**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**
**CENTRO DE CIÊNCIAS**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**ANTÔNIA DINAMÁRIA GOMES EVANGELISTA**

# REGRAS MATEMÁTICAS E SUAS JUSTIFICATIVAS: BREVE HISTÓRICO SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA NO BRASIL E UMA REFLEXÃO ACERCA DA INCLUSÃO DE DEMONSTRAÇÕES NA PRÁTICA DOCENTE

**JUAZEIRO DO NORTE**
**2014**

ANTÔNIA DINAMÁRIA GOMES EVANGELISTA

# REGRAS MATEMÁTICAS E SUAS JUSTIFICATIVAS: BREVE HISTÓRICO SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA NO BRASIL E UMA REFLEXÃO ACERCA DA INCLUSÃO DE DEMONSTRAÇÕES NA PRÁTICA DOCENTE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Paulo César Cavalcante de Oliveira.

JUAZEIRO DO NORTE
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

E92r Evangelista, Antônia Dinamária Gomes

Regras matemáticas e suas justificativas: breve histórico sobre o ensino de matemática no Brasil e uma reflexão acerca da inclusão de demonstrações na prática docente / Antônia Dinamária Gomes Evangelista . – 2014.

100 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2014.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientação: Prof. Ms. Paulo César Cavalcante de Oliveira.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Dificuldades de aprendizagem. 3. Práticas pedagógicas. . I. Título.

CDD 510

ANTÔNIA DINAMÁRIA GOMES EVANGELISTA

REGRAS MATEMÁTICAS E SUAS JUSTIFICATIVAS: BREVE HISTÓRICO SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA NO BRASIL E UMA REFLEXÃO ACERCA DA INCLUSÃO DE DEMONSTRAÇÕES NA PRÁTICA DOCENTE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 17 / 05 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Paulo César Cavalcante de Oliveira

Prof. Ms. Paulo César Cavalcante de Oliveira (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Francisco Valdemiro Braga

Prof. Ms. Francisco Valdemiro Braga

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Francisca Leidmar Josué Vieira

Profa. Ms. Francisca Leidmar Josué Vieira

Universidade Regional do Cariri (URCA)

A Deus

Aos meus pais, Francisco e Antomária (in memorian), por tantas lições de vida a mim ensinadas.

Aos meus irmãos, Fabiano, Otaciliana e Adriana, por tantos momentos de alegria, desafios e superação por nós vivenciados.

**AGRADECIMENTOS**

A Deus, por tantas bênçãos a mim concedidas, entre elas o ingresso e a conclusão desse curso.

A minha mãe (*in memorian*), que também vivenciou os desafios de ser professora de matemática e que, mesmo ausente fisicamente, me conforta com seus ensinamentos e lembranças.

Ao meu pai, pelo apoio incondicional ao longo dessa e de muitas outras caminhadas.

Aos meus irmãos, que de formas distintas, me apoiaram e contribuíram na minha formação.

Ao meu namorado (Rilakson) e sua família, pelo carinho, paciência e palavras de incentivo ao longo desse desafio.

Ao meu amigo, Rhimaykon, que de maneira tão prestativa me acolheu em seu lar durante o curso.

Aos meus amigos e colegas de trabalho, pelas experiências, conversas, risadas e apoio na realização desse sonho.

A minha eterna professora e amiga, Márcia Jânnia, que de maneira tão entusiasta me ensinou mais do que lições matemáticas.

Ao meu orientador, Prof. Ms. Paulo César, pela atenção, incentivo, amizade, apoio e valiosas orientações.

À CAPES, pela bolsa de estudos que permitiu uma maior dedicação ao Programa de Pós-Graduação.

Aos professores do mestrado que, com grande capacidade e talento, me ajudaram com explicações e orientações.

Aos meus colegas de curso, pelos laços de amizade firmados e por tantas contribuições à minha prática docente.

À amiga e professora de português Laurineide Cavalcante, que tão gentilmente colaborou na revisão deste texto.

“Na maior parte das ciências uma geração põe abaixo o que outra construiu, e o que uma estabeleceu a outra desfaz. Somente na matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura.”
(Hermann Hankel)

## RESUMO

Esse trabalho apresenta uma reflexão acerca do ensino da matemática, bem como as dificuldades inerentes a esse tema que, ao longo da história de nosso país, teve seus momentos de glória e de esquecimento. Também é discutido o papel das demonstrações nas aulas de matemática onde autores divergem quanto a ser ou não uma ferramenta didática no ensino básico. Sempre existiu a preocupação dos professores em tornar a Matemática mais dinâmica e mais fácil para os alunos. Do Brasil Colônia aos dias atuais o ensino de Matemática sofreu grandes mudanças. Apesar de sua importância e aplicabilidade houve tempos em que, o ensino de ciências (incluindo matemática) era reservado aos cursos de nível superior. No Brasil Colônia predominava a escola dos Jesuítas baseado em um ensino tradicional com pouco destaque para a matemática. No Brasil Império, foi criado a Constituição de 1824 e implantadas as primeiras instituições culturais e educacionais do país, caraterizando as primeiras mudanças educacionais. No Brasil República, aconteceram várias reformas no sistema educacional, sob fortes influências francesas, onde, pela primeira vez a Matemática recebeu destaque. Em consequência, houve a democratização da escola, favorecendo crianças e jovens das classes populares. A década de 50 foi marcada como o período de estudos e tentativas de implantação do Movimento Matemática Moderna que tinha como características: precisão na linguagem matemática; prioridade nos aspectos lógicos e estruturais; importância em demonstrações; desfavorecimento ao ensino de geometria. Esse movimento surgia na tentativa de solucionar os problemas advindos do ensino tradicional. Há vários fatores que geram/influenciam as dificuldades no ensino de matemática, tais como: a má formação inicial dos professores; metodologia tradicional com ênfase no cálculo e memorização de fórmulas; busca inadequada a novos recursos pedagógicos; descontextualização; o simbolismo próprio da linguagem matemática, etc. A reintrodução de doses equilibradas de demonstrações no ensino de Matemática no Brasil é uma prática que incentiva a compreensão, ajuda no desenvolvimento do raciocínio matemático e da lógica dedutiva. O ensino de matemática necessita de mudanças de posturas, metodologias, mas sem abandonar as técnicas e procedimentos operatórios característicos da disciplina. Nesse trabalho, ainda são apresentadas algumas “regrinhas” com sua contextualização histórica e justificativas a fim de ajudar o professor a responder questionamentos dos alunos como, *“de onde veio isso?”* ou *“por que é assim?”*.



**Palavras-chave:** Ensino de matemática. Dificuldades em aprendizagem. Contextualização histórica e demonstrações.

**ABSTRACT**

This paper presents a reflection on the teaching of mathematics as well as the difficulties related to the subject, throughout the history of our country, had his moments of glory and oblivion. It discuss the function of demonstrations in math classes where authors disagree as to whether or not a teaching tool in elementary education. There has always been a concern of teachers to become more dynamic and easier for students to mathematics. From Colonial Brazil to today the teaching of Mathematics has undergone great changes. In spite of its importance and applicability there were times where the teaching of science (including mathematics) was reserved for university courses. In Colonial Brazil predominated the Jesuit school based on a traditional education with little emphasis on mathematics. In Empire Brazil, was created the Constitution of 1824 and implemented the first cultural and educational institutions in the country, featuring the first educational changes. In Republic Brazil, happened several reforms in the educational system under strong French influences, where, for the first time the Mathematics was highlighted. Consequently, there was the democratization of the school, encouraging children and young people of the popular classes. The 50's was marked as the period of studies and attempts to implement the Modern Mathematics Movement which had the following characteristics: precision in mathematical language; priority in logical and structural aspects; importance in demonstrations; disadvantage to teaching geometry. This movement arose in the attempt to solve the problems arising from traditional education. There are several factors that create/influence the difficulties in teaching of mathematics, such as: poor initial training of teachers; traditional methodology with emphasis on calculation and memorization of formulas; inadequate seeks new teaching resources; decontextualization; own symbolism of mathematics language etc. The reintroduction of balanced doses of demonstrations in the teaching of Mathematics in Brazil is a practice that encourages understanding, helps in the development of mathematical reasoning and deductive logic. The teaching of mathematics requires changes in attitudes, methodologies, but without give up the technical characteristics and operative procedures of the discipline. In this work is still displayed some "ground rules" with its historical context and justifications in order to help the teacher to answer questions of students as "where did that come from? " or "why is that?".

**Keywords:** Teaching of mathematics. Difficulties in learning. Historical contextualization and demonstrations.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

## LISTA DE TABELAS

## LISTA DE ABREVIATURA E SIGLAS

| | |
|---|---|
| CADES | Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário |
| CNPq | Coordenação Nacional de Pesquisas |
| ENEM | Exame Nacional do Ensino Médio |
| EUA | Estados Unidos da América |
| GEEM | Grupo de Estudos do Ensino de Matemática |
| GEEMPA | Grupo de Estudos do Ensino de Matemática de Porto Alegre |
| IMPA | Instituto de Matemática Pura e Aplicada |
| LDB | Lei de Diretrizes e Bases |
| MEC | Ministério da Educação |
| NEDEM | Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino de Matemática |
| PCN | Parâmetros Curriculares Nacionais |
| SENAC | Serviço Nacional de Aperfeiçoamento Comercial |
| SENAI | Serviço Nacional de Aperfeiçoamento Industrial |
| USP | Universidade de São Paulo |

## SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

A Matemática, com toda a sua beleza encorpada em formalismos, vem ao longo dos anos suprindo necessidades de civilizações que conseguiram evoluir cultural e socialmente segundo descobertas e abordagens matemáticas. Como já afirmou o matemático francês René Descartes: “A matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens”.

A nossa sociedade passou (e ainda passa) por um período de mudanças e elas são refletidas especialmente no sistema educacional. Estamos diante de uma realidade onde, cada vez menos, os alunos sentem-se interessados pela educação escolar, em especial, não se motivam a estudar matemática.

> Depois de séculos de um ensino tradicional e estático, a abordagem adotada no ensino de matemática tem sofrido mudanças nas últimas quatro décadas. Essas modificações passaram pela “matemática moderna”, que valorizava um enfoque demasiadamente estruturalista, nada natural para os alunos da escola básica. Após o abandono da matemática moderna, com o movimento de retorno às bases matemáticas o que se viu foi o abandono total do raciocínio dedutivo e das demonstrações. Embora “desenvolver o raciocínio lógico” seja um dos objetivos incluídos dos planejamentos de quase todos os professores de matemática, os alunos foram passando pela escola sem que fossem expostos a atividades que desenvolvessem seu raciocínio lógico ou que os preparasse para o domínio do processo dedutivo. (NASSER; TINOCO, 2003, p.1)

Quando questionados sobre o estudo da matemática, alunos e professores concordam em alguns pontos, tais como: disciplina com muito conteúdo para ensinar, difícil, complicada, chata e com muita fórmula para decorar. Além disso, é comum, no discurso de professores do nível básico, a reclamação de muitos alunos quanto a aplicabilidade do conteúdo, o porquê ou surgimento de determinada regra. A falta de conhecimento e preparo do professor faz com que essas perguntas fiquem sem respostas, ou os alunos tenham que se conformar com “mais na frente vocês vão aprender para que serve isso”.

A curiosidade em saber o porquê de algumas regras bastante usadas em diversas questões seguida da preocupação de conhecer mais sobre as causas das dificuldades relacionadas ao ensino e aprendizagem de matemática foram as motivações para realizar esse trabalho. Porém não se pode refletir sobre o ensino de matemática atual sem ter um conhecimento acerca desse tema na história de nosso país. A razão de buscar informações na história deve-se ao fato de, contextualizar essas dificuldades e entender de que maneira chegamos até a situação atual. Ao se fazer uma abordagem histórica do ensino de matemática no Brasil, percebe-se distinções de abordagens que variaram de acordo com as demandas do período em que vivia a sociedade.

As mudanças foram necessárias, entre elas, na tentativa de diminuir dificuldades e de oferecer educação de qualidade. Porém a abordagem que foi feita com a implementação de algumas dessas mudanças refletiam diretamente no modelo de sociedade predominante. Períodos em que se valorizava demais a memorização, o cálculo e o algebrismo, deixaram de lado a geometria, em contrapartida, momentos em que houve uma excessiva valorização em desenvolver o raciocínio lógico dos estudantes deixaram de lado o simbolismo e o formalismo da linguagem matemática.

O professor, muitas vezes, erra tentando acertar. Quando vai buscar se aprimorar nos conhecimentos técnicos passa a seguir tendências sem uma formação adequada, ou quando passa a usar determinados recursos sem a devida orientação, ou ainda, quando por decisão própria, deixa de estimular o aprendizado de alguns conteúdos, independente, dos motivos. Nessa última ação está incluído também o fato do professor deixar de explorar alguns conceitos ou justificar regras matemáticas por achar perda de tempo ou por não ter o conhecimento adequado.

Partindo dessa realidade, destacamos que se torna necessário o desenvolvimento de pesquisas que visem colaborar com o melhor entendimento dessas dificuldades e a elas serem associadas maneiras didáticas de intervenção. Esse estudo é voltado para professores de matemática e alunos de nível superior que desejam ingressar na carreira do magistério, possibilitando-lhes conhecer uma breve situação histórica do ensino de matemática, as dificuldades encontradas no ensino e aprendizagem dessa disciplina, bem como compreender a importância de algumas técnicas didáticas que favorecem a compreensão da matéria.

Dessa forma, o presente trabalho tem como objetivo geral: *proporcionar aos leitores uma base histórica sobre o ensino de matemática buscando conhecer algumas dificuldades de ensino e aprendizagem em matemática, bem como, associadas a elas, sugerir técnicas didáticas de intervenção.*

Nesse sentido, apresentamos os objetivos específicos do presente trabalho conforme segue:

a) conhecer estudos e pesquisas feitas sobre a evolução do ensino de matemática no Brasil;

b) elencar algumas dificuldades associadas ao ensino e aprendizagem de matemática;

c) propor técnicas didáticas de intervenção com base nos estudos realizados;

d) buscar diferentes maneiras de justificar algumas regras básicas de matemática;

e) contextualizar historicamente o conteúdo que envolve a aplicação dessas regras básicas.

Com o intuito de alcançar os objetivos, fazemos uso da abordagem qualitativa, por entendermos que este tipo de pesquisa preocupa-se com detalhes que não poderiam ser quantificados. Aqui observamos que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre um mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não se pode traduzir em números. Há uma preocupação com o entendimento do contexto o qual está inserido o sujeito.

De acordo com a exposição até aqui feita, pretende-se fazer um estudo sobre as dificuldades no ensino-aprendizagem de matemática com base em sua contextualização histórica, além de sugerir técnicas didáticas de intervenção. Para tanto, o presente trabalho foi estruturado em quatro capítulos. Primeiramente, este introdutório traz uma visão geral sobre o estudo e um pequeno resumo dos capítulos da dissertação.

No segundo capítulo intitulado *Relato sobre a evolução do ensino de matemática no Brasil, f*az-se uma apresentação do contexto histórico e das mudanças sofridas pelo sistema de ensino, dando ênfase ao ensino de matemática. A importância desse capítulo está no fato de conhecermos e compreendermos que, muitas das dificuldades passadas atualmente nas escolas já eram sentidas há muito tempo, e as mudanças ocorriam, na maioria das vezes, como uma forma de inquietação em solucionar essas dificuldades. São apresentados progressos, desafios, posturas de autores que participaram de movimentos inovadores, modificações em metodologias pedagógicas com o intuito de estruturar o ensino pautado em novas tendências.

No terceiro capítulo, intitulado *Dificuldades no ensino e aprendizagem em matemática*, a proposta fundamental da dissertação é apresentada. Conhecer melhor as dificuldades que estão relacionadas ao ensino de matemática e através de pesquisas e experiências de autores, entender os fatores que causam essas dificuldades e buscar métodos que nos ajudem a realizar com eficácia o nosso papel de educar. Dessa maneira, pautados com conhecimento teórico, possamos refletir constantemente a nossa prática e só assim, assumir uma postura coerente de educador.

No quarto capítulo, com o título *Contexto histórico das regrinhas e suas justificativas,* faz-se uma apresentação histórica do conteúdo em que algumas regras básicas se encontram. No intuito de colaborar com o conhecimento teórico de professores, apresentamos diferentes justificativas de algumas regras básicas de matemática e a sua contextualização histórica. A escolha das regras se deu pelos seguintes fatores: uso constante na resolução de problemas diversos e um comentário de um senhor sobre o ensino em seu tempo. As informações aqui contidas são o primeiro passo para que o professor desperte em si a curiosidade e a motivação para buscar entender situações que, às vezes, passam despercebidas.

Nas *Considerações Finais*, são destacados os resultados desse estudo, bem como, suas ações ou investigações futuras. Dessa forma são apresentados os objetivos propostos com suas respectivas considerações, além de propor sugestões que podem melhorar o ensino e a aprendizagem de matemática.

# 2 RELATO SOBRE A EVOLUÇÃO DO ENSINO DE MATEMÁTICA NO BRASIL

As muitas definições existentes da matemática revelam mais sobre quem a define do que sobre a disciplina, como exemplo, temos que um geômetra na Grécia antiga talvez dissesse que a matemática é o estudo das formas; já o lógico a retrataria como uma construção que parte de premissas para chegar a uma afirmação, enfim, a Matemática tem sido conceituada das mais diversas maneiras, como a ciência dos números e das formas, das relações e das medidas, das inferências, porém, suas características sempre apontam para precisão, rigor, exatidão.

A Matemática, a princípio, começou a organizar-se como instrumento de análise das condições climáticas e das necessidades do cotidiano, e no decorrer do tempo, foram se desenvolvendo ideias matemáticas importantes na criação de sistemas de conhecimento e, comportamentos, necessários para lidar com o ambiente, para sobreviver, e para explicar o visível e o invisível.

Ao longo da história, a Matemática vem evidenciando sua grande utilidade na vida social dos indivíduos. De forma a funcionar como um grande processo de aprendizado intermediando e modificando a realidade.

Ao buscarmos uma retrospectiva do passado histórico do ensino da matemática no Brasil estamos reconhecendo todo o processo de evolução e modernização, de um cenário que foi palco de diversos conflitos e transformações. No período da Colônia e no Império, sabemos que, apesar de existirem poucas descrições, o ensino era tradicional baseado no modelo dos lusitanos e a pesquisa era insuficiente.

## 2.1 O Ensino no Brasil Colônia (1500-1822)

Nesse período, o ensino era, basicamente, uma prerrogativa dos jesuítas. Seis padres, liderados pelo padre Manuel da Nóbrega, foram responsáveis pela criação da primeira escola elementar em Salvador.

Em relação aos conhecimentos matemáticos, abordava-se o ensino da escrita dos números no sistema de numeração decimal e o estudo das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais. O ensino ministrado nos colégios era de nível secundário e privilegiava uma formação em que o lugar principal era destinado às humanidades clássicas. Era dado grande destaque para o aprendizado do latim. Apesar da biblioteca do colégio dos jesuítas no Rio de Janeiro possuir um grande acervo de livros de matemática, sabe-se, através de estudos realizados por muitos pesquisadores, que os estudos matemáticos eram realmente pouco desenvolvidos no ambiente jesuíta.

Durante os duzentos e dez anos de permanência dos jesuítas e seus ensinamentos no Brasil (1549–1759), as ciências, e em particular a Matemática, não eram consideradas como conteúdo importante para a formação de seus alunos. O ensino dessas áreas era somente reservado aos cursos superiores (studia superiora). Por outro lado, mesmo nesses estudos superiores, desenvolvidos no curso de filosofia e ciências, ou artes, pouco se estudava essa ciência exata.

As palavras do doutor Jean Bouhier (1673-1746), presidente do Parlamento de Dijon, filólogo, historiador e poeta acadêmico ressaltaram essa antipatia dos jesuítas em relação às matemáticas:

> O estudo das ciências especulativas, como a geometria, a astronomia, a física, é um entretenimento sobremaneira vão; todos esses conhecimentos, estéreis e infrutíferos, são inúteis por si mesmo. Os homens não nasceram para medir linhas, examinar as relações entre os ângulos e perder todo o seu tempo em considerações sobre os distintos movimentos da matéria. (DAINVILLE, 1957, *apud* CHÂTEAU, 1992, p. 85 *apud* MIORIM, 1998, p. 82)

A expulsão dos jesuítas, em 1759, deu-se a partir de uma insatisfação geral da Metrópole. Na Colônia, já se faziam notar os atritos entre os jesuítas e a população, em torno da questão da escravidão dos índios. Juntava-se a isso a presença, tanto no Reino, quanto na Colônia, de ideias provindas do enciclopedismo, declaradamente anticlericais. Sebastião José de Carvalho e Melo, o Marquês de Pombal, primeiro-ministro de Portugal no período de 1750 a 1777, cuja linha de pensamento estava estreitamente vinculada ao enciclopedismo, ordenou a expulsão dos jesuítas de todas as colônias.

> Após a saída dos jesuítas do Brasil, o sistema educacional brasileiro praticamente desmoronou, pois esses padres eram os responsáveis pela maior parte das instituições educacionais no Brasil, restando apenas alguns poucos centros educacionais dirigidos por outras ordens religiosas, instituições de ensino militar e poucos padres-professores, formados pelas escolas jesuíticas. Esses padres-professores "compuseram também o maior contingente de professores recrutados para as chamadas aulas introduzidas com a reforma pombalina" (ROMANELLI, 1995, p. 36).

Em 1772, foram criadas as "aulas-régias", nas quais isoladamente, se ensinaram primeiramente a gramática, o latim, o grego, a filosofia e a retórica, e, posteriormente, as disciplinas matemáticas: aritmética, álgebra e geometria.

Segundo Azevedo (1976, *apud* Miorim, 1998) "além de tudo, os poucos professores recrutados não possuíam uma formação adequada, mostrando não apenas ignorância das matérias que ensinavam, como também da ausência absoluta de senso pedagógico."

A professora Maria Laura Magalhães Gomes, em seu trabalho intitulado *História do Ensino da Matemática: uma introdução*, relata de maneira clara e bem concisa o contexto histórico desse período de transição.

> Em resumo, o que se conhece dessa fase é que o número de aulas de Matemática era pequeno e essas aulas tinham baixa frequência. Uma ocorrência importante, no Brasil do fim do século XVIII, no que diz respeito ao destaque à Matemática e às ciências, foi a criação do Seminário de Olinda pelo bispo de Pernambuco, Dom Azeredo Coutinho, em 1798. Essa instituição, que funcionou a partir de 1800 e não formava somente padres, tornou-se uma das melhores escolas secundárias do Brasil. Ela conferiu importância ao ensino dos temas matemáticos e científicos, e era estruturada em temos de sequenciamento de conteúdos, duração dos cursos, reunião dos estudantes em classes e trabalho de acordo com um planejamento prévio. (GOMES, 2012, p.15)

Segundo a autora supracitada

> A chegada de D. João VI e da corte portuguesa ao Brasil, em 1808, trouxe mudanças em muitos campos, entre os quais é preciso enfatizar os ligados à educação e à cultura em geral. Muitas instituições culturais e educacionais foram implantadas, como a Academia Real de Marinha (1808), no Rio de Janeiro, a Academia Real Militar (1810), também no Rio, destinadas a formar engenheiros civis e militares; cursos de cirurgia, agricultura e química, a Escola Real de Ciências, Artes e Ofícios (1816), o Museu Nacional, no Rio de Janeiro, entre outras. (GOMES, 2012, p.15)

Além das aulas avulsas, havia seminários e colégios mantidos por ordens religiosas, escolas e professores particulares, os chamados Liceus nos atuais estados do Rio Grande do Norte, da Bahia e da Paraíba.

## 2.2 O Ensino no Brasil Império (1822-1889)

Durante a elaboração da Constituição, realizada pela Assembleia Constituinte após a independência, em 1822, D. Pedro I ressaltou a necessidade de uma legislação especial sobre a instrução pública. A Constituição de 1824, que prevaleceu durante todo o período imperial, afirmava a gratuidade da instrução primária para todos os brasileiros, mas foi somente depois de muitos debates sobre a educação popular que, em 15 de outubro de 1827, a Assembleia Legislativa votou em favor da primeira lei de instrução pública nacional no Império do Brasil. Essa lei estabelecia que houvesse escolas de primeiras letras em todas as cidades, vilas e lugares populosos. Mas isso não significava que o ensino de matemática havia sido excluído do currículo, pelo contrário, entende-se por "primeiras letras" o ato de saber "ler, escrever e contar".

Vale ressaltar que, na lei de outubro de 1827, havia a diferenciação na educação para meninos e meninas, prevendo escolas separadas para os dois sexos. O currículo para a escola de meninos envolvia ler, escrever, as quatro operações, estudo das frações ordinárias, decimais e proporções, noções gerais de geometria, gramática da língua nacional, moral cristã e doutrina católica. Enquanto que no currículo para a escola de meninas eliminava-se a geometria e o estudo de frações ordinárias, incluindo o ensino de práticas importantes para a economia doméstica.

Em 1834, o governo do Brasil descentralizou a educação, passando o ensino das "primeiras letras" para as administrações provinciais, um importante momento histórico na educação brasileira, pois era a primeira vez que a educação da população estava sendo vista como um direito social. Porém, devido alguns fatores, tais como, enormes distâncias, despovoamento e um histórico de exclusão social em nosso país, não foi possível a constituição de um sistema escolar capaz de atender a população. Oferecer educação a negros e índios era um fato dispensável.

O ensino secundário tinha como principal objetivo a preparação dos estudantes para os exames de acesso às academias militares e poucas escolas superiores existentes no país. Ele era organizado por série, e ao final, o aluno recebia o título de Bacharel em Letras, que era uma garantia de ingressar em qualquer instituição de nível superior sem prestar exames. No início do século XIX, o ensino secundário era oferecido em colégios, liceus, ginásios, ateneus, cursos preparatórios anexos às faculdades e seminários religiosos, onde eram priorizados no currículo o ensino do latim, o grego, a retórica, a poética, a filosofia e as línguas modernas pois não havia um currículo único para todas as escolas de nível secundário.

Segundo Valente (1999, *apud* GOMES, 2012), "a Aritmética era ensinada nos três primeiros anos do curso, seguida pela Geometria por mais dois anos e Álgebra no sexto ano. Nos dois últimos, as matemáticas eram ensinadas sob o título de matemática. [...] tratava-se do ensino da Trigonometria e da Mecânica".

Fundamentalmente, o público desse ensino era a elite econômica masculina do país, que se preparava para ocupar cargos político-administrativos e/ou para ingressar nos cursos superiores. As filhas das classes privilegiadas geralmente eram educadas para as atividades do lar e para a convivência social em colégios femininos – leigos ou religiosos – ou em casa, com o auxílio de preceptoras estrangeiras. As mulheres aprendiam as primeiras letras, o francês, música, piano e prendas femininas. As mulheres das classes populares podiam frequentar as aulas de instrução elementar, as escolas normais (formação de professores) e cursos profissionalizantes. Na década de 1880, algumas mulheres passaram a estudar no Colégio Pedro II. Em 1887, a primeira mulher recebeu o diploma de médica no Rio de Janeiro, sendo a única presença feminina na turma.

O modelo de organização das escolas francesas influenciou a estrutura de organização do Colégio Pedro II, criado em 1837 pelo ministro Bernardo Pereira Vasconcelos no Rio de Janeiro, e concebido para funcionar como internato e externato.

> O Colégio Pedro II tornou-se a instituição modelo para o ensino secundário no Brasil, e de acordo com a História da Educação, escrita por Cynthia Greive Veiga, professora da Faculdade de Educação da UFMG, até 1873, alunos de outras províncias tinham que ir ao Rio de Janeiro para realizar seus exames, que lá eram centralizados. Posteriormente, uma lei autorizou a aplicação desses exames nas próprias províncias. (GOMES, 2012, p.16)

Para atender às necessidades da agricultura e da indústria que estavam em ascensão no Brasil, começaram a surgir as escolas técnicas, dando início ao Movimento da Escola Nova. Essas escolas passariam a trabalhar com o "princípio da atividade" e o "princípio de introduzir a mesma situação da vida real", levando da teoria à prática. Dessa forma, de acordo com o desenvolvimento e o interesse da classe, os problemas eram propostos de modo que os alunos, estimulados por interesse próprios, sentissem a necessidade de resolvê-los. O Movimento da Escola Nova ou Escola Ativa agitou o país com diversas discussões educacionais, apresentando assim, novas propostas para o ensino de séries iniciais que estavam se efetivando devido às reformas empreendidas em vários estados. Essas ideias e discussões refletiram na escola secundária, em especial no ensino da Matemática.

Maria Ângela Miorim destaca duas ideias fundamentais comuns às diversas correntes escolanovistas: o "princípio da atividade" e o "princípio de introduzir na escola situações da vida real", que trouxeram mudanças no ensino dos anos iniciais da escolarização, com reflexos específicos na abordagem da Matemática.

## 2.3 O Ensino no Brasil República (A partir de 1889)

Segundo Romanelli (2001), após a Proclamação da República, acontece uma ampla reforma no sistema educacional brasileiro proposta pelo primeiro titular do Ministério da Instrução Pública, Correios e Telégrafos, Benjamim Constant (1836-1891), isso porque 85% da população era analfabeta. A reforma, presente no Decreto 981, fazia referência apenas à instrução pública de nível primário e secundário no Distrito Federal, então situado no Rio de Janeiro.

Silva (1992) diz que nesse mesmo período, predominou no meio intelectual brasileiro, a ideologia positivista de Auguste Comte. Em que nessa época as ideias do mestre francês já estavam em rota de colisão direta com a evolução da ciência e, em particular, da Matemática, que ocorria no século XIX.

> A lei buscava romper com a tradição humanista e literária do ensino secundário pela adoção de um currículo que privilegiava as disciplinas científicas e matemáticas. A Matemática era tida como a mais importante das ciências no ideário positivista do filósofo francês Auguste Comte (1798-1857), ao qual aderiram Benjamin Constant e o grupo de militares brasileiros que liderou a proclamação da República. Assim, essa disciplina adquiria grande relevância na proposta da Reforma Benjamin Constant, particularmente nos sete anos que compunham a educação secundária. É importante assinalar que o Colégio Pedro II, referência para esse nível de educação, passou a se chamar Ginásio Nacional quando se estabeleceu a República. A frequência ao ensino secundário, cujo objetivo principal, como vimos, era a preparação para a educação superior, não era obrigatória, e muitos estudantes, sem realizar um curso regular, faziam os chamados exames preparatório para o ingresso nos cursos superiores, entre os quais figuravam os das disciplinas matemáticas: Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria. (GOMES, 2012, p.17)

Para Miorim (1998) a filosofia Comtiana representava um rompimento com a tradição clássico-humanista existente até então no ensino secundário. Era uma tentativa de substituir a formação literária existente e introduzir uma formação científica nos moldes positivistas. Essa mudança consistia no acréscimo das disciplinas científicas, o que ampliou mais o caráter enciclopédico do currículo de nossa escola secundária.

Castro (1992) comenta que o grande prestígio das ideias de Comte nos primeiros anos do século XX sobre o ensino da matemática no Brasil até então, foi a prova mais decisiva de que os progressos realizados pela matemática no século anterior ainda não haviam penetrado suficientemente no país.

Com relação aos materiais didáticos, havia a preocupação de reestruturar os conteúdos de modo a incluir novos temas, então, nas décadas finais do século XIX se podia perceber duas tendências: autores passam a escrever textos, com a tradição de escrita de livros didáticos não para os alunos, algumas vezes nem para os professores, mas para o meio intelectual dos próprios autores. A outra tendência é o inverso da primeira, havia a preocupação de produzir livros didáticos para uso dos alunos, revelando a preocupação didática e pedagógica do tratamento dos conteúdos matemáticos.

> De um modo ou de outro, os livros de aritmética, geometria e álgebra, seguindo uma tendência internacional, vão sendo escritos progressivamente levando em consideração o seu uso pelos alunos. Aos poucos a lição vai dando lugar também ao exercício dentro dos textos didáticos de matemática. (VALENTE, 1999, *apud* GOMES, 2012, p. 18)

Ainda falando em reformas educacionais é oportuno citar um fato ocorrido em Minas Gerais. A partir de 1929, começou a funcionar a Escola de Aperfeiçoamento sob a idealização do titular da secretaria do governo estadual responsável pela educação. Essa instituição se situava na capital do estado, Belo Horizonte, com o objetivo de oferecer às docentes mineiras em exercício no ensino primário um curso sintonizado com os princípios da Escola Nova, a fim de preparar adequadamente profissionais que seguissem as novas diretrizes pedagógicas.

Gomes (2012) cita um exemplo de como funcionavam essas diretrizes com relação ao ensino da Matemática cuja referência biográfica é da professora Alda Lodi (1898-2002), docente de Metodologia da Aritmética na Escola de Aperfeiçoamento.

> Como Aritmética não deve ser ensinada com o fim de aritmética exclusivamente, à parte das necessidades da vida, sem atender às situações reais que a criança encontra, mas sim ajudá-la a estimar, a medir, a comparar, a calcular, a torná-la socialmente eficiente no manejo das situações numéricas, entendemos inciar o nosso curso discutindo a criança e o programa escolar. Assim, sempre firmamos as bases do nosso trabalho – girá-lo em torno da criança, aproveitando seus interesses imediatos como ponto de partida da educação. (Lodi, 1929, *apud* Gomes, 2012, p.18)

Porém esse movimento de renovação pedagógica não alcançou de imediato o ensino secundário que continuou pautando sua ação “num ensino livresco, sem a relação com a vida do aluno, baseado na memorização e na assimilação passiva dos conteúdos.” (Miorim, 1998)

Durante a realização do quarto congresso internacional de Matemática, em 1908 em Roma, foi criada uma comissão internacional para tratar de questões do ensino, presidida pelo matemático alemão Felix Klein (1849-1925). Essa comissão assinala a existência de um primeiro movimento internacional para a modernização do ensino, ficando estabelecida como meta proceder a um estudo sobre o ensino secundário da Matemática em vários países, entre eles, o Brasil. As principais propostas desse movimento eram: promover a unificação dos conteúdos matemáticos abordados na escola em uma única disciplina, enfatizar as aplicações práticas da Matemática e introduzir o ensino do cálculo diferencial e integral no nível secundário.

O maior adepto das ideias modernizadoras foi o professor catedrático de Matemática do Colégio Pedro II, Euclides Roxo (1890-1950), que liderou a proposição de uma mudança radical nos programas de ensino da instituição, aprovada por sua congregação em 1928. A característica mais evidente dessa proposta era a unificação das antigas disciplinas de Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria, que eram ensinadas por docentes distintos e faziam uso de livros diferentes, em uma nova disciplina chamada Matemática.

Durante o governo Getúlio Vargas aconteceu a reforma Francisco Campos (primeiro titular do Ministério da Educação e da Saúde) que consistia em uma série de decretos que se propunham a organizar nacionalmente a educação no país introduzindo de maneira efetiva as ideias modernizadoras nas escolas secundárias brasileiras. A proposta curricular da nova disciplina Matemática na reforma Francisco Campos é bastante detalhada, ultrapassando uma simples lista de conteúdos a serem ensinados na escola secundária. Seu texto se inicia por uma exposição das finalidades do ensino da Matemática:

> O ensino da Matemática tem por fim desenvolver a cultura espiritual do aluno pelo conhecimento dos processos matemáticos, habilitando-o, ao mesmo tempo, à concisão e ao rigor do raciocínio pela exposição clara do pensamento em língua precisa. Além disso, para atender ao interesse imediato da sua utilidade e ao valor educativo dos seus métodos, procurará, não só despertar no aluno a capacidade de resolver e agir com presteza e atenção, como ainda favorecer-lhe o desenvolvimento da capacidade de compreensão e de análise das relações quantitativas e espaciais, necessárias às aplicações nos diversos domínios da vida prática e à interpretação

> exata e profunda do mundo objetivo. *(Novíssimo Programa do Ensino Secundário – nos termos do art.10, do decreto nº19.890 de 18 de abril de 1931. Rio de Janeiro, 1931)*

A necessidade de se priorizar, no ensino, o grau de desenvolvimento mental do aluno, bem como seus interesses era enfatizada nessa proposta, insistindo na realização constante de atividades para que o estudante fosse um descobridor e não um receptor passivo de conhecimentos. Por isso, era recomendado a renúncia à prática da memorização sem raciocínio, ao enunciado abusivo de definições e regras e ao estudo sistemático das demonstrações já feitas.

Além disso, salientava-se que o ensino deveria partir da intuição; para a geometria, em particular, o estudo das demonstrações formais precisava ser precedido de atividades de experimentação e construção. A proposta atribuía papel importantíssimo ao conceito de função, como “ideia central do ensino”, apresentada primeiro intuitivamente, e desenvolvida gradativamente ao longo das séries. Na quinta série, prescrevia-se o ensino das noções básicas do cálculo diferencial e integral – limite, derivada e integral.

Com relação a estruturação do ensino secundário introduzida pela reforma: após o primário, vinha o curso fundamental, de cinco anos, com a presença da Matemática em todos eles, e posteriormente seguia-se o curso complementar, com duração de dois anos, já dirigido para o ensino superior almejado pelo aluno. No curso voltado para as carreiras de medicina, farmácia e odontologia, a Matemática comparecia em um dos dois anos; para os que desejassem ser engenheiros, químicos ou arquitetos, a Matemática estava presente em todo o curso.

A educação secundária com o caráter de formação e não mais somente de preparação para acesso aos cursos superiores é uma característica central da proposta da reforma Francisco Campos. Essa caracterização do ensino secundário, como uma etapa de formação, está explícita, na exposição de motivos do ministro Francisco Campos ao presidente Getúlio Vargas, em abril de 1931, como se pode notar no trecho a seguir:

> A finalidade do ensino secundário é, de fato, muito mais ampla do que a que se costuma lhe atribuir. Via de regra, o ensino secundário tem sido considerado entre nós como um simples instrumento de preparação para os candidatos ao ensino superior, desprezando-se, assim, a sua função eminentemente educativa que consiste, precisamente, no desenvolvimento das faculdades de apreciação, de juízo e de critério, essenciais a todos os ramos da atividade humana, e, particularmente, no treino da inteligência em colocar os problemas nos seus termos exatos e procurar as

> suas soluções mais adequadas. *(Novíssimo Programa do Ensino Secundário – nos termos do art.10, do decreto nº19.890 de 18 de abril de 1931. Rio de Janeiro, 1931)*

Como tudo que é novo e revolucionário atrai críticas, a proposta de Matemática da reforma Francisco Campos foi atacada de muitas maneiras. Maria Ângela Miorim (2001) destaca alguns dos problemas ocorridos: a dificuldade de adaptação dos professores da época, agravada, num primeiro momento, pela falta de livros didáticos de acordo com as novas diretrizes. Nesse contexto os professores de Matemática que eram favoráveis ao ensino tradicional, no qual a Matemática era concebida, principalmente, como disciplina mental, consideraram que a nova proposta, que começou a ter repercussões em alguns livros didáticos de caráter mais intuitivo, rebaixava o ensino. Havia também os defensores do ensino das humanidades clássicas, os quais consideravam um excesso de conteúdos matemáticos no programa da reforma, bem como a fusão das disciplinas matemáticas em uma única disciplina.

Os anos iniciais da República foram muito importantes para a educação superior, pois marca a criação de várias faculdades no país. A responsabilidade do ensino superior pertencia ao governo federal e a primeira instituição de ensino superior brasileira com o nome de universidade foi a Universidade de Manaus, surgida em 1909, no auge da exploração da borracha, que teve existência até 1926. Em São Paulo (1911) e no Paraná (1912), criaram-se outras universidades, que também duraram pouco. A primeira universidade duradoura foi a do Rio de Janeiro, estabelecida em 1920, pela reunião das faculdades de Medicina, Direito e Engenharia, já existentes na época. Nesse mesmo estado, em 1935, tem destaque também a criação da Universidade do Distrito Federal, extinta em 1939 para dar lugar à Universidade do Brasil.

A exemplo do que aconteceu com a universidade do Rio de Janeiro, foi criada em Minas Gerais, em 1965, a Universidade Federal de Minas Gerais. Vale ressaltar também que a formação específica de professores do ensino secundário em nível superior só teve início em 1934, na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo (USP). Em 1939, criou-se a Faculdade Nacional de Filosofia, na qual, bacharelando-se primeiramente em Matemática e, posteriormente, cursando Didática, o estudante poderia obter o diploma de licenciado em Matemática.

De 1942 a 1946, a educação brasileira passou por novas reformas, pela via de uma série de decretos-lei que criaram o Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial – Senai – e o Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial – Senac – e normatizaram os ensinos industrial, comercial, primário, secundário, normal e agrícola. O conjunto de decretos ficou conhecido como a reforma Gustavo Capanema.

A Lei Orgânica do Ensino Secundário, em 1942, organizou o ensino secundário em dois ciclos: o ginasial (4 anos) e o colegial (3 anos), nas modalidades clássico e científico. Criou-se o ramo secundário técnico-profissional, subdividido em industrial, comercial e ômega, além do normal, para formar professores para a escola primária.

> Esse conjunto de reformas tinha caráter centralista e dualista no sentido de separar o ensino secundário, destinado às elites, e o ensino profissional, para o povo, pois somente os egressos do ensino secundário tinham o direito de acesso aos cursos superiores. (SAVIANI, 2007, *apud* GOMES 2012, p. 21)

A reforma Gustavo Capanema, diferentemente do que ocorreu com a reforma Francisco Campos, não detalhou os programas para as disciplinas do curso ginasial do ensino secundário, para isso, foi preciso criar uma portaria ministerial, datada de 17 de julho de 1942, para subsidiar a Lei Orgânica do Ensino Secundário. Dessa maneira, essa portaria apresentava listas de conteúdos, sem quaisquer indicações metodológicas para a abordagem dos diversos assuntos.

De acordo com Valente (2004), o programa de Matemática das duas primeiras séries, desse período, se subdividiam em dois temas: Geometria Intuitiva e Aritmética Prática, enquanto os das duas últimas séries continham, separadamente, os itens relativos à Álgebra e à Geometria Dedutiva. Após a reforma Campos, foram publicadas várias coleções de livros didáticos em cinco volumes que visavam atender ao disposto em sua proposta para o curso fundamental. Com a reforma Capanema, autores e editoras reorganizaram essas coleções em quatro volumes e as colocaram no mercado para atender a nova estruturação do ensino secundário.

A partir da década de 1950, as disciplinas escolares, e entre elas a Matemática, começaram a se modificar. Uma transformação das condições econômica, social e cultural do Brasil e das possibilidades de acesso à escola começaram a requerer alterações no funcionamento e nas finalidades dessa instituição, o que repercutiu no ensino das diversas disciplinas.

Modificou-se o público de estudantes, com a inserção, na educação escolar, de alunos provenientes das camadas populares, que vinham reivindicando há muito tempo o direito à escolarização. Tratava-se de uma democratização da escola, que passava a receber também os filhos da classe trabalhadora, fazendo crescer enormemente o número de alunos no primário e no secundário. A necessidade de professores para atender a esse público expandido levou à diminuição das exigências na seleção desses profissionais. Assinalava-se, nesse momento, portanto, uma mudança significativa das condições escolares e pedagógicas, das necessidades e exigências culturais.

Entre tantos impasses foi rompido o isolamento científico em que viviam os poucos matemáticos brasileiros, pois em 1945 foi fundada a Sociedade Matemática de São Paulo e, em junho de 1946, saiu o primeiro número do Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo. Em 1952, foi criado o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) pelo Conselho Nacional de Pesquisas (CNPq).

### *2.3.1 O Movimento da Matemática Moderna no Brasil (1950 - 1970)*

Na década de 50, havia uma certa inquietação e insatisfação com relação ao ensino da Matemática. O ensino tradicional recebia muitas críticas mas podiam ser notadas, em alguns estados brasileiros, iniciativas isoladas que tentavam, senão mudar, pelo menos amenizar a situação do ensino e da formação dos professores.

Nesse contexto, começava-se a discutir questões relativas ao ensino de Matemática, devido especialmente à realização dos primeiros Congressos Nacionais do Ensino da Matemática. Neles começaram a ser debatidas novas direções para o ensino da Matemática no que diz respeito à metodologia, treinamento e formação de professores, currículos, material didático, etc. Além disso, os professores tiveram espaço para divulgar suas experiências e para propor novas atividades que pudessem ajudar o aluno a entender melhor a Matemática, o que contribuiria também para o trabalho do professor. Foram realizados cinco congressos entre os anos de 1955 e 1966.

O **I Congresso Nacional do Ensino de Matemática no Curso Secundário** foi realizado na cidade de Salvador, na Bahia, em setembro de 1955. O Congresso tinha como objetivo tratar de assuntos mais diretamente ligados ao ensino da Matemática como os programas, o livro de classe e as “tendências modernas do ensino”, além dos problemas ligados ao aperfeiçoamento dos professores de matemática. Nenhuma menção à Matemática Moderna foi feita ou discutida no congresso. No Congresso houve muitos debates de quais deveriam ser os verdadeiros objetivos da escola secundária e do ensino de Matemática, refletindo a insatisfação dos educadores com o ensino tradicional e convocando os professores a refletirem sobre sua prática docente. O Congresso concluiu pela aprovação do aumento da carga horária semanal de matemática no curso secundário – para quatro horas no curso ginasial e para cinco horas no curso colegial – e pela aprovação de um programa de ensino, ainda baseado em reformas anteriores. Foi recomendado que o professor evitasse o ensino "excessivamente abstrato teórico, apresentando uma vista geral da matéria, mostrando a conexão que existe entre a Matemática e as outras ciências" e que o professor de matemática fizesse uso frequente do "método heurístico, pelo qual o mestre é um guia e o aluno é um descobridor." Outra recomendação feita foi com respeito ao material didático, que o livro de classe devesse ser elaborado de modo a se tornar a "chave da ciência para a vida" e devesse ficar "a cavaleiro dos programas e reformas" (Congresso, 1957)

O **II Congresso Nacional de Ensino de Matemática** foi realizado em Porto Alegre, Rio Grande do Sul, em 1957. Este, não mais destinado exclusivamente ao ensino secundário, apresentou palestras referentes ao ensino primário e à formação de professores. O Congresso se propôs a estudar questões relacionadas à aprendizagem da matemática nos diferentes níveis de ensino; difundir as bases para a elaboração de programas "levando em conta aspectos científicos e psicológicos" buscando fixar normas para "uma boa articulação entre os programas dos diversos níveis de ensino", além de estudar também a influência da Matemática nas demais disciplinas. (Congresso, 1959a, *apud* Soares, 2001, p.71)

O tema "Matemática Moderna" foi abordado de maneira discreta por alguns matemáticos e o professor Ubiratan D'Ambrósio fez fortes críticas ao ensino tradicional:

> Os valores formativo e informativo da matemática estão relegados a plano inferior, principalmente o primeiro. A repetição de fórmulas e de processos mecânicos de cálculo tem efeito entorpecente no raciocínio do aluno. Levam-no à condição de máquina, sendo deturpado o caráter formativo da matemática, tão exaltado nas instruções ministeriais. Além do mais, grande parte da Matemática ensinada no curso secundário é absolutamente inútil, quer pela sua pouca aplicação, quer pelo efeito negativo que produz no aluno, criando verdadeira aversão à matéria. (…) Em suma, o aluno deixa o curso secundário sem ter a ideia do que é, para que serve, qual a força da Matemática. Ao contrário, vê a Matemática como uma ciência estéril, maçante e principalmente, inútil. (*apud* Congresso, 1959a, p.373-4)

O **III Congresso Nacional de Ensino de Matemática**, realizado na cidade do Rio de Janeiro, em 1959, contou com a participação de cerca de 500 professores e nesse evento se verificaram as primeiras manifestações sobre o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Este Congresso, ao contrário dos dois anteriores, foi patrocinado pela CADES (Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário), teve como objetivo básico estudar os problemas relativos ao ensino secundário e também do ensino primário, comercial, industrial e normal, além de problemas de ordem geral relativos ao ensino de matemática.

Conforme Miorim e Valente (1998), foram formados em vários estados, grupos cujo objetivo era preparar os professores para atuar em sintonia com as novas diretrizes propostas. Desses grupos, um dos mais importantes foi o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática – GEEM -, fundado em São Paulo, em 1961, sob a liderança de Osvaldo Sangiorgi, que havia realizado, em meados do ano anterior, um estágio nos Estado Unidos, na Universidade do Kansas. Osvaldo Sangiorgi tomou a iniciativa de propor a realização de um curso de aperfeiçoamento para professores. O GEEM foi responsável pela introdução da Matemática Moderna no Brasil. Outros grupos de destaque foram o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática de Porto Alegre - GEEMPA; o Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática – NEDEM - , de Curitiba; e o grupo da Bahia, coordenado pelo professor Omar Catunda.

Foram discutidas, ainda, no Congresso questões quanto à formação e aperfeiçoamento dos professores do ensino secundário. Além disso, a estrutura encontrada nas Faculdades de Filosofia, sofreu fortes críticas, pois não correspondia às necessidades brasileiras e não estava adaptada à realidade social do país.

> Dessa maneira, o curso universitário de Matemática foi dividido em duas partes, de três e de dois anos, onde a primeira parte consistiria em cadeiras obrigatórias e a segunda em cursos optativos destinados à formação do professor. Outra decisão importante do Congresso foi a de propor ao Ministério da Educação e Cultura que não fosse mais concedido o registro de professor de Matemática aos licenciados de outros cursos como Pedagogia, Ciências Sociais, História Natural e Química. (Congresso, 1959b, *apud* Soares, 2001, p.75)

Outras propostas interessantes foram apresentadas pelos professores Elon Lages Lima e Omar Catunda que sugeriram a criação de uma revista de Matemática para o Ensino Médio; e pelo professor Waldecyr C. de Araújo Pereira que falou sobre “A televisão e o ensino de Matemática” e “Os números em cores e o ensino da Aritmética”, referindo-se a suas experiências na Bélgica com C. Cattegno e o professor Emile-Georges Cuisenare, idealizador da Escala Cuisenare, material didático colorido que auxilia crianças na construção de conceitos básicos de matemática.

Em 1962 foi realizado o **IV Congresso Nacional de Ensino de Matemática**, realizado em Belém do Pará. Gomes (2012) afirma que durante esse Congresso, o GEEM apresentou algumas experiências realizadas com a Matemática Moderna, bem como um programa para a Matemática da escola secundária, baseado nas ideias modernizadoras.

> Era a primeira vez que a questão de introduzir a Matemática Moderna no ensino secundário, estava sendo tratada de forma mais objetiva. Isto se deu em grande parte pela presença de congressistas ligados ao GEEM. Foram realizadas por membros do GEEM sete aulas-demonstração enfocando o tratamento moderno de certos tópicos da Matemática na escola secundária, duas apresentações do desenvolvimento moderno de assuntos de Matemática e três palestras relativas à introdução da Matemática Moderna na escola secundária. (SANGIORGI, 1962, *apud* SOARES, 2001, p. 118)

Sangiorgi (1962, *apud* Soares, 2001) resume o problema da introdução da Matemática Moderna ressaltando que este "foi tratado com simples aceno traduzido em algumas resoluções aprovadas em plenário" durante os dois primeiros Congressos. Já no terceiro Congresso, "foram aprovadas decisões no sentido de serem experimentadas estas novas áreas da Matemática e os resultados apresentados no congresso seguinte."

O **V Congresso Nacional de Ensino de Matemática** teve como temática a *Matemática Moderna na escola secundária, articulações com o ensino primário e com o ensino universitário*. Foi realizado em São José dos Campos (SP), no ano de 1966.

Segundo Miorim (1998), o V Congresso Nacional de Ensino de Matemática teve como foco principal a implantação da Matemática Moderna no Brasil, e contou com a presença de defensores da reforma modernista em outros países, como os professores Marshall Stone, dos Estados Unidos, e George Papy, da Bélgica, entre outros.

As sessões de estudo foram distribuídas em três estágios: o primeiro discutiu problemas da Teoria dos Conjuntos e de Lógica Matemática aplicada ao ensino; o segundo, para os já iniciados em Matemática Moderna, tratou de tópicos de Álgebra Moderna e Espaços Vetoriais; e o terceiro, de problemas de tratamento moderno da Geometria e Lógica Matemática.

O Movimento da Matemática Moderna tinha como bases, além da introdução, nos currículos, de uma Matemática produzida mais recentemente, defendia-se o realce na precisão da linguagem matemática; a integração dos campos da aritmética, da álgebra e da geometria no ensino, mediante a inserção de alguns elementos unificadores, tais como a linguagem dos conjuntos, as estruturas algébricas e o estudo das relações e funções; a necessidade de conferir mais importância aos aspectos lógicos e estruturais da Matemática, em oposição às características pragmáticas que, naquele momento, predominavam no ensino, refletindo-se na apresentação de regras sem justificativa e na mecanização dos procedimentos; destaque para as propriedades das operações em lugar da ênfase nas habilidades computacionais.

Nesse contexto, observa-se que a Matemática havia se tornado mais precisa e fundamentada logicamente, assim, buscava-se que os conhecimentos veiculados na escola refletissem essa característica. Em contrapartida, para a geometria, os defensores do movimento modernista propunham a substituição da abordagem clássica inspirada nos Elementos, de Euclides, que dominava as escolhas dos autores e professores há séculos, pelo enfoque das transformações geométricas, com o estudo dos conceitos de vetor, espaço vetorial e transformação linear.

Além dos congressos, outras atividades de alcance mais restrito eram realizadas em vários estados do Brasil. Essas iniciativas refletiam a preocupação dos professores em tornar a Matemática mais dinâmica e mais fácil para os alunos.

Gomes (2012) relata o depoimento de Magda Soares com relação a situação geral da realidade da educação brasileira.

> a necessidade de um recrutamento mais amplo e menos seletivo de professores em decorrência do crescimento da necessidade desses profissionais, já comentada anteriormente, levou a uma intensificação do processo de depreciação da função docente, que se manifestou no rebaixamento salarial e na maior precariedade das condições de trabalho. Nesse momento, os professores precisam de recursos que suavizem as atribuições docente, e uma das estratégias para isso é transferir ao livro didático a tarefa de preparar aulas e exercícios. Observa-se, então, um aumento da importância dos livros didáticos no ensino de todas as disciplinas escolares. (GOMES, 2012, p. 75)

Em nenhum outro momento o ensino da Matemática foi tão discutido, divulgado e comentado como naquele período. “Os jornais noticiavam, os professores faziam cursos, os livros didáticos multiplicavam-se, os pais assustavam-se e os alunos 'aprendiam' a Matemática moderna”. (MIORIM, 1998, *apud* SOARES, 2001)

Muitos livros didáticos de matemática foram publicados a partir de 1963, tendo um importante papel na disseminação do ideário modernista. Esses livros fundamentados na organização estrutural dos conjuntos numéricos, na maior parte das vezes se iniciavam pela abordagem dos conjuntos, em que se evidenciava fortemente a presença da linguagem simbólica. Somente depois se focalizavam os conjuntos numéricos na seguinte ordem: naturais, inteiros, racionais e reais, enfatizando a relação de inclusão de cada um deles naquele que o seguia. Na abordagem dos conjuntos numéricos, insistia-se nas propriedades estruturais das operações neles definidas, destacando-se, para a adição e a multiplicação, a associatividade, a comutatividade, os elementos neutro e inverso, a distributividade da multiplicação em relação à adição.

Miorim (2005) aponta as dificuldades dos autores de livros didáticos para chegar a uma abordagem em conformidade com o ideário modernista. A autora salienta que tais dificuldades parecem ter sido ainda maiores no tocante à geometria, pois os enfoques adotados nas obras não se distanciaram muito do que era feito anteriormente. Consequentemente, houve realizações distintas, e cada autor ou grupo de autores trabalhou de forma diferenciada os conteúdos geométricos, embora se possa perceber, nas apresentações desses conteúdos em diversos livros, um aspecto comum: a utilização da linguagem dos conjuntos.

Soares (2001) em sua dissertação de mestrado descreve as mudanças geradas pelo Movimento da Matemática Moderna no Brasil.

> Considerando que as alterações divulgadas pelo Movimento da Matemática Moderna foram essencialmente com relação ao conteúdo, podemos dizer que realmente quase nada mudou no ensino além da introdução da Teoria dos Conjuntos como um capítulo inicial dos livros didáticos. A abordagem geral da Matemática pouco foi alterada. As únicas propostas realmente inovadoras foram aquelas desenvolvidas pelos grupos de estudos da época, e estas propostas praticamente não chegaram às salas de aula e não foram incorporadas aos livros didáticos mais populares. Outras experiências bem sucedidas se deveram ao entusiasmo e esforço individual de algumas pessoas. (SOARES, 2001, p. 120)

A geometria escolar, tendo assumido abordagens muito variadas nos livros, foi, de acordo com Maria Ângela Miorim, traduzida pelos autores em suas obras segundo suas próprias experiências pedagógicas e leituras das propostas modernistas. Pode se dizer, porém, que resultou dos modos de apropriação das ideias do movimento, em parte, a descaracterização da tradicional abordagem axiomático-dedutiva da geometria em favor da presença de uma abordagem eclética, na qual se tornou patente o abrandamento da exigência das demonstrações.

> Um dos efeitos da disseminação das ideias do Movimento da Matemática Moderna, de acordo com vários autores, foi a diminuição da presença dos conteúdos geométricos nas práticas pedagógicas realizadas nas escolas, tanto pelo papel de relevo adquirido pela álgebra quanto pela falta de subsídios dos professores para efetivar as propostas modernistas para a geometria. (GOMES, 2012, p.25)

Aqui se observa um descuido quanto ao trato do ensino da geometria nas escolas, fato que repercute na formação de futuros professores, perpetuando assim, a deficiência nessa área da matemática até os dias atuais. O ensino foi fortemente afetado pela realidade política que acontecia naquele período. Regina Pavanello (1993) sublinha que

> "em decorrência da ampliação da rede de escolas públicas e das políticas educacionais daquele momento em que o país era governado por uma ditadura militar, a partir de 1968 criaram-se cursos de natureza aligeirada para formar professores para atender as demandas urgentes que se colocavam. Nesses cursos, não havia investimento suficiente em relação à preparação para o ensino da geometria, e como consequência da penetração do ideário modernista e desse contexto, configurou-se, no Brasil, aquilo que se passou a denominar 'o abandono do ensino da geometria'." (PAVANELLO, 1993, *apud* GOMES, 2012, p. 25)

A Lei de Diretrizes e Bases para o Ensino de 1º e 2º graus (LDB) de 1971, dividiu o ensino em dois níveis. O primeiro grau, com duração de oito anos, unia os antigos primário e ginásio sem a necessidade de que o estudante se submetesse, como anteriormente, ao chamado Exame de Admissão que o habilitava a prosseguir os estudos depois dos quatro primeiros anos de escolarização. O 2º grau foi proposto como curso de preparação profissional, buscando desviar parte da demanda pelo ensino superior, que não oferecia vagas suficientes para todos os concluintes da escola secundária. O que se verificou, em parte devido à expansão da rede escolar desacompanhada do oferecimento de uma formação docente de larga escala, num contexto em que a álgebra assumiu papel preponderante, foi quase a total ausência do ensino da geometria nas escolas públicas nas décadas de 1970 e 1980.

O Movimento da Matemática Moderna durou mais de uma década e teve muitas de suas ideias deformadas ou não cumpridas, e depois de algum tempo era fato que o ensino de matemática não havia melhorado. Já no início da década de 1970, pessoas de grande credibilidade entre os matemáticos, como René Thom (França) e Morris Kline (EUA) traçavam muitas críticas ao movimento ao afirmarem, por exemplo, que a matemática não deveria ser desenvolvida dedutivamente, mas construtivamente. A expressão construtiva significa que o estudante deve fazer a construção de teoremas e das provas, permitido pensar intuitivamente ou mesmo encorajado a pensar, o estudante estaria assim criando Matemática. Critica-se a ênfase na Matemática pela Matemática, em seu formalismo e nos aspectos estruturais, assim como a preocupação excessiva com a linguagem e os símbolos. No Brasil, professores como Carlos B. Lyra e Omar Catunda previam o fracasso dessa forma de ensino centralizada na linguagem matemática. Assim, as críticas que acompanharam o Movimento desde o início tomaram grandes proporções a tal ponto, que até mesmo quem era adepto, passou a reconhecer que o Movimento não trouxe tantos benefícios como se esperava.

Um matemático francês, em 1981, constatou alguns dos problemas causados pela Matemática Moderna ocorridos, não só em seu país, mas em todo o mundo:

> Os excessos do 'bourbakismo'[1] causaram alguns estragos entre os matemáticos, como aliás sempre acontece em casos semelhantes, mas de modo relativamente limitado e controlado. Infelizmente, não se deu, em absoluto, o mesmo no ensino secundário e depois no elementar. Gradativamente se foi introduzindo "Matemática Moderna" nos liceus, colégios e escolas primárias, e, por vezes, até no maternal. (…) De início as famílias se surpreenderam, depois se acostumaram. As crianças bem que estranhavam as definições claras, gerais, abstratas, bem concatenadas, diferentes do pensamento quotidiano imediato. Professores, pais, crianças, sentiam um certo entusiasmo ao terem a impressão de participar da compreensão coletiva da ciência moderna. (…) Mas infelizmente, havia uma ilusão enorme. Professores, pais, crianças, não aprendiam a "matemática moderna", mas somente a linguagem de base elementar que sustenta uma matemática moderna, extraordinariamente vasta, global, diversificada, potente, cujas definições dadas nos liceus e colégios (do mundo inteiro), não eram mais que o ABC. Um imenso proselitismo se apropriou de tudo, no mundo inteiro, aí a pouco substituiu toda a riqueza da Matemática antiga dos liceus (…) e outras ciências foram substituídas por uma pletora de axiomas e definições. Incompreensíveis para uma grande parte dos alunos, e muito pobre de resultados. (SCHWARTZ, 1981, *apud* SOARES, 2001, p.112)

O americano Morris Kline, que era professor de matemática desde o final da década de 50, ou seja, se mostrou contra o Movimento desde o seu início. Com a publicação do livro *Why Jonny can't add: The failure of the New Math*, em 1973, Kline apresenta um estudo crítico sobre as mudanças advindas da Matemática Moderna, motivo de divergências de opiniões entre matemáticos profissionais e professores, quanto aos méritos das inovações que estavam acontecendo nas escolas elementares e secundárias. São argumentos citados por Kline em seu livro:

---

1'Bourbakismo' faz referência a Nícolas Bourbaki, fundador de um grupo de matemáticos franceses que, nos anos 30 do século XX, propuseram-se a rever os fundamentos da matemática com uma demanda muito maior de rigor que era tão abundante nesta ciência.

a) a nova matemática dá muita ênfase a abordagem dedutiva;

b) a nova matemática faz uso, pretensiosamente, de grande quantidade de terminologia e simbolismo;

c) o novo conteúdo defendido pelos modernistas é inapropriado para os estudantes;

d) ênfase excessiva no ensino da Teoria dos Conjuntos;

e) o ensino das abstrações, como as estruturas, é prematuro e inadequado;

f) isolamento da Realidade.

É importante ressaltar que o Movimento da Matemática Moderna no Brasil teve um ritmo bem diferente do ritmo de outros países. Antes do lançamento de seu livro, Kline já escrevia artigos para revistas alertando sobre os perigos de mudanças no ensino de matemática. No Brasil, nesse mesmo período, aconteciam os primeiros Congressos Nacionais de Ensino de Matemática, onde a Matemática Moderna era praticamente desconhecida pelo povo brasileiro. A publicação do livro de Kline, no Brasil, com o título de *O Fracasso da Matemática Moderna* se deu com 3 anos de atraso.

Já era notado que o Movimento da Matemática Moderna não estava tendo êxito pois o próprio professor Osvaldo Sangiorgi, um dos que mais defendeu as ideias da Matemática Moderna no Brasil, apontou quais foram os principais efeitos da Matemática Moderna no ensino, em um artigo publicado pelo jornal "O Estado de São Paulo" no ano de 1975.

> 1 – Abandono paulatino do salutar hábito de calcular (não sabendo mais a "tabuada" em plena 5ª e 6ª séries!) porque as operações sobre os conjuntos (principalmente com os vazios!) prevalecem acima de tudo; acrescenta-se ainda o exclusivo e prematuro uso das maquininhas de calcular, que se tornaram populares do mesmo modo que brinquedos eletrônicos.
> 2 – Deixa-se de aprender frações ordinárias e sistema métrico decimal – de grande importância para toda a vida – para se aprender, na maioria das vezes incorretamente, a teoria dos conjuntos, que é extremamente abstrata para a idade que se encontra o aluno.
> 3 – Não se sabe mais calcular áreas de figuras geométricas planas muito menos dos corpos sólidos que nos cercam, em troca da exibição de rico vocabulário de efeito exterior, como por exemplo "transformações geométricas".
> 4 – Não se resolvem mais problemas elementares – da vida quotidiana – por causa da invasão de novos símbolos e de abstrações completamente fora da realidade, como: "O conjunto das partes de um conjunto vazio é um conjunto vazio?", proposto em livro de 5ª série. (SAGIORGI, 1975, *apud* SOARES, 2001, p.116)

O Movimento também sofreu críticas de muitos estados do Brasil. Em uma conferência apresentada no Seminário de Ciências e Matemática no Rio de Janeiro, o professor Manfredo Perdigão do Carmo fez várias considerações sobre o ensino da Matemática em geral criticando severamente o jeito como a Matemática Moderna foi tratada no Brasil afirmando que:

> (…) as distorções das próprias ideias modernistas em mãos inexperientes levaram à atual situação do enino da Matemática Moderna no Brasil, onde se dá ênfase às trivialidades de manejar conjuntos, insiste-se em nuances linguísticas irrelevantes, e estimula-se a mediocridade através de exercícios rebuscados sobre o conjunto vazio. (CARMO, 1974, *apud* SOARES, 2001, p.117)

Muitos matemáticos, professores, políticos e pessoas influentes na educação passaram a se questionar: se o Brasil se envolver em outra reforma educacional é a solução para resolver os problemas que a Matemática Moderna deixou?

Mudanças no ensino deveriam ser realizadas, mas "sem euforias exageradas ou promessas irrealizáveis" (Carmo, 1974, *apud* Soares, 2001). Assim, apesar das duras críticas ao Movimento, o professor Manfredo não defendia a volta ao ensino tradicional, ao contrário dos Estados Unidos, que defendia a volta dos currículos anteriores a reforma.

Os argumentos para se justificar o fracasso do Movimento foram inúmeros. Entre os educadores matemáticos críticos, Soares (2001) faz referência quanto aos termos utilizados por alguns deles, por exemplo, o professor Elon Lages Lima, do IMPA, afirmou que os excessos no uso da teoria dos conjuntos levaram a uma "conjuntovite" e "está sendo prejudicial pelo exagerado desligamento da realidade e por ser excessivamente moderno". Outros educadores justificam o insucesso do Movimento como sendo de natureza social, ou seja, independente dos ideais divulgados o desastre com relação ao ensino permaneceria o mesmo, como é o caso do professor Ubiratan D'Ambrósio,

> O problema não está muito no tipo de coisa que se ensina. Se em vez de ensinar a Matemática Moderna a gente tivesse continuado a ensinar Matemática clássica, talvez o desastre seria o mesmo. O desastre é muito mais de natureza social. (…) O processo de expansão educacional (foi de) uma expansão sem planejamento e sem os meios para acompanhar essa expansão, um processo feito assim meio na base da improvisação. (D'AMBRÓSIO, depoimento oral, *apud* BURIGO, 1989, p. 251)

A professora Beatriz D'Ambrósio encara o Movimento da Matemática Moderna como um projeto gerado em países desenvolvidos e que teria sido posteriormente transferido para os países do Terceiro Mundo, virando "modismo". Entretanto, essa transferência não teria sido feita de forma adequada e nem respeitando as especificidades de cada país. Revela-se uma antiga tradição brasileira de adotar práticas e currículos de outros países como modelos para regerem o sistema educacional do país.

> As consequências (…) em nosso país foram desastrosas, em que pese o fato de que algumas das práticas propostas eram aconselháveis. Acontece que, tradicionalmente, desde nossos dias de colônia, estamos acostumados a seguir a moda que nos ditam os países mais desenvolvidos. E, em geral, imitamos o que é fácil, superficial e frívolo. (LIMA, 1999, *apud* SOARES, 2001, p.118)

No final da década de 1970 e início dos anos 80, a discussão sobre o fracasso da Matemática Moderna no ensino brasileiro e o fim da ditadura militar fizeram parte de um contexto de renovação dos ideais educacionais. Mudanças nas propostas curriculares de alguns estados apresentaram características opostas àquelas predominantes do Movimento que estavam centradas em três grandes temas – números, medida e geometria. Entre essas mudanças se destacaram a preocupação com uma abordagem histórica dos temas, a acentuação na importância da geometria, a ênfase na compreensão dos conceitos, levando-se em conta o desenvolvimento dos alunos, a eliminação do destaque conferido aos conjuntos, à linguagem simbólica e ao rigor e à precisão na linguagem matemática.

Em relação a formação dos professores foram implantados programas de pós-graduação em Matemática nas universidades, desde 1971, e, a partir de 1987, a criação de cursos específicos de pós-graduação em Educação Matemática, em nível de especialização, mestrado e doutorado, em vários estados brasileiros

> As mudanças ocorridas em relação às recomendações para o ensino da Matemática vinculadas à crise do Movimento da Matemática Moderna, à emergência e ao desenvolvimento da área da Educação Matemática, com a realização de um número enorme de pesquisas que contemplam muitas tendências e os mais diversos contextos em que se ensina a Matemática, têm repercutido nas propostas curriculares mais recentes. Entre elas, a de maior relevo é a dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental, de responsabilidade do Ministério da Educação – MEC, publicada em 1997-1998. (GOMES, 2012, p.27)

Com o passar dos anos, surgiram propostas semelhantes para o Ensino Médio, a Educação de Jovens e Adultos e a Educação Indígena, também vinculadas ao MEC. As propostas enfatizam a necessidade de incorporação, nas práticas pedagógicas escolares, das tecnologias da informação e da comunicação, dos jogos e materiais concretos, da história da Matemática, e almeja, sobretudo, que os conhecimentos matemáticos na formação escolar básica tenham realmente significado para os estudantes, ultrapassando a simples preparação para as carreiras profissionais que eventualmente venham a seguir.

Recentemente o Ensino Fundamental sofreu uma pequena mudança quando da sua ampliação de oito para nove anos[2], com a inclusão das crianças de seis anos nesse nível. Essa modificação traz novas demandas à formação de professores e à produção de materiais didáticos, no contexto da alfabetização, proposta para ser iniciada mais cedo.

A educação está sempre entrelaçada às demandas e características da sociedade que a sustenta, e o ensino de Matemática faz parte dessa educação. Em cada momento histórico, a Matemática, como qualquer outra disciplina escolar, vai se moldando devido a fatores externos – as condições sociais, políticas, culturais e econômicas que compõem a escola e o ensino – e fatores internos – àqueles referentes à natureza dos conhecimentos de uma área específica. Esses fatores têm se constituído, cada vez mais, não apenas em relação aos conteúdos específicos, já que conhecimentos sobre a natureza dos processos de ensino e aprendizagem e a formação de profissionais da área da Educação Matemática têm repercutido com força nas propostas e recursos curriculares e didático-pedagógicos.

A maior necessidade da atualidade brasileira para a melhoria do ensino da Matemática é a formação de professores para atender a uma enorme e diversa população. Por isso, se têm ampliado consideravelmente, nos últimos anos, os cursos de preparação de docentes, na graduação e na pós-graduação. Além de programas do governo federal que auxiliam no custeio de despesas referentes a esses cursos.

2 Seriação após a Lei nº 11274 de 06/02/2006 que inclui a Alfabetização como 1º Ano no Ensino Fundamental passando este a ser constituído de nove anos escolares. Mudança de nomenclatura: 1ª série (2º Ano)...8ª série (9º Ano).

# 3 DIFICULDADES NO ENSINO E APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

A Matemática está presente na vida cotidiana de todo cidadão, por vezes de forma explícita e por vezes de forma sutil. Desde o momento em que abrimos os olhos pela manhã e olhamos a hora no despertador, estamos lendo na linguagem matemática, exercitando nossa abstração e utilizando conhecimentos matemáticos que a humanidade levou séculos para construir.

Na sociedade atual, a Matemática é cada vez mais solicitada para descrever, modelar e resolver problemas nas diversas áreas da atividade humana. Seja um médico que interpreta um eletrocardiograma ou um pedreiro que utiliza um método prático para construir ângulos retos, que já era empregado pelos egípcios na época dos faraós, ou até mesmo uma costureira que ao cortar uma peça ou criar um modelo, pratica sua visão espacial e resolve problemas de geometria.

Apesar dessa praticidade, observa-se nos alunos uma aversão em relação à Matemática e isso se dá, entre outros fatores, pela forma como os conteúdos matemáticos são apresentados, geralmente difícil de ser compreendida pelo aluno.

Segundo Guilherme (1983) *apud* Fernandes (2006),

> (...) a Matemática vem sendo ensinada através de uma série de exercícios artificiais e mecânicos. Essa maneira mecanizada de se trabalhar com a Matemática pode ser um dos fatores que contribuem para as representações que hoje se tem a respeito dessa disciplina. Essa abordagem de ensino deixa a impressão de que o objetivo do professor ao ensinar Matemática é apenas o de transmitir os conteúdos, acreditando que, por meios destes, os alunos sejam capazes de compreender a linguagem Matemática e, consequentemente, desenvolver o raciocínio lógico, tornando-se aptos a abstrair, analisar, sintetizar e generalizar.

Os alunos consideram a matemática chata e misteriosa, que assusta e causa pavor, e por consequência, o aluno sente medo da sua dificuldade e vergonha por não aprendê-la. Como resultado de tantos sentimentos ruins proporcionados ao aluno, somado ao bloqueio em não dominar sua linguagem e não ter acesso ao seu conhecimento vem a postura de rejeição e ódio pela matemática.

É papel do educador desmistificar esse discurso que é dado para a Matemática, já que é na escola que esses sentidos se manifestam, prejudicando a relação de ensinar e aprender a disciplina. “Desta forma, a escola é o lugar para que a desconstrução deste sentido de dificuldade se viabilize, pois é preciso desmanchar esta relação que é significativa entre os efeitos deste discurso pré-construído e a aprendizagem.” (Silva, 2005)

## 3.1 Fatores influentes na dificuldade em aprender e ensinar matemática

Elencamos alguns fatores que interferem diretamente na aprendizagem da matemática em consequência corroboram com o conceito preestabelecido de matéria inatingível e compreensível para alguns “alunos privilegiados”.

### *3.1.1 Capacitação inadequada dos professores*

A má formação inicial dos professores de matemática é um fator muito influente, senão determinante, quanto à aprendizagem dessa disciplina.

> Na faculdade, salvo raras exceções, nunca estudou a matéria que vai ensinar pois ela não era considerada de nível universitário. Seu treinamento ali consistiu numa série de cursos com nomes atraentes, como Análise, Topologia, Variável Complexa, etc., nos quais os assuntos foram tratados superficialmente, sem conexões uns com os outros nem com sua futura ocupação. É claro que existem as boas universidades, nas quais as disciplinas são ensinadas com mais seriedade. Mas nelas são raros os alunos de Licenciatura, que vêm a formar uma fração insignificante do magistério nacional. (LIMA, 2007, p.165)

O desconhecimento de certos tópicos tem levado professores a não ensiná-los, por exemplo, Geometria e Trigonometria no Ensino Médio. A falta de visão sólida da matemática e de suas aplicações conduz a estranhas tentativas de contextualização de situações que para tanto não se prestam. Em contrapartida, tópicos que não admitem contextualização, como fatoração de polinômios, estão sendo omitidos do ensino.

> O desconhecimento, por parte do professor, de métodos e processos para acelerar a aprendizagem e eliminar bloqueios, acaba gerando medo, pânico e frustrações nos alunos. A falta de preparação dos professores se deve, também, ao pouco tempo que dispõem para dedicar-se aos seus alunos e aos cursos de aprimoramento, uma vez que trabalham, em média, de 8 a 10 horas por dia. (CAMARGO, 2003, *apud* SILVA, 2005, p.5)

Não basta ao professor ser um eminente conhecedor da matéria pois aprender matemática requer atitudes especiais e muita disciplina. O professor precisa reunir habilidades para motivar o aluno, ensinando-o a pensar e a se tornar autônomo, para isso é necessário que ele seja altamente criativo e cooperador.

> A falta de preparo dos professores pode gerar dificuldades relacionadas às adoções de posturas teórico-metodológicas ou insuficiente, seja porque a organização desses não está bem sequenciada, ou não se proporcionam elementos de motivação suficientes; seja porque os conteúdos não se ajustam às necessidades e ao nível de desenvolvimento do aluno, ou não estão adequados ao nível de abstração, ou não se treinam as habilidades prévias; seja porque a metodologia é muito pouco motivadora e muito pouco eficaz. (SANCHES, 2004, *apud* SILVA, 2005, p.5)

É válido ressaltar que o professor recém-formado, ao iniciar sua vida profissional, terá como base de orientação para seu trabalho os livros-textos disponíveis no mercado e adotados pelas escolas onde vai lecionar. Livros estes que "apresentam deficiências no que diz respeito à objetividade, à aplicações, à oferta de problemas atraentes e ao uso do raciocínio dedutivo" (Lima, 2007)[3].O autor ainda acrescenta para os livros destinados ao Ensino Médio que estes continham sérios erros matemáticos e apresenta uma possível justificativa do porquê desses livros (com maior números de erros) serem os mais vendidos do país.

> "Posso mesmo afirmar que nenhum dos livros que examinei (e foram muitos) estava inteiramente isento de afirmações falsas ou argumentos defeituosos. […] A maioria porém trazia definições, raciocínios, métodos de resolução de problemas e respostas inteiramente inadequados e até desprovidos de significado.[...] aqueles livros são simples, não exigem muito raciocínio, não contém problemas difíceis e trazem a solução completa de todas as questões propostas, todas rotineiras. Esta possível razão do seu êxito comercial é também um indicador do nível médio dos professores do país, que preferem esses textos por não lhes causarem o embaraço de conterem problemas que não sabem resolver ou argumentos que não sabem explicar." (LIMA, 2007, p.70)

Considerando o professor com uma má formação, ele será incapaz de identificar e escolher o melhor livro a ser trabalhado, pautando-se apenas na parte gráfica, ou seja, em ilustrações, *design*, material utilizado para fabricação etc.

> Evidentemente, apesar de todas essas deficiências, há algumas notáveis pessoas que por seu esforço, sua persistência, seu talento e sua grande vocação conseguem superar os obstáculos e se tornarem grandes professores. Mas é bem maior, e muito grande, o número daqueles que necessitam de reciclagem para melhorar seus conhecimentos e desempenhar com mais eficiência a importante tarefa de formar os nossos jovens. (LIMA, 2007, p.157)

3 O autor se refere ao livros didáticos de 5ª a 8ª série (Atual: 6º a 9º Ano).

### *3.1.2 Metodologia tradicional com ênfase excessiva ao cálculo*

Muitos professores resumem o ensino de matemática em cálculo, onde o aluno não pode avançar se não souber todo tipo de cálculo.

> A insistência exagerada no cálculo, como se mais nada contasse, impede muitos alunos de adquirirem outras competências. O pior é que, apesar da ênfase no cálculo, muitos alunos continuam a mostrar dificuldade neste campo. A solução não é erradicar o cálculo que tem, naturalmente, o seu papel. O mal está em reduzir toda a aprendizagem da Matemática à aquisição de técnicas de cálculo. (SILVA, 2005, p. 6)

O professor de matemática, Elon Lages Lima, afirma que o ensino de matemática deve abranger três componentes fundamentais, chamadas de Conceituação, Manipulação e Aplicações. Com essa metodologia de ensino, os alunos têm a oportunidade de se familiarizarem gradativamente com o método matemático, dotando-os de habilidades para lidar com desenvoltura com os mecanismos do cálculo e dar-lhes condições para mais tarde saberem utilizar seus conhecimentos em situações da vida real.

> A conceituação compreende a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, o enunciado preciso das proposições, a prática do raciocínio dedutivo, a nítida conscientização de que conclusões sempre são provenientes de hipóteses [...] A manipulação envolve a habilidade e a destreza no manuseio de equações, fórmulas e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permite ao usuário da Matemática concentrar sua atenção consciente nos pontos realmente cruciais, poupando-lhe da perda de tempo e energia com detalhes secundários. As aplicações são empregos das noções e teorias da Matemática para obter resultados, conclusões e previsões em situações que vão desde problemas triviais do dia a dia a questões mais sutis que surgem noutras áreas, quer científicas, quer tecnológicas, quer mesmo sociais. (LIMA, 2007, p.140-141)

“A maior parte dos livros-textos brasileiros utiliza essa estrutura que se reflete nas aulas dadas pelos professores.” (Carvalho, 2005) Porém a adoção dessa metodologia, segundo o referido autor, “não tem obtido resultados satisfatórios.” E ele cita algumas razões para esse fato: o conteúdo no material teórico resume-se a uma simples lista de fatos e fórmulas, na maioria das vezes, sem nenhuma justificativa, levando o aluno a memorizá-las através de exercícios repetitivos; as aplicações do conteúdo, na maior parte das vezes, são distorcidas da realidade dos alunos. O resultado é uma matemática em que os alunos pouco raciocinam pois o que eles mais fazem é aplicar mecanicamente determinados procedimentos rotineiros.

Lima (2007) complementa sua posição afirmando que o equilíbrio do processo de aprendizagem e o desenvolvimento de virtudes nos alunos, tais como, o interesse, a capacidade de aplicar técnicas (discernimento, clareza de ideias e o hábito de pensar e agir ordenadamente) dependem da dosagem adequada de cada uma das três componentes supracitadas.

> Elas devem ser pensadas como um tripé de sustentação: as três são suficientes para assegurar a harmonia do curso e cada uma delas é necessária para o seu bom êxito. […] O professor dedicado deve procurar organizar seu curso de modo a obter o equilíbrio entre as três componentes fundamentais. Assim procedendo, terá dado um largo passo na direção do êxito na sua missão de educar. (LIMA, 2007, p.140 e 145)

Na realidade, a ênfase da Matemática escolar não está na aquisição de conhecimentos isolados no domínio de regras e técnicas, mas sim na utilização da Matemática para resolver problemas. “[...] essa arte intrigante que, por meio de desafios, desenvolve a criatividade, nutre a autoestima, estimula a imaginação e recompensa o esforço de aprender.” (Lima, 2007)

A conclusão que Correa (1999) faz acerca dessa discussão é que, o professor deve abandonar o método expositivo tradicional, em que o papel dos alunos é em sua maioria passivo, e procurar, seguir o método ativo, estabelecendo diálogo com os alunos e estimulando-lhes a imaginação, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta.

### *3.1.3 Metodologia tradicional voltada à memorização de fórmulas*

Referindo-se ainda à maneira como a matemática é abordada em sala de aula, um outro ponto que dificulta a aprendizagem em matemática está na exigência que professores fazem quanto à memorização das fórmulas matemáticas. Sabemos que no ensino tradicional há uma predominância excessiva da memorização de tabelas, regras e fórmulas. Em seu formato desprovido de originalidade, esse ensino dava pouca ou nenhuma importância à conceituação, ao raciocínio e à discussão de ideias.

O professor Elon(2007) aponta como maior problema para o ensino da Matemática no nível médio a forma como os assuntos, muitas vezes relevantes, são abordados em sala de aula, onde se dá “ênfase a aspectos manipulativos e fórmulas, deixando de lado interessantes aplicações e interpretações relevantes daqueles tópicos nas outras Ciências e no dia a dia da sociedade em que vive o jovem de hoje.”

Percebemos que, com a implantação do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) em seu novo formato a partir de 2009, não é exigido que o aluno tenha em mente todas as fórmulas e as aplique, é considerado que haja uma interdisciplinaridade de forma que o aluno seja capaz de resolver situações-problemas mediante argumentação e tomada de decisão envolvendo diversos saberes. Sem haver uma compreensão do surgimento dessas fórmulas ou até mesmo de como aplicá-las é que o conteúdo matemático absorve um caráter chato e enfadonho.

Porém, segundo Garbi (2010)

> é falso o dilema entre entender ou decorar na Matemática. O aprendizado da Matemática se faz através da compreensão e da memorização. O ideal é que a compreensão preceda a memorização e uma não exclui a outra. [...] Não há mal algum, é útil e prático, que os estudantes saibam de cor, por exemplo, que o volume da esfera é $\frac{4}{3}\pi R^3$ , que $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ ou que o volume da pirâmide é um terço do produto da área da base pela medida da altura, desde que tenham visto e compreendido como essas fórmulas são deduzidas através de raciocínios matemáticos. (GARBI, 2010, p.3)

"O que deve ser entendido é que memorizar e compreender são tarefas complementares e não antagônicas. Ambas são extremamente importantes, como importante é o discernimento dos casos em que se usam as duas ou apenas uma (e qual) delas." (Lima, 2007)

### *3.1.4 Busca inadequada a novos recursos pedagógicos*

Os PCN's ressaltam a importância de se buscar metodologias que venham ao encontro dos reais objetivos que a escola se propõe, contrapondo-se aos problemas originários do ensino tradicional: procedimentos mecânicos e falta de significado, a valorização da memorização sem compreensão.

> A insatisfação revela que há problemas a serem enfrentados, tais como a necessidade de reverter um ensino centrado em procedimentos mecânicos, desprovidos de significados para o aluno. Há urgência em reformular objetivos, rever conteúdos e buscar metodologias compatíveis com a formação que hoje a sociedade reclama. (PCN's, 2000)

Ao se deparar com resultados insatisfatórios dos alunos, o professor procura repensar satisfatoriamente o seu fazer pedagógico buscando novos elementos com o intuito de reverter essa situação. Porém, o professor se encontra com muitos imediatismos, ou seja, receitas de como ensinar determinados conteúdos ou até mesmo fórmulas mágicas. O modelo mais utilizado é a aplicação de jogos e materiais onde o professor nem sempre tem a clareza das razões fundamentais pelas quais os materiais ou jogos são importantes para o ensino-aprendizagem da matemática e em que momentos devem ser usados. Os jogos e materiais concretos devem constituir parte da ação pedagógica, por serem elementos estimuladores do desenvolvimento e "não subjugar sua metodologia de ensino a algum tipo de material porque ele é atraente ou lúdico". (Silva, 2005)

> Ao aluno deve ser dado o direito de aprender. Não um "aprender" mecânico, repetitivo, de fazer sem saber o que faz e por que faz. Muito menos um "aprender" que se esvazia em brincadeiras. Mas um aprender significativo do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade. (SILVA, 2005, p.8)

Nesse sentido, Malba Tahan (1968) declara que "para que os jogos produzam os efeitos desejados é preciso que sejam, de certa forma, dirigidos pelos educadores".

Um recurso metodológico bastante utilizado pelos professores são as mídias digitais. Com inúmeras vantagens, as mídias digitais, podem tornar a aula mais dinâmica, atraente e interessante para os alunos, ao mesmo tempo que, podem trazer informações, imagens e situações não contidas no livro.

> O desenvolvimento da tecnologia, em particular a existência dos computadores e das calculadoras, dão hoje mais razão e proporcionam melhores meios para que a ênfase no ensino incida nos aspectos mais conceituais da Matemática associados à realidade em detrimento dos seus aspectos mais mecânicos. (SILVA, 2005, p.8)

Porém, não basta o professor ter acesso a esses recursos tecnológicos se não souber fazer bom uso deles.

> Utilizar ou não os meios tecnológicos como apoio pedagógico, não é mais passível de discussão, mas a sua forma de utilização com certeza sempre o será. O professor precisa se atualizar, sob pena, de ser atropelado pelo tempo e pelas novas tecnologias, que, na verdade, jamais superarão o mestre, a relação professor-aluno, gerando então um verdadeiro vazio, um precipício que já estamos vivenciando na falta de referências e valores dos jovens online. (PECK, 2007, p.6)

### *3.1.5 Falta de contextualização*

Sabemos que a matemática pode ser ensinada de uma maneira mais "concreta" caso seus conceitos sejam abordados tomando como ponto de partida um contexto. Dessa forma, os PCN's defendem que a aprendizagem contextualizada deve levar o aluno a mobilizar competências para solucionar problemas com contextos apropriados, de tal forma, que ele seja capaz de transferir essa capacidade de resolução de problemas para os contextos do mundo social e, especialmente, do mundo produtivo.

> Em Matemática, a contextualização é um instrumento bastante útil, desde que interpretada numa abordagem mais ampla e não empregada de modo artificial e forçado, e que não se restrinja apenas ao cotidiano do aluno. Defende-se a ideia de que a contextualização estimula a criatividade, o espírito inventivo e a curiosidade do aluno. (FERNANDES, 2006, p.3)

Segundo Fonseca (1995) *apud* Fernandes (2006), a necessidade de contextualizar o conhecimento matemático tem sido uma preocupação constante na reflexão sobre o ensino-aprendizagem dessa disciplina, ressaltando a importância quanto a aquisição de técnicas e o uso formal da linguagem matemática.

> As linhas de frente da Educação Matemática têm hoje um cuidado crescente com o aspecto sociocultural da abordagem Matemática. Defendem a necessidade de contextualizar o conhecimento matemático a ser transmitido, buscar suas origens, acompanhar sua evolução, explicitar sua finalidade ou seu papel na interpretação e na transformação da realidade do aluno. É claro que não se quer negar a importância da compreensão, nem tampouco desprezar a aquisição de técnicas, mas busca-se ampliar a repercussão que o aprendizado daquele conhecimento possa ter na vida social, nas opções, na produção e nos projetos de quem aprende. (FONSECA, 1995, *apud* FERNANDES, 2006, p.3)

Sendo mais específico para o Ensino Médio, o professor Elon (2007) afirma que os temas matemáticos estudados nesse nível de ensino incluem assuntos que se prestam a interessantes aplicações a problemas relevantes e atuais.

> São praticamente inesgotáveis as possibilidades de enriquecer os livros didáticos – e consequentemente as aulas – com uma variedade de situações concretas que requerem, para serem analisadas eficazmente o emprego de logaritmos, sistemas lineares, análise combinatória, probabilidades, coordenadas no plano ou no espaço […] Habitualmente, porém, os exercícios referentes a esses assuntos se limitam a práticas manipulativas, problemas artificiais ou mesmo aplicações que não têm mais cabimento hoje em dia. (LIMA, 2007, p.171)

No entanto, o professor, quase sempre, não encontra ajuda ou apoio para realizar a tarefa de motivar e instigar o aluno relacionando a Matemática com outras áreas de estudo e identificando, no nosso cotidiano, a presença de conteúdos a serem desenvolvidos em sala de aula.

> Acredita-se que o professor só pode ajudar o aluno no processo de aprendizagem se puder oferecer pontos de vista distintos sobre um mesmo assunto, suas relações com outros conteúdos já estudados e suas possíveis aplicações em outras áreas do conhecimento. Sendo assim, a preocupação exagerada com as metodologias de ensino, afastou os professores da comunidade Matemática. Além disso, eles se veem pressionados por um novo modismo: a contextualização. Ao se deparar com essa nova exigência da moda, o professor se desdobra na busca de aplicações para conteúdos que não podem ser assim tratados. Forma-se, então, o pano de fundo propício ao surgimento de inacreditáveis tentativas didático-pedagógicas de construir aplicações para o que não pode ser assim aplicado. (FERNANDES, 2006, p. 6)

A contextualização em Matemática, para Carneiro (2005) "é um instrumento bastante útil, desde que interpretada num sentido mais amplo e não empregada de modo artificial e forçado, ou que não se restrinja apenas a um universo mais imediato (cotidiano)". Isso não significa necessariamente iniciar com um problema cotidiano. A Matemática se desenvolveu, e continua a se desenvolver, por meio de problemas. Roque e Carvalho (2012) adotam uma outra metodologia para se contextualizar a matemática.

> O papel da história da Matemática pode ser o de exibir esses problemas, muitas vezes ocultos no modo como os resultados se formalizaram. […] Podemos, então analisar o momento no qual os conceitos foram criados e como resultados, que hoje consideramos clássicos, foram demonstrados, contrabalançando a concepção tradicional que se tem da Matemática como um saber operacional ou técnico. […] A história da Matemática pode tirar do esconderijo onde se encontram os problemas que constituem o campo de experiência do matemático. (ROQUE; CARVALHO, 2012, prefácio)

Contudo, com a introdução de metodologias inovadoras de ensino de matemática, alguns críticos apontam ainda o descaso com os conteúdos e que, apesar de permear praticamente todas as áreas do conhecimento, nem sempre é fácil (e, por vezes parece impossível) mostrar ao estudante aplicações interessantes e realistas dos temas matemáticos a serem tratados ou motivá-los com problemas contextualizados. "É fundamental ressaltar a importância de se conhecer bem os conteúdos matemáticos para que esse trabalho seja completo." (Silva, 2005, p.8)

Ponte (2014) afirma que, as novas estratégias de ensino obtêm mais sucesso com os conteúdos mais básicos. Portanto, a solução está no equilíbrio. "Já erramos por tornar o ensino muito formal, mas agora se contextualiza tanto que se perde a perspectiva do que está sendo ensinado.”

O professor Elon (2007) em seu discurso onde defende a contextualização no sentido de “prover o ensino da Matemática de situações reais, concernentes a problemas que de fato ocorrem, ou podem vir a ocorrer nos dias atuais; problemas onde as ferramentas matemáticas vêm a ser de utilidade decisiva, faz o seguinte alerta

> Mas não devemos perder de vista o verdadeiro significado da Matemática, cujo método consiste em formular conceitos e teorias gerais que se aplicam em inúmeras situações, às vezes aparentemente diversas. Não importa quantos problemas contextuais resolvamos mediante técnicas *ad hoc*, não estaremos utilizando toda a força da Matemática se não estivermos olhando para esses problemas como situações especiais de um conceito, de uma teoria matemática que nos permitirá resolvê-los e resolver muitos outros problemas, nem sempre obviamente análogos. (LIMA, 2007, p.185)

Garbi (2010) relata alguns pontos a serem considerados por autores que defendem a ideia da contextualização em matemática, sem perceber que muitas vezes isso ocorre de maneira tão exagerada que acaba perdendo totalmente o sentido.

> • A Matemática, embora tenha incontáveis aplicações práticas, é uma *ciência abstrata*, ou seja, seus objetos de estudos lógico dedutivos são imateriais.
> • Embora seja possível, em muitos casos, associar (com admirável sucesso) os objetos da Matemática a entes encontráveis no mundo físico, muita coisa importante da Rainha das Ciências não é “contextualizável” e mesmo assim merece ser estudada. A Teoria dos Números e os Números Complexos, dentre tantos outros, são exemplos flagrantes.
> • A exclusiva apresentação de questões matemáticas “contextualizáveis” restringe sobremaneira o raciocínio dos alunos, dificultando-lhes a aquisição da capacidade de pensar de forma genérica e abstrata, tão importante às pessoas verdadeiramente cultas. (A propósito, conforme noticiado pelo *New York Times* e comentando pelo *O Estado de S. Paulo*, há pesquisas indicando que a contextualização em demasia tem inconvenientes, dentre os quais a perda de generalidade.)
> • O dogma da contextualização acabou por produzir uma filha nociva, a tese de que só se deve ensinar a Matemática útil aos alunos no ambiente em que vivem. Se os gregos tivessem seguido esse pensamento, não nos teriam legado a admirável Matemática que criaram porque, à época, pouquíssimo dela era utilizável. Se os grandes gênios não tivessem feito Matemática por puro amor à arte, a civilização estaria muitos séculos atrasada em relação ao que já atingiu. Se a Coreia e a Finlândia do pós-guerra tivessem adotado essa linha de ensino, não estariam hoje na vanguarda tecnológica mundial. (GARBI, 2010, p.4-5)

Dessa maneira, é necessário que haja bom senso aos professores no momento de planejamento dos conteúdos pertinentes ao currículo pois a exclusão de conteúdos não “contextualizáveis” impede que o aluno desenvolva o raciocínio lógico dedutivo, o que o impossibilita de fazer generalizações a fim de facilitar a compreensão da matéria.

> O professor deve considerar como parte integrante e essencial de sua tarefa o desafio, a preocupação de encontrar aplicações interessantes para a matemática que está apresentando. Nem sempre é uma tarefa fácil. Mas vale a pena indagar, pesquisar, pensar, incomodar os colegas, vasculhar livros. (LIMA, 2007, p.184)

### *3.1.6 Linguagem*

A linguagem matemática é composta por simbolismo próprio e específico o que a tornam, por sua vez, inacessível. De tal forma que no ensino, o uso desse instrumento obriga professor e aluno a tomarem o devido cuidado em sua utilização. Segundo o professor uruguaio Markarian (1998), "a linguagem em si não motiva; as ideias sim" e estas devem ser introduzidas a partir de necessidades práticas. Assim, compreendemos que nenhum aluno pode interessar-se por algo que não o satisfaça ou não lhe provoque curiosidade.

É interessante ressaltar ainda a concepção que, a pessoa que compreende e manipula a simbologia matemática é considerada gênio, porém, isso não acontece apenas com os códigos usados pela matemática. Um exemplo bastante claro é uma partitura musical que se torna complicada e indecifrável para quem não a conhece. Entretanto uma pessoa que se dedique a estudar música ou matemática, possuirá condições para estabelecer uma comunicação eficiente com o objeto estudado. Estamos diante de uma matéria que possui linguagem própria e portanto deve ser aprofundada, porém devemos tomar cuidado com a ênfase exagerada que se dá à simbologia levando o aluno, muitas vezes, a não compreender a real ideia representada pelo símbolo.

> A matemática é uma área do saber de enorme riqueza, é natural que seja pródiga em inúmeras facetas; uma delas é, precisamente, ser possuidora de uma linguagem própria, que em alguns casos e em certos momentos históricos se confundiu com a própria matemática. Esta linguagem tem registros orais e escritos e, como qualquer linguagem, apresenta diversos níveis de elaboração consoante a competência dos interlocutores: a linguagem matemática utilizada pelos "matemáticos profissionais", por traduzir ideias de alto nível, é mais exigente do que a linguagem utilizada para traduzir ideias numa sala de aula. [...] A linguagem matemática desenvolveu-se para facilitar a comunicação do conhecimento matemático entre as pessoas. Entretanto, quando abusamos do uso de símbolos não nos preocupamos em trabalhar a compreensão dos mesmos, clareando o seu significado, conseguimos o efeito contrário: dificultamos o processo de aprendizagem de matemática. (ZUCHI, 2004, p.51)

Silva (2005) relata a importância de "compreender que a matemática na sala de aula, ao mesmo tempo que fecha as possibilidades de outros sentidos, nas leituras e interpretações de seus textos, também permite muitos caminhos para chegar a um resultado, e nesse contexto, dá liberdade ao estudante de criar, durante a resolução.” De fato, ter conhecimento onde a disciplina amplia e onde ela restringe a capacidade investigativa dos alunos é um aliado ao professor de forma a facilitar o seu trabalho em sala de aula que, através do diálogo, entra em entendimento com estes.

> A generalidade com que valem as proposições matemáticas exige precisão, proíbe ambiguidades e por isso requer mais concentração e cuidado por parte do estudante. Por ouro lado, o exercício dessas virtudes durante os anos de escola ajuda a formar hábitos que serão úteis no futuro. A perseverança, a dedicação e a ordem no trabalho são qualidades indispensáveis para o estudo da Matemática. Note-se que não se trata de talentos e que não se nasce dotado delas. (LIMA, 2007, p. 3)

## 3.2 Demonstrar ou não demonstrar: eis a questão!

A valorização do raciocínio matemático e da lógica dedutiva deve estar presente na vida do estudante, seja de nível fundamental ou médio. Uma estratégia pedagógica que pode ser implantada no dia a dia pelo professor e que traz benefícios já comprovados é a demonstração ou prova, termo usado por diversos autores, e que vem sendo tema de diversos estudos e pesquisas.

> Provar um resultado matemático é validar a declaração feita, a partir de hipóteses verificadas e certificadas como verdadeiras. Ensinar por meio de uma prova consiste em mostrar ao educando a validade da declaração feita, exibindo as etapas do processo dedutivo, para assim desenvolver no educando o raciocínio lógico-dedutivo. E com isso possibilitar a construção das habilidades contidas nos PCN. (JR.; NASSER, 2012, p.4)

Schoenfeld (1994, *apud* Pietropaolo, 2005) discute que a demonstração não é algo que possa ser retirado da Matemática, como ocorre em muitos programas de ensino, pois para ele a prova é uma componente essencial da prática e da comunicação matemática.

> O ensino da Matemática aos adolescentes simplesmente passou de um extremo a outro: antigamente demonstrava-se demais; hoje se demonstra de menos. Em ambos os casos, esquece-se o verdadeiro objetivo da educação científica, que deve ser o de habituar gradativamente os alunos a pensar por si próprios, de maneira lógico-dedutiva. (GARBI, 2010, p.10)

Garbi (2010) define o que seria prova (demonstração ou justificativa lógica) em Matemática como sendo “o processo pelo qual, partindo exclusivamente de definições, conceitos primitivos e postulados, evidenciando a veracidade da afirmação por meio de uma sequência de conclusões (inferências) lógicas válidas."

Mariotti (2001, *apud* Pietropaolo, 2005) alerta a necessidade de incorporar nos currículos de matemática um trabalho envolvendo prova em qualquer nível de ensino: "não se pode ensinar matemática sem introduzir a demonstração". Nessa discussão, vários autores concordam na existência de dificuldades nos processos de ensino e aprendizagem da prova que podem ser caracterizadas por diversos fatores, dos quais, Sousa, Fossa e Sousa (2010) citam três:

> (i) o fato de que existem poucos materiais, voltados para o estudante de Matemática, sobre as técnicas de demonstração, especialmente materiais de cunho alternativo; (ii) a utilização implícita das técnicas por muitos professores na graduação, partindo do princípio que os alunos já as conhecem; (iii) a falta de definição clara do conceito de demonstrar, que muitas vezes se confunde com experimentação ou argumentação, limitado somente ao sentido de convencer. (SOUSA, E.; FOSSA; SOUSA G., 2010, p.1-2)

Segundo pesquisas e estudos realizados por Jr e Nasser (2012), percebe-se na realidade brasileira que a argumentação e a prova matemática não fazem parte da prática pedagógica da maioria dos professores da Escola Básica. Esse fato, deve-se, entre outros fatores, à formação acadêmica adquirida pelo docente, recorrendo à discussão sobre o afastamento entre o curso universitário e a realidade da escola. Além disso, Nasser e Tinoco (2003) *apud* Jr e Nasser (2012), defendem a ideia que a argumentação lógico-dedutiva é uma habilidade que não pode ser ensinada em algumas aulas.

> […] é uma habilidade que deve ser desenvolvida desde os primeiros anos, ao longo de toda escolaridade, numa constante gradação dos níveis de argumentação, de maneira a conduzir o aluno a construir justificativas que possam ser aceitas como prova de resultados matemáticos. (NASSER; TINOCO, 2003, *apud*, JR.; NASSER, 2012, p.14)

Segundo os PCN's (BRASIL, 2000), as habilidades de argumentar e provar em Matemática são importantes tanto para o desenvolvimento em Matemática quanto para a formação do cidadão crítico. Porém, percebemos que essa habilidade não é, de modo geral, suficientemente desenvolvida pelos professores de Matemática em suas aulas.

> [...] o desenvolvimento no educando da capacidade/habilidade de comprovação, argumentação e justificação, com vistas à formação do cidadão crítico, além de propiciar que a Matemática seja encarada pelo estudante como um conhecimento que possibilita o desenvolvimento de seu raciocínio e de sua capacidade expressiva.

> (BRASIL, 2000, p.26)

Sendo considerado de extrema importância, o professor deve promover atividades que estimulem e impliquem a comunicação oral e escrita, levando o aluno a verbalizar os seus raciocínios, a explicar, a discutir, a confrontar processos e resultados.

> […] Trabalhar a partir das representações dos alunos não consiste em fazê-las expressarem-se, para desvalorizá-las imediatamente. O importante é dar-lhes regularmente direitos nas aulas, interessar-se por elas, tentar compreender suas raízes e sua forma de coerências, não se surpreender se elas surgirem novamente, quando as julgávamos ultrapassadas. Para isso, deve-se abrir um espaço de discussão, não censurar imediatamente as analogias falaciosas, as explicações animistas ou antropomórficas e os raciocínios espontâneos, sob pretexto de que levam a conclusões errôneas. (PERRENOUND, 2000, *apud*, ZUCHI, 2004, p.53)

Veloso (1999) defende a importância de inclusão do trabalho com provas nos currículos porém não considera esse trabalho como indispensável para o desenvolvimento do raciocínio lógico. Para isso, ele exemplifica dizendo que existem muitas pessoas que, sem ter estudado matemática, usam o “raciocínio” com exatidão e presteza. Dessa forma, Veloso aborda a demonstração no ensino em um enfoque mais amplo enfatizando o valor não só do raciocínio matemático, mas da história e relevância dessa ciência, no qual a demonstração torna-se indispensável.

> Na realidade, se um dos objetivos principais do ensino da Matemática nos ensinos básicos e secundários é permitir aos alunos adquirir uma compreensão viva do que é a Matemática, incluindo a sua relevância, sua evolução histórica e características no momento presente – é indispensável que os alunos experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio dedutivo e mesmo a estrutura axiomática de suas teorias. (VELOSO, 2003, *apud* PIETROPAOLO, 2005, p.81)

Com a perspectiva de que os livros didáticos de matemática deveriam trazer um conteúdo mínimo de Matemática demonstrativa, Garbi (2010) defende a reintrodução de doses equilibradas de demonstrações no ensino de Matemática no Brasil. Fato este que está diretamente ligado à formação do professor de matemática e é fonte de estudo de diversos autores. Abrantes

> descreve competências específicas de um professor de Matemática, dentre as quais cinco estão diretamente relacionadas com argumentação e demonstração: “Conceber que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação; Compreender noções de conjectura, teorema e demonstração; Examinar consequências do uso de diferente definições; Explorar situações-problema, procurar regularidades, fazer conjecturas, fazer generalizações, pensar de

> maneira lógica; Apreciar estrutura abstrata que está presente na Matemática." (ABRANTES, 2001, *apud*, PIETROPAOLO, 2005, p.35)

Observa-se em materiais didáticos utilizados pelas escolas que a demonstração em matemática no ensino fundamental é introduzida no conteúdo de geometria. Os professores por considerarem difícil a questão da demonstração, muitas vezes, optam por não tratar desse assunto. Sendo considerado um desperdício não aproveitar a geometria para cativar os alunos, pois o primeiro contato da criança com a matemática é por meio de objetos com formas e cores. Na visão de Pietropaolo (2005) o ensino de demonstrações iniciado pela Geometria, é muito válido pois há a disposição de figuras que podem ajudar na construção de conceitos e argumentações.

Além disso, consideramos também como algo que dificulta o trabalho com a demonstração, a falta de compreensão nas inovações curriculares ou não estar convencido delas, sendo que os professores, muitas vezes, se sentem excluídos do processo de discussão e elaboração curricular. Mas não podemos deixar de citar que essa dificuldade também está ligada ao tipo de formação que esses professores receberam. Assim, Garcia (2003, *apud* Pietropaolo, 2005) defende a necessidade de integrar a formação de professores em processos de mudança, inovação e desenvolvimento curricular, o que dá ênfase ao pensamento de Hellmeister (2001, *apud* Sousa, 2010) quando ele aponta que a formação deficiente de muitos professores se deu por causa da má estruturação curricular de muitos cursos de licenciatura em Matemática.

> Analisando a estrutura curricular de vários cursos de licenciatura em Matemática, percebem-se as sérias dificuldades que as instituições de ensino superior têm na organização e hierarquização das disciplinas do curso, bem como em elaborar suas ementas e bibliografias. No caso das instituições que conseguem superar essa etapa, apresentando um bom projeto pedagógico, há ainda a dificuldade de se obter um corpo docente capaz de desenvolver tal projeto.
>
> Essa situação, que se reflete na qualidade dos cursos, implica a formação deficiente de muitos dos professores de Matemática que estão atuando no ensino fundamental e médio, oferecendo, por sua vez, uma formação ruim a seus alunos. É frequente que resultados que podem e devem ser demonstrados, já no ensino fundamental e médio, sejam apresentados como "propriedades" dos "objetos" matemáticos, muitas vezes sem uma justificativa plausível, trazendo para o curso de licenciatura em Matemática um aluno sem nenhum questionamento, sem percepção da necessidade de demonstrações, sem reflexo sobre um sistema axiomático ou sem entender a diferença entre um exemplo e um teorema. (HELLMEISTER, 2001, *apud* SOUSA, 2010, p.18)

Outro fator relevante, além da falta de ênfase na compreensão de demonstrações durante a formação inicial do professor, é a consequência das mudanças causadas pelo Movimento da Matemática Moderna, quando houve uma forte valorização do desenvolvimento dedutivo e, em seguida, após seu fracasso, um abandono quase que total do raciocínio dedutivo e das demonstrações matemáticas.

> Depois de séculos de um ensino tradicional e estático, a abordagem adotada no ensino de matemática tem sofrido mudanças nas últimas quatro décadas. Essas modificações passaram pela "matemática moderna", que valorizava um enfoque demasiadamente estruturalista, nada natural para os alunos da escola básica. Após o abandono da matemática moderna, com o movimento de retorno às bases matemáticas o que se viu foi o abandono total do raciocínio dedutivo e das demonstrações. Embora "desenvolver o raciocínio lógico" seja um dos objetivos incluídos dos planejamentos de quase todos os professores de matemática, os alunos foram passando pela escola sem que fossem expostos a atividades que desenvolvessem seu raciocínio lógico ou que os preparasse para o domínio do processo dedutivo. (NASSER; TINOCO, 2003, *apud* SOUSA, 2010 p.16)

Balacheff (1999, *apud* Pietropaolo, 2005) aponta que as origens de algumas das dificuldades para ensinar e aprender a demonstração em Matemática decorrem do contrato didático que acontece naturalmente das posições do aluno e do docente levando em consideração os saberes envolvidos no processo. Tendo em vista que é o docente quem garante a legitimidade e a validade epistemológica do que se constrói em sala de aula, o que poderia impedir, segundo o autor supracitado, o real acesso do aluno à problemática da verdade e da prova. Nesse mesmo contexto, como superação desta dificuldade, Balacheff (1999) sugere a investigação de situações em que não haja a ação do docente nos processos de tomada de decisão durante a resolução de um problema, facilitando assim a construção de meios autônomos para a elaboração de provas por parte dos alunos. A transposição didática da demonstração em matemática para a sala de aula tem dois alvos: enfatizar as dificuldades dos alunos e propor novas estratégias de intervenção de ensino.

Vale lembrar que o principal propósito do ensino construtivista é levar os alunos a construírem por si mesmo sua aprendizagem. Dessa forma, para se tornar uma verdadeira aprendizagem é preciso passar do nível instrumental (aprendizagem através de mecanismos de repetição), que é geralmente necessário, mas não suficiente, e chegar ao nível relacional, onde o aluno realmente tem autonomia, pois é levado a entender o porquê, não se limitando ao modelo utilizado pelo professor.

Thurston (1994, *apud* Pietropaolo, 2005) adota como premissa que a demonstração proporcionaria a compreensão da natureza do conhecimento matemático, pois ela faz parte da construção da própria Matemática e essa afirmação já poderia justificar sua importância para o educador matemático. Sendo assim, a demonstração em matemática possuir vários propósitos, variando-se conforme a situação: a demonstração exposta a quem não a conhecia anteriormente tanto pode ter a função essencial de validação do teorema, esclarecendo-o, ou de ampliar o conhecimento matemático do leitor. Pietropaolo (2005) cita Thurston (1994): "esta ambivalência surge do desejo permanente que o homem tem de expandir seu conhecimento, o que ocorre sempre que um teorema é aceito como verdadeiro – o que se dá por meio de sua demonstração." Por sua vez, Lakatos (1978) é citado por Pietropaolo ao defender o enfoque heurístico dado a demonstração ao invés do enfoque dedutivista.

> Lakatos defende o enfoque heurístico, que evidencia todas as demonstrações pretéritas empregáveis numa atual, em contrapartida do enfoque dedutivista, que ignora o processo e simplesmente apresenta as demonstrações anteriores de "modo artificial e autoritário". Este enfoque heurístico seria mais adequado ao ensino da Matemática, afastando os alunos de uma apresentação meramente dogmática do conteúdo. Neste sentido, encara-se a demonstração como argumentação convincente; como meio de comunicação com os alunos. (LAKATOS, 1978, *apud* PIETROPAOLO, 2005, p.79)

Segundo Pietropaolo (2005), a principal diferença entre as duas demonstrações – a que apenas valida e a que também explica - é que a explicativa termina por utilizar raciocínios fundamentados em ideias matemáticas, enquanto a mera prova formal emprega basicamente regras de sintaxe, constituindo o aspecto mecânico da demonstração, não preponderando como característica mais relevante da Matemática.

A pesquisadora Hanna (1995) distingue a demonstração para fins escolares da demonstração para os matemáticos profissionais ou lógicos. Sendo que uma demonstração deve incentivar a compreensão: "uma boa prova, entretanto, não deveria ser somente correta e explicativa, a mesma poderia também levar em consideração, especialmente em seu nível de detalhe, o contexto da aula e a experiência dos estudantes" (1995, apud Pietropaolo, 2005, p.80)

Jr e Nasser (2012) em sua pesquisa titulada *"Analisando Justificativas e Argumentações Matemáticas de alunos do ensino fundamental"*, convidam o professor a uma reflexão sobre uma abordagem menos formal para a prova matemática, que nesse nível de ensino se apresenta na sua forma mais incipiente e ingênua. "Tendo a convicção de que, dependendo do desenvolvimento cognitivo do aluno, da sua idade, do seu nível de conhecimento matemático e de sua série escolar, formas alternativas de raciocínio dedutivo devem ser consideradas e valorizadas." (Imenes, 1987, *apud*, Jr. e Nasser, 2012)

Em uma entrevista à Revista Cálculo (número 30, ano 3, julho de 2013) o professor de matemática do Colégio e Curso Olimpo de Goiânia (GO), Lafayette Spósito Goyano Jota, foi questionado acerca do uso de demonstrações em sala da aula e sua resposta foi moderada. Isso porque ele afirma usar poucas demonstrações em sala de aula, porém ele usa todo o tempo a ideia de axioma e de teorema, para que os alunos se familiarizem bem. O professor Lafayette se detém em sala de aula a fazer todas as demonstrações consideradas fáceis, as que levem poucos minutos. De vez em quando, faz uma demonstração difícil, com a concepção de "manter viva a crença pela qual, na matemática, tudo que dizem que é verdade foi provado como sendo verdade." E quando Lafayette se depara com uma demonstração mais difícil ele deixa a cargo dos alunos estudarem-na em horário extra, acreditando que o professor não deve proceder em sala com todas as explicações ou soluções e que ele deve dosar sempre a quantidade e a qualidade da matéria dada, de forma a estimular o aluno a descobrir por si mesmo.

> […] Você vê uma afirmação matemática e tenta demonstrá-la. Não importa muito se consegue ou não; o que importa é que só depois de tentar conseguirá acompanhar a demonstração incluída no livro, feito à moda de um matemático profissional. É um exercício solitário que, na maioria dos casos, exige uma tarde, e às vezes exige uma semana ou duas. Descobri que realizar uma coisa dessas em sala de aula é contraproducente. (REVISTA CÁLCULO, n. 30, ano 3, julho de 2013, p.23)

O que foi proposto aqui nada mais é do que um apoio para o professor que busca constantemente alternativas para enriquecer e superar os desafios do dia a dia. Não existe uma fórmula mágica pois a educação brasileira é cheia de especificidades e o bom senso do professor consciente é o principal meio que ele dispõe a fim de reorganizar suas atividades didáticas. Experiências em métodos que deram certo em situações diferentes podem não surtir o efeito esperado, por isso da necessidade do professor ser mais que um mero transmissor de conteúdos, e entre tantas funções, ser também um pesquisador, um estudioso que se inquieta com questões relativas a sociedade e procura sempre dar a melhor contribuição possível.

O professor Elon, em sua vasta experiência como professor e profundo conhecedor de questões relativas ao ensino de Matemática no Brasil, caracteriza com inteira precisão e simplicidade um bom professor de matemática. Além de reforçar mais uma vez o desenvolvimento de virtudes, durante a vida escolar, por parte de quem ensina e quem aprende.

> Finalmente, quanto ao ensino, não há mistério nem milagre. O bom professor é aquele que vibra com a matéria que ensina, conhece muito bem o assunto e tem um desejo autêntico de transmitir esse conhecimento, portanto se interessa pelas dificuldades de seus alunos e procura colocar-se no lugar deles, entender seus problemas e ajudar a resolvê-los. Não há fórmulas mágicas para ensinar Matemática. Não há caminhos reais, como Euclides já dizia a Ptolomeu. A única saída é o esforço honesto e o trabalho persistente. Não só para aprender Matemática, mas para tudo na vida. (LIMA, 2007, p.5)

# 4 CONTEXTO HISTÓRICO DAS REGRINHAS E SUAS JUSTIFICATIVAS

Para uma melhor compreensão das justificativas das regras apresentadas, é interessante conhecermos o contexto histórico que as fizeram surgir. Desse modo, entenderemos, em alguns momentos, técnicas, procedimentos e conceitos que auxiliaram na resolução de muitos problemas antigos e que até hoje nos fascina pela sua importância e utilidade.

## 4.1 Operações com Números Fracionários (Divisão)

A origem dos números fracionários está registrada no antigo Egito por volta do ano 3000 a.C., onde o faraó Sesóstris distribuiu algumas terras às margens do Rio Nilo para alguns agricultores privilegiados. O privilégio em possuir essas terras era porque todo ano, no mês de julho, as águas do rio inundavam essa região ao longo de suas margens e fertilizavam os campos. Essas terras, portanto, eram bastante valorizadas. Porém, era necessário remarcar os terrenos de cada agricultor em setembro, quando as águas baixavam. Os responsáveis por essa marcação eram os agrimensores, que também eram chamados de estiradores de corda, pois mediam os terrenos com cordas nas quais uma unidade de medida estava marcada.

Essas cordas eram esticadas e se verificava quantas vezes a tal unidade de medida cabia no terreno, mas nem sempre essa medida cabia inteira nos lados do terreno. Esse problema só foi resolvido quando os egípcios criaram um número: o número fracionário. Esse era representado com o uso de frações, porém os egípcios só entendiam a fração como uma unidade (ou seja, frações cujo numerador é igual a 1). Eles escreviam essas frações com uma espécie de sinal oval escrito em cima do denominador. Mas os cálculos eram complicados, pois no sistema de numeração que usavam no antigo Egito os símbolos se repetiam muitas vezes.

A facilidade em se trabalhar com as frações só foi possível quando os hindus criaram o Sistema de Numeração Decimal, dessa forma, as frações eram representadas pela razão de dois números naturais. Desde então, as frações foram usadas para a resolução de diversos tipos de problemas matemáticos. Uma das formas mais coerentes de se trabalhar com frações é através da porcentagem, em que se expressa uma proporção ou uma relação a partir de uma fração cujo denominador é 100. O uso de frações também é de valia extrema para a resolução de problemas que envolvem a regra de três.

Na China, os matemáticos também pensavam assim. Uma obra chamada *Nine Chapters on the Mathematical Art*, de cerca de 100 a.C. mostra que uma das únicas diferenças é que os chineses evitavam usar frações impróprias como 5/3, mas eles utilizavam a forma mista, ou seja, $1\frac{2}{3}$. As formas de operar com frações apareciam na obra *Nine Chapters*, como por exemplo, a regra da soma era algo do tipo: *"Cada numerador é multiplicado pelos denominadores das outras frações. Some-os como o dividendo, multiplique os denominadores como o divisor. Divida; se existir um resto, tome-o como numerador e tome o divisor como denominador."* (SHEN, 1999, *apud* COSTA, 2010)

Ao realizar multiplicação e divisão, os chineses também faziam a redução a um mesmo denominador. Um caso, por exemplo, seria o de dividir $\frac{2}{3}$ por $\frac{3}{4}$. Assim, seria multiplicado o numerador e o denominador de cada fração pelo denominador da outra. Teríamos então:

$$\frac{2}{3}\div\frac{3}{4}=\frac{2.4}{3.4}\div\frac{3.3}{4.3}=\frac{8}{12}\div\frac{9}{12}=8\div 9=\frac{8}{9}$$

Percebemos que após as frações estarem escritas com o mesmo denominador, ou "unidade de medida", basta apenas aplicar uma divisão de números inteiros, ou seja, dividir o numerador da primeira pelo numerador da segunda.

Também se nota que existe uma relação entre o método de divisão de frações ensinado nas escolas básicas ("inverter e multiplicar") e o método chinês para tal divisão. Em ambos os métodos existe a multiplicação do numerador de uma fração pelo denominador da outra fração. No caso, por exemplo, da divisão de 2/3 por 4/5 teremos pela primeira regra o seguinte:

$$\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}=\frac{2}{3}.\frac{5}{4}=\frac{2.5}{3.4}=\frac{10}{12}$$

A multiplicação de 2 por 5 e 3 por 4 também aparece a partir da primeira igualdade, na divisão usando o método chinês, conforme segue:

$$\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}=\frac{2.5}{3.5}\div\frac{4.3}{5.3}=\frac{10}{15}\div\frac{12}{15}=10\div 12=\frac{10}{12}$$

Talvez, uma abordagem como a mostrada anteriormente não seja plenamente adequada para uma sala de aula de 5.ª série (6º ano), por exemplo. Em tais casos, podemos trabalhar em sala de aula o significado do método usual de divisão introduzindo situações-problemas como o exemplo seguinte que trabalha a divisão de $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$ utilizando o particionamento de um volume.

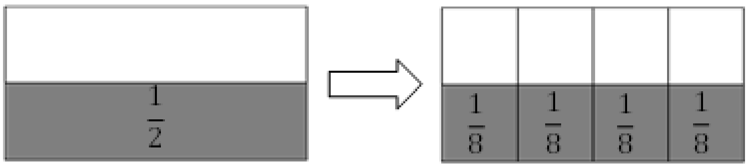
> Se com $\frac{2}{3}$ de uma lata de tinta dá para pintar $\frac{3}{4}$ de uma parede, que fração da parede pintarei com 1 lata de tinta? [...] Trabalhe a ideia de que a lata de tinta foi dividida em três partes, das quais duas foram utilizadas, e a parede foi dividida em quatro pedaços. Se subdividirmos cada pedaço da parede em dois (pois foram utilizadas duas partes de tinta), a parede estará dividida em 4 x 2 = 8 partes. Podemos imaginar, então, que cada parte da tinta permite pintar três dessas partes da parede. Logo a lata inteira, que tem três partes, permite pintar 3 x 3 = 9 das partes da parede. Então, a fração da parede pintada será igual a: $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{3.3}{4.2} = \frac{9}{8}$ onde 4 x 2 é o número de partes em que foi dividida a parede e 3 x 3 é o total dessas partes que serão pintadas usando a lata inteira. (RIBEIRO, 2009, p.32)

Para os babilônios, talvez fosse impossível pensar na primeira regra pela impossibilidade de se obter o inverso de frações cujo denominador fosse um número primo não divisor de 60 (ou possuísse na decomposição somente números não divisores de 60). Consequentemente, não se poderia expressar tais frações através de um número finito de casas, em suas expansões.

Durante a resolução de muitos exercícios nos deparamos com os números fracionários e em alguns exercícios efetuamos a divisão de frações. Muitos professores, mentalmente, sabem por que multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda fração, outros não, porém o complicado é traduzir esse conhecimento para uma linguagem verbal de tal forma que sirva de justificativa para outras pessoas entenderem a regrinha. A maioria dos livros didáticos utilizados no ensino fundamental trazem o assunto por meio de alguns exemplos práticos, ou seja, formula-se uma situação-problema que é facilmente resolvida por meio de figuras. Logo após a resolução desses exemplos é feita uma comparação com a regra conhecida, mostrando que para encontrar o resultado nada mais é feito do que inverter a segunda fração e multiplicá-la com a primeira fração. Vejamos um exemplo.

O professor propôs aos alunos que efetuassem a divisão de 1/2 por 1/8. Para resolver essa operação, precisamos saber quantas vezes 1/8 cabem em 1/2. Para isso, vamos utilizar as figuras abaixo:

Figura 1- Representação Geométrica das Frações




*Fonte: Autora*

Pelas figuras, podemos perceber que $\frac{1}{8}$ cabe 4 vezes em $\frac{1}{2}$. Portanto, $\frac{1}{2}:\frac{1}{8}=4$. Para encontrar o resultado de maneira prática, basta multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda. Veja $\frac{1}{2}:\frac{1}{8}=\frac{1}{2}.8=\frac{8}{2}=4$.

Agora vejamos algumas maneiras diferentes de se justificar essa regrinha.

Suponhamos que a situação seja $\frac{3}{5}\div\frac{4}{7}\, ou \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}}$.

**MANEIRA 1:**

Partindo do princípio que quando multiplicamos um número qualquer, diferente de zero, por seu inverso, obtemos 1, temos:

$$b.\frac{1}{b}=\frac{b}{b}=1\,;7.\frac{1}{7}=\frac{7}{7}=1.$$

Ora, se $\frac{b}{b}$ é a mesma coisa que $b.\frac{1}{b}$ e $\frac{a}{b}=a.\frac{1}{b}$ então essa mesma ideia vale para $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}}$ ,

ou seja, $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}}=\frac{3}{5}.\frac{1}{\frac{4}{7}}$ .

Assim, o inverso de $\frac{4}{7}$ é o número que, multiplicado por quatro sétimos, dá 1.

Só existe uma fração que, multiplicada por $\frac{4}{7}$ dá 1, é $\frac{7}{4}$. (Sem contar todas as infinitas frações equivalentes a $\frac{7}{4}$, como $\frac{14}{8}$ ). Dessa forma, $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\frac{4}{7}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{4}=\frac{21}{20}$ .

**<u>MANEIRA 2:</u>**

Quando uma pessoa divide um numerador qualquer (por exemplo, *n*) por um denominador qualquer (por exemplo, *d*) está procurando o quociente *q*, ou seja, $(\frac{n}{d}=q)$.

Nessa divisão podemos observar duas propriedades de *q*:

(i) quando multiplicamos o denominador *d* pelo quociente *q*, obtemos o numerador *n*;

(ii) quando dividimos o numerador *n* pelo quociente *q*, obtemos o denominador *d*.

Em outras palavras, $\frac{n}{d}=q \Leftrightarrow n=dq$ e $\frac{n}{q}=d$

Essas propriedades devem valer quando *n* e *d* são frações, pois frações são números como outros quaisquer. Então, $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}}=q \Leftrightarrow \frac{3}{5}=q\cdot\frac{4}{7}$

Usando um pouco de conhecimentos algébricos, sabemos que em uma equação podemos multiplicar ambos os membros por um número qualquer e a igualdade não se altera. Assim, multiplicando a igualdade acima obtida por $\frac{7}{4}$ obtemos $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{4}=q\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{4}$ , porém $\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{4}=1$ então $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{4}=q$ . Lembrando o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), que afirmou: *qualquer coisa é igual a ela mesma*. E se *q* é igual a *q*, então:

$$q=q \Leftrightarrow \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{4}$$

**<u>MANEIRA 3:</u>**

Um pouco parecida com a maneira 2, aqui acrescentamos um detalhe à resolução. Sabemos que, em uma fração, caso multipliquemos o numerador e o denominador pelo

mesmo número, não alteramos o quociente. Em outras palavras $\frac{n}{d}=q \Rightarrow \frac{n.k}{d.k}=q, com\, k \neq 0.$
Dessa forma, devemos multiplicar o numerador e o denominador da divisão abaixo pelo inverso do denominador a fim de facilitar o cálculo, veja:

$$q=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}}=\frac{\frac{3}{5}.\frac{7}{4}}{\frac{4}{7}.\frac{7}{4}}=\frac{\frac{3}{5}.\frac{7}{4}}{1}=\frac{3}{5}.\frac{7}{4}$$

**MANEIRA 4:**

Toda fração pode ser convertida numa porcentagem, isto é, em uma fração decimal. Basta multiplicar o denominador por um número qualquer para obter 100, e daí basta multiplicar o numerador pelo mesmo número.

$$\frac{n}{d}=\frac{n.k}{d.k}=\frac{n.k}{100}$$

Dessa maneira, aplicamos essa mesma ideia para uma divisão de frações. Na situação proposta $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}}$ , devemos procurar um número que multiplicado por $\frac{4}{7}$ obtemos 100, ou seja, $\frac{4}{7}.k=100 \Rightarrow k=\frac{7}{4}.100 \Rightarrow k=175.$

Assim: $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}}=\frac{\frac{3}{5}.175}{\frac{4}{7}.175}=\frac{\frac{3}{5}.175}{100}=\frac{105}{100}=105\%=1{,}05.$

Aqui, devemos encarar a fração no denominador como uma distância, de fato, é a distância de $\frac{4}{7}$ até a origem 0. Sendo assim, se igualarmos a fração no denominador a 100, a fração no numerador representará que valor em relação a 100? As contas mostram que $\frac{3}{5}$ representam uma distância 5% maior que $\frac{4}{7}$ , isto é, que $\frac{4}{7}$ multiplicado por 105%

resultam em $\frac{3}{5}$.

Dessa forma, $\frac{105}{100}=\frac{21}{20}=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{4}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}}=105\%$.

**<u>MANEIRA 5:</u>**

Pensemos assim: Se três quintos dividido por quatro sétimos é igual a um quociente *q*, então estamos procurando também o resultado de uma equação de primeiro grau. Assim,

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}}=q\Rightarrow\frac{4}{7}.q=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{4}{7}.q-\frac{3}{5}=0.$$

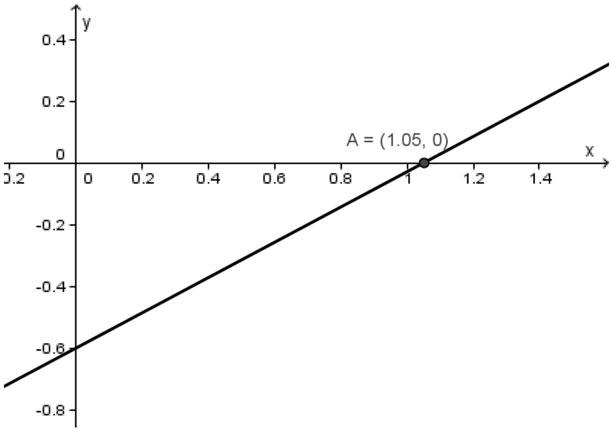
Procuremos um múltiplo comum de 5 e 7. (Basta multiplicar os dois um pelo outro; como são números primos, estamos encontrando o mínimo múltiplo comum entre eles). Ao buscarmos o múltiplo comum, deixemos as contas indicadas para manipularmos os cálculos, assim:

$$\frac{4.q}{7}-\frac{3}{5}=0\Rightarrow\frac{4.q.5}{7.5}-\frac{3.7}{5.7}=0\Rightarrow\frac{4.q.5}{7.5}=\frac{3.7}{5.7}\Rightarrow q=\frac{3.7.7.5}{3.7.4.5}\Rightarrow q=\frac{3.7}{5.4}=\frac{3}{5}.\frac{7}{4}.$$

Portanto, temos $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}}=q=\frac{3}{5}.\frac{7}{4}$.

Visualizando graficamente a reta equivalente à função de primeiro grau $y=\frac{4}{7}x-\frac{3}{5}$, observamos que a reta corta o eixo x no ponto 1,05 que é a mesma coisa de $\frac{21}{20}$ (Resultado de $\frac{4}{7}q-\frac{3}{5}\Rightarrow q=\frac{3}{5}.\frac{7}{4}$ ).

Figura 2 – Representação gráfica da equação do 1º grau




*Fonte: Revista Cálculo, Ano 2, nº 20 – setembro de 2012*

## 4.2 Potências de Expoente 0 e 1

Durante a evolução de várias civilizações houve a realização de atividades administrativas, econômicas e financeiras, e para tal, havia a necessidade de cálculos e a documentação de tais fatos. Cada povo possuía uma representação para os números, sendo assim, havia um sistema de numeração onde efetuavam-se cálculos específicos. Dessa forma, historiadores matemáticos concluem que as técnicas usadas dependiam intimamente da natureza dos sistemas de numeração. Por isso, cálculos considerados difíceis em um sistema podiam ser considerados mais fáceis no outro.

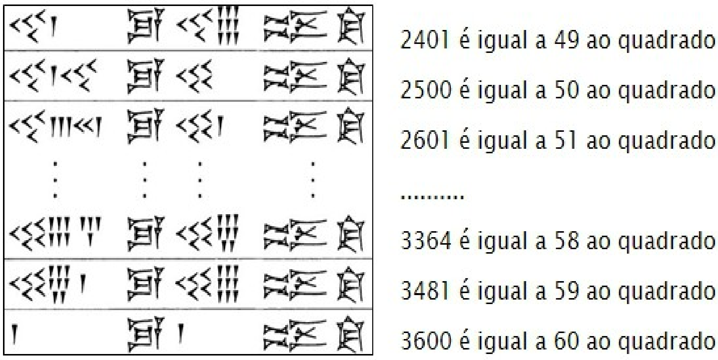
> Logo, a referência às necessidades práticas de cada um destes povos não basta para explicar a criação de diferentes sistemas de numeração, com regras próprias e bem distintas umas das outras. É preciso relativizar, portanto, a interpretação frequente de que a Matemática nesta época era constituída somente por procedimentos de cálculo voltados para a resolução de problemas quotidianos. (ROQUE e CARVALHO, 2012, p. 8)

Ball (1960) *apud* Oliveira & Ponte (1999) afirma que uma das primeiras referências à operação de potenciação encontra-se num papiro egípcio que remonta ao final do Império Médio (cerca de 2100-1580 a.C.). Ao ser ali apresentado o cálculo do volume de uma pirâmide quadrangular, é usado um par de pernas como símbolo para o quadrado de um número.

A noção de potência era, também, conhecida dos babilônios. Em primeiro lugar, eles dispunham de tabletes com a mesma função de nossa tabuada, ou seja, continham as operações básicas. A maioria das operações realizadas pelos babilônios usava diretamente estes tabletes. No caso da multiplicação, elas eram bastante fundamentais pois os cálculos elementares, ou seja, aqueles que são os correspondentes à nossa tabuada, incluem multiplicações até 59x59, já que o sistema de numeração utilizado pelos babilônios era o sexagesimal.

Fauvel (1987) *apud* Oliveira & Ponte (1999) apresenta o conteúdo de uma antiga tabuinha babilônica de argila conhecida como a ***tabuinha de Larsa*** e a respectiva tradução:

Figura 3 – Tabuinha de Larsa




*Fonte: Oliveira & Ponte (1999). Marcos históricos no desenvolvimento do conceito de potência. Educação & Matemática*

Dessa forma, existiam outras tabelas contendo as potências sucessivas de um número qualquer. Essas eram utilizadas para resolver certos problemas de astronomia e de operações comerciais.

> A utilização da palavra 'potência', no contexto da matemática, é atribuída a ***Hipócrates*** de Quio (470 a.C.), autor que escreveu o primeiro livro de geometria elementar do qual, provavelmente, os *Elementos* de Euclides recolheram uma importante inspiração. Hipócrates designou o quadrado de um segmento pela palavra *dynamis*, que significa precisamente potência. Existem motivos para se crer que a generalização do uso da palavra potência resulte do facto dos Pitagóricos terem enunciado o resultado da proposição I.47 dos *Elementos* de Euclides sob a forma: "a potência total dos lados de um triângulo rectângulo é a mesma que a da hipotenusa". Portanto, o significado original de "potência" era potência de expoente dois, somente passadas algumas décadas se conceberam potências de expoente superior (BALL, 1960 *apud* OLIVEIRA; PONTE,1999, p. 4).

O matemático grego Arquimedes (250 a.C) fez importantes contribuições tanto no desenvolvimento teórico como prático dessa ciência. Em suas especulações, Arquimedes, resolveu responder a pergunta: "quantos grãos de areia são necessários para encher o universo?". Em resposta a essa pergunta, Arquimedes escreveu o livro Contador de areia, onde pretendia determinar o número de grãos de areia necessários para encher o universo solar, o que para ele consistia numa esfera tendo a Terra como centro e a sua distância ao Sol como raio.

Nessa época, tinha-se a ideia de que as estrelas limitavam o nosso universo dando-lhe um formato esférico e, ao calcular o volume dessa esfera astronômica, chegaria ao resultado desejado. Após calcular o diâmetro dessas esferas, Arquimedes calculou o volume do Universo e o volume médio de um grão de areia. Fez a divisão final e obteve como resultado um número enorme em termos de representação numérica e soube que seria impossível demonstrar sua resposta para que outros conseguissem compreendê-la. Após séria análise detalhada dos números que apareciam no cálculo do volume da esfera gigante, Arquimedes percebeu um fato curioso: havia uma grande repetição de multiplicações que envolviam o número 10. Fazer contas com aqueles números enormes era muito difícil. Arquimedes construiu, então, uma tabela e elaborou um método de escrever números grandes, utilizando algarismos especiais, que ele chamou de "miríades" - e que hoje conhecemos como expoentes.

Dessa forma, através da potência de base dez, estava sendo criada a notação científica cuja aplicabilidade se percebe em várias áreas do conhecimento humano. Para isso, ele se utilizava principalmente de potências de base dez, onde chegou ao que julgava ser o número de grãos de areia necessários para encher a esfera do Universo: $10^{51}$.

Com seus cálculos, o matemático grego contribuiu para a elaboração da potenciação e formulou algumas leis e propriedades das potências. Assim ele criou uma tabela, em que colocava duas séries de números, como se vê abaixo:

Tabela 1*- O quadrado de um número

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^n$ | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 |

Os números da série de cima (superior) são os expoentes e os da série de baixo (inferior) são os resultados da potência de 2 elevado ao expoente correspondente. Por exemplo, quando o número de cima é 5, o de baixo é o resultado de $2^5$, isto é, 32.

* Fonte: Autora

A partir dessa tabela, Arquimedes enunciou a seguinte lei: "Se queremos multiplicar dois números quaisquer, da série inferior, adicionamos os números correspondentes da série superior e procuramos o número correspondente a essa soma na série inferior." Ou seja, para multiplicar o número 4 por 32, por exemplo, basta tomar os expoentes correspondentes (2 e 5), somar (7), e procurar o resultado correspondente (128).

É comum durante a resolução de problemas nos depararmos com cálculos que exigem a destreza em saber efetuar com potências. Passada a fase dos alunos confundirem a potenciação como uma operação em que se multiplica o expoente pela base, é normal surgir a dúvida: Por quê $2^0=1?\ ou\ 2^1=2?$ Ou então, para alunos em idade mais avançada, quando ouve: "toda potência de expoente zero, com base diferente de zero, é igual a um" ou "toda potência de expoente um o resultado é ele mesmo" e reflete o porquê de ser assim, acaba concluindo que, logicamente, porque sim (pelo menos em um dos casos). Vejamos algumas justificativas dessas duas situações, abordando diferentes contextos.

**<u>MANEIRA 1:</u>**

Nessa maneira utilizamos o conhecimento de sequência numérica a fim de encontrarmos uma solução lógica para a potência de expoente zero e um (sempre considerando a base diferente de zero). Observe:

Tabela 2**- Potências

A.

| $2^4$ | $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 8 | 4 | 2 | 1 |

:2 :2 :2 :2

B.

| $5^4$ | $5^3$ | $5^2$ | $5^1$ | $5^0$ |
|---|---|---|---|---|
| 625 | 125 | 25 | 5 | 1 |

:5 :5 :5 :5

Na sequência A, enquanto os expoentes diminuem uma unidade, os resultados são divididos por 2. Na sequência B, enquanto os expoentes diminuem uma unidade, os resultados são divididos por 5. Dessa forma, os resultados das potências que estamos procurando é encontrado facilmente seguindo a lógica da sequência dada.

**<u>MANEIRA 2:</u>**

Como $\frac{2^8}{2^7}=\frac{256}{128}=2$ e $\frac{2^8}{2^7}=\frac{2.2.2.2.2.2.2.2}{2.2.2.2.2.2.2}=2^1$ são expressões equivalentes

---
** *Fonte: Autora*

logo $2^1=2$ . Pensando de maneira parecida, para $2^0$ vamos recorrer a uma propriedade das potências: divisão de potências de mesma base. Dessa forma $\frac{2^7}{2^7}=\frac{128}{128}=1$ e $\frac{2^7}{2^7}=2^7:2^7=2^{7-7}=2^0$ são equivalentes, logo $2^0=1$.

### 4.3 A Prova do "Noves Fora"

Para algumas pessoas que viveram e estudaram em uma época onde o ensino vigente era o ensino tradicional, pautado na memorização de conceitos, demonstrações e que, nos problemas de aritmética, efetuar cálculos sem o uso de calculadora era de extrema importância. Vale ressaltar que é comum ouvir entre essas pessoas que, a verificação de operações simples se dava frequentemente pela prova do "noves fora". Ao questionar algumas dessas pessoas sobre como e por que a *prova dos noves* funciona, elas simplesmente afirmaram que não sabiam, e outras ainda acrescentaram dizendo que, existem alguns momentos que a *prova dos noves* pode falhar. Atualmente nas escolas de ensino fundamental, pouco se fala na *prova dos noves*, para a verificação dos cálculos é utilizado a *prova real*, onde o aluno faz uso da operação inversa, ou seja, para a verificação da adição faz-se uso da subtração ou vice-versa, na multiplicação faz-se uso da divisão ou vice-versa.

No tempo em que vivemos, chamado de era digital, uma discussão sobre a prova dos noves pode parecer inútil e sem sentido. De fato, as futuras gerações dificilmente irão utilizá-las no seu dia a dia. No entanto, percebemos que o assunto "prova dos noves" pode servir para motivar o estudo de sistemas de numeração, além de contribuir na importância que os professores devem dar em ensinar operações aritméticas sem o uso de máquinas.

Dessa forma, tentaremos aqui mostrar por que a *prova dos noves* funciona; por que foi escolhido a prova dos noves e não dos setes, dos onzes ou de outro número qualquer e por que, às vezes, ela falha.

### *4.3.1 Definindo a Prova dos Noves*

Trata-se de uma forma de verificar resultados nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais, retirando da soma dos algarismos destes números o maior múltiplo de nove ou, o que é equivalente, achar o resto da divisão do número por 9. Utiliza-se para isso o artifício de somar os algarismos do número e, ao completar nove retira este valor do cálculo. Por exemplo: 438→4+3+8=15→1+5=6 (ou 15-9=6 e 6 é o resto da divisão de 438 por 9).

A relação entre a soma dos algarismos de um número e o resto de sua divisão por 9 pode ser justificada da seguinte maneira:

$$438=4.10^2+3.10+8=4.10^2+3.10+8+4-4+3-3=4.(10^2-1)+3(10-1)+8+4+3$$
$$4.99+3.9+15$$

Esse argumento é válido para um número n qualquer, uma vez que, para todo i≥1, $10^i-1$ é múltiplo de 9. Portanto, ao somarmos os algarismos de um número n, jogando os "noves fora" estamos de fato determinando o resto da divisão de n por 9.

### *4.3.2 Como funciona*

No caso da adição a prova dos noves acontece da seguinte maneira: (i) somam-se os algarismos que formam as parcelas aplicando a prova dos noves, em seguida (ii) somam-se os algarismos que formam o resultado da operação também aplicando a prova dos noves, caso os dois valores encontrados sejam iguais, então a operação efetuada está correta segundo a prova dos noves. Por exemplo:

$$\begin{array}{r} 435 \\ \underline{+32} \\ 467 \end{array}$$

(i) 4+3+5+3+2=17, noves fora, 8.

(ii) 4+6+7=17, noves fora, 8.

Portanto, a operação está correta, segundo a prova dos noves.

No caso da subtração, efetua-se (i) a soma dos algarismos que formam o minuendo aplicando a prova dos noves, em seguida (ii) somam-se os algarismos que formam o subtraendo e o resultado da operação também aplicando a prova dos noves, caso os dois valores encontrados sejam iguais, então a operação efetuada está correta segundo a prova dos noves. Por exemplo:

$$\begin{array}{r} 745 \\ \underline{-23} \\ 722 \end{array}$$

(i) 7+4+5=16, noves fora, 7.

(ii) 2+3+7+2+2=16, noves fora, 7.

Portanto, a operação está correta, segundo a prova dos noves.

No caso da multiplicação, (i) somam-se os algarismos que formam o primeiro fator, aplicando a prova dos noves, em seguida, (ii) somam-se os algarismos do segundo fator, também aplicando a prova dos noves. (iii) Multiplica-se os dois valores encontrados aplicando a prova dos noves, em seguida (iv) somam-se os algarismos que formam o resultado da operação efetuada e compara com o último valor encontrado, caso os números sejam iguais, a multiplicação efetuada está correta segundo a prova dos noves.

$$\begin{array}{r} 745 \\ \underline{x3} \\ 2235 \end{array}$$

(i) 7+4+5=16, noves fora, 7.

(ii) 3.

(iii) 7x3=21, noves fora, 3.

(iv) 2+2+3+5=12, noves fora, 3.

Portanto, a operação está correta, segundo a prova dos noves.

No caso da divisão, devemos considerar a divisão exata e a divisão não-exata. Na divisão exata (i) aplica-se a prova dos noves no divisor e no quociente, em seguida, (ii) multiplica-se os dois resultados encontrados, aplicando também a prova dos noves. (iii) Tiram-se os noves do dividendo. Comparam-se os resultados, sendo iguais, a operação efetuada está correta, segundo a prova dos noves. Na divisão não exata, (i) tiram-se os noves do divisor e do quociente, (ii) multiplicando os dois resultados, em seguida, tiram-se os noves deste resultado junto ao resto da divisão. (iii) Tiram-se os noves do dividendo. Caso os dois últimos resultados sejam iguais, a operação efetuada está correta. Mostremos um exemplo de cada caso:

<u>1º CASO</u> (Divisão Exata): 6288 : 12 = 524

(i) 12, noves fora, 3; 524, noves fora, 2.

(ii) 3 x 2 = 6.

(iii) 6288, noves fora, 6.

Como (ii) = (iii), portanto, a operação está correta, segundo a prova dos noves.

<u>2º CASO</u> (Divisão não exata): 7145 : 15 = 476, com resto igual a 5.

(i) 15, noves fora, 6; 476, noves fora, 8.

(ii) 6 x 8 = 48, noves fora, 3. 5+3=8.

(iii) 7145, noves fora, 8.

Como (ii) = (iii), portanto, a operação está correta, segundo a prova dos noves.

### *4.3.3 Por que funciona?*

Justifiquemos a prova em cada uma das operações. Sejam dados dois números $n_1$ e $n_2$ que, divididos por 9, deixam restos $r_1$ e $r_2$, respectivamente. Nessas condições, podemos escrever: $n_1=9q_1+r_1$ e $n_2=9q_2+r_2$. Segue-se, portanto, que:

*<u>ADIÇÃO</u>*

$$n_1 + n_2 = 9q_1+r_1+ 9q_2+r_2 = 9(q_1+q_2) + r_1+r_2$$

A última igualdade nos permite concluir que $n_1 + n_2$ e $r_1+r_2$, quando divididos por 9, deixam o mesmo resto. O princípio de funcionamento da prova dos noves é a substituição da operação $n_1 + n_2$ por $r_1 + r_2$, e a verificação se, quando divididos por 9, eles deixam o mesmo resto. Se isso não ocorrer, uma das duas (ou ambas as) operações estão erradas. Dada a simplicidade da determinação de $r_1$ e $r_2$, e da soma de $r_1+r_2$ (afinal os dois números são menores do que 9), é muito mais provável que o erro esteja na operação original.

*<u>SUBTRAÇÃO</u>*

$$n_1 - n_2 = 9q_1+r_1 - 9q_2 - r_2 = 9(q_1-q_2) + (r_1-r_2)$$

A última igualdade nos permite concluir que $n_1 - n_2$ e $r_1-r_2$ , quando divididos por 9, deixam o mesmo resto. O princípio de funcionamento da prova dos noves é a substituição da operação

$n_1 - n_2$ por $r_1 - r_2$, e a verificação se, quando divididos por 9, eles deixam o mesmo resto. Se isso não ocorrer, uma das duas (ou ambas as) operações estão erradas. Dada a simplicidade da determinação de $r_1$ e $r_2$, e da diferença de $r_1$-$r_2$ (afinal os dois números são menores do que 9), é muito mais provável que o erro esteja na operação original.

*MULTIPLICAÇÃO*

$$n_1 . n_2 = (9q_1+r_1).(9q_2 + r_2) = 81q_1q_2 + 9q_1r_2 + 9q_2 r_1+r_1r_2 = 9Q + r_1r_2$$

A última igualdade nos permite concluir que $n_1 . n_2$ e $r_1 . r_2$ , quando divididos por 9, deixam o mesmo resto. O princípio de funcionamento da prova dos noves é a substituição da operação $n_1 . n_2$ por $r_1 . r_2$, e a verificação se, quando divididos por 9, eles deixam o mesmo resto. Se isso não ocorrer, uma das duas (ou ambas as) operações estão erradas. Dada a simplicidade da determinação de $r_1$ e $r_2$, e do produto de $r_1.r_2$ (afinal os dois números são menores do que 9), é muito mais provável que o erro esteja na operação original.

*DIVISÃO*

Considerando $n_1$, $n_2$, $n_3$ e $n_4$ que, divididos por 9, deixam restos $r_1$, $r_2$, $r_3$ e $r_4$, respectivamente. Nessas condições, podemos escrever: $n_1=9q_1+r_1$; $n_2=9q_2+r_2$; $n_3=9q_3+r_3$ e $n_4=9q_4+r_4$. Segue-se, portanto, que:

$$n_1=n_2 . n_3 + n_4, \text{ onde } 0\leq n_4<n_2$$

temos $9q_1+r_1 = (9q_2+r_2).(9q_3+r_3) + (9q_4+r_4)$ daí $9q_1+r_1 = 9(9q_2q_3+q_2r_3+q_3r_2+q_4) + r_2r_3 + r_4$

***4.3.4 Por que a prova dos noves?***

Usamos a prova dos noves porque a base do nosso sistema de numeração é 10 e para todo $i\geq1$, $10^i$ dividido por 9 deixa resta 1. Dessa forma, não há nenhuma restrição teórica em utilizarmos, por exemplo, uma prova dos quinze. A dificuldade é essencialmente de ordem prática, pois estamos efetuando as operações no sistema decimal. Caso fizéssemos a operação utilizando o sistema de base 15, a prova dos 15 seria válida pelos mesmos motivos já mostrados na prova dos noves.

### *4.3.5 Por que, às vezes, ela falha?*

Inicialmente vamos perceber que, se uma conta estiver certa e a prova dos noves for executada corretamente, ela irá sempre confirmar a exatidão da resposta. A possibilidade de falha ocorre quando a conta está errada e a prova não é capaz de detectar o erro. Da discussão feita acima, segue-se facilmente que isso ocorrerá se e somente se o resultado obtido e o resultado correto diferem por um número múltiplo inteiro de nove, ou seja, se houver alternância de posição dos algarismos que formam o número já que a ordem das parcelas não altera a soma. De fato, se a resposta dada para a multiplicação 234 x 135 fosse 31950, o nosso erro não seria detectado pela prova dos noves.

## 4.4 Números Inteiros (Regra dos Sinais)

### *4.4.1 Números Negativos nas antigas civilizações*

Segundo Anjos (2008), o desenvolvimento histórico dos números negativos ainda gera incertezas, pois as fontes primárias e as secundárias nem sempre dão subsídios eficientes para a construção de estudos pautados em moldes que asseguram certa validade. Dessa forma, gerou-se visões contraditórias sobre os contextos em que surgiram os números negativos, sendo eles social e matemático, bem como dos limites cronológicos das informações que sugestionam o seu uso e, principalmente, das barreiras conceituais que surgiram durante o desenvolvimento do conceito de número negativo.

O surgimento do conceito de número negativo, bem como de vários outros conceitos matemáticos, teve origens diversas entre as civilizações. Os registros que se tem acerca do uso desses números variam conforme a interpretação de alguns estudiosos, mas é bem verdade, que o aparecimento desse conceito estava intimamente relacionado com a cultura, crenças, desenvolvimento social e/ou econômico das civilizações.

Trataremos aqui das civilizações antigas: egípcia e chinesa, grega, hindu, império árabe, e um pequeno relato sobre a presença desses números na civilização europeia.

*4.4.1.1 Números Negativos nas civilizações egípcia e chinesa.*

Por muito tempo os egípcios realizavam atividades que mostravam o uso de linhas de níveis, as quais indicavam o uso posicional do número que sugestiona, por sua vez, a ideia de número negativo. Esse fato, entretanto, não ocasionou o surgimento dos números negativos na matemática egípcia.

> Os egípcios não somente tinham uma palavra específica para zero, *nfr*, como também aplicavam as malhas quadriculadas na construção de pirâmides. Nessa aplicação, os egípcios escolhiam uma linha ao nível do chão como linha zero (*nfr*) e numeravam as outras linhas como sendo um cúbico acima de zero, dois cúbicos acima de zero e, de forma análoga, um cúbico abaixo de zero, dois cúbicos abaixo de zero. (LUMPKIN, 1996, *apud* ANJOS, 2008)

Em outras civilizações, como a China o início dos números negativos foi uma consequência da estrutura filosófica única desse país. Para Martzloff (1997) citado por Anjos (2008), a compreensão de como se deu a aceitação dos números negativos na matemática chinesa passa pela análise dos fundamentos filosóficos da própria cultura chinesa, a qual foi concebida sobre a visão de opostos complementares. Porém, o fato da estrutura filosófica da China ter sido construída sobre a concepção de opostos complementares não assegurou por completo a aceitação dos números negativos, pois outras culturas da Antiguidade, como a grega, não desenvolveram o uso dos negativos, embora tivessem uma filosofia de opostos, ainda que não tão forte quanto a dos chineses.

Segundo Anjos (2008) com base em Jean C. Martzloff (1997), afirma que foi na matemática chinesa onde surgiram os primeiros registros que envolveram o uso de números negativos argumentando que a ocorrência da noção dos números negativos, provavelmente, já estivesse presente no início da dinastia Han (206 a.C a 220 d.C). De fato, foi durante a dinastia Han que o mais importante dos textos da matemática chinesa da antiguidade foi produzido. Intitulado de *K'u-ch'ang Suman Shu* ou *Nove Capítulos da Arte Matemática*, é considerado o texto referência da matemática chinesa na antiguidade. Essa obra se tornou a fonte mais importante na análise da visão numérica dos chineses.

Dessa forma, no contexto de resolução de equações, os antigos chineses usavam os conceitos de opostos complementares, já presentes em sua filosofia, para fundamentar e interpretar o uso dos números negativos. Essa interpretação feita diante dos números negativos provavelmente surgiu no próprio processo de cálculo usado pelos chineses, o qual consistia na manipulação de varas. Nesse processo havia a seguinte distinção: varas vermelhas para representar os negativos e pretas para representar os positivos. Dessa forma o número três, por exemplo, se apresentava com uma ou outra característica – positivo (preto), negativo (vermelho). Nesse contexto, o conceito de número estava essencialmente ligado à expressão de uma quantidade definida de algo definido. Consequentemente, de acordo com Anjos (2008, p.16), "[...] a ideia de negatividade e positividade na matemática chinesa era a expressão de características complementares de um mesmo número, ou seja, não havia números opostos e sim, aspectos complementares de um mesmo número."

Portanto, na matemática chinesa os números negativos não eram considerados entidades independentes, sendo assim, só existiam como intermediários na execução de algum algoritmo, por exemplo, o algoritmo da extração das raízes de um polinômio ou até mesmo como auxílio para a interpretação de alguma situação-problema com ideia de perda e ganho.

#### *4.4.1.2 Números negativos na civilização grega*

Não há evidência do uso de número negativo na antiga civilização grega. Essa constatação talvez não seja surpreendente, já que os chineses estavam culturalmente afastados dos gregos e, por isso, teriam pouca influência sobre eles; enquanto os hindus só desenvolveram o uso dos números negativos depois da formação matemática grega clássica. A cultura que teve mais influência sobre os gregos foi a egípcia, a qual desenvolveu, como vimos, linhas de nível, mesmo assim, parece que os egípcios não usaram números negativos explicitamente. Nesse sentido, a ideia de número negativo não estava presente na civilização grega.

A estrutura matemática da antiga Grécia tinha como base uma estrutura hierárquica conhecida como Teoria da Linha Dividida (Aritmética Prática/Logística Prática/Logística Teórica/Aritmética Teórica), em sentido crescente da esquerda para a direita. Portanto, o nível da Prática pressupunha o nível da Teoria. Sendo assim, a Aritmética Prática referia-se ao nível mais baixo de *aithmoí* (contagem de coisas concretas) e a Aritmética Teórica, o nível mais alto de *arithmoí,* ou seja, *arithmoí puros*, os quais poderiam ser conceituados como quantidades definidas de mônadas. A mônada, no contexto pitagórico, era a unidade indivisível. Além disso, a mônada, sob o aspecto da Linha Dividida, segundo Erickson e Fossa (2005), era o correlato matemático do Hum, o primeiro dentre as Ideias Transcendentais e, portanto, a fonte de tudo.

> Por isso, dado o conceito de mônada, os números negativos seriam, na Aritmética Teórica, uma impossibilidade intelectual, uma vez que a única propriedade da mônada era a sua unidade. Assim, se algo tivesse a propriedade de ser positivo ou negativo não poderia ser mônada, havendo assim a dúvida se os números negativos poderiam surgir dentro da Aritmética Prática. De fato, esse seria o lugar apropriado para procedimentos semelhantes aos desenvolvidos pelos egípcios (linhas de nível) e hindus (débito). Do ponto de vista dos gregos, porém, a Aritmética Prática era enumeração de unidades concretas e seriam essas unidades que poderiam ter a propriedade de serem positivas ou negativas. Um débito de 100 reais, por exemplo, seria concebido como 100 unidades de débito. Dessa forma, a negatividade não residia no número, mas na unidade. (ANJOS, 2008, p. 23)

#### *4.4.1.3 Números negativos na civilização hindu*

Segundo Eves (2004), durante o século III a.C, ou seja, paralelamente à dinastia Han, na China, a matemática desenvolvida na Mesopotâmia evidenciou o uso da regra de sinais em tábulas astronômicas. Entretanto, Jeans Hoyrup (2001) mostrou que esse é um erro que se originou da má interpretação de uma formulação algébrica que *Otto Neugebauer* fez para esclarecer os textos babilônicos.

Sob influência ou não da civilização chinesa, a grande maioria dos textos hindus estiveram voltados, eminentemente, para a astronomia, mostrando assim que, a matemática hindu era essencialmente uma ferramenta da astronomia, ou seja, a matemática hindu era em sua essência prática e reconhecida historicamente pelo trato sistemático dos números negativos. O formato estruturado que os números negativos tinham na matemática hindu, geralmente encontraram como marco inicial o trabalho do eminente matemático *Brahmagupta* (598-665 d.C) intitulado de *Brahmasphutasidd'hanta* (o sistema de Brahma revisado). Nessa exposição sistemática dos números negativos, *Brahmagupta* fez uso de regras de sinais. Além disso, tratou de forma genérica as equações quadráticas e as lineares diofantinas (ax+by=c), deixando explícita a aceitação dos negativos como possibilidade de solução para esses tipos de equação. No entanto, o uso sistemático dos números negativos não pareceu algo uniformemente aceito perante os matemáticos hindus, pois o famoso *Bhaskara* (1114-1185), por exemplo, desconsiderava as raízes negativas.

Essas duas visões diante da matemática hindu e, em particular, sobre o texto de *Brahmagupta*, evidenciam que a matemática hindu apesar de ter tido um caráter prático relacionado à astronomia, também apresentou grupos de problemas que não tinham objetivos práticos, propostos "simplesmente por prazer".

Ao analisarmos as civilizações da Antiguidade que sugestionaram o uso dos números negativos, como os egípcios, ou aquelas que concretizaram o uso desses números, como os chineses e os hindus, claramente há uma consolidação dos números negativos sobre aspectos práticos, embora os hindus, como vimos, tenham apresentado uma postura que dualizava aplicação e teoria, em que a concepção de número negativo estava sempre atrelada aos problemas práticos (suscetíveis à interpretação de ganho e perda). De fato, o contexto em que surgiram os números negativos deu-se no processo de resolução de equações, que eram oriundas de problemas práticos. Porém, as condições de existência dos números negativos diferenciavam-se no decorrer da história e de civilização para civilização. Por exemplo, na civilização da antiga China, os números negativos, como vimos acima, eram apenas intermediários de um processo matemático, enquanto que já na antiga Índia, tinham um caráter mais independente.

#### *4.4.1.4 Números negativos no império árabe*

Segundo Boyer (1974) citado por Pontes (2010), a Matemática árabe possui como características próprias em seus textos, uma apresentação clara e sistemática. A civilização árabe recebe influências das civilizações grega e hindu, no entanto, prevalece, na matemática árabe, a postura grega de não aceitação dos números negativos.

> A Álgebra Geométrica é o campo mais contemplado com contribuições significativas por parte da matemática árabe, especialmente de Omar Khayyam (c.1038/48-1123/24) que, dando continuidade ao modelo de al-Khwârizmî, dedica-se à resolução geométrica de equações cúbicas, determinando suas raízes como a interseção de duas seções cônicas. Sua Álgebra fazia distinção entre soluções geométricas e algébricas. Nesse último tipo de solução, são consideradas apenas as soluções racionais positivas, pois as raízes negativas são também rejeitadas. (PONTES, 2010, p.47-48)

Anjos (2008), configura a Matemática árabe como um dos principais meios de interação entre o Império Árabe e a Europa ocidental, onde no final século X, inicia um período de inércia econômica e intelectual. Em contrapartida, essa inércia, na Europa, permite a introdução do conhecimento preservado ou desenvolvido pelos árabes, inicialmente, com a tradução dos textos árabes para o latim e, em uma fase posterior, com a apreensão de conhecimentos aritméticos e algébricos, úteis ao comércio que se estabelece entre o oriente e o ocidente.

*4.4.1.5 Os números negativos na civilização europeia*

A partir do século XIII, a Europa começou a se desenvolver intelectualmente, em especial, em relação aos números negativos. Dessa forma, muitas pessoas se dedicaram ao estudo da matemática, como é o caso do matemático Leonardo de Pisa(c. 1175-1250), também conhecido por Fibonacci. Autor da obra Liber abaci – Livro do ábaco – escrito em 1202, voltado para práticas comercias onde contém resolução de equações quadráticas, em consequência, transita entre a prática e a teoria. Fibonacci, publica duas obras *Flos* e *Liber quadratorum*, onde se observa um posicionamento do autor em, não só aceitar a existência dos números negativos, mas também de considerá-los com raízes de uma equação.

> A aceitação dos números negativos só é possível com o surgimento de um sistema bancário que surge nas cidades no norte da Itália, principalmente em Florenza e Veneza, no decorrer do século XIV, entretanto, a crescente utilização desse números não garante a sua aceitação como quantidades isoladas, processo que se mostrou difícil e controverso. (MEDEIROS, 1992, *apud* PONTES, 2010, p.49)

A expansão comercial ocorrida no início do Renascimento (final do século XIV) aumentou a circulação de dinheiro, obrigando os comerciantes a expressarem situações envolvendo lucros e prejuízos. Segundo Struik (1997) citado por Pontes (2010), com a invenção da imprensa, por volta de 1439, surgem vários livros destinados ao ensino da Aritmética prática para aplicações comerciais. A maneira que eles encontraram de resolver tais situações problemas consistia no uso dos símbolos + e -. Supondo que um comerciante possua em seu armazém sacas de arroz de 10kg cada. Se ele vendesse 3kg de arroz, escreveria o número 3 acompanhado do sinal -; se ele comprasse 5kg de arroz, escreveria o número 5 acompanhado do sinal +. A utilização dos sinais + e - em medidas de armazéns foi citado em um livro de Aritmética Comercial escrito por Jonhann Widman (1462-1498), professor alemão, intitulado *Behende und hubsche Rechenung auff allen Kauffmanschafft*, lançado em

1489, onde o símbolo “+”, representava excesso e o “-”, deficiência. Nesse caso, tais símbolos não tinham significados de adição e subtração de hoje, pois, até então, essas operações eram indicadas pelas letras **p** (de *piu*, "mais") e **m** (de *meno*, "menos").

Pontes (2010) ressalta ainda que, no século XVI, as universidades italianas consolidaram-se como grandes centros para a Matemática, gerando um fervor científico, que seria intensificado com a nova concepção de universo defendida por Copérnico em 1543.

Em 1544, no livro *Arithmetica integra* o alemão Michael Stifel (1487-1567), também contribui para difundir os símbolos “+” e “-” para representar números positivos e negativos. Nesse livro, considerado o mais importante de todas as álgebras alemãs do século XVI, demonstra muito conhecimento acerca dos números negativos, mesmo referindo-se a eles como “números absurdos”.

Glaeser (1981) (*apud* Pontes, 2010) ao afirmar que o matemático francês Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) manifesta em suas conferências pedagógicas as mesmas perturbações que seus antecessores enfrentaram em lidar com os números negativos, contudo, antevê alguns elementos de solução. Para ele, a regra de sinais exibe algumas dificuldades e sugere, portanto, para dar sentido ao produto -a por -b, que seja observado, inicialmente, que -a x (+b)=-ab, pois o produto corresponde ao -a, repetido tantas vezes quantas são as unidades de b. Em seguida, que -a x (b-b)=0, ou seja, -a x (+b)-a x (-b)=0. Como -a x (+b) = -ab, então, -a x (-b)=+ab, para eliminar -ab. Pontes (2010) ressalta como pontos positivos dessa justificativa para a regra de sinais o destaque dado ao papel da propriedade distributiva na demonstração e a ausência de referência a um modelo físico.

Em sua justificativa para a regra de sinais, Cauchy citado por Glaeser (1981) assim procede: considera A um número e faz a=+A e b=-A, tendo, portanto, +a=+A, +b=-A, -a=-A e -b=+A. Substituindo a e b por seus valores +A e -A, obtém, respectivamente, +(+A)=+A, +(-A)=-A, -(+A)=-A e -(-A)=+A. Em cada uma dessas igualdades, o sinal do segundo membro corresponde ao produto dos dois sinais do primeiro. Ou seja, o produto de dois sinais iguais é +, enquanto o produto de dois sinais opostos é -. Cauchy demonstra a composição somente para sinais predicativos, mas extrapola-a para sinais operatórios.

Em um cenário diferente do francês, Leonard Euler (1707-1783) destaca-se na Alemanha pela destreza em trabalhar com números relativos e complexos sem levantar questões relacionadas à legitimidade de suas construções.

> Euler, na obra *Vollstandige anleitung zur algebra* – Completa Introdução à Álgebra – (1770), apresenta uma justificativa para a regra dos sinais, partindo do argumento de que a multiplicação de uma dívida por um número positivo não apresenta dificuldade, logo b(-a) = -ab e por comutatividade deduz que (-a)b=-ab. Lembra que os argumentos não têm valor para uma lei externa. Para determinar o produto (-a)(-b), usou o argumento de que, se o valor absoluto é ab, trata-se de decidir entre +ab e -ab. Como (-a)b já vale -ab, a única possibilidade restante é que (-a)(-b)=+ab. Portanto, sua tentativa de explicar a regra dos sinais, assim como a de Laplace, não correspondeu à fundamentação rigorosa buscada pelos matemáticos do século XVIII. (GLAESER, 1981, *apud*, PONTES, 2010, p.57)

Isaac Newton (1642-1727), segundo Anjos (2008), apresentou, na Inglaterra, um modelo matemático que teve tanto o foco geométrico quanto o aritmético-algébrico. Newton concebia os números negativos como "quantidades menores que nada", demostrando uma visão pragmática a respeito desses números. Isso o levou a apresentar a regra dos sinais através de muitos exemplos, mas sem nenhuma justificativa.

> Colin MacLaurin (1698-1746), grande defensor da Matemática de Newton, contribui para a modernização de conceitos matemáticos com o lançamento da obra, em 1748, *Treatise of algebra*. […] também enuncia a regra dos sinais, afirmando que o produto de termos com os mesmos sinais é positivo e, o produto de termos com sinais diferentes é negativo. Sua demonstração para essa regra indica que sendo +a-a=0, quando se multiplica +a-a por um número positivo n, temos o primeiro termo igual a +na e o segundo, consequentemente, igual a -na, pois, os dois termos precisam ser anulados. Portanto, o produto de dois números com sinais diferentes é um número negativo. Quando se multiplica +a-a por um número negativo, no primeiro termo será obtido -na e, no segundo, consequentemente, será obtido +na, pois, os dois termos devem ser anulados; portanto, o produto entre dois números negativos é positivo. (PONTES, 2010, p.58)

A aceitação e a operacionalização com números negativos foi uma questão que, durante séculos, gerou reflexões envolvendo estudiosos em diversas áreas das ciências. Nesse contexto, muitos matemáticos se dedicaram ao estudo e à legitimação dos números negativos desenvolvendo técnicas operatórias capazes de expressar qualquer situação envolvendo números positivos e negativos. Muitas obras foram reeditadas com o intuito de incorporar o formalismo, a estética dos textos matemáticos e de maneira clara o alcance e os limites do método axiomático. Dessa forma, surgia um novo conjunto numérico representado pela letra $\mathbb{Z}$ (significa *zahlen*, "número" em alemão), sendo formado pelos números naturais e seus respectivos opostos, podendo ser escrito de maneira usual, dada por Georg Cantor (1845-1918), da seguinte forma: $\mathbb{Z} = \{...,-3,-2,-2,0,1,2,3, ...\}$.

### *4.4.2 Regras dos Sinais*

No Brasil, o ensino formal do conjunto $\mathbb{Z}$ é apresentado pela primeira vez no 7º ano do ensino fundamental. É nesse momento que o conceito de número vai tomando uma dimensão maior, e também, onde percebemos diversas dificuldades que acompanham os alunos desde a construção do conceito até a sua operacionalização.

Segundo os PCNs (BRASIL, 1998, *apud* PONTES, 2010), "[...] é preciso levar em conta que os alunos desenvolvem, já nas séries iniciais, uma noção intuitiva dos números negativos que emerge de experiências práticas." Em contrapartida, o mesmo documento adverte que o estudo dos números inteiros não pode se limitar apenas a esses aspectos, mas incorporar situações que favoreçam a compreensão de regras do cálculo com esses números pela observação de regularidades e aplicação das propriedades das operações com números naturais.

As ideias referentes aos números negativos são apresentadas aos alunos através de situações práticas e exemplos cotidianos, porém, os números negativos presentes nelas não são os mesmos usados na escola. Um exemplo dessa contradição é a dificuldade ou, até mesmo, a impossibilidade em produzir significado para multiplicações como (-3)(-5) tomando como recursos as dívidas. O problema da multiplicação de números negativos só foi resolvido quando os matemáticos assumiram, definitivamente, que não existia significado no cotidiano para essa operação e começaram a procurar, segundo Lins e Gimenez (1997) *apud* Pontes (2010), "[...] um significado produzido com base nos princípios que permitem, na matemática acadêmica, a existência daquelas estranhas coisas, quantidades que são menos do que nada."

Dessa maneira, em alguns momentos, por falta de uma orientação adequada e por praticidade, professores são levados a orientar a memorização, de maneira descontextualizada, das regras de sinais de diversas formas: músicas, versinhos, brincadeiras, etc. De certa forma, essa atitude acelera a resolução das operações (para alunos que não possuam dificuldades de aprendizagem), porém não constrói de forma consistente a diferença existente entre a aplicação dos sinais nas operações, ocasionando a grande deficiência que os alunos possuem na resolução de problemas com sinais. Nesse contexto, as regras de adição e subtração são, com frequência, confundida com as da multiplicação e divisão.

> Múltiplas abordagens relativas às regras dos sinais podem contribuir para a aprendizagem das operações com números inteiros, pois abrem espaço para a exploração das várias linguagens matemáticas, que permitem ampliar a rede de significados do conhecimento matemático. No desenvolvimento de um trabalho com as regras dos sinais, deve-se esclarecer para os alunos que essas regras não podem ser provadas, mas justificadas e que são derivadas da necessidade de conservar a coerência dos princípios da Matemática. Para Caraça (1970), a lógica própria da Matemática deve ser destacada, pois, algumas vezes, não obtém contexto mais adequado no cotidiano. Dessa forma, as alternativas para trabalhar as operações com números inteiros, que extrapolam situações do cotidiano, precisam ser também contempladas. (PONTES, 2010, p.27)

Destacamos, aqui, que a regra de sinais não pode ser provada, mas sim justificada. É de grande importância que os alunos do ensino básico saibam que tais regras não foram simplesmente inventadas, mas são consequências da necessidade de se manter a coerência nos princípios ou fundamentos da Matemática.

#### *4.4.2.1 Adição e Subtração de Números Inteiros*

Pontes (2010) apresenta três modelos básicos para as operações de adição e subtração proposta por Gonzáles *et al* (1990). São eles: aritmético, geométrico e algébrico. Pommer (2010), em seu artigo intitulado *Diversas abordagens das regras de sinais nas operações elementares em* $\mathbb{Z}$ , apresenta, além dos três modelos citados, o modelo conjuntista.

<u>MODELO ARITMÉTICO:</u>

Neste modelo, parte-se do conjunto dos Números Naturais e mostra-se a insuficiência desse conjunto. São utilizadas situações concretas evocadas, porém devem ser utilizadas generalizações conceituantes, associadas à abstração. No ensino, é muito comum a utilização da metáfora ganho (positivo) e perda (negativo), representados pelos respectivos sinais, “+” e “-”. Ressaltamos que este modelo, o qual se utiliza de situações do cotidiano, deve ser utilizado com moderação, pois só é válido nas operações de adição/subtração, não permitindo a extensão deste modelo para as operações de multiplicação/divisão, sendo considerado um obstáculo.

<u>MODELO GEOMÉTRICO:</u>

Este tipo de modelo essencialmente emprega a reta real, com uma origem O e um sentido positivo e negativo, porém existem variações. A ideia é reproduzir deslocamentos em sentidos variados.

> Um ponto material sofre sucessivos deslocamentos, a partir de um marco inicial (que pode ser adotado como origem dos espaços ou zero), em dois possíveis sentidos: para a direita ou esquerda. Poderíamos convencionar os pontos para a direita como referência positiva ou negativa; porém, a Matemática estabeleceu os pontos à direita da origem como positivos e aqueles a esquerda como negativos, conforme se observa na figura 1. Assim, a reta orientada é aquela que possui um ponto de referência, considerada a origem O, uma direção e dois sentidos: de O para a direita, onde são posicionados os valores positivos e de O para a esquerda, onde são considerados os valores negativos. (CARAÇA, 1970, *apud*, POMMER, 2010, p.5)

Esse modelo muitas vezes é utilizado como justificativa das operações de adição e subtração por ter fácil compreensão associando a concepção de 'sentido de percurso' (negativos no sentido para a esquerda da reta e positivos para a direita), com a ideia geométrica da imagem ou simétrico de um objeto, no caso um número. Além do mais, essas variações do modelo geométrico em situações-problema, podem acrescentar significado às regras de operações.

Uma dessas possibilidades foi apresentada por Vergnaud, em 1976 citado por Pontes (2010), onde se utiliza um eixo de coordenadas em que os valores numéricos são colocados no eixo vertical e a ordem temporal (antes, durante e depois) é colocada no eixo horizontal. Pommer (2010) situa os obstáculos na compreensão dos problemas aditivos ao modo como os dados estão colocados no texto (obstáculos redacionais) e não ao cálculo numérico. Para o autor, as dificuldades se situam na ordem temporal que são apresentados os dados, na congruência ou não-congruência e na presença de verbos portadores de informação numérica.

> O caso da inversão na ordem temporal ocorre quando for trocada a exposição dos dados, ou seja, se forem dados um resultado parcial e o total e for solicitado o(s) outro(s) dado(s) parcial(ais). O caso da não congruência se refere à não existência de correspondência semântica entre a escrita léxica com a operação (o sinal positivo com a operação de adição e o sinal negativo com a operação de subtração). Quanto aos verbos, a existência de antônimos é fator de dificuldades (ganha/perde; sobe/desce). (POMMER, 2010, p.6)

Ilustremos o método usado por Vergnaud (1976) com dois exemplos:

“Pedro tem três bolinhas. Joga duas partidas. Na primeira, ganha 2 bolinhas. Na segunda, perde 1 bolinha. O que acontece no final?”. Esse primeiro exemplo, representado na figura 3, de fácil entendimento, apresenta uma ordem temporal, pois são dados os valores das partidas na ordem em que ocorrem. Porém, não é o que ocorre no segundo exemplo, representado na figura 4, onde é apresentada uma situação de inversão temporal, exigindo uma maior mobilidade do aluno. Vejamos: “Carlos joga duas partidas de bolinhas de gude. Joga uma primeira partida e depois uma segunda. Na segunda partida ele perde 6 bolinhas. Depois dessas duas partidas, ganhou 2 bolinhas. O que aconteceu na primeira partida?”

Figura 4 – A representação gráfica do problema de Pedro

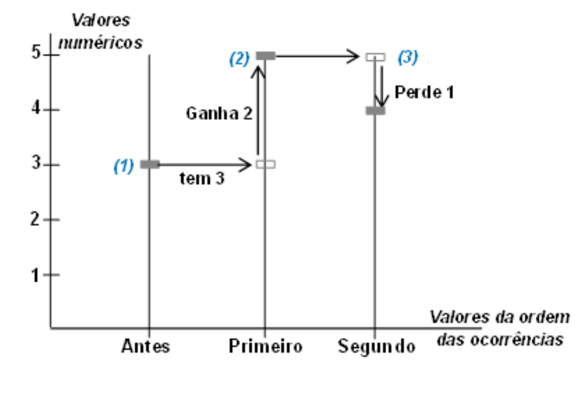
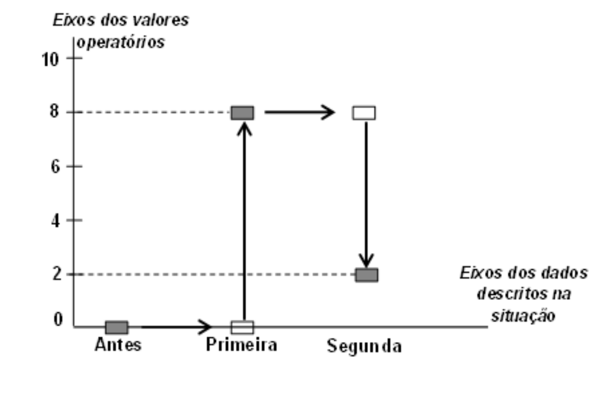



Figura 5 – A representação gráfica do problema de Carlos




Fonte: POMMER (2010).

*MODELO ALGÉBRICO*

Esse modelo, segundo Pontes (2010), possibilita a redução de obstáculos presentes no trabalho com os números inteiros e proporciona uma boa oportunidade do uso de novas linguagens (gráfica, aritmética e algébrica), facilitando a resolução de problemas de transição entre a Aritmética e a Álgebra. No segundo exemplo, apresentado acima, fica representado da seguinte maneira $x+(-6)=2$, da qual encontramos que o valor desconhecido, ou seja, a quantidade de bolinhas na primeira partida é igual a 8.

*MODELO CONJUNTISTA:*

Para Pommer (2010), a oportunidade de sistematização do conjunto dos Números Inteiros, ocorreu com o surgimento do Cálculo Diferencial e Integral de Newton e Leibnitz, no século XVII. Dois séculos depois, com o domínio da integridade, surgiu uma opção de uma construção conjuntista, através do conceito de classe de equivalência, considerando-se a estrutura algébrica de $\mathbb{Z}$ como Anel Abeliano.

Nesse modelo, é possível corresponder os números inteiros a um par ordenado, de modo que qualquer número inteiro positivo **k** está associado ao par (k;0) e qualquer número inteiro negativo -k está associado ao par canônico (0;k). Por exemplo, 3=(3;0) e -3=(0;3). As operações nessa situação se dão da seguinte forma: soma-se as coordenadas correspondentes do par ordenado na ordem dada. Por exemplo: -4+6=(0;4)+(6;0)=(6;4)=2 e -2-5=(0;2)+(0;5)=(0;7)=-7.

Partindo desses pressupostos, a regra da adição nesse modelo é dada por:

(k;0) + (w;0) = (k+w;0) = k+w → A soma de dois inteiros positivos é positiva.

(0;k) + (0;w) = (0;k+w) = -(k+w) → A soma de dois inteiros negativos é negativa.

(k;0) + (0;w) = (k;w) = k-w → Se k>w, então o resultado é positivo, e se k<w, negativo.

*4.4.2.2 Multiplicação e Divisão de Números Inteiros*

Aprendemos que ao multiplicarmos ou dividirmos dois números de mesmo sinal o resultado é positivo, caso os sinais dos dois números forem diferentes (um positivo e o outro negativo, vice-versa) o resultado é negativo. Aqui temos a famosa regra de sinais: mais com mais dá mais, menos com menos dá mais, mais com menos dá menos. Para aqueles não acostumados a estudar matemática, essa regra causa uma certa confusão, pois na adição/subtração eles aprenderam a somar ou subtrair despesas e receitas deixando o resultado positivo quando se há crédito e, negativo quando se fica devendo.

Na multiplicação, as ideias relacionadas à operação devem ser ampliadas. O conceito de operador multiplicativo que, nos números naturais, indica a quantidade de vezes em que um número se repete, nos inteiros, produz também transformações de aumento e diminuição no resultado de acordo com os sinais que estejam em jogo. Portanto, nos números inteiros, permanecer apenas com a ideia da multiplicação repetida seria um empecilho para a justificativa de (-1)x(-1)=+1. Quando o operador multiplicativo é positivo significa repetir o número, seja positivo ou negativo, uma quantidade de vezes dentro da mesma região (ao multiplicar, o resultado conserva-se na região negativa). No entanto, quando o operador é negativo, transforma o resultado obtido, mudando sua região.

O professor Elon Lages Lima, em um de seus livros, *Meu Professor de*

*Matemática e outras histórias* (1991), dedica as últimas 55 páginas a esclarecimentos de dúvidas e questões em geral que preocupam o professor de Matemática, temas esses sugeridos por diversos leitores. Na leitura da obra de Elon, encontramos uma breve justificativa a um caso específico que envolve o produto de números inteiros, bastante pertinente à nossa pesquisa.

> **2. Por que (-1)(-1)=1?**
> Meu saudoso professor Benedito de Moraes costumava explicar, a mim e a meus colegas do segundo ano ginasial, as “regras de sinal” para a multiplicação de números relativos da seguinte maneira:
>
> 1ª) o amigo do meu amigo é meu amigo, ou seja, (+)(+) = +;
>
> 2ª) o amigo do meu inimigo é meu inimigo, isto é, (+)(-) = -;
>
> 3ª) o inimigo do meu amigo é meu inimigo, quer dizer, (-)(+) = -; e, finalmente,
>
> 4ª) o inimigo do meu inimigo é meu amigo, o que significa (-)(-) = +.
> Sem dúvida, essa ilustração era um bom artifício didático, embora alguns de nós não concordássemos com a filosofia maniqueísta contida na justificação da quarta regra (podíamos muito bem imaginar três pessoas inimigas entre si).
> Considerações sociais à parte, o que os preceitos acima dizem é que multiplicar por – 1 significa “trocar o sinal” e, evidentemente, trocar o sinal duas vezes equivale a deixar como está. Mas, geralmente, multiplicar por – a quer dizer multiplicar por (-1)a, ou seja, primeiro por *a* e depois por – 1, logo multiplicar por –a é o mesmo que multiplicar por a e depois trocar o sinal. Daí resulta que (-a)( -b) = ab.
> Tudo isso está muito claro e as manipulações com números relativos, a partir daí, se desenvolvem sem maiores novidades. Mas, nas cabeças das pessoas mais inquisidoras, resta uma sensação de “magister dixit”, de regra outorgada pela força. Mais precisamente, insinua-se a dúvida: será possível *demonstrar,* em vez de impor, que (-1)(-1) = 1?
> Não se pode demonstrar algo a partir do nada. Para provar um resultado, é preciso admitir uns tantos outros fatos como conhecidos. Esta é a natureza da Matemática. Todas as proposições matemáticas são do tipo “se isto então aquilo”. Ou seja, admitindo isto como verdadeiro, provamos aquilo como consequência.
> Feitas estas observações filosóficas, voltemos ao nosso caso. Gostaríamos de provar que (-1)(-1) = 1. Que fatos devemos admitir como verdadeiros para demonstrar, a partir deles, esta igualdade?
> De modo sucinto, podemos dizer que (-1)(-1) =1 é uma consequência da lei distributiva da multiplicação em relação à adição, conforme mostraremos a seguir.
> Nossa discussão tem lugar no conjunto Z dos números inteiros (relativos), onde cada elemento *a* possui um simétrico (ou inverso aditivo) –a, o qual cumpre a condição –a+a=a+(-a)=0. Daí resulta que simétrico –a, é caracterizado por essa condição. Mais explicitamente, se b+x = 0, então x = -b, como se vê somando –b a ambos os membros. Em particular, como –a+a = 0, concluímos que a = - (- a), ou seja, que o simétrico de –a é a.
> Uma primeira consequência da distributividade da multiplicação é o fato de que a.0 = 0, seja qual for o número a.
>
> Com efeito, a + a.0 = a .1 + a.0 = a (1 + 0) = a.1 = a = a + 0.
> Assim, a + a.0 = a + 0, logo, a . 0 = 0.
> Agora podemos mostrar que (-1) . a = -a para todo número a.
> Com efeito, a + (- 1). a = 1.a + (-1)a = [1+ (-1)].a = 0.a = 0, logo (-1).a é o simétrico de a, ou seja, (-1)a = -a.

> Em particular, (-1)(-1) = - (-1) = 1. Daí resulta, em geral, que (-a)(-b) = ab, pois (-a).( -b) = (-1)a.( -1)b = (-1)( -1)ab = ab. (LIMA, 1991, p.151-152).

O professor Elon também apresenta nesse mesmo livro algumas justificativas enviadas por leitores para a pergunta proposta acima.

> ... um ganho será representado por um número positivo e a perda por um número negativo. Igualmente, o tempo no futuro será representado por um número positivo e no passado por um número negativo. […] Se perde 5 dólares por dia, então daqui a 3 dias terá perdido 15 dólares, ou seja, (-5)(+3)=-15. Se perde 5 dólares por dia, então a 3 dias atrás estava 15 dólares mais rico, ou seja, (-5)(-3)=+15.(trecho do livro de Morris Kline, *O fracasso da Matemática Moderna*, enviado pela leitora Léa Santos, de São Paulo)

Lima (1991) afirma ser boa a sugestão apresentada pela leitora Léa Santos, podendo ser utilizada com êxito, inclusive porque contribui para que os alunos entendam melhor o uso de números negativos em problemas concretos.

Dessa forma, buscando problemas concretos, podemos apresentar as seguintes justificativas para cada situação envolvendo números inteiros.

* A situação (+3).(+4), não tem o que justificar já que é o mesmo que 3x4.

* Considerando (+3).(-4). Um exemplo de uma situação-problema que possa envolver esses números é: Imagine que tomei emprestado R$4,00 de meus três irmãos, dessa forma para somar as dívidas faço (-4)+(-4)+(-4)=-12, ou seja, estou devendo R$12,00, numericamente, (+3).(-4)=-12.

* Se a situação fosse o contrário, (-4).(+3), o resultado seria o mesmo pois sabemos que a multiplicação possui a propriedade comutativa.

* Se a situação fosse (-4).(-3). Sem utilizar a ideia enviada pela leitora Léa Santos ao professor Elon, este é o caso em que os livros didáticos não apresentam uma situação cotidiana, recorrendo a ideia de oposto. Então fazemos assim -(+4).(-3)=-(-12)=12. Nessa resolução é importante lembrar que o que estamos calculando na verdade é o oposto do produto entre quatro e menos três. Dessa forma faz-se a generalização dessa regrinha para os demais casos de produto com os números reais.

Segundo Pontes (2010), os modelos ligados ao cotidiano dos alunos devem ser utilizados apenas como ponto de partida, uma vez que não há uma correspondência dos inteiros com o mundo físico como acontece com os números naturais.

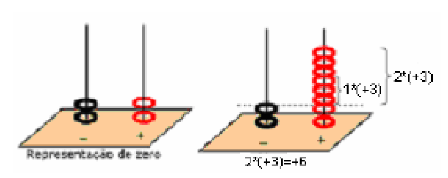
Coelho (2006) citado por Pommer (2010) apresenta a explicação usual das regras, que se baseia em propriedades aritméticas:

> <u>*Multiplicação composta de parcelas positivas*</u>
> Nesta situação, é utilizada a definição da operação de multiplicação, ou seja, a soma sucessiva de parcelas iguais, como no exemplo: 2*3=3*2=6 ou 3*2=2+2+2=6
> <u>*Multiplicação composta de multiplicador positivo e multiplicando negativo*</u>
> Neste caso, pelo princípio da extensão, esta situação recai na proposta acima descrita, como no exemplo: 2*(-3)=(-3)+(-3)=-6
> <u>*Multiplicação composta de multiplicador negativo e multiplicando positivo*</u>
> Nesta situação, utiliza-se a propriedade comutativa para recair na situação anterior, como no exemplo:
> (-2)*3=3*(-2)=-6
> <u>*Multiplicação composta de parcelas negativas*</u>
> Segundo a Proposta Curricular do Estado de São Paulo (1988), tal situação remete a utilização da propriedade do elemento neutro da adição e na operação da multiplicação de um número inteiro por zero. Por exemplo, para explicar que (-2)*(-3)=6, tal documento aponta que:
> 3*(-2)=(-2)+(-2)+(-2) (definição da multiplicação estendida)
> Pela existência do elemento neutro da adição, tem-se que (+3)+(-3)=0. Considerando-se que todo número multiplicado por zero é igual a zero, então: (-2)*0=0. Destas sentenças, decorre que (-2)*[(+3)+(-3)]=0. Pela aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em Z, tem-se que: (-2)*(+3)+(-2)*(-3)=0. Como (-2)*(+3)=-6, então a sentença fica: (-6)+(-2)*(-3)=0, ou ainda: -2*(-3)=6, pela propriedade do inverso aditivo em Z.

Uma possível justificativa para a abstrata regra de sinais para a multiplicação, segundo Coelho (2005) citado por Pommer (2010), pode ocorrer através do ábaco dos inteiros. Este ábaco consiste num material manipulável, inspirado no modelo de 'numerais em barra' do antigo povo chinês.

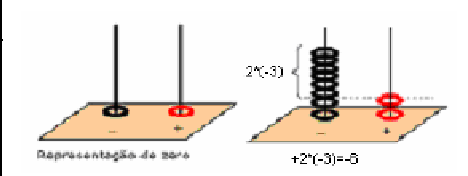
Iniciando com o exemplo, 2x3, temos:

Tabela 3*- A representação no sistema de barras chinesas e no ábaco dos inteiros (situação 1)

| Operação | Representação figural | Multiplicador | Multiplicando | |
|---|---|---|---|---|
| 3 + 3 = 6 | ■■■ ■■■ | 2 | 3 |  |
| 2 + 2 + 2 = 6 | ■■ ■■ ■■ | 3 | 2 | |

Para 2x(-3), basta desenhar dois grupos de três quadrados pretos, veja:

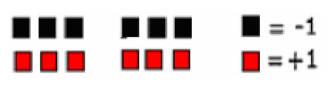
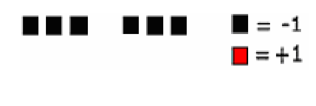
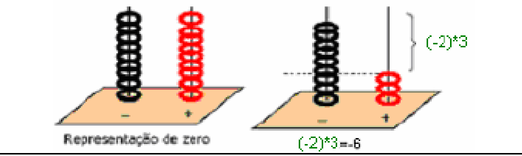
Tabela 4**- A representação no sistema de barras chinesas e no ábaco dos inteiros (situação 2)

| Operação | Representação figural | Multiplicador | Multiplicando | |
|---|---|---|---|---|
| 2*(-3) = (-3) + (-3) | ■■■ ■■■ | 2 | - 3 |  |

* *Fonte: Coelho (2005) apud Pommer (2010).*
** *Idem.*

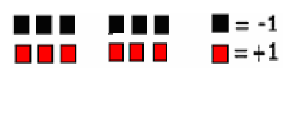
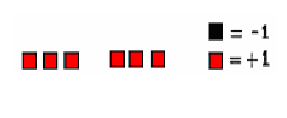
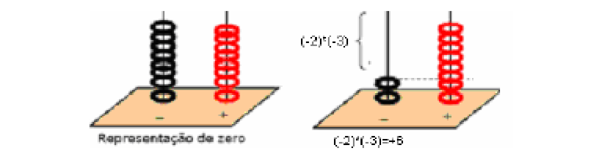
Para (-2)x3, basta imaginar duas vezes a retirada sucessiva do número 3, veja:

Tabela 5*- A representação no sistema de barras chinesas e no ábaco dos inteiros (situação 3)

| Antes | Depois | |
|---|---|---|
|  |  |  |

Finalmente, considerando (-2)x(-3), equivale a retirarmos duas vezes o número -3, veja:

Tabela 6**- A representação no sistema de barras chinesas e no ábaco dos inteiros (situação 4)

| Antes | Depois | |
|---|---|---|
|  |  |  |

Pommer (2010) cita Coelho (2005) ao destacar algumas vantagens da abordagem do ábaco dos inteiros:

> "[…] uma dinâmica que incentiva a motivação, participação e envolvimento dos alunos; a oportunidade de construir um modelo concreto, de simples operacionalização e que permite abstrair as regras de sinais; um recurso que melhora a compreensão da regra dos sinais nas atividades de cálculo numérico envolvendo as operações com inteiros. Adiciona-se o fato que problemas aditivos, geralmente, tem enunciados contendo contextos de situações evocadas ou anunciadas, mas não experimentadas pela criança."

Outra maneira de se justificar a regra dos sinais é utilizando padrões numéricos. Apresentando uma 'tabuada' específica, podemos observar os resultados numéricos da sequência e perceber o padrão de formação, o que permite inferir a regra de sinais, veja:

Tabela 7*** - Padrão da Multiplicação

| OPERAÇÃO | RESULTADO |
|---|---|
| 3 x 3 | 9 |
| 2 x 3 | 6 |
| 1 x 3 | 3 |
| 0 x 3 | 0 |
| -1 x 3 | -3 |
| -2 x 3 | -6 |

| OPERAÇÃO | RESULTADO |
|---|---|
| 2 x (-3) | -6 |
| 1 x (-3) | -3 |
| 0 x (-3) | 0 |
| -1 x (-3) | 3 |
| -2 x (-3) | 6 |
| -3 x (-3) | 9 |

---

* *Fonte: Coelho (2005) apud Pommer (2010).*

** *Idem*

*** *Autora*

Utilizemos agora o Modelo Conjuntista, apresentado anteriormente, para justificar também a regra da multiplicação de números inteiros.

Sejam a=(a;0) e -a=(0;a). Em relação ao produto de dois números inteiros, tem-se a definição: x*y=(a;b).(c;d)=(a*c+b*d;a*d+b*c).

Assim, por exemplo: 3*2=(3;0)*(2;0)=(3*2+0*0;3*0+2*0)=(6;0)=6.

Também: 3*(-2)=(3;0)*(0;2)=(3*0+0*2;3*2+0*0)=(0;6)= -6.

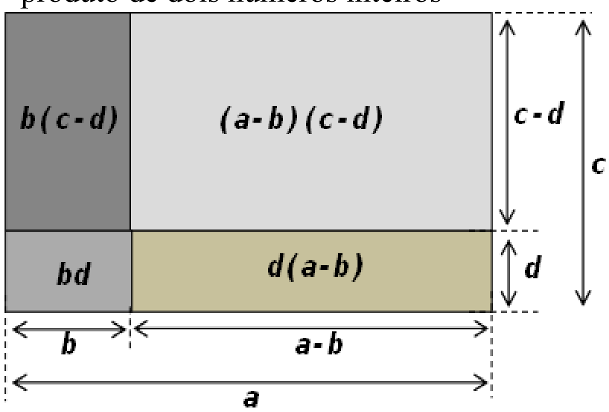
De maneira geral, temos:

Tabela 8* – Multiplicação de Números Inteiros

| | |
|---|---|
| Multiplicação de dois inteiros positivos apresenta sinal positivo | (a;0)*(b;0)=(a*b+0*0;a*0+0*b)=(a*b;0)= a*b |
| Multiplicação de dois inteiros negativos apresenta sinal positivo | (0;a)*(0;b)=(0*0+a*b;0*b+a*0)=(a*b;0)= a*b |
| Multiplicação de um inteiro negativo e um inteiro positivo apresenta sinal negativo | (a;0)*(0;b)=(a*0+0*b;a*b+0*0)=(0;a*b)= -a*b |
| | (0;a)*(b;0)=(0*b+a*0;0*0+a*b)=(0;a*b)= -a*b |

Uma outra justificativa interessante para a regra de sinais, "menos vezes menos dá mais", é atribuída a Diofanto de Alexandria, conhecido como o maior algebrista grego, porém sua justificativa não faz uso de álgebra e sim de Geometria Plana. Ele demonstrou em um diagrama geométrico que, no desenvolvimento do produto (a-b)(c-d), o produto (-b)(-d)=+bd. Considere a figura abaixo, onde a, b, c e d estão representados por segmentos de reta.

Figura 6 - Representação Geométrica do produto de dois números inteiros




*Fonte: http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/*

* Fonte: Pommer (2010) – adaptada.

Percebemos que a área do retângulo de lados a e c é a soma das áreas dos quatro retângulos nele contidos. Assim:

$$ac=(a-b)(c-d)+b(c-d)+bd+d(a-b)$$

Demonstrando que no desenvolvimento de b(c-d) e d(a-b), que Euclides já havia demonstrado serem, respectivamente, bc-bd e ad-bd, dessa forma:

$$ac=(a-b)(c-d)+bc-bd+bd+ad-bd$$
$$(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd$$

Assim, no desenvolvimento do produto (a-b)(c-d) a parcela correspondente a (-b)(-d)=+bd. Isso é uma pequena demonstração que a regra de sinais não é uma convenção e sim um teorema. Porém, se estabelece uma convenção ao querer que a propriedade distributiva do produto em relação à soma, também valha para números negativos, e essa é a essência da prova de Diofanto.

# 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após os estudos realizados dessa pesquisa e a escrita dessa dissertação, podemos tecer algumas considerações, dentre elas, a convicção da necessidade de formação adequada aos professores do ensino básico, pois a falta de preparo é um fator muito influente nas dificuldades do ensino e aprendizagem em matemática. Ao citar a formação como um fator influente, estamos levando em consideração, não só a formação inicial do professor, adquirida durante a realização do curso de nível superior, mas também a formação que acontece diariamente, mediante o atendimento das reais demandas escolares.

No objetivo geral foi proposto o levantamento de uma base histórica sobre a evolução do ensino de matemática no Brasil visando conhecer algumas dificuldades de ensino e aprendizagem em matemática bem como, apresentar algumas técnicas didáticas de intervenção. A realização desse objetivo foi possível graças ao tempo dedicado para o levantamento da bibliografia usada que, por ser um estudo teórico, necessitou de disposição para conhecer e refletir as opiniões e trabalhos dos autores consultados. Dessa maneira, há algumas considerações a serem feitas acerca dos objetivos específicos ao final da pesquisa.

O primeiro objetivo específico foi conhecer estudos e pesquisas feitas sobre a evolução do ensino de matemática no Brasil. Durante o levantamento e análise da bibliografia considerada percebemos semelhanças entre as dificuldades sofridas pelos professores de antigamente e os atuais, tais como: formação inicial com deficiência; material didático insuficiente; técnicas de ensino falhas; a busca por inovações mas sem o preparo adequado para tal... Enfim, o conhecimento dessa situação proporcionou subsídios para refletirmos a prática educativa, não somente na escola, mas no contexto da sociedade pois as mudanças sofridas em uma instância (sistema educacional) se refletem em outra (sociedade) e vice-versa.

O segundo objetivo específico foi o de listar algumas dificuldades associadas ao ensino e aprendizagem em matemática. Com base nos autores citados, essas dificuldades estão associadas a alguns fatores: má formação inicial do professor; a adoção de uma metodologia tradicional, seja ela com ênfase no cálculo ou na memorização de fórmulas; escolha inadequada de recursos didáticos sem o esclarecimento do que se pretende propor; a descontextualização; a exigência excedente que é feita na abordagem da linguagem matemática, entre outros.

O terceiro objetivo, bem relacionado com o segundo, foi o de, com base nos estudos realizados, propor técnicas didáticas que ajudem a combater essas dificuldades de ensino e aprendizagem em matemática. Entre elas, está: o incentivo à participação de formações continuadas e uma discussão acerca dos currículos de licenciatura em matemática pelas universidades, a fim de aproximar o curso superior com a prática docente; o equilíbrio entre a conceituação-manipulação-aplicação, tripé que deve fundamentar os procedimentos metodológicos durante o planejamento das atividades docentes; a busca por recursos didáticos inovadores, tais como vídeos, jogos, livros paradidáticos, tendo sempre o conhecimento de seus objetivos e suas especificações; a adoção, pelo professor, de uma postura consciente que faça com que o aluno assuma um papel ativo, através de exercícios e situações contextualizadas. Essa contextualização pode se dar através de situações cotidianas ou da interposição do conteúdo no contexto histórico em que ela surgiu. Outro método sugerido foi a inserção das técnicas de demonstrações no ensino básico, sem o exagero de uma demonstração formal, mas com os cuidados necessários para desenvolver no aluno uma sequência lógica e generalizada, familiarizando-o com temas e conceitos.

O quarto objetivo específico foi o de buscar diferentes maneiras de justificar algumas regras básicas de matemática. Partindo dos questionamentos básicos dos alunos, procuramos, em diferentes fontes, justificativas que pudessem *provar* porque aquele resultado, constantemente usado, era aceito. O fato do aluno questionar é uma oportunidade que o professor tem para inseri-lo na aula ou distanciá-lo ainda mais. A fim de atender esse objetivo, buscamos as justificativas na história da matemática, usamos recursos algébricos, lógicos-dedutivos, situações concretas, e até geométricas, a fim de dar um suporte teórico ao professor para responder esses questionamentos.

O último objetivo específico, não menos importante que os demais, está relacionado ao anterior pois ao termos conhecimento da importância da contextualização histórica de uma situação ou conceito matemático, nos propusemos a inserir historicamente o conteúdo que envolve a aplicação dessas regras básicas. Dessa forma, além das justificativas o professor poderá respaldar melhor a sua prática docente através de comentários sobre a história da matemática, atraindo assim, a atenção e despertando a curiosidade dos alunos.

É válido ressaltar que, durante a pesquisa feita sobre as regrinhas e suas justificativas, encontramos vários trabalhos publicados em defesa da inserção de demonstrações matemáticas no currículo do ensino básico e sua importância no ensino de matemática. Com base nesses estudos e considerações, concluímos que o ensino-aprendizagem das demonstrações matemáticas precisa ser mais valorizado, discutido e aperfeiçoado, especialmente nos cursos de graduação em matemática. A nível básico, deve haver o cuidado de não se cometer o mesmo erro ocorrido durante o Movimento da Matemática Moderna, onde era cobrada de maneira exagerada um formalismo algébrico e as demonstrações eram a essência da matemática. Portanto, deverá haver uma dosagem quanto às demonstrações pois o intuito é de atrair e não assustar o aluno, de tal forma que, quando ele for questionado quanto ao porquê disso ou daquilo, ele consiga uma motivação para buscar mais informações. E é através dessa curiosidade que as portas do conhecimento vão se abrindo e vão oportunizando ao aluno uma postura autônoma e crítica.

## REFERÊNCIAS


ANJOS, M. F. **A difícil aceitação dos números negativos: um estudo da teoria dos números de Peter Barlow (1776-1862).** (Dissertação de mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Norte - RN, 2008.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional** nº 9.394, de 2º de dezembro de 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm>. Acesso em: 03 mar 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** 2a edição. Rio de Janeiro: DP&A, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf> Acesso em: 15 mar 2014

BÚRIGO, E.Z., **Movimento da Matemática Moderna no Brasil: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60.** (Dissertação de Mestrado em Educação). Porto Alegre: Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1989.

CARNEIRO, Mário Jorge. **Fazer Matemática e usar Matemática.** Série Matemática não é problema. n.06, maio de 2005. Disponível em: <http://tvbrasil.org.br/fotos/salto/series/150311Matematicaproblema.pdf> Acesso em: 15 fev 2014

CARVALHO, Paulo César Pinto. **Fazer Matemática e usar Matemática.** Série Matemática não é problema. n.06, maio de 2005 Disponível em: <http://tvbrasil.org.br/fotos/salto/series/150311Matematicaproblema.pdf> Acesso em: 15 fev 2014

CORREA, Jane. **Um Estudo Intercultural da Dificuldade Atribuída à Matemática**, 1999. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php> Acesso em: 17 mar 2014

COSTA, Alan César da. **Referenciais Históricos e Metodológicos para o ensino de Frações.** (Monografia) Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Departamento de Matemática. Universidade Federal de São Carlos. São Carlos-SP, 2010.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Trad: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004

FERNANDES, Ana Catarina de Pinho. **Demonstração Matemática: Uma experiência com alunos do 11º Ano.** (Dissertação de Mestrado) Departamento de Educação da Universidade de Aveiro. Aveiro – Portugal, 2011

FERNANDES, Susana da Silva. **A Contextualização no Ensino de Matemática – um estudo com alunos e professores do ensino fundamental da rede particular de ensino do Distrito Federal.** (Artigo) Universidade Católica de Brasília. Brasília-DF, 2006. Disponível em: <www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22006/SusanadaSilvaFernandes.pdf> Acesso em 12 mar 2014

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática.** 3 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009

GARBI, Gilberto Geraldo. **Explicações e Demonstrações sobre Conceitos, Teoremas e Fórmulas Essenciais da Geometria.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GOMES, Maria Laura Magalhães. **História do Ensino da Matemática: uma introdução.** Coleção EAD – MATEMÁTICA. CAED-UFMG. Belo Horizonte-MG, 2012. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/historia%20do%20ensino%20da%20matematica.pdf> Acesso em: 12 mar 2014

JÚNIOR, Carlos Augusto Aguilar; NASSER, Lilian. **Analisando Justificativas e Argumentações Matemática de alunos do ensino fundamental**. 2. ed., v.32, p.133-147. ISSN0104-270- VIDYA. Santa Maria, RS, 2012

LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino.** Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro – RJ, ed.3, 2007

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias.** 5 ed. Coleção do Professor de Matemática – SBM, RJ, 2011

MARKARIAN, Roberto. **A matemática na escola: Alguns problemas e suas causas.** Cap 6. Ensino. MEC. 2004. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_icap6.pdf> Acesso em: 12 fev 2014

MIORIM, Maria Ângela. **Introdução à história da educação matemática.** São Paulo: Atual, 1998

NASSER, L; TINOCO, L. **Argumentação e Provas no Ensino de Matemática.** Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática/UFRJ, 2003

OLIVEIRA, H..; PONTE,J. P. **Marcos históricos no desenvolvimento do conceito de potência.** (Artigo) Educação & Matemática, Centro de Investigação em Educação Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1999

PIETROPAOLO, R.C. **(Re)significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de Matemática.** (Tese de Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** Tradução de Lisboa de Araújo- 2 reimp.Rio de Janeiro, Interciência, 1995

POMMER, Wagner M. **Diversas abordagens da regra de sinais nas operações elementares em Z.** (Artigo) Seminários de Ensino de Matemática-SEMA/FEUSP. Março/2010

PONTE, João Pedro da. **A investigação sobre o professor de Matemática: Problemas e perspectivas.** (Artigo) Universidade Federal de Lisboa. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/curso_rio_claro.htm> Acesso em: 12 mar 2014.

PONTES, Mércia de Oliveira. **A polêmica multiplicação de números inteiros no passado e na atualidade.** (Artigo) Programa de Pós graduação em Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Norte – RN, 2010

REVISTA CÁLCULO, Matéria: **Eles não estavam certos, nem tampouco errados.** Ano 3, n. 30, Editora Segmento, julho de 2013.

REVISTA CÁLCULO, Matéria: **Frações: Por que inverter e multiplicar?**. Ano 2, n. 20, Editora Segmento, setembro de 2012.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de História da Matemática.** Coleção PROFMAT – Sociedade Brasileira de Matemática, rio de Janeiro – RJ, ed. 1, 2012

SILVA, José Augusto Florentino da. **Refletindo sobre as dificuldades de aprendizagem na Matemática: algumas considerações.** (Artigo) Universidade Católica de Brasília – UCB. Brasília – DF, 2005

SOARES, F. S. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil: Avanço ou Retrocesso?** (Dissertação de Mestrado em Matemática). Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2001.

SOUSA, Enne Karol Venancio de, **Um estudo sobre o ensino-aprendizagem das demonstrações matemáticas.** (Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Rio Grande do Norte: UFRN, 2010

SOUSA, Enne Karol Venancio de; FOSSA, John Andrew; SOUSA, Giselle Costa. **Demonstrações Matemáticas: Uma experiência com a aplicação de um módulo de ensino no curso de matemática.** (Artigo) X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador – BA, Julho/2010

TAHAN, Malba. **O homem que calculava.** Rio de Janeiro: Record, 1968

VALENTE, Wagner Rodrigues.**História da Educação Matemática: interrogações metodológicas.** (Artigo) GHEMAT- Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-PUCSP, 2004

VELOSO, E. **Ensino de geometria: ideias para um futuro melhor.** Ensino de geometria no virar do milênio. Lisboa, 1999, p. 17-32 Disponível em: http://www.ie.ulisboa.pt/portal/page?

pageid=406,1630481&_dad=portal&_schema=PORTALAcesso em: 15 mar 2014

ZUCHI, Ivanete, **A importância da linguagem no ensino de matemática.** (Artigo) Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville – SC, Publicado em: Educação Matemática em Revista, n.16, ano 11, maio de 2004