$$

Sabendo que em M, $f = \overline{f}$ e $\overline{X}(\overline{f}) = X(f)$, então as duas últimas parcelas se anulam, donde $B(X, fY) = fB(X,Y)$, isto é, B é bilinear. Para mostrar que B é simétrica, utilizaremos a simetria da conexão Riemanniana, obtendo

$$B(X,Y) = \overline{D}_{\overline{X}}\overline{Y} - D_X Y = \overline{D}_{\overline{Y}}\overline{X} + [\overline{X}, \overline{Y}] - \nabla_Y X - [X,Y],$$

no entanto $[\overline{X}, \overline{Y}] = [X,Y]$ em M, segue então que $B(X,Y) = B(Y,X)$. $\square$

Observação 1.6 Como B é bilinear, exprimindo B em um sistema de coordenadas, pode-se concluir que o valor de $B(X,Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$.

Agora podemos definir a segunda forma fundamental, então seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. A aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle, \qquad x, y \in T_pM,$$

é pela Proposição 1.3, uma forma bilinear simétrica.

Definição 1.6 A forma quadrática II_η definida em T_pM por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

é chamada a *segunda forma fundamental* de φ em p segundo o vetor normal η.

Observação 1.7 As vezes se utiliza também a expressão segunda forma fundamental para designar a aplicação B que em cada $p \in M$ é uma aplicação bilinear, simétrica, tomando valores em $(T_pM)^\perp$.

Observe que à aplicação bilinear H_η fica associada a uma aplicação linear auto-adjunta $A_\eta : T_pM \to T_pM$, chamada *operador de Weingarten*, definida por

$$\langle A_\eta(x), y\rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta\rangle.$$

Proposição 1.4 Seja $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M, então

$$A_\eta(x) = -(\overline{D}_x N)^T.$$

Demonstração: Seja $y \in T_pM$ e X, Y extensões locais de x, y, respectivamente, e tangentes a M. Então

$$\begin{aligned} \langle A_\eta(x), y\rangle &= \langle B(X, Y)(p), N\rangle = \langle \overline{D}_X Y - D_X Y, N\rangle(p) \\ &= \langle \overline{D}_X Y, N\rangle(p) = -\langle Y, \overline{D}_X N\rangle(p) = \langle -\overline{D}_x N, y\rangle, \end{aligned}$$

para todo $y \in T_pM$, onde usamos que $\langle N, Y\rangle = 0$. $\square$

Agora sejam K e $\overline{K}$ as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente, definidas por

$$K(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)X, Y\rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2}$$

e

$$\overline{K}(\overline{X},\overline{Y}) = \frac{\langle R(\overline{X},\overline{Y})\overline{X},\overline{Y}\rangle}{\|\overline{X}\|^2\|\overline{Y}\|^2 - \langle\overline{X},\overline{Y}\rangle^2},$$

onde R e $\overline{R}$ denotam as curvaturas de M e $\overline{M}$.

Teorema 1.2 (Gauss) Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de T_pM, então

$$K(x,y) - \overline{K}(x,y) = \langle B(x,x), B(y,y)\rangle - \|B(x,y)\|^2.$$

Demonstração: Pode ser encontrada em [7].

Definição 1.7 Uma imersão $\varphi : M \to \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$, se para todo $\eta \in (T_pM)^\perp$ a segunda forma fundamental II_η é identicamente nula em p. A imersão φ é totalmente geodésica se ela é geodésica para todo $p \in M$.

Proposição 1.5 Uma imersão $\varphi : M \to \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se, e somente se, toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\overline{M}$ em p.

Demonstração: Sejam $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = x$. Sejam N uma extensão local, normal a M, de um vetor normal η em p e X uma extensão local, tangente a M, de $\gamma'(t)$. Como $\langle X, N\rangle = 0$, obteremos em p,

$$\begin{aligned} H_\eta(x,x) &= \langle A_\eta(x), x\rangle = -\langle \overline{D}_X N, X\rangle \\ &= -X\langle N, X\rangle + \langle N, \overline{D}_X X\rangle = \langle N, \overline{D}_X X\rangle, \end{aligned}$$

decorre daí que φ é geodésica em p se, e somente se, para todo $x \in T_pM$, a geodésica γ de M que é tangente a x em p satisfaz a condição: $\overline{D}_X X(p)$ não tem componente normal. Portanto, φ é geodésica em p se, e somente se, toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\overline{M}$ em p. $\square$

Definição 1.8 Uma imersão $\varphi : M \to \overline{M}$ é mínima se para todo $p \in M$ e todo $\eta \in (T_pM)^\perp$ tem-se que $tr(A_\eta) = 0$.

Escolhendo um referencial ortonormal $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ de vetores em $\mathcal{X}(U)^\perp$, onde U é uma vizinhança de p em que φ é um mergulho, podemos escrever

$$B(x, y) = \sum_i H_{\eta_i}(x, y)\eta_i, \quad x, y \in T_pM, \quad i = 1, \ldots, m,$$

em relação a um ponto p.

Não é difícil verificar que o vetor normal dado por

$$H = \frac{1}{n}\sum_i (trA_{\eta_i})\eta_i$$

não depende do referencial η_i escolhido. O vetor H é chamado o *vetor curvatura média* de φ e além disso φ é mínima se, e somente se, $H(p) = 0$ para todo $p \in M$.

1.2.2 As equações fundamentais de uma imersão isométrica

No que se segue, usaremos sistematicamente as letras latinas $X, Y, Z, etc.$, para indicar os campos diferenciáveis de vetores tangentes e as letras gregas $\xi, \eta, \zeta, etc.$, para indicar os campos diferenciáveis de vetores normais.

Dados X e η, já vimos que a componente tangente de $\overline{D}_X\eta$ é dada por $(\overline{D}_X\eta)^T = -A_\eta X$. A componente normal de $\overline{D}_X\eta$, chamada conexão normal $D^\perp$ da imersão é dada por

$$D_X^\perp\eta = (\overline{D}_X\eta)^N = \overline{D}_X\eta - (\overline{D}_X\eta)^T = \overline{D}_X\eta + A_\eta X.$$

Podemos facilmente verificar que a conexão normal $D^{\perp}$ possui as propriedades usuais de uma conexão, isto é, é linear em X, aditiva em η e além disso

$$D_X^{\perp}(f\eta) = fD_X^{\perp}\eta + X(f)\eta, \qquad f \in \mathcal{D}(M).$$

De maneira análoga ao caso do fibrado tangente, introduz-se a partir de $D^{\perp}$ uma noção de curvatura no fibrado normal que é chamada *curvatura normal* $R^{\perp}$ da imersão e definida por

$$R^{\perp}(X,Y)\eta = D_Y^{\perp}D_X^{\perp}\eta - D_X^{\perp}D_Y^{\perp}\eta + D_{[X,Y]}^{\perp}\eta.$$

Proposição 1.6 As seguintes equações se verificam

(a) Equação de Gauss

$$\begin{aligned}\langle \overline{R}(X,Y)Z,T\rangle &= \langle R(X,Y)Z,T\rangle - \langle B(Y,T),B(X,Z)\rangle \\ &\quad + \langle B(X,T),B(Y,Z)\rangle,\end{aligned}$$

(b) Equação de Ricci

$$\langle \overline{R}(X,Y)\eta,\zeta\rangle - \langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\zeta\rangle = \langle [A_\eta, A_\zeta]X, Y\rangle,$$

onde $[A_\eta, A_\zeta]$ indica o operador $A_\eta \circ A_\zeta - A_\zeta \circ A_\eta$.

Demonstração: Pode ser encontrada em [7].

Admita que o espaço ambiente $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, então a equação de Ricci se escreve

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\zeta\rangle = -\langle [A_\eta, A_\zeta]X, Y\rangle.$$

decorre daí que $R^{\perp} = 0$ se, e só se, $[A_\eta, A_\zeta] = 0$ para todo η, ζ, isto é, se e somente se, para todo $p \in M$ existe uma base de T_pM que diagonaliza simultaneamente todos os A_η.

Dada uma imersão isométrica, convém indicar por $\mathcal{X}(M)^{\perp}$ o espaço dos campos diferenciáveis de vetores normais a M. A segunda forma fundamental da imersão pode então ser considerada como um tensor

$$B : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)^{\perp} \to \mathcal{D}(M),$$

definido por

$$B(X, Y, \eta) = \langle B(X, Y), \eta \rangle$$

e a definição de derivada covariante se estende a este tipo de tensor de maneira natural:

$$\begin{aligned}(\overline{D}_X B)(Y, Z, \eta) &= X(B(Y, Z, \eta)) - B(D_X Y, Z, \eta) \\ &- B(Y, D_X Z, \eta) - B(Y, Z, D_X^{\perp}\eta).\end{aligned}$$

Proposição 1.7 (Equação de Codazzi) Com a notação acima

$$\langle \overline{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = (\overline{D}_Y B)(X, Z, \eta) - (\overline{D}_X B)(Y, Z, \eta).$$

Demonstração: Pode ser encontrada em [7].

Observação 1.8 Se o espaço ambiente $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, a equação de Codazzi se escreve como

$$(\overline{D}_X B)(Y, Z, \eta) = (\overline{D}_Y B)(X, Z, \eta).$$

Se além disto, a codimensão da imersão é 1, $D_X^{\perp}\eta = 0$ e assim

$$\begin{aligned}\overline{D}_X B(Y, Z, \eta) &= X\langle A_\eta Y, Z \rangle - \langle A_\eta(D_X Y), Z \rangle - \langle A_\eta Y, D_X Z \rangle \\ &= \langle D_X(A_\eta Y), Z \rangle - \langle A_\eta(D_X Y), Z \rangle,\end{aligned}$$

neste caso, a equação de Codazzi se escreve

$$D_X(A_\eta Y) - D_Y(A_\eta X) = A_\eta([X, Y]).$$

Definição 1.9 Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície e $A : TM^n \to TM^n$ o tensor de Weingarten. A derivada covariante de A é a aplicação $DA : TM^n \times TM^n \to TM^n$ dada por:

$$DA(X, Y) = D_Y(AX) - A(D_Y X).$$

Proposição 1.8 Seja $A : TM^n \to TM^n$ o tensor de Weingarten, então a derivada covariante DA é bilinear.

Demonstração: Dados $X, Y, Z \in TM^n$ e $f \in \mathcal{D}(M)$, temos

$$\begin{aligned}
DA(X + fY, Z) &= D_Z(A(X + fY)) - A(D_Z(X + fY)) \\
&= D_Z(AX) + D_Z(fAY) - A(D_Z X) - A(D_Z(fY)) \\
&= D_Z(AX) - A(D_Z X) + fD_Z(AY) + Z(f)AY \\
&- fA(\nabla_Z Y) - Z(f)AY \\
&= DA(X, Z) + f(D_Z(AY) - A(D_Z Y)) \\
&= DA(X, Z) + fDA(Y, Z)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
DA(X, Z + fY) &= D_{Z+fY}(AX) - A(D_{Z+fY}X) \\
&= D_Z(AX) - A(D_Z X) + f(D_Y(AX) - A(D_Y X)) \\
&= DA(X, Z) + fDA(X, Y).
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.9 Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície, onde $\overline{M}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante. Então DA é simétrica, isto é,

$$DA(X, Y) = DA(Y, X),$$

para $X, Y \in TM^n$.

Demonstração: Desde que M^{n+1} tem curvatura seccional constante e φ tem codimensão um, segue-se da equação de Codazzi que

$$D_X(AY) - D_Y(AX) = A([X,Y]) = A(D_XY) - A(D_YX),$$

para $X, Y \in TM^n$. $\square$

Definição 1.10 Dado um tensor simétrico $T : TM^n \times TM^n \to TM^n$, definimos o traço de T como sendo

$$tr(T) = \sum_{i=1}^{n} T(E_i, E_i),$$

onde $\{E_1, \dots, E_n\}$ é um referencial ortonormal.

Observação 1.9 Não é difícil verificar que o traço de um tensor simétrico, como apresentado acima, está bem definido.

Capítulo 2

Campos de Vetores conformes

Dado um campo de vetores $V \in \mathcal{X}(\overline{M})$ em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ e um tensor r-covariante ω, a derivada de Lie de ω com relação a V é definida por

$$(\mathcal{L}_V\omega)(X_1,...,X_n) \;=\; V(\omega(X_1,...,X_n)) \;-\; \sum_{i=1}^{r}\omega((X_1,...,[V,X_i],...,X_n)).$$

Em particular, se $\omega = \langle\ ,\rangle$, ou seja, ω é a métrica Riemanniana de $\overline{M}$, então

$$(\mathcal{L}_V\langle\ ,\rangle)(X,Y) \;=\; \langle D_XV,Y\rangle + \langle X,D_YV\rangle$$

De fato, por um cálculo direto, obtemos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_V\langle\ ,\rangle)(X,Y) \;&=\; V\langle X,Y\rangle - \langle [V,X],Y\rangle - \langle X,[V,Y]\rangle \\
&=\; V\langle X,Y\rangle - \langle D_VX,Y\rangle + \langle D_XV,Y\rangle \\
&-\; \langle X,D_VY\rangle\rangle + \langle X,D_YV\rangle \\
&=\; \langle D_VX,Y\rangle \;+ \langle X,D_VY\rangle - \langle D_VX,Y\rangle + \langle D_XV,Y\rangle \\
&-\; \langle X,D_VY\rangle\rangle + \langle X,D_YV\rangle \\
&=\; \langle D_XV,Y\rangle + \langle X,D_YV\rangle.
\end{aligned}$$

Definição 2.1 Dizemos que $V \in \mathcal{X}(\overline{M})$ é um *campo de vetores conforme* se existe $\psi \in \mathcal{D}(\overline{M})$, chamado *fator conforme* de V, tal que

$$\mathcal{L}_V\langle\ ,\rangle = 2\psi\langle\ ,\rangle.$$

Exemplo 2.1 Um campo de Killing $V \in \mathcal{X}(\overline{M})$ em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ é um exemplo de campo conforme, cujo fator conforme é $\psi \equiv 0$.

Observação 2.1 Lembre-se que $V \in \mathcal{X}(\overline{M})$ é um campo de Killing, se e somente se, V satisfaz a equação de Killing, ou seja, $\langle D_X V, Y\rangle + \langle X, D_Y V\rangle = 0$ para todos $X, Y \in \mathcal{X}(\overline{M})$.

Um campo de vetores conforme frenquentemente usado em uma forma espacial $\overline{M}_c^{n+1}$ é o campo determinado pelo vetor posição com origem em um ponto $x_0 \in \overline{M}_c^{n+1}$ fixado. Ele foi introduzido para espaços não Euclidianos por Heintze [8] da forma como segue: seja $\rho : \overline{M}_c^{n+1} \to \mathbb{R}$ a função distância definida por $\rho(\ .\ ) = dist(.\ , x_0)$. O campo vetor posição é dado pela expressão $V = (s \circ d)\nabla d$, onde $s(t)$ é solução da equação diferencial $y'' + cy = 0$, com as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

Lema 2.1 Sejam $x_0 \in \mathbb{S}^{n+1}$ um ponto arbitrário e $\rho : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{R}$ a função distância definida por $\rho(\ ,\ ) = dist(.\ , x_0)$, então vale a igualdade

$$\operatorname{sen}\rho\, Hess\rho(X, Y) = \cos\rho\,[\langle X, Y\rangle - X\rho Y\rho], \tag{2.1}$$

onde X e Y são campos de vetores em $\mathbb{S}^{n+1}$.

Demonstração: Sendo $\rho : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por $\rho(x) = dist_{S^n}(x, x_0)$, então $\rho = \theta$, onde θ é o ângulo formado pelos vetores x e x_0 em $\mathbb{R}^{n+2}$. Logo

$$\cos\rho\,(x) = \frac{\langle x, x_0\rangle}{|x||x_0|} = \langle x, x_0\rangle,$$

pois $|x| = |x_0| = 1$. Dessa forma, temos por um lado que

$$X(\cos\rho) = -\operatorname{sen}\rho\, X\rho,$$

e por outro,

$$X(\cos\rho) = X\langle x, x_0\rangle = \langle X, x_0\rangle,$$

daí

$$\langle X, x_0 \rangle = -\operatorname{sen}\rho X\rho.$$

Agora derivando em relação a Y, obtemos

$$\begin{aligned} YX(\cos\rho) &= Y(-\operatorname{sen}\rho X\rho) \\ &= -\operatorname{sen}\rho YX\rho - \cos\rho Y\rho X\rho, \end{aligned}$$

no entanto

$$\begin{aligned} Y\langle X, x_0 \rangle &= \langle \overline{D}_Y X, x_0 \rangle \\ &= \langle D_Y X + B(X,Y), x_0 \rangle, \end{aligned}$$

onde $\overline{D}$ denota a conexão do $\mathbb{R}^{n+2}$ e $B(X,Y)$ é a segunda forma fundamental (vetorial) de $\mathbb{S}^{n+1}$, vista como hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+2}$.

Além disso, sabemos que $B(X,Y) = -\langle X, Y \rangle$ e daí temos

$$\begin{aligned} -\operatorname{sen}\rho YX\rho - \cos\rho X\rho Y\rho &= \langle D_Y X - \langle X, Y \rangle x, x_0 \rangle \\ &= \langle D_Y X, x_0 \rangle - \langle X, Y \rangle \langle x, x_0 \rangle \\ &= \langle D_Y X, x_0 \rangle - \langle X, Y \rangle (\cos\rho). \end{aligned}$$

Observe que $\langle D_Y X, x_0 \rangle = (D_Y X)\langle x, x_0 \rangle = (D_Y X)(\cos\rho) = -\operatorname{sen}\rho (D_Y X)\rho$, de modo que, substituindo na expressão acima, obtemos

$$-\operatorname{sen}\rho YX\rho - \cos\rho Y\rho X\rho = -\operatorname{sen}\rho (D_Y X)\rho - \cos\rho \langle X, Y \rangle,$$

segue então que

$$\begin{aligned} \cos\rho [\langle X, Y \rangle - X\rho Y\rho] &= \operatorname{sen}\rho [YX\rho - (D_Y X)\rho] \\ &= \operatorname{sen}\rho [XY\rho - (D_X Y)\rho]. \end{aligned}$$

Como $Hess\rho(X,Y) = \langle D_X \nabla\rho, Y \rangle = XY\rho - (D_X Y)\rho$, então

$$\operatorname{sen}\rho Hess\rho(X,Y) = \cos\rho [\langle X, Y \rangle - X\rho Y\rho],$$

como queríamos provar. $\square$

Proposição 2.1 O campo de vetores posição V em relação a um ponto x_0 sobre a esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ é um campo conforme, cujo fator conforme é $\psi = \cos\rho$, onde ρ é a distância intrínseca de $\mathbb{S}^{n+1}$.

Demonstração: Sabendo que a curvatura de $\mathbb{S}^{n+1}$ é $c = 1$, temos que $s(t)$ é solução da equação diferencial $y'' + y = 0$ e satisfaz as condições iniciais $s(0) = 0$ e $s'(0) = 1$, logo $s(t) = \mathrm{sen}t$. Nessas condições, V é dado por $V = \mathrm{sen}\rho\nabla\rho$, onde ρ é a distância intrínseca ao ponto $x_0 \in \mathbb{S}^n$ fixado.

Observe então o seguinte

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_V\langle\ ,\rangle)(X,Y) &= \langle D_X V, Y\rangle + \langle X, D_Y V\rangle \\ &= \langle D_X(\mathrm{sen}\rho\nabla\rho), Y\rangle + \langle X, D_Y(\mathrm{sen}\rho\nabla\rho)\rangle,\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}\langle D_X(\mathrm{sen}\rho\nabla\rho), Y\rangle &= \langle \mathrm{sen}\rho\, D_X\nabla\rho + X(\mathrm{sen}\rho)\nabla\rho, Y\rangle \\ &= \mathrm{sen}\rho\,\langle D_X\nabla\rho, Y\rangle + X(\mathrm{sen}\rho)\langle\nabla\rho, Y\rangle \\ &= \mathrm{sen}\rho\, Hess\rho(X,Y) + \cos\rho\, X\rho\, Y\rho.\end{aligned}$$

Substituindo (2.1) na expressão anterior, segue que

$$\begin{aligned}\langle D_X(\mathrm{sen}\rho\nabla\rho), Y\rangle &= \cos\rho\,[\langle X,Y\rangle - X\rho\, Y\rho] + \cos\rho\, X\rho\, Y\rho \\ &= \cos\rho\,\langle X,Y\rangle,\end{aligned}$$

analogamente, obtemos

$$\langle X, D_Y(\mathrm{sen}\rho\nabla\rho)\rangle = \cos\rho\,\langle X,Y\rangle,$$

e daí concluímos que

$$(\mathcal{L}_V\langle\ ,\rangle)(X,Y) \;=\; 2\cos\rho\langle X,Y\rangle,$$

portanto $V = \mathrm{sen}\rho\nabla\rho$ é um campo conforme, onde $\psi = \cos\rho$ é o seu fator conforme. $\square$

Capítulo 3

As r-ésimas curvaturas médias

Considere uma imersão $\varphi : M^n \looparrowright \overline{M}_c^{n+1}$ de uma variedade Riemanniana M em uma forma espacial $\overline{M}_c^{n+1}$. Sendo N um campo de vetores unitário normal sobre M, podemos considerar sobre M o operador de Weingarten A com respeito a N e denotar por $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de A, ou seja, as curvaturas principais de M, sendo $E_1, \ldots, E_n$ os seus respectivos autovetores associados.

Definimos a r-ésima função simétrica S_r associada ao operador A, dizendo que $S_0 = 1$ e

$$S_r = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_r},$$

para $r = 1, 2, \ldots, n$.

Nessas condições, definimos a r-ésima curvatura média de φ por

$$H_r = \frac{1}{\binom{n}{r}} S_r,$$

onde $r = 0, 1, \ldots, n$.

Observação 3.1 : Para $r = 1$, $H_1 = H$ é a curvatura média da imersão e para $r = n$, $H_n = K$ é sua curvatura de Gauss-Kronecker.

Agora se A_i é a restrição do operador A ao espaço normal a E_i, então definimos a r-ésima função simétrica associada a A_i, dizendo que $S_0(A_i) = 1$ e

$$S_r(A_i) = \sum_{\substack{i_1<\ldots<i_r \\ i_1,\ldots,i_r\neq i}} \lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r},$$

para $r = 1, 2, \ldots, n-1$. Definimos também o r-ésimo tensor de Newton P_r pela recorrência

$$P_r = \begin{cases} I, \text{ se } r = 0 \\ S_r I - A \circ P_{r-1}, \text{ se } r = 1, 2, \ldots, n \end{cases},$$

onde I denota a aplicação identidade.

Observação 3.2 A partir desse momento, usaremos $\frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i}$ no lugar de $S_r(A_i)$ para denotar a r-ésima função simétrica associada a A_i.

Proposição 3.1 Considerando as notações acima, valem as seguintes igualdades:

(a) $P_r(E_i) = \dfrac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} E_i$, em particular P_r é auto-adjunto;

(b) $tr(P_r) = (n-r)S_r$;

(c) $tr(A \circ P_r) = (r+1)S_{r+1}$;

(d) $tr(A^2 \circ P_r) = S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}$.

Demonstração: (a) A prova é feita por indução sobre r. Para $r = 1$, temos que

$$\begin{aligned} P_1(E_i) &= (S_1 Id - A \circ P_0)(E_i) = (S_1 Id - A)(E_i) \\ &= S_1 Id(E_i) - A(E_i) = S_1 E_i - \lambda_i E_i \\ &= (S_1 - \lambda_i)E_i \\ &= \frac{\partial S_2}{\partial \lambda_i} E_i. \end{aligned}$$

Supondo válido para $r-1$, obtemos

$$\begin{aligned}
P_r(E_i) &= (S_r Id - A\circ P_{r-1})(E_i) = S_r E_i - A(P_{r-1}(E_i))\\
&= S_r E_i - A\left(\frac{\partial S_r}{\partial \lambda_i}E_i\right) = S_r E_i - \frac{\partial S_r}{\partial \lambda_i}A(E_i)\\
&= S_r E_i - \frac{\partial S_r}{\partial \lambda_i}\lambda_i E_i = \left(S_r - \lambda_i \frac{\partial S_r}{\partial \lambda_i}\right)E_i\\
&= \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i}E_i.
\end{aligned}$$

(b) Calculando o traço de P_r, obtemos

$$tr(P_r) = \sum_{i=1}^{n}\langle P_r(E_i), E_i\rangle,$$

pelo ítem (a), segue que

$$\begin{aligned}
tr(P_r) &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i}E_i, E_i\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i}\langle E_i, E_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{i_1<\ldots<i_r\\ i_1,\ldots,i_r\neq i}}\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r}\\
&= (n-r)\sum_{i_1<\ldots<i_r}\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r}\\
&= (n-r)S_r.
\end{aligned}$$

(c) Inicialmente, temos que

$$\begin{aligned}
tr(P_{r+1}) &= tr(S_{r+1}Id - A\circ P_r)\\
&= tr(S_{r+1}Id) - tr(A\circ P_r)\\
&= nS_{r+1} - tr(A\circ P_r),
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$tr(A\circ P_r) = nS_{r+1} - tr(P_{r+1}), \qquad (3.1)$$

então usando o ítem (b), obtemos

$$\begin{aligned}
tr(A\circ P_r) &= nS_{r+1} - [n-(r+1)]S_{r+1}\\
&= (r+1)S_{r+1}.
\end{aligned}$$

(d) Sabendo que $P_r = S_r I - A \circ P_{r-1}$, temos

$$\begin{aligned} P_{r+2} &= S_{r+2}Id - A(S_{r+1}Id - A \circ P_r) \\ &= S_{r+2}Id - S_{r+1}A + A^2 \circ P_r, \end{aligned}$$

logo

$$A^2 \circ P_r = P_{r+2} - S_{r+2}Id + S_{r+1}A.$$

Aplicando o traço na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} tr(A^2 \circ P_r) &= tr(P_{r+2} - S_{r+2}Id + S_{r+1}A) \\ &= tr(P_{r+2}) - tr(S_{r+2}Id) + tr(S_{r+1}A), \end{aligned}$$

então usando o ítem (b), segue que

$$\begin{aligned} tr(A^2 \circ P_r) &= [n-(r+2)]S_{r+2} - tr(S_{r+2}Id) + tr(S_{r+1}A) \\ &= [n-(r+2)]S_{r+2} - nS_{r+2} + S_{r+1}tr(A) \\ &= S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}. \end{aligned}$$

□

Sendo M^n uma variedade Riemanniana de dimensão n, vamos denotar por M_0, o subconjunto constituído pelos pontos de M, nos quais o número de curvaturas principais é localmente constante, então temos que M_0 é aberto e denso em M e além disso, para todo $p \in M_0$, existe um referencial ortonormal local $\{E_1, \ldots, E_n\}$ em uma vizinhança de p, tal que $A(E_i) = \lambda_i E_i$, com λ_i diferenciável para cada $1 \leq i \leq n$.

Observação 3.3 As informações apresentadas no parágrafo acima, serão importantes na demonstração da próxima Proposição, bem como na demonstração de alguns resultados do Capítulo 4. Para maiores esclarecimentos sobre o assunto, você pode consultar [2].

Proposição 3.2 Considerando as mesmas notações da Proposição anterior, temos que

$$tr(P_r \circ D_X A) = \langle X, \nabla S_{r+1} \rangle.$$

Demonstração: Usando um referencial ortonormal $\{E_1, \ldots, E_n\}$, como o que descrevemos acima, temos em cada ponto de M_0 que

$$\begin{aligned} tr(P_r \circ D_X A) &= \sum_{i=1}^{n} \langle (P_r \circ D_X A)(E_i), E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle (D_X A)(E_i), P_r(E_i) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle (D_X A)(E_i), \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i}(E_i) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} \langle (D_X A)(E_i), E_i \rangle, \end{aligned}$$

onde usamos o ítem (a) da Proposição 3.1 em uma das passagens acima.

Sabendo que $(D_X A)(E_i) = D_X(A(E_i)) - A(D_X E_i)$, então

$$\begin{aligned} tr(P_r \circ D_X A) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} \langle (D_X A)(E_i), E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} [\langle D_X(A(E_i)) - A(D_X E_i), E_i \rangle] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} [\langle D_X(A(E_i)), E_i \rangle - \langle A(D_X E_i), E_i \rangle] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} [\langle D_X(\lambda_i E_i), E_i \rangle - \langle A(D_X E_i), E_i \rangle]. \end{aligned}$$

no entanto, $D_X(\lambda_i E_i) = \lambda_i D_X E_i + X(\lambda_i) E_i$ e A é auto-adjunto, logo

$$\begin{aligned} tr(P_r \circ D_X A) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} [\langle \lambda_i D_X E_i + X(\lambda_i) E_i, E_i \rangle - \langle D_X E_i, A(E_i) \rangle] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} [\lambda_i \langle D_X E_i, E_i \rangle + X(\lambda_i) - \lambda_i \langle D_X E_i, E_i \rangle] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} X(\lambda_i) = X(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n) \\ &= X(S_r) = \langle X, \nabla S_r \rangle, \end{aligned}$$

portanto a igualdade se verifica para todos os pontos de M_0 e por continuidade, vale para todos os pontos de M, já que M_0 é denso em M. $\square$

Observação 3.4 *:* Uma outra demonstração da Proposição acima, pode ser encontrada em [6, Lema 3.9].

A próxima Proposição foi obtidos por A. Caminha em [6]. Apresentaremos aqui um esboço da demonstração, mas para isso precisamos do Lema a seguir:

Lema 3.1 Se $f \in \mathbb{R}[x]$ é um polinômio com $k \geq 1$ raízes reais, contadas as multiplicidades, então f' tem pelo menos $k-1$ raízes reais, contadas as multiplicidades. Em particular, se todas as raízes de f são reais, o mesmo ocorre com f'.

Demonstração: Seja $r \in \mathbb{R}$ uma raiz de multiplicidade $k \geq 1$ de f, isto é, $f(x) = (x-r)^k g(x)$, com $g(r) \neq 0$. Derivando f, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= k(x-r)^{k-1}g(x) + (x-r)^k g'(x) \\ &= (x-r)^{k-1}(kg(x) + (x-r)g'(x)) \end{aligned}$$

e como $kg(r)+(r-r)g'(\alpha) \neq 0$, segue que r é raiz de multiplicidade $k-1$ de f'.

Agora sejam $r_1, ..., r_l \in \mathbb{R}$ as raízes distintas de f, isto é,

$$f(x) = (x-r_1)^{k_1} \cdots (x-r_l)^{k_l} g(x),$$

onde $k_1, ..., k_l$ são inteiros positivos e $g(r_i) \neq 0$, $i = 1, ..., l$. Como vimos acima, r_i é raiz de multiplicidade $k_i - 1$ de f', então contadas as multiplicidades, podemos afirmar que f possui $k = k_1 + ... + k_l$ raízes reais.

Supondo, sem perda de generalidade, que $r_1 < ... < r_l$, obtemos mais $l-1$

raízes distintas dos r_i para f', aplicando o Teorema do Valor Médio aos intervalos $[r_i, r_{i+1}]$. Portanto, concluímos que f' tem pelo menos

$$(k_1 - 1) + ... + (k_l - l) + (l - 1) = k - l + l - 1 = k - 1$$

raízes reais. $\square$

Proposição 3.3 Sejam $n > 1$ inteiro e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ números reais. Para $0 \leq r \leq n$, defina $S_r = S_r(\lambda_i)$ como polinômio simétrico associado aos números reais λ_i's e $H_r = H_r(\lambda_i) = \binom{n}{r}^{-1} S_r(\lambda_i)$.

(a) Para $1 \leq r < n$, tem-se $H_r^2 \geq H_{r-1}H_{r+1}$. Além disso, se a igualdade ocorre para $r = 1$ ou para algum $1 < r < n$, com $H_{r+1} \neq 0$ neste caso, então $\lambda_1 = ... = \lambda_n$.

(b) Se $H_1, H_2, ..., H_r > 0$ para algum $1 < r \leq n$, então $H_1 \geq \sqrt{H_2} \geq \sqrt[3]{H_3} \geq ... \geq \sqrt[r]{H_r}$. Mais ainda, se a igualdade ocorre para algum $1 \leq j < r$, então $\lambda_1 = ... = \lambda_n$.

Demonstração: (a) Usaremos indução sobre a quantidade $n > 1$ de números reais. Para $n = 2$, temos apenas $r = 1$ e a desigualdade segue de

$$\begin{aligned} H_1^2 - H_0 H_2 &= (\frac{1}{2}S_1)^2 - S_2 \\ &= (\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2))^2 - \lambda_1\lambda_2 \\ &= \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

valendo a igualdade, se e somente se, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Suponha agora que as desigualdades sejam verdadeiras para $n - 1$ números reais, com igualdade para $r = 1$ ou $1 < r < n$ e $H_{r+1} \neq 0$, se e somente se, todos os λ_i's são iguais. Nessas condições, dados $n \geq 3$ números reais $\lambda_1, ..., \lambda_n$, seja

$$f(x) = (x + \lambda_1)...(x + \lambda_n) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} H_r(\lambda_i) x^{n-r},$$

então

$$f'(x) \;=\; \sum_{r=0}^{n-1}(n-r)\binom{n}{r}H_r(\lambda_i)x^{n-r-1}.$$

Como as raízes de f são todas reais, então pelo Lema 3.1, o mesmo ocorre com f', logo existem números reais $\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}$ tais que

$$f'(x) = n(x+\gamma_1)...(x+\gamma_{n-1}),$$

mas por outro lado

$$f'(x) = n\sum_{r=0}^{n-1}S_r(\gamma_i)x^{n-r-1} = \sum_{r=0}^{n-1}n\binom{n-1}{r}H_r(\gamma_i)x^{n-r-1}.$$

Sabendo que $n\binom{n-1}{r} = (n-r)\binom{n}{r}$ e comparando os coeficientes, temos que $H_r(\lambda_i) = H_r(\gamma_i)$ para $0 \leq r \leq n-1$. Portanto segue por hipótese de indução que

$$H_r^2(\lambda_i) = H_r^2(\gamma_i) \geq H_{r-1}(\gamma_i)H_{r+1}(\gamma_i) = H_{r-1}(\lambda_i)H_{r+1}(\lambda_i),$$

para $1 \leq r \leq n-2$.

Além disso, se a igualdade ocorre para os λ_i's com $r = 1$, respectivamente $1 < r < n-1$ e $H_{r+1}(\lambda_i) \neq 0$, o mesmo ocorre para os γ_i's com $r = 1$, respectivamente $1 < r < n-1$ e $H_{r+1}(\gamma_i) \neq 0$. Dessa forma, segue da hipótese de indução que $\gamma_1 = ... = \gamma_{n-1}$, portanto $\lambda_1 = ... = \lambda_n$.

Falta mostrar que $H_{n-1}^2(\lambda_i) \geq H_{n-2}(\lambda_i)H_n(\lambda_i)$, com igualdade para $H_n \neq 0$, se e somente se, todos os λ_i's são iguais. Se $\lambda_i = 0$ para algum $1 \leq i \leq n$, então $H_n(\lambda_i) = 0$ e a desigualdade é óbvia. Caso contrário, teremos $H_n \neq 0$ e além disso

$$H_{n-1}^2 \geq H_{n-2}H_n,$$

se e somente se,

$$\left[\binom{n}{n-1}^{-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1}H_n\right]^2 \geq \left[\binom{n}{n-2}^{-1}\sum_{i<j}\lambda_i^{-1}\lambda_j^{-1}H_n\right]H_n,$$

ou equivalentemente

$$(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1}\right)^2 \geq 2n\sum_{i<j}\lambda_i^{-1}\lambda_j^{-1}.$$

Fazendo $F(\lambda_i^{-1}) = (n-1)(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1})^2 - 2n\sum_{i<j}\lambda_i^{-1}\lambda_j^{-1}$, temos que

$$\begin{aligned} F(\lambda_i^{-1}) &= n(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1})^2 - (\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1})^2 - 2n\sum_{i<j}\lambda_i^{-1}\lambda_j^{-1} \\ &= n[(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1})^2 - 2\sum_{i<j}\lambda_i^{-1}\lambda_j^{-1}] - (\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1})^2 \\ &= n\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i^{-1})^2 - (\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1})^2 \geq 0, \end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para $u = (\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})$ e $v = (1, \ldots, 1)$. Então vale a igualdade, se e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $u = tv$, isto é, se e somente se, todos os λ_i's são iguais.

(b) Como $H_1, H_2 > 0$, então pelo ítem (a), temos $H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}}$. Agora suponha que $H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}} \geq ... \geq H_k^{\frac{1}{k}}$ para algum $2 \leq k < r$, então

$$H_k^2 \geq H_{k-1}H_{k+1} \geq H_k^{\frac{k-1}{k}}H_{k+1}.$$

Agora dividindo por $H_k^{\frac{k-1}{k}}$, obtemos $H_k^{\frac{1}{k}} \geq H_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}$. Segue diretamente das desigualdades acima que se $H_k^{\frac{1}{k}} = H_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}$ para algum $1 \leq k < r$, então $H_k^2 = H_{k-1}H_{k+1}$ e pelo item (a), concluímos que $\lambda_1 = ... = \lambda_n$. $\square$

Capítulo 4

O operador L_r de uma função suporte

Nesse capítulo vamos calcular o operador L_r de uma nova função suporte definida sobre uma hipersuperfície orientável M^n em uma forma espacial M_c^{n+1}. Dado um campo de vetores V em M_c^{n+1} e uma imersão isométrica $\varphi : M^n \looparrowright \overline{M}_c^{n+1}$, tal função suporte é definida sobre M por

$$g(p) = \langle V, N \rangle (x(p)),$$

onde N é um campo normal unitário definido sobre M^n. Além disso, identificamos $p \in M^n$ com a sua imagem $\varphi(p) \in \overline{M}_c^{n+1}$.

Definição 4.1 Se $\mathcal{D}(M)$ é o conjunto das funções reais de classe C^∞ sobre M, definimos o operador $L_r : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$ por

$$L_r(f) = tr(P_r \circ Hess f),$$

onde $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Observação 4.1 Em particular, para $r = 0$, temos que

$$L_0(f) = tr(P_0 \circ Hess f) = tr(Hess f) = \Delta f,$$

ou seja, $L_0(f) = \Delta f$.

Lema 4.1 Sejam $\varphi : M^n \looparrowright \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica entre as variedades Riemannianas M^n e $\overline{M}^{n+1}$, N um campo normal unitário a M e $Y \in TM$ um campo qualquer. Então em todos os pontos de M_0, vale a igualdade

$$\begin{aligned}\langle (D_{E_i}P_r)Y, E_i\rangle &= E_i(S_r)\langle Y, E_i\rangle - P_{r-1}(Y)(\lambda_i) + \langle \overline{R}(E_i, P_{r-1}Y)N, E_i\rangle \\ &\quad -\lambda_i\langle (D_{E_i}P_{r-1}Y, E_i)\rangle,\end{aligned}$$

onde M_0 e $\{E_1, \ldots, E_n\}$ são como na Proposição 3.2, $\overline{R}$ é o tensor curvatura de $\overline{M}$ e $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Demonstração: Fazendo uso das propriedades de derivação covariante de tensores e da conexão Riemanniana D de M, temos que

$$(D_{E_i}P_r)Y = (D_{E_i}S_rI)Y - (D_{E_i}A \circ P_{r-1})Y, \tag{4.1}$$

e também

$$\begin{aligned}(D_{E_i}S_rI)Y &= D_{E_i}(S_rI(Y)) - S_rI(D_{E_i}Y) \\ &= D_{E_i}(S_rY) - S_rD_{E_i}Y \\ &= E_i(S_r)Y + S_rD_{E_i}Y - S_rD_{E_i}Y \\ &= E_i(S_r)Y,\end{aligned}$$

daí obtemos

$$\langle (D_{E_i}S_rI)Y, E_i\rangle = E_i(S_r)\langle Y, E_i\rangle. \tag{4.2}$$

Por outro lado, note que

$$(D_{E_i}A \circ P_{r-1})Y = D_{E_i}A \circ P_{r-1}(Y) - A \circ P_{r-1}(D_{E_i}Y) \tag{4.3}$$

e além disso

$$(D_{E_i}A)P_{r-1}(Y) = D_{E_i}A \circ P_{r-1}(Y) - A(D_{E_i}P_{r-1}(Y)), \tag{4.4}$$

então das igualdades (4.3) e (4.4), obtém-se

$$(D_{E_i}A \circ P_{r-1})Y = (D_{E_i}A)P_{r-1}(Y) + A(D_{E_i}P_{r-1}(Y)) - A \circ P_{r-1}(D_{E_i}Y)$$

mas $(D_{E_i}P_{r-1})Y = D_{E_i}P_{r-1}(Y) - P_{r-1}(D_{E_i}Y)$, logo

$$(D_{E_i}A \circ P_{r-1})Y = (D_{E_i}A)P_{r-1}(Y) + A((D_{E_i}P_{r-1})Y),$$

e assim, temos

$$\begin{aligned}
\langle (D_{E_i}A \circ P_{r-1})Y, E_i\rangle &= \langle (D_{E_i}A)P_{r-1}(Y), E_i\rangle + \langle A((D_{E_i}P_{r-1})Y), E_i\rangle \\
&= \langle (D_{E_i}A)P_{r-1}(Y), E_i\rangle + \langle (D_{E_i}P_{r-1})Y, A(E_i)\rangle \\
&= \langle (D_{E_i}A)P_{r-1}(Y), E_i\rangle + \lambda_i\langle (D_{E_i}P_{r-1})Y, E_i\rangle,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\langle (D_{E_i}A \circ P_{r-1})Y, E_i\rangle = \langle (D_{E_i}A)P_{r-1}(Y), E_i\rangle + \lambda_i\langle (D_{E_i}P_{r-1})Y, E_i\rangle. \quad (4.5)$$

Substituindo as igualdades (4.2) e (4.5) em (4.1), obtemos

$$\begin{aligned}
\langle (D_{E_i}P_r)Y, E_i\rangle = E_i(S_r)\langle Y, E_i\rangle - \lambda_i\langle (D_{E_i}P_{r-1})Y, E_i\rangle \\
- \langle (D_{E_i}A)P_{r-1}(Y), E_i\rangle
\end{aligned} \quad (4.6)$$

e usando a equação de Codazzi, chegamos em

$$\langle (D_{E_i}A)P_{r-1}(Y), E_i\rangle = \langle (D_{P_{r-1}(Y)}A)E_i, E_i\rangle - \langle \overline{R}(E_i, P_{r-1}(Y))N, E_i\rangle. \quad (4.7)$$

Agora, observe que em todos os pontos de M_0, tem-se que

$$\begin{aligned}
(D_{P_{r-1}(Y)}A)E_i &= D_{P_{r-1}(Y)}A(E_i) - A(D_{P_{r-1}(Y)}E_i) \\
&= D_{P_{r-1}(Y)}(\lambda_i E_i) - A(D_{P_{r-1}(Y)}E_i) \\
&= P_{r-1}(Y)(\lambda_i)E_i + \lambda_i D_{P_{r-1}(Y)}E_i - A(D_{P_{r-1}(Y)}E_i),
\end{aligned}$$

no entanto, A é um operador auto-adjunto, portanto

$$\langle (D_{P_{r-1}(Y)}A)E_i, E_i\rangle = P_{r-1}(Y)(\lambda_i),$$

então substituíndo em (4.7), obtemos a igualdade

$$\langle (D_{E_i}A)P_{r-1}(Y), E_i\rangle = P_{r-1}Y(\lambda_i) - \langle \overline{R}(E_i, P_{r-1}Y)N, E_i\rangle$$

e finalmente, substituindo em (4.6), concluímos que

$$\begin{aligned}\langle (D_{E_i}P_r)Y, E_i\rangle &= E_i(S_r)\langle Y, E_i\rangle + \langle \overline{R}(E_i, P_{r-1}Y)N, E_i\rangle - P_{r-1}Y(\lambda_i)\\ &\quad -\lambda_i\langle (D_{E_i}P_{r-1})Y, E_i\rangle,\end{aligned}$$

em todos os pontos de M_0. □

Lema 4.2 Nas mesmas condições do lema acima, temos em todos os pontos de M_0, a igualdade

$$\nabla S_r = \sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^{j-1}}{j} S_{r-j}\nabla\alpha_j, \tag{4.8}$$

onde $\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^j$ *e* $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Demonstração: Faremos a prova por indução sobre r, então para $r = 1$, temos que a igualdade (4.8) é claramente satisfeita. Agora suponha que a mesma igualdade vale para $k \in \{1, \ldots, r-1\}$ e usando a identidade de Jacobi, dada por

$$S_r = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\alpha_j S_{r-j}, \tag{4.9}$$

obtemos

$$\nabla S_r = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r-1}(-1)^{j-1}\alpha_j\nabla S_{r-j} + \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}S_{r-j}\nabla\alpha_j, \tag{4.10}$$

vale observar que se $j = r$, temos $S_{r-j} = S_0 = 1$ e com isso $\nabla S_{r-j} = 0$.

Pela hipótese de indução, segue-se que

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r-j}(-1)^{j-1}\alpha_j\nabla S_{r-j} &= \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r-1}(-1)^{j-1}\alpha_j\left[\sum_{k=1}^{r-l}\frac{(-1)^{k-1}}{k}S_{r-j-k}\nabla\alpha_k\right]\\ &= \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r-1}\sum_{k=1}^{r-j}\frac{(-1)^{j+k}}{k}\alpha_j S_{r-j-k}\nabla\alpha_k,\end{aligned}$$

reordenando os termos, obtemos

$$\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r-1}(-1)^{j-1}\alpha_j\nabla S_{r-j} = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^{j-1}}{j}(r-j)S_{r-j}\nabla\alpha_j,$$

então substituindo na igualdade (4.10), temos que

$$\begin{aligned}
\nabla S_r &= \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^{j-1}}{j}(r-j)S_{r-l}\nabla\alpha_j + \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}S_{r-j}\nabla\alpha_j \\
&= \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\left(\frac{r-j}{j}+1\right)S_{r-j}\nabla\alpha_j \\
&= \sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^{j-1}}{j}S_{r-j}\nabla\alpha_j,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\nabla S_r = \sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^{j-1}}{j}S_{r-j}\nabla\alpha_j,$$

como queríamos provar. □

Lema 4.3 Sejam $\varphi : M^n \looparrowright \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica entre as variedades Riemannianas M^n e $\overline{M}^{n+1}$, N um campo normal unitário a M e $Y \in TM$ um campo qualquer, então vale a igualdade

$$tr[X \mapsto (D_X P_r)Y] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\lambda_i^{j-1}\langle\overline{R}(E_i, P_{r-j}Y)N, E_i\rangle,$$

onde $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal como no Lema 4.1, $\overline{R}$ é o tensor curvatura de $\overline{M}$ e $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Demonstração: Inicialmente, provaremos por indução sobre r, que em todos os pontos de M_0, vale a igualdade

$$\begin{aligned}
\langle(D_{E_i}P_r)Y, E_i\rangle &= \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\lambda_i^{j-1}E_i(S_{r-j+1})Y_i + \sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^j}{j}P_{r-j}(Y)\left(\lambda_i^j\right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r-1}(-1)^{j-1}\lambda_i^{j-1}\langle\overline{R}(E_i, P_{r-j}(Y))N, E_i\rangle,
\end{aligned}$$

onde $Y_i = \langle Y, E_i\rangle$.

Usando o Lema 4.1, temos que a igualdade acima é válida para $r = 1$, então suponha que a referida igualdade vale para $r-1$. Novamente pelo Lema

4.1, obtemos

$$
\begin{aligned}
\langle (D_{E_i}P_r)Y, E_i\rangle &= E_i(S_r)Y_i - P_{r-1}(Y)(\lambda_i) + \langle \overline{R}(E_i, P_{r-1}(Y))N, E_i\rangle \\
&- \lambda_i \langle (D_{E_i}P_{r-1})Y, E_i\rangle,
\end{aligned}
$$

pela hipótese de indução, segue que

$$
\begin{aligned}
\langle (D_{E_i}P_r)Y, E_i\rangle &= E_i(S_r)Y_i - P_{r-1}(Y)(\lambda_i) + \langle \overline{R}(E_i, P_{r-1}Y)N, E_i\rangle \\
&- \lambda_i \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^{j-1}\lambda_i^{j-1} E_i(S_{r-j})Y_i \\
&- \lambda_i \sum_{j=1}^{r-1} \frac{(-1)^j}{j} P_{r-j-1}(Y)\left(\lambda_i^j\right) \\
&- \lambda_i \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^{j-1}\lambda_i^{j-1} \langle \overline{R}(E_i, P_{r-j-1}(Y))N, E_i\rangle,
\end{aligned}
$$

ou ainda

$$
\begin{aligned}
\langle (D_{E_i}P_r)Y, E_i\rangle &= \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1}\lambda_i^{j-1} E_i(S_{r-j+1})Y_i + \sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^j}{j} P_{r-j}(Y)\left(\lambda_i^j\right) \\
&+ \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1}\lambda_i^{j-1} \langle \overline{R}(E_i, P_{r-j}(Y))N, E_i\rangle. \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

Usando a definição do traço, temos que

$$
tr[X \to (D_X P_r)Y] = \sum_{i=1}^{n} \langle (D_{E_i}P_r)Y, E_i\rangle,
$$

então substituindo (4.11) na igualdade acima, obtém-se

$$
\begin{aligned}
tr[X \to (D_X P_r)Y] &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1}\lambda_i^{j-1} E_i(S_{r-j+1})Y_i \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^j}{j} P_{r-j}(Y)\left(\lambda_i^j\right) \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1}\lambda_i^{j-1} \langle \overline{R}(E_i, P_{r-j}(Y))\xi, E_i\rangle, \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

Como $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal, podemos escrever

$$
\nabla S_{r+1-j} = \sum_{k=1}^{n} E_k(S_{r+1-j})E_k,
$$

logo

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla S_{r+1-j}, E_i\rangle &= \sum_{k=1}^{n} E_k(S_{r+1-j})\langle E_k, E_i\rangle \\
&= E_i(S_{r+1-j}),
\end{aligned}
$$

no entanto, escrevendo $Y = \sum_{l=1}^{n} Y_l E_l$, temos ainda

$$
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\lambda_i^{j-1}E_i(S_{r-j+1})Y_i = \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\langle \nabla S_{r+1-j}, A^{j-1}Y\rangle, \tag{4.13}
$$

onde usamos o fato de que $A^{j-1}(E_i) = \lambda_i^{j-1}E_i$.

Por outro lado, observe que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^j}{j}P_{r-j}(Y)(\lambda_i^j) &= \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^j}{j}\langle P_{r-j}(Y), \nabla\lambda_i^j\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\left\langle P_{r-j}(Y), \frac{1}{j}\nabla\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^j\right)\right\rangle,
\end{aligned}
$$

ou simplesmente,

$$
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^j}{j}P_{r-j}(Y)(\lambda_i^j) = \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\left\langle P_{r-j}(Y), \frac{1}{j}\nabla\alpha_j\right\rangle, \tag{4.14}
$$

onde $\alpha_j = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^j$.

Substituindo as igualdades (4.13) e (4.14) em (4.12), segue-se que

$$
\begin{aligned}
tr[X \to (D_X P_r)Y] &= \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\langle \nabla S_{r-j+1}, A^{j-1}Y\rangle \\
&+ \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j}\left\langle P_{r-j}(Y), \frac{1}{j}\nabla\alpha_j\right\rangle \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\lambda_i^{j-1}\langle \overline{R}(E_i, P_{r-j}Y)N, E_i\rangle, \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

mas usando a definição do tensor P_r, tem-se a expressão

$$
P_{r-j} = \sum_{k=1}^{r-j+1}(-1)^{k-1}S_{r-j-k+1}A^{k-1},
$$

então considerando as notações

$$T_1 = \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\langle \nabla S_{r-j+1}, A^{j-1}Y\rangle$$

e

$$T_2 = \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j}\left\langle P_{r-j}(Y), \frac{1}{j}\nabla\alpha_j\right\rangle,$$

obtemos

$$\begin{aligned} T_2 &= \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j}\left\langle \sum_{k=1}^{r-j+1}(-1)^{k-1}S_{r-j-k+1}A^{k-1}(Y), \frac{1}{j}\nabla\alpha_j\right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r-j+1}(-1)^{j+k-1}S_{r-j-k+1}\left\langle A^{k-1}(Y), \frac{1}{j}\nabla\alpha_j\right\rangle. \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de índices, chegamos em

$$\begin{aligned} T_2 &= \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{r-k+1}(-1)^{j+k-1}S_{r-j-k+1}\left\langle A^{k-1}(Y), \frac{1}{j}\nabla\alpha_j\right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k}\left\langle A^{k-1}(Y), \sum_{j=1}^{r-k+1}\frac{(-1)^{j-1}}{j}S_{r-k-j+1}\nabla\alpha_j\right\rangle, \end{aligned}$$

então usando o Lema anterior, temos ainda

$$\begin{aligned} T_2 &= \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k}\left\langle A^{k-1}(Y), \nabla S_{r-k+1}\right\rangle \\ &= -\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\left\langle \nabla S_{r-k+1}, A^{k-1}(Y)\right\rangle = -T_1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j}\left\langle P_{r-j}(Y), \frac{1}{j}\nabla\alpha_j\right\rangle = -\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\langle \nabla S_{r-j+1}, A^{j-1}Y\rangle,$$

por fim, substituindo na igualdade (4.15), concluímos que

$$tr[X \mapsto (D_X P_r)Y] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\lambda_i^{j-1}\langle \overline{R}(E_i, P_{r-j}Y)N, E_i\rangle,$$

em todos os pontos de M_0 e por continuidade em todos os pontos de M, já que M_0 é denso em M. □

Lema 4.4 Se $\overline{M}^{n+1}$ é uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante igual a c, então o tensor curvatura $\overline{R}$ de $\overline{M}$ satisfaz:

$$\overline{R}(X,Y)Z = c[\langle Z,X\rangle Y - \langle Z,Y\rangle X], \qquad \forall X,Y,Z \in T\overline{M}$$

Demonstração: Pode ser encontrada em [7, Lema 3.4].

A seguinte proposição foi demonstrada inicialmente por Rosenberg em [11].

Proposição 4.1 Se M é uma hipersuperfície em uma forma espacial M_c^{n+1}, então o operador L_r pode ser escrito na forma de divergente, ou seja, $L_r(f) = div(P_r\nabla f)$.

Demonstração: Inicialmente, temos que

$$div(P_r\nabla f) = \sum_{i=1}^{n}\langle D_{E_i}(P_r\nabla f), E_i\rangle.$$

Como $D_{E_i}(P_r\nabla f) = (D_{E_i}P_r)\nabla f + P_r(D_{E_i}\nabla f)$, segue que

$$\begin{aligned} div(P_r\nabla f) &= \sum_{i=1}^{n}\langle (D_{E_i}P_r)\nabla f + P_r(D_{E_i}\nabla f), E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}[\langle (D_{E_i}P_r)\nabla f, E_i\rangle + \langle P_r(D_{E_i}\nabla f), E_i\rangle] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle (D_{E_i}P_r)\nabla f, E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle P_r(D_{E_i}\nabla f), E_i\rangle, \end{aligned}$$

logo, obtemos a igualdade

$$div(P_r\nabla f) = \sum_{i=1}^{n}\langle (D_{E_i}P_r)\nabla f, E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle P_r(D_{E_i}\nabla f), E_i\rangle. \tag{4.16}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} L_r(f) &= tr(P_r \circ Hessf) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle P_r((Hessf)(E_i)), E_i\rangle \end{aligned}$$

e como $(Hessf)(E_i) = D_{E_i}\nabla f$, segue que

$$L_r(f) = \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(D_{E_i}\nabla f), E_i \rangle. \tag{4.17}$$

Substituindo (4.17) em (4.16), obtemos

$$\begin{aligned} div(P_r\nabla f) &= L_r(f) + \sum_{i=1}^{n} \langle (D_{e_i}P_r)\nabla f, e_i \rangle \\ &= L_r(f) + tr[(D_X P_r)\nabla f], \end{aligned}$$

ou seja,

$$div(P_r\nabla f) = L_r(f) + tr[(D_X P_r)\nabla f]. \tag{4.18}$$

Usando o Lema 4.3, obtemos a igualdade

$$tr[(D_X P_r)\nabla f] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1}\lambda_i^{j-1} \langle \overline{R}(E_i, P_{r-j}\nabla f)N, E_i \rangle, \tag{4.19}$$

onde $\overline{R}$ é o tensor curvatura de M_c^{n+1} e N é um campo normal unitário a M.

Como M_c^{n+1} tem curvatura secional constante c, segue do Lema 4.17 que

$$\overline{R}(E_i, P_{r-j}\nabla f)N = c[\langle N, E_i \rangle P_{r-j}\nabla f) - \langle N, P_{r-j}\nabla f) \rangle E_i] = 0,$$

de maneira que

$$tr[(D_X P_r)\nabla f] = 0.$$

Por fim, substituindo em (4.18), concluímos que

$$L_r(f) = div(P_r\nabla f),$$

como queríamos provar. □

Teorema 4.1 Seja $\varphi : M^n \looparrowright M_c^{n+1}$ uma imersão isométrica orientada com um campo de vetores unitário normal N. Se V é um campo de vetores em M_c^{n+1} e $g = \langle V, N\rangle$ representa a função suporte sobre M^n, então

$$\begin{aligned} L_r(g) &= -(S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})g - c(n-r)S_rg \\ &\quad -\frac{1}{2}(r+1)S_{r+1}\mathcal{L}_{N,N} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S_{r+1}}{\partial\lambda_i}E_i(\mathcal{L}_{i,N}) \\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S_{r+1}}{\partial\lambda_i}N(\mathcal{L}_{i,i}) - \langle V, \nabla S_{r+1}\rangle, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{L}_{N,N} = (\mathcal{L}_V\langle,\rangle)(N,N)$, $\mathcal{L}_{i,i} = (\mathcal{L}_V\langle,\rangle)(E_i,E_i)$ e $\mathcal{L}_{i,N} = (\mathcal{L}_V\langle,\rangle)(E_i,N)$.

Demonstração: Dado $p \in \varphi(M^n)$, sejam $\{E_1(p), ..., E_n(p)\} \subset T_pM$ uma base ortonormal que diagonaliza A em p e $\lambda_1, ..., \lambda_n$ os respectivos autovalores associados. Denote também por por $\langle,\rangle$ a métrica Riemanniana de M_c^{n+1} e por $\{E_1, ..., E_n\}$ o referencial geodésico que estende a base acima para uma vizihança de p em $\varphi(M^n)$, com $D_NE_i(p) = 0$ e $D_{E_i}E_i(p) = \lambda_iN(p)$.

Nessas condições, temos que

$$\begin{aligned} E_iE_i(g) &= E_i(E_i\langle V,N\rangle) \\ &= E_i(\langle D_{E_i}V,N\rangle) + \langle V, D_{E_i}N\rangle) \\ &= E_i\langle D_{E_i}V,N\rangle) + E_i\langle V, D_{E_i}N\rangle \\ &= (\langle D_{E_i}D_{E_i}V,N\rangle) + 2\langle D_{E_i}V, D_{E_i}N\rangle) + (\langle V, D_{E_i}D_{E_i}N\rangle), \end{aligned}$$

ou seja,

$$E_iE_i(g) = \langle D_{E_i}D_{E_i}V,N\rangle + 2\langle D_{E_i}V, D_{E_i}N\rangle + \langle V, D_{E_i}D_{E_i}N\rangle. \qquad (4.20)$$

Como $D_{E_i}N(p) = -A(E_i(p)) = -\lambda_iE_i(p)$, temos

$$\langle D_{E_i}V, D_{E_i}N\rangle(p) = -\lambda_i\langle D_{E_i}V, E_i\rangle(p) = \frac{\lambda_i}{2}\mathcal{L}_{i,i}(p), \qquad (4.21)$$

substituindo em (4.20), segue que

$$E_iE_i(g)(p) = \langle D_{E_i}D_{E_i}V,N\rangle(p) + \langle V, D_{E_i}D_{E_i}N\rangle(p) - \lambda_i\mathcal{L}_{i,i}(p). \qquad (4.22)$$

Agora derivando a expressão $\mathcal{L}_{i,N} = \langle D_{E_i}V, N\rangle + \langle E_i, D_N V\rangle$ na direção de E_i, obtemos

$$
\begin{aligned}
E_i(\mathcal{L}_{i,N}) &= E_i\langle D_{E_i}V, N\rangle + E_i\langle E_i, D_N V\rangle \\
&= \langle D_{E_i}D_{E_i}V, N\rangle + \langle D_{E_i}V, D_{E_i}N\rangle + \langle D_{E_i}E_i, D_N V\rangle) \\
&+ \langle E_i, D_{E_i}D_N V\rangle,
\end{aligned}
$$

usando (4.21), temos ainda

$$
\begin{aligned}
E_i(\mathcal{L}_{i,N})(p) &= \langle D_{E_i}D_{E_i}V, N\rangle(p) - \frac{\lambda_i}{2}\mathcal{L}_{i,i}(p) + \langle D_{E_i}E_i, D_N V\rangle(p) \\
&+ \langle E_i, D_{E_i}D_N V\rangle(p). \qquad (4.23)
\end{aligned}
$$

Sabendo que $\{E_1, ..., E_n\}$ é um referencial geodésico em p, tal que $D_{E_i}E_i(p) = \lambda_i N(p)$, logo

$$
\langle D_{E_i}E_i, D_N V\rangle)(p) = \lambda_i\langle N, D_N V\rangle)(p) = \frac{\lambda_i}{2}\mathcal{L}_{N,N}(p), \qquad (4.24)
$$

substituindo (4.24) em (4.23), segue que

$$
\begin{aligned}
E_i(\mathcal{L}_{i,N})(p) &= \langle D_{E_i}D_{E_i}V, N\rangle(p) - \frac{\lambda_i}{2}\mathcal{L}_{i,i}(p) + \frac{\lambda_i}{2}\mathcal{L}_{N,N}(p) \\
&+ \langle E_i, D_{E_i}D_N V\rangle(p), \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

portanto

$$
\begin{aligned}
\langle D_{E_i}D_{E_i}V, N\rangle(p) &= E_i(\mathcal{L}_{i,N})(p) + \frac{\lambda_i}{2}\mathcal{L}_{i,i}(p) - \frac{\lambda_i}{2}\mathcal{L}_{N,N}(p) \\
&- \langle D_{E_i}D_N V, E_i\rangle(p). \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

e como $[N, E_i](p) = D_N E_i(p) - D_{E_i}N(p) = -D_{E_i}N(p) = \lambda_i E_i(p)$, chegamos na igualdade

$$
\langle D_{[N,E_i]}V, E_i\rangle(p) = \lambda_i\langle D_{E_i}V, E_i\rangle(p) = \frac{\lambda_i}{2}\mathcal{L}_{i,i}(p). \qquad (4.27)
$$

Derivando agora a expressão $\langle D_{E_i}V, E_i\rangle = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{i,i}$ com relação a N e aplicando o resultado em p, obtemos

$$
\langle D_N D_{E_i}V, E_i\rangle(p) + \langle D_{E_i}V, D_N E_i\rangle(p) = \frac{1}{2}N(\mathcal{L}_{i,i})(p)
$$

e levando em consideração que $D_N E_i = 0$, concluímos que

$$\langle D_N D_{E_i} V, E_i\rangle(p) = \frac{1}{2} N(\mathcal{L}_{i,i})(p). \tag{4.28}$$

Pela definição do operador curvatura, temos que

$$\begin{aligned}\langle R(N, E_i)V, E_i\rangle(p) &= \langle D_{E_i} D_N V, E_i\rangle(p) - \langle D_N D_{E_i} V, E_i\rangle(p)\\ &+ \langle D_{[N,E_i]} V, E_i\rangle(p),\end{aligned}$$

substituindo (4.26) e (4.27) na expressão anterior, obtém-se

$$\langle R(N, E_i)V, E_i\rangle(p) = \langle D_{E_i} D_N V, E_i\rangle(p) - \frac{1}{2} N(\mathcal{L}_{i,i})(p) + \frac{\lambda_i}{2}\mathcal{L}_{i,i}(p)$$

e daí

$$\langle D_{E_i} D_N V, E_i\rangle(p) = \langle R(N, E_i)V, E_i\rangle(p) + \frac{1}{2} N(\mathcal{L}_{i,i})(p) - \frac{\lambda_i}{2}\mathcal{L}_{i,i}(p).$$

Agora substituindo a última expressão acima em (4.26), obtemos a igualdade

$$\begin{aligned}\langle D_{E_i} D_{E_i} V, N\rangle(p) &= E_i(\mathcal{L}_{i,N})(p) + \lambda_i \mathcal{L}_{i,i}(p) - \frac{\lambda_i}{2}\mathcal{L}_{N,N}(p)\\ &- \langle R(N, E_i)V, E_i\rangle(p) - \frac{1}{2} N(\mathcal{L}_{i,i})(p),\end{aligned}$$

a qual substituída em (4.22), implica em

$$\begin{aligned}E_i E_i(g)(p) &= -\langle R(N, E_i)V, E_i\rangle(p) + \langle D_{E_i} D_{E_i} N, V\rangle(p) + E_i(\mathcal{L}_{i,N})(p)\\ &\quad - \frac{1}{2} N(\mathcal{L}_{i,i})(p) - \frac{\lambda_i}{2}\mathcal{L}_{N,N}(p).\end{aligned} \tag{4.29}$$

Escrevendo $V = \sum_{j=1}^{n} v_j E_j + gN$, onde $v_j = \langle V, E_j\rangle$, temos que

$$\langle D_{E_i} D_{E_i} N, V\rangle = \langle D_{E_i} D_{E_i} N, \sum_{j=1}^{n} v_j E_j + gN\rangle,$$

ou ainda

$$\langle D_{E_i} D_{E_i} N, V\rangle = \sum_{j=1}^{n} v_j \langle D_{E_i} D_{E_i} N, E_j\rangle + g\langle D_{E_i} D_{E_i} N, N\rangle.$$

Calculando a segunda derivada covariante de $\langle N, N\rangle$ na direção de E_i, obtemos

$$\langle D_{E_i} D_{E_i} N, N\rangle + \langle D_{E_i} N, D_{E_i} N\rangle = 0$$

e assim

$$\langle D_{E_i} D_{E_i} N, N\rangle(p) = -\langle D_{E_i} N, D_{E_i} N\rangle = -\lambda_i^2. \tag{4.30}$$

Aplicando o mesmo procedimento para $\langle N, E_j\rangle$, segue-se que

$$\langle D_{E_i} D_{E_i} N, E_j\rangle(p) + 2\langle D_{E_i} N, D_{E_i} E_j\rangle(p) + \langle N, D_{E_i} D_{E_i} E_j\rangle(p) = 0,$$

além disso, o fato do referencial ser geodésico em p nos dá

$$\begin{aligned} \langle D_{E_i} N, D_{E_i} E_j\rangle(p) &= \langle -\lambda_i E_i, D_{E_i} E_j\rangle(p) \\ &= -\lambda_i \langle E_i, N\rangle\langle D_{E_i} E_j, N\rangle(p) = 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\langle D_{E_i} D_{E_i} N, E_j\rangle(p) + \langle N, D_{E_i} D_{E_i} E_j\rangle(p) = 0,$$

ou ainda

$$\langle D_{E_i} D_{E_i} N, E_j\rangle(p) = -\langle D_{E_i} D_{E_i} E_j, N\rangle(p). \tag{4.31}$$

Sabendo que $[E_i, E_j](p) = 0$, temos

$$D_{E_i} E_j(p) - D_{E_j} E_i(p) = 0$$

e assim

$$\langle D_{E_i} E_j, N\rangle(p) = \langle D_{E_j} E_i, N\rangle(p),$$

então derivamos a expressão acima na direção de E_i, de modo que

$$\langle D_{E_i} D_{E_i} E_j, N\rangle + \langle D_{E_i} E_j, D_{E_i} N\rangle = \langle D_{E_i} D_{E_j} E_i, N\rangle + \langle D_{E_j} E_i, D_{E_i} N\rangle,$$

mas como $\langle D_{E_i}E_j, D_{E_i}N\rangle = \langle D_{E_j}E_i, D_{E_i}N\rangle = 0$, logo

$$\langle D_{E_i}D_{E_i}E_j, N\rangle = \langle D_{E_i}D_{E_j}E_i, N\rangle,$$

consequentemente usando a igualdade (4.31), concluímos que

$$-\langle D_{E_i}D_{E_i}N, E_j\rangle(p) = \langle D_{E_i}D_{E_i}E_j, N\rangle(p) = \langle D_{E_i}D_{E_j}E_i, N\rangle(p).$$

Por outro lado, tem-se que

$$\begin{aligned} E_j\langle D_{E_i}E_i, N\rangle(p) &= \langle D_{E_j}D_{E_i}E_i, N\rangle(p) + \langle D_{E_i}E_i, D_{E_j}N\rangle(p) \\ &= \langle D_{E_j}D_{E_i}E_i, N\rangle(p), \end{aligned}$$

usando novamente o tensor curvatura, obtemos

$$\begin{aligned} \langle R(E_i, E_j)E_i, N\rangle(p) &= \langle D_{E_j}D_{E_i}E_i, N\rangle(p) - \langle D_{E_i}D_{E_j}E_i, N\rangle(p) \\ &\quad + \langle D_{[E_i,E_j]}E_i, N\rangle(p) \\ &= \langle D_{E_j}D_{E_i}E_i, N\rangle(p) - \langle D_{E_i}D_{E_j}E_i, N\rangle(p) \\ &= E_j\langle D_{E_i}E_i, N\rangle(p) - \langle D_{E_i}E_i, D_{E_j}N\rangle(p) \\ &\quad + \langle D_{E_i}D_{E_i}N, E_j\rangle(p), \end{aligned}$$

onde levamos em consideração o fato de que $[E_i, E_j](p) = 0$.

Como $D_{E_i}E_i(p) = \lambda_i N(p)$ e $D_{E_j}N = -\lambda_j E_j$, podemos escrever

$$\langle R(E_i, E_j)E_i, N\rangle(p) = E_j\langle D_{E_i}E_i, N\rangle(p) + \langle D_{E_i}D_{E_i}N, E_j\rangle(p)$$

e assim

$$\langle D_{E_i}D_{E_i}N, E_j\rangle(p) = \langle R(E_i, E_j)E_i, N\rangle(p) - E_j\langle D_{E_i}E_i, N\rangle(p). \tag{4.32}$$

Dessa forma, lembrando a expressão anteriormente obtida, temos que

$$\langle D_{E_i}D_{E_i}N, V\rangle(p) = \sum_{j=1}^{n} v_j\langle D_{E_i}D_{E_i}N, E_j\rangle(p) + g\langle D_{E_i}D_{E_i}N, N\rangle(p)$$

e substituindo (4.30) em (4.32), segue que

$$\begin{aligned}
\langle D_{E_i}D_{E_i}N,V\rangle(p) &= \sum_{j=1}^{n} v_j(\langle R(E_i,E_j)E_i,N\rangle - E_j\langle D_{E_i}E_i,N\rangle(p) - g(p)\lambda_i^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} v_j\langle R(E_i,E_j)E_i,N\rangle(p) - \sum_{j=1}^{n} v_jE_j\langle D_{E_i}E_i,N\rangle(p) - g(p)\lambda_i^2 \\
&= \langle R(E_i,\sum_{j=1}^{n} v_jE_j)E_i,N\rangle(p) - \sum_{j=1}^{n} v_jE_j\langle D_{E_i}E_i,N\rangle(p) - g(p)\lambda_i^2 \\
&= \langle R(E_i,V-gN)E_i,N\rangle(p) - \sum_{j=1}^{n} v_jE_j\langle D_{E_i}E_i,N\rangle(p) - g(p)\lambda_i^2 \\
&= \langle R(E_i,V)E_i,N\rangle(p) - g(p)\langle R(E_i,N)E_i,N\rangle(p) \\
&- \sum_{j=1}^{n} v_jE_j\langle D_{E_i}E_i,N\rangle(p) - g(p)\lambda_i^2,
\end{aligned}$$

mas M_c^{n+1} tem curvatura constante, logo $\langle R(E_i,N)E_i,N\rangle(p) = c$ e assim

$$\begin{aligned}
\langle D_{E_i}D_{E_i}N,V\rangle(p) &= \langle R(E_i,V)E_i,N\rangle(p) - cg(p) \\
&- \sum_{j=1}^{n} v_jE_j\langle D_{E_i}E_i,N\rangle(p) - g(p)\lambda_i^2.
\end{aligned}$$

Substituindo a expressão acima na igualdade (4.29), temos que

$$\begin{aligned}
E_iE_i(g)(p) &= E_i(\mathcal{L}_{i,N})(p) - \frac{1}{2}N(\mathcal{L}_{i,i})(p) - \frac{\lambda_i}{2}\mathcal{L}_{N,N}(p) - cg(p) \\
&- g(p)\lambda_i^2 - \sum_{j=1}^{n} v_jE_j\langle D_{E_i}E_i,N\rangle(p),
\end{aligned}$$

no entanto

$$\begin{aligned}
\langle D_{E_i}E_i,N\rangle &= E_i\langle E_i,N\rangle - \langle E_i,D_{E_i}N\rangle = -\langle E_i,D_{E_i}N\rangle \\
&= \langle -D_{E_i}N,E_i\rangle = \langle A(E_i),E_i\rangle
\end{aligned}$$

então substituindo na igualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
E_iE_i(g)(p) = E_i(\mathcal{L}_{i,N})(p) - \frac{1}{2}N(\mathcal{L}_{i,i})(p) - \frac{\lambda_i}{2}\mathcal{L}_{N,N}(p) - cg(p) \\
- g(p)\lambda_i^2 - \sum_{j=1}^{n} v_jE_j\langle A(E_i),E_i\rangle, \qquad (4.33)
\end{aligned}$$

vale observar também que

$$\begin{aligned}
L_r(g)(p) &= tr(P_r \circ Hessg)(p) = \sum_{i=1}^{n} \langle (P_r \circ Hessg)(E_i), E_i \rangle (p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle D_{E_i} \nabla g, P_r(E_i) \rangle (p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} \langle D_{E_i} \nabla g, E_i \rangle (p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} (E_i \langle \nabla g, E_i \rangle - \langle \nabla g, D_{E_i} E_i \rangle)(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} (E_i \langle \nabla g, E_i \rangle - \langle \nabla g, \lambda_i N \rangle)(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} E_i \langle \nabla g, E_i \rangle (p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} E_i E_i(g)(p),
\end{aligned}$$

isto é,

$$L_r(g)(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} E_i E_i(g)(p).$$

Agora substituindo a igualdade (4.33) na expressão anterior, segue que

$$\begin{aligned}
L_r(g)(p) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} E_i(\mathcal{L}_{i,N})(p) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} N(\mathcal{L}_{i,i})(p) \\
&- \frac{1}{2} \mathcal{L}_{N,N}(p) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} - g(p) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} \\
&- cg(p) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} v_j E_j \langle A(E_i), E_i \rangle (p),
\end{aligned}$$

que pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}
L_r(g)(p) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} E_i(\mathcal{L}_{i,N})(p) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} N(\mathcal{L}_{i,i})(p) \\
&- \frac{1}{2} tr(AP_r) \mathcal{L}_{N,N}(p) - tr(A^2 P_r) g(p) \\
&- c\, tr(P_r) g(p) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} v_j E_j \langle A(E_i), E_i \rangle (p).
\end{aligned}$$

Fazendo uso dos ítens (b), (c) e (d) da Proposição 3.1, temos ainda

$$
\begin{aligned}
L_r(g)(p) &= -(S_1S_{r+1}-(r+2)S_{r+2})g(p)-c(n-r)S_rg(p)\\
&- \frac{1}{2}(r+1)S_{r+1}\mathcal{L}_{N,N}(p)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S_{r+1}}{\partial\lambda_i}E_i(\mathcal{L}_{i,N})(p)\\
&- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S_{r+1}}{\partial\lambda_i}N(\mathcal{L}_{i,i})(p)-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial S_{r+1}}{\partial\lambda_i}v_jE_j\langle A(E_i),E_i\rangle(p),
\end{aligned}
$$

mas por outro lado

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S_{r+1}}{\partial\lambda_i}E_j\langle A(E_i),E_i\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S_{r+1}}{\partial\lambda_i}\langle(D_{E_j}A)(E_i),E_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle(D_{E_j}A)(E_i),P_r(E_i)\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle(P_r\circ D_{E_j}A)(E_i),E_i\rangle\\
&= tr(P_r\circ D_{E_j}A)
\end{aligned}
$$

e usando a Proposição (3.2), temos

$$
\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S_{r+1}}{\partial\lambda_i}E_j\langle A(E_i),E_i\rangle = \langle E_j,\nabla S_{r+1}\rangle,
$$

então, multiplicando por v_j e depois somando em j, segue que

$$
\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial S_{r+1}}{\partial\lambda_i}v_jE_j\langle A(E_i),E_i\rangle = \sum_{j=1}^{n}v_j\langle E_j,\nabla S_{r+1}\rangle=\langle V,\nabla S_{r+1}\rangle,
$$

daí obtemos

$$
\begin{aligned}
L_r(g)(p) &= -(S_1S_{r+1}-(r+2)S_{r+2})g(p)-c(n-r)S_rg(p)\\
&\quad -\frac{1}{2}(r+1)S_{r+1}\mathcal{L}_{N,N}(p)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S_{r+1}}{\partial\lambda_i}E_i(\mathcal{L}_{i,N})(p)\\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S_{r+1}}{\partial\lambda_i}N(\mathcal{L}_{i,i})(p)-\langle V,\nabla S_{r+1}\rangle(p).
\end{aligned}
$$

como queríamos provar. $\square$

Corolário 4.1 Nas mesmas condições do teorema anterior, se em particular V é um campo de vetores conforme, então

$$\begin{aligned} L_r(g) &= -\,(S_1S_{r+1}-(r+2)S_{r+2})g - c(n-r)S_rg - (n-r)S_rN(\psi) \\ &\quad -\,(r+1)S_{r+1}\psi - \langle V, \nabla S_{r+1}\rangle, \end{aligned}$$

onde ψ, a qual identificamos com $\psi\circ\varphi$, é o fator conforme de V.

Demonstração: Sendo V um campo de vetores conforme, temos $\mathcal{L}_{N,N} = \mathcal{L}_{i,i} = 2\psi$ e $\mathcal{L}_{i,N} = 0$. Usando o Teorema 4.1, obtemos

$$\begin{aligned} L_r(g) &= -\,(S_1S_{r+1}-(r+2)S_{r+2})g - c(n-r)S_rg \\ &\quad -\,(r+1)S_{r+1}\psi - N(\psi)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S_{r+1}}{\partial\lambda_i} - \langle V, \nabla S_{r+1}\rangle, \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} L_r(g) &= -\,(S_1S_{r+1}-(r+2)S_{r+2})g - c(n-r)S_rg - \ (r+1)S_{r+1}\psi \\ &\quad -\,tr(P_r)N(\psi) - \langle V, \nabla S_{r+1}\rangle. \end{aligned}$$

Finalmente usando o ítem (b) da Proposição 3.1, temos que

$$\begin{aligned} L_r(g) &= -\,(S_1S_{r+1}-(r+2)S_{r+2})g - c(n-r)S_rg - (n-r)S_rN(\psi) \\ &\quad -\,(r+1)S_{r+1}\psi - \langle V, \nabla S_{r+1}\rangle, \end{aligned}$$

como queríamos provar. □

Corolário 4.2 Nas mesmas condições do corolário anterior, se V é um campo de Killing, então

$$L_r(g) = -\,(S_1S_{r+1}-(r+2)S_{r+2})g - c(n-r)S_rg - \langle V, \nabla S_{r+1}\rangle$$

Demonstração: Sendo V um campo de Killing, em particular V é um campo conforme com fator conforme $\psi\equiv 0$, portanto do corolário anterior segue o resultado. □

Lema 4.5 Seja $\varphi : M^n \looparrowright \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica orientada, com um campo de vetores unitário normal N, e V é um campo de vetores conforme sobre $\overline{M}^{n+1}$, cujo fator conforme é ψ. Então

$$div(P_r(V^T)) = \langle div(P_r), V\rangle + c_r(\psi H_r + \langle V, N\rangle H_{r+1}),$$

onde $c_r = (n-r)\binom{n}{r}$ e $div(P_r) = \sum_{i=1}^{n}(D_{E_i}P_r)(E_i)$ por definição.

Demonstração: Pode ser encontrada em [1, Igualdade (8.4)].

Lema 4.6 Se o espaço ambiente $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, então as transformações de Newton satisfazem $div(P_r) = 0$ para cada r.

Demonstração: Pode ser encontrada em [1, Corolário 3.2].

Lema 4.7 Seja $\varphi : M^n \looparrowright M_c^{n+1}$ uma imersão isométrica orientada com campo de vetores unitários normal N. Se V é um campo de vetores conforme sobre M_c^{n+1} com fator conforme ψ e $g = \langle V, N\rangle$ representa a função suporte sobre M^n, então vale

$$div(P_r(V^T)) = (n-r)S_r\psi + (r+1)S_{r+1}g.$$

Demonstração: Usando os Lemas 4.5 e 4.6, obtemos

$$\begin{aligned} div(P_rV^T) &= c_r(\psi H_r + \langle V, N\rangle H_{r+1}) \\ &= (n-r)\binom{n}{r}\psi H_r + (n-r)\binom{n}{r} g H_{r+1} \\ &= (n-r)\psi S_r + (r+1)S_{r+1}g, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Corolário 4.3 Seja $\varphi : M^n \looparrowright M_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade orientada M^n com S_{r+1} constante. Se $V = s(\rho)\nabla\rho$, $g = \langle V, N\rangle$ e $W = (n-r-1)P_r\nabla g + (r+1)P_{r+1}(V^T)$, onde N é um campo normal de vetores unitário em M^n e ρ é a distância sobre M_c^{n+1} para um ponto fixado p_0, então

$$div(W) = -n(r+2)\binom{n}{r+2}(H_1 H_{r+1} - H_{r+2})g.$$

Demonstração: Primeiro observe que $V = s(\rho)\nabla\rho$ é um campo de vetores conforme, cujo fator conforme é dado por $\psi = s'(\rho)$, além disso $N(\psi) = -cg$. Por outro lado, usando o Corolário 4.1, temos que

$$\begin{aligned} L_r(g) &= -(S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})g - c(n-r)S_rg + c(n-r)S_rg \\ &\quad -(r+1)S_{r+1}s'(\rho) - \langle V, \nabla S_{r+1}\rangle, \end{aligned}$$

ou ainda

$$L_r(g) = -(S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})g - (r+1)S_{r+1}s'(\rho),$$

uma vez que S_{r+1} é constante.

Pela Proposição 4.1, temos $L_r(g) = div(P_r\nabla g)$. Daí concluimos que

$$div(P_r\nabla g) = -(S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})g - (r+1)S_{r+1}s'(\rho). \tag{4.34}$$

Agora usando o Lema 4.7, obtemos

$$div(P_{r+1}(V^T)) = (n-r-1)S_{r+1}s'(d) + (r+2)S_{r+2}g, \tag{4.35}$$

de maneira que

$$\begin{aligned} div(W) &= (n-r-1)div(P_r\nabla g) + (r+1)div(P_{r+1}(V^T)) \\ &= (n-r-1)[-(S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})g - (r+1)S_{r+1}s'(d)] \\ &+ (r+1)[(n-r-1)S_{r+1}s'(d) + (r+2)S_{r+2}g] \\ &= -(n-r-1)S_1S_{r+1}g + (n-r-1)(r+2)S_{r+2}g \\ &- (n-r-1)(r+1)S_{r+1}s'(d) + (n-r-1)(r+1)S_{r+1}s'(d) \\ &+ (r+1)(r+2)S_{r+2}g \\ &= -(n-r-1)S_1S_{r+1}g + n(r+2)S_{r+2}g, \end{aligned}$$

ou seja,

$$div(W) = -(n-r-1)S_1 S_{r+1} g + n(r+2) S_{r+2} g.$$

Como $S_1 = nH_1$, $S_{r+1} = \binom{n}{r+1} H_{r+1}$ e $S_{r+2} = \binom{n}{r+2} H_{r+2}$, concluímos

$$div(W) = -n(r+2)\binom{n}{r+2}(H_1 H_{r+1} - H_{r+2})g,$$

como queríamos provar. $\square$

Capítulo 5

Gráficos Radiais Compactos

Por um gráfico radial compacto diferenciável $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, entendemos como sendo um gráfico de uma função diferenciável, cujo domínio é uma esfera $\mathbb{S}^n(r)$ de raio $r > 0$. A construção desse tipo de gráfico é feita da seguine forma: fixamos um ponto $p_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, chamado origem, o qual coincide com o centro da esfera, então para cada direção $v \in T_{p_0}\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$, consideramos um ponto $p(v) \in \Sigma^n$ que corresponde ao ponto final de um segmento não trivial de geodésica de $\mathbb{R}^{n+1}$, partindo de p_0 na direção de v. Esse tipo de gráfico é também chamado de hipersuperfície estrelada diferenciável do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$.

Uma construção similar é dada para um gráfico radial compacto $\Sigma^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$. De fato, fixamos um ponto $p_0 \in \mathbb{S}^{n+1}$ e para cada direção $v \in T_{p_0}\mathbb{S}^{n+1}$ consideramos um ponto $p(v) \in \Sigma^n$ que corresponde ao ponto final de um segmento de geodésica sobre $\mathbb{S}^{n+1}$, partindo de p_0 na direção de v.

Consideremos $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um gráfico radial compacto diferenciável, cujo domínio é uma esfera euclidiana $\mathbb{S}^n(r)$ de raio $r > 0$. Em seguida, introduzamos coordenadas locais $u = (u_1, ..., u_n)$ sobre $\mathbb{S}^n(r)$ e sejam $X(u)$ e $Y(u)$ parametrizações de $\mathbb{S}^n(r)$ e Σ^n, respectivamente. Fazendo $\sigma(u) = |Y(u)| > 0$, segue que $Y = \sigma X$.

Agora seja $f : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(Y) = \langle Y, N_Y \rangle$, onde N_Y é o campo unitário normal a Σ^n. Sabendo que $Y = \sigma X$, temos $Y_i = \sigma X_i + \sigma_i X$ e daí, obtemos

$$\begin{aligned}
f(Y) &= \left\langle \sigma X, \frac{Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n}{|Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n|} \right\rangle \\
&= \left\langle \sigma X, \frac{(\sigma X_1) \wedge \ldots \wedge (\sigma X_n)}{|Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n|} \right\rangle \\
&= \sigma^{n+1} \left\langle X, \frac{X_1 \wedge \ldots \wedge X_n}{|Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n|} \right\rangle \\
&= \frac{\sigma^{n+1}}{|Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n|} \langle X, X_1 \wedge \ldots \wedge X_n \rangle \\
&= \frac{\sigma^{n+1}}{|Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n|} \langle X, |X_1 \wedge \ldots \wedge X_n| N_X \rangle \\
&= \sigma^{n+1} \frac{|X_1 \wedge \ldots \wedge X_n|}{|Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n|} \langle X, N_X \rangle ,
\end{aligned}$$

considerando o campo unitário normal $N_X = -\dfrac{1}{r} X$ de $\mathbb{S}^n(r)$, com o qual a curvatura média de $\mathbb{S}^n(r)$ é positiva, temos que:

$$\begin{aligned}
f(Y) &= \sigma^{n+1} \frac{|X_1 \wedge \ldots \wedge X_n|}{|Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n|} \left\langle X, -\frac{1}{r} X \right\rangle \\
&= -\frac{\sigma^{n+1}}{r} \frac{|X_1 \wedge \ldots \wedge X_n|}{|Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n|} r^2 \\
&= -r\sigma^{n+1} \frac{|X_1 \wedge \ldots \wedge X_n|}{|Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n|} < 0 \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

Finalmente, dado um gráfico radial diferenciável e compacto $\Sigma^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ como acima, suponha que $\Sigma^n \subset \mathbb{S}^{n+1} \backslash \{p_0, -p_0\}$ e sejam $\pi : \mathbb{S}^{n+1} \backslash \{p_0\} \to \mathbb{R}^{n+1}$ a projeção estereográfica e $V_{\mathbb{S}^{n+1}}$ o campo de vetores-posição com base no ponto p_0 em $\mathbb{S}^{n+1}$, vale ressaltar que no Lema a seguir, N_Y é como no caso de gráficos radiais sobre $\mathbb{S}^{n+1}$ em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Lema 5.1 Considerando as condições acima, a função $g = \langle V_{\mathbb{S}^{n+1}}, N_Y \rangle$ tem um sinal bem definido.

Demonstração: Se X e Y são parametrizações de $\mathbb{S}^n(r)$ e Σ^n, respectivamente, então $\pi(X)$ é uma parametrização de uma esfera em $\mathbb{R}^{n+1}$, enquanto $\pi(Y)$ é uma parametrização de um gráfico radial diferenciável sobre $\pi(X)$ em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Sabendo que π é uma aplicação conforme, existe $e^{\phi} \in \mathcal{D}(\Sigma^n)$, satisfazendo

$$\langle d\pi(V_{\mathbb{S}^{n+1}}), d\pi(N_Y)\rangle = e^{2\phi}\langle V_{\mathbb{S}^{n+1}}, N_Y\rangle,$$

mais geralmente, como $d\pi$ preserva ângulos e é um difeomorfismo, existem funções contínuas $g_1, g_2 : \pi(Y) \to \mathbb{R}$, ambas positivas ou ambas negativas, tais que $d\pi(V_{\mathbb{S}^{n+1}}) = g_1 V_{\mathbb{R}^{n+1}}$ e $d\pi(N_Y) = g_2 N_{\pi(Y)}$. Portanto, segue da desigualdade (5.1) que

$$\begin{aligned} e^{2\phi}\langle V_{\mathbb{S}^{n+1}}, N_Y\rangle &= \langle d\pi(V_{\mathbb{S}^{n+1}}), d\pi(N_Y)\rangle \\ &= \langle g_1 V_{\mathbb{R}^{n+1}}, g_2 N_{\pi(Y)}\rangle > 0 \\ &= g_1 g_2 \langle V_{\mathbb{R}^{n+1}}, N_{\pi(Y)}\rangle > 0 \ (ou < 0), \end{aligned}$$

implicando que $g = \langle V_{\mathbb{S}^{n+1}}, N_Y\rangle$ tem sinal bem definido. $\square$

Teorema 5.1 Se $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície estrelada diferenciável compacta com S_2 constante e positiva, então Σ^n é totalmente umbílica.

Demonstração: Fazendo $r = 1$ no Corolário 4.3, temos que

$$div(W) = -3n\binom{n}{3}(H_1H_2 - H_3)g, \tag{5.2}$$

por outro lado, como $\partial\Sigma = \emptyset$, o Teorema da Divergência nos dá

$$\int_{\Sigma^n} div(W) = 0, \tag{5.3}$$

segue então que

$$\int_{\Sigma^n} (H_1H_2 - H_3)g d\Sigma = 0. \tag{5.4}$$

Como $S_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, temos

$$S_1^2 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + 2\sum_{i_1<i_2} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2} = |A|^2 + 2S_2,$$

daí concluímos que $H_1^2 > 0$.

Sabendo que $H_0 = S_0 = 1$, então segue da Proposição 3.3 que

$$H_1^2 - H_0H_2 = H_1^2 - H_2 > 0$$

e também

$$-H_1H_3 \leq -H_2^2,$$

daí obtemos

$$H_1(H_1H_2 - H_3) \geq H_2(H_1^2 - H_2) \geq 0 \tag{5.5}$$

Observe que g tem sinal bem definido pelo Lema 5.1, então usando as igualdades (5.4) e (5.5), juntamente com o fato de que $S_1 > 0$, obtemos

$$H_1H_2 - H_3 = 0.$$

Segue então da desigualdade (5.5) que $H_1^2 - H_2 = 0$ e usando novamente a Proposição 3.3 concluímos que Σ^n é totalmente umbílica. □

Para finalizar o trabalho, mostraremos o seguinte resultado.

Teorema 5.2 Seja $\Sigma^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície diferenciável estrelada mínima e compacta. Então Σ^n é totalmente geodésica.

Demonstração: Fazendo $r = 1$ no Lema 4.7, temos que

$$div(P_1(V^T)) = (n-1)S_1\psi + 2S_2g = 2S_2g, \tag{5.6}$$

uma vez que Σ^n é mínima. Portanto

$$\int_{\Sigma} S_2 g d\Sigma = \frac{1}{2}\int_{\Sigma} div(P_1(V^T))d\Sigma = 0.$$

Sendo $S_1 = 0$, temos $2S_2 = -|A|^2$ e como g não muda de sinal, segue que $S_1 = S_2 = 0$, logo $|A|^2 = 0$ e Σ^n é totalmente geodésica. $\square$

Bibliografia

[1] ALIAS, Luis J.; LIRA, Jorge H. S.; MALACARNE, M. Constant higher-order mean curvature hypersurfaces in Riemannian spaces. *J. Inst. Math. Jussieu*, v. 5, p. 527-662, 2006.

[2] ALIAS, Luis J.; BRASIL, Aldir Jr.; COLARES, A. G. Integral formulas for spacelike hypersurfaces in conformally stationary spacetimes and applications. *Proc. Edinb. Math. Soc.*, v. 46, n. 2, p. 465-488, 2003.

[3] BALTAZAR, H. *Sobre a aplicação de Gauss para hipersuperfícies com curvatura de ordem de ordem superior constante em esferas*. 2009. 54 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2009.

[4] BARROS, A.; SOUSA, P. An extension of Jellett's theorem. *Bull. Sc. Math.*, v. 133, n. 2, p. 190-197, 2009.

[5] .... Compact graphs over a sphere of constant second order mean curvature. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 137, n. 9, p. 3105-3114, 2009.

[6] CAMINHA, A. *Sobre hipersuperfícies em espaços de curvatura seccional constante*. 2004. 67 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2004.

[7] CARMO, Manfredo P. *Geometria Riemanniana*. 3. ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2008. 332 p. (Projeto Euclides).

[8] HEINTZE, E. Extrinsic upper bounds for λ_1. *Math. Ann.* v. 280, p. 389-402, 1988.

[9] JELLETT, J. La surface dont la courbure moyenne est constant. *J. Math. Pures App.*, v. XVIII, p. 163-167, 1853.

[10] LEE, John M. *Introduction to smooth manifolds.* New York : Springer-Verlag, 2003. 628 p. (Graduate texts in mathematics ; 218).

[11] ROSENBERG, H. Hypersurfaces of Constant Curvature in Spaces Forms. *Bull. Sci. Math.*, v. 117, n. 2, p. 211-239, 1993.