UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DARILENE MARIA RIBEIRO MACEDO

RESGATANDO ALGUNS TEOREMAS CLÁSSICOS DA GEOMETRIA PLANA

JUAZEIRO DO NORTE
2014

DARILENE MARIA RIBEIRO MACEDO

RESGATANDO ALGUNS TEOREMAS CLÁSSICOS DA GEOMETRIA PLANA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade.

JUAZEIRO DO NORTE

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri

M141r Macedo, Darilene Maria Ribeiro.

Resgatando alguns teoremas clássicos da geometria plana / Darilene Maria Ribeiro Macedo. – 2014.

57f. il. color, enc.; 30 cm.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2014.

Área de concentração: Ensino de Matemática

Orientação: Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade

1. Geometria plana . 2. Menelaus. 3. CEVA. 4. Stewart. 5. Napoleão I. Título.

CDD 516.22

DARILENE MARIA RIBEIRO MACEDO

RESGATANDO ALGUNS TEOREMAS CLÁSSICOS DA GEOMETRIA PLANA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 24/06/2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Ms. Mario de Assis Oliveira
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Prof. Ms. Junio Moreira de Alencar
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por mais esta oportunidade de engrandecimento profissional.

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção de bolsa de auxílio.

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos a todo o corpo docente do Profmat e aos colegas que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial aos professores Ms. Paulo César Cavalcante de Oliveira e Dr. Plácido Andrade, pela orientação, confiança e dedicação nessa longa jornada.

Agradeço também ao meu querido esposo que esteve ao meu lado dando força e apoio durante todo o curso.

RESUMO

O estudo da Geometria possibilita um campo rico e atraente de manipulações, pois a Geometria está presente na vida cotidiana de todos os cidadãos, por vezes de forma explícita e por vezes de forma sutil. Apresentamos, porém, neste trabalho, diversas situações que mostram que a Geometria vai muito além de fórmulas. Fizemos uma abordagem simples de alguns teoremas da Geometria plana relacionados aos triângulos focando nos teoremas de Stewart, Ceva, Menelaus e Napoleão, bem como suas demonstrações detalhadas e didaticamente compreensíveis. Tendo como um dos objetivos torná-los mais divulgados, de modo que possam ser utilizados como ferramentas para complementarem e auxiliarem na aprendizagem da Geometria plana. Pois mesmo tendo grande papel na resolução de muitas questões, são pouco usados. E concluímos o nosso trabalho com algumas aplicações, inclusive de exames vestibulares, esperando que sirvam para despertar o interesse e aguçar a curiosidade do leitor para buscar aprofundar mais os conhecimentos nesta área.

Palavras-chave: Menelaus. Ceva. Stewart. Napoleão.

ABSTRACT

The study of geometry provides a rich and attractive field of manipulatives, because geometry is present in the daily life of all people, sometimes explicitly and sometimes in a subtle way. We present, however, in this work, many situations that show that geometry goes much beyond mathematical equations. We intent to make a simple approach of some triangles-related theorems, focusing on Stewart's, Ceva's, Menelaus' and Napoleon's, as well as on their detailed demonstrations in a comprehensive way. Having as one of the goals to make those more spread, in such a way that they can be used as complementary tools to help the learning of plane geometry. For even being such a great key to many questions' solutions, they are not usually applied. Finally, we conclude this work with some applications, which will hopefully excite and whet the curiosity of the reader to search for more.

Keywords: Menelaus. Ceva. Stewart. Napoleão.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Uma breve história da origem da geometria

Existem indícios de que a civilização dos Babilônios (região aproximadamente correspondente ao Iraque de hoje), desde épocas que remontam há cerca de 2000 a.C., desenvolveu um considerável conhecimento geométrico, e assim também o Egito, desde datas que alcançam 1300 anos antes de Cristo. Etimologicamente, geometria quer dizer medida da terra. Esta denominação grega é justificada pelo historiador Heródoto (século V a.C.) que atribui aos egípcios a origem dessa ciência. Segundo ele as finalidades originais do conhecimento geométrico eram de natureza prática, pois os impostos que pagavam os proprietários de terra no Egito era diretamente proporcional à área de cada lote. Anualmente as cheias do rio Nilo faziam transbordar, deixando nas suas margens um limbo que tornava a terra fértil. Daí o motivo das áreas agrícolas mais produtivas do Egito se encontrarem às margens do rio Nilo. Por outro lado as inundações muitas vezes faziam desaparecer parte das terras demarcadas dos agricultores sendo preciso recalcular cada área a fim de que a cobrança fosse ajustada. Também era necessário, para efeitos de comércio, que se soubesse calcular o volume de cada depósito de grãos. Foram práticas como essas que deram origem às primeiras ideias de geometria. A existência das grandes pirâmides perto do Nilo prova que os egípcios conheciam geometria e sabiam usá-la bem.

Portanto, quer no Egito quer na Babilônia, áreas e volumes são as primeiras noções geométricas milenares a despertarem o interesse do homem.

Por volta de 600 a.C. alguns filósofos e matemáticos gregos começaram a sistematizar o conhecimento geométrico acumulado. Tales e Pitágoras podem ser apontados entre eles. Há quem diga que a Geometria antes dos gregos era puramente experimental e que os gregos foram os primeiros a introduzir o raciocínio dedutivo. Assim, a geometria deixava de ser apenas um instrumento de medição e passava a ter um sentido mais amplo, revestindo-se de caráter científico. Não podemos concordar com isso inteiramente, mas é sem dúvida verdade que os gregos foram os primeiros a sistematizar e organizar o conjunto de fatos geométricos conhecidos até seu tempo. O trabalho fundamental dos gregos foi feito por Euclides, considerado o pai da Geometria, que por volta de 300 a.C. escreveu um tratado de Geometria em 13 volumes chamado Os elementos, contendo virtualmente e de forma rigorosa e lógica tudo o que era conhecido de Geometria básica naquela época.

Outros tratados foram escritos por outros grandes geômetras como Apolônio (c.225 a.C). Com a morte de Apolônio, a época de ouro da geometria grega chegou ao fim. Os geômetras que se seguiram, pouco mais fizeram do que preencher detalhes e talvez desenvolver independentemente certas teorias cujas essências já estavam contidas nos trabalhos de matemáticos que os antecederam. Dentre esses geômetras destacam-se Menelaus (c. 100 a.C), Ceva (1647-1734), e Stewart (século XVIII), por terem feito grandes aplicações da Geometria.

A Geometria vem sendo construída há muitos séculos. É um ramo da Matemática que tem por objetivo estudar as características e as propriedades das figuras geométricas, independentes de seus tamanhos. O estudo da Geometria pode ser dividido em duas partes: Geometria plana que estuda os objetos cujos elementos estão contidos em um mesmo plano e a Geometria espacial que estuda os objetos cujos elementos estão contidos em diferentes planos.

1.2 Motivação e métodos do trabalho

Pesquisadores em Educação Matemática têm buscado, nos dias atuais, novas estratégias para o ensino e para a aprendizagem da Geometria. A ideia central que conduziu a produção deste trabalho foi resgatar os teoremas de Stewart, Menelaus, Ceva e Napoleão, que são alguns teoremas da Geometria plana que nas últimas décadas foram excluídos de livros didáticos do Ensino Fundamental sem qualquer justificativa.

A omissão destes teoremas pelos autores dos livros do Ensino Básico levou, naturalmente, as escolas a abandonarem o estudo dos mesmos.

Em razão das demonstrações serem de fácil entendimento, portanto perfeitamente adequadas ao nível de conhecimento deste grau de escolaridade, os referidos teoremas facilitam bastante a solução de diversos problemas que são propostos em vestibulares mais concorridos como os das escolas militares.

Considerando essas situações, faz-se necessária a organização constante de redes de discussão e ação entre professores, futuros professores e pesquisadores a fim de se planejar, testar e propor situações de aprendizagem em Geometria que valorizem a multiplicidade de instrumentos mediadores e a construção de conceitos que tornem mais atraente a investigação deste ramo do conhecimento e que consistam em importantes ferramentas para a resolução de situações-problemas.

Assim o presente trabalho visa fornecer subsídios necessários a uma fácil compreensão das demonstrações que serão apresentadas dos seguintes teoremas relacionados aos triângulos: Teorema de Stewart, que pode ser utilizado no cálculo dos comprimentos das principais cevianas; Teorema de Menelaus, que trata de problemas de colinearidade; Teorema de Ceva que trata de problemas de concorrência e Teorema de Napoleão que é um resultado interessante sobre triângulos e que possui grande quantidade de propriedades, variações e generalizações.

1.3 Estrutura do trabalho

De um modo geral, neste trabalho serão resgatados alguns teoremas aplicados em triângulos.

Apresenta-se da seguinte forma:

No primeiro capítulo faremos uma pequena abordagem da parte histórica da geometria, em seguida apresentamos os motivos pelos quais escolhemos este tema e como serão organizados os tópicos.

No segundo capítulo é dada uma ênfase especial onde são feitas às demonstrações e definições dos teoremas de Pitágoras, de Tales e do Teorema fundamental da semelhança que servirão de base para as demonstrações que serão o foco principal deste trabalho.

No terceiro capítulo será abordada a essência do trabalho no qual faremos duas demonstrações dos teoremas de Stewart, de Menelaus, de Ceva e de Napoleão.

O quarto capítulo ficou destinado às questões que serão resolvidas passo a passo com a utilização dos teoremas apresentados.

2 ALGUNS TEOREMAS AUXILIARES

No que segue, enunciaremos e demonstraremos alguns teoremas clássicos fundamentais que serão amplamente utilizados no decorrer de todo o trabalho. Antes, porém, definiremos a figura geométrica que será objeto de estudo durante o texto.

Em razão do nosso objetivo maior ser o resgate dos teoremas de Stewart, Menelaus, Ceva e Napoleão, estamos considerando que o leitor está familiarizado com os conceitos básicos da Geometria plana, as ideias de ponto, reta e plano, as definições de ângulos, tipos de ângulos, ângulos definidos por uma transversal a duas retas paralelas, segmentos e congruência .

2.1 Triângulo

Definição.

Considere três pontos não colineares A, B e C. A união dos três segmentos de retas consecutivos dois a dois ($\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$) com extremidades nos três pontos é denominada triângulo com vértices A, B e C (que será denotado por ΔABC).

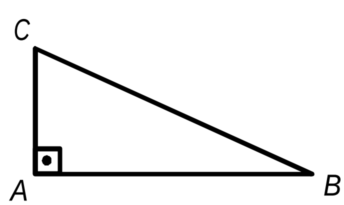
Denotaremos a medida de um segmento com extremidades nos pontos A e B simplesmente por AB.

Definição.

Um triângulo é dito retângulo se é um triângulo que apresenta um ângulo reto (90°).

No triângulo retângulo, os lados que formam o ângulo reto são chamados de catetos e o lado oposto ao ângulo reto é denominado de hipotenusa.

Observando o triângulo retângulo da figura a seguir, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são os catetos e o lado $\overline{BC}$ é a hipotenusa.



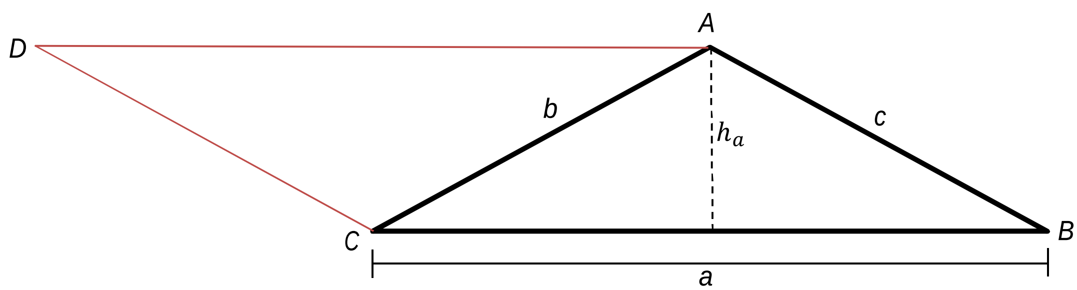
Teorema 1 (teorema da área de um triângulo). Seja ΔABC um triângulo com $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$. Se $h_a,$ h_b e h_c, são as alturas relativas aos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, então a área S do triângulo ΔABC é dada por

$$S = \frac{a.h_a}{2} = \frac{b.h_b}{2} = \frac{c.h_c}{2}$$

Demonstração. Pelos pontos A e C consideremos as duas retas r e s que são paralelas, respectivamente, aos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$. que se intersectam no ponto D. Como $ABCD$ é um paralelogramo, sua área é 2S, pois $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$ pelo caso ALA (note que o lado $\overline{AC}$ é comum aos dois triângulos, pelo paralelismo de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ o ângulo $A\hat{C}D$ é alterno com o ângulo $B\hat{A}C$ e o ângulo $D\hat{A}C$ é alterno com o ângulo $A\hat{C}B$). Logo, $2S = a.h_a$, o que implica em

$$S = \frac{a.h_a}{2},$$

garantindo a primeira igualdade. As outras duas igualdades são obtidas de modo análogo.



Teorema 2 (teorema de Pitágoras). Se um triângulo é retângulo, então o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Demonstração. Para simplificar a notação, adotaremos $|A\hat{O}B|$ para medida do ângulo $A\hat{O}B$. Seja ΔEFG um triângulo retângulo. Vamos assumir que $\overline{EF}$ e $\overline{EG}$ são os catetos e as medidas dos seus lados são $FG = a$, $EF = b$, $EG = c$ e as medidas dos ângulos opostos a estes lados são, respectivamente, $\alpha = 90^o$, β e γ. Devemos mostrar que $a^2 = b^2 + c^2$.

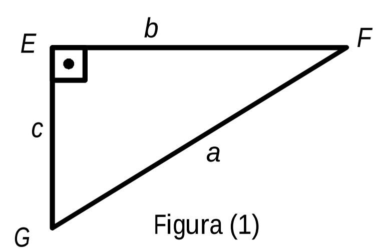


Figura (1)

Consideremos um quadrado *ABCD* com medida dos lados igual a $b + c$ e diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Sejam *M*, *N*, *P* e *Q* pontos dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente, de tal modo que $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{DQ} = b$. Sendo assim, temos $\overline{MB} = \overline{NC} = \overline{PD} = \overline{QA} = c$ e os triângulos retângulos ΔAMQ, ΔBNM, ΔCPN, ΔDQP são congruentes ao triângulo ΔEFG, pelo critério LAL. Portanto, no quadrilátero *MNPQ* temos $\overline{MQ} = \overline{MN} = \overline{NP} = \overline{PQ} = a$. Como $\beta + \gamma = 90^o$, segue que os ângulos do quadrilátero *MNPQ* são retos, ou seja, o quadrilátero *MNPQ* é um quadrado de lado a.

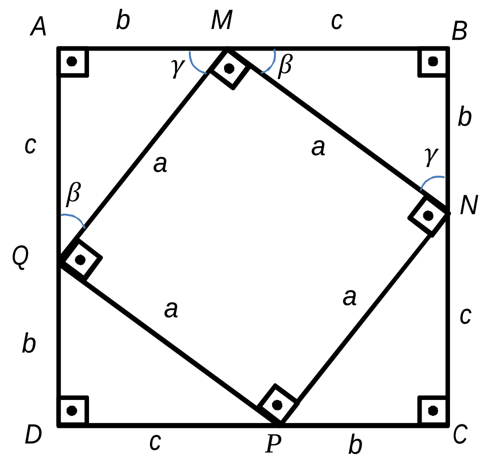


Figura (2)

Agora,

- se A_M é a área do quadrado de lado $b + c$,
- A_m é a área do quadrado de lado a ,
- e A é a área do triângulo retângulo ΔAMQ,

em virtude da congruência entre os triângulos retângulos ΔAMQ, ΔBNM, ΔCPN e ΔDQP temos $A_M = A_m + 4A$, ou seja,

$$(b + c)^2 = a^2 + 4A .$$

Como

$$A = \frac{1}{2}bc,$$

por substituição deste valor A na relação anterior, obtemos

$$2bc + a^2 = (b + c)^2.$$

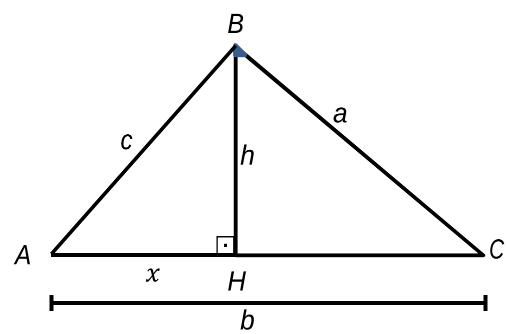
Por desenvolvimento e simplificação chegamos à relação desejada:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2.}$$

2.2 Lei dos Cossenos e Lei dos Senos

Teorema 3 (lei dos cossenos). Em um triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois menos o duplo produto destes dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

Demonstração: Seja ΔABC um triângulo tal que $BC = a$, $BA = c$ e $AC = b$. Seja h a medida da altura $\overline{BH}$ relativa ao vértice B e x a medida da projeção $\overline{AH}$ do lado $\overline{AB}$ sobre o lado $\overline{AC}$.



Como o triângulo ΔBHC é retângulo, pelo teorema de Pitágoras no decorre que

$$a^2 = h^2 + (b - x)^2.$$

Pelos mesmos argumentos aplicados ao triângulo ΔBHA segue que

$$h^2 = c^2 - x^2.$$

Somando as duas equações membro a membro obtemos

$$a^2 = c^2 - x^2 + (b - x)^2 ,$$

ou seja

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.x. \quad (*)$$

Do triângulo ΔABH, concluímos que

$$cos\,\hat{A} = \frac{x}{c}.$$

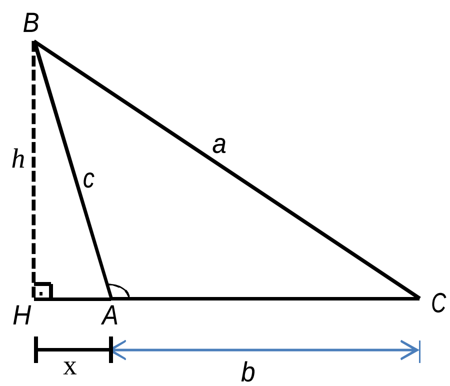
Substituindo $x = c.\,cos\,\hat{A}$ em (*) obtemos a relação

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos\,\hat{A}.$$

Analogamente, podemos mostrar que

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\hat{B} \qquad \text{e} \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\hat{C}.$$

É importante salientar que não há alteração alguma se $\hat{A} > 90^0$. De fato, pois, nessa situação obtemos que



$$a^2 = (b + x)^2 + h^2$$

que é equivalente a

$$a^2 = b^2 + 2bx + x^2 + h^2.$$

Como $c^2 = h^2 + x^2$, então,

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2.b.x. \text{ (**)}$$

Mas

$$x = c.\cos(180^0 - \hat{A}) = -c.\cos\hat{A} .$$

Assim, substituindo essa última igualdade em (**), chegaríamos novamente a

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c\,.\cos\hat{A}.}$$

Teorema 4 (lei dos senos). Em um triângulo ΔABC qualquer, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos e a constante de proporcionalidade é o diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo, ou seja:

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} = 2R.$$

Demonstração. Assuma que o triângulo ΔABC está inscrito no círculo de centro O e raio R. Tracemos o diâmetro AD ($AD = 2R$) determinando o triângulo retângulo ΔACD com ângulo reto em C (veja que o ângulo $A\hat{C}D$ está inscrito num semicírculo).

Temos: $\hat{B} = \hat{D}$ porque são ângulos inscritos subentendidos pelo mesmo arco AC.
Então,

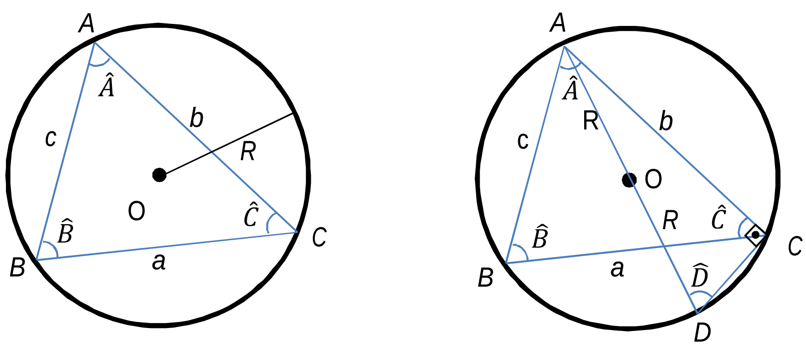
$$sen\hat{B} = sen\hat{D} = \frac{b}{2R}.$$

Daí, temos

$$2R = \frac{b}{sen\hat{B}}.$$

Analogamente, obtemos

$$2R = \frac{a}{sen\hat{A}} \quad \text{e} \quad 2R = \frac{c}{sen\hat{C}}.$$



Portanto,

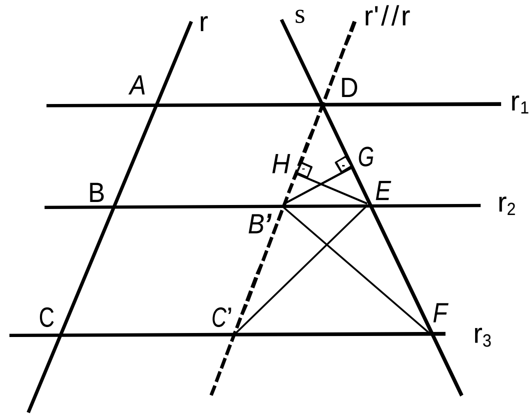
$$\boxed{\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} = 2R.}$$

2.3 Teorema de Tales

Teorema 5. Se duas retas são transversas a feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra.

Para demonstrar este teorema vamos considerar, sem perda de generalidade, que o feixe de paralelas possui apenas três retas, r_1, r_2 e r_3, cortadas por duas transversais r e s nos pontos A, B, C da reta r e, D, E, F da reta s. Sendo assim, devemos mostrar que $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$.

Demonstração. Para demonstrar é necessário apenas o conhecimento de que a área de um triângulo é igual à metade do produto da base pela altura relativa à mesma base.



Inicialmente tracemos, passando por D, a reta r' paralela à reta r.

Sejam B' e C' as interseções de r' com $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$, respectivamente. A área do triângulo $\Delta DB'E$ pode ser calculada de duas maneiras

$$\frac{DB'.EH}{2} \text{ ou } \frac{DE\ .\ B'G}{2}.$$

Logo,

$$\frac{DB'.\ EH}{2} = \frac{DE\ .B'G}{2}.$$

Da igualdade acima, conclui-se que

$$DB'.EH = DE.B'G. \qquad (1)$$

Como

$$DB' = AB$$

temos que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{B'G}{EH}.$$

Os triângulos $\Delta C'B'E$ e $\Delta FEB'$ têm áreas iguais (mesma base, considere $B'E$, e mesma altura, que é a distância entre as paralelas r_2 e r_3). Logo,

$$\frac{B'C'.\ EH}{2} = \frac{EF\ .B'G}{2}.$$

Como $B'C = BC$ temos

$$\frac{BC}{EF} = \frac{B'G}{EH}. \qquad (2)$$

De (1) e (2) segue que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}.$$

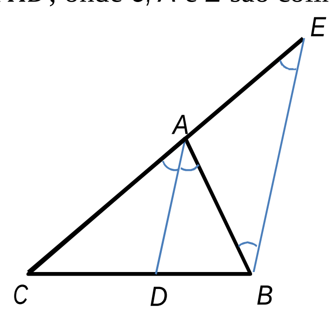
2.4 Teorema das bissetrizes

Definição. Bissetriz interna de um triângulo é o segmento de reta com extremidades em um vértice e no lado oposto a esse vértice e que divide o ângulo desse vértice em dois ângulos congruentes.

Teorema 6 (teorema da bissetriz interna). A bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em partes proporcionais aos lados adjacentes.

Demonstração. Este teorema é uma consequência do teorema de Tales.

Consideremos o triângulo ΔABC da figura abaixo. Seja $\overline{AD}$ a bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$ e $\overline{BE}$ um segmento paralelo a $\overline{AD}$, onde C, A e E são colineares.



Como $\overline{AD}$ é paralelo $\overline{BE}$ resulta que $C\hat{A}D$ é congruente a $A\hat{E}B$ (ângulos correspondentes) e $D\hat{A}B$ é congruente a $A\hat{B}E$ (ângulos alternos internos). Portanto, $A\hat{B}E$ é congruente a $A\hat{E}B$. Daí o triângulo ΔEAB é isósceles, sendo $\overline{AE} = \overline{AB}$.

Pelo teorema de Tales, obtemos

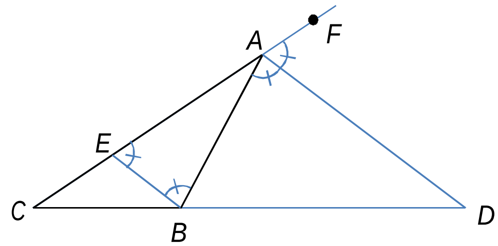
$$\frac{CA}{CD} = \frac{AE}{DB}.$$

Como $AE = AB$, segue-se que

$$\boxed{\frac{CA}{CD} = \frac{AB}{DB}.}$$

Teorema 7 (teorema da bissetriz externa). Se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intersecta a reta que contém o lado oposto, então ficam determinados, nesta reta, dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

Demonstração. Consideremos o triângulo ΔABC em que $\overline{AD}$ é bissetriz do ângulo externo de vértice em A e $\overline{BE}$ um segmento paralelo a $\overline{AD}$.



Como $\overline{AD}$ é paralelo $\overline{BE}$ resulta que $F\hat{A}D$ é congruente a $A\hat{E}B$ (ângulos correspondentes) e $D\hat{A}B$ é congruente a $A\hat{B}E$ (alternos internos). Portanto, $A\hat{B}E$ é congruente a $A\hat{E}B$.

Daí o triângulo ΔEAB é isósceles, com $AE = AB$.

Pelo teorema de Tales, obtemos

$$\frac{CA}{CD} = \frac{AE}{DB}\cdot$$

Como $AE = AB$, segue-se que

$$\boxed{\frac{CA}{CD} = \frac{AB}{DB}\cdot}$$

2.5 Teorema Fundamental da Semelhança

Triângulos semelhantes

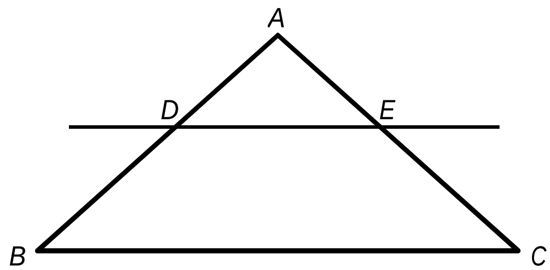
Definição. Dois triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ são semelhantes se possuem os lados correspondentes respectivamente proporcionais.

Esse fato será indicado por $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Como consequência pode-se mostrar que os ângulos correspondentes dos triângulos são congruentes.

Teorema 8. Toda reta que é paralela a um lado de um triângulo e intersecta os outros dois lados em dois pontos distintos, determina, com esses dois lados, um segundo triângulo semelhante ao primeiro.

Demonstração. Consideremos o ΔABC onde $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Mostraremos que o triângulo ΔABC é semelhante ao triângulo ΔADE, provando a proporção:

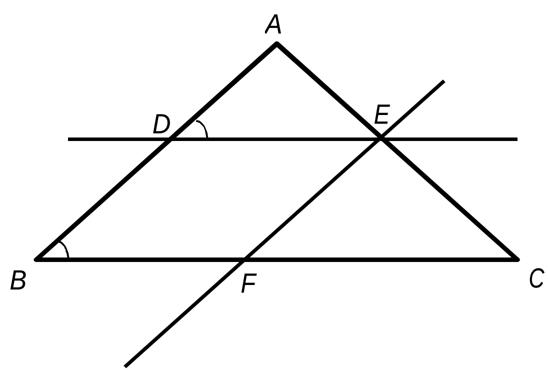
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{ED}{BC}.$$



Temos $\overline{DE}$ paralelo a $\overline{BC}$. Portanto, pelo teorema de Tales, podemos fazer:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AE}{AC}.$$

Agora, no ΔABC consideremos por E a reta $\overleftrightarrow{EF}$ paralela a $\overline{AB}$, onde $F \in BC$.



Temos $\overline{DE}$ congruente a $\overline{BF}$ (pois, $BDEF$ é um paralelogramo), Novamente pelo Teorema de Tales, segue que

$$\frac{BF}{BC} = \frac{AE}{AC}.$$

Logo,

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}.$$

De

$$\frac{AD}{AB} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AC}} \quad \text{e} \quad \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

temos

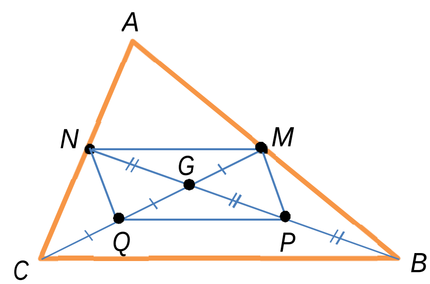
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{\mathrm{BC}}.$$

Portanto, o $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

2.6 Teorema do baricentro

Teorema 9. As três medianas de um triângulo intersectam-se num mesmo ponto chamado baricentro que divide cada mediana em duas partes tais que, a parte que contém o vértice é o dobro da outra.

Demonstração. Considere um triângulo ΔABC. Tracemos as medianas $\overline{CM}$ e $\overline{BN}$ que se intersectam em G. Em seguida marquemos o ponto P, médio de $\overline{GB}$ e o ponto Q, médio de $\overline{GC}$. Note que $\overline{PQ}$ é base média do ΔBCG, portanto, a medida de $\overline{PQ}$ é metade da medida de $\overline{BC}$ e $\overline{PQ}$ é paralelo a $\overline{BC}$.



Notemos também, que $\overline{MN}$ é base média do ΔABC, portanto, a medida de $\overline{MN}$ é metade da medida de $\overline{BC}$ e paralelo a $\overline{BC}$. Como $\overline{MN}$ é congruente a $\overline{PQ}$ e são paralelos, segue que o quadrilátero $MNQP$ é um paralelogramo. Daí,

$$\overline{GM} \equiv \overline{GQ} \equiv \overline{QC} \quad \text{e} \quad \overline{GN} \equiv \overline{GP} \equiv \overline{PB}.$$

Logo, na mediana $\overline{CM}$ tem-se

$$CG = 2.(GM).$$

O mesmo ocorre nas outras medianas.

3 OS TEOREMAS ABORDADOS

3.1 Teorema de Stewart

Matthew Stewart, nasceu no ano de 1717, em Rothesay, na parte inferior da Firth of clyde, na Escócia numa pequena ilha chamada de Bute. Educado em Rothesay Grammar School, entrou na Universidade de Glasgow em 1734, onde estudou com o Filósofo Francis Hutcheson e o Matemático Robert Simpson, com quem estudou Geometria antiga.

Stewart participou de palestras de Colin Maclaurin na Universidade de Edimburgo, durante as sessões de 1742 a 1743, no mesmo período publicou sua famosa obra, *Some General Theorems of Considerable Use in the Higher Parts of Mathematics*, que estende algumas ideias de Simpson e trás a conhecida porposição II (Teorema de Stewart).

Com a morte de Maclaurin, em 1746, surgiu uma vaga na Universidade de Edimburgo que, um ano depois, foi ocupada por Stewart que tornou-se professor de Matemática até o seu falecimento em 1785. Após sua morte seu filho Dugald Stewart ocupou sua cadeira na mesma Universidade.

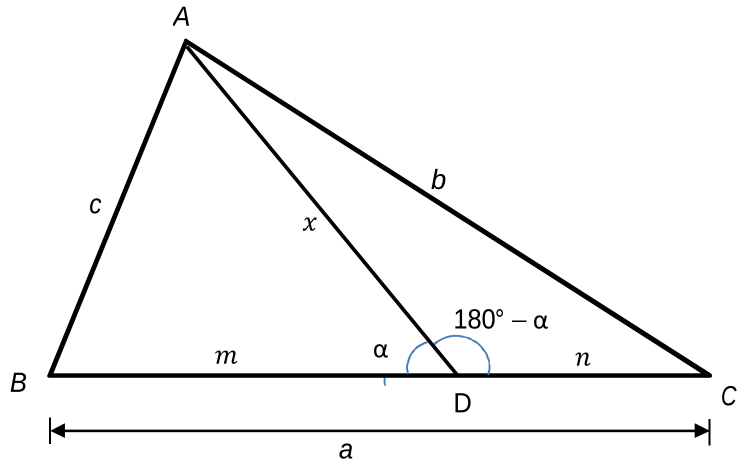
Teorema 10. Seja um triângulo ΔABC, com $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$. Se x é o comprimento de uma ceviana $\overline{AD}$, que divide o lado $\overline{BC}$, no ponto D, em dois segmentos tais que $BD = m$ e $DC = n$, então,

$$b^2.m + c^2.n - x^2.a = m.n.a.$$

Demonstração. Faremos a demonstração por dois modos diferentes.

1º Modo. Comecemos considerando o triângulo ΔABC abaixo e a ceviana[1] $\overline{AD}$.

[1] CEVIANA é qualquer segmento com uma extremidade num vértice de um triângulo e a outra na reta suporte do lado oposto a esse vértice.



Usando a lei dos cossenos no triângulo ΔABD, segue:

$$c^2 = x^2 + m^2 - 2.x.m.cos\alpha. \qquad (1)$$

e, no ΔADC, temos:

$$b^2 = x^2 + n^2 - 2.x.n.cos(180° - \alpha). \qquad (2)$$

Multiplicando a primeira equação por n, a segunda por m e lembrando que

$cos(180° - \alpha) = -cos\alpha$, obtemos:

$$\begin{cases} c^2n = x^2n + m^2n - 2.x.m.n.cos\,\alpha \\ b^2m = x^2m + n^2m + 2.x.m.n.cos\alpha \end{cases}.$$

Somando membro a membro as igualdades acima, resulta em:

$$b^2m + c^2n = x^2(m + n) + mn(m + n).$$

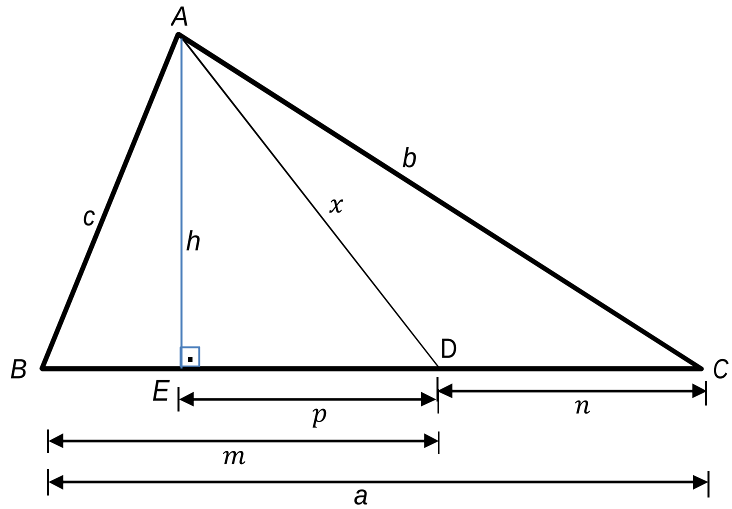
Como $m + n = a$, segue que

$$b^2m + c^2n = x^2.a + m.n.a,$$

ou seja,

$$b^2m + c^2n - x^2.a = m.n.a.$$

2º Modo. Consideremos o triângulo ΔABC abaixo com a ceviana $\overline{AD}$ medindo x e a altura $\overline{AE}$ medindo h.



Aqui, utilizaremos o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos inseridos na figura.

No ΔABE, obtemos:

$$c^2 = h^2 + (m - p)^2,$$

ou seja,

$$h^2 = c^2 - m^2 + 2mp - p^2 \quad (1)$$

Agora no ΔADE, temos

$$x^2 = h^2 + p^2,$$

ou ainda,

$$x^2 - p^2 = h^2 \quad (2)$$

Substituido (2) em (1), obtemos:

$$x^2 - p^2 = c^2 - m^2 + 2mp - p^2$$

implicando em

$$c^2 = x^2 + m^2 - 2mp. \quad (3)$$

Do triângulo ACE, temos

$$b^2 = h^2 + (n + p)^2,$$

ou seja,

$$h^2 = b^2 - n^2 - 2np - p^2. \qquad (4)$$

Substituido agora (2) em (4), obtemos

$$x^2 - p^2 = b^2 - n^2 - 2np - p^2,$$

ou ainda,

$$b^2 = x^2 + n^2 + 2np. \qquad (5)$$

Utilizando as equações (3) e (5), obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} c^2 = x^2 + m^2 - 2mp \\ b^2 = x^2 + n^2 + 2np. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por n e a segunda equação por m resulta que

$$\begin{cases} c^2n = x^2n + m^2n - 2\cancel{nmp} \\ b^2m = x^2m + n^2m + 2\cancel{nmp}. \end{cases}$$

Somando as duas equações no sistema acima, obtemos:

$$c^2n + b^2m = mn(m + n) + x^2(m + n). \qquad (6)$$

Como $a = m + n$, segue-se de (6) que

$$c^2n + b^2m = m.n.a + x^2a,$$

isto é,

$$\boxed{c^2n + b^2m - x^2a = m.n.a.}$$

3.2 Teorema de Menelaus

Menelaus de Alexandria foi um astrônomo e geômetra nascido em Alexandria, Egito, por volta do ano 80. Segundo historiadores gregos e árabes sabe-se que ele escreveu uma coleção de seis livros sobre cordas no círculo, um livro de intitulado Elementos da Geometria e uma série de trabalhos em geometria e astronomia, todos perdidos. Menelaus continuou os trabalhos de Hiparco em trigonometria e demonstrou interessantíssimo teorema, que leva o seu nome. Ardente defensor da Geometria clássica e criador do tradicional teorema de

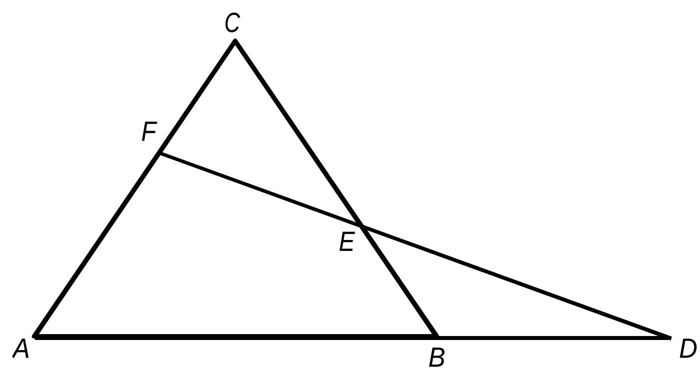
Menelaus. Seu nome foi conhecido através de Pappus e Próclus e pouco se sabe sobre sua vida, mas teve grande influência na trigonometria, astronomia e geometria.

O teorema de Menelaus foi esquecido por mais de 15 séculos, sendo redescoberto por Giovanni Ceva no ano de 1678.

Toda reta que corta as três retas suporte dos lados de um triângulo determina seis segmentos tais que o produto de três dentre eles, não tendo extremidade comum, é igual ao produto dos outros três.

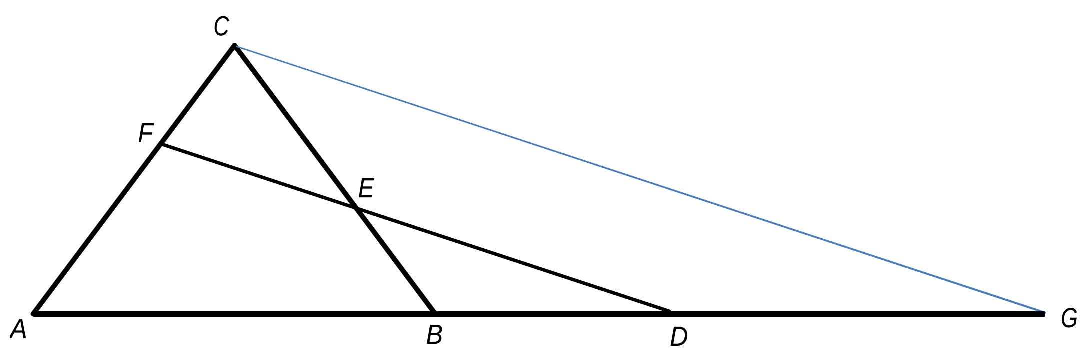
Teorema 11. Sejam três pontos D, E e F localizados respectivamente nas retas suportes dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ de um triângulo ΔABC, e diferentes dos vértices. Se D, E e F são colineares então,

$$\frac{AF}{FC} \cdot \frac{CE}{EB} \cdot \frac{BD}{DA} = 1.$$



Demonstração. Faremos a demonstração por dois modos diferentes.

1º Modo. Aqui utilizaremos o teorema de Tales.



Consideremos $\overline{CG}$ paralelo a $\overline{DF}$ com G no prolongamento de $\overline{AD}$.

Assim,

$$\frac{CF}{GD} = \frac{AF}{AD},$$

ou seja,

$$GD = \frac{CF\ .\ AD}{AF}. \qquad (1)$$

$$\frac{CE}{GD} = \frac{BE}{BD},$$

isto é,

$$GD = \frac{CE\ .\ BD}{BE}. \qquad (2)$$

Portanto, de (1) e (2), obtemos

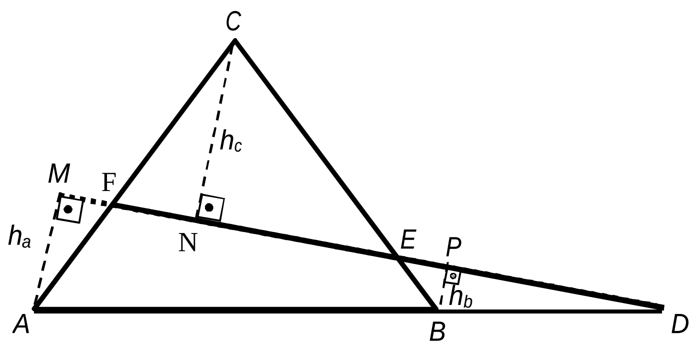
$$\frac{CF\ .\ AD}{AF} = \frac{CE\ .BD}{BE} \iff AF.CE.BD = AD.CF.BE.$$

Assim,

$$\boxed{\frac{AF}{CF} \cdot \frac{CE}{BE} \cdot \frac{BD}{AD} = 1.}$$

2º Modo. Tracemos por A, B e C as alturas respectivas aos triângulos ΔAFD, ΔCFE e ΔBDE. Sendo $\overline{AM}$, $\overline{BP}$ e $\overline{CN}$ perpendiculares ao segmento $\overline{MD}$, então esses três segmentos são paralelos.

Assim, podemos mostrar a semelhança dos seguintes triângulos:



$$\Delta AMD \sim \Delta BPD \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{h_a}{h_b};$$

$$\Delta BPE \sim \Delta CNE \Rightarrow \frac{BE}{CE} = \frac{h_b}{h_c};$$

$$\Delta AMF \sim \Delta CNF \Rightarrow \frac{CF}{AF} = \frac{h_c}{h_a}.$$

Multiplicando, teremos

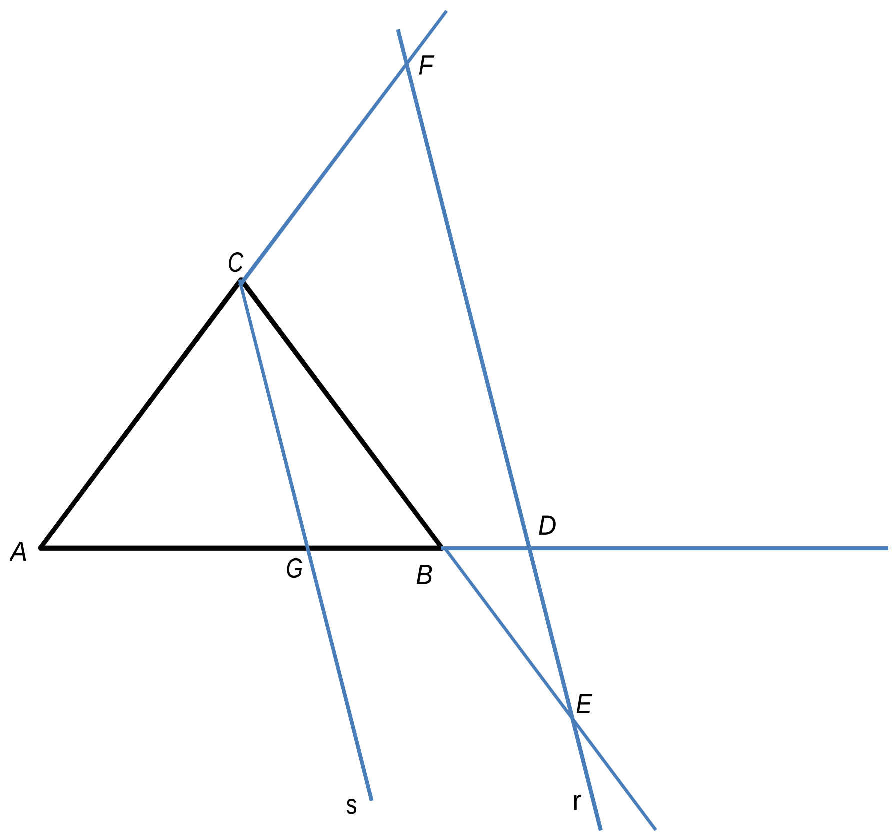
$$\frac{AD}{BD}\cdot\frac{BE}{CE}\cdot\frac{CF}{AF}=\frac{h_a}{h_b}\cdot\frac{h_b}{h_c}\cdot\frac{h_c}{h_a}=1 \iff \frac{AD}{BD}\cdot\frac{BE}{CE}\cdot\frac{CF}{AF}=1,$$

ou ainda,

$$\boxed{\frac{AF}{CF}\cdot\frac{CE}{BE}\cdot\frac{BD}{AD}=1.}$$

Um fato que deve ser destacado. O teorema de Menelaus também é válido quando a transversal não intersecta nenhum lado do triângulo, mas apenas os prolongamentos desses lados. Veja a demonstração.

Seja a reta r uma transversal que intersecta as retas suportes dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ do triângulo ΔABC, respectivamente, nos pontos D, E e F.



Vamos provar que os segmentos $\overline{AF}$ e $\overline{CF}$ determinados por F sobre a reta suporte de $\overline{AC}$; $\overline{CE}$ e $\overline{BE}$ determinados por E sobre a reta suporte de $\overline{BC}$; $\overline{BD}$ e $\overline{AD}$ determinados por D sobre a reta suporte de $\overline{AB}$, satisfazem a relação:

$$\frac{AF}{CF} \cdot \frac{CE}{BE} \cdot \frac{BD}{AD} = 1.$$

Tracemos pelo vértice C a reta s, paralela a r, intersectando o lado $\overline{AB}$ em G.

Pelo teorema de Tales podemos escrever:

$$\frac{AF}{CF} = \frac{AD}{DG} \quad \text{e} \quad \frac{CE}{DG} = \frac{BE}{BD}.$$

Multiplicando as duas igualdades, obtemos

$$\frac{AF}{CF} \cdot \frac{CE}{\cancel{DG}} = \frac{AD}{\cancel{DG}} \cdot \frac{BE}{BD}.$$

Portanto,

$$\boxed{\frac{AF}{CF} \cdot \frac{CE}{BE} \cdot \frac{BD}{AD} = 1.}$$

3.3 Teorema de Ceva

Matemático, físico, geômetra e engenheiro hidráulico, o italiano Giovanni Ceva nascido em Milão (1647 – 1734) destacou-se quando trouxe à evidência o Teorema de Menelaus esquecido por cerca de mil e quinhentos anos, dando uma definição mais ampla e mostrando mais aplicações do Teorema na sua obra *De Lineis Réctis*, ao estabelecer uma condição para que três cevianas de um triângulo tenham um ponto comum.

Portanto o Teorema de Ceva trata-se de um “parceiro” do teorema de Menelaus. Conhecido como Teorema de Ceva ou das cevianas nome atribuído em sua homenagem aos segmentos que unem vértices de um triângulo a pontos do lado oposto ou do seu prolongamento, como alturas, bissetrizes e medianas de um triângulo.

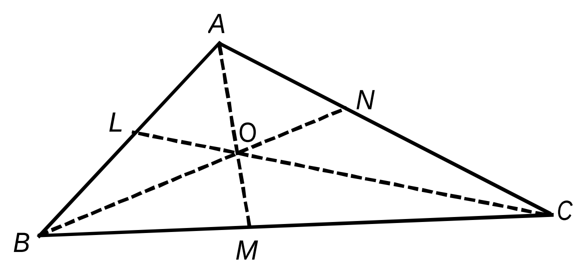
Teorema 12. Três cevianas de um triângulo concorrem em um ponto se, e somente se, determinam nos lados do triângulo seis segmentos tais que o produto das medidas de três desses segmentos, não tendo uma extremidade comum, é igual ao produto das medidas dos outros três segmentos.

Demonstração. Faremos a demonstração por dois modos diferentes.

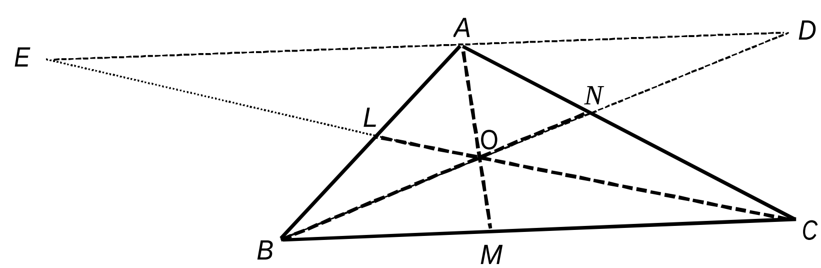
1º Modo. Seja ΔABC um triângulo qualquer e sejam L, M e N, respectivamente, pontos sobre os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$. Afirmamos que $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CL}$ são concorrentes se, e somente se,

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1.$$

($\Rightarrow$) Consideremos a figura abaixo:



Inicialmente trace uma reta r paralela a $\overline{BC}$ passando por A. Prolongue $\overline{CL}$ e $\overline{BN}$ até cortar r, respectivamente, em E e D.



Afirmação I) $\Delta ALE \sim \Delta BLC$. De fato, pois, $A\hat{E}L \equiv B\hat{C}L$ (ângulos alternos internos) e $E\hat{A}L \equiv L\hat{B}C$ (ângulos alternos internos). Portanto,

$$\frac{AL}{LB} = \frac{AE}{BC} \cdot \qquad (1)$$

Afirmação II) $\Delta BNC \sim \Delta DNA$. De fato, pois, $C\hat{B}N \equiv N\hat{D}A$ (ângulos alternos internos) e $D\hat{A}N \equiv B\hat{C}N$ (ângulos alternos internos). Portanto,

$$\frac{CN}{NA} = \frac{BC}{AD} \cdot \qquad (2)$$

Afirmação III) $\Delta OBM \sim \Delta OAD$. De fato, pois, $M\hat{B}O \equiv A\hat{D}O$ (ângulos alternos internos) e $B\widehat{M}O \equiv D\hat{A}O$ (ângulos alternos internos). Portanto,

$$\frac{BM}{AD} = \frac{MO}{AO} . \qquad (3)$$

Afirmação IV) $\Delta OAE \sim \Delta COM$. De fato, pois, $M\hat{C}O \equiv O\hat{E}A$ (ângulos alternos internos) e $C\widehat{M}O \equiv O\hat{A}E$ (ângulos alternos internos). Portanto,

$$\frac{CM}{AE} = \frac{MO}{AO} \cdot \qquad (4)$$

De (3) e (4) obtemos:

$$\frac{BM}{AD} = \frac{CM}{AE},$$

ou seja,

$$\frac{BM}{CM} = \frac{AD}{AE} \cdot \quad (5)$$

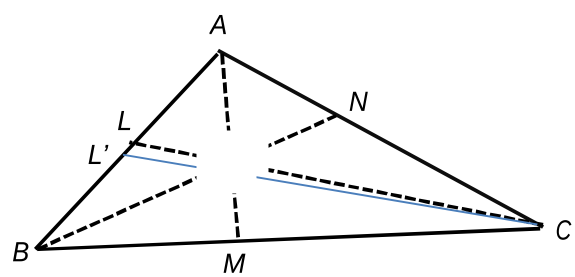
Daí, multiplicando (1), (2) e (5), obtemos

$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{BM}{CM} = \frac{AE}{BC} \cdot \frac{BC}{AD} \cdot \frac{AD}{AE} = 1 .$$

($\Leftarrow$) Vamos provar que se as três cevianas $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CL'}$ cumprem a condição

$$\frac{AL'}{L'B} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1,$$

então elas são concorrentes.



Já sabemos que se $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CL}$ são concorrentes, então

$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1.$$

Por hipótese, temos que

$$\frac{AL'}{L'B} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1.$$

Então,

$$\frac{AL'}{L'B} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = \frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot$$

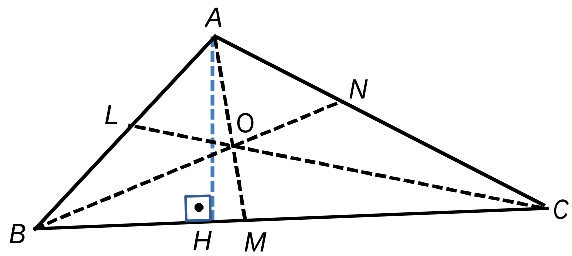
Logo,

$$\frac{AL'}{L'B} = \frac{AL}{LB}$$

e, portanto,

$$L' = L.$$

2º Modo. Usando áreas temos:



$$\frac{BM}{MC} = \frac{\text{área } \Delta ABM}{\text{área } \Delta ACM},$$

pois,

$$\text{área } \Delta ABM = \frac{BM.AH}{2} \text{ e } \text{área } \Delta ACM = \frac{CM.AH}{2}.$$

Daí,

$$\frac{\text{área } \Delta ABM}{\text{área } \Delta ACM} = \frac{\frac{BM.AH}{2}}{\frac{CM.AH}{2}} = \frac{BM}{CM} \cdot \quad (*)$$

Analogamente, é possível mostrar que

$$\frac{BM}{CM} = \frac{\text{área } \Delta OBM}{\text{área } \Delta OCM} \cdot \quad (**)$$

Como consequência de (*) e (**) concluímos o seguinte:

$$\frac{\text{área } \Delta ABM}{\text{área } \Delta ACM} = \frac{\text{área } \Delta OBM}{\text{área } \Delta OCM} \cdot$$

Lembremos que

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ com } b \neq d.$$

Assim,

$$\frac{BM}{CM}=\frac{\text{área } \Delta ABM - \text{área } \Delta OBM}{\text{área } \Delta ACM - \text{área } \Delta OCM}=\frac{\text{área } \Delta AOB}{\text{área } \Delta ACO}.$$

Analogamente,

$$\frac{CN}{NA}=\frac{\text{área } \Delta BNC}{\text{área } \Delta BNA}=\frac{\text{área } \Delta ONC}{\text{área } \Delta ONA}$$

o que implica em

$$\frac{CN}{NA}=\frac{\text{área } \Delta BNC - \text{área } \Delta ONC}{\text{área } \Delta BNA - \text{área } \Delta ONA}=\frac{\text{área } \Delta BCO}{\text{área } \Delta AOB}$$

e

$$\frac{AL}{LB}=\frac{\text{área } \Delta ACL}{\text{área } \Delta BCL}=\frac{\text{área } \Delta AOL}{\text{área } \Delta BOL}$$

que resulta em

$$\frac{AL}{LB}=\frac{\text{área } \Delta ACL - \text{área } \Delta AOL}{\text{área } \Delta BCL - \text{área } \Delta BOL}=\frac{\text{área } \Delta ACO}{\text{área } \Delta BCO}.$$

Logo, multiplicando membro a membro as três equações teremos

$$\boxed{\frac{AL}{LB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}=1.}$$

3.4 Teorema de Napoleão

Napoleão Bonaparte (1769 – 1821) além de grande soldado e homem de destaque na política era também um admirador das ciências e dos cientistas. Em particular tinha um grande amor à Matemática. É atribuído a Napoleão o teorema da Geometria que estabelece o seguinte: “Tome um triângulo arbitrário e, com base em cada um dos seus lados construa (externamente) um triângulo equilátero. Os centros desses 3 triângulos equiláteros são ainda vértices de um outro triângulo equilátero, denominado triângulo de Napoleão”.

Não há evidências seguras de que Napoleão seja mesmo o autor deste teorema. A referência mais antiga que relaciona Napoleão com este teorema é o livro *Elementi di*

Geometria de Faifofer de 1911. Contudo existem citações mais antigas do teorema onde o nome de Napoleão não aparece, como o livro *Elementi di Geometria* de G.Turner de 1843 e o livro *Sur quelques proprietes des polygones* de Laisant de 1877.

Teorema 13. Tome um triângulo arbitrário e com base em cada um dos seus lados construa (externamente) um triângulo equilátero. Os baricentros desses 3 triângulos equiláteros são ainda vértice de um outro triângulo equilátero, denominado triângulo de Napoleão.

Denotaremos a medida do ângulo de vértice A e lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ simplesmente por $B\hat{A}C$.

Demonstração. Faremos a demonstração por dois modos diferentes.

1º Modo: Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo ΔABC.

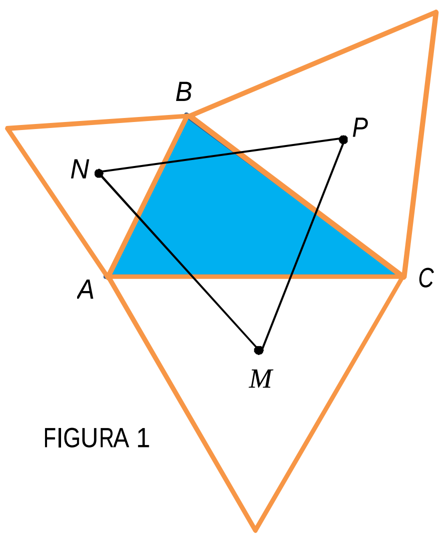


FIGURA 1

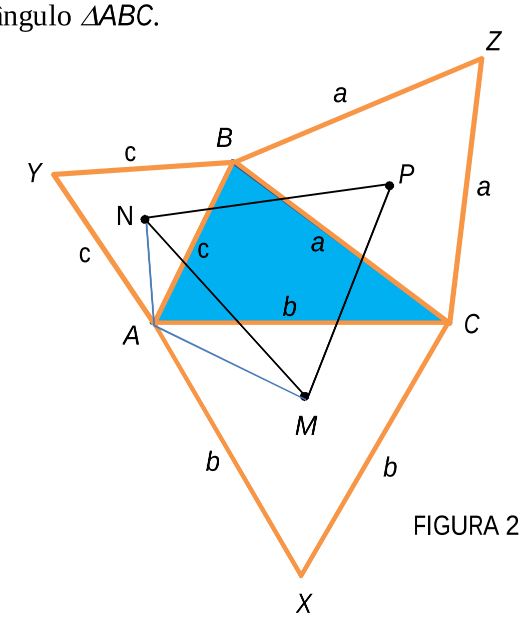


FIGURA 2

Considere $B\hat{A}C = \alpha$; $A\hat{B}C = \beta$ e $A\hat{C}B = \theta$.

Para o ângulo $\hat{A}$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos\alpha,$$

isto é,

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}.$$

Se **S** é a área de ΔABC temos que

$$S = \frac{b\cdot c\cdot sen\alpha}{2}.$$

Logo,

$$sen\ \alpha = \frac{2 \cdot S}{b \cdot c}\ .$$

Como AM é igual a 2/3 da mediana do triângulo equilátero construído sobre $\overline{AC}$ (veja demonstração no item 2.6), segue-se que

$$AM\ = \frac{2}{3} . \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{b\sqrt{3}}{3}\ .$$

Analogamente, obtemos

$$AN\ = \frac{c\sqrt{3}}{3}\ .$$

Aplicando agora a lei dos cossenos no triângulo ΔAMN, vem:

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2.AM.AN.\cos(M\hat{A}N)$$

$$MN^2\ = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(60^0 + \alpha)}{3}\ ,$$

ou ainda,

$$MN^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2 \cdot b \cdot c}{3} .(\frac{1}{2}.\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}.\ sen\alpha),$$

obtendo

$$MN^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{b \cdot c}{3}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2 \cdot b \cdot c} - \frac{2\sqrt{3} \cdot S}{b \cdot c}\right) = \frac{2 \cdot b^2 + 2 \cdot c^2 - b^2 - c^2 + a^2 + 4\sqrt{3} \cdot S}{6}\ ,$$

o que nos leva a

$$MN^2\ = \frac{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}.S}{6}\ .$$

Fazendo cálculos análogos encontramos que

$$PN^2 = PM^2 = \frac{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3} \cdot S}{6},$$

ou seja, o ΔMNP é equilátero.

2º Modo. Na figura 3, seja M, N e P os baricentros dos triângulos equiláteros ΔAXC, ΔAYB e ΔBZC, respectivamente. Seja $MN = x$, $NP = y$ e $PM = z$. Como $AM = \frac{b\sqrt{3}}{3}$ e $AN = \frac{c\sqrt{3}}{3}$ (propriedade do baricentro).

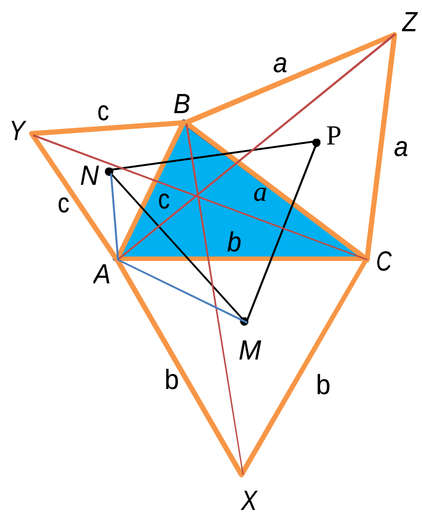


FIGURA 3

No ΔAMN, temos: $x^2 = \left(\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{c\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2.\frac{b\sqrt{3}}{3}.\frac{c\sqrt{3}}{3}.cos(\alpha + 60°)$;

$$x^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3}.cos(\alpha + 60°);$$

$$3x^2 = b^2 + c^2 - 2bc.(cos\alpha.cos60° - sen\alpha.sen60°);$$

$$3x^2 = b^2 + c^2 - 2bc.(\frac{cos\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}sen\alpha}{2});$$

$$3x^2 = b^2 + c^2 - bc.(cos\alpha - \sqrt{3}.sen\alpha). \quad (*)$$

Mas, pela lei dos senos, sabemos que $sen\alpha = \frac{a}{2R}$. Então, substituindo em (*), obtemos:

$$3x^2 = b^2 + c^2 - bc.(cos\alpha - \sqrt{3}.\frac{a}{2R});$$

$$3x^2 = b^2 + c^2 - bc.cos\alpha + \frac{\sqrt{3}.abc}{2R}. \quad (1)$$

Analogamente,

$$3y^2 = a^2 + c^2 - ac.cos\beta + \frac{\sqrt{3}.abc}{2R} \quad (2)$$

e

$$3z^2 = a^2 + b^2 - ab.cos\theta + \frac{\sqrt{3}.abc}{2R}. \quad (3)$$

Somando (1) e (2), em seguida, (2) e (3) e depois (1) e (3), obtemos respectivamente,

$$3x^2 + 3y^2 = a^2 + b^2 + 2c^2 - c(a.cos\beta + b.cos\alpha) + \frac{\sqrt{3}.abc}{R}; \quad (*)$$

$$3y^2 + 3z^2 = b^2 + c^2 + 2a^2 - a(b.cos\theta + c.cos\beta) + \frac{\sqrt{3}.abc}{R}; \quad (**)$$

$$3x^2 + 3z^2 = a^2 + c^2 + 2b^2 - b(a.cos\theta + c.cos\alpha) + \frac{\sqrt{3}.abc}{R}; \quad (***)$$

Agora, vamos usar um lema que demonstraremos em seguida.

Lema. Em todo triângulo ΔABC, de lados $\overline{BC}$ medindo a, $\overline{AC}$ medindo b, $\overline{AB}$ medindo c e ângulos $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ medindo, respectivamente, α, β e θ, valem as relações:

$c = a.cos\beta + b.cos\alpha$; $\quad b = a.cos\theta + c.cos\alpha$; $\quad a = b.cos\theta + c.cos\beta$

Usando o lema acima em (*), obtemos:

$$3x^2 + 3y^2 = a^2 + b^2 + 2c^2 - c.c + \frac{\sqrt{3}.abc}{R},$$

ou seja,

$$3x^2 + 3y^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{\sqrt{3}.abc}{R}.$$

Agora, usando o lema em (**), obtemos:

$$3y^2 + 3z^2 = b^2 + c^2 + a^2 + \frac{\sqrt{3}.abc}{R}.$$

Finalmente, usando o lema em (***), obtemos:

$$3x^2 + 3z^2 = a^2 + c^2 + b^2 + \frac{\sqrt{3}.abc}{R}.$$

Assim,

$$3x^2 + 3y^2 = 3y^2 + 3z^2 \text{ e } 3x^2 + 3y^2 = 3x^2 + 3z^2,$$

logo,

$$x = y = z \text{ ou } MN = NP = PM.$$

Portanto, o triângulo ΔMNP é equilátero.

Demonstração do lema. Num triângulo ΔABC qualquer, de lados medindo a, b e c, consideremos a oposto ao ângulo $B\hat{A}C = \alpha$, b oposto ao ângulo $A\hat{B}C = \beta$ e c oposto ao ângulo $A\hat{C}B = \theta$. Sabemos que α + β + θ = 180°, então α + β = 180° – θ. Daí,

$$sen(\alpha + \beta) = sen(180° - \theta) = sen\theta.$$

Pela lei dos senos, sabemos que

$$\frac{c}{sen\theta} = 2R \,,$$

ou seja,

$$\frac{c}{sen(\alpha + \beta)} = 2R \,.$$

Então,

$$c = 2R.(sen\alpha.cos\beta + sen\beta.cos\alpha) \,.$$

Ainda pela lei dos senos,

$$sen\alpha = \frac{a}{2R} \quad \text{e} \quad sen\beta = \frac{b}{2R} \,.$$

Substituindo na equação anterior, obtemos

$$c = 2R.\left(\frac{a.cos\beta}{2R} + \frac{b.cos\alpha}{2R}\right) ,$$

ou ainda,

$$c = a.cos\beta + b.cos\alpha.$$

Analogamente, chegamos a

$$b = a.cos\theta + c.cos\alpha \qquad \text{e} \qquad a = b.cos\theta + c.cos\beta.$$

4 APLICAÇÕES DOS TEOREMAS ESTUDADOS

4.1 Aplicações do teorema de Stewart

Cálculo das principais cevianas pelo teorema de Stewart.

Recordando, denomina-se ceviana a qualquer segmento que une um vértice ao lado oposto ou ao seu prolongamento. Entre as cevianas, destacam-se: altura, mediana e bissetriz interna e bissetriz externa de um ângulo de um triângulo.

Mediana é o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.

Exemplo 1.

Cálculo das medianas. Seja m_a a mediana relativa ao lado a de um triângulo ΔABC.

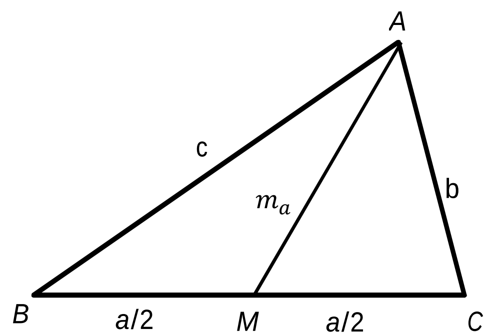
A relação de Stewart fornece

$$c^2 \cdot \frac{a}{2} + b^2 \cdot \frac{a}{2} = m_a^2 \cdot a + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a \iff \frac{1}{2} \cdot (b^2 + c^2) = {m_a}^2 + \frac{a^2}{4},$$

ou ainda,

$${m_a}^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4},$$

ou seja,



$$\boxed{m_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}\,.}$$

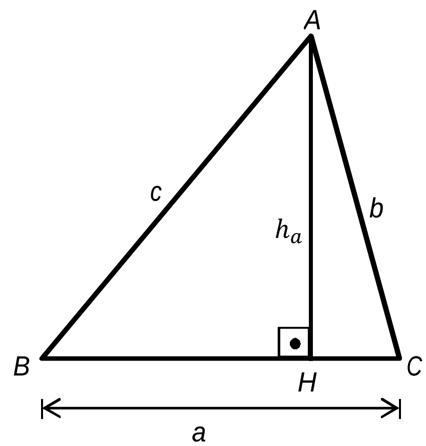
Analogamente teremos, para m_b e m_c o seguinte:

$$\boxed{m_b = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}} \quad \text{e} \quad \boxed{m_c = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}\,.}$$

Altura de um triângulo é o segmento da perpendicular traçada de um vértice ao lado oposto ou ao seu prolongamento.

Exemplo 2.

Cálculo das alturas: Seja h_a a altura relativa ao lado ***a*** de um triângulo ΔABC. Utilizando a lei dos cossenos no ΔABC abaixo, obtemos:



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.cos\hat{B}.$$

Daí,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\frac{BH}{c},$$

ou seja,

$$2.a.BH = a^2 + c^2 - b^2.$$

Assim,

$$BH = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}.$$

Novamente, pela lei dos cossenos, obtemos:

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2.b.a.cos\hat{C}.$$

Como $cos\hat{C} = \frac{HC}{b}$, segue-se que

$$2b.a.\frac{HC}{b} = b^2 + a^2 - c^2 \Leftrightarrow HC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

Aplicando o teorema de Stewart no ΔABC, temos:

$$c^2.HC \;+\; b^2.BH \;=\; h_a{}^2.a \;+\; BH.HC.a,$$

ou seja,

$$c^2.\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right) + b^2.\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right) = h_a{}^2.a + \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right).\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right).a\ .$$

Multiplicando todos os termos por $4a$, obtemos:

$$2c^2.(a^2 + b^2 - c^2) + 2b^2.(c^2 + a^2 - b^2) = 4a^2.h_a{}^2 + (a^2 + b^2 - c^2).(c^2 + a^2 - b^2),$$

ou seja,

$$2a^2c^2 + 2b^2c^2 - 2c^4 + 2b^2c^2 + 2a^2b^2 - 2b^4 = 4a^2.h_a{}^2 + \cancel{a^2c^2} + a^4 - \cancel{a^2b^2} + \underline{\underline{b^2c^2}} + \cancel{a^2b^2} - b^4 - c^4 - \cancel{a^2c^2} + \underline{\underline{b^2c^2}}.$$

Logo,

$$2a^2c^2 + 4\underline{\underline{b^2c^2}} - \underline{2c^4} + 2a^2b^2 - 2b^4 = 4a^2.h_a{}^2 + a^4 + \underline{\underline{2b^2c^2}} - b^4 \underline{- c^4},$$

que equivale a:

$$2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 2a^2b^2 - c^4 - b^4 - a^4 = 4a^2.h_a{}^2.$$

Substituindo $2a^2c^2$ por $4a^2c^2 - 2a^2c^2$, fica

$$4a^2c^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 2a^2b^2 - c^4 - b^4 - a^4 = 4a^2.h_a{}^2.$$

Agora, agrupando e fatorando, obtemos

$$4a^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 + 2a^2c^2) = 4a^2.h_a{}^2,$$

ou ainda,

$$4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2 = 4a^2.h_a{}^2.$$

Fatorando no primeiro membro a diferença de quadrados, obtém-se

$$[2ac - (a^2 + c^2 - b^2)].[2ac + (a^2 + c^2 - b^2)] = 4a^2.h_a{}^2,$$

ou seja,

$$(2ac - a^2 - c^2 + b^2).(2ac + a^2 + c^2 - b^2) = 4a^2.h_a{}^2\ ,$$

que equivale a

$$[b^2 - (a - c)^2].[(a + c)^2 - b^2] = 4a^2.h_a{}^2.$$

E mais uma vez fatorando a diferença de quadrados, obtém-se

$$[b - (a - c)].[b + a - c].[\,a + c - b].[\,a + c + b] = 4a^2.h_a{}^2,$$

ou seja,

$$(b + c - a).(a + b - c).(\,a + c - b).(\,a + b + c) = 4a^2.h_a^2,$$

ou ainda,

$$(a + b + c - 2a).(a + b + c - 2c).\ (a + b + c - 2b).(a + b + c) = 4a^2.h_a{}^2.$$

Fazendo $a + b + c = 2p$, podemos escrever:

$$(2p - 2a).(2p - 2b).(2p - 2c).2p = 4a^2.{h_a}^2.$$

Agora, fatorando e dividindo por 4, obtemos

$$4.(p - a).(p - b).(p - c) = a^2.{h_a}^2.$$

Que equivale a

$${h_a}^2 = \frac{4.(p - a).(p - b).(p - c)}{a^2},$$

ou ainda,

$$\boxed{h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}\ .}$$

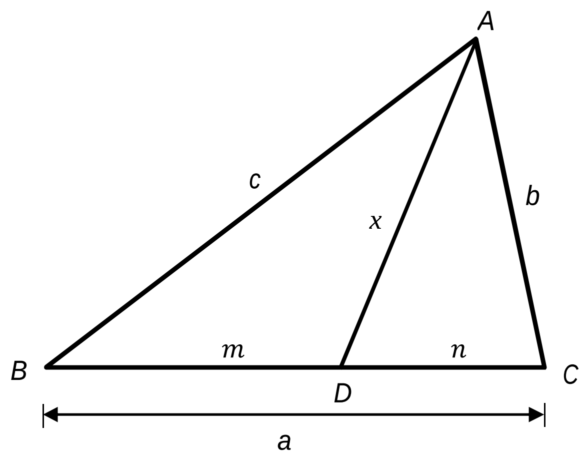
Analogamente temos para h_b e h_c:

$$\boxed{h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}} \quad \text{e} \quad \boxed{h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}\ .}$$

Exemplo 3.

Cálculo das bissetrizes internas.

Seja x a bissetriz interna relativa ao lado ***a*** do triângulo ΔABC da figura abaixo.



Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes. Veja **Teorema 6**.

Considere o ΔABC o triângulo de lados a, b e c, $\overline{AD}$ uma bissetriz interna (como a figura), $DB = m$ e $DC = n$.

Lembrando do teorema da bissetriz interna temos que:

$$\frac{m}{c} = \frac{n}{b},$$

que equivale a

$$\frac{m+n}{b+c} = \frac{m}{c} = \frac{n}{b}\,.$$

Como $m + n = a$, segue que

$$\frac{a}{b+c} = \frac{m}{c} = \frac{n}{b}\,.$$

Daí,

$$\frac{a}{b+c} = \frac{m}{c} \Leftrightarrow \frac{ac}{b+c} = m \quad \text{e} \quad \frac{a}{b+c} = \frac{n}{b} \Leftrightarrow \frac{ab}{b+c} = n.$$

Pela relação de Stewart temos:

$$b^2.m + c^2.n = x^2.a + m.n.a\,.$$

Substituindo m e n, obtém-se:

$$\frac{b^2ac}{b+c} + \frac{c^2ab}{b+c} = x^2.a + \frac{a^2bc.a}{(b+c)^2}\,.$$

Dividindo por a, obtém-se:

$$\frac{bc(b+c)}{b+c} = x^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2}\,,$$

ou seja,

$$x^2 = \frac{bc(b+c)^2 - a^2bc}{(b+c)^2}\,,$$

ou ainda,

$$x^2 = \frac{bc\left[(b+c)^2 - a^2\right]}{(b+c)^2}\,.$$

Fatorando a diferença de quadrados, obtemos

$$x^2 = \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}\,.$$

Agora, fazendo

$$b + c - a = b + c + a - 2a = 2p - 2a,$$

obtém-se:

$$x^2 = \frac{bc.2p.2(p-a)}{(b+c)^2},$$

ou ainda,

$$x^2 = \frac{4.bcp.(p-a)}{(b+c)^2},$$

portanto,

$$\boxed{x = \frac{2}{(b+c)}\sqrt{bcp(p-a)}.}$$

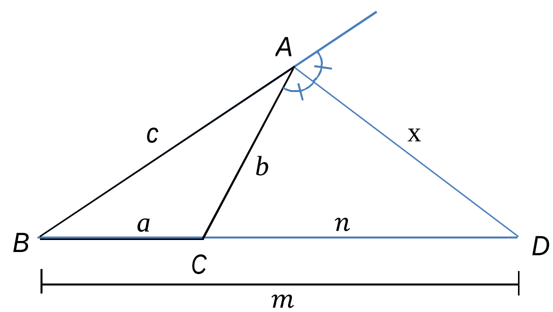
O cálculo das outras bissetrizes internas é análogo.

Exemplo 4.

Cálculo das bissetrizes externas.

Seja $AD = x$ a bissetriz externa relativa ao lado $\boldsymbol{a}$ do triângulo ΔABC da figura abaixo.

Seja $BD = m$ e $CD = n$.



Pelo teorema da bissetriz externa temos:

$$\frac{m}{c} = \frac{n}{b}$$

que equivale a

$$\frac{m-n}{c-b} = \frac{m}{c} = \frac{n}{b}.$$

Como $a = m-n$, então

$$\frac{a}{c-b} = \frac{m}{c} = \frac{n}{b} \quad \text{(estamos considerando } c \text{ maior que } b\text{)}$$

$$m = \frac{ac}{c-b} \quad \text{e} \quad n = \frac{ab}{c-b}.$$

Aplicando a relação de Stewart no triângulo acima, obtém-se:

$$x^2.a + c^2.n = b^2.m + m.a.n.$$

Substituindo os valores de m e n,

$$x^2.a + c^2.\frac{ab}{c-b} = b^2.\frac{ac}{c-b} + \frac{a.ab.ac}{(c-b)^2} .$$

Dividindo por a, fica:

$$x^2 + c^2.\frac{b}{c-b} = b^2.\frac{c}{c-b} + \frac{ab.ac}{(c-b)^2},$$

isolando x^2, temos:

$$x^2 = -\frac{bc^2}{c-b} + \frac{b^2c}{c-b} + \frac{ab.ac}{(c-b)^2}.$$

Fatorando, resulta:

$$x^2 = \frac{-bc(c-b)}{c-b} + \frac{ab.ac}{(c-b)^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{-bc(c-b)^2+bca^2}{(c-b)^2},$$

ou ainda,

$$x^2 = \frac{bc[(a+b-c).(a+c-b)]}{(b-c)^2}.$$

Fazendo $a + b + c = 2p$, temos:

$$x^2 = \frac{bc.2(p-b)2\,(p-c)}{(b-c)^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{4.bc(p-b)(p-c)}{(b-c)^2},$$

portanto,

$$\boxed{x = \frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}.}$$

O cálculo das outras bissetrizes externas é análogo.

Exemplo 5.

Calcule o raio x na figura, onde temos as circunferências: λ de centro 0 e raio igual a 3; λ_1 de centro 0_1 e raio 2; λ_2 de centro 0_2 e raio igual a 1; λ_3 de centro 0_3 e raio igual a x.

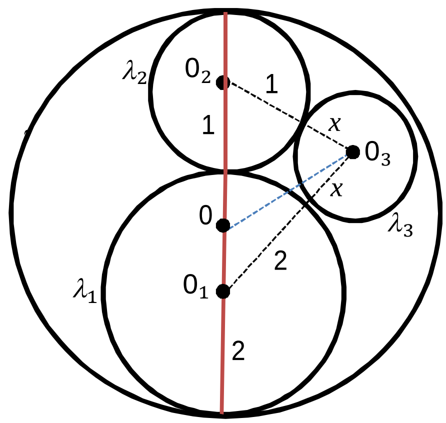
Solução:

No triângulo $0_1 0_2 0_3$ temos:

$$0_10_2 = 3; \ \ 0_10_3 = 2 + x; \ \ \ 0_20_3 = 1 + x$$

e ainda

$$00_1 = 1; \ 00_2 = 2; \ \ 00_3 = 3 - x$$



Aplicando a relação de Stewart

$$(1 + x)^2 .1 + (2 + x)^2.2 - (3 - x)^2.3 = 1.2.3;$$

$$1 + 2x + x^2 + (4 + 4x + x^2).2 \ - (9 - 6x + x^2).3 = 6;$$

$$1 + 2x + x^2 + 8 + 8x + 2x^2 - (27 - 18x + 3x^2) = 6;$$

$$1 + 2x + x^2 + 8 + 8x + 2x^2 - 27 + 18x - 3x^2 = 6;$$

$$28x = 6 - 1 - 8 + 27 \ \Leftrightarrow \ 28x = 24.$$

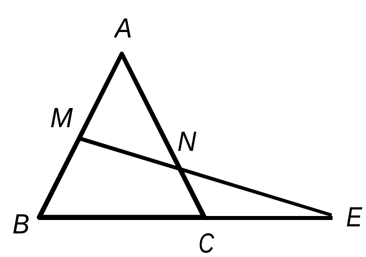
Logo,

$$\boxed{x = \frac{6}{7}\cdot}$$

4.2 Aplicações do teorema de Menelaus

1) (AFA) Na figura abaixo o perímetro do triângulo equilátero ΔABC é 72cm, M é o ponto médio de $\overline{AB}$ e CE = 16cm. Então, a medida do segmento $\overline{CN}$, em cm, é um sétimo de

a) 48
b) 49
c) 50
d) 51



Solução:

Como o ΔABC é equilátero e o perímetro é 72cm, resulta que seu lado mede 24cm. Aplicaremos o Teorema de Menelaus tomando como referência o ΔABC e a transversal $\overline{ME}$.

Com isso, temos:

$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CN}{AN} = 1 \Rightarrow \frac{12}{12} \cdot \frac{24+16}{16} \cdot \frac{CN}{24-CN} = 1 \Rightarrow 40.CN = 16.(24 - CN)$: (8)

$5.CN = 2.(24 - CN) \Rightarrow 5.CN = 48 - 2.CN \Rightarrow 7.CN = 48 \Rightarrow \quad CN = \frac{48}{7}$

Então, CN é um sétimo de 48.

Resposta: **A**

2) Seja $ABCD$ um trapézio com $\overline{AB}//\overline{CD}$, e seja X um ponto pertencente a $\overline{AX}$. Admita que $P = \overline{CB} \cap \overline{AD}$, $Y = \overline{CD} \cap \overline{PX}$, $R = \overline{AY} \cap \overline{BD}$ e $T = \overline{PR} \cap \overline{AB}$. Prove que

$$\frac{1}{AT} = \frac{1}{AX} + \frac{1}{AB}.$$

Solução:

Pelo Teorema de Menelaus no ΔABD com a transversal $\overline{PR}$. (Veja figura 2)

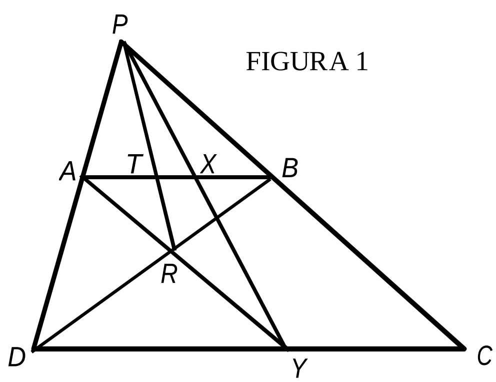


FIGURA 1

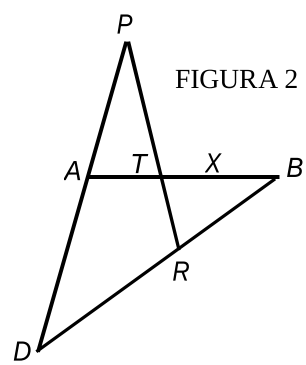


FIGURA 2

$$\frac{AT}{TB} \cdot \frac{BR}{RD} \cdot \frac{DP}{PA} = 1 \Leftrightarrow \quad \frac{TB}{AT} = \frac{BR}{RD} \cdot \frac{DP}{PA} \quad \text{(I)}$$

Como $\Delta ABR \sim \Delta YDR$ e $\Delta PDY \sim \Delta PAX$, então:

$$\frac{BR}{RD} = \frac{AB}{DY} \quad \text{e} \quad \frac{DP}{PA} = \frac{DY}{AX}$$

e substituindo $\frac{BR}{RD}$ por $\frac{AB}{DY}$ em (I), obtém-se

$$\frac{TB}{AT} = \frac{AB}{DY} \cdot \frac{DP}{PA} = \frac{AB}{DY} \cdot \frac{DY}{AX} = \frac{AB}{AX}$$

Assim, temos

$$AB = AT + TB \Rightarrow \frac{AB}{AT} = \frac{AT}{AT} + \frac{TB}{AT} = \frac{AB}{AX} + 1 \ ,$$

ou ainda,

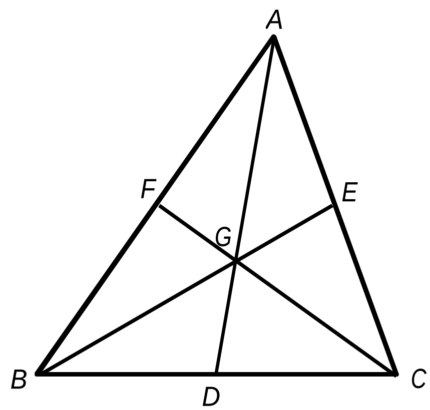
$$\frac{AB}{AT} = \frac{AB}{AX} + 1.$$

Dividindo por (AB), concluímos que

$$\frac{1}{AT} = \frac{1}{AX} + \frac{1}{AB} \cdot$$

4.3 Aplicações do teorema de Ceva

1) Vamos mostrar, pelo teorema de Ceva, que as três medianas de um triângulo concorrem num único ponto.



Sejam D, E e F os pontos médios respectivos dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, ou seja,

$$BD = DC, \qquad CE = EA, \qquad AF = FB.$$

Tracemos as três medianas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$.

Logo,

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1,$$

pois,

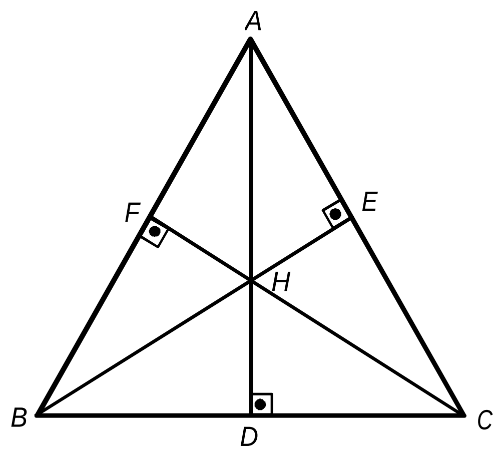
$$\frac{AF}{FB} = 1, \quad \frac{BD}{DC} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{CE}{EA} = 1.$$

Então, as três cevianas se intersectam em um único ponto.

2) Vamos mostrar que as três alturas de um triângulo concorrem num único ponto.

Afirmamos que em um triângulo ΔABC as alturas concorrem num ponto chamado ortocentro do triângulo.

De fato, sejam $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ as alturas relativas aos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ respectivamente, do triângulo abaixo. Sendo $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$, temos pelo triângulo ΔABC que os ΔAFC e ΔAEB tem o ângulo $\hat{A}$ comum e são retângulos. Garantindo assim, a semelhança dos mesmos. Portanto,



$$\frac{AF}{EA} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}. \qquad (1)$$

Analogamente temos que $\Delta BFC \sim \Delta BDA$, daí,

$$\frac{BD}{FB} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}. \qquad (2)$$

Temos também que $\Delta CEB \sim \Delta CDA$, o que implica em

$$\frac{CE}{DC} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}. \qquad (3)$$

Multiplicando membro a membro as equações (1) , (2) e (3) temos:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1.$$

Logo, pelo teorema de Ceva, temos que as alturas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ se intersectam em um único ponto.

3) (IME) Sobre os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo ΔABC, constroem-se dois quadrados $ABDE$ e $ACFG$. Mostre que os segmentos $\overline{CD}$, $\overline{BF}$ e altura $\overline{AH}$ são concorrentes.

Solução:

Consideremos AC = b, BA = c e BC = a.

Como

$$\Delta ACH \sim \Delta BCA \quad \Rightarrow \quad \frac{HC}{AC} = \frac{AC}{BC} \quad \Rightarrow \quad HC = \frac{b^2}{a}.$$

Analogamente,

$$HB = \frac{c^2}{a}.$$

Desde que $\Delta BYA \sim \Delta BFG$, então

$$\frac{YA}{FG} = \frac{AB}{GB} \quad \Rightarrow \quad YA = \frac{b.c}{b+c}.$$

Como $CY + YA = b$, então

$$CY = b - \frac{bc}{b+c} \quad \Rightarrow \quad CY = \frac{b^2+bc-bc}{b+c} \quad \Rightarrow \quad CY = \frac{b^2}{b+c}.$$

Uma vez que $\Delta CXA \sim \Delta CDE$, podemos escrever

$$\frac{XA}{ED} = \frac{CA}{CE} \quad \Longrightarrow \quad AC = \frac{bc}{b+c}$$

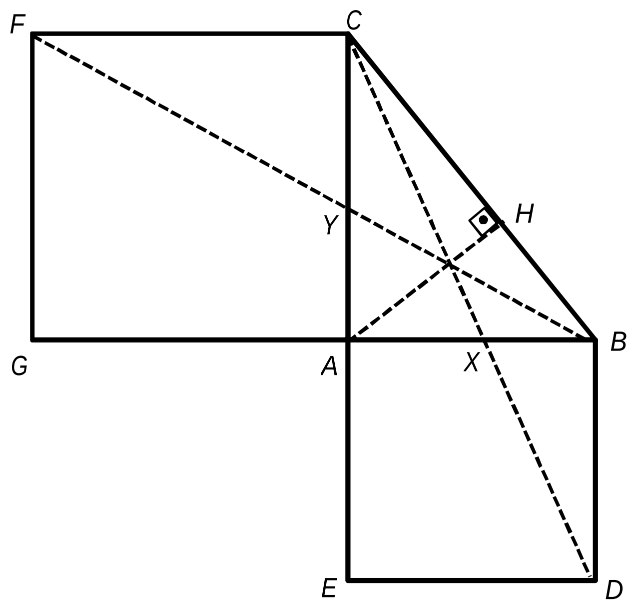
Como $AX + BX = c$, seguem as implicações

$$XB = c - \frac{bc}{b+c} \quad \Rightarrow \quad XB = \frac{bc+c^2-bc}{b+c} \quad \Rightarrow \quad XB = \frac{c^2}{b+c}.$$

Veja agora que:

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BH}{HC} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{\frac{b.c}{b+c}}{\frac{c^2}{b+c}} \cdot \frac{\frac{c^2}{a}}{\frac{b^2}{a}} \cdot \frac{\frac{b^2}{b+c}}{\frac{b.c}{b+c}} = 1,$$

ou seja, pelo Teorema de Ceva os segmentos $\overline{DC}$, $\overline{EF}$ e $\overline{AH}$ são concorrentes.



4.4 Aplicação do teorema de Napoleão

"Tome um triângulo arbitrário. Com base em cada um de seus lados, construa, externamente, um triângulo equilátero. Os centros desses três triângulos equiláteros são ainda vértices de um outro triângulo equilátero, denominado triângulo de Napoleão."

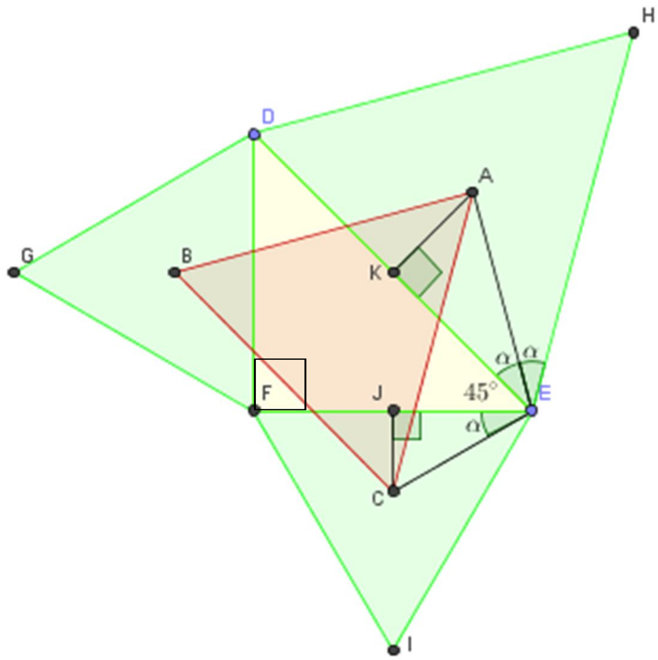
Diante do enunciado acima, julgue os itens seguintes:

I – Num triângulo de Napoleão ΔABC proveniente de um triângulo retângulo isósceles ΔDEF de base $\overline{ED}$, sendo A o baricentro do triângulo construído sobre a hipotenusa $\overline{DE}$ do ΔDEF e C o baricentro do triângulo construído sobre o lado $\overline{EF}$ o ângulo $A\hat{E}C$ pode medir 105º.

II – Ainda com relação ao item (I), se os lados iguais do triângulo ΔDEF medirem $4\sqrt{3}$ então o triângulo de Napoleão ΔABC terá seus lados medindo $2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.

III – A famosa Estrela de David, símbolo do Judaísmo, consiste em dois triângulos equiláteros iguais, concêntricos, mas em posições opostas. Pode-se afirmar que este símbolo é um exemplo de um triângulo e o seu correspondente de Napoleão.

Solução:



I – Correto

Como os triângulos são equiláteros, temos que as medianas, mediatriz, bissetriz e alturas são coincidentes. Sendo assim, $2\alpha = 60°$. Mas,

$$A\hat{E}C = 2\alpha + 45° \quad \Rightarrow \quad 60° + 45° = 105°.$$

II – Correto

Do triângulo ΔECJ podemos concluir que:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{EF}{2}}{CE},$$

como

$$\alpha = 30° \quad \text{e} \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

então,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{CE} \quad \Rightarrow \quad CE.\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad CE = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Logo, $CE = 4$.

Analogamente, no triângulo ΔAEK, temos

$$\cos\alpha = \frac{\frac{DE}{2}}{AE}.$$

Por Pitágoras encontramos,

$$DE^2 = (4\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{3})^2 \iff DE^2 = 48 + 48 \iff DE^2 = 96$$

$$\iff DE = \sqrt{16.6} \iff DE = 4\sqrt{6}.$$

Assim temos,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{AE} \quad \Rightarrow \quad AE = 4\sqrt{2}.$$

Por fim usando a lei dos cossenos no triângulo ΔACE, temos:

$$AC^2 = CE^2 + EA^2 - 2CE.AE.\cos 105° = 16 + 32 - 2.4.4\sqrt{2}.\cos(105°).$$

Como

$$\cos 105° = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},$$

segue que

$$AC^2 = 48 - 32\sqrt{2}.\frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6}) \iff$$

$$AC^2 = 48 - 16 + 8\sqrt{12} \iff AC^2 = 32 + 16\sqrt{3}$$

$$\iff AC^2 = 16.(2 + \sqrt{3}) \iff AC = 4\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Usando radical duplo, temos:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}, \qquad C = \sqrt{A^2 - B}$$

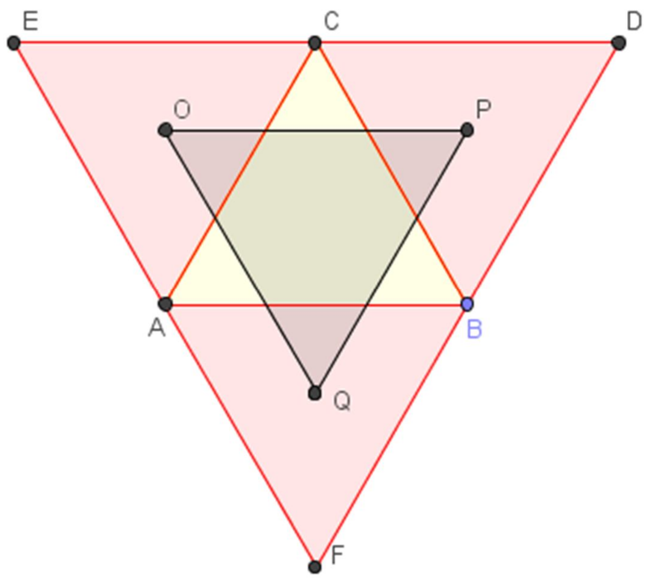
$$\Rightarrow \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

Portanto,

$$AC = 4.\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right) \iff \boxed{AC = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2}).}$$

III – Sim, veja a figura abaixo:

Temos o triângulo ΔABC e o seu correspondente ΔOPQ que é justamente o triângulo de Napoleão.



5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esperamos que este trabalho venha de alguma forma contribuir para a melhoria da aprendizagem dos alunos e futuros professores, na medida em que venha subsidiar os professores e alunos no intuito de tornar os teoremas citados mais acessíveis e esclarecedores e assim possa ser mais uma referência de pesquisa para aqueles que querem aprimorar o estudo da Geometria plana.

Os teoremas trabalhados são teoremas clássicos da Geometria plana que não são mais abordados nos livros didáticos adotados no ensino fundamental e médio. Esse fato tem gerado uma situação bastante negativa no ensino-aprendizagem da Geometria plana ao longo dos últimos anos. Tal situação é discutida por alguns pesquisadores como Lorenzato (1995) que aponta duas evidências para as possíveis causas dessa omissão da Geometria plana que seriam: A falta de conhecimento geométrico por parte dos professores e a exagerada importância que o livro didático ocupa no ambiente escolar. Já o pesquisador Pais (1999) relatou que a Geometria limitou-se a um lugar bem obscuro no currículo escolar, motivado principalmente pelo movimento da Matemática moderna.

Neste trabalho são feitas algumas abordagens e demonstrações simples de alguns teoremas da Geometria plana relacionados a triângulos que são de fundamental importância para estimular o interesse pelas demonstrações, de modo geral, nessa área do conhecimento matemático.

REFERÊNCIAS

[1] AZEVEDO, F.M. Filho. **Fundamentos da Geometria Euclidiana Plana**. Fortaleza, 1999.

[2] BARBOSA, Carlos Alberto..[et.al]. **A geometria e a apreensão do saber matemático**. Fortaleza: secretaria da Educação,2009.

[3] BARBOSA, J.L. Marques. **Geometria Euclidiana Plana.** Fortaleza, Sociedade Brasileira de Matemática,1997.

[4] BEZERRA, Manoel Jairo. **Geometria 1**. Rio de Janeiro, FAE,1985.BOYER, C.B. **História da Matemática.** São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo,1974.

[5] BOYER, C.B. **História da Matemática.** São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

[6] CAMINHA, Muniz Neto. **Tópicos de Matemática Elementar:** Geometria euclidiana Plana. Rio de Janeiro. SBM,2012.

[7] CATTONY, Carlos. **Matemática Álgebra e Geometria**. São Paulo:IBRASA,1979.

[8] ESPIRITU, F. F .Solimar. **Puntos notables.** Lima Perú. Asociación fondo de investigadores y Editores, 2012.

[9] EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

[10] MORGADO, A.C; WAGNER, E; JORGE,M. **Geometria I**. Fortaleza, VesteSeller, 2009.

[11] OLIVEIRA, M.R; PINHEIRO,M.R.R. **Elementos da Matemática.** Fortaleza, VestSeller, 2010.

[12] REZENDE, Eliane Quelho Frota. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas**. Campinas, SP: Editora da Unicamp,2000.