UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FRANCISCO ALLAN QUINTELA SILVA

COORDENADAS GEOMÉTRICAS EM FUNÇÕES PARAMÉTRICAS NO WINPLOT

FORTALEZA
2014

FRANCISCO ALLAN QUINTELA SILVA

COORDENADAS GEOMÉTRICAS EM FUNÇÕES PARAMÉTRICAS NO WINPLOT

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

FORTALEZA
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

S58c Silva, Francisco Allan Quintela

Coordenadas geométricas em funções paramétricas no Winplot / Francisco Allan Quintela Silva. – 2014.

77 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2014.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

1. Sequências. 2. Winplot (Software). 3. Curvas. I. Título.

CDD 515.24

FRANCISCO ALLAN QUINTELA SILVA

COORDENADAS GEOMÉTRICAS EM FUNÇÕES PARAMÉTRICAS NO WINPLOT

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 03 / 05 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Dedico a conclusão deste Mestrado Profissional a Deus e às minhas duas mães.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por confiar a mim o poder de compreender as limitações de minha família e as minhas próprias limitações, o poder de aceitar a vida conforme ela a mim se apresenta, e o poder de reconhecer a importância da humanidade daqueles com quem tive o prazer de conviver.

A minha mãe, Tereza, um espelho de força e persistência contra a dura jornada da vida.

A minha mãe, Didi, um santuário de ternura e afabilidade, que me ensinou a dar os primeiros passos.

Ao meu pai, Francisco, por me orientar em importantes escolhas da minha vida, inclusive a de cursar nível superior em Matemática.

A todos os professores, mestres e doutores do Mestrado Profissional, em especial aos professores Marcos Ferreira de Melo e Marcelo Ferreira de Melo, pelo exemplo e pela dedicação presentes durante todo o processo de construção deste curso que, então, encerra-se para a turma de 2012.

E a todos aqueles que, de uma maneira ou de outra, contribuíram para a realização deste trabalho, não esquecendo os colegas do PROFMAT da turma de 2012, por compartilharem suas dúvidas e incertezas, e por dividirem seu companheirismo nos melhores e nos piores momentos. Muito obrigado a todos.

“Descartes comandou mais o futuro a partir de seus estudos do que Napoleão a partir de seu trono.”

(Oliver Wendell Holmes Jr.)

RESUMO

Desde o princípio, as sequências e séries numéricas geraram interesse entre os matemáticos. Sua aplicabilidade atual é extensa e inclui o cálculo refinado da área da superfície e do volume de uma variedade de sólidos. Neste trabalho usaremos as diferenças entre os elementos de uma sequência finita a fim de encontrar leis que expressem as tendências nela contidas. Veremos também como um estudo simples sobre progressões aritméticas de ordens diversas é capaz de fornecer funções paramétricas de curvas passando por pontos pré-definidos, de superfícies contendo curvas pré-definidas ou, até mesmo, de regiões do $\mathcal{R}^3$ situadas entre duas superfícies dadas. Além disso, poderemos, com o auxílio do programa computacional Winplot, visualisar as curvas, superfícies ou regiões obtidas em cada exemplo de nosso estudo, além de, eventualmente, verificar pontos de máximo e mínimo relativos de uma curva ou calcular a área de uma superfície e o volume de uma região limitada do $\mathcal{R}^3$, tudo isto com um devido e prévio embasamento teórico.

Palavras-chave: Sequências. Funções Paramétricas. Winplot.

ABSTRACT

From the beginning, the numeric sequences and series generated interest among mathematicians. Your present applicability is extensive and includes the refined calculation of the surface area and volume of a variety of solids. In this work we will use the differences between the elements of a finite sequence in order to find laws that express the trends contained therein. We will also see how a simple study about arithmetic progressions of various orders is able to provide curves's parametric functions through predefined points, of surfaces containing predefined curves or even regions of the $\mathscr{R}^3$ localized between two given surfaces. Moreover, we will can, with the aid of the computational program Winplot, visualize the curves, surfaces, or regions obtained in each example of our study, in addition to eventually check points of relative maximum and minimum of a curve or calculate the area of a surface and the volume of a limited region of $\mathscr{R}^3$, all of this with a necessary and previous theoretical background.

Keywords: Sequences. Parametric Functions. Winplot.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste breve trabalho mostraremos como é possível obtermos elementos geométricos bidimensionais e tridimensionais a partir das coordenadas, ou das funções paramétricas das coordenadas, de outros elementos pré-definidos. Para tanto, faremos uma breve parada pelos tópicos pormenorizados de cada teoria que fundamenta nosso estudo, enfatizando sua natureza sistematizada.

Assim, iniciaremos nossa explanação com as definições e proposições sobre conjuntos, funções, sequências e progressões aritméticas, onde fundamenta-se a maior parte deste trabalho. Passaremos então a abordar as definições e proposições sobre limites e suas propriedades. Em seguida, trataremos das definições e proposições relativas à derivada de uma função, suas propriedades e aplicações. E agruparemos, em seguida, as definições e proposições que envolvem a integral de uma função, suas propriedades e aplicações. Finalmente encerraremos este trabalho mostrando dez exemplos, onde faremos uso de toda a teoria descrita anteriormente, e onde o estudo de sequências servirá de base para modelarmos os elementos geométricos requeridos em cada exemplo, junto ao programa computacional Winplot. As aplicações da derivada e da integral de uma função servirão para compararmos os resultados obtidos, no Winplot, no que diz respeito à obtenção dos pontos de máximo e mínimo relativos de uma função, e ao cálculo da área da superfície e do volume de sólidos geométricos.

Veremos que o método descrito neste trabalho é bastante simples e contem uma infinidade de exemplos que poderíamos usar para ilustrá-lo. Veremos também que tal método não pretende esgotar todas as possibilidades para obtenção de elementos geométricos a partir de outros elementos pré-definidos. Os exemplos aqui descritos enfatizam apenas a possibilidade de obtermos certos elementos geométricos que incluam elementos pré-definidos numa dada ordem, sempre mostrando que é possível através do sequenciamento dos números de cada coordenada, ou dos coeficientes das funções paramétricas de cada coordenada, de determinados elementos geométricos obtermos as funções paramétricas que representam as coordenadas do elemento geométrico desejado. Enfatizamos aqui também que, sem o auxílio de uma ferramenta computacional como o programa Winplot, não conseguiríamos obter o grau de comparação de resultados alcançado neste trabalho, tampouco conseguiríamos observar o resultado maior de nosso experimento que são as curvas e superfícies geradas pelo programa.

Enfim, cabe salientar que, em última instância, toda a Matemática tem uma finalidade prática, seja ela a de servir aos mais variados ramos da atividade humana como a engenharia, a computação e a astrofísica, ou a de simplesmente moldar o intelecto humano como forma de contribuir para seu desenvolvimento.

2 CONJUNTOS E FUNÇÕES

Para darmos início ao nosso trabalho são necessários alguns conceitos e definições pré-liminares que tratam das noções de conjunto e de função. A primeira destas noções diz respeito ao agrupamento de elementos de acordo com uma característica comum a todos eles. Já a segunda noção nos diz como relacionar dois ou mais conjuntos por meio de uma lei ou regra.

2.1 Conjuntos

Dentre todos os conceitos que abordaremos em nosso estudo, o conceito mais primitivo é o de conjunto ou coleção de elementos ou objetos.

Quanto a um elemento pertencer ou não a um conjunto dizemos que se a é elemento de um conjunto A então escrevemos $a \in A$ (lê-se a pertence a A), caso contrário escrevemos $a \notin A$ (lê-se a não pertence a A).

Representamos um conjunto qualquer A por seus elementos entre chaves ou por uma propriedade característica de seus elementos também entre chaves. Por exemplo o conjunto $A = \{b, c, d\}$ pode ser representado também como $A = \{x; x$ é consoante situada entre as duas primeiras vogais do nosso alfabeto$\}$, onde x representa um elemento qualquer do conjunto A.

Definiremos a seguir algumas operações entre conjuntos, a saber: a reunião (ou união), a interseção e a diferença entre dois conjuntos.

Definição 2.1. Dados os conjuntos A e B:

(i) a reunião $A \cup B$ é o conjunto formado pelos elementos de A ou de B;

(ii) a interseção $A \cap B$ é o conjunto formado pelos elementos de A e de B.

(*Números e Funções Reais*, PROFMAT, u.1 e 2, p.16).

Definição 2.2. A diferença entre dois conjuntos A e B é definida por:

$B \backslash A = \{x; x \in B$ e $x \notin A\}$. (*Números e Funções Reais*, PROFMAT, u.1 e 2, p.15).

Assim, por exemplo, dados $A = \{b, c, d\}$ e $B = \{a, b, c\}$, teremos $A \cup B = \{a, b, c, d\}$, $A \cap B = \{b, c\}$ e $A \backslash B = \{d\}$.

Alguns conjuntos recebem nomes especiais como conjunto vazio e conjunto unitário usados respectivamente quando um conjunto não possui elementos e quando um conjunto apresenta um único elemento. Chamamos de conjuntos numéricos aqueles cujos elementos são todos números, dentre estes destacamos o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ dos números naturais ou inteiros positivos, o conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ dos números inteiros positivos ou negativos incluíndo-se o zero, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais (fracionários) ou representáveis na forma $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$, o conjunto $\mathbb{I}$ dos números não-racionais ou irracionais, isto é aqueles que não podem ser representados na forma $\frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$, como, por exemplo a medida da diagonal de um quadrado cuja medida do lado é um número natural, e finalmente o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais que consiste da união entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais, ou seja, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Quanto à relação de contingência entre dois conjuntos, segue a próxima definição.

Definição 2.3. Sejam A e B conjuntos. Se todo elemento de A for também elemento de B, diz-se que A é um subconjunto de B, que A está contido em B, ou que A é parte de B. Para indicar este fato, usa-se a notação $A \subset B$. (*Números e Funções Reais*, PROFMAT, u.1 e 2, p.5).

Podemos, então, escrever, com base na definição dos conjuntos numéricos citados anteriormente, a relação $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Ainda quanto a subconjuntos, indicamos por I_n, $n \in \mathbb{N}$, o subconjunto de $\mathbb{N}$ dado por $I_n = \{p \in \mathbb{N}; p \leq n\}$. Assim, por exemplo, escrevemos $I_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

As definições a seguir tratam de conjunto limitado superiormente, conjunto limitado inferiormente, e supremo e ínfimo de um conjunto.

Definição 2.4. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se limitado superiormente quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Neste caso, diz-se que b é uma cota superior de X. Analogamente, diz-se que o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. O número a chama-se então uma cota inferior de X. (LIMA, 2006, p.16).

Definição 2.5. Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não-vazio. Um número $b \in \mathbb{R}$ chama-se o supremo do conjunto X quando é a menor das cotas superiores de X. Analogamente, se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não-vazio, limitado inferiormente, um número real a chama-se o ínfimo do conjunto X. (LIMA, 2006, p.16).

Indicamos o supremo e o ínfimo de um conjunto X respectivamente por $sup\, X$ e $inf\, X$.

Podemos agora relacionar os elementos de dois ou mais conjuntos por meio de uma lei ou regra que os associe, a qual chamaremos de função.

2.2 Funções

Definição 2.6. Dados os conjuntos X, Y , uma função $f : X \to Y$ (lê-se uma função de X em Y) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. (*Matemática Discreta*, PROFMAT, u.2, p.2).

Além disso, dada uma função qualquer $f : A \to B$, denomina-se os conjuntos A, B e f(A) respectivamente de domínio ($D(f)$), contra-domínio(CD(f)) e imagem(Im(f)) da função f, sendo que $f(A) = \{y \in B; y = f(x)\}$. Assim, por exemplo, dados os conjuntos $A = \{-1, 0, \sqrt{2}\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, com $x \in A$ e $y \in B$, podemos dizer que a expressão $y = x^2 + 1$ representa uma função $f : A \to B$, já que todo elemento x está associado a um elemento y pela função f pois $f(-1) = 2$, $f(0) = 1$ e $f(\sqrt{2}) = 3$, e ainda que $D(f) = A$, $CD(f) = Im(f) = B$.

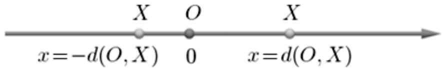
Dizemos também que uma função $f : X \to Y$ é injetora se para quaisquer $x_0, x_1 \in D(f)$, com $x_0 \neq x_1$, tem-se $f(x_0) \neq f(x_1)$, é sobrejetora se $Im(f) = CD(f)$, e é bijetora, ou uma bijeção, se f é simultaneamente injetora e sobrejetora.

Podemos agora definir conjuntos cardinalmente equivalentes, conjuntos finitos e conjuntos infinitos, conforme segue.

Definição 2.7. Dois conjuntos X e Y são ditos cardinalmente equivalentes (ou equipotentes) se existe uma bijeção $f : X \to Y$. (*Números e Funções Reais*, PROFMAT, u.3, p.7).

Podemos estabelecer, por exemplo, uma equivalência entre o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, e o conjunto dos pontos de uma reta, a qual chamaremos reta real. Se definirmos um ponto O da reta como origem da mesma e refência para o número real zero e definirmos o sentido positivo da reta para direita, demarcando sobre esta um ponto correspondente ao número real um, podemos fazer a correspondência entre os números racionais, pertencentes a $\mathbb{Q}$, contidos em $\mathbb{R}$ e os pontos da reta que podem ser obtidos com base na unidade, sob alguma razão $\frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$. Para completar a equivalência, incluímos no conjunto $\mathbb{R}$ os números que não podem ser demarcados na reta sob a razão $\frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ com base na unidade, isto é, os números irracionais do conjunto $\mathbb{I}$. Reciprocamente podemos associar todo ponto P da reta real a um número real que representa a distância orientada, positiva, negativa ou nula, de P à origem O da reta.

Assim, acabamos de estabelecer uma bijeção entre os números $x \in \mathbb{R}$ e o conjunto dos pontos X pertencentes à reta real, à qual denominaremos simplesmente de eixo real OX, e no qual os números x são chamados coordenadas abscissas dos pontos X da reta. A figura, a seguir, representa a reta real e dois pontos X, um à esquerda da origem e associado ao número real negativo $x = -d(X, O)$, e outro à direita da origem e associado a um número real positivo $x = d(X, O)$, onde $d(X, O)$ representa a distância de cada ponto X à origem O da reta real.



Geometria Analítica, PROFMAT, u.1, p.4.

Definição 2.8. Um conjunto X diz-se finito quando é vazio ou então existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f : I_n \to X$. (LIMA, 2006, p.3).

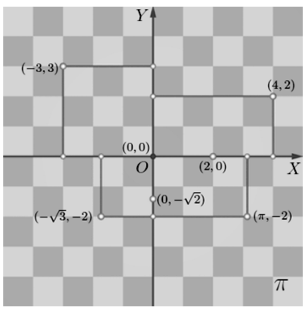
Definição 2.9. Diz-se que um conjunto é infinito quando não é finito. Assim, X é infinito quando não é vazio nem existe, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, uma bijeção $f : I_n \to X$. (LIMA, 2006, p.5).

O próximo tópico trata de sistemas de coordenadas cartesianas e define gráfico de funções paramétricas de variável real no plano e no espaço.

2.2.1 Gráficos e Funções Paramétricas

Antes de definirmos o gráfico de uma função, necessitamos conceituar produto cartesiano entre dois ou mais conjuntos. Assim, dados os conjuntos X e Y, definimos o produto cartesiano $X \times Y$ como o conjunto dos pares ordenados (x, y) tais que $x \in X$ e $y \in Y$, isto é $X \times Y = \{(x, y); x \in X$ e $y \in Y\}$. Da mesma forma, definimos o produto cartesiano de três conjuntos X, Y e Z, como sendo $X \times Y \times Z = \{(x, y, z); x \in X, y \in Y$ e $z \in Z\}$. Abreviadamente, escrevemos os produtos cartesianos $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ respectivamente como $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

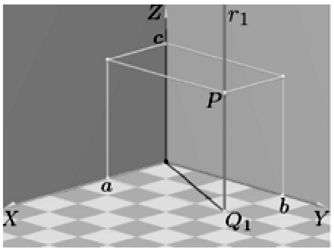
Podemos agora estabelecer uma equivalência entre um par ordenado (x, y) do conjunto $\mathbb{R}^2$ e um ponto P do plano, definindo-se antes um sistema composto por duas retas reais perpendiculares, de origem $O = (0, 0)$ comum, também conhecidas como eixo das coordenadas abscissas e eixo das coordenadas ordenadas ou, respectivamente, eixos OX e OY, sendo o primeiro, horizontal e orientado positivamente para direita, e o segundo, vertical e orientado positivamente para cima, onde os números reais x e y em seus respectivos eixos representam, nesta ordem, a distância orientada, positiva, negativa ou nula, do ponto P, respectivamente, aos eixos OY e OX, portanto, determinando-o. Da mesma forma, podemos associar um ponto P do plano às suas coordenadas x e y, ou seja, a um par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Na figura a seguir, estão representados o plano π, seu sistema cartesiano OXY e alguns pontos do citado plano com suas respectivas coordenadas.



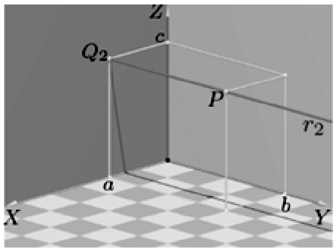
Geometria Analítica, PROFMAT, u.1, p.7.

Analogamente ao caso anterior, podemos estabelecer uma equivalência entre o conjunto dos elementos (x, y, z) do $\mathbb{R}^3$ e o conjunto dos pontos do espaço tridimensional, adotando-se um terceiro eixo real orientado positivamente para cima, eixo OZ, sendo este perpendicular aos eixos OX e OY, e de mesma origem $O = (0, 0, 0)$, compondo o chamado sistema ortogonal $OXYZ$.

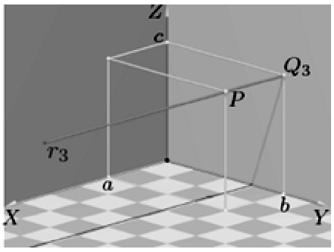
As figuras a seguir mostram uma região do espaço tridimensional limitada pelos planos OXY, OXZ e OYZ que contem, respectivamente, os eixos OX e OY, OX e OZ, e OY e OZ, onde o ponto O é a única intersecção entre os planos OXY, OXZ e OYZ. Além disso, podemos associar o terno de números reais (a, b, c) nas figuras a seguir como as coordenadas do ponto P, onde $a = d(P, Q_3)$, $b = d(P, Q_2)$ e $c = d(P, Q_1)$, onde os pontos Q_1, Q_2 e Q_3 são, nesta ordem, os pés das perpendiculares r_1, r_2 e r_3 baixadas de P sobre os planos OXY, OXZ e OYZ.



Geometria Analítica, PROFMAT, u.13, p.5.



Geometria Analítica, PROFMAT, u.13, p.5.



Geometria Analítica, PROFMAT, u.13, p.5.

Uma função paramétrica de variável real t no plano é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ cujo gráfico no sistema OXY compõe-se dos pontos $P = (x, y) = (f_1(t), f_2(t))$ do plano que obedecem à lei da função f e onde as coordenadas x e y são, respectivamente, funções f_1 e f_2 no parâmetro real t. De forma análoga, uma função paramétrica de variável real t no espaço tridimensional é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ cujo gráfico no sistema $OXYZ$ compõe-se dos pontos $P = (x, y, z) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ do espaço que seguem à lei da função f e onde as coordenadas x, y e z são, respectivamente, funções f_1, f_2 e f_3 no parâmetro real t.

As definições a seguir tratam de sequência numérica, sequência limitada, sequências monótonas e subsequência.

2.2.2 Sequências

Definição 2.10. Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n, chamado o n-ésimo termo da sequência. (LIMA, 2006, p.22).

Como o conjunto $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \ldots$ é o mesmo para toda e qualquer sequência x, pode-se convenientemente representar a sequência $(x(1), x(2), \ldots, x(n), \ldots)$ de valores funcionais de x por $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ e a sequência x por (x_n), onde seu n-ésimo termo também é conhecido como termo geral da sequência.

Definição 2.11. Uma sequência (x_n) é dita limitada, se existe $c > 0$ tal que $|x_n| < c$, para todo $n \in N$. Quando uma sequência (x_n) não é limitada, dizemos que ela é ilimitada. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.1, p.4).

Definição 2.12. Uma sequência (x_n) será dita decrescente se $x_{n+1} < x_n$ para todo $n \in N$. Diremos que a sequência é não crescente, se $x_{n+1} \leq x_n$ para todo $n \in N$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.1, p.5).

Definição 2.13. Uma sequência (x_n) será dita crescente se $x_{n+1} > x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Diremos que a sequência é não decrescente, se $x_{n+1} \geq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.1, p.5).

Definição 2.14. As sequências crescentes, não decrescentes, decrescentes ou não crescentes são chamadas de sequências monótonas. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.1, p.5).

Definição 2.15. Dada uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais, uma subsequência de (x_n) é a restrição da função x que define (x_n) a um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 = \{n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots\}$. Denotamos a subsequência por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$, ou $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ ou ainda $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.1, p.7).

Podemos agora enunciar e demonstrar nosso primeiro Teorema.

Teorema 2.1. Toda sequência (x_n) possui uma subsequência monótona. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.1, p.15).

Demonstração. Considere os dois seguintes conjuntos: $A_1 = \{p \in \mathbb{N};$ existe $n > p$ tal que $x_n \geq x_p\}$ e $A_2 = \{p \in \mathbb{N};$ existe $n > p$ tal que $x_n \leq x_p\}$. É claro que se tem $A_1 \cup A_2 = \mathbb{N}$. Temos, agora, duas possibilidades: a) A_1 é infinito. Neste caso, é imediato extrair uma subsequência não decrescente de (x_n). b) A_1 é vazio ou finito. Neste caso, A_2 é necessariamente infinito e, portanto, podemos extrair de (x_n) uma subsequência não crescente. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.1, p.15). $\square$

Escrevemos o somatório dos n elementos de uma sequência (x_n) como $\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Calculamos a seguir alguns somatórios que servirão de base para o nosso estudo.

• $\sum_{k=1}^{n} 1 : \sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n\,vezes} = n.1 = n;$

• $\sum_{k=1}^{n} a$, com a constante:

$\sum_{k=1}^{n} a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n\,vezes} = a.\underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{n\,vezes} = a.\sum_{k=1}^{n} 1 = a.n;$

• $\sum_{k=1}^{n} k :$

$$\begin{array}{lcccccccccc} \sum_{k=1}^{n} k & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & (n-1) & + & n \\ \sum_{k=1}^{n} k & = & n & + & (n-1) & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\ \hline \\ 2.\sum_{k=1}^{n} k & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n.(n+1)}{2};$

• $\sum_{k=1}^{n} a.k$, com a constante:

$\sum_{k=1}^{n} a.k = a.1 + a.2 + \ldots + a.n = a.(1 + 2 + \ldots + n) = a.\sum_{k=1}^{n} k = a.\frac{n(n+1)}{2};$

• $\sum_{k=1}^{n} k^2 :$

$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 = 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 - (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) = (n+1)^3 - 1^3 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} [(k+1)^3 - k^3] = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (3k^2 + 3k + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n \Rightarrow 3.\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3.\sum_{i=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = n^3 + 3n^2 + 3n \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}.(n^3 + 3n^2 + 3n - 3.\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1) = \frac{1}{3}.(n^3 + 3n^2 + 3n - 3.\frac{n(n+1)}{2} - n) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}.\frac{2n^3+6n^2+6n-3n^2-3n-2n}{2} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

Verificamos assim que o somatório das potências de k, k^p, com $p = 0, 1, 2$ ($\sum_{k=1}^{n} k^p$) são polinômios de grau $p + 1$. Iremos, então, generalizar em um Teorema estes resultados e demonstrá-lo, por indução, conforme segue.

Teorema 2.2. $1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p = \sum_{k=1}^{n} k^p$ é um polinômio de grau $p + 1$ em n. (*Matemática Discreta*, PROFMAT, u.5, p.11).

Demonstração. Vamos proceder por indução sobre p. Para p = 1, o teorema já foi provado anteriormente.

Suponhamos agora que $\sum_{k=1}^{n} k^p$ seja um polinômio de grau $p + 1$ em n, para todo $p \in \{1, 2, 3, \ldots, s\}$. Mostraremos que essa afirmação é verdadeira para p = s + 1, isto é, mostraremos que $\sum_{k=1}^{n} k^{s+1}$ é um polinômio de grau s + 2 em n. Observe que $(k+1)^{s+2} = k^{s+2} + (s+2)k^{s+1} + \ldots$, onde os termos que não foram escritos explicitamente formam um polinômio de grau s em k.

Temos então,

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^{s+2} = \sum_{k=1}^{n} k^{s+2} + (s+2)\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} + F(n),$$

onde $F(n)$ é um polinômio de grau $s+1$ em n, pela hipótese da indução. Simplificando os termos comuns aos dois primeiros somatórios, obtemos

$$(n+1)^{s+2} = 1 + (s+2)\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} + F(n).$$

Daí,

$$\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} = \frac{(n+1)^{s+2} - 1 - F(n)}{s+2}$$

que é um polinômio de grau s + 2 em n. (*Matemática Discreta*, PROFMAT, u.5, p.11).

Assim, dado um polinômio qualquer $F(k) = a_0 + a_1k + a_2k^2 + \ldots + a_pk^p$, o somatório $\sum_{k=1}^{n} F(k)$ pode ser calculado como

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} F(k) &= \sum_{k=1}^{n} (a_0 + a_1k + a_2k^2 + \ldots + a_pk^p) \\ &= a_0\sum_{k=1}^{n} 1 + a_1\sum_{k=1}^{n} k + a_2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \ldots + a_p\sum_{k=1}^{n} k^p \end{aligned}$$

e observando-se que o grau de $\sum_{k=1}^{n} F(k)$ depende somente do grau de $\sum_{k=1}^{n} k^p$ na expressão acima e que este, pelo Teorema 1, é igual a $p+1$ podemos, então, enunciar o seguinte Corolário.

Corolário 2.1. Se F é um polinômio de grau p então $\sum_{k=1}^{n} F(k)$ é um polinômio de grau $p+1$ em n. (*Matemática Discreta*, PROFMAT, u.5, p.12).

As definições a seguir tratam da definição de progressão aritmética, do operador diferença para sequências e da definição de progressão aritmética de segunda ordem.

2.2.2.1 Progressões Aritméticas

Definição 2.16. Uma progressão aritmética é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e representada pela letra r. (*Matemática Discreta*, PROFMAT, u.5, p.3).

A sequência $(a_n) : (-4, 0, 4, 8, 12, \ldots)$, por exemplo, é uma progressão aritmética de razão $r = 4$. Neste exemplo, é fácil percebermos que $a_5 = a_4 + r = a_3 + 2r = a_2 + 3r = a_1 + 4r$. Logo, de um modo geral temos $a_n = a_k + (n-k)r$ e mais particularmente tem-se $a_n = a_1 + (n-1)r$, onde a_n é chamado termo geral da progressão.

Podemos, com base nos resultados anteriores e de posse da expressão do termo geral da progressão aritmética, encontrar uma expressão para a soma dos termos de uma progressão aritmética $(a_k) : (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, ou seja, $\sum_{k=1}^{n} a_k$. Assim:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} (a_1 + (k-1)r) = \sum_{k=1}^{n} ((a_1 - r) + r.k) \\
&= (a_1 - r). \sum_{k=1}^{n} 1 + r. \sum_{k=1}^{n} k \\
&= (a_1 - r).n + r.\frac{n(n+1)}{2} = \frac{rn(n+1) + 2(a_1 - r)n}{2} \\
&= \frac{rn^2 + rn + 2a_1 n - 2rn}{2} = \frac{(rn + r + 2a_1 - 2r).n}{2} \\
&= \frac{(2a_1 + rn - r).n}{2} = \frac{(a_1 + (a_1 + (n-1)r).n}{2} = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.
\end{aligned}$$

Definição 2.17. Define-se para sequências o operador Δ, chamado de operador diferença, por $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$. (*Matemática Discreta*, PROFMAT, u.5, p.8).

Como consequência desta definição, vê-se que toda sequência (a_n) em que Δa_n é constante é uma progressão aritmética. Define-se ainda progressão aritmética estacionária aquela em que Δa_n é constante e igual a zero, e progressão aritmética de primeira ordem (ou não-estacionária) aquela em que Δa_n é constante e diferente de zero.

Definição 2.18. Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência (a_n) na qual as diferenças $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, entre cada termo e o termo anterior, formam uma progressão aritmética não-estacionária. (*Matemática Discreta*, PROFMAT, u.5, p.8).

De um modo geral, podemos afirmar que uma progressão aritmética (a_n) é de k-ésima ordem, $k \geq 2$, quando a sequência formada pelas diferenças consecutivas entre seus termos, isto é (Δa_n), é uma progressão aritmética de (k-1)-ésima ordem.

Dada uma sequência qualquer $(a_j) : (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ podemos, por diferenciação de seus elementos, encontrar sequências (Δa_k), $(\Delta\Delta a_k)$ ou $(\Delta^2 a_k)$, $(\Delta^3 a_k)$, ..., $(\Delta^{n-1} a_k)$, das quais pelo menos uma podemos supor ser uma progressão aritmética estacionária. Assim, obtemos o seguinte esquema em pirâmide.

$$\begin{gathered}
\Delta^{n-1} a_1 \\
\Delta^{n-2} a_1, \Delta^{n-2} a_2 \\
\cdots \\
\Delta^2 a_1, \quad \ldots, \quad \Delta^2 a_{n-2} \\
\Delta a_1, \Delta a_2, \ldots, \Delta a_{n-2}, \Delta a_{n-1} \\
a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots, a_{n-2}, \ a_{n-1}, \ a_n
\end{gathered}$$

Observe que, na pior das hipóteses, podemos considerar $(\Delta^{n-1}a_1)$ como progressão aritméti-ca estacionária e a partir daí escrevermos expressões gerais para as demais sequências por meio da igualdade $\Delta^l a_j = \Delta^l a_1 + \sum_{m=1}^{j-1} \Delta^{l+1} a_m$, onde j varia de 1 a $n - l$ em cada progressão. Neste caso, $(\Delta^{n-2}a_j)$ e $(\Delta^{n-3}a_j)$ seríam, por definição, respectivamente, progressões aritméticas de primeira e de segunda ordens. Seguindo este raciocínio, teríamos enfim que (a_k) sería uma progressão aritmética de (n-1)-ésima ordem. Note também que, neste caso, o grau do polinômio que define o termo geral $\Delta^l a_j$ de cada progressão da pirâmide depende apenas do somatório dos $j-1$ primeiros termos de sua sequência imediatamente superior, $\Delta^{l+1}a_j$, e que, pelo Corolário 1, é o grau do polinômio desta mais uma unidade. Portanto, conclui-se que o polinômio que define a sequência (a_j), neste caso, possui grau n-1. Assim, de modo geral, se l é o menor número para o qual tem-se $(\Delta^l a_j)$ como progressão aritmética estacionária, então o grau do polinômio que representa a sequência (a_j) é igual a l.

As definições e Teoremas, a seguir, tratam do limite $(\lim)$ de sequências e suas propriedades, bem como do limite de funções e suas propriedades, e fundamentam nosso estudo sobre derivadas e integrais de funções.

3 LIMITES E CONTINUIDADE

3.1 Limites

3.1.1 Limites de Sequências

Definição 3.1. Sejam (x_n) uma sequência de números reais e l um número real. Dizemos que (x_n) converge para l, ou é convergente, e escreve-se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, quando para qualquer intervalo aberto I contendo l (por menor que ele seja) é possível encontrar um inteiro $n_0 \geq 1$, de modo que $x_n \in I$ para todo $n > n_0$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.1, p.12).

Podemos, por exemplo, mostrar que $\lim\limits_{k\to\infty} c = c$, ou simplesmente $\lim c = c$, com c constante. Neste caso, considere a sequência (c_k), onde $c_k = c$ para todo k, e um intervalo $I = (-r + c, c + r)$, onde $r > 0$ é um número real arbitrário. Assim, admitindo-se $k_0 = 1$ teremos para todo $k > k_0$ que $-r + c < c_k = c < c + r$ e portanto $c_k \in I$, o que queríamos demonstrar.

O Teorema, a seguir, trata da unicidade do limite.

Teorema 3.1. Se existir um número real l tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, então ele é único. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.1, p.13).

Demonstração. Suponha por absurdo que $\lim_{n\to\infty} x_n = l_1$ e que $\lim_{n\to\infty} x_n = l_2$, com $l_1 \neq l_2$. Tome $r = \frac{|l_2-l_1|}{2} > 0$. Assim, existem inteiros positivos n_1 e n_2 tais que para todo $n > n_1$, $|x_n - l_1| < r$ e para todo $n > n_2$, $|x_n - l_2| < r$. Tomando-se n_0 =max$\{n_1, n_2\}$, temos que $|x_n - l_1| < r$ e $|x_n - l_2| < r$, para todo $n > n_0$, o que é equivalente a $l_1 - r < x_n < l_1 + r$ e $l_2 - r < x_n < l_2 + r$, para todo $n > n_0$. Multiplicando-se a primeira desigualdade por -1, obtemos a desigualdade $-l_1 - r < -x_n < r - l_1$. Agora, adicionando-a à segunda, obtemos $l_2 - l_1 - 2r < 0 < l_2 - l_1 + 2r$, ou seja, $-2r < l_1 - l_2 < 2r$, donde $|l_2 - l_1| < 2r = |l_2 - l_1|$, absurdo. Provamos assim que o limite é único. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.1, p.20). □

Os Teoremas, a seguir, tratam da limitação de sequências convergentes e da completude dos números reais.

Teorema 3.2. Toda sequência convergente é limitada. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.1, p.13).

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente, tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = l$. Pela definição de sequência convergente, temos que dado um intervalo limitado I contendo l, existe um inteiro positivo n_0 tal que para todo inteiro $n > n_0$, tem-se que $x_n \in I$. Assim, os únicos termos da sequência que eventualmente não pertencem ao intervalo I, são os termos $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$, portanto em número finito.

Basta agora tomar um intervalo limitado J contendo o intervalo I e também os termos $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$. Obtemos assim, que todos os termos da sequência pertencem ao intervalo J e que, portanto, (x_n) é limitada. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.1, p.14).

Teorema 3.3. Toda sequência monótona limitada é convergente. (LIMA, 2006, p.25).

Demonstração. Seja (x_n) monótona, digamos não decrescente, limitada. Escrevamos $X = x_1, \ldots, x_n, \ldots$ e $a = supX$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, o número $a - \epsilon$ não é cota superior de X. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < x_{n_0} \leq a$. Assim, $n > n_0 \Rightarrow a - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n < a + \epsilon$ e daí $\lim x_n = a$.

Semelhantemente, se (x_n) é não-crescente, limitada então x_n é o ínfimo do conjunto dos valores x_n. (LIMA, 2006, p.25). □

Os Teoremas e o Corolário a seguir e suas respectivas demonstrações tratam do limite da soma, do limite do produto, do limite de polinômio, do limite do inverso, do limite do quociente e da relação entre limites e desigualdades aplicada a sequências.

Teorema 3.4. Se $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = k$, então $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = l + k$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.2, p.2).

Demonstração. Pela desigualdade triangular, para todo n, temos

$|(x_n + y_n) - (l + k)| = |(x_n - l) + (y_n - k)| \leq |x_n - l| + |y_n - k|$

A validade desta proposição decorre do fato de que podemos tornar a soma $|x_n - l| + |y_n - k|$ tão próximo de zero quanto queiramos desde que tomemos n suficientemente grande (pois isto vale tanto para $|x_n - l|$ quanto para $|y_n - k|$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.2, p.2). □

Teorema 3.5. Se $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = k$, então $\lim_{n\to\infty} x_n.y_n = (\lim_{n\to\infty} x_n).(\lim_{n\to\infty} y_n) = lk$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.2, p.3).

Demonstração. Notemos que

$x_n y_n - lk = x_n y_n - x_n k + x_n k - lk = x_n(y_n - k) + k(x_n - l)$

Por outro lado, sabemos que existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$ para todo n, pois toda sequência convergente é limitada. Portanto, para todo n,

$|x_n y_n - lk| = |x_n(y_n - k) + k(x_n - l)| \leq |x_n(y_n - k)| + |k(x_n - l)| = |x_n||y_n - k| + |k||x_n - l| \leq M|y_n - k| + |k||x_n - l|$.

Daí resulta que $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = lk$, já que podemos tornar $M|y_n - k| + |k||x_n - l|$ tão próximo de zero quanto queiramos desde que tomemos n suficientemente grande (pois isto vale tanto para $|x_n - l|$ quanto para $|y_n - k|$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.2, p.3-4). □

Por exemplo, seja c uma constante real arbitrária, $x_n = c$ para todo $n \geq 1$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = k$. Assim, como $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} c = c$ temos, do teorema anterior que $\lim_{n\to\infty} cy_n = \lim_{n\to\infty} x_n y_n = (\lim_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} y_n) = ck$.

Teorema 3.6. Seja $p(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio. Tem-se que $\lim_{n\to\infty} x_n = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p(x_n) = p(\lim_{n\to\infty} x_n) = p(l)$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.2, p.5).

Demonstração. De fato, dos Teoremas 3.4, 3.5 e do exemplo anterior, segue-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} p(x_n) &= \lim_{n\to\infty} (a_m {x_n}^m + \ldots + a_1 x_n + a_0) \\
&= \lim_{n\to\infty} a_m {x_n}^m + \ldots + \lim_{n\to\infty} a_1 x_n + \lim_{n\to\infty} a_0 \\
&= a_m \lim_{n\to\infty} {x_n}^m + \ldots + a_1 \lim_{n\to\infty} x_n + a_0 \\
&= a_m l^m + \ldots + a_1 l + a_0 = p(l).
\end{aligned}$$

(*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.2, p.5). □

Teorema 3.7. Se (y_n) é uma sequência de números reais não nulos convergindo para um número real k não nulo, então a sequência $(\frac{1}{y_n})$ converge para $\frac{1}{k}$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.2, p.6).

Demonstração. Seja r um número real arbitrário no intervalo $(0, k^2)$. Assim, $r^2 > 0$ e $k^2 - r > 0$. Como y_n converge para k, sabemos que ky_n converge para k^2. Logo, existem inteiros positivos n_1 e n_2 tais que para $n > n_1$ temos $|y_n - k| < r^2$ e para $n > n_2$ temos $|ky_n - k^2| < k^2 - r$. Tomando-se $n_0 = max\{n_1, n_2\}$, segue que para todo $n > n_0$, temos que $|y_n - k| < r^2$ e $|ky_n - k^2| < k^2 - r$. Expandindo a última desigualdade, obtemos $ky_n > r > 0$ para todo $n > n_0$, donde $0 < \frac{1}{ky_n} < \frac{1}{r}$. Assim, concluímos que para todo $n > n_0$, $|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{k}| = |\frac{k-y_n}{ky_n}| < \frac{r^2}{r} = r$, provando a proposição. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.2, p.6). □

Corolário 3.1. Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = k$, com $y_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $k \neq 0$ então $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{l}{k}$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.2, p.6).

Demonstração. De fato, dos Teoremas 3.5 e 3.7, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} (x_n.\frac{1}{y_n}) = (\lim_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n}) = l.\frac{1}{k} = \frac{l}{k}.$$

(*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.2, p.7). □

Teorema 3.8. Se (x_n) é uma sequência convergente satisfazendo $x_n < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$(respectivamente, $x_n > b$ para todo $n \in \mathbb{N}$), então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq b$(respectivamente, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq b$). (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.2, p.7).

Demonstração. Provaremos apenas a primeira asserção, pois a segunda se prova de modo análogo e a deixamos como exercício para o leitor.

Seja $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ e suponha por absurdo que $l > b$. Tomemos $r > 0$, suficientemente pequeno, tal que $l - r > b$.

Por definição de limite de uma sequência, existe um inteiro positivo n_0 tal que para todo $n > n_0$ tem-se que $x_n \in (l - r, l + r)$. Mas isso significa que para todo $n > n_0$, tem-se que $x_n > b$, contradizendo a hipótese $x_n < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluímos, portanto, que $l \leq b$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.2, p.8). □

3.1.2 Limites de Funções

Vamos agora estender a definição de limite para uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definição 3.2. Sejam $f : D \to \mathbb{R}$, onde D é o domínio de f, $a \in \mathbb{R}$ tal que todo intervalo aberto contendo a intersecte $D\backslash\{a\}$ e $l \in \mathbb{R}$. Diz-se que $f(x)$ tende para l quando x tende para a, e escreve-se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ (lê-se: limite de $f(x)$ quando x tende para a é igual a l) quando para toda sequência (x_n) de elementos de $D\backslash\{a\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.3, p.4).

Os Teoremas e o Corolário a seguir, com suas respectivas demonstrações tratam do limite de polinômio, do limite da soma, do limite do produto e do limite do quociente aplicado a funções, além do limite do produto de uma constante por uma função e do limite da diferença de duas funções.

Teorema 3.9. Se p é um polinômio qualquer, então, para todo $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.3, p.6).

Demonstração. De fato, tomemos qualquer sequência (x_n) de números reais diferentes de a tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Vimos no Teorema 3.6 que $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_n) = p(a)$. Assim, $\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.3, p.6). $\square$

Teorema 3.10. Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que todo intervalo aberto contendo a intersecte $D\backslash\{a\}$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$, então,

(a)$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = l_1 + l_2$.

(b)$\lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = l_1 l_2$.

(c)Se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in D$ e $l_2 \neq 0$, tem-se que $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f}{g})(x) = \frac{l_1}{l_2}$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.3, p.9).

Demonstração. (a) Seja (x_n) uma sequência arbitrária de elementos de $D\backslash\{a\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$, segue-se que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l_1$ e, como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$, segue que $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = l_2$. Pelo Teorema 3.4, obtemos $\lim\limits_{n\to\infty}(f+g)(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n) + g(x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) + \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = l_1 + l_2$.

Portanto, pela definição de limite, $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = l_1 + l_2$, como havíamos afirmado.

(b) De fato, seja (x_n) uma sequência arbitrária de elementos de $D\backslash\{a\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$, segue-se que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l_1$ e, como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$, segue que $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = l_2$. Pelo Teorema 3.5, obtemos $\lim\limits_{n\to\infty}(fg)(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)g(x_n))$ $= (\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n))(\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)) = l_1 l_2$. Portanto, pela definição de limite, $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = l_1 l_2$.

(c) A demonstração deste item é análoga às dos itens anteriores, lembrando que deverá ser usado o Corolário 3.1. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.3, p.10). $\square$

Corolário 3.2. Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ como no enunciado do Teorema 3.10.

(a) Se $c \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c \lim\limits_{x\to a} f(x) = cl_1$.

(b) $\lim\limits_{x\to a}(f-g)(x) = l_1 - l_2$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.3, p.10).

Demonstração. (a) Aplique o item (b) do Teorema 3.10 com g(x) = c a função constante.

(b) Observe que $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a}[f(x) + (-g(x))]$ e aplique a esta última expressão os itens (a) do Teorema 3.10 e do presente corolário. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.3, p.10). □

Antes de definirmos a derivada de uma função faz-se necessário definirmos quando uma função é contínua em um dado ponto de seu domínio e quando uma função é dita contínua. As definições a seguir tratam deste tópico.

3.2 Limites e Continuidade

Definição 3.3. Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ uma função definida no domínio $D \in \mathbb{R}$ e $a \in D$, um ponto tal que todo intervalo aberto contendo a intersecta $D\backslash\{a\}$. Dizemos que a função f é contínua em a se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.7, p.3).

Definição 3.4. Seja $f : D \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é contínua se f for contínua em todos os elementos de D. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.7, p.4).

Assim, por exemplo, podemos afirmar que toda função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua pois, pelo Teorema 3.9, temos $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$, isto é p é contínua em todos os pontos de seu domínio.

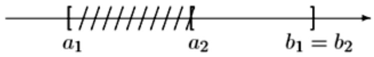
Os Teoremas, a seguir, e suas respectivas demonstrações tratam respectivamente do Teorema do Valor Intermediário, da imagem de um intervalo e do Teorema de Weierstrass e auxiliarão em nosso estudo sobre integral de uma função.

Teorema 3.11. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e seja d um número entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe um número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.8, p.5).

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que $f(a) < d < f(b)$. Além disso, considerando $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = f(x) - d$, também contínua, observamos que basta demonstrar o teorema para o caso em que $d = 0$. Logo, podemos supor que $f(a) < 0 < f(b)$ e, portanto, queremos achar $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

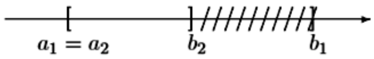
A estratégia que usaremos para achar esse número c é a seguinte: construiremos duas sequências monótonas contidas em $[a, b]$, portanto limitadas. Pela completude dos números reais, elas são convergentes. Além disso, a sequência obtida tomando a distância entre os seus termos, converge para zero. Portanto, elas convergem para um mesmo ponto c. Esse ponto é o candidato à solução de $f(x) = 0$. Vamos aos detalhes.

Construímos duas sequências, (a_n) e (b_n), da seguinte maneira: $a_1 = a$ e $b_1 = b$. Seja $m_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$, o ponto médio do intervalo $[a, b]$. Apenas uma das três possibilidades pode ocorrer: $f(m_1) = 0$, $f(m_1) < 0$ ou $f(m_1) > 0$. Caso $f(m_1) = 0$. Neste caso, tomando $c = m_1$, o teorema está demonstrado. Caso $f(m_1) < 0$. Neste caso, escolhemos $a_2 = m_1$ e $b_2 = b_1$. Isto é, estamos abandonando a primeira metade do intervalo $[a, b]$. Veja na ilustração a seguir.



Fonte: *Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.8, p.15.

Caso $f(m_1) > 0$. Neste caso, escolhemos $a_2 = a_1$ e $b_2 = m_1$. Isto é, abandonamos a outra metade do intervalo.



Fonte: *Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.8, p.15.

Repetimos este processo fazendo $m_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$. Novamente, se $f(m_2) = 0$, então o resultado é verdadeiro. Se $f(m_2) < 0$, escolhemos $a_3 = m_2$ e $b_3 = b_2$. Se $f(m_2) > 0$, escolhemos $a_3 = a_2$ e $b_3 = m_2$.

Prosseguindo desta forma, ou obtemos uma solução de $f(x) = 0$, como algum ponto médio dos subintervalos, ou produzimos duas sequências monótonas, (a_n) e (b_n), tais que para todo número $n \in \mathbb{N}$,

•$a_n \leq a_{n+1}$ e $b_n \geq b_{n+1}$;
•$b_n - a_n = \frac{b_1-a_1}{2^n}$;
•$f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$.

A primeira afirmação, mais o fato de todos os elementos das duas sequências estarem contidos no intervalo $[a, b]$, pelo Teorema 3.3, implicam que as duas sequências convergem. Sejam $\lim a_n = c_1$ e $\lim b_n = c_2$. A segunda afirmação garante que $c_1 = c_2$. De fato, $c_2 - c_1 = \lim b_n - \lim a_n = \lim(b_n - a_n) = 0$.

Logo, $c_1 = c_2$. Chamaremos esse número de c. Este é o candidato à solução de $f(x) = 0$. Para mostrar isso, usamos a hipótese da continuidade. Como f é contínua, $\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = f(c)$. A terceira afirmação garante, pelo Teorema 3.8, que $\lim f(a_n) = f(c) \leq 0$ e $\lim f(b_n) = f(c) \geq 0$. Portanto, $f(c) = 0$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.8, p.15-16).

Teorema 3.12. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um intervalo I. Então, $f(I)$ é um intervalo. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.8, p.5).

Demonstração. Na verdade, vamos mostrar que a imagem $f(I)$, do intervalo I por f possui a seguinte propriedade: se α e β são elementos de $f(I)$, então o intervalo de extremos α e β está contido em $f(I)$. Esta caracterização dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são intervalos é bastante intuitiva e poderia ser demonstrada rigorosamente usando a completude de $\mathbb{R}$. Note que estamos considerando todos os tipos de intervalos, inclusive $\mathbb{R}$ e $\{a\} = [a, a]$.

Vamos aos detalhes. Se f é constante, $f(I)$ reduz-se a um conjunto com um único elemento. Vamos então supor f não constante e sejam α e β elementos de $f(I)$. Então, existem a e b em I tais que $f(a) = \alpha$ e $f(b) = \beta$. Suponhamos, sem perder em generalidade, que $a < b$. Aqui usamos a hipótese de I ser um intervalo: $[a, b] \to I$. A função f, contínua em I, quando restrita a $[a, b]$, ainda é uma função contínua. Agora, suponha γ um elemento qualquer entre α e β. Portanto, γ é um elemento entre $f(a)$ e $f(b)$ e, pelo Teorema do Valor Intermediário aplicado a f restrita à $[a, b]$, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$. Isso quer dizer que todos os elementos entre α e β são elementos de $f(I)$, ou seja, $[\alpha, \beta] \subset f(I)$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.8, p.6). □

Teorema 3.13. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida no intervalo $[a, b]$, fechado e limitado da reta. Então, existem números c e d, contidos em $[a, b]$, tais que, para todo $x \in [a, b]$, $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.8, p.9).

Demonstração. Vamos mostrar que a imagem de $[a, b]$ por f é um intervalo fechado e limitado $[C, D]$. Já sabemos que $f([a, b]) = I$, um intervalo. Se f for constante, $I = [C, C] = \{C\}$. Vamos supor que f não é constante.

Mostraremos inicialmente que I é um intervalo limitado. Suponhamos, por absurdo, que I não seja limitado. Podemos então tomar (sem perda de generalidade) uma sequência (y_n) de elementos de I, escolhendo y_1 um elemento qualquer de I e fazendo $y_n = y_{n-1} + 1$, para $n \geq 2$. Então, $\lim y_n = +\infty$. Na verdade, qualquer subsequência $(y_{n'})$ também satisfaz a condição $\lim y_{n'} = +\infty$.

Considere agora a sequência (a_n) de elementos de $[a, b]$, tal que $f(a_n) = y_n$. Aplicando o Teorema 2.1, podemos considerar $(a_{n'})$, uma subsequência monótona de (a_n), que também é limitada, uma vez que seus elementos pertencem ao intervalo $[a, b]$. Pelo Teorema 3.3, da completude dos números reais, essa subsequência converge para algum número em $[a, b]$, digamos $\lim a_{n'} = l$. A continuidade de f garante que $\lim y_{n'} = \lim f(a_{n'}) = f(l)$, que contradiz o fato $\lim y_{n'} = +\infty$. Logo, I é um intervalo limitado.

Vamos agora provar que I é fechado. Suponhamos que D seja o extremo superior de I. Vamos mostrar que $D \in f([a, c])$. A estratégia é a mesma. Tomemos (z_n) uma sequência de elementos distintos de I, tal que $\lim z_n = D$. Podemos considerar, por exemplo, z_1 um elemento de I e, portanto, $z_1 < D$. Defina $z_n = \frac{D - z_{n-1}}{2}$, para $n \geq 2$.

Agora, seja (b_n) a sequência de elementos de $[a, b]$ tal que $f(b_n) = z_n$. Escolha uma subsequência $(b_{n'})$ monótona e limitada, portanto convergente. Digamos $\lim b_{n'} = d$. A continuidade de f garante que $\lim f(b_{n'}) = f(d) = \lim(z_{n'}) = D$. Isto prova que $D \in I = f([a, b])$. Analogamente, prova-se que C, o extremo inferior do intervalo I, também pertence a I. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.8, p.17).

4 DERIVADAS

Vamos agora definir a derivada de uma função. Para isto, dada uma curva do $\mathbb{R}^2$ denomina-se coeficiente angular ou inclinação da reta secante à curva, passando pelos pontos $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q = (x_1, f(x_1))$ desta, a razão $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, onde $h = x_1 - x_0$.

Com base no conceito de inclinação de uma reta e na expressão do limite de uma função, poderemos a seguir tratar da definição de derivada de uma função e dar interpretação geométrica à mesma.

Definição 4.1. A derivada de uma função $y = f(x)$ definida em um intervalo aberto I em um ponto $x_0 \in I$ é dada por $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, caso este limite exista. Se o limite existir a função f é dita derivável em x_0. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.9, p.4).

Definição 4.2. Seja f uma função definida em um intervalo aberto I. Se f é derivável para todo ponto de seu domínio, dizemos que a função é derivável e que a função $f' : I \to \mathbb{R}$ que associa a cada $x \in I$ o valor $f'(x)$ é a função derivada de f. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.9, p.4).

Podemos ainda representar por $\frac{dy}{dx}$ a derivada $f'(x)$ e por $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ a derivada da função f no ponto x_0 de seu domínio, ou seja, $f'(x_0)$. A definição, a seguir, mostra que a derivada de uma função f em um ponto P de abscissa x_0 é a inclinação da reta tangente à curva, gráfico da função, no ponto P.

Definição 4.3. A reta tangente a uma curva que é gráfico de $y = f(x)$ em um ponto $P = (x_0, f(x_0))$ é a reta que passa por P e cujo coeficiente angular é dado por $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, se o limite existir. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.9, p.8).

Por exemplo, as inclinações das retas tangentes aos gráficos das funções constante ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tendo-se $f(x) = k$, com k constante) e identidade ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = x$), em um ponto qualquer $P = (x, f(x))$ de seus gráficos, podem ser obtidas como segue.

$$\bullet f(x) = k \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0;$$
$$\bullet f(x) = x \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1.$$

Uma observação importante é a de que uma função f só é derivável em um ponto $P = (x_0, f(x_0))$ de seu gráfico se os limites $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ e $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ forem iguais, ou seja, se a derivada da função f for a mesma quando nos aproximamos de x_0 pela esquerda ($h \to 0^-$) ou pela direita ($h \to 0^+$).

Os Teoremas e o Corolário a seguir, com suas respectivas demonstrações tratam da continuidade de uma função derivável, da derivada da soma, da derivada do produto, da derivada do produto de uma constante por uma função e da derivada da diferença aplicada a funções.

Teorema 4.1. Seja f um função definida em um intervalo aberto I. Se f é derivável em $x_0 \in I$ então f é contínua em x_0. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.9, p.20).

Demonstração. Temos que $f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.h$. Passando ao limite quando $h \to 0$:

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \lim_{h \to 0} h.$$

Mas $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ e $\lim\limits_{h \to 0} h = 0$. Logo $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x).0 = 0$, o que mostra que f é contínua em x_0. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.9, p.20). □

A prova e o Teorema a seguir tratam da derivada da soma de duas funções.

Demonstração. Vamos provar que a derivada da soma de duas funções é a soma das derivadas das funções. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções reais. Então

$$\begin{aligned}(f+g)(x+h)-(f+g)(x) &= f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))\\ &= (f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x)).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}\\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))}{h}\\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x),\end{aligned}$$

caso os limites envolvidos existam. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.10, p.2-3). □

Teorema 4.2. Sejam f e g duas funções definidas em um intervalo aberto I. Se as duas funções forem deriváveis em $x_0 \in I$, então a função soma $f + g$ é derivável em x_0 e vale que $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.10, p.3).

A prova e o Teorema a seguir tratam da derivada do produto de duas funções.

Demonstração. Vamos obter uma fórmula para a derivada do produto de duas funções $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Observe inicialmente que:
$f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x) = f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)$ em que simplesmente somamos e subtraímos na expressão a parcela $f(x)g(x+h)$. Reagrupando a expressão:

$$\begin{aligned} f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x) &= f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h) \\ &\quad -f(x)g(x) \\ &= (f(x+h)-f(x))g(x+h)+f(x)(g(x+h)-g(x)). \end{aligned}$$

Dividindo a expressão por h e passando ao limite $h \to 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \tfrac{(f(x+h)-f(x))}{h} g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x)\tfrac{(g(x+h)-g(x))}{h} \\ &= (\lim_{h\to 0} \tfrac{(f(x+h)-f(x))}{h})g(x) + f(x)(\lim_{h\to 0} \tfrac{(g(x+h)-g(x))}{h}). \end{aligned}$$

Observe que no desenvolvimento acima usamos as propriedades do limite da soma e do produto, estudados anteriormente. Usamos também a continuidade da função g, assegurada pelo Teorema 4.1 para o caso em que g é derivável. Os limites na última equação acima são, supondo f e g deriváveis, respectivamente, os valores de $f'(x)$ e $g'(x)$. Provamos, portanto, a seguinte proposição. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.10, p.4). □

Teorema 4.3. Sejam f e g duas funções definidas em um intervalo aberto I. Se as duas funções forem deriváveis em $x_0 \in I$, então a função produto $(fg)(x)$ é derivável em x_0 e vale que $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.10, p.5).

Corolário 4.1. Se k é uma constante e f uma função derivável então $(kf)' = kf'$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.10, p.5).

Demonstração. $(kf)' = (k)'f + k(f)' = 0.f + k.f' = kf'$, em que usamos o fato de que a derivada da constante é zero. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.10, p.5). □

Corolário 4.2. Se f e g são funções deriváveis então $(f-g)' = f' - g'$.

Demonstração. $(f-g)' = (f+(-g))' = f' + (-g)' = f' + (-g') = f' - g'$, em que usamos o Teorema 4.2 e o Corolário 4.1. □

As proposições a seguir, tratam da derivada da potência aplicada a funções, da definição de valores máximos e mínimos absolutos de uma função, e da definição e determinação dos valores máximos e mínimos relativos de uma função.

Teorema 4.4. A função $f(x) = x^n$ é derivável para todo $x \in \mathbb{R}$ se $n \geq 0$ e [...] $f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$ (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.10, p.7).

Demonstração. Se $n = 0$ o resultado se segue imediatamente, pois $x^0 = 1$, cuja derivada é 0. Provaremos o caso $n > 0$ por indução. Vale para $n = 1$, pois

$$f(x) = x^1 = x \Rightarrow f'(x) = 1 = 1.x^{1-1}.$$

Suponha que o resultado vale para $n = k$, ou seja, $f(x) = x^k$ é derivável e $f'(x) = kx^{k-1}$, então, aplicando a regra do produto, temos que $g(x) = x^{k+1} = x.x^k$ é derivável e $(x^{k+1})' = (x.x^k)' = x'x^k + x.(x^k)' = x^k + kxx^{k-1} = x^k + kx^k = (k+1)x^k$, o que completa a prova do caso $n > 1$. [...] (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.10, p.8). $\square$

Definição 4.4. Um função $f : D \to \mathbb{R}$ tem máximo absoluto em c se $f(x) \leq f(c)$ para todo x no domínio D de f. Neste caso, o valor $f(c)$ é chamado valor máximo de f em D. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.13, p.2).

Definição 4.5. Um função $f : D \to \mathbb{R}$ tem mínimo absoluto em c se $f(x) \geq f(c)$ para todo x no domínio D de f. Neste caso, o valor $f(c)$ é chamado valor mínimo de f em D. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.13, p.2).

Definição 4.6. Uma função tem máximo local (ou máximo relativo) em um ponto c de seu domínio, se existe intervalo aberto I, tal que $c \in I$ e $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in I$. Neste caso, dizemos que $f(c)$ é valor máximo local de f. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.13, p.4).

Definição 4.7. Uma função tem mínimo local (ou mínimo relativo) em um ponto c de seu domínio, se existe intervalo aberto I, tal que $c \in I$ e $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in I$. Neste caso, dizemos que $f(c)$ é valor mínimo local de f. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.13, p.4).

Teorema 4.5. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função f contínua definida em um intervalo aberto I. Se f tem máximo ou mínimo local em $x = c$, $c \in I$ e f é derivável em c então $f'(c) = 0$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.13, p.7).

Demonstração. Suponha que f tenha um máximo local em $x = c$. A prova do caso em que f tem mínimo local em c é totalmente análoga.
Como f é derivável em c, então

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c).$$

Como $f(c)$ é máximo local, há um intervalo (a, b) no domínio de f tal que $c \in (a, b)$ e $f(x) \leq f(c)$. Portanto, $f(x) - f(c) \leq 0$, para todo $x \in (a, b)$.

Se $x < c$ então $x - c < 0$ e, portanto $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ para $x \in (a,b)$, logo

$$\lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0. \qquad (I)$$

Por outro lado, $x > c$ então $x - c > 0$ e, portanto, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$ para $x \in (a,b)$, logo

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0. \qquad (II)$$

Comparando as desigualdades (I) e (II), e levando em conta que são o mesmo número, resulta

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) = 0.$$

(*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.13, p.7).

As proposições, a seguir, tratam do Teorema de Rolle e do Teorema do Valor Médio.

Teorema 4.6. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$ e derivável no intervalo aberto (a,b) e $f(a) = f(b)$ então existe pelo menos um número $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.13, p.14).

Demonstração. Pelo Teorema de Weierstrass, a função f contínua em $[a,b]$ possui valor máximo e mínimo no intervalo. Sejam m e M os valores de mínimo e máximo absolutos de f em $[a,b]$, respectivamente. Se estes valores são assumidos nos extremos do intervalo, por exemplo, $f(a) = m$ e $f(b) = M$, então, como $f(a) = f(b)$ por hipótese, o mínimo e o máximo da função são o mesmo valor e, portanto, a função é constante em todo o intervalo. Como a derivada da função constante é nula, temos $f'(c) = 0$ para todo $c \in (a,b)$, o que prova o Teorema de Rolle neste caso.

Caso o mínimo ou máximo absoluto da função não estejam nos extremos do intervalo, então há um ponto c no intervalo aberto (a,b) tal que $f(c)$ é máximo ou mínimo de f. Então c é extremo local de f e, pelo Teorema 4.5, como f é derivável em (a,b) temos $f'(c) = 0$, o que conclui a demonstração. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.13, p.14-15).

□

Teorema 4.7. Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e derivável no intervalo aberto (a,b). Então existe pelo menos um número $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.13, p.17).

Demonstração. Para aplicar o Teorema de Rolle, faremos uso de uma função g, definida a partir de f e tal que $g(a) = g(b)$. Seja a função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$. Então g é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Além disso:

$g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$ e $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}b = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$.

Logo, $g(a) = g(b)$. Podemos então aplicar o Teorema de Rolle para g e concluir que existe um $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Mas $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Logo, $g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, o que completa a demonstração do Teorema do Valor Médio. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.13, p.17).

Finalizamos nosso estudo teórico com o conceito de integral de um função, onde abordaremos o cálculo da área de uma superfície e o cálculo do volume de um sólido. O Teorema, sua demonstração e as definições, a seguir, tratam da partição de um intervalo, da norma de uma partição, da soma de Riemann e da integral definida.

5 INTEGRAIS

Definição 5.8. Se f é uma função contínua definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b - a)/n$. Sejam $x_0(= a), x_1, x_2, \ldots, x_n(= b)$ as extremidades desses subintervalos, escolhemos os pontos amostrais $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a integral definida de f de a a b é

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

desde que este limite existia. Se ele existir, dizemos que f é integrável em $[a, b]$. (STEWART, 2011, p.376).

Teorema 5.8. Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, existem duas funções $f_+ : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $f_- : [a, b] \to \mathbb{R}$, ambas contínuas, tais que $f(x) = f_+(x) + f_-(x)$, $f_+(x) \geq 0$ e $f_-(x) \leq 0$, para todo $x \in [a, b]$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.17, p.11).

Demonstração. Basta escrever $f_+(x) = f(x)$, se $f(x) \geq 0$ e $f_+(x) = 0$, se $f(x) < 0$, assim como $f_-(x) = f(x)$, se $f(x) \leq 0$ e $f_-(x) = 0$, se $f(x) > 0$. Se $f(x) \geq 0$ temos $\lim_{x\to a} f_+(x) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a) = f_+(a)$, pois f é contínua, e se $f(x) < 0$ então $\lim_{x\to a} f_+(x) = \lim_{x\to a} 0 = 0 = f_+(a)$, portanto a função f_+ é contínua. A demonstração de que a função f_- é contínua é análoga. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.17, p.12). □

Definição 5.9. No caso de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ser uma função tal que $f(x) \leq 0$, para todos os elementos $x \in [a, b]$, tomamos $g = -f$ e definimos $\int_a^b f(x)dx := -\int_a^b g(x)dx$. No caso geral, definimos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_+(x)dx + \int_a^b f_-(x)dx.$$

(*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.17, p.12).

Definição 5.10. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. É conveniente convencionar as seguintes afirmações:

1.Seja c um ponto de $[a, b]$. Então $\int_c^c f(x)dx = 0$.

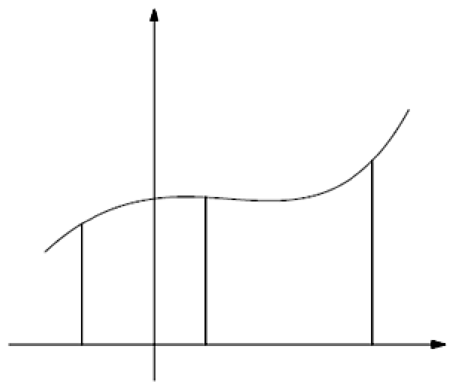
2.$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.17, p.12-13).

Os Teoremas e a definição, a seguir, tratam de algumas propriedades da integral definida, da primitiva de uma função e do Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 5.9. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida em intervalo I. Se a, b e $c \in I$, então $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.17, p.16).

Demonstração. Consideremos inicialmente a possibilidade $a < c < b$. Neste caso, $[a, c] \cup [c, b] = [a, b] \subset I$ e as restrições de f a cada intervalo mencionado é uma função contínua. A propriedade segue do fato de que, se P é uma partição de $[a, c]$ e Q é uma partição de $[c, b]$, então $P \cup Q$ será uma partição de $[a, b]$. O resultado então seguirá da propriedade do limite sobre as partições.

Veja uma representação gráfica desta situação.



Fonte: *Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.17, p.16.

Nos casos de c coincidir com a ou com b ou se uma das situações, $c < a < b$ ou $a < b < c$ ocorrer, basta lembrar que $\int_c^c f(x)dx = 0$ e que $\int_a^c f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.17, p.16). □

Teorema 5.10. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas, $k \in \mathbb{R}$ uma constante. Então

$$\begin{aligned} (i) \int_a^b (f+g)(x)dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx; \\ (ii) \int_a^b kf(x)dx &= k\int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

(*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.17, p.17).

Demonstração. Estas duas propriedades decorrem imediatamente das respectivas propriedades do limite das Somas de Riemann. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.17, p.17). □

Definição 5.11. Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo aberto I. Dizemos que $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de f se, para todo $x \in I$, $F'(x) = f(x)$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.18, p.2).

Em particular para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, temos a função primitiva $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, onde C é constante, pois verifica-se facilmente que $F'(x) = f(x)$.

Teorema 5.11. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida no intervalo aberto I e seja $F : I \to \mathbb{R}$ uma primitiva de f. Então, se $[a, b] \subset I$, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.18, p.4).

Demonstração. Sabemos que o cálculo do limite $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$ independe da escolha dos $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Vamos então fazer uma escolha muito especial.

Seja P a partição $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. A função F é diferenciável e, portanto, contínua. Podemos então aplicar o Teorema do Valor Médio para F restrita a cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e escolher $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{\Delta x_i}.$$

Ou seja, $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)\Delta x_i$. Para essa escolha de c_i's, temos

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n F'(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(a) - F(b).$$

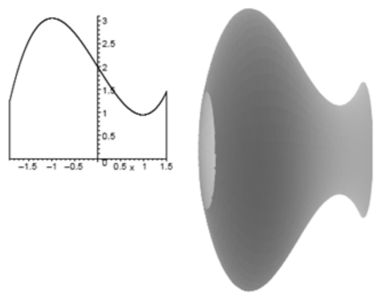
Fazendo essa escolha especial para cada partição P, temos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = \lim_{||P|| \to 0} [F(b) - F(a)] = F(b) - F(a).$$

(*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.18, p.5). □

O texto explicativo com suas ilustrações e a definição, a seguir, tratam do volume de um sólido de revolução.

> Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$. Consideraremos o sólido de revolução obtido pela rotação da região limitada pelo eixo Ox e pelo gráfico de f, em torno do eixo Ox.



Fonte: *Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.22, p.2.

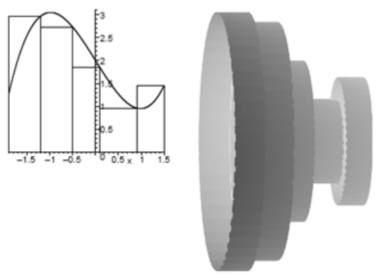
Considere $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, uma partição do intervalo $[a, b]$ e, para cada subintervalo da partição, escolha um ponto $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. O volume do cilindro de raio $f(\xi_i)$ e altura $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ é

$$\Delta V_i = \pi[f(\xi_i)]^2 \Delta x_i.$$

A soma desses volumes,

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi[f(\xi_i)]^2 \Delta x_i,$$

é uma soma de Riemann e, na medida em que tomamos partições mais e mais finas, os cilindros empilhados formam um sólido que se parece cada vez mais com o sólido de revolução original.



Fonte: *Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.22, p.3.

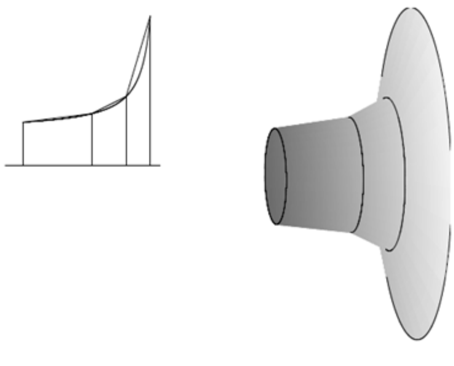
Como a função f é contínua, a função $g(x) = \pi[f(x)]^2$ também é contínua. (*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.22, p.2-3).

Definição 5.12. O volume V do sólido obtido pela revolução da região sob o gráfico da função contínua, positiva, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ em torno do eixo Ox é

$$V = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi[f(\xi_i)]^2 \Delta x_i = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx.$$

(*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.22, p.3).

O texto explicativo com suas ilustrações e a definição, a seguir, tratam da área da superfície de um sólido de revolução.

> Vamos agora obter áreas das superfícies que recobrem os sólidos de revolução. O ponto de partida será o tronco de cone. A área de um tronco de cone reto, de geratriz g, com raio da base maior R e raio da base menor r é igual à área de um trapézio de altura g, com base maior $2\pi R$ e base menor $2\pi r$. Isto é, $A = \pi(R + r)g$.
>
> 
>
> Fonte: *Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.22, p.11.
>
> Seja S a superfície obtida da rotação do gráfico da função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ cuja restrição ao intervalo aberto (a, b) é de classe C_1 (dizemos que uma função é de classe C_1 quando, além de ser diferenciável, a função derivada f' é contínua). Queremos atribuir uma área a S. Usaremos o seguinte processo de aproximação: para cada partição $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ do intervalo $[a, b]$, consideraremos os troncos de cone obtidos pela revolução dos segmentos de reta que unem os pontos sucessivos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $(x_i, f(x_i))$. Veja na figura a seguir.
>
> A união desses troncos de cone aproximam a superfície de revolução, na medida em que tomamos partições mais finas.
>
> 
>
> Fonte: *Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.22, p.11.
>
> A área da superfície obtida pela união dos cones é a soma das áreas dos cones:
>
> $$\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))l_i,$$

onde $l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$ é o comprimento do segmento de reta unindo os pontos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $(x_i, f(x_i))$, a geratriz do tronco que tem como raios das bases $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$.

Usaremos agora o fato de f ser uma função diferenciável. Pelo Teorema do Valor Médio, existe um número $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$f'(\xi_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}},$$

para cada $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Assim, podemos trocar $f(x_i) - f(x_{i-1})$ por $f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ na fórmula que determina l_i, obtendo:

$$\begin{aligned} l_i &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}))^2} = \\ &= \sqrt{\Delta x_i^2 + (f'(x_i))^2 \Delta x_i^2} = \sqrt{1 + (f'(x_i))^2}\Delta x_i. \end{aligned}$$

Além disso, como f é contínua, sabemos que o intervalo limitado pelos números $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$ está contido na imagem de f. Isto é, a equação $f(x) = M$ tem solução no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, para todos os valores de M entre os números $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$.

Em particular, existe $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, tal que $f(\zeta_i) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Isso significa que ζ_i é a solução da equação $f(x) = M$, onde M é o ponto médio entre $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$. Ou seja, $2f(\zeta_i) = f(x_{i-1}) + f(x_i)$.

Com mais essa alteração, nossa fórmula para $\sum_{i=1}^{n} A_i$ ficou assim:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x_i.$$

(*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.22, p.11-12).

A definição a seguir foi obtida tomando-se o limite das somas de Riemann na fórmula anterior.

Definição 5.13. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva, cuja restrição ao intervalo (a, b) é de classe C_1. A área da superfície gerada pela rotação do gráfico de f em torno do eixo Ox é definida pela integral

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

(*Fundamentos de Cálculo*, PROFMAT, u.22, p.13).

6 COORDENADAS GEOMÉTRICAS EM FUNÇÕES PARAMÉTRICAS

6.1 Exemplo 1

Seja n um número natural e $x^2 + y^2 = 1$ a equação cartesiana de uma circunferência $\lambda \subset \mathbb{R}^2$ de centro na origem e raio igual a 1. Sabe-se que λ contém os pontos A=(-1,0), B=(0,1), C=(1,0) e D=(0,-1). No entanto, mostraremos que é possível encontrar uma curva diferente de λ passando por estes pontos. Para tal, escreveremos duas sequências tendo n como parâmetro. A primeira sequência chamaremos $(x_n) : (-1, 0, 1, 0)$ e a segunda sequência chamaremos $(y_n) : (0, 1, 0, -1)$ contendo, respectivamente, as coordenadas abscissas e ordenadas dos pontos dados quando nos deslocamos do ponto A até o ponto D, nesta ordem.

Iremos então encontrar os termos gerais para as sequências (x_n) e (y_n) observando as variações contidas entre os seus termos como descreveremos a seguir.
Sequência (x_n):

-2
0 , -2
1 , 1 , -1
-1 , 0 , 1 , 0

Obtemos pelas variações de (x_n) um esquema em pirâmide que nos fornece outras três sequências. A primeira sequência, no topo da pirâmide, (chamaremos (r_n)) será considerada uma sequência estacionária e cujos elementos são iguais a -2, portanto $r_n = -2$, para todo n. A segunda sequência (chamaremos (s_n)) é uma progressão aritmética de razão r igual a -2 e termo geral $s_n = s_1 + (n-1).r = 0 + (n-1).(-2) = -2n + 2$. Já na terceira sequência (a chamaremos (t_n)) podemos obter seu n-ésimo termo somando-se à t_1 os $n - 1$ primeiros termos da segunda sequência, isto é:

$$\begin{aligned} t_n &= t_1 + \sum_{i=1}^{n-1} s_i = 1 + \frac{(s_1 + s_{n-1}).(n-1)}{2} \\ &= 1 + \frac{(0 + (-2(n-1) + 2).(n-1)}{2} = \frac{2 + (-2n+4).(n-1)}{2} \\ &= \frac{2 - 2n^2 + 2n + 4n - 4}{2} = \frac{-2n^2 + 6n - 2}{2} = -n^2 + 3n - 1. \end{aligned}$$

Finalmente podemos obter x_n de forma análoga a que utilizamos para obtermos a sequência anterior, ou seja:

$$x_n = x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} t_i = -1 + \sum_{i=1}^{n-1} (-i^2 + 3i - 1)$$

$$\begin{aligned}
x_n &= -1+(-1).\sum_{i=1}^{n-1} i^2 + 3.\sum_{i=1}^{n-1} i + (-1).\sum_{i=1}^{n-1} 1 \\
&= -1+(-1).\frac{(n-1).((n-1)+1).(2.(n-1)+1)}{6} + 3.\frac{(n-1).((n-1)+1)}{2} \\
&\quad -(n-1) \\
&= -1-\frac{(n-1).n.(2n-1)}{6}+\frac{3.(n-1).n}{2}-(n-1) \\
&= -1+\frac{(n-1).(-2n^2+10n-6)}{6} = -1+\frac{(n-1).(-n^2+5n-3)}{3} \\
&= -1+\frac{-n^3+5n^2-3n+n^2-5n+3}{3} = \frac{-n^3+6n^2-8n}{3}.
\end{aligned}$$

Utilizando o mesmo processo descrito anteriormente para a sequência (y_n) teremos:

2

-2 , 0

1 , -1 , -1

0 , 1 , 0 , -1

Obtemos pelas variações de (y_n) um esquema em pirâmide que nos fornece outras três sequências. A primeira sequência, no topo da pirâmide, (chamaremos (r_n)) será considerada uma sequência estacionária e cujos elementos são iguais a 2, portanto $r_n = 2$, para todo n. A segunda sequência (chamaremos (s_n)) é uma progressão aritmética de razão r igual a 2 e portanto sua expressão pode ser facilmente encontrada por $s_n = s_1 + (n-1).r = -2 + (n-1).2 = 2n-4$. Já na terceira sequência (a chamaremos (t_n)) podemos obter seu n-ésimo termo somando-se à t_1 os $n-1$ primeiros termos da segunda sequência, isto é:

$$\begin{aligned}
t_n &= t_1+\sum_{i=1}^{n-1} s_i = 1+\sum_{i=1}^{n-1}(2i-4) = 1+2.\sum_{i=1}^{n-1} i - 4.\sum_{i=1}^{n-1} 1 \\
&= 1+2.\frac{(n-1).((n-1)+1)}{2} - 4.(n-1) = 1+(n-1).n-4n+4 \\
&= n^2-5n+5.
\end{aligned}$$

Finalmente podemos encontrar uma expressão para (y_n) de forma análoga a que utilizamos para obtermos a sequência anterior, ou seja:

$$y_n = y_1+\sum_{i=1}^{n-1} t_i = 0+\sum_{i=1}^{n-1}(i^2-5i+5) = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 - 5.\sum_{i=1}^{n-1} i + 5.\sum_{i=1}^{n-1} 1$$

$$
\begin{aligned}
y_n &= \frac{(n-1).((n-1)+1).(2.(n-1)+1)}{6} - 5.\frac{(n-1).((n-1)+1)}{2} + 5.(n-1) \\
&= \frac{(n-1).n.(2n-1)}{6} - \frac{5.(n-1).n}{2} + 5.(n-1) \\
&= \frac{(n-1).(2n^2-16n+30)}{6} = \frac{(n-1).(n^2-8n+15)}{3} \\
&= \frac{n^3-8n^2+15n-n^2+8n-15}{3} = \frac{n^3-9n^2+23n-15}{3}.
\end{aligned}
$$

Podemos então, com o auxílio do software Winplot, visualisar o gráfico da curva obtida pelo conjunto de pontos P=(x_n,y_n), conforme mostra a Figura 01:

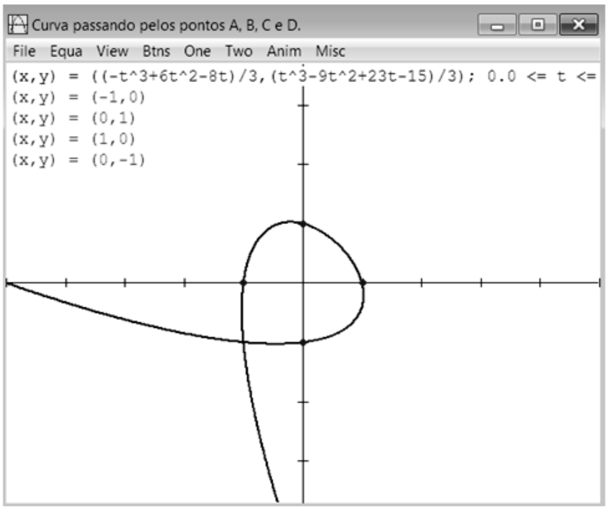


Fig.01. Na janela inventory do programa Winplot, o parâmetro n em questão está representado pela letra t usada pelo programa, sendo a variação de t ajustada para o intervalo 0 $\leq$ t $\leq$ 5, com $t \in \mathbb{R}$.

Uma outra forma de obtermos os resultados descritos anteriormente é escrevermos o termo x_n como uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $x_n = f(n)$, e $(x_n) : (-1, 0, 1, 0)$. Assim sendo, f associa elementos do conjunto $\mathbb{N}$ às abscissas dos pontos A, B, C e D, ou seja, o gráfico de f necessariamente contém os pontos X=(1,-1), Y=(2,0), Z=(3,1) e W=(4,0) cujas primeiras coordenadas são elementos de $\mathbb{N}$ e as segundas coordenadas são elementos da sequência $(x_n) : (-1, 0, 1, 0)$. Assim, como já sabemos que a função f é uma função polinomial de grau três, definiremos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ onde $f(n) = a + bn + cn^2 + dn^3$, com a, b, c, d constantes. Logo:

$$
\begin{cases}
f(1) = a + b.1 + c.1^2 + d.1^3 = a + b + c + d = -1 = x_1 \\
f(2) = a + b.2 + c.2^2 + d.2^3 = a + 2b + 4c + 8d = 0 = x_2 \\
f(3) = a + b.3 + c.3^2 + d.3^3 = a + 3b + 9c + 27d = 1 = x_3 \\
f(4) = a + b.4 + c.4^2 + d.4^3 = a + 4b + 16c + 64d = 0 = x_4
\end{cases}
$$

Obtemos então o seguinte sistema linear com quatro equações e quatro variáveis:

$$\begin{cases} a+b+c+d=-1 \\ a+2b+4c+8d=0 \\ a+3b+9c+27d=1 \\ a+4b+16c+64d=0 \end{cases}$$

Assim, operando por meio de transformações elementares sobre as linhas l_1, l_2, l_3 e l_4 da matriz ampliada A associada ao sistema linear obtido acima, iremos encontrar os valores dos coeficientes a, b, c e d da função f. Logo:

$$A = \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \rightarrow \\ l_2 \rightarrow l_2 - l_1 \\ l_3 \rightarrow l_3 - l_1 \\ l_4 \rightarrow l_4 - l_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 26 & 2 \\ 0 & 3 & 15 & 63 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ l_1 \rightarrow l_1 - l_2 \\ l_3 \rightarrow l_3 - 2l_2 \\ l_4 \rightarrow l_4 - 3l_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 42 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ l_3 \rightarrow \frac{l_3}{2} \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 42 & -2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ l_1 \rightarrow l_1 + 2l_3 \\ l_2 \rightarrow l_2 - 3l_3 \\ l_4 \rightarrow l_4 - 6l_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ l_4 \rightarrow \frac{l_4}{6} \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ l_1 \rightarrow l_1 - 6l_4 \\ l_2 \rightarrow l_2 + 11l_4 \\ l_3 \rightarrow l_3 - 6l_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Portanto concluímos que $a = 0$, $b = -\frac{8}{3}$, $c = 2$ e $d = -\frac{1}{3}$ e, por conseguinte, $x_n = f(n) = 0 - \frac{8}{3}n + 2n^2 - \frac{1}{3}n^3 = \frac{-n^3+6n^2-8n}{3}$ conforme obtivemos anteriormente.

Escreveremos agora o termo y_n como sendo a função $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $y_n = g(n)$, e $(y_n) : (0, 1, 0, -1)$. Assim sendo, g associa elementos do conjunto $\mathbb{N}$ às ordenadas dos pontos A, B, C e D, ou seja, o gráfico de g necessariamente contém os pontos X'=(1,0), Y'=(2,1), Z'=(3,0) e W'=(4,-1) cujas primeiras coordenadas são elementos de $\mathbb{N}$ e as segundas coordenadas são elementos da sequência (y_n).

Assim, uma vez que a função g também é uma função polinomial de grau três, definiremos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ com $g(n) = a + bn + cn^2 + dn^3$ e a, b, c, d constantes. Logo:

$$\begin{cases} g(1) = a + b.1 + c.1^2 + d.1^3 = a + b + c + d = 0 = y_1 \\ g(2) = a + b.2 + c.2^2 + d.2^3 = a + 2b + 4c + 8d = 1 = y_2 \\ g(3) = a + b.3 + c.3^2 + d.3^3 = a + 3b + 9c + 27d = 0 = y_3 \\ g(4) = a + b.4 + c.4^2 + d.4^3 = a + 4b + 16c + 64d = -1 = y_4 \end{cases}$$

Obtemos então o seguinte sistema linear com quatro equações e quatro variáveis:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ a + 2b + 4c + 8d = 1 \\ a + 3b + 9c + 27d = 0 \\ a + 4b + 16c + 64d = -1 \end{cases}$$

Por meio de transformações elementares sobre as linhas l_1, l_2, l_3 e l_4 da matriz ampliada A associada ao sistema linear, então obtido, encontraremos os valores dos coeficientes a, b, c e d da função g. Logo:

$$A = \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \to \\ l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1 \\ l_4 \to l_4 - l_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 26 & 0 \\ 0 & 3 & 15 & 63 & -1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \to \\ l_1 \to l_1 - l_2 \\ l_3 \to l_3 - 2l_2 \\ l_4 \to l_4 - 3l_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 42 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \to \\ l_3 \to \frac{l_3}{2} \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 42 & -4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \to \\ l_1 \to l_1 + 2l_3 \\ l_2 \to l_2 - 3l_3 \\ l_4 \to l_4 - 6l_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \to \\ l_4 \to \frac{l_4}{6} \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \to \\ l_1 \to l_1 - 6l_4 \\ l_2 \to l_2 + 11l_4 \\ l_3 \to l_3 - 6l_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{23}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Encontramos, assim, $a = -5$, $b = \frac{23}{3}$, $c = -3$ e $d = \frac{1}{3}$ e, por conseguinte, $y_n = g(n) = a + bn + cn^2 + dn^3 = -5 + \frac{23}{3}n - 3n^2 + \frac{1}{3}n^3 = \frac{n^3-9n^2+23n-15}{3}$, conforme obtivemos anteriormente.

Podemos ainda encontrar, de acordo com a Figura 02, o valor da área da região delimitada pela curva descrita entre os pontos $P_1 = (x_{n_1}, y_{n_1})$ e $P_2 = (x_{n_2}, y_{n_2})$, com $P_1 = P_2$, e onde n_1 e n_2 ($n_1 \neq n_2$) são os respectivos valores do parâmetro n relativos aos pontos P_1 e P_2. Iremos então, inicialmente, encontrar os valores de n_1 e n_2 tomando-se as igualdades $x_{n_1} = x_{n_2}$ e $y_{n_1} = y_{n_2}$.

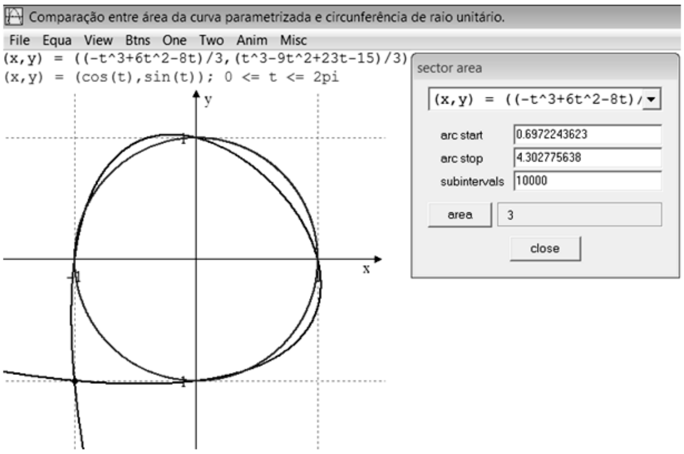


Fig.02. Área da região delimitada pela curva descrita entre os valores n_1 e n_2 em comparação com a área de uma circunferência de raio unitário.

De $x_{n_1} = x_{n_2}$ temos:

$$\frac{-n_1{}^3+6n_1{}^2-8n_1}{3} = \frac{-n_2{}^3+6n_2{}^2-8n_2}{3}$$

$$-n_1{}^3 + 6n_1{}^2 - 8n_1 = -n_2{}^3 + 6n_2{}^2 - 8n_2$$

$$(n_1{}^3 - n_2{}^3) - 6(n_1{}^2 - n_2{}^2) + 8(n_1 - n_2) = 0 \quad \text{eq.(I)}$$

$$\frac{n_1{}^3-n_2{}^3}{n_1-n_2} - 6\frac{n_1{}^2-n_2{}^2}{n_1-n_2} + 8\frac{n_1-n_2}{n_1-n_2} = 0, \quad n_1 \neq n_2$$

$$\frac{(n_1-n_2)(n_1{}^2+n_1.n_2+n_2{}^2)}{n_1-n_2} - 6\frac{(n_1-n_2)(n_1+n_2)}{n_1-n_2} + 8\frac{n_1-n_2}{n_1-n_2} = 0$$

$$n_1{}^2 + n_1.n_2 + n_2{}^2 - 6(n_1 + n_2) + 8 = 0$$

$$n_1{}^2 + 2.n_1.n_2 + n_2{}^2 - 6(n_1 + n_2) + 8 = n_1.n_2$$

$$(n_1 + n_2)^2 - 6(n_1 + n_2) + 8 - n_1.n_2 = 0 \quad \text{eq.(II)}$$

De $y_{n_1} = y_{n_2}$ tem-se:

$$\frac{n_1{}^3-9n_1{}^2+23n_1-15}{3} = \frac{n_2{}^3-9n_2{}^2+23n_2-15}{3}$$

$$n_1{}^3 - 9n_1{}^2 + 23n_1 - 15 = n_2{}^3 - 9n_2{}^2 + 23n_2 - 15$$

$$(n_1{}^3 - n_2{}^3) - 9(n_1{}^2 - n_2{}^2) + 23(n_1 - n_2) = 0$$

$$(n_1{}^3 - n_2{}^3) - 6(n_1{}^2 - n_2{}^2) = 3(n_1{}^2 - n_2{}^2) - 23(n_1 - n_2) \quad \text{eq.(III)}$$

Das equações (I) e (III) temos:

$$3({n_1}^2 - {n_2}^2) - 23(n_1 - n_2) + 8(n_1 - n_2) = 0$$
$$3({n_1}^2 - {n_2}^2) - 15(n_1 - n_2) = 0$$
$$\frac{3({n_1}^2 - {n_2}^2)}{3(n_1 - n_2)} - \frac{15(n_1 - n_2)}{3(n_1 - n_2)} = 0, \quad n_1 \neq n_2$$
$$\frac{3(n_1 + n_2)(n_1 - n_2)}{3(n_1 - n_2)} - \frac{15(n_1 - n_2)}{3(n_1 - n_2)} = 0$$
$$n_1 + n_2 - 5 = 0$$
$$n_1 + n_2 = 5 \quad \text{eq.(IV)}$$

Das equações (II) e (IV) tem-se:

$$5^2 - 6.5 + 8 - n_1.n_2 = 0$$
$$n_1.n_2 = 3 \quad \text{eq.(V)}$$

Das equações (IV) e (V), conclui-se que n_1 e n_2 são soluções da equação quadrática $n^2 - (n_1 + n_2)n + n_1.n_2 = 0$, isto é, $n^2 - 5n + 3 = 0$ de coeficientes $a = 1$, $b = -5$ e $c = 3$. Logo:

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.3}}{2.1} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Assim, com os valores de n encontrados ($n_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$ e $n_2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$) podemos encontrar facilmente (verifique!), com auxílio de uma calculadora científica, as coordenadas dos pontos P_1 e P_2, sendo $P_1 = P_2 = (\frac{-{n_1}^3 + 6{n_1}^2 - 8n_1}{3}, \frac{{n_1}^3 - 9{n_1}^2 + 23n_1 - 15}{3}) = (-1, -1)$. Logo, tomando-se $x_n = f(n) = \frac{-n^3 + 6n^2 - 8n}{3}$ e $y_n = g(n) = \frac{n^3 - 9n^2 + 23n - 15}{3}$, podemos escrever que a área A da região da curva delimitada entre os valores n_1 e n_2 é:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1} y dx + \int_{-1}^{1} (0 - y) dx + \int_{-1}^{0} (-1 - x) dy \\
&= \int_{-1}^{1} y dx - \int_{1}^{-1} (-y) dx + \int_{-1}^{0} (-1 - x) dy \\
&= \int_{-1}^{1} y dx + \int_{1}^{-1} y dx + \int_{-1}^{0} (-1 - x) dy \\
&= \int_{1}^{3} g(n) f^{'}(n) dn + \int_{3}^{n_2} g(n) f^{'}(n) dn + \int_{n_1}^{1} (-1 - f(n)) g^{'}(n) dn \\
&= \int_{1}^{n_2} g(n) f^{'}(n) dn + \int_{n_1}^{1} (-1 - f(n)) g^{'}(n) dn
\end{aligned}$$

Calculando-se $g(n)f^{'}(n)$ e $(-1 - f(n))g^{'}(n)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\bullet g(n)f^{'}(n) &= \frac{n^3 - 9n^2 + 23n - 15}{3} . (\frac{-n^3 + 6n^2 - 8n}{3})' = \frac{n^3 - 9n^2 + 23n - 15}{3} . \frac{-3n^2 + 12n - 8}{3} \\
&= \frac{-3n^5 + 12n^4 - 8n^3 + 27n^4 - 108n^3 + 72n^2 - 69n^3 + 276n^2 - 184n + 45n^2 - 180n + 120}{9} \\
&= \frac{-3n^5 + 39n^4 - 185n^3 + 393n^2 - 364n + 120}{9};
\end{aligned}$$

$$\bullet(-1-f(n))g'(n) = (-1-\frac{-n^3+6n^2-8n}{3}).(\frac{n^3-9n^2+23n-15}{3})'$$
$$= \frac{n^3-6n^2+8n-3}{3}.\frac{3n^2-18n+23}{3}$$
$$= \frac{3n^5-18n^4+23n^3-18n^4+108n^3-138n^2+24n^3-144n^2+184n-9n^2+54n-69}{9}$$
$$= \frac{3n^5-36n^4+155n^3-291n^2+238n-69}{9}.$$

Podemos facilmente encontrar as integrais indefinidas procuradas como sendo:

$$\bullet \int g(n)f'(n)dn = \int \frac{-3n^5+39n^4-185n^3+393n^2-364n+120}{9}dn$$
$$= \frac{1}{9}.[\frac{-3n^6}{6} + \frac{39n^5}{5} - \frac{185n^4}{4} + \frac{393n^3}{3} - \frac{364n^2}{2} + 120n]$$
$$= \frac{1}{9}.[\frac{-30n^6+468n^5-2775n^4+7860n^3-10920n^2+7200n}{60}]$$
$$= \frac{1}{540}.[-30n^6 + 468n^5 - 2775n^4 + 7860n^3 - 10920n^2 + 7200n].$$
$$\bullet \int(-1-f(n))g'(n)dn = \int \frac{3n^5-36n^4+155n^3-291n^2+238n-69}{9}dn$$
$$= \frac{1}{9}.[\frac{3n^6}{6} - \frac{36n^5}{5} + \frac{155n^4}{4} - \frac{291n^3}{3} + \frac{238n^2}{2} - 69n]$$
$$= \frac{1}{9}.[\frac{30n^6-432n^5+2325n^4-5820n^3+7140n^2-4140n}{60}]$$
$$= \frac{1}{540}.[30n^6 - 432n^5 + 2325n^4 - 5820n^3 + 7140n^2 - 4140n].$$

Assim, abreviadamente calculamos as seguintes integrais definidas:

$\bullet \int_1^{n_2} g(n)f'(n)dn = \frac{1}{540}.[-30n^6+468n^5-2775n^4+7860n^3-10920n^2+7200n]_1^{n_2} = \frac{1}{540}.[(-30.{n_2}^6+468.{n_2}^5-2775.{n_2}^4+7860.{n_2}^3-10920.{n_2}^2+7200.n_2)-(-30.1^6+468.1^5-2775.1^4+7860.1^3-10920.1^2+7200.1)] \approx \frac{[3621,5072-1803]}{540} \approx 3,367605;$

$\bullet \int_{n_1}^1 (-1-f(n))g'(n)dn = \frac{1}{540}.[30n^6 - 432n^5 + 2325n^4 - 5820n^3 + 7140n^2 - 4140n]_{n_1}^1 = \frac{1}{540}.[(30.1^6-432.1^5+2325.1^4-5820.1^3+7140.1^2-4140.1)-(30{n_1}^6-432{n_1}^5+2325{n_1}^4-5820{n_1}^3+7140{n_1}^2-4140n_1)] \approx \frac{[-897-(-906,507248)]}{540} \approx 0,017606;$

Logo a área A desejada é dada por $A \approx 3,367605 + 0,017606 = 3,385211$, um valor próximo ao valor da área de um círculo de raio unitário (que é $\pi.1^2 = \pi \approx 3,141592$) conforme pode ser observado na Figura 02.

6.2 Exemplo 2

Seja novamente n um número natural e $x^2 + y^2 = 1$ a equação cartesiana de uma circunferência $\lambda \subset \mathbb{R}^2$ de centro na origem e raio igual a 1. Agora iremos encontrar uma nova curva passando pelos mesmos pontos do Exemplo 1, contudo em uma ordem diferente da ordem adotada anteriormente. Iremos, então, encontrar as funções paramétricas de uma curva que passa sequencialmente pelos pontos A=(-1,0), B=(0,1), D=(0,-1) e C=(1,0). Para tanto, iremos inicialmente escrever duas sequências tendo n como parâmetro, adotando-se esta nova ordem. A primeira sequência chamaremos (x_n) : (-1,0,0,1) e a segunda sequência chamaremos (y_n) : (0,1,-1,0) contendo, respectivamente, as coordenadas abscissas e ordenadas destes pontos.

Assim, analogamente ao Exemplo 1, vamos agora encontrar os termos gerais das sequências (x_n) e (y_n), observando as variações contidas entre os seus termos.
Sequência (x_n):

2
-1 , 1
1 , 0 , 1
-1 , 0 , 0 , 1

Obtemos pelas variações de (x_n) um esquema em pirâmide, que nos fornece outras três sequências. A primeira sequência, (r_n), no topo da pirâmide, será considerada uma sequência estacionária e cujos elementos são iguais a 2, portanto $r_n = 2$, para todo n. Logo abaixo na pirâmide, a segunda sequência, (s_n), é uma progressão aritmética de razão r igual a 2 e portanto sua expressão pode ser facilmente encontrada por $s_n = s_1 + (n-1).r = -1 + (n-1).2 = 2n-3$. Já a expressão para o n-ésimo termo da terceira sequência, (t_n), pode ser obtida somando-se à t_1 os $n-1$ primeiros termos da segunda sequência, isto é:

$$\begin{aligned} t_n &= t_1 + \sum_{i=1}^{n-1} s_i = 1 + \sum_{i=1}^{n-1}(2i-3) = 1 + 2.\sum_{i=1}^{n-1} i - 3.\sum_{i=1}^{n-1} 1 \\ &= 1 + 2.\frac{(n-1).((n-1)+1)}{2} - 3.(n-1) = 1 + (n-1).n - 3n + 3 \\ &= n^2 - 4n + 4. \end{aligned}$$

Finalmente podemos obter x_n por meio da expressão:

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} t_i = -1 + \sum_{i=1}^{n-1}(i^2 - 4i + 4) = -1 + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 - 4.\sum_{i=1}^{n-1} i + 4.\sum_{i=1}^{n-1} 1 \\ &= -1 + \frac{(n-1).((n-1)+1).(2.(n-1)+1)}{6} - 4.\frac{(n-1).((n-1)+1)}{2} \\ &\quad +4.(n-1) \\ &= -1 + \frac{(n-1).n.(2n-1)}{6} - \frac{4.(n-1).n}{2} + 4.(n-1) \\ &= -1 + \frac{(n-1).(n.(2n-1) - 12n + 24)}{6} \\ &= -1 + \frac{(n-1).(2n^2 - 13n + 24)}{6} \\ &= \frac{2n^3 - 13n^2 + 24n - 2n^2 + 13n - 24 - 6}{6} \\ &= \frac{2n^3 - 15n^2 + 37n - 30}{6}. \end{aligned}$$

Para a sequência (y_n) teremos:

6

-3 , 3

1 , -2 , 1

0 , 1 , -1 , 0

Obtemos pelas variações de (y_n) um esquema em pirâmide, que nos fornece outras três sequências. A primeira sequência, (r_n), será considerada uma sequência estacionária e cujos elementos são iguais a 6, portanto $r_n = 6$, para todo n. A segunda sequência, (s_n), é uma progressão aritmética de razão r igual a 6 e portanto sua expressão é dada por $s_n = s_1 + (n-1).r = -3 + (n-1).6 = 6n - 9$. Já a terceira sequência, (t_n), pode ser obtida conforme a expressão:

$$\begin{aligned} t_n &= t_1 + \sum_{i=1}^{n-1} s_i = 1 + \sum_{i=1}^{n-1}(6i-9) \\ &= 1 + 6.\sum_{i=1}^{n-1} i - 9.\sum_{i=1}^{n-1} 1 \\ &= 1 + 6.\frac{(n-1).((n-1)+1)}{2} - 9.(n-1) \\ &= 1 + 3.(n-1).n - 9n + 9 \\ &= 3n^2 - 12n + 10. \end{aligned}$$

Finalmente podemos encontrar uma expressão para (y_n) com base na sequência anterior:

$$\begin{aligned} y_n &= y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} t_i = 0 + \sum_{i=1}^{n-1}(3i^2 - 12i + 10) \\ &= 3.\sum_{i=1}^{n-1} i^2 - 12.\sum_{i=1}^{n-1} i + 10.\sum_{i=1}^{n-1} 1 \\ &= 3.\frac{(n-1).((n-1)+1).(2.(n-1)+1)}{6} - 12.\frac{(n-1).((n-1)+1)}{2} + 10.(n-1) \\ &= \frac{(n-1).n.(2n-1)}{2} - \frac{12.(n-1).n}{2} + 10.(n-1) \\ &= \frac{(n-1).(n.(2n-1) - 12n + 20)}{2} = \frac{(n-1).(2n^2 - 13n + 20)}{2} \\ &= \frac{2n^3 - 13n^2 + 20n - 2n^2 + 13n - 20}{2} \\ &= \frac{2n^3 - 15n^2 + 33n - 20}{2}. \end{aligned}$$

Com auxílio do software Winplot podemos visualisar o gráfico obtido pelo conjunto de pontos P=(x_n,y_n), conforme mostra a Figura 03.

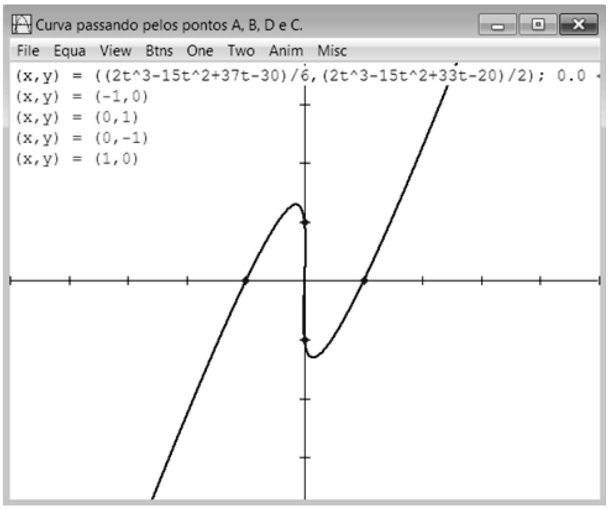


Fig.03. Na janela inventory do programa Winplot, o parâmetro n em questão está representado pela letra t usada pelo programa, sendo a variação de t ajustada para o intervalo 0 $\leq$ t $\leq$ 5, com $t \in \mathbb{R}$.

Podemos ainda, neste exemplo, encontrarmos dois valores de n, n_1 e n_2, que nos forneçam, respectivamente, os pontos de máximo relativo, E_1, e de mínimo relativo, E_2, da curva dada, e que estão contidos no intervalo $I = [-1; 1]$ do eixo x, como pode ser observado na Figura 04. Para isto, precisamos somente encontrar a derivada, ou taxa de variação, de y em relação a x, $\frac{dy}{dx}$, e verificarmos para quais valores de n esta se anula. Para isto, usaremos o seguinte artifício:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dn}}{\frac{dx}{dn}} = \frac{(\frac{2n^3-15n^2+33n-20}{2})'}{(\frac{2n^3-15n^2+37n-30}{6})'} = \frac{\frac{1}{2}.(6n^2-30n+33)}{\frac{1}{6}.(6n^2-30n+37)} = 3.\frac{6n^2-30n+33}{6n^2-30n+37}$$

Para que tenhamos $\frac{dy}{dx} = 0$ basta que tenhamos $6n^2-30n+33 = 0$ e $6n^2-30n+37 \neq 0$, ou seja, precisamos inicialmente encontrar os valores de n que solucionam a equação cujos coeficientes são $a = 6$, $b = -30$ e $c = 33$, o que faremos a seguir:

$$n = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-30)\pm\sqrt{(-30)^2-4.6.33}}{2.6} = \frac{30\pm\sqrt{108}}{12} = \frac{30\pm6\sqrt{3}}{12} = \frac{5\pm\sqrt{3}}{2}$$

Assim, como $n_1 = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$ e $n_2 = \frac{5+\sqrt{3}}{2}$ não são soluções da equação $6n^2-30n+37 = 0$ temos, então, que

$$E_1 = (\frac{2n_1{}^3-15n_1{}^2+37n_1-30}{6}, \frac{2n_1{}^3-15n_1{}^2+33n_1-20}{2}) \approx (-0,144338; 1,299038)$$

é o ponto de máximo relativo da curva dada, e

$$E_2 = (\frac{2n_2{}^3-15n_2{}^2+37n_2-30}{6}, \frac{2n_2{}^3-15n_2{}^2+33n_2-20}{2}) \approx (0,144338; 1,299038)$$

é seu ponto de mínimo relativo, conforme mostra a Figura 04.

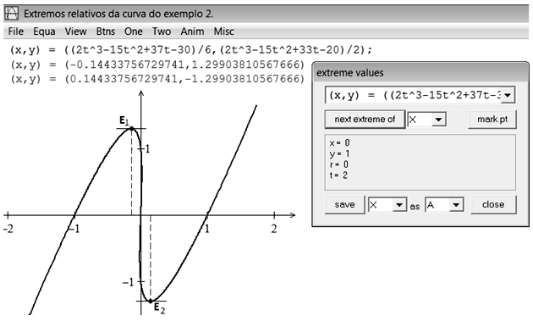


Fig.04. Extremos de máximo e de mínimo relativos de curva parametrizada.

6.3 Exemplo 3

Seja n um número natural e $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, com $z \geq 0$, a equação cartesiana de uma semi-esfera $\lambda \subset \mathbb{R}^3$. Dados os pontos A=(3,0,0), B=(2,2,1), C=(-1,2,2) e D=(0,0,3) pertencentes a λ, iremos então escrever três sequências com base no parâmetro n. As sequências (x_n): (3,2,-1,0), (y_n): (0,2,2,0) e (z_n): (0,1,2,3) representam as coordenadas dos pontos A à D, nesta ordem, em relação aos eixos coordenados x, y e z respectivamente. Conforme o Exemplo 1, iremos então encontrar as expressões dos termos gerais para cada uma destas sequências.

Sequência (x_n):

6
-2 , 4
-1 , -3 , 1
3 , 2 , -1 , 0

Obtemos pelas variações de (x_n) um esquema em pirâmide, que nos fornece outras três sequências. A primeira sequência, no topo da pirâmide, (chamaremos (r_n)) será considerada uma sequência estacionária e cujos elementos são iguais a 6, portanto $r_n = 6$, para todo n. A segunda sequência (chamaremos (s_n)) é uma progressão aritmética de razão r igual a 6 e portanto sua expressão pode ser facilmente encontrada por $s_n = s_1 + (n-1).r = -2 + (n-1).6 = 6n - 8$. Já na terceira sequência (a chamaremos (t_n)) podemos obter seu n-ésimo termo somando-se à t_1 os $n-1$ primeiros termos da segunda sequência, isto é:

$$\begin{aligned}
t_n &= t_1 + \sum_{i=1}^{n-1} s_i = -1 + \sum_{i=1}^{n-1} (6i - 8) = -1 + 6.\sum_{i=1}^{n-1} i - 8.\sum_{i=1}^{n-1} 1 \\
&= -1 + 6.\frac{(n-1).((n-1)+1)}{2} - 8.(n-1) = -1 + 3.(n-1).n - 8n + 8 \\
&= 3n^2 - 11n + 7
\end{aligned}$$

Podemos, então, obter uma expressão geral para x_n de forma análoga a que utilizamos para obtermos a expressão anterior, ou seja:

$$\begin{aligned}
x_n &= x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} t_i = 3 + \sum_{i=1}^{n-1} (3i^2 - 11i + 7) \\
&= 3 + 3.\sum_{i=1}^{n-1} i^2 - 11.\sum_{i=1}^{n-1} i + 7.\sum_{i=1}^{n-1} 1 \\
&= 3 + 3.\frac{(n-1).((n-1)+1).(2.(n-1)+1)}{6} - 11.\frac{(n-1).((n-1)+1)}{2} \\
&\quad +7.(n-1) \\
&= 3 + \frac{(n-1).n.(2n-1)}{2} - 11.\frac{(n-1).n}{2} + 7.(n-1) \\
&= 3 + \frac{(n-1).(2n^2 - 12n + 14)}{2} = 3 + (n-1).(n^2 - 6n + 7) \\
&= 3 + n^3 - 6n^2 + 7n - n^2 + 6n - 7 = n^3 - 7n^2 + 13n - 4.
\end{aligned}$$

Da mesma forma, vamos obter uma expressão para y_n.

-2 , -2

2 , 0 , -2

0 , 2 , 2 , 0

Obtemos, pelas variações de (y_n), um esquema que nos fornece outras duas sequências. A primeira sequência (chamaremos (r_n)) é uma sequência estacionária e cujos elementos são iguais a -2, portanto $r_n = -2$, para todo n. A segunda sequência (chamaremos (s_n)) é uma progressão aritmética de razão r igual a -2 e, portanto, sua expressão pode ser encontrada por $s_n = s_1 + (n-1).r = 2 + (n-1).(-2) = -2n + 4$. Podemos, então, obter o termo y_n escrevendo-se:

$$\begin{aligned}
y_n &= y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} s_i = 0 + \sum_{i=1}^{n-1} (-2i + 4) \\
&= (-2).\sum_{i=1}^{n-1} i + 4.\sum_{i=1}^{n-1} 1 \\
&= (-2).\frac{(n-1).((n-1)+1)}{2} + 4.(n-1) \\
&= -(n-1).n + 4n - 4 = -n^2 + 5n - 4.
\end{aligned}$$

Já as variações de (z_n) correspondem a uma única sequência estacionária (r_n) onde $r_n = 1$ para todo n natural e a sequência (z_n) é uma progressão aritimética de razão r igual a 1 e seu termo geral é dado por $z_n = z_1 + (n-1).r = 0 + (n-1).1 = n - 1$.

1 , 1 , 1
0 , 1 , 2 , 3

Agora, iremos verificar, com a ajuda do programa Winplot, se a interseção entre a semi-esfera λ e a curva parametrizada obtida anteriormente, de pontos $P = (x_n, y_n, z_n) = (n^3 - 7n^2 + 13n - 4, -n^2 + 5n - 4, n - 1)$, corresponde aos pontos pré-definidos A,B,C e D, conforme mostra a Figura 5.

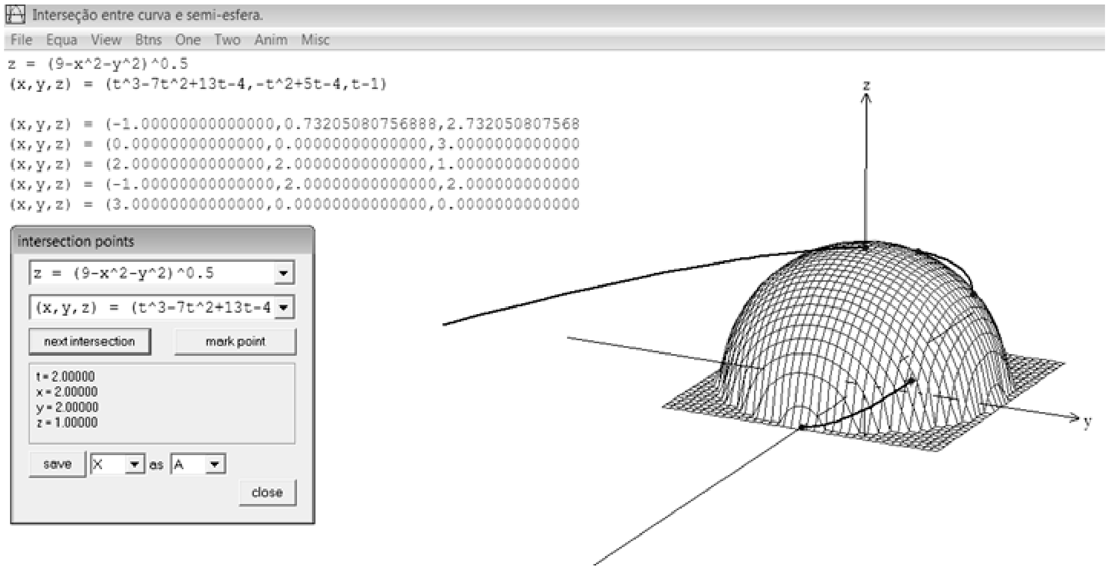


Fig.05. A interseção entre a semi-esfera e a curva obtida contém cinco pontos incluindo-se os pontos A,B,C e D.

Observa-se que a curva obtida possui poucos pontos de interseção com a semi-esfera λ. Podemos, entretanto, encontrar uma curva contida na semi-esfera λ e que passe pelos pontos pré-definidos A, B, C e D. Para isto, façamos uso, por exemplo, das expressões gerais para as sequências (y_n) e (z_n) já encontradas anteriormente e vamos então obter uma expressão para (x_n) simplesmente tomando tais expressões como variáveis da equação cartesiana da semi-esfera λ, isto é:

$$
\begin{aligned}
x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = 9, \quad z_n \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad x_n^2 = 9 - y_n^2 - z_n^2 \\
&\Rightarrow \quad x_n^2 = 9 - (-n^2 + 5n - 4)^2 - (n - 1)^2 \\
&\Rightarrow \quad x_n = \pm\sqrt{9 - (-n^2 + 5n - 4)^2 - (n - 1)^2}
\end{aligned}
$$

Verifica-se que a curva de pontos $P = (\pm\sqrt{9 - (-n^2 + 5n - 4)^2 - (n - 1)^2}, -n^2 + 5n - 4, n - 1)$ está completamente contida na semi-esfera λ conforme a Figura 06.

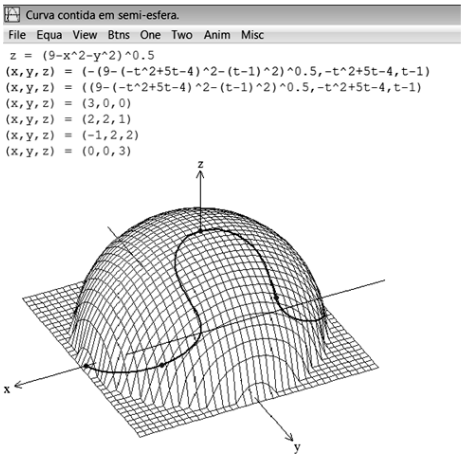


Fig.06. Curva contida na semi-esfera λ, passando pelos pontos A, B, C e D.

6.4 Exemplo 4

Uma vez que é possível encontrarmos fórmulas ou expressões parametrizadas para curvas quaisquer que passem por pontos pré-definidos, podemos, então, encontrar funções F, G e H, de parâmetros $n, k \in \mathbb{R}$, que representem as coordenadas do conjunto de pontos de uma superfície λ, tais que todo ponto de λ tem coordenadas $(x, y, z) = (F(n, k), G(n, k), H(n, k))$, e de modo que λ passe por curvas pré-definidas C_k's, com $k = 1, 2, 3, ..., k_0$, onde k_0 representa o número de curvas do problema.

Neste exemplo, vamos considerar cada coordenada de uma k-ésima curva C_k como uma função polinomial na variável n, isto é, $C_k : (f_k(n), g_k(n), h_k(n))$. Podemos, então, encontrar facilmente expressões gerais para as sequências formadas pelos coeficientes das potências de n (n^0, n^1, n^2, ...) das funções polinomiais f_k, g_k e h_k, observando-se a sequência das curvas C_k's adotada, por onde desejamos que λ passe.

Sejam, então, as curvas parametrizadas $C_1 : (n, 4n^2, 0)$, $C_2 : (n, n^2 + 2, 5)$, $C_3 : (n, 4n^2 - 1, 7)$ e $C_4 : (n, n^2 + 1, 10)$ tendo n como parâmetro. Observemos que o maior grau entre as funções f_k é 1, o maior grau entre as funções g_k é 2, e o maior grau entre as funções h_k é 0. Logo, podemos definir, de modo geral, as funções $f_k(n) = x_k^{[1]}.n + x_k^{[0]}$, $g_k(n) = y_k^{[2]}.n^2 + y_k^{[1]}.n + y_k^{[0]}$ e $h_k(n) = z_k^{[0]}$, onde $(x_k^{[0]}), (y_k^{[1]}) : (0, 0, 0, 0)$, $(x_k^{[1]}) : (1, 1, 1, 1)$, $(y_k^{[2]}) : (4, 1, 4, 1)$, $(y_k^{[0]}) : (0, 2, -1, 1)$ e $(z_k^{[0]}) : (0, 5, 7, 10)$ são as sequências formadas pelos coeficientes das potências de n quando λ passa pelas curvas C_1, C_2, C_3 e C_4, nesta ordem.

Finalmente, a partir das sequências de funções $(f_k(n))$, $(g_k(n))$ e $(h_k(n))$ podemos escrever que todos os pontos de λ, incluindo os pontos das curvas C_k's, tem coordenadas $x = f_k(n) = F(n, k)$, $y = g_k(n) = G(n, k)$ e $z = h_k(n) = H(n, k)$.

Note que usamos a notação $y_k^{[2]}$, por exemplo, para designar o termo geral, no parâmetro k, da sequência dos coeficientes das potências de n de grau 2 da coordenada y dos pontos de λ. Logo, resta-nos calcular expressões gerais para $(y_k^{[2]})$, $(y_k^{[0]})$ e $(z_k^{[0]})$, já que $y_k^{[1]} = x_k^{[0]} = 0$ e $x_k^{[1]} = 1$ para todo k.

Iremos então obter expressões gerais para as sequências $(y_k^{[2]})$, $(y_k^{[0]})$ e $(z_k^{[0]})$ conforme visto nos exemplos anteriores.
Sequência $(y_k^{[2]})$:

-12
6 , -6
-3 , 3 , -3
4 , 1 , 4 , 1

Mais uma vez obtemos, pelas variações de $(y_k^{[2]})$, um esquema em pirâmide que nos fornece outras três sequências. A primeira sequência, no topo da pirâmide, (chamaremos (r_k)) será considerada uma sequência estacionária e cujos elementos são iguais a -12, portanto $r_k = -12$, para todo k. A segunda sequência (chamaremos (s_k)) é uma progressão aritmética de razão r igual a -12 e portanto sua expressão pode ser facilmente encontrada por $s_k = s_1 + (k-1).r = 6 + (k-1).(-12) = -12k + 18$. Quanto à terceira sequência (a chamaremos (t_k)), podemos obter seu k-ésimo termo somando-se à t_1 os $k-1$ primeiros termos da segunda sequência, isto é:

$$
\begin{aligned}
t_k &= t_1 + \sum_{i=1}^{k-1} s_i = -3 + \sum_{i=1}^{k-1} (-12i + 18) \\
&= -3 - 12.\sum_{i=1}^{k-1} i + 18.\sum_{i=1}^{k-1} 1 \\
&= -3 - 12.\frac{(k-1).((k-1)+1)}{2} + 18.(k-1) \\
&= -3 - 6.(k-1).k + 18k - 18 = -6k^2 + 24k - 21.
\end{aligned}
$$

Podemos, agora, obter uma expressão geral para $y_k^{[2]}$ de forma análoga a que utilizamos para obtermos a expressão anterior, ou seja:

$$
\begin{aligned}
y_k^{[2]} &= y_1^{[2]} + \sum_{i=1}^{k-1} t_i = 4 + \sum_{i=1}^{k-1} (-6i^2 + 24i - 21) = 4 - 6.\sum_{i=1}^{k-1} i^2 + 24.\sum_{i=1}^{k-1} i - 21.\sum_{i=1}^{k-1} 1 \\
&= 4 - 6.\frac{(k-1).((k-1)+1).(2.(k-1)+1)}{6} + 24.\frac{(k-1).((k-1)+1)}{2} \\
&\quad -21.(k-1) \\
&= 4 - (k-1).k.(2k-1) + 12.(k-1).k - 21.(k-1)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
y_k^{[2]} &= 4-(k-1).(k.(2k-1)-12k+21)\\
&= 4-(k-1).(2k^2-13k+21) = 4-2k^3+13k^2-21k+2k^2-13k+21\\
&= -2k^3+15k^2-34k+25.
\end{aligned}$$

Sequência $(y_k^{[0]})$:

10
-5 , 5
2 , -3 , 2
0 , 2 , -1 , 1

Obtemos, então, pelas variações de $(y_k^{[0]})$ um esquema em pirâmide que nos fornece outras três sequências. A primeira sequência, no topo da pirâmide, (r_k), será considerada uma sequência estacionária e cujos elementos são iguais a 10, portanto $r_k = 10$ para todo k. A segunda sequência, (s_k), é uma progressão aritmética de razão r igual a 10 e, portanto, sua expressão é dada por $s_k = s_1+(k-1).r = -5+(k-1).10 = 10k-15$. Quanto à terceira sequência, (t_k), podemos obter seu k-ésimo termo somando-se à t_1 os $k-1$ primeiros termos da segunda sequência, isto é:

$$\begin{aligned}
t_k &= t_1+\sum_{i=1}^{k-1} s_i = 2+\sum_{i=1}^{k-1}(10i-15)\\
&= 2+10.\sum_{i=1}^{k-1} i-15.\sum_{i=1}^{k-1} 1\\
&= 2+10.\frac{(k-1).((k-1)+1)}{2}-15.(k-1)\\
&= 2+5.(k-1).k-15k+15 = 5k^2-20k+17.
\end{aligned}$$

Podemos, agora, obter uma expressão geral para $y_k^{[0]}$ de forma análoga a que utilizamos para obtermos a expressão anterior, ou seja:

$$\begin{aligned}
y_k^{[0]} &= y_1^{[0]}+\sum_{i=1}^{k-1} t_i = 0+\sum_{i=1}^{k-1}(5i^2-20i+17)\\
&= 5.\sum_{i=1}^{k-1} i^2-20.\sum_{i=1}^{k-1} i+17.\sum_{i=1}^{k-1} 1\\
&= 5.\frac{(k-1).((k-1)+1).(2.(k-1)+1)}{6}-20.\frac{(k-1).((k-1)+1)}{2}+17.(k-1)\\
&= 5.\frac{(k-1).k.(2k-1)}{6}-20.\frac{(k-1).k}{2}+17.(k-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_k^{[0]} &= \frac{(k-1).(5k.(2k-1)-60k+102)}{6} = \frac{(k-1).(10k^2-65k+102)}{6} \\
&= \frac{10k^3-65k^2+102k-10k^2+65k-102}{6} \\
&= \frac{10k^3-75k^2+167k-102}{6}.
\end{aligned}$$

Sequência $(z_k^{[0]})$:

4

-3 , 1

5 , 2 , 3

0 , 5 , 7 , 10

As variações de $(z_k^{[0]})$ geram, novamente, um esquema em pirâmide, que nos fornece outras três sequências. A primeira sequência, no topo da pirâmide, (r_k), será considerada uma sequência estacionária e cujos elementos são iguais a 4, portanto $r_k = 4$ para todo k. A segunda sequência, (s_k), é uma progressão aritmética de razão r igual a 4 e, portanto, sua expressão é dada por $s_k = s_1 + (k-1).r = -3 + (k-1).4 = 4k-7$. Quanto à terceira sequência, (t_k), podemos obter seu k-ésimo termo somando-se à t_1 os $k-1$ primeiros termos da segunda sequência, isto é:

$$\begin{aligned}
t_k &= t_1 + \sum_{i=1}^{k-1} s_i = 5 + \sum_{i=1}^{k-1}(4i-7) \\
&= 5 + 4.\sum_{i=1}^{k-1} i - 7.\sum_{i=1}^{k-1} 1 \\
&= 5 + 4.\frac{(k-1).((k-1)+1)}{2} - 7.(k-1) \\
&= 5 + 2.(k-1).k - 7k + 7 = 2k^2 - 9k + 12.
\end{aligned}$$

Podemos agora obter uma expressão geral para $z_k^{[0]}$ de forma análoga a utilizada anteriormente, ou seja:

$$\begin{aligned}
z_k^{[0]} &= z_1^{[0]} + \sum_{i=1}^{k-1} t_i = 0 + \sum_{i=1}^{k-1}(2i^2-9i+12) \\
&= 2.\sum_{i=1}^{k-1} i^2 - 9.\sum_{i=1}^{k-1} i + 12.\sum_{i=1}^{k-1} 1 \\
&= 2.\frac{(k-1).((k-1)+1).(2.(k-1)+1)}{6} - 9.\frac{(k-1).((k-1)+1)}{2} + 12.(k-1) \\
&= \frac{(k-1).2k.(2k-1)}{6} - 9.\frac{(k-1).k}{2} + 12.(k-1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_k^{[0]} &= \frac{(k-1).(2k.(2k-1)-27k+72)}{6} = \frac{(k-1).(4k^2-29k+72)}{6} \\
&= \frac{4k^3-29k^2+72k-4k^2+29k-72}{6} \\
&= \frac{4k^3-33k^2+101k-72}{6}.
\end{aligned}
$$

Veremos, pelo Winplot, se a superfície λ:$(F(n,k), G(n,k), H(n,k))$=($x_k^{[1]}.n + x_k^{[0]}$, $y_k^{[2]}.n^2 + y_k^{[1]}.n + y_k^{[0]}$, $z_k^{[0]}$)=($1.n+0$, $(-2k^3+15k^2-34k+25).n^2+0.n+\frac{10k^3-75k^2+167k-102}{6}$, $\frac{4k^3-33k^2+101k-72}{6}$)=(n, $(-2k^3+15k^2-34k+25).n^2+\frac{10k^3-75k^2+167k-102}{6}$, $\frac{4k^3-33k^2+101k-72}{6}$), assim obtida, passa pelas curvas C_k's definidas no início do exemplo, conforme a figura 07.

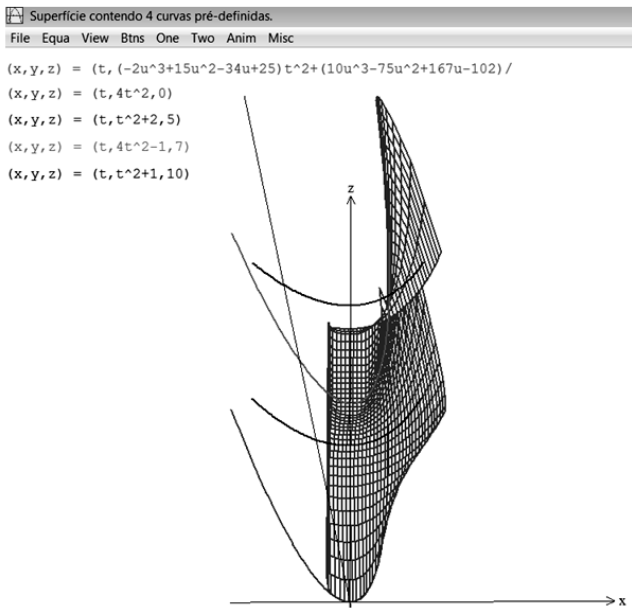


Fig.07. Superfície passando pelas curvas pré-definidas C_1, C_2, C_3 e C_4.

Observe que, na janela acima do programa, os parâmetros n e k, utilizados neste exemplo, foram substituídos, respectivamente, pelos parâmetros t e u do Winplot, com $t, u \in \mathbb{R}$, sendo que $-1 \leq t \leq 4$ e $1 \leq u \leq 4$ para a superfície λ, e $-4 \leq t \leq 4$ para as curvas C_k's.

6.5 Exemplo 5

Vimos que é possível, dadas curvas de funções parametrizadas polinomiais pré-definidas, obtermos uma superfície que as contenha. Vamos agora, por exemplo, encontrar funções F, G e H, de variáveis n, $k \in \mathbb{R}$, que representem as coordenadas do conjunto dos pontos de uma superfície λ , tais que todo ponto de λ tem coordenadas

$(x, y, z) = (F(n, k), G(n, k), H(n, k))$, e de modo que λ passe sequencialmente pelas elipses $C_1 : (3\cos n, \operatorname{sen} n, 5)$, $C_2 : (\cos n, 2\operatorname{sen} n, 3)$, pelo ponto $P = (0, 0, 1)$ (aqui considerado como curva degenerada C_3) e pela circunferência $C_4 : (\cos n, \operatorname{sen} n, 0)$ de equações parametrizadas em n.

Considere cada coordenada dos pontos da k-ésima curva C_k, incluindo-se as coordenadas do ponto P, como funções na variável n, isto é, $C_k : (f_k(n), g_k(n), h_k(n))$. Podemos, neste caso, encontrar facilmente expressões gerais para as funções f_k, g_k e h_k, observando-se a sequência das curvas C_k's adotada.

Note que, para $k = 1, 2, 3, 4$, toda função f_k é da forma $f_k(n) = x_k. \cos n$, toda função g_k é da forma $g_k(n) = y_k. \operatorname{sen} n$ e toda função h_k é da forma $h_k(n) = z_k$, onde $(x_k) : (3, 1, 0, 1)$, $(y_k) : (1, 2, 0, 1)$ e $(z_k) : (5, 3, 1, 0)$ são as sequências dos coeficientes das funções f_k, g_k e h_k na ordem das curvas C_k's adotada. Portanto, a partir das sequências de funções $(f_k(n))$, $(g_k(n))$ e $(h_k(n))$, podemos escrever $x = f_k(n) = F(n, k)$, $y = g_k(n) = G(n, k)$ e $z = h_k(n) = H(n, k)$.

Note, também, que usamos as notações x_k, y_k e z_k, uma vez que as funções deste exemplo não apresentam potências de n diferentes de n^0.

Resta-nos, então, calcular expressões gerais para as sequências (x_k), (y_k) e (z_k).
Sequência (x_k):

1
1 , 2
-2 , -1 , 1
3 , 1 , 0 , 1

Novamente, obtemos, pelas variações de (x_k), um esquema em pirâmide que nos fornece outras três sequências. A primeira sequência, no topo da pirâmide, (r_k), será considerada uma sequência estacionária e cujos elementos são iguais a 1, portanto $r_k = 1$ para todo k. A segunda sequência, (s_k), é uma progressão aritmética de razão r igual a 1 e, portanto, sua expressão pode ser facilmente encontrada como $s_k = s_1 + (k-1).r = 1 + (k-1).1 = k$. Quanto à terceira sequência, (t_k), podemos obter seu k-ésimo termo somando-se à t_1 os $k-1$ primeiros termos da segunda sequência, ou:

$$\begin{aligned} t_k &= t_1 + \sum_{i=1}^{k-1} s_i = -2 + \sum_{i=1}^{k-1} i \\ &= -2 + \frac{(k-1).((k-1)+1)}{2} \\ &= \frac{(k-1).k - 4}{2} = \frac{k^2 - k - 4}{2}. \end{aligned}$$

Podemos, agora, obter uma expressão geral para x_k de forma análoga à obtida anteriormente, ou seja:

$$\begin{aligned}
x_k &= x_1 + \sum_{i=1}^{k-1} t_i = 3 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i^2 - i - 4}{2} \\
&= 3 + \frac{1}{2}.(\sum_{i=1}^{k-1} i^2 - \sum_{i=1}^{k-1} i - 4.\sum_{i=1}^{k-1} 1) \\
&= 3 + \frac{1}{2}.(\frac{(k-1)((k-1)+1)(2(k-1)+1)}{6} - \frac{(k-1)((k-1)+1)}{2} - 4(k-1)) \\
&= 3 + \frac{1}{2}.(\frac{(k-1).k.(2k-1)}{6} - \frac{(k-1).k}{2} - 4.(k-1)) \\
&= 3 + \frac{1}{2}.(\frac{(k-1).(k.(2k-1) - 3k - 24)}{6}) \\
&= 3 + \frac{(k-1).(2k^2 - 4k - 24)}{12} = 3 + \frac{(k-1).(k^2 - 2k - 12)}{6} \\
&= \frac{k^3 - 2k^2 - 12k - k^2 + 2k + 12 + 18}{6} \\
&= \frac{k^3 - 3k^2 - 10k + 30}{6}.
\end{aligned}$$

Sequência (y_k):

6

-3 , 3

1 , -2 , 1

1 , 2 , 0 , 1

Obtemos, então, pelas variações de (y_k), um esquema em pirâmide que nos fornece outras três sequências. A primeira sequência, no topo da pirâmide, (r_k), será considerada uma sequência estacionária e cujos elementos são iguais a 6, portanto $r_k = 6$ para todo k. A segunda sequência, (s_k), é uma progressão aritmética de razão r igual a 6 e, portanto, sua expressão é dada por $s_k = s_1 + (k-1).r = -3 + (k-1).6 = 6k - 9$. Quanto à terceira sequência, (t_k), podemos obter seu k-ésimo termo somando-se à t_1 os $k-1$ primeiros termos da segunda sequência, isto é:

$$\begin{aligned}
t_k &= t_1 + \sum_{i=1}^{k-1} s_i = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} (6i - 9) \\
&= 1 + 6.\sum_{i=1}^{k-1} i - 9.\sum_{i=1}^{k-1} 1 \\
&= 1 + 6.\frac{(k-1).((k-1)+1)}{2} - 9.(k-1) = 1 + 3.(k-1).k - 9k + 9 \\
&= 3k^2 - 12k + 10.
\end{aligned}$$

Podemos, agora, obter uma expressão geral para y_k de forma análoga a que utilizamos para obtermos a expressão anterior, ou seja:

$$\begin{aligned}
y_k &= y_1 + \sum_{i=1}^{k-1} t_i = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} (3i^2 - 12i + 10) \\
&= 1 + 3.\sum_{i=1}^{k-1} i^2 - 12.\sum_{i=1}^{k-1} i + 10.\sum_{i=1}^{k-1} 1 \\
&= 1 + 3.\frac{(k-1).((k-1)+1).(2.(k-1)+1)}{6} - 12.\frac{(k-1).((k-1)+1)}{2} \\
&\quad +10.(k-1) \\
&= 1 + \frac{(k-1).k.(2k-1)}{2} - 12.\frac{(k-1).k}{2} + 10.(k-1) \\
&= 1 + \frac{(k-1).(k.(2k-1) - 12k + 20)}{2} = \frac{(k-1).(2k^2 - 13k + 20) + 2}{2} \\
&= \frac{2k^3 - 13k^2 + 20k - 2k^2 + 13k - 20 + 2}{2} \\
&= \frac{2k^3 - 15k^2 + 33k - 18}{2}.
\end{aligned}$$

Sequência (z_k):

1

0 , 1

-2 , -2 , -1

5 , 3 , 1 , 0

As variações de (z_k) estão representadas em um esquema em pirâmide, que nos fornece outras três sequências. A primeira sequência, no topo da pirâmide, (r_k), será considerada uma sequência estacionária e cujos elementos são iguais a 1, portanto $r_k = 1$ para todo k. A segunda sequência, (s_k), é uma progressão aritmética de razão r igual a 1 e, portanto, sua expressão é dada por $s_k = s_1 + (k-1).r = 0 + (k-1).1 = k-1$. Quanto à terceira sequência, (t_k), podemos obter seu k-ésimo termo somando-se à t_1 os $k-1$ primeiros termos da segunda sequência, isto é:

$$\begin{aligned}
t_k &= t_1 + \sum_{i=1}^{k-1} s_i = -2 + \sum_{i=1}^{k-1} (i-1) \\
&= -2 + \sum_{i=1}^{k-1} i - \sum_{i=1}^{k-1} 1 = -2 + \frac{(k-1).((k-1)+1)}{2} - (k-1) \\
&= -2 + \frac{(k-1).k}{2} - (k-1) = \frac{k^2 - k - 2k + 2 - 4}{2} \\
&= \frac{k^2 - 3k - 2}{2}.
\end{aligned}$$

Podemos, agora, obter uma expressão geral para z_k de forma análoga a utilizada anteriormente, ou seja:

$$\begin{aligned}
z_k &= z_1 + \sum_{i=1}^{k-1} t_i = 5 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i^2 - 3i - 2}{2} = 5 + \frac{1}{2}.(\sum_{i=1}^{k-1} i^2 - 3.\sum_{i=1}^{k-1} i - 2.\sum_{i=1}^{k-1} 1) \\
&= 5 + \frac{1}{2}.(\frac{(k-1).((k-1)+1).(2.(k-1)+1)}{6} - 3.\frac{(k-1).((k-1)+1)}{2} \\
&\quad -2.(k-1)) \\
&= 5 + \frac{1}{2}.(\frac{(k-1).k.(2k-1)}{6} - 3.\frac{(k-1).k}{2} - 2.(k-1)) \\
&= 5 + \frac{1}{2}.(\frac{(k-1).(k.(2k-1) - 9k - 12)}{6}) \\
&= 5 + \frac{(k-1).(2k^2 - 10k - 12)}{12} \\
&= \frac{2k^3 - 10k^2 - 12k - 2k^2 + 10k + 12 + 60}{12} \\
&= \frac{2k^3 - 12k^2 - 2k + 72}{12} = \frac{k^3 - 6k^2 - k + 36}{6}
\end{aligned}$$

Verificaremos, na Figura 08, através do programa Winplot, como o conjunto dos pontos da superfície $\lambda : (F(n,k), G(n,k), H(n,k)) = (x_k.\cos n,\ y_k.\operatorname{sen} n,\ z_k) = (\frac{k^3-3k^2-10k+30}{6}$ $.\cos n,\ \frac{2k^3-15k^2+33k-18}{2}.\operatorname{sen} n, \frac{k^3-6k^2-k+36}{6})$ passa pelas curvas C_k's na sequência definida no início do exemplo.

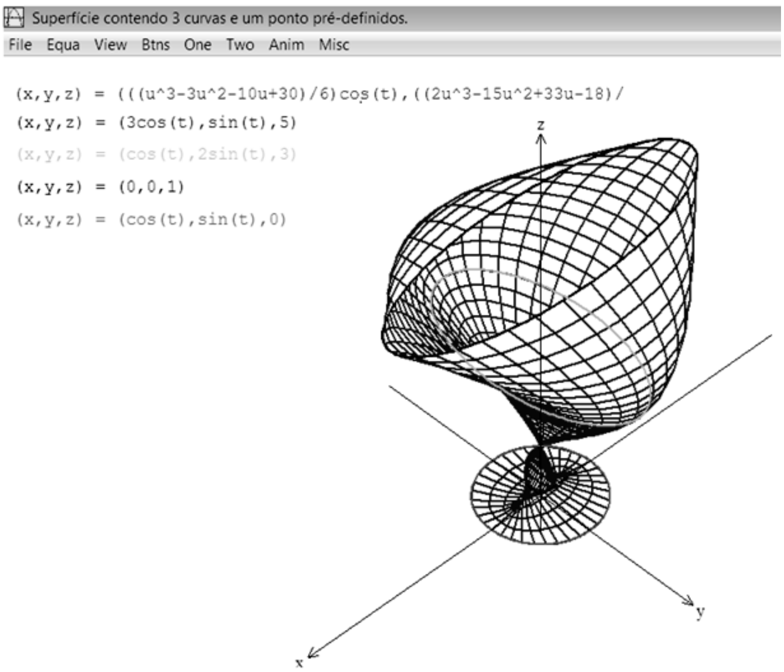


Fig.08. Superfície passando por C_1, C_2, P (C_3) e C_4 nesta ordem.

Observe que, na janela acima do programa, os parâmetros n e k, utilizados neste exemplo, foram substituídos, respectivamente, pelos parâmetros t e u do Winplot com $t, u \in \mathbb{R}$, sendo que $0 \leq t \leq 2\pi$ e $1 \leq u \leq 4$.

6.6 Exemplo 6

Vamos, agora, adaptar o exemplo anterior de modo a obter uma superfície cujo volume possamos calcular mais facilmente. Imagine, então, que queiramos obter o volume de uma superfície $\lambda : (F(n,k), G(n,k), H(n,k))$, de parâmetros n e k, que passe sequencialmente por três circunferências e um ponto. Seja a sequência (C_1, C_2, C_3, C_4), onde $C_1 : (2\cos n, 2\,\mathrm{sen}\, n, 5)$, $C_2 : (2\cos n, 2\,\mathrm{sen}\, n, 3)$, $C_3 : (0,0,1)$ e $C_4 : (\cos n, \mathrm{sen}\, n, 0)$ representam as circunferências no parâmetro n, sendo C_3 uma circunferência degenerada representando um único ponto. Assim, podemos escrever as coordenadas de um ponto P qualquer da k-ésima curva como sendo funções f_k, g_k e h_k de variável n, isto é, $P = (f_k(n), g_k(n), h_k(n))$, onde, neste caso, verificamos que $f_k(n) = x_k.\cos n$, $g_k(n) = y_k.\,\mathrm{sen}\, n$ e $h_k(n) = z_k$, sendo x_k, y_k e z_k os termos gerais das sequências $(x_k), (y_k) : (2,2,0,1)$ e $(z_k) : (5,3,1,0)$ obtidas quando a superfície λ passa sequencialmente pelas curvas C_k's com $k = 1,2,3,4$. Assim, basta encontrarmos o termo geral da sequência (x_k), uma vez que $(y_k) = (x_k)$ e, do exemplo 5, $z_k = \frac{k^3-6k^2-k+36}{6}$.Logo:
Sequência (x_k):

5
-2 , 3
0 , -2 , 1
2 , 2 , 0 , 1

As variações de (x_k) estão representadas em um esquema em pirâmide, que nos fornece outras três sequências. A primeira sequência, no topo da pirâmide, (r_k), será considerada uma sequência estacionária e cujos elementos são iguais a 5, portanto $r_k = 5$ para todo k. A segunda sequência, (s_k), é uma progressão aritmética de razão r igual a 5 e, portanto, sua expressão é dada por $s_k = s_1 + (k-1).r = -2 + (k-1).5 = 5k - 7$. Quanto à terceira sequência, (t_k), podemos obter seu k-ésimo termo somando-se à t_1 os $k-1$ primeiros termos da segunda sequência, isto é:

$$
\begin{aligned}
t_k &= t_1 + \sum_{i=1}^{k-1} s_i = 0 + \sum_{i=1}^{k-1}(5i-7) = 5.\sum_{i=1}^{k-1} i - 7.\sum_{i=1}^{k-1} 1 \\
&= 5.\frac{(k-1).((k-1)+1)}{2} - 7(k-1) = \frac{5(k-1)k - 14(k-1)}{2} \\
&= \frac{5k^2 - 5k - 14k + 14}{2} = \frac{5k^2 - 19k + 14}{2}.
\end{aligned}
$$

Podemos, agora, obter uma expressão geral para x_k conforme segue:

$$\begin{aligned}
x_k &= x_1 + \sum_{i=1}^{k-1} t_i = 2 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{5i^2 - 19i + 14}{2} \\
&= 2 + \frac{1}{2}.(5.\sum_{i=1}^{k-1} i^2 - 19.\sum_{i=1}^{k-1} i + 14.\sum_{i=1}^{k-1} 1) \\
&= 2 + \frac{1}{2}.(5.\frac{(k-1)((k-1)+1)(2(k-1)+1)}{6} \\
& \quad -19.\frac{(k-1)((k-1)+1)}{2} + 14(k-1)) \\
&= 2 + \frac{1}{2}.(\frac{5(k-1)k(2k-1)}{6} - \frac{19(k-1)k}{2} + 14.(k-1)) \\
&= 2 + \frac{1}{2}.(\frac{(k-1)(5k(2k-1) - 57k + 84)}{6}) \\
&= 2 + \frac{(k-1).(10k^2 - 62k + 84)}{12} \\
&= \frac{10k^3 - 62k^2 + 84k - 10k^2 + 62k - 84 + 24}{12} \\
&= \frac{10k^3 - 72k^2 + 146k - 60}{12} = \frac{5k^3 - 36k^2 + 73k - 30}{6}.
\end{aligned}$$

A Figura 09 mostra, através do programa Winplot, $\lambda : (F(n,k), G(n,k), H(n,k)) = (f_k(n), g_k(n), h_k(n)) = (\frac{5k^3-36k^2+73k-30}{6}.\cos n, \frac{5k^3-36k^2+73k-30}{6}.\operatorname{sen} n, \frac{k^3-6k^2-k+36}{6})$ para n, $k \in \mathbb{R}$, com $0 \leq n \leq 2\pi$ e $1 \leq k \leq 4$, e o valor do volume aproximado, $V_{aprox.} = 44$, do sólido S, limitado pelo plano z=5 e pela superfície λ, quando k varia de 1 a 3.

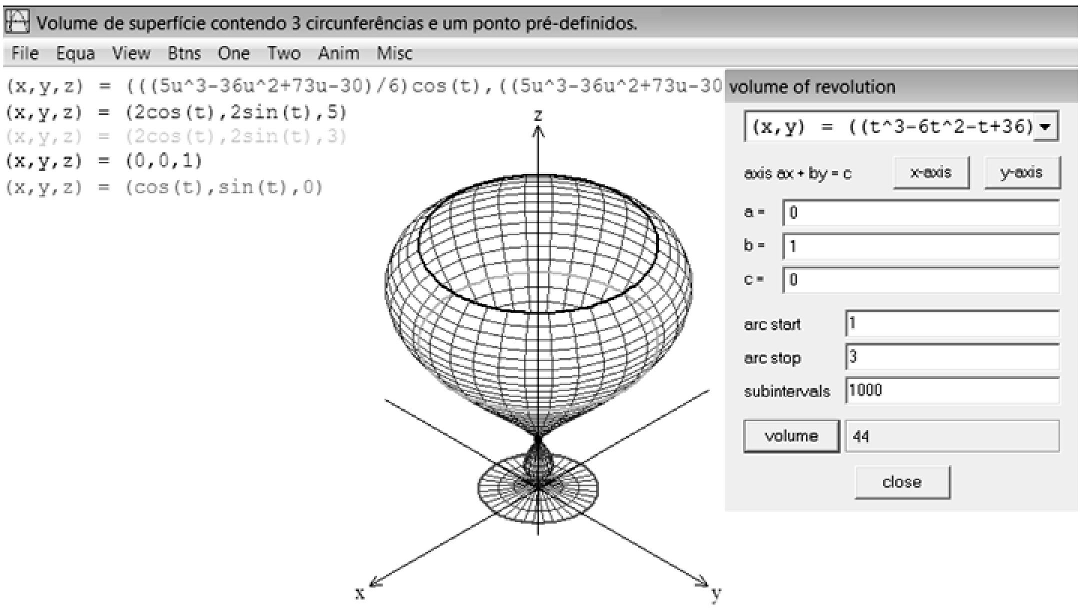


Fig.09. Superfície passando por três circunferências e um ponto, e valor do volume aproximado do sólido S.

Vamos, então, verificar o valor do volume V do sólido S calculando-o, conforme segue, onde $r(k) = G(\frac{\pi}{2}, k)$ é o raio dos pontos da circunferência interseção entre o plano $z = \frac{k^3-6k^2-k+36}{6}$ e a superfície λ para um dado k, $1 \leq k \leq 3$.

Assim:

$$\begin{aligned}
V &= \int_1^5 \pi(r(k))^2 dz \\
&= \pi \int_3^1 (G(\frac{\pi}{2}, k))^2 (\frac{dz}{dk}) dk \\
&= \pi \int_3^1 (\frac{5k^3 - 36k^2 + 73k - 30}{6} . \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}))^2 . (\frac{k^3 - 6k^2 - k + 36}{6})' dk \\
&= \pi \int_3^1 (\frac{5k^3 - 36k^2 + 73k - 30}{6} .1)^2 . (\frac{1}{6} . (3k^2 - 12k - 1)) dk \\
&= \frac{\pi}{6} . \frac{1}{36} \int_3^1 (5k^3 - 36k^2 + 73k - 30)^2 . (3k^2 - 12k - 1) dk \\
&= \frac{\pi}{216} \int_3^1 (25k^6 - 360k^5 + 2026k^4 - 5556k^3 + 7489k^2 - 4380k + 900) \\
&\quad .(3k^2 - 12k - 1) dk \\
&= \frac{\pi}{216} \int_3^1 (75k^8 - 1380k^7 + 10373k^6 - 40620k^5 + 87113k^4 - 97452k^3 \\
&\quad +47771k^2 - 6420k - 900) dk \\
&= \frac{\pi}{216} [\frac{75k^9}{9} - \frac{1380k^8}{8} + \frac{10373k^7}{7} - \frac{40620k^6}{6} + \frac{87113k^5}{5} - \frac{97452k^4}{4} + \\
&\quad \frac{47771k^3}{3} - \frac{6420k^2}{2} - 900k]_3^1 \\
&= \frac{\pi}{216} [(\frac{75.1^9}{9} - \frac{1380.1^8}{8} + \frac{10373.1^7}{7} - \frac{40620.1^6}{6} + \frac{87113.1^5}{5} - \frac{97452.1^4}{4} + \\
&\quad \frac{47771.1^3}{3} - \frac{6420.1^2}{2} - 900.1) - (\frac{75.3^9}{9} - \frac{1380.3^8}{8} + \frac{10373.3^7}{7} - \frac{40620.3^6}{6} + \\
&\quad \frac{87113.3^5}{5} - \frac{97452.3^4}{4} + \frac{47771.3^3}{3} - \frac{6420.3^2}{2} - 900.3)] \\
&= \frac{\pi}{216} [(-579,04285) - (-3618,129)] \\
&= \frac{\pi}{216} [3039,08615] \\
&= 44,20171631.
\end{aligned}$$

Infelizmente, o programa Winplot não gera, neste caso, o resultado do volume do sólido S com precisão, no entanto a diferença $|V - V_{aprox.}|$ é, por arredondamento, inferior a 0,5 (o que espera-se não ter comprometido a comparação entre os valores V e $V_{aprox.}$).

6.7 Exemplo 7

Vamos, agora, comparar as superfícies λ_1 e λ_2 obtidas quando alteramos a ordem da sequência de curvas (C_1, C_2, C_3) para (C_3, C_1, C_2), onde $C_1 : (2\cos n, 0, 3\,\mathrm{sen}\, n)$, $C_2 : (\cos n, 1, \mathrm{sen}\, n)$ e $C_3 : (3\cos n, 3, 2\,\mathrm{sen}\, n)$, com $n \in \mathbb{R}$.

Sequência de curvas (C_1, C_2, C_3):

Note que, neste caso, podemos afirmar que estas curvas são da forma $C_k : (f_k(n), g_k(n), h_k(n)) = (x_k.\cos n, y_k, z_k.\,\mathrm{sen}\, n)$, com $k = 1, 2, 3$, e onde $(x_k) : (2, 1, 3)$, $(y_k) : (0, 1, 3)$ e $(z_k) : (3, 1, 2)$ são as sequências dos coeficientes das funções $(f_k(n))$, $(g_k(n))$ e $(h_k(n))$ quando k varia de 1 a 3. Assim, encontrando expressões para as sequências (x_k), (y_k) e (z_k) obtemos expressões gerais para as funções $(f_k(n))$, $(g_k(n))$ e $(h_k(n))$, onde $f_k(n) = F(n, k)$, $g_k(n) = G(n, k)$ e $h_k(n) = H(n, k)$, sendo $P = (x, y, z) = (F(n, k),\ G(n, k),\ H(n, k))$ ponto da superfície λ_1 que passa pelas curvas C_k's pré-definidas na ordem C_1, C_2 e C_3. Vamos, então, encontrar expressões gerais para as sequências (x_k), (y_k) e (z_k).

Sequência (x_k):

3

-1 , 2

2 , 1 , 3

Obtemos, pelas variações de (x_k), um esquema em pirâmide que nos fornece outras duas sequências. A primeira sequência, no topo da pirâmide, (r_k), será considerada uma sequência estacionária e cujos elementos são iguais a 3, portanto $r_k = 3$ para todo k. A segunda sequência, (s_k), é uma progressão aritmética de razão r igual a 3 e, portanto, sua expressão é dada por $s_k = s_1 + (k-1).r = -1 + (k-1).3 = 3k - 4$. Por último, encontramos o termo geral para (x_k) obtendo seu k-ésimo termo somando-se à x_1 os $k - 1$ primeiros termos da sequência anterior. Logo:

$$\begin{aligned}
x_k &= x_1 + \sum_{i=1}^{k-1} s_i = 2 + \sum_{i=1}^{k-1}(3i - 4) = 2 + 3.\sum_{i=1}^{k-1} i - 4.\sum_{i=1}^{k-1} 1 \\
&= 2 + 3.\frac{(k-1).((k-1)+1)}{2} - 4.(k-1) \\
&= \frac{4 + 3(k-1)k - 8(k-1)}{2} \\
&= \frac{4 + 3k^2 - 3k - 8k + 8}{2} \\
&= \frac{3k^2 - 11k + 12}{2}
\end{aligned}$$

Sequência (y_k):

1

1 , 2

0 , 1 , 3

Obtemos, pelas variações de (y_k), um esquema em pirâmide que nos fornece outras duas sequências. A primeira sequência, no topo da pirâmide, (r_k), será considerada uma sequência estacionária e cujos elementos são iguais a 1, portanto $r_k = 1$ para todo k. A segunda sequência, (s_k), é uma progressão aritmética de razão r igual a 1 e, portanto, sua expressão é dada por $s_k = s_1 + (k-1).r = 1 + (k-1).1 = k$. Por último, encontramos o termo geral para (y_k) obtendo seu k-ésimo termo somando-se à y_1 os $k-1$ primeiros termos da sequência anterior, conforme segue.

$$\begin{aligned} y_k &= y_1 + \sum_{i=1}^{k-1} s_i = 0 + \sum_{i=1}^{k-1} i = \frac{(k-1).((k-1)+1)}{2} \\ &= \frac{(k-1).k}{2} = \frac{k^2-k}{2} \end{aligned}$$

Sequência (z_k):

3

-2 , 1

3 , 1 , 2

Finalmente, obtemos pelas variações de (z_k) um esquema em pirâmide, que nos fornece outras duas sequências. A primeira sequência, no topo da pirâmide, (r_k), será considerada uma sequência estacionária e cujos elementos são iguais a 3, portanto $r_k = 3$ para todo k. A segunda sequência, (s_k), é uma progressão aritmética de razão r igual a 3 e, portanto, sua expressão é dada por $s_k = s_1 + (k-1).r = -2 + (k-1).3 = 3k-5$. Por último, encontramos o termo geral para (z_k) obtendo seu k-ésimo termo somando-se à z_1 os $k-1$ primeiros termos da sequência anterior. Logo:

$$\begin{aligned} z_k &= z_1 + \sum_{i=1}^{k-1} s_i = 3 + \sum_{i=1}^{k-1} 3i - 5 = 3 + 3.\sum_{i=1}^{k-1} i - 5.\sum_{i=1}^{k-1} 1 \\ &= 3 + 3.\frac{(k-1).((k-1)+1)}{2} - 5.(k-1) \\ &= \frac{6 + 3(k-1).k - 10(k-1)}{2} = \frac{6 + 3k^2 - 3k - 10k + 10}{2} \\ &= \frac{3k^2 - 13k + 16}{2} \end{aligned}$$

Podemos, então, verificar a superfície $\lambda_1 : (\frac{3k^2-11k+12)}{2}.\cos n, \frac{k^2-k}{2}, \frac{3k^2-13k+16}{2}.\operatorname{sen} n)$ obtida, no Winplot, quando substituímos os parâmetros k e n, respectivamente, pelos parâmetros reais u e t do programa conforme a Figura 10.

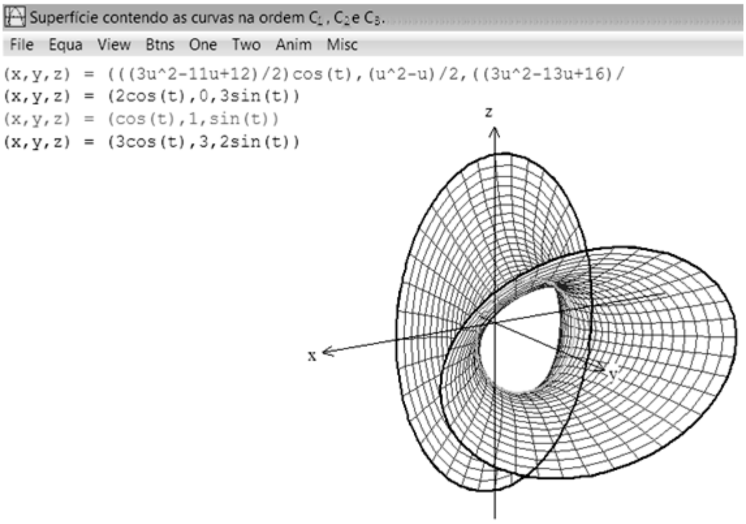


Fig.10. Superfície λ_1 gerando a sequência (C_1, C_2, C_3), com $0 \leq t \leq 2\pi$ e $1 \leq u \leq 3$.

Sequência de curvas (C_3, C_1, C_2):

Vamos, agora, encontrar a equação paramétrica de uma superfície λ_2 que passa pelas curvas $C_3 : (3\cos n, 3, 2\operatorname{sen} n)$, $C_1 : (2\cos n, 0, 3\operatorname{sen} n)$ e $C_2 : (\cos n, 1, \operatorname{sen} n)$, nesta ordem. Por conveniência, chamaremos C_3 de $C_1^{'}$, C_1 de $C_2^{'}$ e C_2 de $C_3^{'}$, onde as curvas $C^{'}$s variam conforme um parâmetro $l = 1, 2, 3$. Já sabemos que estas curvas são da forma $C_l : (f_l(n), g_l(n), h_l(n)) = (x_l.\cos n, y_l, z_l.\operatorname{sen} n)$, onde agora teremos $(x_l) : (3, 2, 1)$, $(y_l) : (3, 0, 1)$ e $(z_l) : (2, 3, 1)$, as novas sequências obtidas dos respectivos coeficientes das funções $(f_l(n))$, $(g_l(n))$ e $(h_l(n))$. Assim, encontrando uma expressão para as sequências (x_l), (y_l) e (z_l) obtemos expressões gerais para as funções $(f_l(n))$, $(g_l(n))$ e $(h_l(n))$, onde $f_l(n) = F(n, l)$, $g_l(n) = G(n, l)$ e $h_l(n) = H(n, l)$, sendo $P = (x, y, z) = (F(n, l), G(n, l), H(n, l))$ ponto da superfície λ_2 que passa pelas curvas C_l's pré-definidas.

Iremos, portanto, encontrar expressões gerais para as sequências (x_l), (y_l) e (z_l).

Sequência (x_l):

-1 , -1

3 , 2 , 1

Obtemos, pelas variações de (x_l), uma sequência, (r_l), que consideraremos estacionária e cujos termos r_l são iguais a -1 para todo l. Logo, a sequência (x_l) é uma progressão aritmética de razão r igual a -1 e, portanto, seu termo geral é dado por $x_l = x_1 + (l-1).r = 3 + (l-1).(-1) = -l + 4$.

Sequência (y_l):

4

-3 , 1

3 , 0 , 1

Obtemos, pelas variações de (y_l), um esquema em pirâmide que nos fornece outras duas sequências. A primeira sequência, no topo da pirâmide, (r_l), será considerada uma sequência estacionária e cujos elementos são iguais a 4, portanto $r_l = 4$ para todo l. A segunda sequência, (s_l), é uma progressão aritmética de razão r igual a 4 e, portanto, seu termo geral é dado por $s_l = s_1 + (l-1).r = -3 + (l-1).4 = 4l - 7$. Por último, encontramos o termo geral para (y_l) obtendo seu l-ésimo termo somando-se à y_1 os $l-1$ primeiros termos da sequência anterior, conforme segue.

$$\begin{aligned} y_l &= y_1 + \sum_{i=1}^{l-1} s_i = 3 + 4.\sum_{i=1}^{l-1} i - 7.\sum_{i=1}^{l-1} 1 \\ &= 3 + 4.\frac{(l-1).((l-1)+1)}{2} - 7.(l-1) = 3 + 2.(l-1).l - 7.(l-1) \\ &= 2l^2 - 9l + 10 \end{aligned}$$

Sequência (z_l):

-3

1 , -2

2 , 3 , 1

Finalmente, obtemos pelas variações de (z_l) um esquema em pirâmide, que nos fornece outras duas sequências. A primeira sequência, no topo da pirâmide, (r_l), será considerada uma sequência estacionária e cujos elementos são iguais a -3, portanto $r_l = -3$ para todo l. A segunda sequência, (s_l), é uma progressão aritmética de razão r igual a -3 e, portanto, sua expressão é dada por $s_l = s_1 + (l-1).r = 1 + (l-1).(-3) = -3l + 4$. Por último, encontramos o termo geral para (z_l) obtendo seu l-ésimo termo somando-se à z_1 os $l-1$ primeiros termos da sequência anterior. Logo:

$$\begin{aligned} z_l &= z_1 + \sum_{i=1}^{l-1} s_i = 2 + \sum_{i=1}^{l-1} -3i + 4 = 2 - 3.\sum_{i=1}^{l-1} i + 4.\sum_{i=1}^{l-1} 1 \\ &= 2 - 3.\frac{(l-1).((l-1)+1)}{2} + 4.(l-1) = \frac{4 - 3(l-1).l + 8.(l-1)}{2} \\ &= \frac{4 - 3l^2 + 3l + 8l - 8}{2} = \frac{-3l^2 + 11l - 4}{2}. \end{aligned}$$

Podemos, então, obter a superfície $\lambda_2 : ((-l+4).\cos n, 2l^2-9l+10, \frac{-3l^2+11l-4}{2}.\operatorname{sen} n)$, no Winplot, quando substituímos os parâmetros l e n, respectivamente, pelos parâmetros reais u e t do programa, conforme a Figura 11.

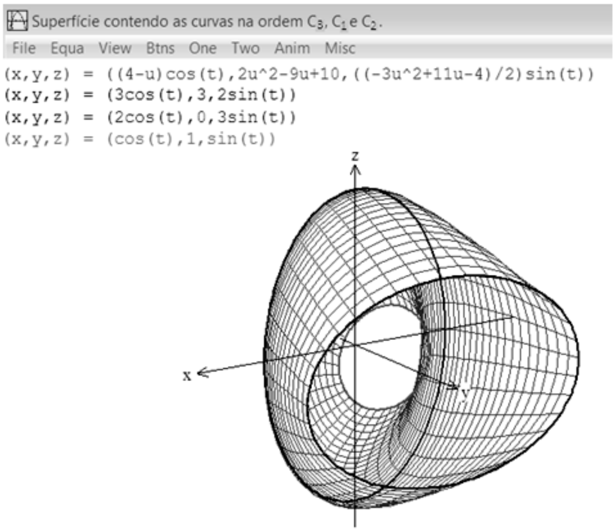


Fig.11. Superfície λ_2 gerando a sequência (C_1', C_2', C_3') com $0 \leq t \leq 2\pi$ e $1 \leq u \leq 3$.

Vimos, então, que, assim como nos exemplos 1 e 2, onde as curvas paramétricas obtidas dependem da ordem dos pontos pré-definidos, podemos observar que as superfícies λ_1 e λ_2 obtidas dependem da sequência das curvas pré-definidas num dado parâmetro. Este parâmetro pode ser, então, entendido como sendo a ordem em que os pontos (ou curvas) são gerados de modo que, respectivamente, possamos obter as curvas (ou superfícies) desejadas.

6.8 Exemplo 8

Vejamos, agora, um exemplo de superfície passando por duas elipses e uma parábola. Sejam, então, as curvas $C_1 : (\cos n, -2, 2\operatorname{sen} n)$, $C_2 : (n, 0, n^2)$ e $C_3 : (2\cos n, 2, \operatorname{sen} n)$ do $\mathbb{R}^3$ pelas quais queremos que uma superfície λ passe sequencialmente. Observe que tais curvas podem ser escritas na forma $C_k : (f_k(n), g_k(n), h_k(n))$ onde $f_k(n) = x_k^{[0]}.\cos n + x^{[1]}.n$, $g_k(n) = y_k$ e $h_k(n) = z_k^{[0]}.\operatorname{sen} n + z_k^{[1]}.n^2$, considerando-se, neste caso, as sequências $(x_k^{[0]}) : (1, 0, 2)$, $(x_k^{[1]}), (z_k^{[1]}) : (0, 1, 0)$, $(y_k) : (-2, 0, 2)$ e $(z_k^{[0]}) : (2, 0, 1)$, para $k = 1, 2, 3$.

Sendo assim, a superfície gerada quando variamos o valor de $k \in \mathbb{R}$ será da forma $\lambda : (F(n,k), G(n,k), H(n,k))$, onde $F(n,k) = f_k(n)$, $G(n,k) = g_k(n)$ e $H(n,k) = h_k(n)$. E, para encontrarmos as funções F, G e H, basta encontrarmos os termos gerais para as sequências $(x_k^{[0]})$, $(x_k^{[1]})$, (y_k), $(z_k^{[0]})$ e $(z_k^{[1]})$, o que faremos a seguir.

Sequência $(x_k^{[0]})$:

3

-1 , 2

1 , 0 , 2

Obtemos, pelas variações de $(x_k^{[0]})$, um esquema em pirâmide que nos fornece outras duas sequências. A primeira sequência, no topo da pirâmide, (r_k), será considerada uma sequência estacionária e cujos elementos são iguais a 3, portanto $r_k = 3$ para todo k. A segunda sequência, (s_k), é uma progressão aritmética de razão r igual a 3 e, portanto, sua expressão é dada por $s_k = s_1 + (k-1).r = -1 + (k-1).3 = 3k - 4$. Por último, encontramos o termo geral para $(x_k^{[0]})$ obtendo seu k-ésimo termo somando-se à $x_1^{[0]}$ os $k-1$ primeiros termos da sequência anterior. Logo:

$$\begin{aligned} x_k^{[0]} &= x_1^{[0]} + \sum_{i=1}^{k-1} s_i = 1 + \sum_{i=1}^{k-1}(3i-4) = 1 + 3.\sum_{i=1}^{k-1} i - 4.\sum_{i=1}^{k-1} 1 \\ &= 1 + 3.\frac{(k-1).((k-1)+1)}{2} - 4.(k-1) = \frac{2 + 3(k-1)k - 8(k-1)}{2} \\ &= \frac{2 + 3k^2 - 3k - 8k + 8)}{2} = \frac{3k^2 - 11k + 10)}{2}. \end{aligned}$$

Sequência $(x_k^{[1]})$:

-2

1 , -1

0 , 1 , 0

Obtemos, pelas variações de $(x_k^{[1]})$, um esquema em pirâmide que nos fornece outras duas sequências. A primeira sequência, no topo da pirâmide, (r_k), será considerada uma sequência estacionária e cujos elementos são iguais a -2, portanto $r_k = -2$ para todo k. A segunda sequência, (s_k), é uma progressão aritmética de razão r igual a -2 e, portanto, sua expressão é dada por $s_k = s_1 + (k-1).r = 1 + (k-1).-2 = -2k+3$. Por último, encontramos o termo geral para $(x_k^{[1]})$ obtendo seu k-ésimo termo somando-se à $x_1^{[1]}$ os $k-1$ primeiros termos da sequência anterior. Logo:

$$\begin{aligned} x_k^{[1]} &= x_1^{[1]} + \sum_{i=1}^{k-1} s_i = 0 + \sum_{i=1}^{k-1}(-2i+3) = -2.\sum_{i=1}^{k-1} i + 3.\sum_{i=1}^{k-1} 1 \\ &= -2.\frac{(k-1).((k-1)+1)}{2} + 3.(k-1) \\ &= -(k-1)k + 3(k-1) = -k^2 + k + 3k - 3 \\ &= -k^2 + 4k - 3. \end{aligned}$$

Consequentemente, para a sequência $(z_k^{[1]})$ o termo geral será dado por $z_k^{[1]} = -k^2 + 4k - 3$.

Sequência (y_k):

2 , 2

-2 , 0 , 2

Obtemos, pelas variações de (y_k), uma sequência, (r_k), que consideraremos estacionária e cujos termos r_k são iguais a 2 para todo k. Logo a sequência (y_k) é uma progressão aritmética de razão r igual a 2 e portanto seu termo geral é dado por $y_k = y_1 + (k-1).r = -2 + (k-1).2 = 2k - 4$.

Sequência $(z_k^{[0]})$:

3

-2 , 1

2 , 0 , 1

Obtemos, pelas variações de $(z_k^{[0]})$, um esquema em pirâmide que nos fornece outras duas sequências. A primeira sequência, no topo da pirâmide, (r_k), será considerada uma sequência estacionária e cujos elementos são iguais a 3, portanto $r_k = 3$ para todo k. A segunda sequência, (s_k), é uma progressão aritmética de razão r igual a 3 e, portanto, sua expressão é dada por $s_k = s_1 + (k-1).r = -2 + (k-1).3 = 3k - 5$. Por último, encontramos o termo geral para $(z_k^{[0]})$ obtendo seu k-ésimo termo somando-se à $z_1^{[0]}$ os $k-1$ primeiros termos da sequência anterior. Logo:

$$\begin{aligned}
z_k^{[0]} &= z_1^{[0]} + \sum_{i=1}^{k-1} s_i = 2 + \sum_{i=1}^{k-1} (3i - 5) = 2 + 3.\sum_{i=1}^{k-1} i - 5.\sum_{i=1}^{k-1} 1 \\
&= 2 + 3.\frac{(k-1).((k-1)+1)}{2} - 5.(k-1) = 2 + 3.\frac{(k-1).k)}{2} - 5.(k-1) \\
&= \frac{4 + 3.(k-1).k - 10.(k-1))}{2} = \frac{4 + 3k^2 - 3k - 10k + 10}{2} \\
&= \frac{3k^2 - 13k + 14}{2}
\end{aligned}$$

Assim, as coordenadas de λ são $(F(n,k), G(n,k), H(n,k))$ = $(f_k(n), g_k(n), h_k(n)) = (x_k^{[0]}.\cos n + x^{[1]}.n, y_k, z_k^{[0]}.\operatorname{sen} n + z_k^{[1]}.n^2) = (\frac{3k^2-11k+10}{2}.\cos n + (-k^2 + 4k - 3).n, 2k - 4, \frac{3k^2-13k+14}{2}.\operatorname{sen} n + (-k^2 + 4k - 3).n^2)$ e seu gráfico pode ser observado na janela 3D do Winplot, conforme a Figura 12, onde os parâmetros n e k foram substituídos pelos respectivos parâmetros t e u do programa com $-\pi \leq t \leq \pi$ e $1 \leq u \leq 3$.

Observe que, de um modo geral, podemos encontrar a equação paramétrica de uma superfície $\lambda : (F(n,k), G(n,k), H(n,k))$ passando por curvas C_k's pré-definidas, desde que possamos encontrar expressões gerais para as sequências dos coeficientes das funções envolvidas nas coordenadas $f_k(n) = x_k^{[0]} f^{[0]}(n) + x_k^{[1]} f^{[1]}(n) + ... + x_k^{[r]} f^{[r]}(n)$, $g_k(n) = y_k^{[0]} g^{[0]}(n) + y_k^{[1]} g^{[1]}(n) + ... + y_k^{[s]} g^{[s]}(n)$ e $h_k(n) = z_k^{[0]} h^{[0]}(n) + z_k^{[1]} h^{[1]}(n) + ... + z_k^{[t]} h^{[t]}(n)$ das curvas C_k's, onde $r+1$, $s+1$ e $t+1$ são o número de funções envolvidas nas coordenadas f_k, g_k e h_k, e os termos $x_k^{[0]}$, $x_k^{[1]}$, ..., $x_k^{[r]}$ são os coeficientes das funções $f^{[0]}$, $f^{[1]}$, ..., $f^{[r]}$, os termos $y_k^{[0]}$, $y_k^{[1]}$, ..., $y_k^{[s]}$ são os coeficientes das funções $g^{[0]}$, $g^{[1]}$, ..., $g^{[s]}$, e os termos $z_k^{[0]}$, $z_k^{[1]}$, ..., $z_k^{[t]}$ são os coeficientes das funções $h^{[0]}$, $h^{[1]}$, ..., $h^{[t]}$.

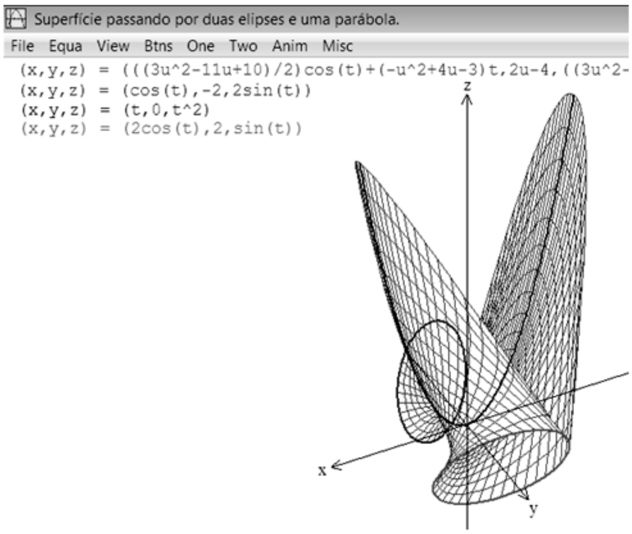


Fig.12. Superfície λ gerada, passando por duas elipses e uma parábola previamente definidas.

6.9 Exemplo 9

Vamos, agora, encontrar a equação paramétrica de um parabolóide circular λ e, em seguida, verificar o valor da área de sua superfície em comparação com o valor gerado pelo programa Winplot. Imagine, então, que o parabolóide $\lambda : (F(n,k), G(n,k), H(n,k))$, de parâmetros n e k, passe, sequencialmente, por um ponto e duas circunferências, conforme a sequência (C_1, C_2, C_3), onde $C_1 : (0,0,0)$, $C_2 : (\cos n, \operatorname{sen} n, 1)$ e $C_3 : (2\cos n, 2\operatorname{sen} n, 4)$ representam as circunferências no parâmetro n, sendo C_1 uma circunferência degenerada representando um único ponto. Assim, podemos escrever as coordenadas de um ponto P qualquer da k-ésima curva como sendo funções f_k, g_k e h_k de variável n, isto é, $P = (f_k(n), g_k(n), h_k(n))$, onde, neste caso, observa-se que $f_k(n) = x_k.\cos n$, $g_k(n) = y_k.\operatorname{sen} n$ e $h_k(n) = z_k$, sendo x_k, y_k e z_k os termos gerais das sequências $(x_k), (y_k) : (0,1,2)$ e $(z_k) : (0,1,4)$, obtidas quando a superfície λ passa, sequencialmente, pelas curvas C_k's com $k = 1,2,3$. Assim, basta encontrarmos o termo geral das sequências (x_k) e (z_k), uma vez que $(y_k) = (x_k)$, conforme segue.

Sequência (x_k):

1 , 1
0 , 1 , 2

Obtemos, pelas variações de (x_k), uma sequência, (r_k), que consideraremos estacionária e cujos termos r_k são iguais a 1 para todo k. Logo, a sequência (x_k) é uma progressão aritmética de razão r igual a 1 e, portanto, seu termo geral é dado por $x_k = x_1 + (k-1).r = 0 + (k-1).1 = k-1$.
Sequência (z_k):

2
1 , 3
0 , 1 , 4

Obtemos, pelas variações de (z_k), um esquema em pirâmide que nos fornece outras duas sequências. A primeira sequência, no topo da pirâmide, (r_k), será considerada uma sequência estacionária e cujos elementos são iguais a 2, portanto $r_k = 2$ para todo k. A segunda sequência, (s_k), é uma progressão aritmética de razão r igual a 2 e, portanto, sua expressão é dada por $s_k = s_1 + (k-1).r = 1 + (k-1).2 = 2k-1$.

Por último, encontramos o termo geral para (z_k) obtendo seu k-ésimo termo somando-se à z_1 os $k-1$ primeiros termos da sequência anterior. Logo:

$$\begin{aligned}
z_k &= z_1 + \sum_{i=1}^{k-1} s_i \\
&= 0 + \sum_{i=1}^{k-1} (2i-1) \\
&= 2.\sum_{i=1}^{k-1} i - \sum_{i=1}^{k-1} 1 \\
&= 2.\frac{(k-1).((k-1)+1)}{2} - (k-1) \\
&= 2.\frac{(k-1).k)}{2} - (k-1) \\
&= (k-1).k - (k-1) = k^2 - 2k + 1.
\end{aligned}$$

Assim, as coordenadas de λ são $(F(n,k), G(n,k), H(n,k)) = (f_k(n), g_k(n), h_k(n))$ $= (x_k.\cos n, y_k.\operatorname{sen} n, z_k) = ((k-1).\cos n, (k-1).\operatorname{sen} n, k^2-2k+1)$, e seu gráfico pode ser observado por meio do programa Winplot conforme a Figura 13, onde os parâmetros n e k foram substituídos pelos respectivos parâmetros t e u do programa com $0 \leq t \leq 2\pi$ e $1 \leq u \leq 3$.

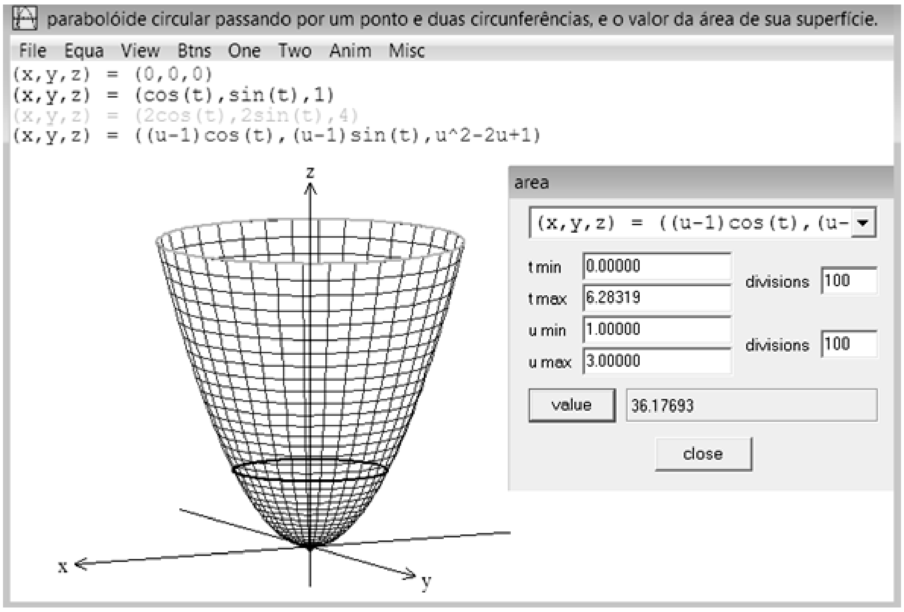


Fig.13.Parabolóide passando por um ponto e duas circunferên-
cias, e valor da área de sua superfície gerada pelo Winplot.

O programa Winplot gera um valor aproximado, $A_{aprox.} \approx 36,1769$, para a área da superfície do parabolóide em questão. Vamos, então, verificar o valor da área A da superfície do parabolóide λ obtido pela revolução da curva, em função do parâmetro k, $y = G(\frac{\pi}{2}, k) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}).(k-1) = 1.(k-1) = k-1$, em torno do eixo z, onde y representa o raio da circunferência interseção entre o plano $z = k^2 - 2k + 1$ e λ (para um dado k, $1 \leq k \leq 3$). Assim, tomando-se y como função de z, $y = f(z)$, pois $y = k - 1 = \sqrt{(k-1)^2} = \sqrt{k^2 - 2k + 1} = \sqrt{z}$, e y' como a derivada de y em relação à z, $y' = f'(z) = \frac{dy}{dz}$, teremos:

$$
\begin{aligned}
A &= 2\pi \int_0^4 y\,\sqrt{1+(y')^2}dz = 2\pi \int_0^4 f(z)\,\sqrt{1+(f'(z))^2}dz \\
&= 2\pi \int_0^4 \sqrt{z}.\sqrt{1+(\frac{dy}{dz})^2}dz = 2\pi \int_0^4 \sqrt{z}.\sqrt{1+\frac{dy^2}{dz^2}}dz \\
&= 2\pi \int_0^4 \sqrt{z}.\sqrt{\frac{dy^2+dz^2}{dz^2}}dz = 2\pi \int_1^3 \sqrt{k^2-2k+1}.\sqrt{dy^2+dz^2} \\
&= 2\pi \int_1^3 \sqrt{(k-1)^2}.\sqrt{dy^2+dz^2}.\frac{dk}{dk} = 2\pi \int_1^3 (k-1).\sqrt{\frac{dy^2+dz^2}{dk^2}}\,dk \\
&= 2\pi \int_1^3 (k-1).\sqrt{\frac{dy^2}{dk^2}+\frac{dz^2}{dk^2}}\,dk = 2\pi \int_1^3 (k-1).\sqrt{(\frac{dy}{dk})^2+(\frac{dz}{dk})^2}\,dk \\
&= 2\pi \int_1^3 (k-1).\sqrt{(y')^2+(z')^2}\,dk \\
&= 2\pi \int_1^3 (k-1).\sqrt{((k-1)')^2+((k^2-2k+1)')^2}\,dk
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_1^3 (k-1).\sqrt{(1)^2+(2k-2)^2}\,dk = 2\pi \int_1^3 (k-1).\sqrt{1+4(k-1)^2}\,dk \\ &= 2\pi \int_0^2 v.\sqrt{1+4v^2}\,dv\,(onde\,v = k-1\,e\,dv = dk) \\ &= \frac{2\pi}{8} \int_0^2 \sqrt{1+4v^2}.8v\,dv = \frac{\pi}{4} \int_1^{17} \sqrt{w}\,dw\,(onde\,w = 1+4v^2\,e\,dw = 8v\,dv) \\ &= \frac{\pi}{4} \int_1^{17} w^{\frac{1}{2}}\,dw = \frac{\pi}{4}[\frac{w^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}]_1^{17} = \frac{\pi}{4}.\frac{2}{3}[w^{\frac{3}{2}}]_1^{17} = \frac{\pi}{6}[17^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}] = \frac{\pi}{6}[\sqrt{17^3} - 1] \\ &= \frac{\pi}{6}[\sqrt{4913} - 1] \approx \frac{\pi}{6}[70,09279564 - 1] = \frac{\pi}{6}[69,09279564] \approx 36,1769. \end{aligned}$$

Vimos então que, neste caso, diferentemente do exemplo 6, o programa gera o valor exato da área da superfície em questão sendo que $|A - A_{aprox.}| = 0$, o que queríamos mostrar.

6.10 Exemplo 10

Finalmente, mostraremos como o programa Winplot gera uma região R do $\mathbb{R}^3$ compreendida entre duas superfícies, nos parâmetros $n, k \in \mathbb{R}$: o parabolóide $\lambda_1 : (4k \cos n,$ $4k \operatorname{sen} n\ ,\ k^2 + 30)$ e a superfície $\lambda_2 : (8k \cos n, 8k \operatorname{sen} n, 8 \cos k)$.

Observe que, agora, precisamos de um terceiro parâmetro, $w \in \mathbb{R}$, que nos leve de λ_1 à λ_2. Assim, as coordenadas dos pontos da região R necessariamente serão funções F, G e H dependentes de três parâmetros, isto é, $R : (F(n, k, w), G(n, k, w), H(n, k, w))$.

Note, também, que as superfícies em questão são da forma $\lambda_w : (f_w(n, k)$, $g_w(n, k)$, $h_w(n, k))$, com $w = 1, 2$, onde $f_w(n, k) = x_w.k \cos n$, $g_w(n, k) = y_w.k \operatorname{sen} n$ e $h_w(n, k) = z_w^{[2]}. \cos k + z_w^{[1]}.k^2 + z_w^{[0]}$ são as funções coordenadas de seus pontos, sendo x_w, y_w, $z_w^{[0]}$, $z_w^{[1]}$ e $z_w^{[2]}$ os termos gerais das sequências $(x_w), (y_w) : (4, 8)$, $(z_w^{[0]}) : (30, 0)$, $(z_w^{[1]}) : (1, 0)$ e $(z_w^{[2]}) : (0, 8)$ respectivamente.

Facilmente podemos encontrar os termos gerais destas sequências, uma vez que em cada uma delas dispomos de apenas dois termos, cuja diferença nos fornece a razão de uma progressão aritimética.

Assim sendo, a sequência (x_w) tem razão $r = 4$ e $x_1 = 4$, logo $x_w = 4 + (w-1).r = 4 + (w-1).4 = 4 + 4w - 4 = 4w$. A sequência (y_w) é igual a (x_w), logo $y_w = 4w$. A sequência $(z_w^{[0]})$ é uma progressão aritimética de razão $r = -30$ e $z_1^{[0]} = 30$, logo $z_w^{[0]} = 30 + (w-1).r = 30 + (w-1).(-30) = 60 - 30w$. A sequência $(z_w^{[1]})$ é uma progressão aritimética de razão $r = -1$ e $z_1^{[1]} = 1$, logo $z_w^{[1]} = 1+(w-1).r = 1+(w-1).(-1) = 2-w$. E, finalmente, a sequência $(z_w^{[2]})$ é uma progressão aritimética de razão $r = 8$ e $z_1^{[2]} = 0$, logo $z_w^{[2]} = 0 + (w-1).r = (w-1).8 = 8w - 8$.

Portanto, quando variamos w dentro do intervalo $I = [1, 2]$ estamos encontrando as equações de uma infinidade de superfícies λ_w que, em sua totalidade, compõem a região R.

Logo, podemos afirmar que $(F(n,k,w), G(n,k,w), H(n,k,w)) = (f_w(n,k), g_w(n,k), h_w(n,k)) = (4w.k\cos n, 4w.k\,\text{sen}\, n, (8w-8)\cos k + (2-w)k^2 + 60 - 30w)$ são as coordenadas dos pontos da região R, conforme mostra a Figura 14, onde o programa Winplot gera a evolução entre as superfícies λ_1 e λ_2 quando w, no Winplot representado pela letra A, varia de 1 a 2. Perceba, também, que o programa Winplot não gera prontamente toda a região R desejada, mas sim uma animação entre as superfícies pré-definidas quando variamos o parâmetro w. Assim, temos a impressão de que as superfícies λ_1 e λ_2 estão movendo-se uma em direção a outra, quando o que nos interessa é a região R entre as superfícies.

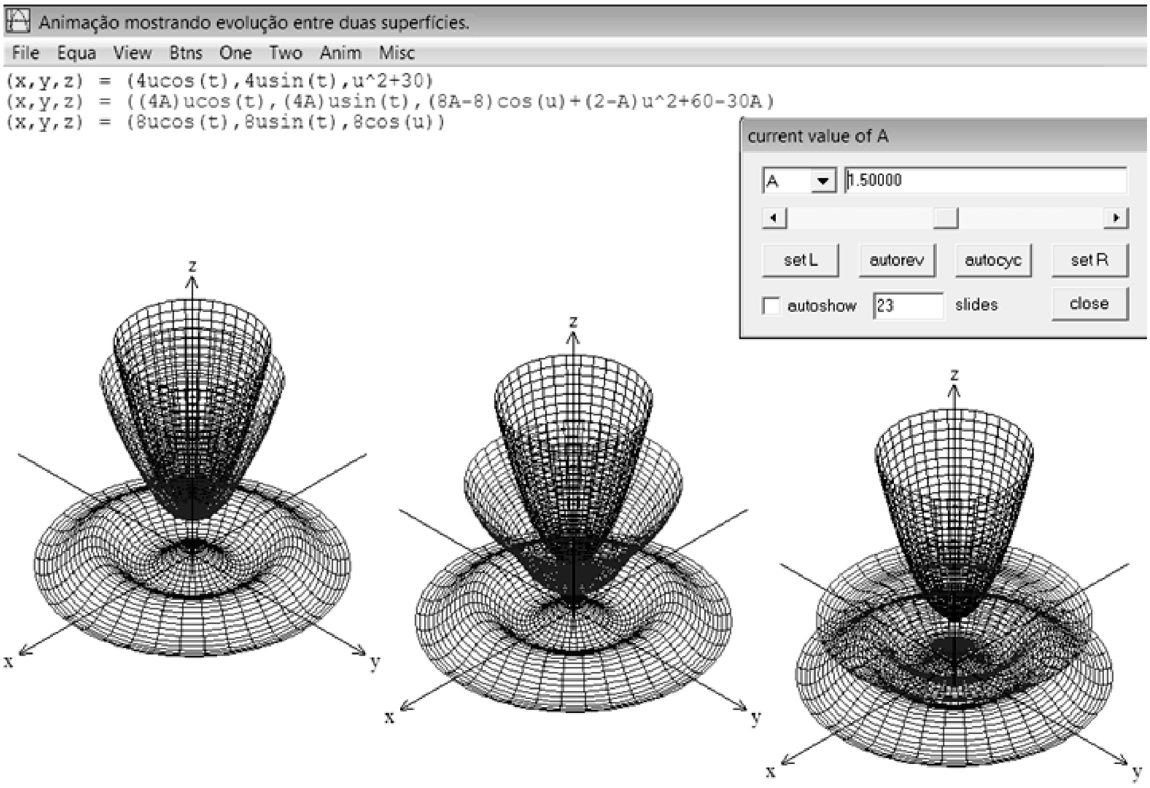


Fig.14. Quadros de animação mostrando a região R do $\mathbb{R}^3$ gerada quando variamos o parâmetro real A, de 1 a 2, entre λ_1 e λ_2.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho pudemos visualizar, por meio do programa computacional Winplot, curvas interligando pontos no plano e no espaço, superfícies passando por curvas dadas e regiões do espaço entre duas superfícies dadas. Os elementos geométricos aqui estudados, curvas, superfícies e regiões do espaço, foram obtidos de forma orientada, ou seja, de modo a passar sequencialmente pelos pontos, curvas e superfícies dadas no início de cada exemplo. A obtenção das funções paramétricas coordenadas de tais elementos fora feita com base na sequência de cada coordenada dos pontos representativos dos elementos definidos no início de cada exemplo.

As sequências obtidas em cada coordenada dos n elementos definidos no início de cada exemplo formam progressões aritméticas de, no máximo, (n-1)-ésima ordem, que por diferenciação de seus termos, geram progressões aritméticas de menor ordem. Uma vez obtida a equação da progressão aritmética da primeira ordem, vimos que é possível obter a equação do n-ésimo termo da progressão aritmética de segunda ordem simplesmente somando-se ao seu primeiro termo o somatório dos n-1 primeiros termos da progressão aritmética de primeira ordem correspondente. As equações das progressões aritméticas de ordem maior que dois foram analogamente obtidas em relação às progressões aritméticas de ordem imediatamente inferior. Assim, vimos que, de posse das equações paramétricas obtidas para cada coordenada dos pontos dos elementos pré-definidos em cada exemplo, pudemos obter as curvas, superfícies e regiões que as continham, visualizando-se o resultado por meio de um programa gráfico computacional, o Winplot.

Vimos também alguns recursos do programa Winplot, no qual fora possível representarmos graficamente um elemento geométrico a partir de suas funções paramétricas coordenadas, além de verificarmos alguns resultados obtidos como pontos de máximo e mínimo, área da superfície e volume de sólidos geométricos, confirmando-se, assim, os resultados obtidos em nossos cálculos. Vê-se, portanto, que os programas computacionais aliados ao estudo da matemática facilitam seu entendimento além dos aportes teóricos existentes, ampliando definitivamente os limites técnicos de compreensão desta ciência, que a muitos fascina.

REFERÊNCIAS

Fundamentos de Cálculo, Coleção PROFMAT, SBM, em preparação.

Geometria Analítica, Coleção PROFMAT, SBM, em preparação.

LIMA, Elon Lages. *Análise real volume 1. Funções de uma variável*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

Matemática Discreta, Coleção PROFMAT, SBM, em preparação.

Números e Funções Reais, Coleção PROFMAT, SBM, em preparação.

STEWART, James. *Cálculo, Volume I*. Tradução técnica: Antônio Carlos Moretti, Antônio Carlos Gilli Martins. São Paulo: Cengage Learning, 2011.