UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

FRANCISCO DELMAR PINHEIRO DE SOUSA

PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

JUAZEIRO DO NORTE
2014

FRANCISCO DELMAR PINHEIRO DE SOUSA

PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Paulo César Cavalcante de Oliveira.

JUAZEIRO DO NORTE

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

S696p Sousa, Francisco Delmar Pinheiro de
Proposta de atividades para o ensino de trigonometria / Francisco Delmar Pinheiro de Sousa. – 2014.
59 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2014.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Ms. Paulo César Cavalcante de Oliveira.

1. Trigonometria. 2. Práticas pedagógicas. 3. Aprendizagem – Teoria, métodos, etc. I. Título.

CDD 516.24

FRANCISCO DELMAR PINHEIRO DE SOUSA

PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 15 / 05 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Paulo César Cavalcanti de Oliveira

Prof. Ms. Paulo César Cavalcante de Oliveira (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Maria Silvana Alcantara Costa

Profa. Dra. Maria Silvana Alcantara Costa

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Francisca Leidmar Josué Vieira

Profa. Ms. Francisca Leidmar Josué Vieira

Universidade Regional do Cariri (URCA)

Aos meus pais (Delmiro e Diomar).

AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida.

À Glória Maria e aos meus filhos Dalila e Delmar Filho, pelo amor e paciência.

Aos meus pais Delmiro e Diomar pelo esforço que tiveram para educar seus filhos em condições tão adversas.

Aos meus irmãos Maria do Socorro, Socorro Maria, Edmar, Iramar e Dalmy pelo carinho e apoio.

Aos meus colegas de PROFMAT, em especial ao grande amigo Jackson Idernando.

Aos professores do Pólo de Juazeiro do Norte.

Ao meu orientador prof. Paulo César que sempre me atendeu prontamente.

À **Capes** pelo apoio financeiro para realização deste trabalho

RESUMO

Este trabalho relata a experiência de aplicação em sala de aula de uma sequência de atividades de trigonometria com destaque para a construção, estudo e utilização de um ciclo trigonométrico ou prancha trigonométrica numa turma de 2° ano Técnico em Comércio (em nível médio) de uma escola profissional da rede estadual de ensino do estado do Ceará. As atividades aplicadas constam do estudo de semelhança de triângulos, das razões trigonométricas no triângulo retângulo e das funções circulares seno, cosseno e tangente facilitadas por sua vez, pelo manuseio da prancha trigonométrica. A avaliação dos resultados do trabalho se dá através do acompanhamento das facilidades/dificuldades encontradas pelos alunos na confecção dos materiais e na resolução das atividades propostas.

Palavras-chaves: Práticas trigonométricas. Trigonometria e Ciclo trigonométrico.

ABSTRACT

This paper reports the experience of the application in the classroom of a sequence of activities trigonometry with emphasis on the construction, study and use of a trigonometric trigonometric cycle or board in a class of 2nd year in Technical Trading (medium level) a professional state school education in the state of Ceará. The activities listed in the applied study of similar triangles, the trigonometric ratios in right triangle and circular functions sine, cosine and tangent facilitated in turn by the management of trigonometric board. The evaluation of the results of the work is through the monitoring of the facilities/difficulties encountered by students in the preparation of materials and the resolution of the proposed activities.

Keywords: Practice trigonometric. Trigonometry and Trigonometric cycle.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Justificativa do tema

As dificuldades encontradas no ensino da matemática tem raízes históricas, provenientes de um modelo tradicional, dando ênfase, quase que exclusivamente à aplicação de fórmulas e a demonstrações puramente teóricas e distante da realidade.

Com relação ao ensino da Trigonometria, essas dificuldades são ainda maiores devido à origem geométrica da mesma, pois a Geometria ainda é um assunto pouco explorado no ensino fundamental.

Foi motivado pela necessidade de se elaborar aulas mais dinâmicas (além das aulas expositivas) que foi elaborada essa proposta de atividades para o ensino de Trigonometria priorizando como metodologia:

- o trabalho em grupo, a confecção de material concreto para servir como suporte pedagógico;
- a abordagem de “pré-requisitos” principalmente tópicos de Geometria Plana que servem de base para a Trigonometria.

1.2 Estrutura e organização do trabalho

Além da presente introdução, os capítulos deste trabalho encontram-se assim estruturados:

No segundo capítulo é feita uma abordagem das principais teorias da aprendizagem com destaque para a Teoria da Aprendizagem significativa de David Ausubel.

O terceiro capítulo é destinado ao ensino da Trigonometria enfatizando a sua origem geométrica, as relações no triângulo retângulo e suas principais funções de acordo com os PCNs.

O último capítulo é voltado à aplicação e avaliação de uma sequência de atividades que buscam facilitar a aprendizagem deste tema usando, principalmente, como aparato pedagógico a prancha trigonométrica.

2 PRINCIPAIS TEORIAS DA APRENDIZAGEM

Neste capítulo, abordaremos as principais teorias da aprendizagem que darão suporte a nossa pesquisa, dando ênfase à teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel pois é nesta que o presente trabalho (intervenção pedagógica) se fundamenta para traçar uma sequência de atividades levando em consideração principalmente os conhecimentos prévios dos alunos, trabalhando com materiais manipuláveis sempre que possível e fazendo uso desses materiais e do conhecimento adquirido em atividade prática.

2.1 Teoria sócio-interacionista de Vygotsky

Vigotski ao analisar os fenômenos da linguagem e do pensamento, busca compreendê-los dentro do processo sócio-histórico como "internalização das atividades socialmente enraizadas e historicamente desenvolvidas". No processo de internalização é fundamental a interferência do outro - a mãe, os companheiros de brincadeira e estudo, os professores - para que os conceitos sejam construídos e sofram constantes transformações.

Para explicar as operações superiores, Vigotski usa o conceito de *mediação*, segundo o qual a relação do indivíduo com o mundo não é direta, mas mediada pelos sistemas simbólicos. A interferência do outro - por exemplo, a mãe - é fundamental para a aprendizagem dos signos socialmente elaborados.

Além do nível de *desenvolvimento real* da criança, Vigotski também define um estágio anterior chamado *de zona de desenvolvimento proximal* (ou *potencial*), caracterizado pela capacidade de resolver problemas sob a estimulação de um adulto ou em colaboração com os colegas. A ênfase nesse estado potencial, em que uma função ainda não amadureceu, mas se encontra em processo, é de grande valia para o educador, porque o auxilia a enfrentar mais eficazmente os desafios da aprendizagem.

Além disso, a fase de colaboração traz a vantagem de estimular o trabalho coletivo, necessário para transformar uma ação interpessoal, portanto social, em um processo intrapessoal, isto é, de internalização. A importância dessa passagem é alcançar a independência intelectual e afetiva, já que a discussão constitui uma etapa para o desenvolvimento e a reflexão.

Araújo (2009), analisando a teoria criada pelo autor Vygotsky, diz que a aprendizagem na sala de aula é resultado de atividades que proporcionam interação, cooperação social, atividades instrumentais e práticas. Filatro (2008) enfoca que as atividades em sala de aula devam ser colaborativas, possibilitando que o aluno vá além do que seria capaz sozinho.

Nesse sentido, o professor deve mediar a aprendizagem utilizando estratégias que levem o aluno a tornar-se independente, preparando-os para um espaço de diálogo e interação. Essa teoria permite trabalhar com grupos e técnicas para motivar, facilitar a aprendizagem e diminuir a sensação de solidão do aluno. Além de permitir que ele construa seu conhecimento em grupo com participação ativa e a cooperação de todos os envolvidos, oferece oportunidades para discussão, reflexão e o encorajamento para arriscar e descobrir em grupo. Possibilita criar ambientes de participação, colaboração e desafiador. Considera o aluno inserido em uma sociedade e facilita a interação dos indivíduos.

2.2 Construtivismo de Jean Piaget

Segundo Piaget, o processo dinâmico da inteligência e da afetividade supõe uma estrutura concebida como uma totalidade em equilíbrio. À medida que a influência do meio altera esse equilíbrio, a inteligência, que exerce função adaptativa por excelência, re-estabelece a autorregulação.

As mudanças mais significativas ocorrem na passagem de um estágio para outro, o que Piaget analisa ao descrever a construção do real na criança nas faces do processo do desenvolvimento mental. A passagem de um estágio para o outro é possível pelo mecanismo de *organização* e *adaptação*. A adaptação por sua vez, supõe dois processos interligados, a *assimilação* e *acomodação*. Pela assimilação, a realidade externa é interpretada Poá meio de algum de significado já existente na organização cognitiva do indivíduo que a acomodação, ao mesmo tempo que a acomodação realiza a alteração desses significados já existentes.

As mudanças de um estágio para outro ocorrem quando se desfaz o equilíbrio instável e busca-se nova equilibração. Assim, os quatro estágios - sensório-motor, intuitivo, das operações concretas a das operações abstratas _ representam o desenvolvimento:

- da inteligência (da lógica), que evolui da simples motricidade do bebê até o pensamento abstrato do adolescente;
- da afetividade, que parte do egocentrismo infantil até atingir a reciprocidade e a cooperação, típicas da vida adulta;
- da consciência moral, que resulta de uma evolução que parte da ausência de leis, passa aceitação da norma externa até atingir a autonomia ou capacidade de autodeterminação, que indica a superação da moral infantil.

Conforme Moreira (2009), na teoria de Piaget, só há aprendizagem quando o esquema de assimilação sofre acomodação. Portanto, para modificar os esquemas de assimilação é necessário propor atividades desafiadoras que provoquem desequilíbrios e re-equilibrações sucessivas, promovendo a descoberta e a construção do conhecimento.

Nesse sentido, ainda de acordo com MOREIRA o papel do professor é criar situações compatíveis com o nível de desenvolvimento da pessoa, provocar o desequilíbrio no organismo (mente) para que o indivíduo, buscando o re-equilíbrio e tendo a oportunidade de agir e interagir (trabalhos práticos), se re-estruture e aprenda. Estando atento que, para um ensino eficiente, a argumentação do professor deve se relacionar com os esquemas de assimilação do aluno. O professor não pode ignorar os esquemas do aluno e simplesmente adotar os seus esquemas de assimilação, e quando houver situações que gere grande desequilíbrio, o professor deve adotar passos intermediários para adequá-la as estruturas do aluno.

Para Piaget, a pessoa a todo o momento interage com a realidade, operando ativamente objetos e pessoas. O conhecimento é construído por informações advindas da interação com o ambiente, na medida em que o conhecimento não é concebido apenas como sendo descoberto espontaneamente, nem transmitido de forma mecânica pelo meio exterior, mas como resultado de uma interação na qual o sujeito é sempre um elemento ativo na busca ativa de compreender o mundo que o cerca.

Entende-se, então, de acordo com essa teoria, que o desenvolvimento cognitivo é resultado de situações e experiências desconhecidas advindas da interação com o meio, onde o sujeito procura compreender e resolver as interrogações. Com isso, o aluno exerce um papel ativo e constrói seu conhecimento, sob orientação do professor, buscando informações, propondo soluções, confrontando-as com as de seus colegas, discutindo e defendendo-as.

2.3 Teoria de aprendizagem significativa de Ausubel

Buscando melhorar o processo de ensino aprendizagem destacamos a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel, na qual afirma que: “o fator mais importante que influi na aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe. Isso deve ser sempre averiguado e o ensino depende desses dados” (Ausubel, Novak e Hanesian, 1983).

Assim, a definição de conteúdo deve ser feita por meio de uma série hierárquica (em ordem crescente de inclusão). Ausubel define a aprendizagem como uma integração entre o novo conhecimento e os conhecimentos já existentes na organização cognitiva de quem aprende. Isto é, o conhecimento novo, para ser aprendido, precisa estar ancorado em conceitos prévios do aluno, proporcionando, dessa forma, um efetivo aprendizado. Esses conceitos são denominados *subfsunçores* e esse tipo de aprendizagem é classificado como *aprendizagem significativa*.

Nessa Teoria são observadas a diferença entre um novo conteúdo e o conteúdo já conhecido pelo aluno. Ausubel denomina esses dois conceitos de reconciliação integrativa e diferenciação progressiva, ocorrendo em todos os instantes da aprendizagem. Brigheenti (2003) afirma que:

> esses dois conceitos relevantes-reconciliação integrativa e diferenciação progressiva são fortalecidos e facilitados se, antes de abordar o assunto, o professor utilizar a estratégia de estabelecer a conexão entre o que o aluno já sabe e o novo conhecimento, utilizando conceitos organizadores da estrutura cognitiva. (p.24)

Para Ausubel, os fatores essenciais para o aprendizado são:

1.Disposição do aprendiz para aprender;

2.Material potencialmente significativo;

3.Existência dos subsunçores na estrutura cognitiva do aprendiz.

Numa visão crítica da aprendizagem significativa Moreira (2000) afirma que "na sociedade contemporânea não basta adquirir novos conhecimentos de maneira significativa, é preciso adquiri-los criticamente". Isto é, não basta ao aluno aprender, é preciso que ele saiba se aquilo serve para ele ou não. E se serve, como ou o quanto serve. Moreira elenca os oito princípios facilitadores da aprendizagem significativa:

1. Princípio da interação social e do questionamento

Ensinar/aprender perguntas ao invés de respostas. A interação social é indispensável para a concretização de um episódio de ensino. Tal episódio ocorre quando professor e aluno compartilham significados em relação aos materiais educativos do currículo. O compartilhar significado resulta da negociação de significados entre aluno e professor. Mas essa negociação deve envolver uma permanente troca de perguntas ao invés de respostas. Um ensino baseado em respostas transmitidas primeiro do professor para o aluno nas aulas e, depois, do aluno para o professor nas provas, não é crítica e tende a gerar aprendizagem, em geral, mecânica.

2. Princípio da não centralidade no livro texto

O livro texto simboliza aquela autoridade de onde "emana" o conhecimento. Professores e alunos se apoiam em demasia no livro de texto. Mas o aluno não desenvolveu ainda competências para estudar diretamente do livro texto. Torna-se assim, necessário aprender a partir de diversos materiais como artigos científicos, contos, poesias, crônicas, relatos, obras de arte e tantos outros materiais, e porque não, a Internet e a História da Matemática.

3. Princípio do aprendiz como perceptor/representador

Na teoria da aprendizagem significativa argumenta-se que a aprendizagem é receptiva, isto é, aquela em que o novo conhecimento é recebido pelo aprendiz, sem necessidade de descobri-lo, é um mecanismo humano por excelência para assimilar (reconstruir internamente) a informação (Ausubel et al., 1978, 1980, 1983; Ausubel, 2000), porém ela não implica passividade; ao contrário, é um processo dinâmico de interação, diferenciação e integração entre conhecimentos novos e pré-existentes.

4. Princípio do conhecimento como linguagem

A linguagem é o meio pelo qual percebemos e representamos a realidade. Uma "disciplina" é uma maneira de ver o mundo, um modo de conhecer, e tudo o que é conhecido nessa "disciplina" é inseparável dos símbolos (tipicamente palavras) em que é codificado o conhecimento nela produzido. Ensinar Biologia, Matemática, História, Física, Literatura ou qualquer outra "matéria" é, em última análise, ensinar uma linguagem, um jeito de falar e, consequentemente, um modo de ver o mundo. Claro está que aprender uma nova linguagem implica novas possibilidades de percepção. A tão propalada ciência é uma extensão, um refinamento da habilidade humana de perceber o mundo. Aprendê-la implica aprender sua linguagem e, em consequência, falar e pensar diferentemente sobre o mundo.

5. Princípio da consciência semântica

O significado está nas pessoas, não nas palavras. Sejam quais forem os significados que tenham as palavras, eles foram atribuídos a elas pelas pessoas. Contudo, as pessoas não podem dar às palavras significados que estejam além de sua experiência. Observa-se aí, outra vez, a importância do conhecimento prévio, i.e., dos significados prévios na aquisição de novos significados. Quando o aprendiz não tem condições, ou não quer atribuir significados às palavras, a aprendizagem é mecânica, não significativa.

6. Princípio da aprendizagem pelo erro

Aprendemos corrigindo erros. A ideia aqui é a de que o ser humano erra o tempo todo. É da natureza humana errar. E aprende corrigindo seus erros. Não há nada errado em errar. Errado é pensar que a certeza existe, que a verdade é absoluta, que o conhecimento é permanente.

7. Princípio da desaprendizagem

Selecionar e desaprender o que não é relevante. Nesse processo, como já foi dito, o novo conhecimento interage com o conhecimento prévio e, de certa forma, ancora-se nele. Através dessa interação o significado lógico dos materiais educativos se transforma em significado psicológico para o aprendiz. Tal mecanismo, que Ausubel chama de assimilação é o mecanismo humano por excelência, para adquirir a vasta quantidade de informações que constitui qualquer corpo de conhecimento.

8. Princípio da incerteza do conhecimento

Perguntas são instrumentos de percepção, enquanto definições e metáforas são instrumentos para pensar. Definições, perguntas e metáforas são três dos mais potentes elementos com os quais a linguagem humana constrói uma visão de mundo (Postman, 1996, p. 175, apud Moreira) [24]. A aprendizagem significativa destes três elementos só será crítica, quando o aprendiz perceber que as definições são invenções, ou criações humanas, que tudo o que sabemos tem origem em perguntas e que todo nosso conhecimento é metafórico.

3 O ENSINO DA TRIGONOMETRIA

Neste capítulo apresentaremos os fundamentos necessários para a aprendizagem da trigonometria.

3.1 Teorema de Tales

Teorema de Tales : Um feixe de retas paralelas, cortado por duas transversais, forma sobre elas segmentos correspondentes proporcionais.

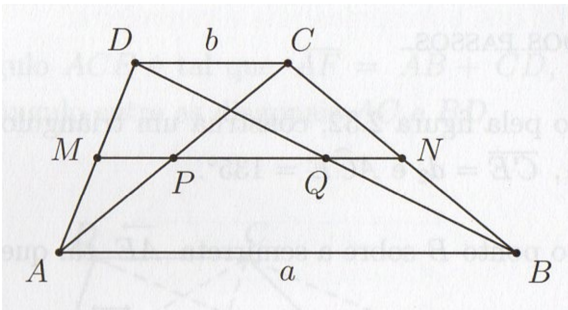
Uma possível demonstração do Teorema de Tales é baseada no Teorema da base média de um trapézio que tem como enunciado:

Teorema da base média de um trapézio: Seja ABCD um trapézio de bases AB e CD e lados não paralelos AD e BC. Sejam, ainda, M e N os pontos médios dos lados não paralelos AD e BC, e P e Q os pontos médios das diagonais AC e BD (figura 1). Então:

a) M, N, P e Q são colineares e $\overline{MN} \,//\, \overline{AB}$, $\overline{MN} \,//\, \overline{CD}$

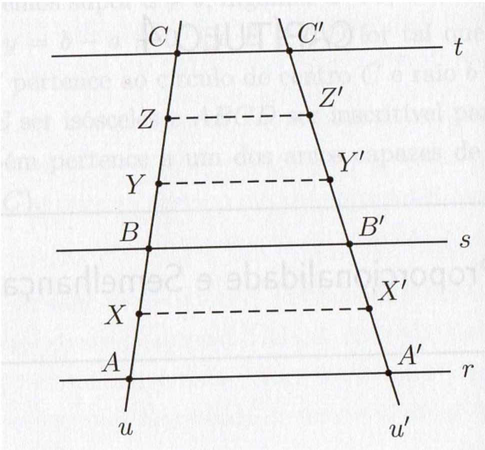
b) $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD})$ e $\overline{PQ} = \frac{1}{2}|\overline{AB} - \overline{CD}|$.

Figura 1: Base média do trapézio (Antonio Caminha - Matemática Elementar)



Demonstração do Teorema de Tales: Considerando no plano as retas paralelas r, s e t (figura 2) e as retas transversais u e u', a primeira intersectando r, s e t respectivamente nos pontos A, B e C, e a segunda intersectando r, s e t respectivamente em A', B' e C'.

Figura 2: Teorema de Tales (Antonio Caminha - Matemática Elementar)



Se $\overline{AB} = \overline{BC}$ pelo teorema da base média de um trapézio, temos que $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$, então $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 1$ e $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = 1$

Supondo que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ seja um número racional, digamos $\frac{2}{3}$, dividindo, então, os segmentos AB e BC respectivamente em duas e três partes iguais, obtendo pontos pontos X, Y e Z em u, tais que

$$\overline{AX} = \overline{XB} = \overline{BY} = \overline{YZ} = \overline{ZC}.$$

Traçando por X,Y e Z paralelas às retas r, s e t, as quais intersectam u' respectivamente em X', Y'e Z', então mais três aplicações do teorema da base média de um trapézio garantem que

$$\overline{A'X'} = \overline{X'B'} = \overline{B'Y'} = \overline{Y'Z'} = \overline{Z'C'}$$

e, daí, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{2}{3}$.

Usando o mesmo raciocínio, supondo que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n}$ com $m, n \in \mathbb{N}$ temos que

$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{m}{n}$.

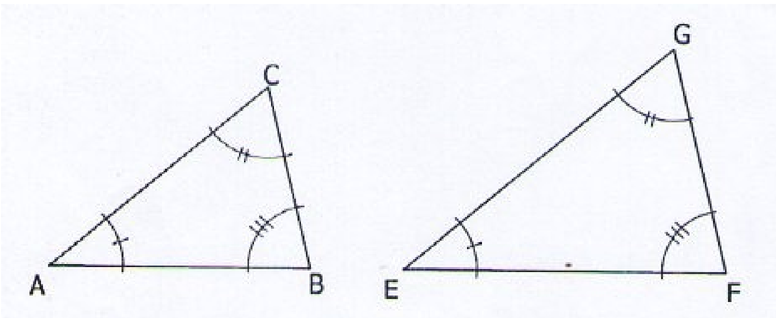
De outra forma temos a relação $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$

A demonstração acima foi realizada levando em consideração que os segmentos *AB* e *CD* são comensuráveis, ou seja, existe uma unidade de medida da qual os segmentos *AB* e *CD* são múltiplos, entretanto o teorema continua válido quando estes segmentos forem incomensuráveis.

3.2 Semelhança de triângulos - a base de sustentação da trigonometria

Definição: Dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.

Figura 3: Triângulos semelhantes (Elementos de Geometria)



$$\Delta ABC \sim \Delta EFG \Rightarrow \widehat{A}=\widehat{E}, \widehat{B}=\widehat{F}, \widehat{C}=\widehat{G} \text{ e } \frac{AB}{EF}=\frac{BC}{FG}=\frac{AC}{EG}.$$

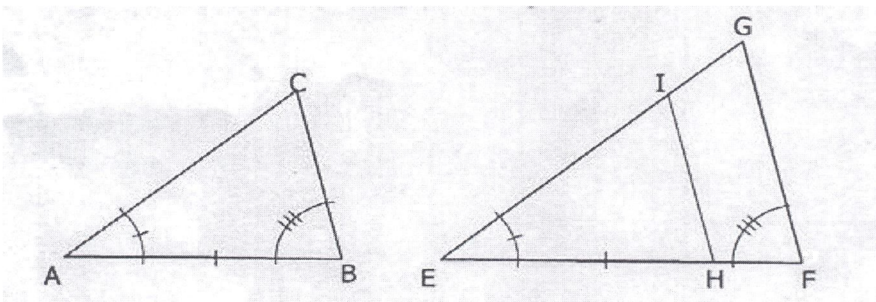
Casos de semelhança de triângulos

1º caso (ângulo-ângulo)

Dados dois triângulos ABC e EFG, se $\hat{A} = \hat{E}$ e $\widehat{B}=\widehat{F}$, então os triângulos são semelhantes.

Prova:

Figura 4: Caso de semelhança ângulo – ângulo (Elementos de Geometria)



Como a soma dos ângulos de um triângulo é 180º, então a igualdade dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{E}$ e dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{F}$ acarreta na igualdade dos ângulos $\hat{C} = \hat{G}$. Resta provar que os lados correspondentes são proporcionais.

Para isto consideremos no segmento de reta EF o ponto H de modo que EH = AB. Pelo ponto H tracemos uma reta paralela a FG. Esta corta o segmento de reta EG num ponto I, formando um triângulo EHI que é congruente ao triângulo ABC (já que $\hat{A} = \hat{E}$, AB = EH e $\widehat{B}=\widehat{F}=E\widehat{H}I$, sendo que esta última igualdade deve-se ao paralelismo de IH e GF). Logo, AB = EH e AC = EI.

Como HI é paralela a FG cortadas pelas retas EF e EG então determinam, pelo Teorema de Tales, segmentos proporcionais, ou seja, $\frac{EH}{EF}=\frac{EI}{EG}$.

Como AB = EH e AC = EI, então substituindo na igualdade acima temos $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG}$

De maneira análoga demonstra-se que $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}$

2º caso (lado - ângulo – lado).

Se, em dois triângulos ABC e EFG tem-se $\hat{A} = \hat{E}$ e $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG}$ então os triângulos são semelhantes.

Prova:

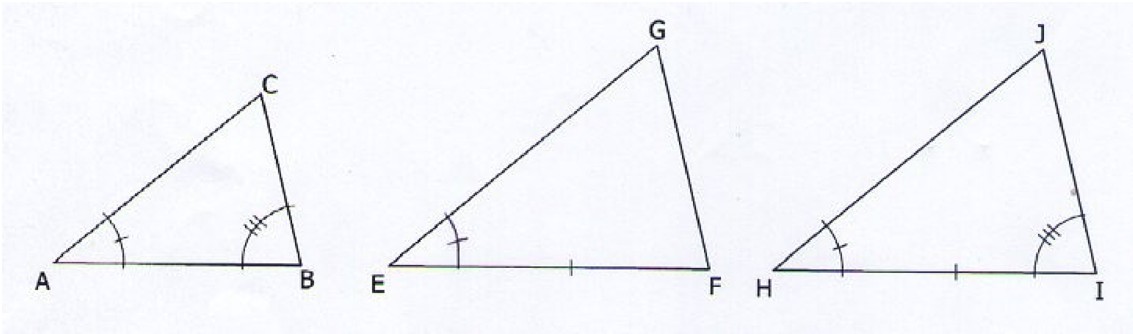
Construir um triângulo HIJ que tenha HI = EF, $\hat{H} = \hat{A}$ e $\hat{I} = \widehat{B}$. Logo pelo caso anterior (ângulo-ângulo) temos que $\Delta ABC \sim \Delta HIJ$. Portanto, os lados correspondentes são proporcionais

$\frac{AB}{HI} = \frac{AC}{HJ}$ mas HI = EF então $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{HJ}$. Porém pela hipótese sabemos que $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG}$, portanto HJ = EG

Portanto, $\Delta EFG = \Delta HIJ$ (EG = HJ, $\hat{E} = \hat{H}$ e HI = EF). Caso de congruência de triângulos -

LAL.

Figura 5: Caso de semelhança lado – ângulo – lado (Elementos de Geometria)



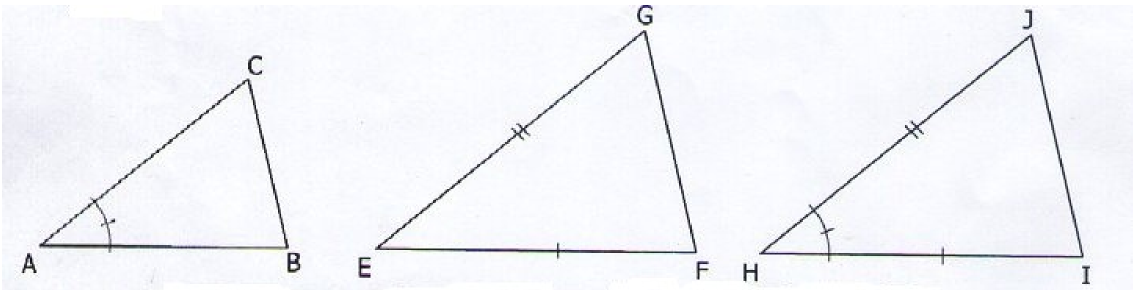
Como $\Delta ABC \sim \Delta HIJ$ e $\Delta EFG = \Delta HIJ$ segue que $\Delta ABC \sim \Delta EFG$.

3º caso (lado – lado – lado).

Se, em dois triângulos ABC e EFG tem-se $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{AC}{EG}$ então os triângulos são semelhantes.

Prova:

Figura 6: Caso de semelhança lado – lado – lado (Elementos de Geometria)



Consideremos um triângulo HIJ tal que $\hat{H} = \hat{A}$, HI = EF e HJ = EG.

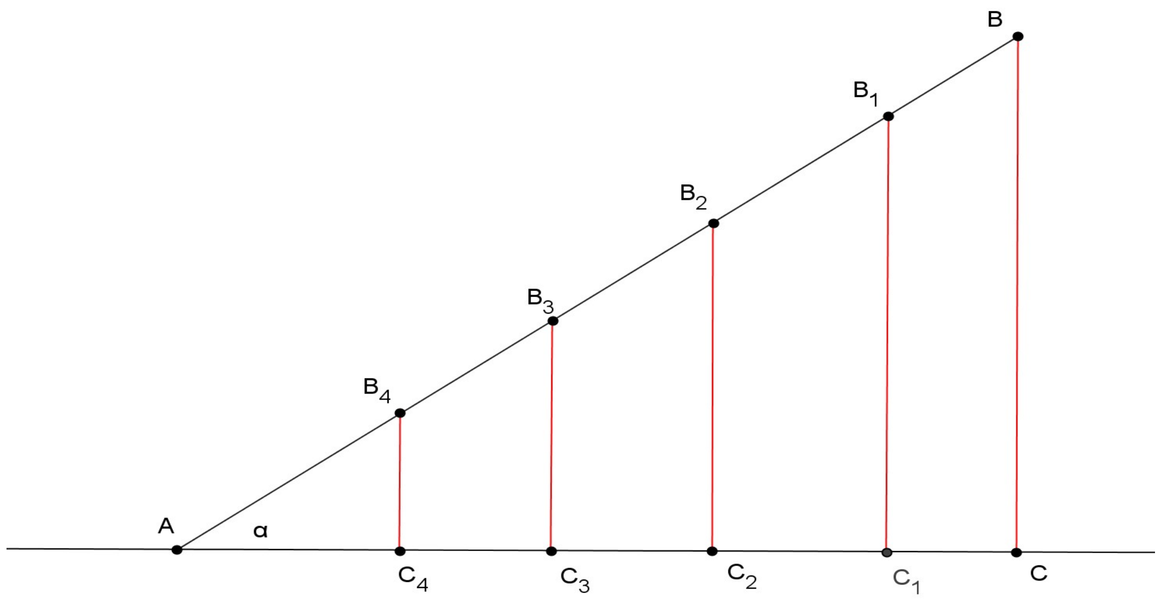
Logo, segue-se da hipótese que $\frac{AB}{HI} = \frac{AC}{HJ}$ e como $\hat{H} = \hat{A}$ segue pelo caso anterior que $\Delta ABC \sim \Delta HIJ$. Portanto, lados correspondentes são proporcionais, ou seja, $\frac{AB}{HI} = \frac{BC}{IJ}$ (1)

Mas da hipótese temos que $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}$ mas EF = HI (por construção), então $\frac{AB}{HI} = \frac{BC}{FG}$. Comparando esta última expressão com (1) temos que IJ = FG.

Logo, $\Delta EFG = \Delta HIJ$ (EF = HI, construção, FG = IJ, provado acima e GE = JH ,construção). Como $\Delta ABC \sim \Delta HIJ$ temos que $\Delta ABC \sim \Delta EFG$.

Observando que todos os triângulos retângulos com um ângulo agudo de mesma medida (congruente) são semelhantes, sendo este resultado direto do caso de semelhança ângulo-ângulo, portanto esses triângulos apresentam o mesmo valor para as razões entre seus lados correspondentes desta forma tem-se:

Figura 7: Triângulos retângulos semelhantes (Dante, 1ºano p.190)



$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C_1} = \frac{AB_2}{B_2C_2} = \frac{AB_3}{B_3C_3} = \frac{AB_4}{B_4C_4}.$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{AB_2}{AC_2} = \frac{AB_3}{AC_3} = \frac{AB_4}{AC_4}.$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AC_1}{B_1C_1} = \frac{AC_2}{B_2C_2} = \frac{AC_3}{B_3C_3} = \frac{AC_4}{B_4C_4}.$$

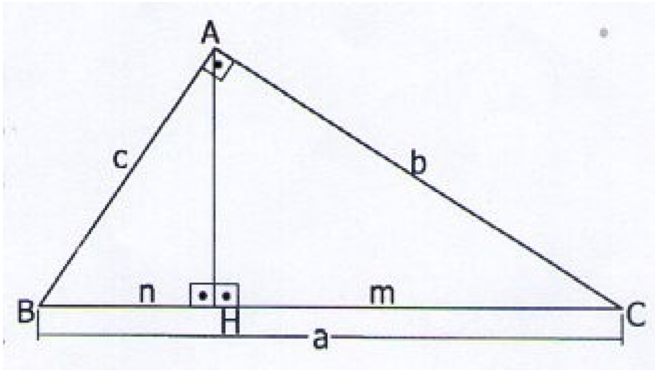
3.3 Teorema de Pitágoras

Em todo triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

Prova:

Seja ABC um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice A. Traçando a altura AH do vértice A ao lado BC. Seja BC = a, AC = b, AB = c, AH = h, CH = m e BH = n. Como AH é perpendicular a BC, então os triângulos HBA e HAC são retângulos.

Figura 8: Relações métricas no triângulo retângulo (Elementos de Geometria)



Como $\widehat{B} + \hat{C} = 90°$ e $\widehat{B}$ + BÂH = 90° então BÂH = Ĉ. Como também $\widehat{B} + \hat{C} = 90°$ e Ĉ + HÂC = 90° então B = HÂC.

Mostrando pelo caso ângulo – ângulo que os triângulos ABC, HBA e HAC são semelhantes entre si, ou seja, ΔABC ~ ΔHBA ~ ΔHAC.

De ΔABC ~ ΔHBA, temos:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{n} \Rightarrow c^2 = a.c.$$

De ΔABC ~ ΔHAC, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} = \frac{c}{h} \Rightarrow b^2 = a.m.$$

De ΔHBA ~ ΔHAC, temos:

$$\frac{b}{c} = \frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow h^2 = m.n.$$

Considerando um triângulo ABC retângulo em A. Devemos mostrar que $a^2 + b^2 = c^2$.

Na proposição anterior sendo ΔABC ~ ΔHBA ~ ΔHAC e portanto $b^2 = a.m$ e $c^2 = a.c$. Somando membro a membro as duas expressões temos que $b^2 + c^2 = a.m + a.n = a(m + n) = a.a = a^2$.

Ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.

3.4 A função de Euler e a medida de ângulos

3.4.1 A função de Euler e a medida de ângulos em radianos

Sejam IR o conjunto dos números reais e C o círculo unitário de centro na origem: C = {(x, y) em IR^2 | $x^2 + y^2 = 1$}. A função de Euler E: IR → C faz corresponder a cada número real t o ponto E(t) = (x, y) de C do seguinte modo:

- E(0) = (1, 0).
- Se t > 0, percorremos sobre a circunferência C, a partir do ponto (1, 0), um caminho de *comprimento* t, sempre andando no sentido positivo (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio comum, ou seja, o sentido que nos leva de (1, 0) para (0, 1) pelo caminho mais curto sobre C). O ponto final do caminho será chamado E(t).
- Se t < 0, E(t) será a extremidade final de um caminho sobre C, de comprimento |t|, que parte do ponto (1, 0) e percorre C sempre no sentido negativo (isto é, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio usual).

A função de Euler E: IR → C pode ser imaginada como o processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a circunferência C (pensada como um carretel) de modo que o ponto 0 em IR caia sobre o ponto (1, 0) em C. Escrevendo A = (1, 0), O = (0, 0) e, para cada t em IR, P = E(t), dizemos neste caso que o ângulo AOP mede t *radianos*.

3.4.2. A função de Euler e a medida de ângulos em graus

Também é possível definir uma função G: IR → C pondo G(0) = (1, 0) e estipulando que, para s > 0, G(s) é o ponto da circunferência unitária obtido a partir do ponto (1, 0) quando se percorre, ao longo de C, no sentido positivo, um caminho de comprimento 2π s/360 e que, para

s < 0, G(s) é o ponto da circunferência unitária obtido a partir do ponto (1, 0) quando se percorre, ao longo de C, no sentido negativo, um caminho de comprimento 2π |s|/360. Note, portanto, que G(s) = E(2π s/360) para todo s real.

Escrevendo A = (1, 0), O = (0, 0) e, para cada s em IR, P = G(s), dizemos neste caso que o ângulo AOP mede s *graus*. O ângulo AOP mede 1 grau quando B = G(1), ou seja, quando o arco AP tem comprimento igual a 2π/360. Em outras palavras, o ângulo de 1 grau é aquele que subtende um arco igual a 1/360 da circunferência. Escreve-se 1 grau = 1° e 1 radiano = 1 rad. Como a circunferência inteira tem 2π radianos e 360 graus, segue-se que 2π rad = 360°, ou seja, 1 rad = $(360/(2\pi))°$ = 57.29577951308232087679815481410517033240547246656... graus.

3.4.3 Seno e cosseno de números reais (com medida de ângulos em radianos)

As funções cos: IR → IR e sen: IR → IR, chamadas *função cosseno* e *função seno* respectivamente, são definidas pondo-se, para cada t em IR:

$$E(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)).$$

Noutras palavras, $x = \cos(t)$ e $y = \operatorname{sen}(t)$ são respectivamente a abscissa e a ordenada do ponto E(t) da circunferência unitária.

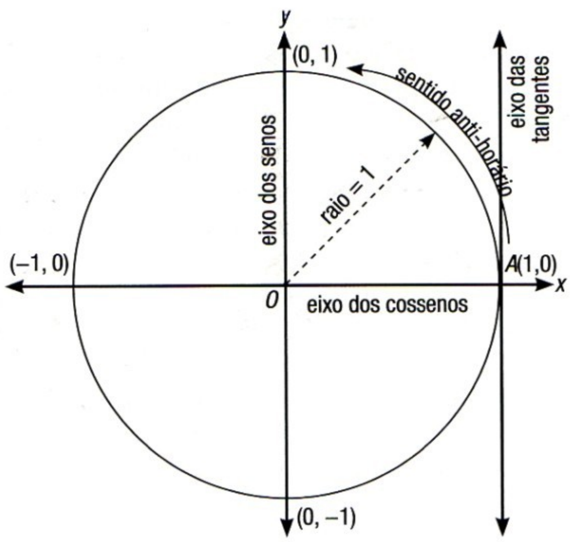
3.4.4 Seno e cosseno de números reais (com medida de ângulos em graus)

Nas definições das funções seno e cosseno dadas no quadro acima, o número real t dá a medida do ângulo AOP em radianos. Se, no lugar de medidas em radianos, usarmos medidas em graus, obteremos outras funções que, por abuso de notação, também serão representadas por cos e sen. Elas são definidas pondo-se, para cada s em IR:

$$G(s) = (\cos(s), \operatorname{sen}(s)).$$

Noutras palavras, $x = \cos(s)$ e $y = \operatorname{sen}(s)$ são respectivamente a abscissa e a ordenada do ponto G(s) da circunferência unitária.

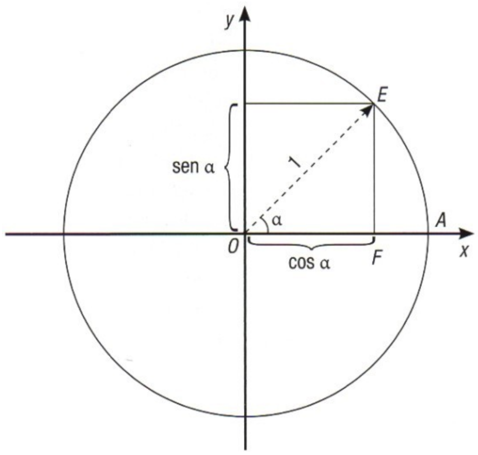
Figura 9: Circunferência trigonométrica (Revista Cálculo: edição 23/2012)



3.5 Relação fundamental ($sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$)

Sendo E(t) definida dos reais no círculo unitário e E(t) = (cos(t), sen(t)) segue portanto que $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$.

Figura 10: Relação fundamental na circunferência.(Revista Cálculo: edição 23/2012)

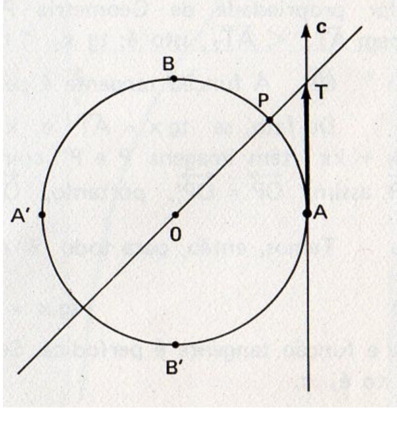


3.6 Relação entre seno, cosseno e tangente de um arco

Considerando na figura 11, o eixo das tangentes (c), paralelo ao eixo das ordenadas e de mesma orientação.

Dado um número real x, $x \neq \pi/2 + k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Considerando a reta que passa por OP e seja T sua intersecção com o eixo das tangentes. Denominamos tangente de x (tg x) a medida algébrica do segmento AT.

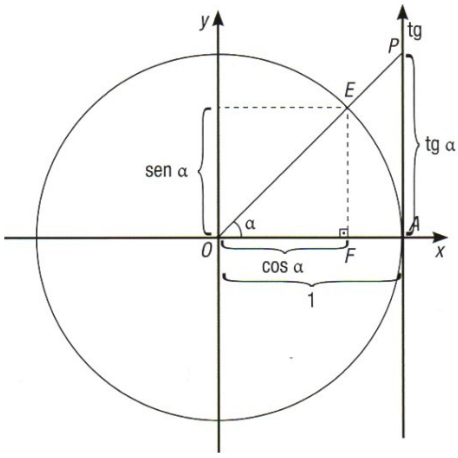
Figura 11: Definição da tangente de um arco (Gelson Iezzi - Matemática Elementar)



Observando no ciclo trigonométrico, o triângulo ΔOFE ~ Δ OAP (caso ângulo - ângulo), então temos:

$\frac{AP}{EF} = \frac{OA}{OF}$, substituindo, temos $\frac{\tan(\alpha)}{1} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, ou seja, $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, para $\cos(\alpha) \neq 0$.

Figura 12: Relação entre seno, cosseno e tangente de um arco.(Revista Cálculo: edição 23/2012)



3.7 A Trigonometria de acordo com os PCN's

Apesar de sua importância, tradicionalmente a trigonometria é apresentada desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações em detrimento dos aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Desta forma o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas. Outro aspecto importante do estudo deste tema é o fato desse conhecimento ter sido responsável pelo avanço tecnológico em diferentes épocas, como é o caso do período das navegações ou, atualmente, na agrimensura, o que permite aos alunos perceberem o conhecimento matemático como forma de resolver problemas que os homens se propuseram e continuam se propondo.

Conforme os PCN's os conteúdos e habilidades propostos para a unidade temática TRIGONOMETRIA a serem desenvolvidas nesse tema são:

Trigonometria: do triângulo retângulo; do triângulo qualquer; da primeira volta.

- utilizar e interpretar modelos para resolução de situações-problema que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos;
- compreender o conhecimento científico e tecnológico como resultado de uma construção humana em um processo histórico e social, reconhecendo o uso de relações trigonométricas em diferentes épocas e contextos sociais.

A nível de Secretaria de Educação do Estado do Ceará, temos nas matrizes curriculares para o ensino médio o tema TRIGONOMETRIA assim distribuído:

1° ANO – Razões trigonométricas e ângulos notáveis.

2º ANO - Funções trigonométricas e relações trigonométricas no intervalo de 0 a 2 π.

Para alcançar os objetivos estabelecidos de promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática, a proposta dos PCNEM privilegia o tratamento de situações-problema preferencialmente tomadas em contexto real. A Resolução de Problemas é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado.

4 METODOLOGIA DA PESQUISA

4.1 Descrição do projeto

Este projeto é destinado a alunos do 2º ano do Ensino Médio, ano em que se começa a explorar a trigonometria na circunferência de acordo com as matrizes curriculares da Secretaria de Educação do Estado do Ceará.

O projeto está dividido em cinco grupos de atividades. Os dois primeiros são destinados ao estudo de semelhança de triângulos e das relações trigonométricas no triângulo retângulo, assuntos estes que fazem parte do currículo de anos anteriores e que servem de subsunçores para os dois grupos seguintes onde é abordado a trigonometria na circunferência e às funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente, sendo este estudo apoiado na confecção do ciclo trigonométrico ou prancha trigonométrica. Por fim foi construído um "modelo de teodolito" que junto com o ciclo trigonométrico e a teoria estudada nas etapas anteriores tornou possível se determinar a medida aproximada de alturas inacessíveis em uma aula de campo.

No início do projeto aplicou-se um pré-teste para avaliar os conhecimentos prévios dos alunos que serviram de base para o desenvolvimento dos trabalhos, tais conteúdos incluem: sistema métrico decimal, razão, proporção, números reais, plano cartesiano, semelhança de triângulos, teorema de Pitágoras, circunferência e seus elementos , destinando algumas aulas para revisá-las.

A confecção da prancha trigonométrica foi realizada alternando teoria (exposição de conteúdos) e prática (montagem do ciclo)

4.1.1 Conhecendo melhor a escola

A Escola Estadual de Ensino Profissional Plácido Aderaldo Castelo está localizada na fazenda Amontada, bairro Recreio na cidade de Mombaça estado do Ceará distante 300 km da capital, foi inaugurada em 30 de março de 1970, pelo então Governador Plácido Aderaldo Castelo, filho ilustre de Mombaça, que sentindo a necessidade de uma escola que proporcionasse aos conterrâneos um ensino de qualidade, principalmente para as camadas socialmente menos favorecidas, construiu a então escola Integrada e Colégio Agrícola de Mombaça (primeiro nome), que veio a funcionar com o curso Profissionalizante de Técnico em Agropecuária e o Ensino Fundamental.

A regulamentação do Colégio Agrícola Plácido Aderaldo Castelo, ocorreu a partir do decreto Nº 9.159 publicado do Diário Oficial de 30 de Março de 1970.

Atualmente o Colégio Funciona com o Ensino Médio Profissionalizante com os Cursos: Agroindústria, Comércio e Informática.

Tem como objetivo geral: desenvolver condições necessárias para um trabalho participativo com a comunidade escolar, num processo de reflexão e ação, buscando formar no aluno o espírito solidário, consciente e crítico para o exercício da cidadania.

O corpo administrativo é composto pelo Núcleo Gestor, Secretaria, Serviços Auxiliares e Professores.

O Conselho Escolar é formado por dois representantes de cada segmento que compõe a comunidade escolar. O Grêmio Estudantil é formado através de eleição a comunidade escolar.

4.1.2 Conhecendo os alunos envolvidos

Os alunos envolvidos no projeto compõem o 2º ano Técnico em Comércio, período manhã e tarde, com 4 (quatro) aulas semanais de matemática distribuídas nas segundas e quartas - feiras . A sala possui 32 alunos matriculados dos quais 20 residem na zona urbana do município de Mombaça e 12 na zona rural com faixa etária entre 16 e 20 anos. A maioria dos estudantes é filho de pais com baixo poder aquisitivo cujas funções variam entre: agricultor, trabalhadores autônomos, vigilante, motorista, comerciário, comerciante, entre outras.

A aplicabilidade dos trabalhos foi otimizada por ser uma escola de tempo integral o que favoreceu a frequência dos alunos às aulas, porém cerca de 70 % dos alunos apresentavam grandes defasagens de aprendizagens com dificuldades em conteúdos básicos de Ensino Fundamental, onde alguns são pré-requisitos para o estudo da Trigonometria, fato este constatado através da análise dos resultados obtidos nas avaliações internas e através da aplicação de testes e sondagem.

4.1.3 Objetivos do projeto

Na busca por uma metodologia de ensino para melhorar o desempenho da turma com menores índices de aprendizagem em matemática da nossa escola, no caso, 2° ano Técnico em Comércio, que apesar de boa participação nas aulas não conseguia bons resultados nas avaliações, elaboramos este projeto visando trabalhar com a turma de forma diferenciada, reforçando os conteúdos básicos necessários ao desenvolvimento do tema a ser estudado, no caso Trigonometria na Circunferência, e principalmente confeccionando material concreto (prancha trigonométrica e "teodolito") para facilitar a aprendizagem dos novos conceitos.

Ressaltar durante a confecção da prancha trigonométrica os vários temas do ensino fundamental, tais como: sistema métrico decimal, comparação e representação de números reais, razão, proporção, simetria, uso de materiais de medida e de desenho como: régua, compasso e transferidor. Por fim usar o conhecimento adquirido e o material confeccionado na resolução de uma situação-problema do cotidiano.

4.2 Conteúdos e atividades propostas no projeto

De acordo com a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel que afirma ser o que o aluno já sabe o fator que mais influi na sua aprendizagem, e observando as dificuldades da turma com relação ao domínio de conteúdos anteriores que servem como *subsunçores* para o estudo de trigonometria na circunferência, a sequência de atividades proposta retoma estes conteúdos, principalmente noções de geometria plana, destacando semelhança de triângulos e o estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo que servirão de âncora para o estudo da trigonometria na circunferência e de suas funções. Nas atividades propostas foi aplicada a metodologia do trabalho em grupo, da construção de material concreto e da aula de campo.

4.2.1 Semelhança de triângulos

Esse tema é desenvolvido partindo das primeiras noções de geometria plana em uma aula expositiva dialogada definindo-se ponto, reta, semirreta, segmento de reta e ângulo. Na sequência aborda-se o triângulo (algumas propriedades e congruência), triângulo retângulo (com o teorema de Pitágoras) para então trabalhar a ideia de semelhança utilizando situações do cotidiano como ampliação de fotocópias e planta de construções. Finalizando define-se semelhança de triângulos (casos de semelhança, principalmente a peculiaridade do triângulo retângulo).

➢**Atividade de Semelhança**

1. Classifique cada afirmação como verdadeira ou falsa:

a) Dois triângulos são sempre semelhantes.

b) Dois triângulos equiláteros são sempre semelhantes.

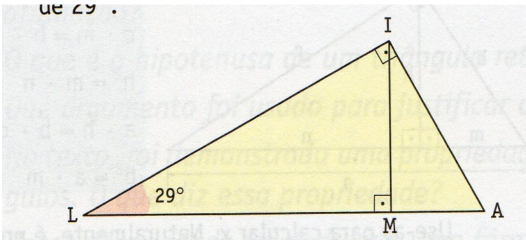
c) Dois triângulos isósceles sempre são semelhantes.

d)Dois retângulos sempre são semelhantes

2. A maquete de um edifício tem 50cm de altura e o edifício tem 40m de altura. Sabendo que as janelas dos apartamentos têm 2m de largura, qual é a largura das janelas na maquete do edifício?

3. O triângulo LIA tem um ângulo reto e um outro de 29°.

Figura 13: Imenes e Lellis 8ª série p.28



a) Determinar a medida dos ângulos do triângulo MIL?

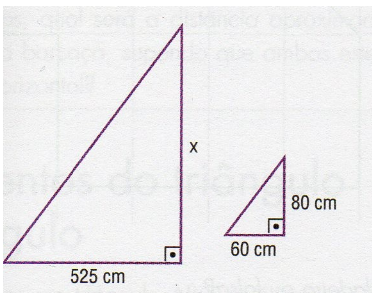
b) Determinar a medida dos ângulos do triângulo MIA?

c) Cada um dos triângulos MIL e MIA é semelhante ao triângulo LIA?

d) Usando o resposta do item c que relação existe entre os lados correspondentes dos triângulos MIL e LIA?

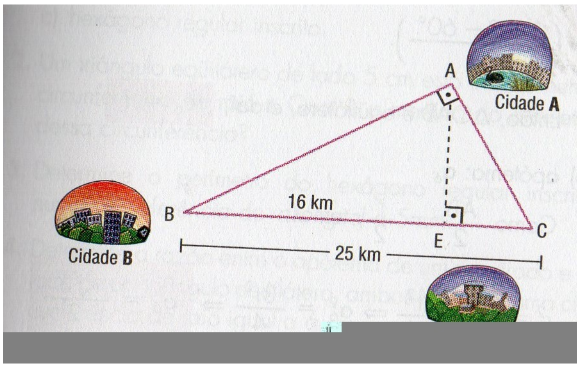
4.Calcule a medida da altura do poste sabendo que a medida da altura do cachorro é 80 cm, a medida da sombra do poste é 525 cm e a medida da sombra do cachorro é 60 cm.

Figura 14: Dante, 1ºano p.169



5.Um motorista vai da cidade A até a cidade E passando pela cidade B, conforme mostra a figura. Quantos quilômetros esse motorista percorreu?

Figura 15: Dante, 1ºano p.173



➢**Análise da atividade**

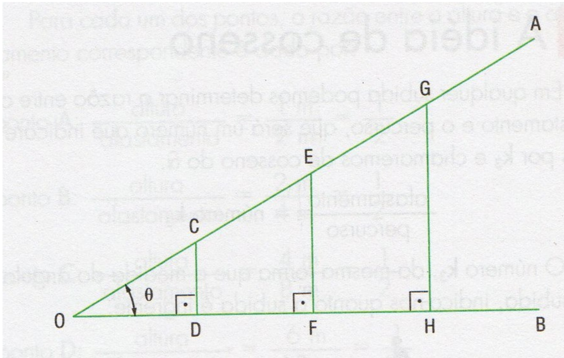
Começamos a atividade verificando a noção intuitiva de semelhança que os alunos já tinham. Depois de apresentada a definição de semelhança de polígonos com destaque para a semelhança de triângulos, a turma passou a classificar os itens da primeira questão com o auxílio de desenhos. Após o debate os grupos conseguiram chegar às respostas corretas. Na segunda questão todos os alunos admitiram a proporcionalidade entre as figuras, entretanto alguns tiveram dificuldades em escrevê-la corretamente; outros também, com dificuldades, buscaram o resultado mentalmente. A quarta questão foi solucionada com certa facilidade, porém, na quinta questão os alunos não conseguiram perceber a "necessidade" de separar os triângulos. Como foi feito na terceira questão, sugerimos a divisão dos mesmos para facilitar a visualização da semelhança. Reforçando a ideia de lados homólogos escreveram e resolveram a proporção.

4.2.2 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

➢**Atividade**

1.Construa o modelo abaixo em uma folha de papel milimetrado, considerando o ângulo agudo DÔC de medida θ, qualquer.

Figura 16: Dante, 1ºano p.190



2. Os triângulos ODC, OFE e OHG são semelhantes? Justifique.

3. Efetuando as medidas dos lados dos triângulos retângulos acima complete as tabelas a seguir tomando como referência o ângulo θ dos triângulos ODC, OFE e OHG:

Medidas de comprimento dos lados dos triângulos

Tabela 1: Medidas de comprimento dos lados dos triângulos

TRIÂNGULO	**Comprimento em centímetros**		
	hipotenusa	**Cateto oposto**	**Cateto adjacente**
ODC			
OFE			
OHG			

Razões entre as medidas dos comprimentos dos lados dos triângulos (aproximados para a primeira casa decimal).

Tabela 2: Razões entre as medidas dos comprimentos dos lados dos triângulos

TRIÂNGULO	**Razões entre os lados**		
	Cateto oposto e hipotenusa	Cateto adjacente e hipotenusa	Cateto oposto e cateto adjacente
ODC			
OFE			
OHG			

Considerando as aproximações dos resultados obtidos em uma casa decimal, verifica-se que as razões em cada coluna da tabela acima são iguais, pois os triângulos são semelhantes. Desta forma define-se :

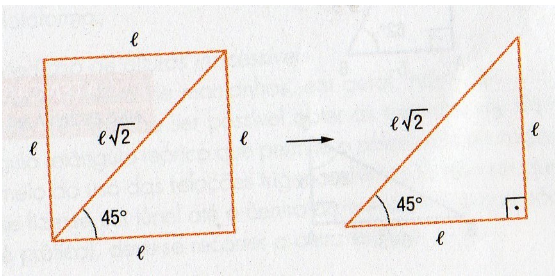
seno de θ = cateto oposto/ hipotenusa

cosseno de θ = cateto adjacente/ hipotenusa

tangente de θ = cateto oposto/ cateto adjacente

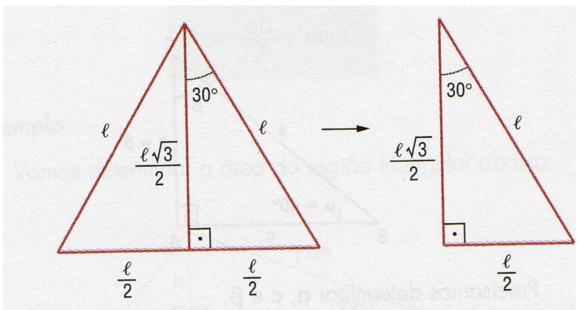
4a) Calcule sen 45°, cos 45° e tg 45° utilizando o triângulo retângulo destacado do quadrado abaixo

Figura 17: Dante, 1ºano p.195



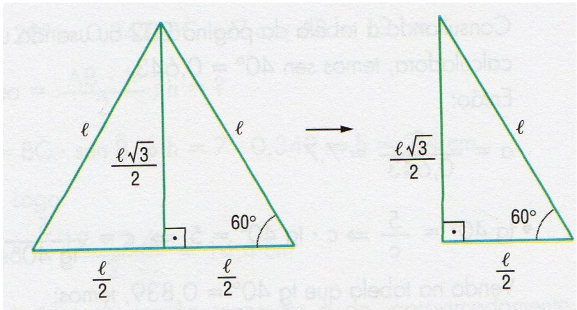
b) Calcule sen 30°, cos 30° e tg 30° utilizando o triângulo retângulo destacado do triângulo equilátero abaixo

Figura 18: Dante, 1ºano p.196



c) Calcule sen 60°, cos 60° e tg 60° utilizando o triângulo retângulo destacado do triângulo equilátero abaixo

Figura 19: Dante, 1ºano p.196

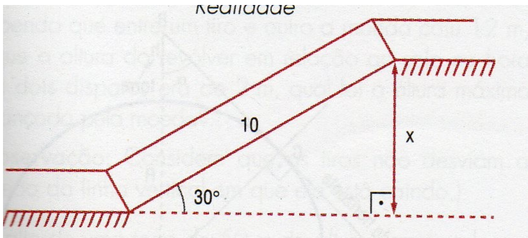


d)Com os valores que você encontrou, complete a tabela:

	30°	45°	60°
sen			
cos			
tg			

5.Uma rampa lisa de 10m de comprimento faz ângulo de 30° com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe essa rampa inteira eleva-se quantos metros verticalmente?

Figura 20: Dante, 1ºano p.197



➢**Análise da atividade**

Nessa tarefa, percebendo as dúvidas com relação ao ato de medir, conceituamos o sistema métrico de medidas para comprimentos e o procedimento usado para realizar uma medida e suas aproximações, assim os alunos completaram a 1ª tabela e usando calculadora preencheram também a 2ª tabela. Passando a analisá-la perceberam que as razões contidas em uma mesma coluna ou eram iguais ou "muito próximas", porém não conseguiram associar o fato aos erros obtidos ao se efetuar uma medida, mesmo já tendo comentado sobre estes erros anteriormente. Perguntados sobre a existência ou não de semelhança, responderam positivamente e alguns associaram corretamente o caso de semelhança levando-os a concluir a relação de proporcionalidade entre os lados, ou seja, razões constantes. Concluímos estas observações citando a nomenclatura usada em tais razões, isto é, seno, coseno e tangente. A construção dos triângulos associada ao preenchimento das tabelas foram importantes também por ter levado os alunos a perceberem que estas razões dependem unicamente da medida θ do ângulo agudo.

Com relação à quarta questão, os alunos apresentaram grandes dificuldades a começar pelo uso de "letras" indicando a medida dos lados das figuras e também ao dividir e simplificar frações envolvendo as variáveis e números irracionais, mas as maiores dúvidas foram observadas quando comentamos a necessidade de racionalizar os denominadores. Para minimizar tais dúvidas fizemos uma síntese dos temas "subsunçores" acima citados em uma aula expositiva dialogada e resolvemos a questão proposta.

4.2.3 Trigonometria na circunferência

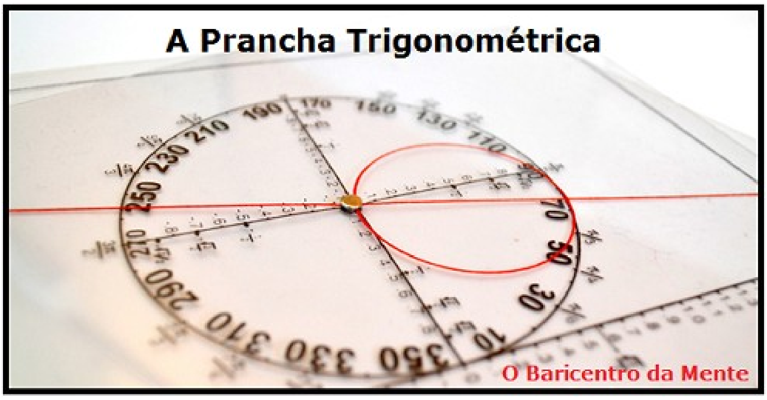
Introduzimos o tema definindo circunferência e seus elementos: corda, diâmetro, raio, comprimento, arco e suas principais medidas (grau e radiano).

Para fixar a "nova" medida usada para medir arcos (o radiano) foi proposta a tarefa de localizar aproximadamente as extremidades de arcos de 1rad, 2rad, 3rad... construindo circunferências com o compasso e usando barbante para medir o raio e com esta medida contornar os arcos.

Usando as definições de grau e radiano e o comprimento da circunferência chegamos à relação entre essas duas medidas de arcos.

O estudo da trigonometria na circunferência foi desenvolvido usando como suporte pedagógico a prancha trigonométrica, na figura abaixo, após avaliar o seu potencial como ferramenta didática, estudando as possíveis adaptações que poderíamos realizar de modo a tornar sua confecção acessível e visualizando as competências e habilidades trabalhadas durante essa atividade, as quais reforçariam vários subsunçores necessários ao desenvolvimento deste tópico da trigonometria. Passamos então a construção e ao mesmo o tempo estudo deste que foi o grande diferencial nesta experiência didática, quando comparado aos resultados obtidos desta turma com outras onde não se utilizou tal ferramenta.

Figura 21: Prancha trigonométrica: http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/



➢Descrevendo a prancha trigonométrica

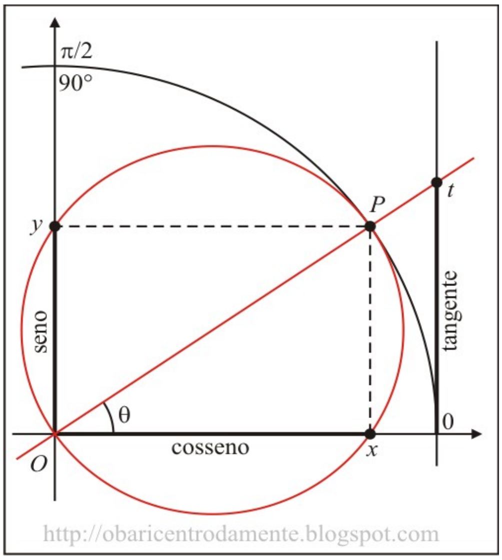
A Prancha Trigonométrica é um aparato pedagógico, para que o professor, ou aluno, possa desenvolver atividades no estudo do círculo trigonométrico, pois é possível observar os valores do seno, cosseno e tangente de um ângulo simultaneamente.

A prancha trigonométrica é composta por duas partes: uma base branca fixa e uma transparente giratória. Na base branca encontra-se o círculo trigonométrico de raio $r = 1$, dividido em ângulos, numerado internamente em graus e externamente em radianos. Há também os eixos dos senos, cossenos e tangentes, divididos em décimos e também os valores irracionais de ângulos notáveis.

Na parte transparente giratória, encontra-se uma reta que passa pela origem, por onde se dá o giro, e uma circunferência de raio igual a $r/2$, com centro em uma dessas semirretas.

Quando giramos a parte transparente, a reta forma um ângulo θ com o eixo dos cossenos (eixo horizontal) e podemos verificar o valor do ângulo, do seno, do cosseno e da tangente simultaneamente, apenas observando os pontos de intersecção da circunferência com os eixos dos senos e dos cossenos e da reta com o eixo das tangentes.

Figura 22: Visualização do seno, cosseno e tangente:http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/



Ao girarmos a parte transparente formando um ângulo de medida θ com o eixo dos cossenos, o ponto P indica a medida do ângulo em graus e em radianos, e as projeções do ponto P nos eixos dos cossenos e dos senos, dão os pontos x e y, que são os valores do cosseno e do seno do ângulo θ, assim como o ponto t é a intersecção da reta com o eixo das tangentes, o que nos dá o valor da tangente do ângulo de medida θ.

Nas aulas destinadas à confecção da prancha trigonométrica a turma foi dividida em grupos compostos por quatro alunos buscando uma maior interação entre os mesmos, ao mesmo tempo em que foi exigida a confecção de um ciclo por aluno de modo a garantir que nas atividades seguintes cada aluno pudesse manusear o seu próprio material didático. A técnica do trabalho em grupo para atividades em sala de aula é destacada nos PCN's

> Um importante recurso para o desenvolvimento das competências é o trabalho em grupo. Apesar de rejeitado por muitos, sob alegação de que os alunos fazem muito barulho e não sabem trabalhar coletivamente, essa modalidade de trabalho é valiosa para várias das competências que se deseja desenvolver.

Os materiais necessários à (atividade) construção da prancha são acessíveis e de baixo custo, sendo que para a turma, o custo foi mínimo já que o laboratório de matemática da nossa escola dispunha do kit de desenho geométrico para o aluno. Segue a lista de materiais necessários à confecção do ciclo.

MATERIAIS:

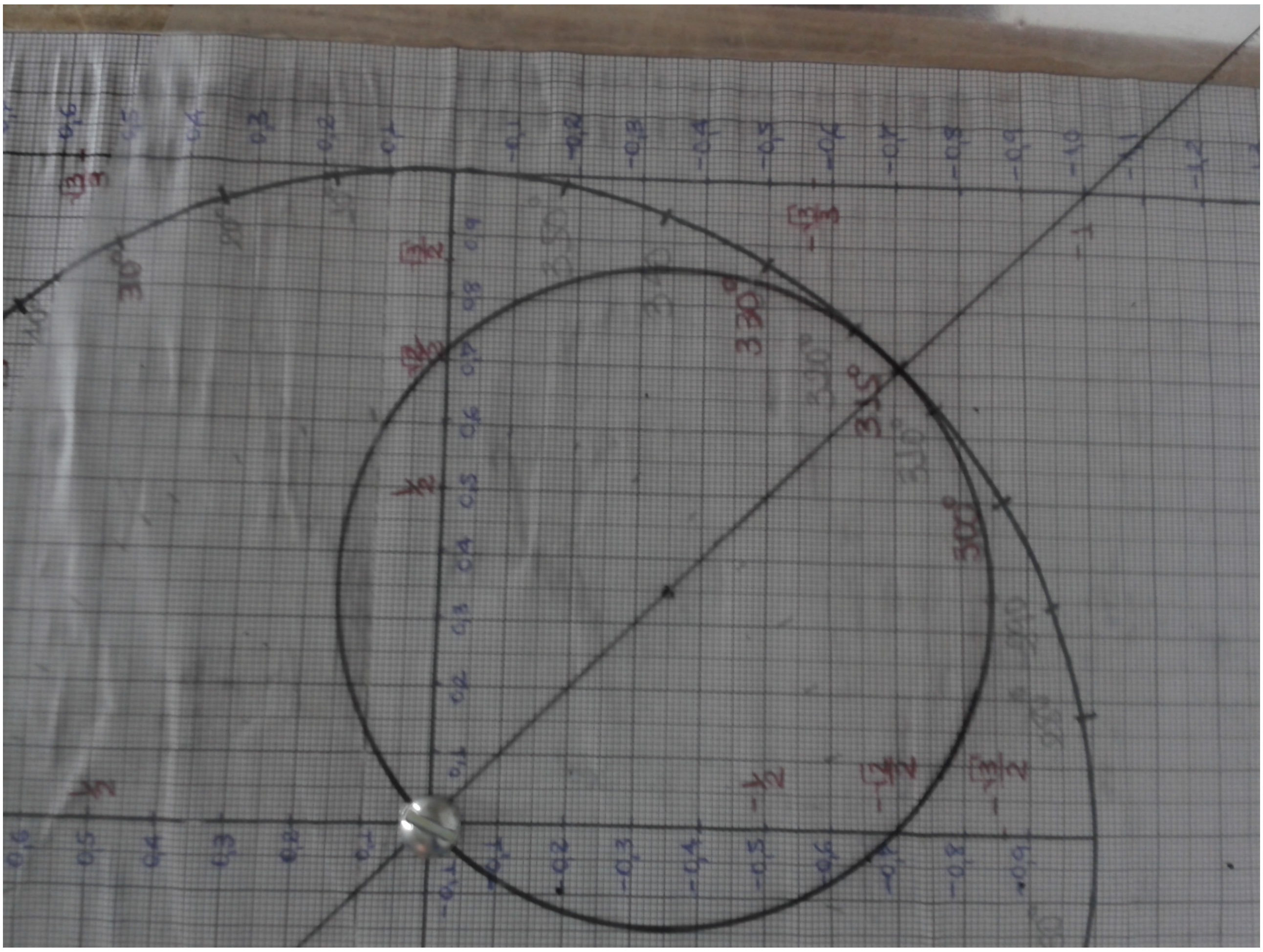
- Papel milimetrado
- Plástico transparente (usado em encadernação)
- parafuso pequeno com porca
- régua
- compasso
- transferidor
- caneta
- papelão
- cola
- tesoura

De posse do material passamos à construção do ciclo ou prancha trigonométrica conforme etapas abaixo:

1. Na folha de papel milimetrado
   a) usando compasso traçamos uma circunferência de raio 10cm, medida esta que passou a corresponder a nossa unidade.
   b) traçamos um plano cartesiano fazendo coincidir com o centro da circunferência com a origem do plano cartesiano e subdividimos os eixos cartesianos fazendo corresponder 1cm a 0,1 do raio unitário.
   c) usando o transferidor dividimos a circunferência trigonométrica em arcos de 10° partindo do ponto (1,0) e percorrendo o sentido anti-horário (positivo).
   d) localizamos os arcos notáveis na circunferência bem como os correspondentes nos demais quadrantes com suas respectivas medidas em radiano.
   e) traçamos o eixo das tangentes (paralelo ao eixo das ordenadas passando pelo ponto (1,0), identificando-o, identificamos também a parte do eixo das abscissas que corresponde ao seno, assim como a porção ao eixo das ordenadas correspondendo aos cossenos.
   f) destacamos nos eixos correspondentes a localização aproximada dos valores de seno, cosseno e tangente dos arcos notáveis 30°, 45°e 60° bem como os valores dos seus correspondentes nos demais quadrantes.
2. Colamos o ciclo trigonométrico construído sobre o papel milimetrado no papelão.
3. No plástico transparente traçamos uma circunferência de raio 5 cm e uma reta secante a mesma passando pelo centro.

4. Fixamos o centro da circunferência trigonométrica traçada sobre o papel milimetrado com o ponto de interseção da circunferência com a reta secante desenhada sobre o plástico transparente. Isso permite que as coordenadas (seno e cosseno) dos ângulos indicados sejam rapidamente visualizadas.

Figura 23: Prancha trigonométrica confeccionada pelos alunos



➢Análise da atividade

Nessa tarefa muitos conceitos foram trabalhados à medida que a atividade era desenvolvida. A atividade apresentou muitas dificuldades por conta da pouca prática dos alunos em manusear o compasso e principalmente o transferidor. Passadas as instruções corretas sobre o uso de tais materiais passamos a acompanhar os grupos com maiores dificuldades. Em parte dos grupos tínhamos alunos que cumpriram o papel de ajudar aos colegas com baixo desempenho, então concluímos os desenhos da circunferência e do plano com suas respectivas divisões. Após abordar o tema simetria, a turma com facilidade localizou os arcos correspondentes aos arcos notáveis (30º, 45º, 60º) nos demais quadrantes e a transformação destas medidas em radianos, cuja relação já tínhamos obtido anteriormente, sendo que mais da metade da turma realizou a tarefa com êxito. A localização aproximada dos valores do seno, cosseno e tangente de tais arcos também não foi fácil devido à presença de números irracionais, portanto tivemos que revisar este temas destacando as aproximações.

Essa atividade mostrou-se bastante rica didaticamente, pois além da variedade conteúdos foram trabalhados (números, medidas de comprimento e arcos, proporção, noções de geometria plana) em uma tarefa de construção o que serviu de motivação para os alunos.

Explorando o ciclo trigonométrico construído passamos a listar as seguintes atividades

1. Estudar o sinal das funções seno, cosseno e tangente completando a tabela.

Uma vez definido seno, cosseno e tangente na circunferência passamos a visualizar com facilidade estes valores no ciclo identificando os seus respectivos sinais observando a orientação das ordenadas e abcissas no intervalo real de -1 a 1 bem como o sinal da tangente através do seu eixo.

Resumindo o estudo dos sinais preenchendo a tabela a seguir: **Sinais de Seno, Cosseno e Tangente**

Tabela 3: Sinais de seno, cosseno e tangente

	1° quadrante	**2° quadrante**	**3° quadrante**	**4° quadrante**
Seno				
Cosseno				
Tangente				

2. Estudar o crescimento das funções seno, cosseno e tangente

Neste momento exploramos no ciclo trigonométrico a relação (função) entre as duas variáveis: medida do arco e a medida da abscissa deste arco por exemplo, considerando o 1° quadrante levamos o aluno a perceber que a medida que se constroem arcos maiores, o comprimento da abscissa diminui, portanto temos cosseno decrescente no 1° quadrante, sendo a mesma análise foi feita para as funções seno e tangente.

Concluímos essa tarefa completando a tabela seguinte:

Tabela 4: Crescimento do seno, cosseno e tangente

	1° quadrante	**2° quadrante**	**3° quadrante**	**4° quadrante**
Seno				
Cosseno				
Tangente				

3.Visualizar arcos simétricos no 2°, 3° e 4° quadrante, em relação aos arcos do 1° quadrante, completando a tabela:

Tabela 5: Arcos simétricos em relação ao 1° quadrante

	2º quadrante	**3º quadrante**	**4º quadrante**
30°			
45°			
60°			

Neste momento foi enfatizado que a simetria entre os arcos de 2° e 1° quadrante é feita em relação ao eixo das ordenadas, entre os arcos de 3° e 1° quadrante a simetria se dá em relação a origem do plano cartesiano, já entre os arcos de 4° e 1° quadrante temos o eixo das abscissas como referência para a simetria.

Associando o estudo do sinal com as noções de simetria podemos expressar as igualdades abaixo, para um arco α qualquer.

Quadro de simetria

$\text{sen}(180 - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$	$\cos(180 - \alpha) = -\cos\alpha$
$\text{sen}(180 + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$	$\cos(180 + \alpha) = -\cos\alpha$
$\text{sen}(360 - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$	$\cos(360 - \alpha) = \cos\alpha$

As igualdades equivalentes para tangente são visualizadas diretamente no ciclo trigonométrico ou através da razão seno sobre cosseno,temos:

$\text{tg}(180 - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$

$\text{tg}(180 + \alpha) = \text{tg}\,\alpha$

$\text{tg}(360 - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$

4. Determinar os valores de seno, cosseno e tangente para os arcos notáveis

Com as definições de seno coseno e tangente na circunferência, os valores dos mesmos para os arcos notáveis de 30°, 45° e 60° além da noção de simetria (redução ao 1° quadrante) bem como estudo dos sinais, completamos o importante quadro de valores:

Quadro de valores notáveis

	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Sen																	
Cos																	
Tg																	

➢**Análise das atividades**

Essas tarefas relativas a obtenção de resultados via material concreto foi bastante favorecido, pois o nível de desenvolvimento da turma como era de se esperar é bastante heterogêneo, isto veio a facilitar a compreensão principalmente dos aluno com um menor nível de abstração. Nesta atividade também foram reforçados subsunçores, como por exemplo a localização de pontos no plano cartesiano principalmente aqueles localizados sobre os eixos.

4.2.4 Funções seno, cosseno e tangente

Inicialmente com o objetivo de reforçar o conceito de função foi pedido que os alunos de posse do ciclo trigonométrico refletissem sobre as seguintes perguntas?

a) Todo arco tem seno definido?

b) Algum arco tem mais de um valor para o seno?

Diante das respostas afirmativa e negativa para os itens *a* e *b* respectivamente acima chegamos a definição de função, neste caso específico a função seno e usando os resultados obtidos na tabela 4.6 para os valores de seno dos arcos de 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$ e 2π radianos foi traçado o gráfico da função e determinado seu domínio, imagem, período e crescimento. Esta mesma construção foi realizada para o cosseno de um arco.

➢Análise da tarefa

A confecção do ciclo trigonométrico (prancha trigonométrica) foi de fundamental importância na compreensão deste assunto que é o tema principal do nosso currículo de 2°ano no que se refere a trigonometria, ou seja, **as funções trigonométricas**, eis algumas obstáculos contornados com esses apoio:

a)a localização aproximada dos valores dos arcos no eixo horizontal visto que aqui temos valores associados ao número irracional (π), sendo que grande parte dos alunos conseguiram associar ao que tínhamos feito ao localizar aproximadamente no ciclo trigonométrico os números irracionais oriundos do seno, cosseno e tangente dos arcos notáveis.

b)perceber o caráter periódico das funções trigonométricas.

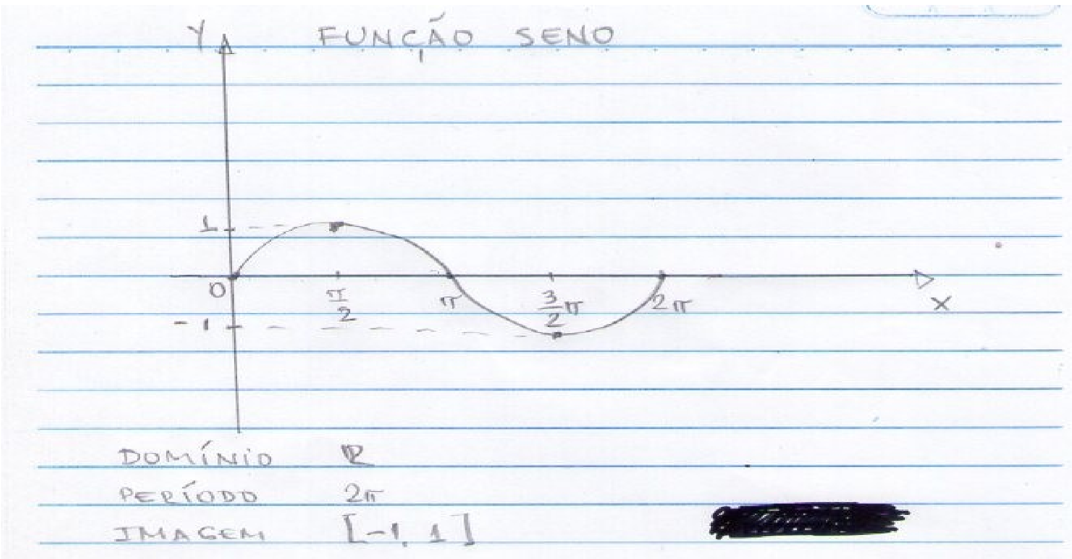
c)perceber os intervalos de crescimento e decrescimento das funções através de dois instrumentais: o *gráfico* e o *ciclo trigonométrico.*

d)facilitar da visualização do domínio e da imagem das funções.

e) visualizar dos arcos para os quais a função tangente não está definida.

Vejamos o gráfico da função seno traçado por um aluno.

Figura 24: Gráfico da função seno



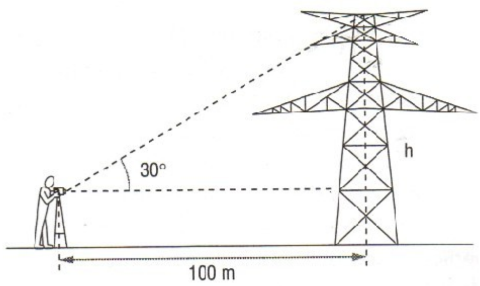
4.2.5 Aula de campo

Seguindo as orientações dos PCN que destaca em relação ao ensino da trigonometria "*O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis*" e reconhecendo a importância da experiência direta como fator básico para construção do conhecimento passamos a nos prepararmos para uma aula de campo.

A situação-problema que serviu de inspiração para esta aula aparece com frequência nos livros didáticos, sendo este texto extraído do livro MATEMÁTICA (Dante) volume único, página 199, questão de número 26.

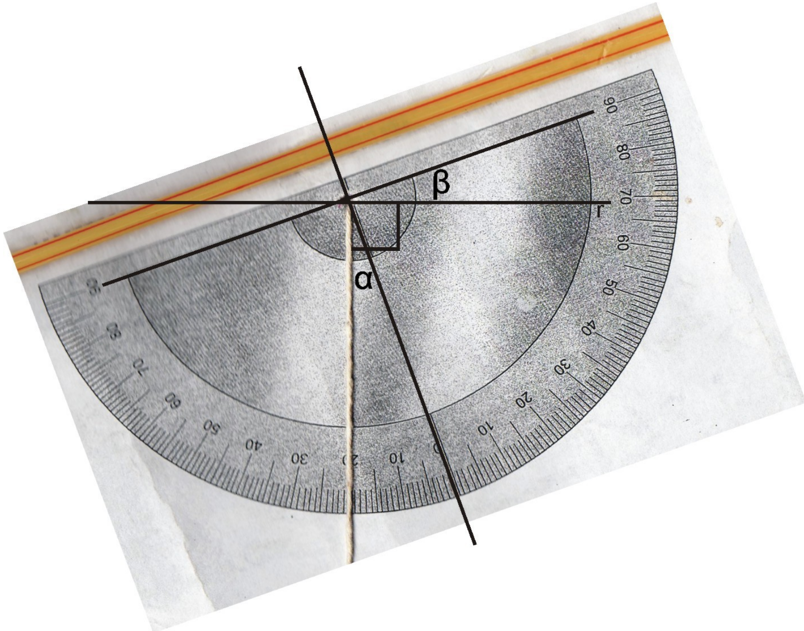
Para determinar a altura de uma torre, um topógrafo coloca o teodolito a 100m da base e obtém um ângulo de 30°, conforme mostra a figura. Sabendo que a luneta do teodolito está a 1,70m do solo, qual é aproximadamente a altura da torre? (Dado: sen30° = 0,50; cos30° = 0,87 e tg30°= 0,58).

Figura 25: Dante – volume único



Para tornar possível a aula que consiste em determinar alturas inacessíveis e levando-se em consideração o fator tempo optamos por construir um "modelo de teodolito" básico com a finalidade de obtermos a inclinação (conforme figura). Para isso usamos uma cópia de um transferidor de 180°, um canudo que servirá como mira e um prumo.

Figura 26: Modelo de teodolito



Confeccionado o nosso modelo de teodolito e passada as instruções de uso visando minimizar os erros na medida do possível, ou seja,

•objeto cuja altura queremos determinar deve estar situado em um terreno plano;

•ao "mirarmos" o topo do objeto do qual queremos estimar a altura prendemos o prumo que se encontra preso ao barbante(branco), junto ao transferidor e efetuamos a leitura do ângulo α que corresponde no caso da figura 24 a 20°

O fato aqui observado é que esta leitura corresponde ao ângulo de medida α e conforme modelo da questão tirada do livro didático o ângulo que nos interessa é o ângulo de medida β. Verifica- se aqui a igualdade entre os ângulos de medida α e β, sendo β a medida do ângulo de elevação do objeto entre a reta horizontal r e a linha da mira. Denominando de γ a medida do ângulo formado entre a reta r e reta que contém o centro do transferidor passando por 0 grau, temos que:

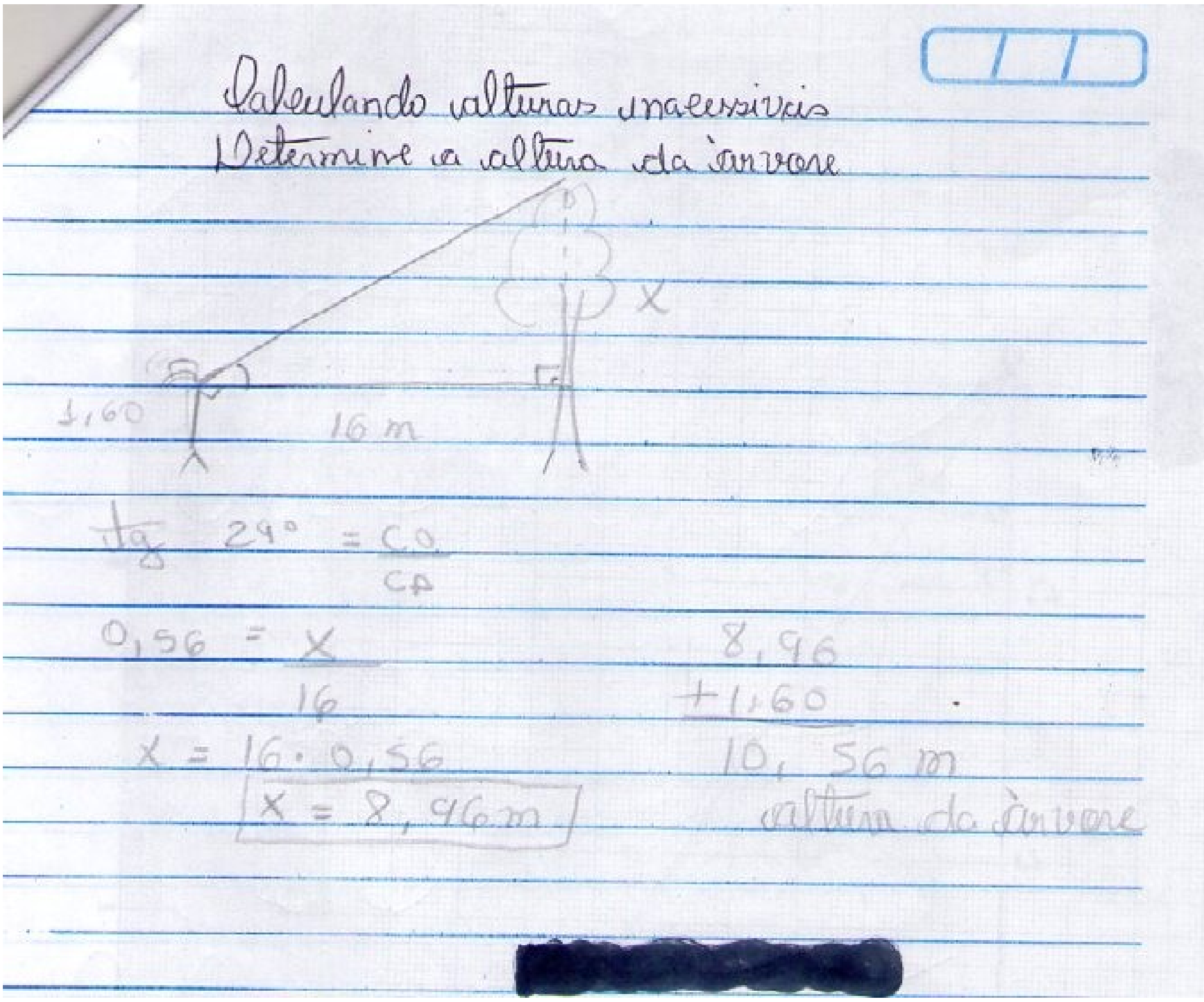
$\alpha + \gamma = 90°$(ângulo entre a reta r horizontal e o barbante vertical)

$\gamma + \beta = 90°$(observar medida do transferidor),

ou seja, $\alpha + \gamma = \gamma + \beta$ e portanto $\alpha = \beta$.

De posse do ciclo trigonométrico determinamos no mesmo um valor aproximado para a tangente de β, sendo aqui questionado o caso de não se encontrar visível no ciclo o valor direto da tangente usar o quociente entre seno e cosseno e com a trena efetuamos duas medidas sendo uma delas a altura da pessoa até os olhos e a outra a distância entre a pessoa e objeto ao qual se pretende estimar altura. Vejamos as medidas a os cálculos efetuamos por uma dupla de alunos.

Figura 27: Cálculo de altura inacessível



➢**Análise da atividade**

Devemos deixar claro neste tipo de atividade onde se busca trabalhar o assunto de forma mais concreta as aproximações obtidas não seriam adequadas a outros tipos de trabalhos onde se necessita de resultados mais precisos, para isso temos as tabelas trigonométricas disponíveis nos livros didáticos, calculadoras científicas, etc. Temos o teodolito usado por exemplo em levantamentos topográficos, contudo para essa finalidade didática os materiais utilizados nesta experiência foram satisfatórios, já que parte dos nosso alunos encontram-se em um estágio de aprendizagem onde necessitam de materiais manipuláveis para facilitar a compreensão de alguns conteúdos do Ensino Médio, entre eles noções básicas de trigonometria.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O que se pode verificar ao fim do projeto é que as atividades propostas associadas ao método aplicado foi satisfatório pois se conseguiu um bom nível de participação da turma e uma melhoria significativa nas aprendizagem dos temas abordados, apesar do pouco tempo para se trabalhar um assunto amplo que exige uma quantidade significativa de conhecimentos prévios, fato minimizado com algumas aulas extra

Destacamos alguns pontos positivos com relação as atividades e a metodologia aplicada:

a) o reforço de temas básicos de Ensino Fundamental que serviram de base para o desenvolvimento do projeto e para a aquisição de novos conhecimentos não só de Matemática, mas das Ciências como um todo.

b) a confecção da prancha trigonométrica onde se trabalhou noções de Geometria Plana, Números e Medidas, por exemplo, e que permitiu a visualização fácil de resultados importantes da Trigonometria no ciclo

c) o trabalho cooperativo entre os alunos dos grupos e também entre alunos de grupos distintos.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Elenise Maria. *Design Instrucional de uma Disciplina de Pós-Graduação em Engenharia de Produção: uma proposta baseada em estratégias de aprendizagem colaborativa em ambiente virtual*. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia de Produção, Universidade de São Paulo. São Carlos. 2009

AUSUBEL, David P., *The psychology of meaningful verbal learning*. New York, Grune and Stratton, 1963.

BRIGHENTI, Maria José Lourenço, *Concepções de professores sobre o ensino de Matemática: um estudo sobre a relação teoria / prática de aprendizagem* (2001).

COSTA, D. M. B.et al. *Elementos de Geometria* – 2.ed. Curitiba: UFPR, 2000.

DANTE, Luis Roberto, *Matemática, Volume 1 Ensino* Médio, Editora Ática, São Paulo, 2004, Livro do professor.

FILATRO, Andrea. *Design Instrucional Contextualizado: educação e tecnologia*. 2ª edicão. ed. São Paulo: Senac, 2007.

IEZZI. Gelson. *Fundamentos de Matemática Elementar: Trigonometria*. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004. v. 3.

IMENES, Luiz M. e LELLIS, Marcelo, *Matemática – 7a. série*, Editora Scipione, São Paulo, 1999.

Ministério da Educação , Secretaria da Educação Média e Tecnológica, Parâmetros Curriculares Nacionais- PCN Ensino Médio, MEC-Brasília, 1999.

PEREIRA, Cicero da Silva, *Aprendizagem em Trigonometria no Ensino Médio: Contribuição da Teoria da Aprendizagem Significativa,* Jundiaí, Paco Editorial, 2012.

MOREIRA, M. A., *Aprendizagem significativa crítica*, Atas do III Encontro Internacional sobre Aprendizagem Significativa Lisboa (Peniche) (2000), Repositório Aberto. Disponível em: < https : ==repositorioaberto:uab:pt=handle=10400:2=1320 >.

KILHIAN, Kleber. *Trigonometria – A prancha trigonométrica*, nov. 2003. Disponível em < http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/ >. Acesso em 03/02/ 2014.

LIMA, Elon Lages, *A Matemática do Ensino Médio – volume 1*, 10a. ed. - Rio de Janeiro: SBM 2012.

MOREIRA, Marco Antonio. *Teorias de Aprendizagem*. São Paulo: EPU, 1999..

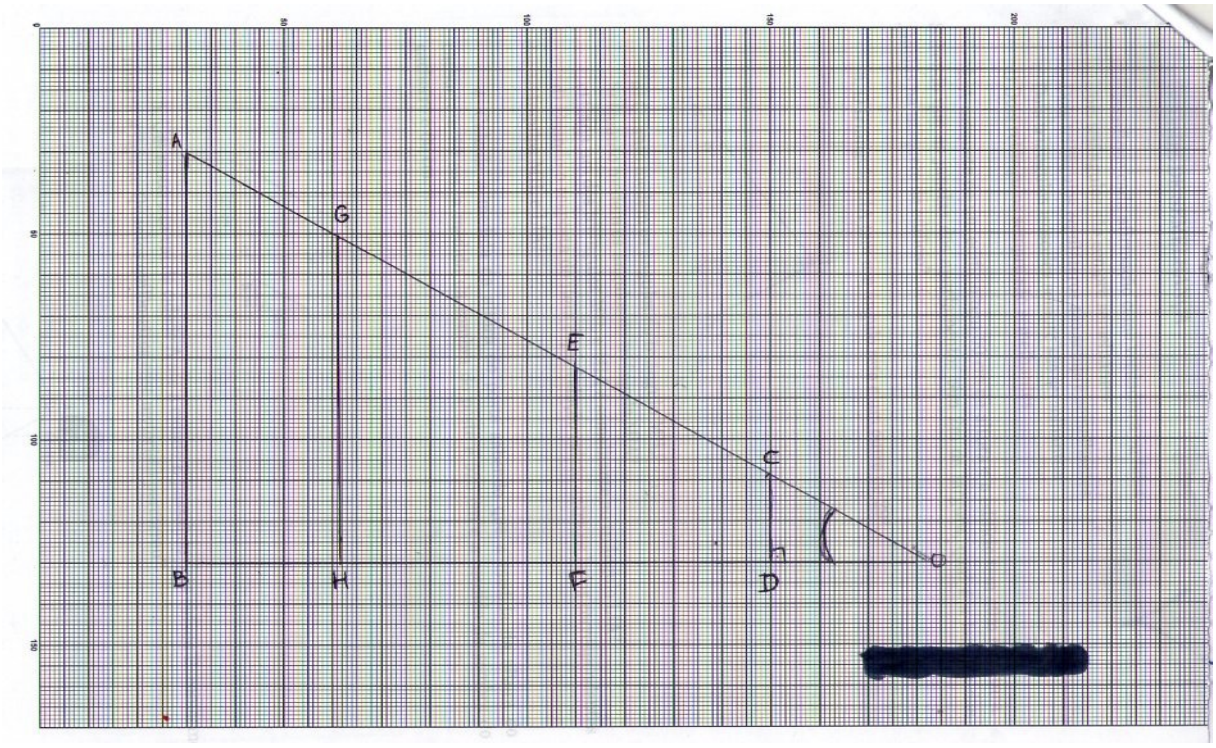
MOREIRA, Marco Antonio & Masini, Elcie Aparecida S. (2006). *Aprendizagem significativa: a teoria de aprendizagem de David Ausubel*. 2ª ed. São Paulo: Centauro Editora.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha, *Tópicos de Matemática Elementar* – 1a. ed. Rio de Janeiro, SBM, 2002.
PINHEIRO, Marco Antonio**.** *Estratégias para o Design Instrucional de Cursos pela Internet: Um*

Estudo de Caso. 2002. 96 f. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.

REVISTA CÁLCULO. São Paulo: Editora Segmento, ano 2, dez. 2012.

ANEXO A – TRIÂNGULOS RETÂNGULOS SEMELHANTES DESENHADOS POR UM ALUNO EM PAPEL MILIMETRADO



ANEXO B – TABELAS PREENCHIDAS USANDO AS MEDIDAS DOS TRIÂNGULO DO ANEXO A

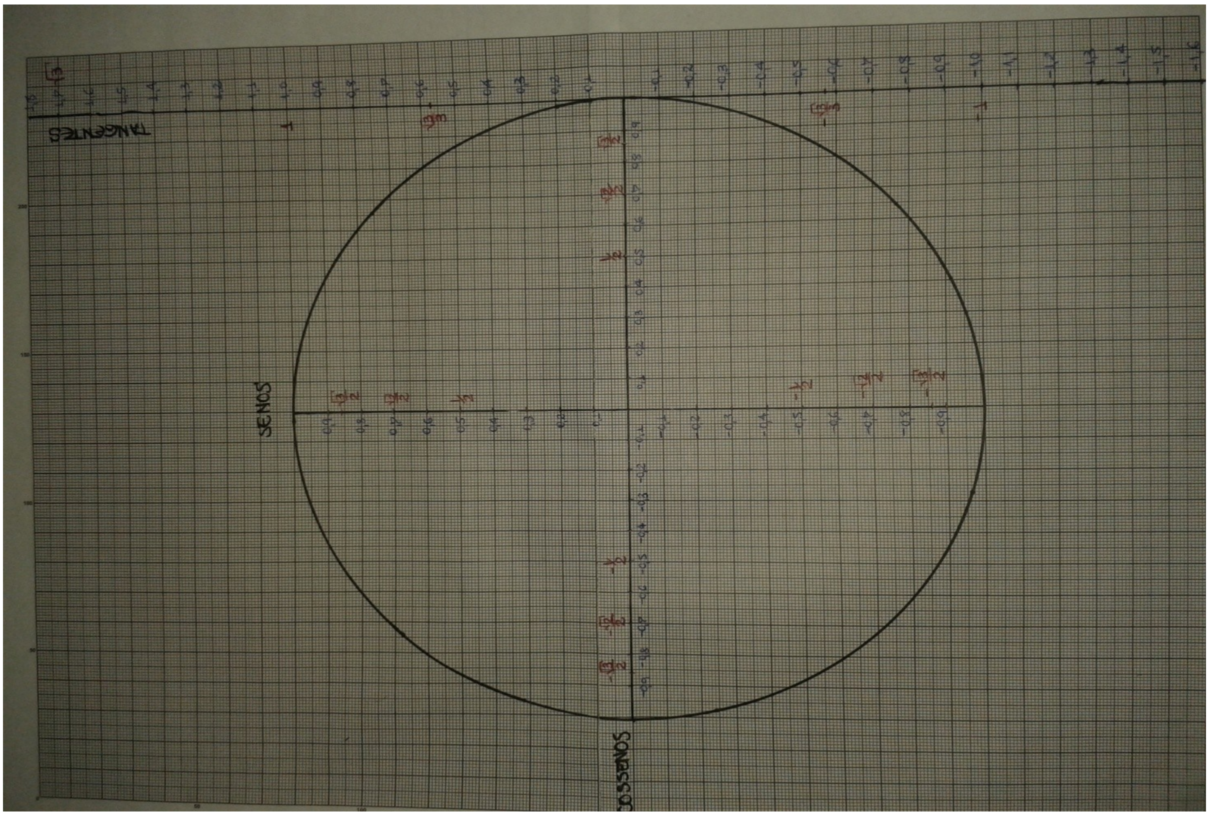
1º tabela: medidas de comprimento dos lados dos triângulos

TRIÂNGULO	Comprimento em centímetros		
	hipotenusa	Cateto oposto	Cateto adjacente
ODC	3,9	2,2	3,2
OFE	8,5	4,7	7,2
OHG	14,5	8	12,2

2º tabela: razões entre as medidas dos comprimentos dos lados dos triângulos

TRIÂNGULO	Razões entre os lados		
	Cateto oposto e hipotenusa	Cateto adjacente e hipotenusa	Cateto oposto e cateto adjacente
ODC	0,6	0,8	0,7
OFE	0,6	0,8	0,7
OHG	0,6	0,8	0,7

ANEXO C – PARTE FIXA DA PRANCHA TRIGONOMÉTRICA CONFECCIONADA POR UM ALUNO



ANEXO D – PARTE GIRATÓRIA DA PRANCHA TRIGONOMÉTRICA CONFECCIONADA POR UM ALUNO