UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

JAKSON IDERNANDO GONZAGA DE SOUZA

UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

JUAZEIRO DO NORTE
2014

JAKSON IDERNANDO GONZAGA DE SOUZA

UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade

JUAZEIRO DO NORTE

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

S715u Souza, Jakson Idernando Gonzaga de
Utilização do software GeoGebra no ensino das funções trigonométricas / Jakson Idernando Gonzaga de Souza. – 2014.
2014.
100 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2014.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade.

1. Trigonometria. 2. Software GeoGebra. 3. Ensino auxiliado por computador. I. Título.

CDD 516.24

JAKSON IDERNANDO GONZAGA DE SOUZA

UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 29 / 05 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Plácido Andrade

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Maria Silvana Alcantara Costa

Profa. Dra. Maria Silvana Alcantara Costa
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Junio Moreira de Alencar

Prof. Ms. Junio Moreira de Alencar
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Aos meus pais, as minhas filhas e a minha esposa Albanita Noronha.

RESUMO

Discutir o uso pedagógico de recursos tecnológicos nas aulas de Matemática tem sido foco de muitos estudos, uma vez que por si só eles não garantem um novo modelo educacional. Neste sentido, esse trabalho tem o objetivo de explorar o software GeoGebra como recurso pedagógico no ensino das funções trigonométricas para alunos da 2ª série do Ensino Médio, de uma escola da rede particular no estado do Ceará, através da visualização das funções trigonométricas no círculo trigonométrico, suas representações gráficas e o papel dos parâmetros na construção dos gráficos dessas funções, oportunizando o contato com recursos diferentes dos presentes em sala de aula. Esse trabalho mostra que o uso da simulação computacional pode ser um meio eficiente de promover o aprendizado de forma significativa, facilitando assim o desenvolvimento de habilidades na compreensão por parte dos discentes dos conteúdos relacionados às funções trigonométricas, num ambiente onde os conteúdos abordados são trabalhados utilizando o amplo campo de informações e interações do computador.

Palavras-chave: Trigonometria. GeoGebra. Ensino. Resultados.

ABSTRACT

Discuss the pedagogical use of technological resources in mathematics classes has been the focus of many studies, since they alone do not guarantee a new educational model. In this sense, this work aims to explore the GeoGebra software as a teaching resource in the teaching of the trigonometric functions for students of 2nd year of high school, a school of private schools in the state of Ceará, through visualization of the trigonometric functions in the unit circle , their graphical representations and the role of parameters in the construction of the graphs of these functions, providing the opportunity for contact with the different features present in the classroom. This work shows that the use of computer simulation can be an effective means of promoting learning significantly, thus facilitating the development of skills in understanding by students of the content related to trigonometric functions, in an environment where the subjects covered are worked using the broad field of information and computer interactions.

Keywords: Trigonometry. GeoGebra. Education. Results.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADRO

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Diversos estudos apontam para o fracasso no ensino tradicional e sugerem renovações na prática docente. Fatores como a preocupação dos professores em cumprir o conteúdo contido nos currículos, atividades em sala de aula que envolvem conceitos de difícil visualização para os alunos, resolução de número excessivo de exercícios repetitivos, além da notação ou terminologia matemática muito sofisticada e de difícil domínio, são apontados como provocadores de distorções no ensino-aprendizagem. O modo de vida atual faz florescer uma imagem desinteressante da escola para os alunos, situação esta, que se agrava quando se fala em disciplinas tidas na escola como “chatas” e não possíveis de serem aprendidas por todos, como é o caso da Matemática.

Isso sugere que o professor precisa alterar esse quadro, modificando a sua proposta pedagógica, optando por práticas educativas que coloquem o aluno como centro do processo educacional, buscando novas formas de desenvolver conceitos.

Também se faz importante observar os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Médio, que chama atenção para o fato de que:

> *“Não se pode mais postergar a intervenção no ensino Médio, de modo a garantir a superação de uma escola que, ao invés de se colocar como elemento central de desenvolvimento dos cidadãos, contribui para sua exclusão. Uma escola que pretende formar por meio da imposição de modelos, de exercícios de memorização, da fragmentação do conhecimento, da ignorância dos instrumentos mais avançados de acesso ao conhecimento e da comunicação. Ao manter uma postura tradicional e distanciada das mudanças sociais a escola como instituição acabará também por se marginalizar” (Brasil, 1999, p. 24).*

Por isso, esse trabalho analisa a aplicação o software GeoGebra como recurso pedagógico no ensino das funções trigonométricas na sala de aula para alunos da 2ª série do Ensino Médio, buscando dentro da “Informática Aplicada ao Ensino de Matemática”, a utilização de um software educacional, adotando pressupostos pedagógicos do Construtivismo.

Esse trabalho tem com objetivo geral apresentar uma proposta para facilitar e melhorar o nível de aquisição de conceitos das funções trigonométricas, suas propriedades e seus gráficos.

Como objetivos específicos, apresentar o GeoGebra como ferramenta didática para:

- Identificar as funções trigonométricas no círculo.
- Construir e interagir com os gráficos das funções trigonométricas.
- Interpretar as características das funções trigonométricas, a partir do seu gráfico, em seguida, a partir da sua lei de formação da função.

Sua estrutura inicia abordando a importância do estudo de inserção de novas metodologias no processo de ensino, como a informática, numa tentativa de tornar o ensino de Matemática mais atrativo e interativo. Em seguida, a História de Trigonometria é abordada desde os seus primeiros relatos históricos na metade do século 17 a.C. até trabalhos de Fourier século XIX d.C.

No terceiro capítulo, relatamos sobre a importância e a presença da Trigonometria no mundo atual.

No quarto capítulo, apresentamos uma descrição das Funções Trigonométricas com sua representação no círculo trigonométrico, seus gráficos, propriedades e suas variações a partir de mudanças nos parâmetros.

Nos dois capítulos seguintes, apresentamos a metodologia da sequência didática desenvolvida, as questões do Pré-teste e do Teste.

No sétimo, fizemos análise dos resultados, onde confirmamos, assim como outros trabalhos sobre o tema, que o uso das novas tecnologias melhora a didática do professor, torna o processo de ensino-aprendizagem mais eficiente e com resultados satisfatórios.

2 INFORMÁTICA E A EDUCAÇÃO

2.1 O computador e o processo de ensino-aprendizagem

Recursos tecnológicos como os softwares pedagógicos estão cada vez mais acessíveis nos ambientes de ensino e de aprendizagem, seja por meio de computadores ou pela internet nos celulares, tablets ou outros dispositivos. As tecnologias de certa forma invadem e compõem o cotidiano de diferentes formas e em diferentes lugares, permeando praticamente todas as áreas do conhecimento humano. Não se pode mais permitir que o ensino de Matemática continue obsoleto como está, meramente expositivo, descontextualizado em dimensão de ensino onde o professor fala e o aluno escreve. Existem outras dimensões a serem exploradas com vistas a enriquecer a e favorecer o ensino de matemática, e quanto a isto, D'Ambrósio (1998, p.15) pondera:

> *"Educação é futuro. É nossa missão preparar jovens para o mundo de amanhã. Os programas de matemática são em sua maioria, justificados exclusivamente porque "no meu tempo se fazia assim". A obsolescência dos programas de matemática é absolutamente injustificável*".

A utilização pelo professor de ferramentas como o computador na ministração de aulas para o ensino de Matemática ou como canal de informação e comunicação pelo aluno representa a superação de práticas tradicionais de reprodução que tem como foco o ato de ensinar e não o ato de aprender.

O computador e seus aplicativos, hoje representam uma nova forma de olhar a educação, bem como sua organização e sua apresentação. As novas tecnologias de comunicação que estão transformando o mundo estão cada vez mais sendo incorporadas na vida do aluno. Por isso, faz-se necessário que o professor tenha um mínimo de conhecimento tecnológico e muito conhecimento pedagógico para integrar esses novos recursos satisfatoriamente ao seu programa de curso.

2.2 Importância do estudo

As tecnologias de certa forma invadem e compõem o cotidiano de diferentes formas e em diferentes lugares, permeando praticamente todas as áreas do conhecimento humano. Sabe-se que numa era tecnológica, é fundamental que os alunos se familiarizem com o computador para aprofundar mais a aprendizagem Matemática.

Portanto, compete ao professor e aluno explorarem ao máximo todos os recursos que a tecnologia nos apresenta, de forma a colaborar mais e mais com o processo de ensino-aprendizagem, na aquisição de um conhecimento contextualizado e próximo do mundo de convívio dos nossos alunos.

No entanto, o computador só será uma excelente ferramenta, se houver a consciência de que possibilitará mais rapidamente o acesso ao conhecimento e não, somente, utilizado como uma máquina de escrever, de entretenimento, de armazenagem de dados. Urge usá-lo como tecnologia a favor de uma educação mais dinâmica, como auxiliadora de professores e alunos, para uma aprendizagem mais consistente, não perdendo de vista que o computador deve ter um uso adequado e significativo, pois Informática Educativa nada tem a ver com aulas de computação.

3 TRIGONOMETRIA E SUA HISTÓRIA

3.1 Raízes

Assim como na Matemática, as origens da Trigonometria também são incertas. Os primeiros indícios de rudimentos de trigonometria surgiram tanto no Egito quanto na Babilônia, a partir do cálculo de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes. Por volta de 1650 a.C., no Egito, isso pode ser observado no Papiro Ahmes**,** conhecido como Papiro Rhind. Dos 84 problemas contidos nesse papiro, quatro fazem menção ao seqt de um ângulo, que nos dias de hoje, é denominada cotangente de um ângulo.

Figura 1 - Papiro Ahmes[12]

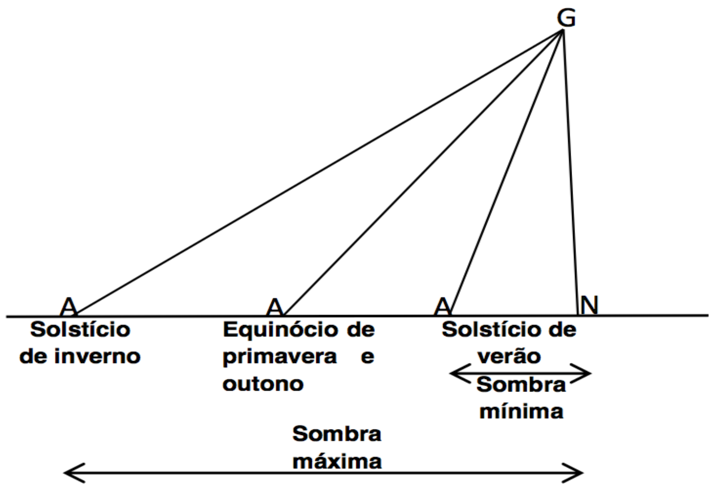
A Trigonometria surgiu com a ideia de associar comprimentos de sombras projetadas por uma vara vertical com horas do dia: os relógios de sol, denominados gnômon, nome dados pelos gregos, segundo o historiador Heródoto (490 - 420 a.C.).

O gnômon era uma vara que se espetava no chão (GN na figura 2), formando com ele um ângulo de 90º, e o comprimento de sua sombra (AN) era observado, num horário determinado: meio dia. Como se usava sempre a mesma vareta, na mesma posição, o comprimento de AN ao meio dia variava com o ângulo A. Essa colocação de AN, ou $\frac{AN}{GN}$, como uma função do ângulo A, nos dias de hoje denominada cotangente.

---

[2] Figura extraída do site: http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/prhind.html

Figura 2: Esquema do gnômon[3]



A observação dos limites da sombra permitia medir a duração do ano e o movimento lateral diário do ponto A permitia medir a duração do dia.

O desenvolvimento da trigonometria está intimamente ligado ao da geometria. Neste campo, a Grécia produziu grandes sábios; entre eles Thales de Mileto (séc. VI a. C), que viajava muito pelos centros antigos de conhecimento e deve ter obtido informações sobre Astronomia e Matemática, aprendendo Geometria no Egito e na Babilônia. Entrou em contato, sob o governo de Nabucodonosor, com as primeiras tabelas e instrumentos astronomicos e diz-se que em 585 a.C. conseguiu predizer o eclipse solar que ocorreria nesse ano, assombrando os seus contemporâneos. Destacou-se também, pelos seus conhecimentos de Meteorologia. Tentou organizar a Geometria de forma dedutiva e enunciou o famoso Teorema de Tales.

Pitágoras, (séc. VI a. C.) outro sábio grego importante, foi filósofo e matemático grego, nasceu na cidade de Samos, fundou uma escola em Crotona (colônia grega na península itálica), cujos princípios foram determinantes para evolução geral da Matemática e da Filosofia ocidental.

A maior contribuição de Pitágoras ou dos seus discípulos foi o estudo das relações dos lados de um triângulo retângulo, onde provaram que a soma do quadrado dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

---

[3] Figura extraída do site: HTTP://miltonborba.org/Mat_Aplic/MAT_APLIC-Trigonometria.pdf

Os egípcios já sabiam que um triângulo cujos lados são 3, 4, 5 tem ângulo reto, mas os pitagóricos foram os primeiros a conseguir uma prova da proposição. A lei dos intervalos musicais pode ser tomada como um prenúncio do aparecimento das funções seno e cosseno no osciloscópio do futuro para se estudar o som (Bell, 1945). Alguns pitagóricos chegaram até a falar da rotação da Terra sobre seu eixo.

Por volta de 180 a. C, Hipsícles dividiu o zodíaco em 360 partes. Posteriormente, essa ideia foi generalizada por Hiparco para qualquer círculo.

Por volta de 100 d. C., Menelau de Alexandria produziu um tratado sobre cordas num círculo. Seu tratado Sphaerica é o trabalho mais antigo conhecido sobre trigonometria esférica.

No trabalho Syntaxis Mathematica, escrita por Ptolomeu de Alexandria , operando com as cordas dos arcos, chegou a um equivalente das fórmulas de seno da soma e da diferença de dois arcos, isto é sen (a + b) e sen (a - b). A fórmula para a corda da diferença foi usada por ele para a construção da tabela trigonométrica. A esta obra foi associado o título de Al magiste ou “a maior".

Ptolomeu utilizou o que pode ser considerado o prenúncio da conhecida relação fundamental da trigonometria:

$$sen^2 x + cos^2 x = 1.$$

Ptolomeu dividiu a circunferência em 360 partes e o diâmetro em 120 partes, utilizou como uma boa aproximação para o número π à fração ${}^{377}/_{120}$.

Por volta do ano 200 a. C. os gregos estavam interessados em calcular a distância entre dois pontos da superfície terrestre e também o raio da Terra. Foi Eratóstenes de Cirene (276 -196 a. C.), que produziu a mais notável medida da Antiguidade para a circunferência da Terra, usando semelhança de triângulos e razões trigonométricas, o que o levou a perceber a necessidade de relações mais sistemáticas entre ângulos e cordas. Para tornar possível o trabalho de Eratóstenes, foi era necessário na época, o conhecimento do conceito de ângulo e de como medi-lo.

Por volta do ano 150 a. C., Hiparco de Nicéia, deu grandes contribuições à astronomia elaborando um catálogo estelar , organizando os dados empíricos da astronomia babilônica e desenvolvendo métodos de descoberta da precessão dos equinócios. Escreveu um tratado em doze livros onde se ocupou da construção da primeira tabela trigonométrica, incluindo uma tábua de cordas. Devido a esse tratado veio a ser chamado de Pai da Trigonometria.

Posteriormente, os hindus, por volta do século V, substituíram a corda, pela semicorda, a que deram o nome de *ardha – jiva* ou *jiva – ardha* (corda metade). Com o tempo, por brevidade, essas palavras compostas passaram a serem escritas apenas como *jiva* (corda). Mais tarde, os árabes, ao estudarem as obras dos astrônomos hindus e traduzirem para a sua língua os termos técnicos, transliteraram foneticamente *jiva* em jiba, palavra inexistente no vocabulário árabe, a qual, devido à pratica entre eles de omitir as vogais, passaram a escrever *jb* . Mas tarde, outros autores que depararam com essa abreviatura começaram a usar, em seu lugar, a palavra *jaib*, que no vocabulário árabe significa “enseada” ou “baía”. No século XII, ao traduzir essa palavra para o latim, Gerardo Cremona (1114 – 1187), utilizou o vocabulário *sinus*, equivalente latino de enseada, de onde veio à palavra *seno*.

Os hindus melhoraram os métodos de tabulação e de interpolação quadrática e linear e as principais funções trigonométricas foram introduzidas.

Aryabhata, matemático hindu, por volta do século VI d.C. usando nove símbolos do sistema decimal, calculava valores para a semicorda. Elaborou tabelas envolvendo metade de cordas que são tabelas de senos e usou jiva no lugar de seno. Essa tabela foi reproduzida no trabalho de Brahmagupta, em 628 d.C., e um método detalhado para construir uma tabela de senos para qualquer ângulo foi dado por Bhaskara em 1150 d.C.

No ano 505 d.C., em Varahamihira encontramos algo semelhante a relação fundamental a relação fundamental.

No final do século IX d.C., por influência dos estudos de Al-Battani que a trigonometria hindu foi adotada pelos árabes. Al-Battani adotou o conceito de círculo de raio unitário, aparecendo o nome da função seno.

Em 980 d.C., o matemático arábe Abû’l Wêfa iniciou uma organização de provas e teoremas de trigonometria.

No século XIV, Purbach**,** construiu uma nova tábua de senos, muito difundida entre os estudiosos europeus. Purbach foi o mestre de Regiomontanus (1436-1475), um dos maiores matemáticos do século XV, que colocou a Trigonometria como uma ciência independente da Astronomia.

Regiomontanus escreveu um Tratado sobre triângulo, contendo uma trigonometria completa, aperfeiçoando a tabela de senos de Purbach, e introduziu na trigonometria européia o uso das tangentes, incluindo-as em suas tábuas.

No século XVI, Viète em sua obra *Canon Mathematicus* ele apresenta a ideia de decompor em triângulos retângulos os triângulos oblíquos, para determinar todas as medidas dos seus lados e ângulos. A trigonometria deu um tratamento analítico e calculou o sen 1' com treze casas decimais. Usou letras para representar números, dando grande avanço a Álgebra.

No século XVII, Roberval apresenta problemas que mostram uma trigonometria que não se resume só a cálculos e esboça o primeiro gráfico da função seno.

Na segunda metade do século XVII e inicio do século XVIII, Isaac Newton trabalhou com séries infinitas, tendo expandido arcsen x em séries e, por reversão, deduzido a série para sen x. Criou uma fórmula geral sen (nx) e cos (nx).

Em 1759, Kastner foi o primeiro matemático a definir as funções trigonométricas de números puros.

No século XVIII, Euler usando o círculo trigonométrico de raio unitário introduziu o conceito de seno, cosseno e de tangente como números ou razões ou coordenadas de pontos e as notações atualmente utilizadas. Na sua obra Introductio, em 1748, estabeleceu o tratado analítico das funções trigonométricas e usou as abreviações sen, cos, tang, cot, sec e cosec.

Neste trabalho o seno de um arco foi exposto como o número obtido pela ordenada de um ponto de um círculo unitário, ou o número definido pela série:

$$sen\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

Ao apresentar as relações, $sen\, x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ e $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{ix}}{2}$ onde i é a unidade imaginária, relacionou essas funções com os números complexos.

Fourier, no século XIX, estudando movimentos periódicos, relacionou a Análise Matemática com a trigonometria.

3.2 Nos dias atuais

O mundo está em constante mudança, dado o grande e rápido desenvolvimento da tecnologia. Máquinas de calcular, computadores, internet são assuntos do cotidiano. E todos eles têm ligações estreitas com uma matemática que amplia o pensamento crítico e as habilidades para a resolução de problemas, proporcionando perspectiva em eventos da vida real. Embora a trigonometria seja uma ciência muito antiga, suas aplicações sempre aparecem no nosso cotidiano e se estende a outros campos da matemática e atividades, como a Acústica, a Topologia e quase todos os ramos da Engenharia (elétrica, mecânica e civil) e entre outras atividades humanas.

Ela é usada em sistemas de satélites e astronomia, aviação, engenharia, levantamento topográfico, Geografia e muitas outras áreas. Precisamente, a trigonometria é um ramo da matemática que lida com triângulos, círculos, ondas e oscilações.

Não é possível separar a Arquitetura da Trigonometria, o que é fundamental para superfícies curvas em materiais de construção como aço e vidro. A ciência é utilizada para determinar a altura de prédios ou criar objetos dimensionais para utilizar em construções. A trigonometria é utilizada para fazer demarcações de cubículos em um prédio de escritórios, além de ser útil na predeterminação de padrões geométricos e da quantidade de material e mão-de-obra necessários para erguer uma estrutura. Quando ela estiver erguida, não só será forte, mas também terá medidas precisas.

A mesma ciência é utilizada na indústria musical. O som viaja em ondas que são utilizadas no desenvolvimento de música pelo computador. Um computador não entende a música como o ser humano; ele a representa matematicamente pelas suas ondas constituintes. Precisamente, engenheiros de som que trabalham no avanço da música digital e compositores de alta tecnologia precisam aplicar a lei básica da trigonometria, como as funções de seno e cosseno. Os padrões das ondas de música não são tão regulares como as das funções seno e cosseno, mas elas ainda são úteis no desenvolvimento da música digital.

Na Astronomia, triangulação, que é a aplicação da Trigonometria, é utilizada por astrônomos para calcular a distância entre a Terra e estrelas próximas. Em Geografia, ela é utilizada para medir a distância entre pontos de referência, além de ser também utilizada em sistemas de navegação por satélite. Por exemplo, um piloto decolando do aeroporto de Guarulhos em São Paulo deverá saber qual o ângulo de decolagem e quando deve virar a certo ângulo no céu para chegar até o aeroporto da cidade de Fortaleza.

Portanto, percebemos que não é mais possível pensar no ensino de Matemática que desconsidere o uso das tecnologias de informação e comunicação tanto para aumentar a eficácia do ensino quanto para desenvolver no aluno o senso crítico.

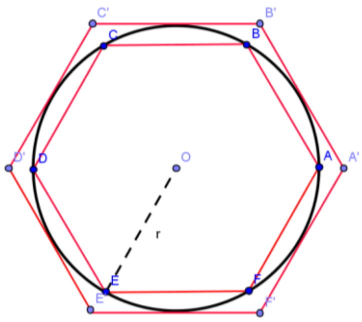
4 TRIGONOMETRIA NO CÍRCULO

4.1 Comprimento de circunferência e o número π.

Considerando uma circunferência qualquer, de comprimento c e diâmetro $2r$, sabemos que, desde muito antes de Cristo, que a razão $\frac{c}{2r}$ é uma constante.

Talvez o matemático mais obcecado pela procura dessa constante, tenha sido Arquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.), o qual inscreveu e circunscreveu a mesma circunferência de raio r em hexágonos regulares.

FIGURA 3: Hexágono inscrito e circunscrito no GeoGebra.



Fonte: Arquivo pessoal do autor

Calculando os perímetros do hexágono inscrito e do circunscrito, Arquimedes obteve: 6r e 6,92r, respectivamente. Assim, a razão $\frac{c}{2r}$ é tal que:

$$\frac{6r}{2r} < \frac{c}{2r} < \frac{6{,}92r}{2r} \Longrightarrow 3 < \frac{c}{2r} < 3{,}46.$$

A seguir, Arquimedes inscreveu e circunscreveu essa circunferência de raio r em dodecágonos regulares.

Calculou então os perímetros dos dodecágonos inscrito e circunscrito: $6{,}20r$ e $6{,}44r$, respectivamente. Logo:

$$\frac{6{,}20r}{2r} < \frac{c}{2r} < \frac{6{,}44r}{2r} \Longrightarrow 3{,}10 < \frac{c}{2r} < 3{,}22.$$

Arquimedes continuou esse procedimento até chegar a polígonos regulares inscritos e circunscritos com 96 lados, obtendo assim a aproximação:

$$\frac{c}{2r} \cong 3{,}1415$$

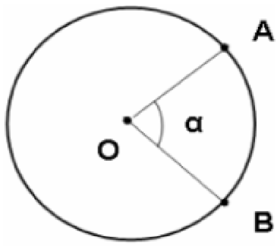
Sabe-se, hoje, que a razão $\frac{c}{2r}$ é um número irracional 3,14159265..., que simbolizamos pela grega π. Portanto, o comprimento de uma circunferência c de raio r é dado por:

$$c = 2\pi r$$

4.2 Arco de circunferência

Dada uma circunferência de centro O, raio r e dois pontos distintos A e B pertencentes à circunferência, esta fica dividida em duas partes. Cada uma dessas partes, que incluem A e B, é denominada arco de circunferência.

FIGURA 4: Arco de circunfência[4]



O comprimento de um arco $\widehat{AB}$ é proporcional à medida do ângulo central α, quanto maior o ângulo central, maior o comprimento do arco; e quanto menor a medida do ângulo, menor o comprimento do arco.

[4] figura extraída do site: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/2f/Circ5.png

4.2.1 Medida de um arco

Para medirmos arcos, em geral, utilizamos grau e radiano como unidades de medidas.

Grau (símbolo °) é um arco unitário igual a $\frac{1}{360°}$ da circunferência que contém o arco.

Radiano (símbolo rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco.

Sabemos que circunferência mede 360°. Qual será sua medida em radianos? Sendo o comprimento de uma circunferência de raio r, numa unidade u, igual a 2 $\pi.r$ e x a medida da circunferência, temos pela regra de três:

rad		u
1	$\rightarrow$	r
x	$\rightarrow$	2 πr

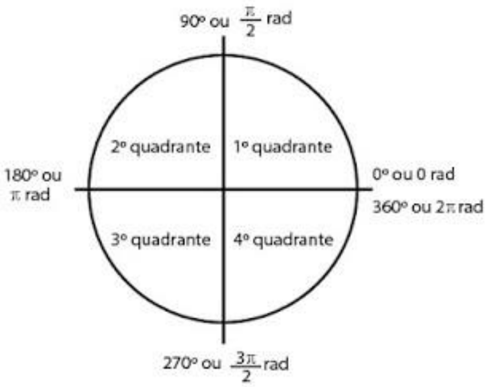
$$\therefore x = \frac{2\pi r}{r}$$

$$\therefore \; x = 2\pi \text{ radiano}$$

Assim, temos:

A medida de uma circunferência de raio r ou um arco de uma volta é 2π rad.

FIGURA 5: Círculo trigonométrico[5]

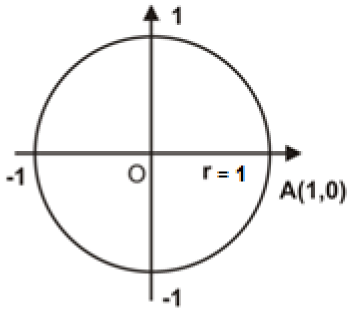


[5] figura extraída do site:
http://1.bp.blogdpot.com/MYr8hDGXcHA/T4mPXD3QR7I/AAAAAAAAACw/f8Bm9NzM0_c/s1600/03.jpg

4.3 Circunferência trigonométrica

Consideremos uma circunferência de raio unitário, cujo centro coincide com a origem de um sistema cartesiano ortogonal.

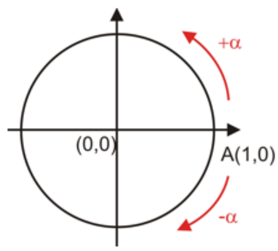
FIGURA 6: Círculo trigonométrico[6]



Convenções

I. O ponto A=(1,0) é a origem de todos os arcos a serem medidos na circunferência.
II. Se um arco α for medido no sentido horário, essa medida será negativa.
III. Se um arco α for medido no sentido anti-horário, essa medida será positiva.

FIGURA 7: Círculo trigonométrico[7]

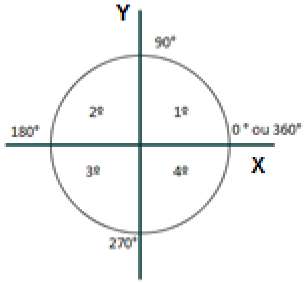


6 Figura extraída do site: http://pt.wikibooks.org//commons.wikimedia.org/wiki/File:Yhvyvczsa7.png

7 Figura extraída do site: http://n.i.uol.com.br/licaodecasa/ensmedio/matematica/ciclo3.gif

IV. O plano cartesiano divide o ciclo trigonométrico em quatro partes, cada uma das quais é chamada quadrante.

FIGURA 8: Construção do círculo trigonométrico no GeoGebra.

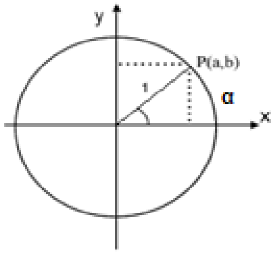


Fonte: Arquivo pessoal do autor.

4.4 Arcos trigonométricos

É possível associar a todo número real α , um ponto P_α sobre a circunferência da seguinte maneira:

FIGURA 9: Arco no círculo trigonométrico[8]



(1) Seja um número α > 0, considere um ponto P_α sobre a circunferência $\mathcal{C}$ de tal maneira que, percorrendo-se a circunferência no sentido anti-horário, o comprimento total do arco P_0P_α seja igual a α .

(2) Seja um número α < 0, considere um ponto P_α sobre circunferência $\mathcal{C}$ de tal maneira que, percorrendo-se a circunferência no sentido horário, o comprimento total do arco P_0P_α seja igual a α .

Estas regras definem uma função $\boldsymbol{E}: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{C}$ que a cada número real α associa um ponto $P_\alpha = \boldsymbol{E}(\alpha)$ sobre a circunferência $\mathcal{C}$.Esta função é

[8] Figura extraída do site: http://n.i.uol.com.br/licaodecasa/ensmedio/matematica/ciclo3.gif

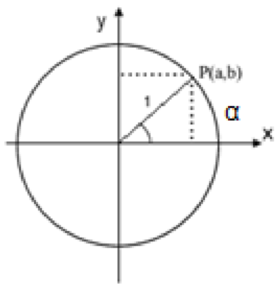
chamada função de Euler. Note que $P_{\alpha + 2\pi} = P_\alpha$, para todo número real α , pois adicionar 2π a qualquer número real α, significa simplesmente, que, a partir do ponto P_α , damos uma volta completa no círculo trigonométrico, terminando no mesmo ponto que começamos. Analogamente, $P_{\alpha - 2\pi} = P_{\alpha.}$ Assim sendo, para todo k $\in Z$, tem-se ***E*** ($P_{\alpha + 2k\pi}$) = ***E*** (α), seja qual for $\alpha \in \mathcal{R}$. Esta observação mostra que a função de Euler é periódica de período 2π.

4.5 As Funções Trigonométricas

4.5.1 Função seno e cosseno

Dado um número real α, seja P_α sua imagem no ciclo. Denominamos seno de α sua ordenada b, do plano cartesiano, e cosseno α a abscissa a.

FIGURA 10: Arcos no círculo trigonométrico[9]



Assim:

- Denominamos função seno a função f: $\mathcal{R} \to \mathcal{R}$ que associa a cada real x o real b = sen x, isto é, f(x) = sen x.
- Denominamos função cosseno a função f: $\mathcal{R} \to \mathcal{R}$ que associa a cada real x real a = cos x, isto é, f(x) = cos x.

Segue-se imediatamente desta definição que vale, para todo $\alpha \in \mathcal{R}$, a relação fundamental:

$$\boldsymbol{sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1}$$

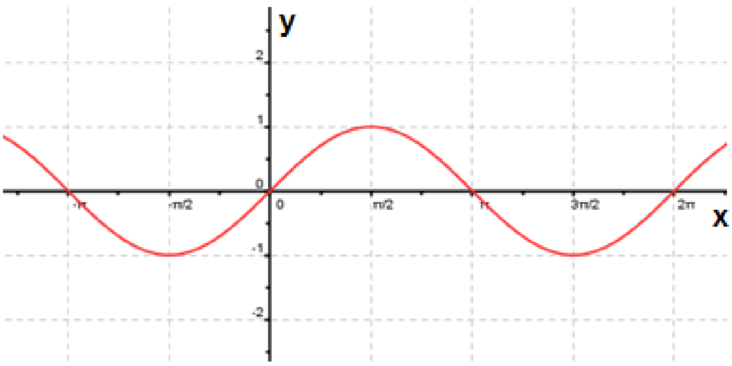
---

[9] Figura extraída do site: http://n.i.uol.com.br/licaodecasa/ensmedio/matematica/ciclo3.gif

Características da função $f(x) = sen\, x$

- Domínio é $\mathcal{R}$.
- Imagem é o intervalo $[-1, 1]$, pois a ordenada b pode variar apenas de - 1 a + 1.
- É periódica e seu período é 2π, pois, x e $x + 2k\,\pi$, para todo k ∈ Z , têm mesma imagem P no ciclo, logo $sen\, x = sen\,(x + 2k\,\pi)$.
- Gráfico $G_f = \{(x, f(x)); x \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{R}\, X\, \mathcal{R}$.

FIGURA 11: Gráfico da função seno no GeoGebra.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

- Simetria

  $sen\,(\pi - x) = sen\, x$

  $sen\,(\pi + x) = -sen\, x$

  $sen\,(2\pi - x) = -sen\, x$

  $sen\,(-x) = -sen\, x$, o que a caracteriza como uma função ímpar.

- Sinal/monotonicidade

  1º quadrante: positiva/crescente

  2º quadrante: positiva/decrescente

  3º quadrante : negativa / decrescente

  4º quadrante : positiva / crescente

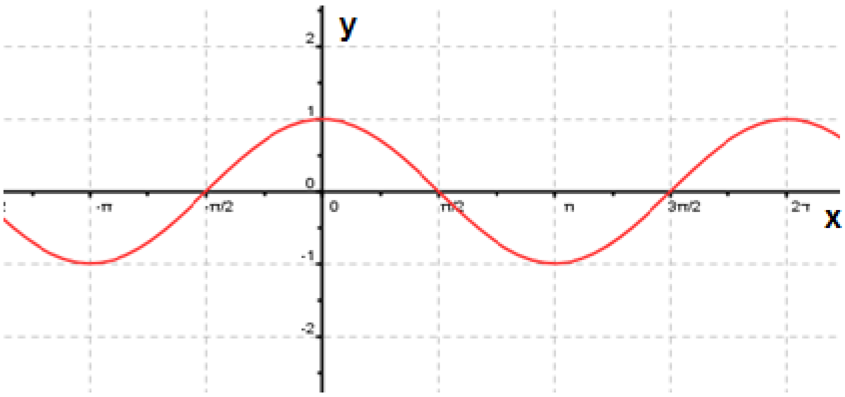
- Arcos notáveis

x	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$sen\ x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

Características da função $f(x) = cos\ x$.

- Domínio é $\mathcal{R}$.
- Imagem é o intervalo $[-1, 1]$, pois a abscissa a pode variar apenas de - 1 a + 1.
- É periódica e seu período é $2.\pi$, pois, x e $x + 2k\,\pi$, para todo k ∈ Z , têm mesma imagem P no ciclo, logo $cos\ x = cos\ (x + 2k\,\pi\ )$.
  - Gráfico $G_f = \{(x, f(x)); x \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{R}\ X\ \mathcal{R}$

FIGURA 12: Gráfico da função cosseno no GeoGebra



Fonte: Arquivo pessoal do autor

- Simetria

$cos\ (\pi - x\ ) = -cos\ x$

$cos\ (\pi + x\ ) = -cos\ x$

$cos\ (\ 2\pi - x\ ) = cos\ x$

$cos\ (\ - x\ ) = cos\ x$, o que a caracteriza como uma função par.

- Sinal/monotonicidade

1º quadrante: positiva/decrescente

2º quadrante: negativa/decrescente

3º quadrante: negativa/crescente

4º quadrante: positiva/crescente

- Arcos notáveis

$\boldsymbol{x}$	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\boldsymbol{cos\ x}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	- 1	0	1

Funções da forma $f(x) = a + b.sen\,(cx + d)$ ou $f(x) = a + b.cos(cx + d)$, com $b \neq 0$.

Possui período igual a $\frac{2\pi}{|\,c\,|}$

Conjunto imagem $[a - b, a + b]$.

4.5.2 Funções derivadas

Das funções seno e cosseno derivam as outras funções trigonométricas, a saber:

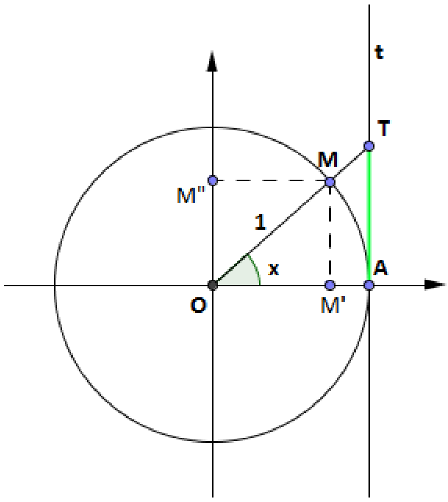
- tg x = $\frac{sen\,x}{\cos x}$, denominada tangente.
- cotg x = $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, denominada cotangente.
- sec x = $\frac{1}{\cos x}$, denominada secante.
- cossec x = $\frac{1}{\operatorname{sen} x}$, denominada cossecante.

4.5.3 Função tangente

Considerando um arco $\widehat{AM}$, cuja medida é o número real x, temos, tg x = $\frac{sen\,x}{\cos x}$, para todo x ∈ $\mathcal{R}$ / x ≠ $\frac{\pi}{2} + k\pi, com\ \ k \in\ Z$.

No ciclo trigonométrico, considere a reta t tangente à circunferência trigonométrica no ponto A=(1,0). Tal reta é perpendicular ao eixo OX. A reta que passa pelo ponto M e pelo centro da circunferência intersecta a reta tangente t no ponto T=(1,t').

FIGURA 13: Círculo trigonométrico no GeoGebra.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Como os triângulos retângulos OMM' e OTA são semelhantes, podemos estabelecer:

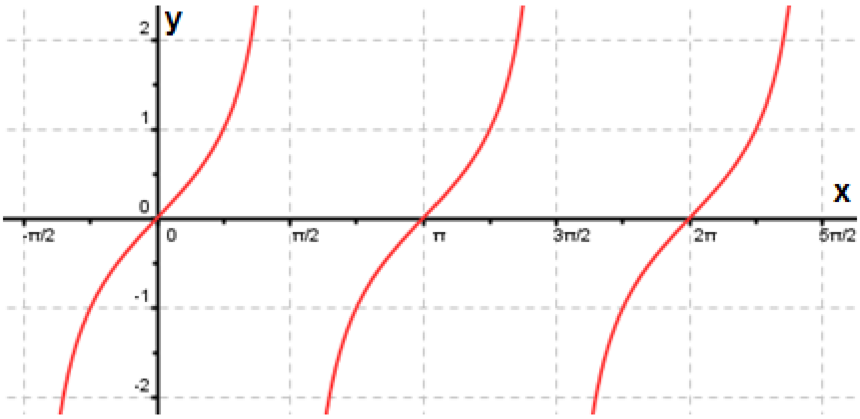
$$\frac{\overline{MM\prime}}{\overline{TA}} = \frac{\overline{OM\prime}}{\overline{OA}} \Longrightarrow \frac{sen\ x}{\overline{TA}} = \frac{\cos x}{1} \Longrightarrow \overline{TA} = \frac{sen\ x}{\cos x} = tg\ x$$

Assim, a ordenada deste ponto T, coincide com o valor da tangente do arco $\widehat{AM}$ correspondente ao ângulo x.

Características da função $f(x) = tg\ x$

- Gráfico $G_f = \{(x, f(x)); x \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{R}\ X\ \mathcal{R}$

FIGURA 14: Gráfico da função tangente no GeoGebra



Fonte: Arquivo pessoal do autor

- Domínio D = { x ∈ $\mathcal{R}$ / x ≠ $\frac{\pi}{2} + k\pi, com\ \ k \in\ Z$ }
- Imagem I = $\mathcal{R}$.
- Período $\pi\ rad$.
- Função ímpar, pois $tg\ (-x)\ =\ -tg\ (x)$.

- Sinal/monotonicidade

1º quadrante: positiva/crescente

2º quadrante: negativa/crescente

3º quadrante: positiva/crescente

4º quadrante: negativa/crescente

A função da forma $f(\,x\,)\ =\ a\ +\ b\,.tg(\,cx\ +\ d\,)$, com $b\ \neq 0$.

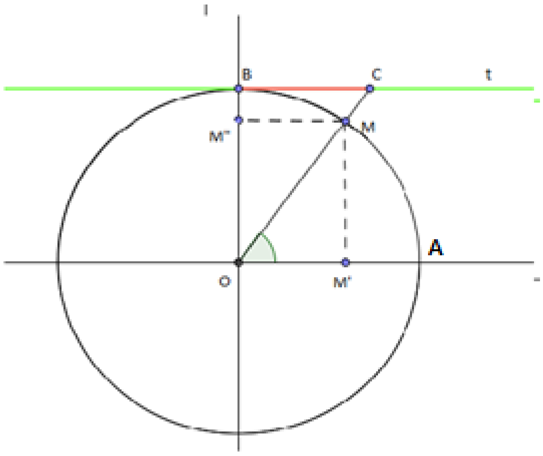
Possui período igual a $\frac{\pi}{|\,c\,|}$

Conjunto imagem igual a $\mathcal{R}$.

4.5.4 Função cotangente

Seja a reta t tangente à circunferência trigonométrica no ponto B =(0,1). Tal reta é perpendicular ao eixo OY. A reta que passa pelo ponto M e pelo centro da circunferência intersecta a reta tangente t no ponto C =(c’,1).

FIGURA 15: Círculo Trigonométrico no GeoGebra.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Como os triângulos OMM” e OBC são semelhantes, temos:

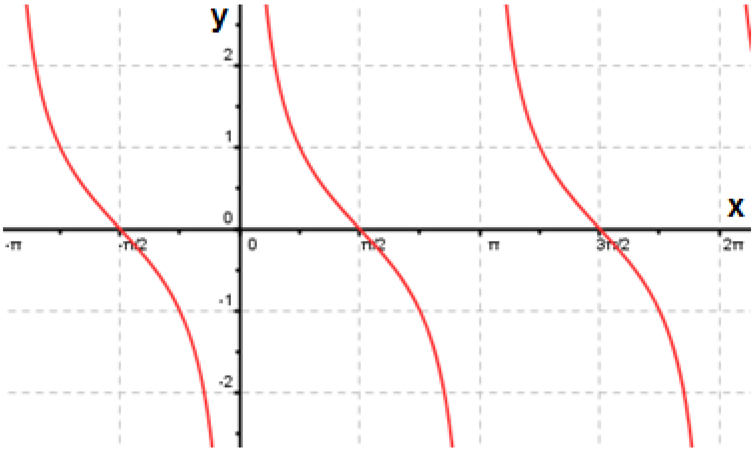
$$\frac{\overline{MN''}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{OM''}}{\overline{OB}} \Rightarrow \qquad \frac{\cos\ x}{\overline{CB}} = \frac{\text{sen}\, x}{1} \Rightarrow \qquad \overline{\text{CB}} = \frac{sen\ x}{\cos x} = cotg\ x$$

Assim, a abscissa deste ponto C, coincide com o valor da cotangente do arco $\widehat{AM}$ correspondente ao ângulo x.

Características da função $f(x) = cotg\ x$

- Gráfico $G_f = \{(x, f(x)); x \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{R}\ X\ \mathcal{R}$

FIGURA 16: Gráfico da função tangente no GeoGebra



Fonte: Arquivo pessoal do autor

- Domínio D = { x ∈ $\mathcal{R}$ / x ≠ $k\pi, com\ \ k \in\ Z$ }
- Imagem $I = \mathcal{R}$.
- Período é $\pi\ rad$.
- Função ímpar, pois $cotg(-x) = -cotg\ (x)$.
- Sinal/monotonicidade

  1º quadrante: positiva/decrescente

  2º quadrante: negativa/decrescente

  3º quadrante: positiva/decrescente

  4º quadrante: negativa/decrescente

- A função da forma $f(x) = a + b.cotg(cx + d)$, com $b \neq 0$.

  Possui período igual a $\frac{\pi}{|c|}$

  Conjunto imagem igual a $\mathcal{R}$.

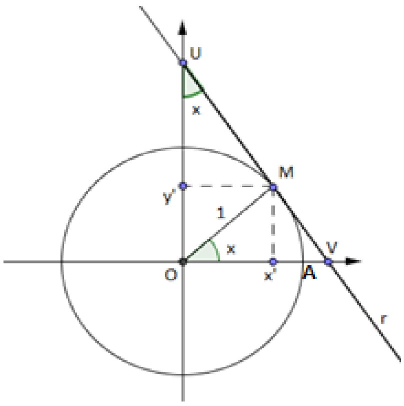
4.5.5 Função secante

Dado um arco $\widehat{AM}$, cuja medida é o número real a, a secante é o inverso do cosseno, ou seja:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \text{, para todo } x \in \mathcal{R} \,/\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{com } k \in Z.$$

No círculo trigonométrico, considere a reta r tangente à circunferência trigonométrica no ponto M=(x',y'). Esta reta é perpendicular à reta que contém o segmento OM. A interseção da reta r com o eixo OX determina o ponto V=(v,0).

FIGURA 17: Círculo Trigonométrico



Fonte: Arquivo pessoal do autor

Como os triângulos retângulos OMX' e OMV são semelhantes, podemos estabelecer:

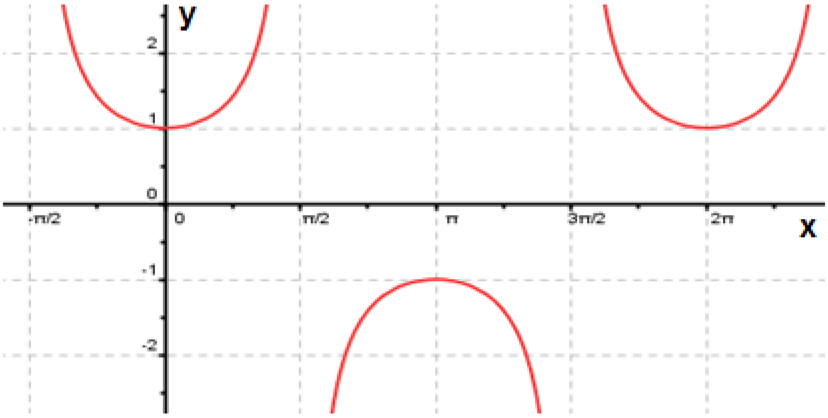
$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OV}} = \frac{\overline{OX'}}{\overline{OM}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\overline{OV}} = \frac{\cos x}{1} \quad \Rightarrow \quad \overline{OV} = \frac{sen\ x}{\cos x} = \sec x$$

Logo, a abscissa do ponto V coincide com o valor da secante do arco AM correspondente ao ângulo a.

Características da função $f(x) = sec\ x$

- Gráfico $G_f = \{(x, f(x)); x \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{R}\ X\ \mathcal{R}$

FIGURA 18: Gráfico da função secante no GeoGebra



Fonte: Arquivo pessoal do autor

- Domínio D = x ∈ $\mathcal{R}$ / x ≠ $\frac{\pi}{2} + k\pi, com\ \ k \in\ Z\}$
- Imagem I = $\mathcal{R}$ -] -1, 1 [
    - Período é $2\pi\ rad$.
    - Função par, pois $sec\ (-x)\ =\ \ sec\ (x)$.
    - Simetria

      $sec\ (\pi\ -\ x\ )\ =\ -sec\ x$

      $sec\ (\pi\ +\ x\ )\ =\ \ -sec\ x$

      $sec\ (\ 2\pi\ -x\ )\ =\ \ sec\ x$

    - Sinal/monotonicidade

      1º quadrante: positiva/crescente

      2º quadrante: negativa/crescente

      3º quadrante: negativa/decrescente

      4º quadrante: positiva/decrescente

    - A função da forma $f(\ x\ )\ =\ a\ +\ b\ .sec\ (\ cx\ +\ d\ )$, com $b\ \neq 0$.

      Possui período igual a $\frac{2\pi}{|\ c\ |}$

      Conjunto imagem igual a $\mathcal{R} -]a - b, a\ +\ b[$

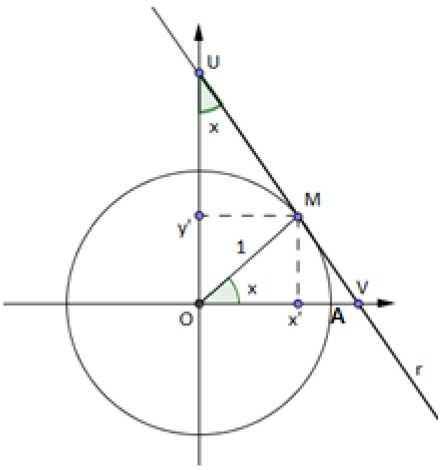
4.5.6 Função cossecante

Dado um arco $\widehat{AM}$, cuja medida é o número real a, a cossecante é o inverso do seno, ou seja:

$$\text{cossec x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\text{, para todo } x \in \mathcal{R} \text{ / } x \neq k\pi, \text{com } k \in Z.$$

No círculo trigonométrico, considere a reta r tangente à circunferência trigonométrica no ponto M=(x', y'). Esta reta é perpendicular à reta que contém o segmento OM. A interseção da reta r com o eixo OY determina o ponto U=(0, u).

FIGURA 19: Círculo Trigonométrico



Fonte: Arquivo pessoal do autor

Como os triângulos retângulos OMX' e OMU são semelhantes, podemos estabelecer:

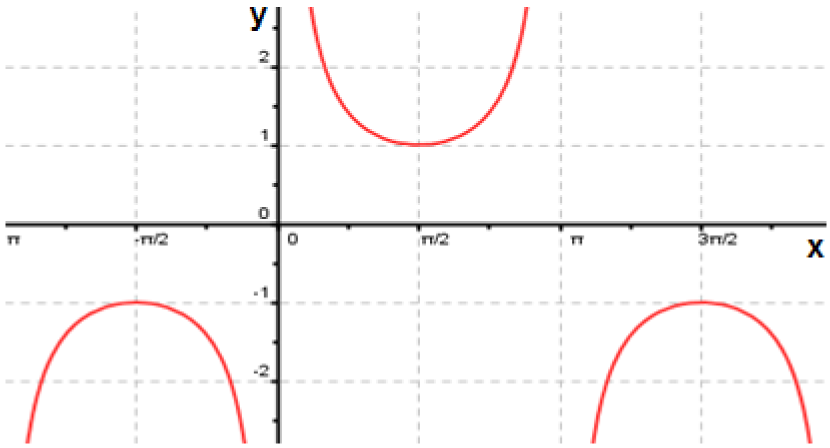
$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OU}} = \frac{\overline{MX\prime}}{\overline{OM}} \Longrightarrow \frac{1}{\overline{OU}} = \frac{\operatorname{sen} x}{1} \Longrightarrow \overline{OU} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cossec} x$$

Assim, a ordenada do ponto U coincide com o valor da cossecante do arco $\widehat{AM}$ correspondente ao ângulo a.

Características de função $f(x) = cossec\ x$

- Gráfico $G_f = \{(x, f(x)); x \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{R}\ X\ \mathcal{R}$

FIGURA 20: Gráfico da função cossecante no GeoGebra



Fonte: Arquivo pessoal do autor

- Domínio D = x ∈ $\mathcal{R}$ / x ≠ $k\pi, com\ \ k \in\ Z\}$
- Imagem $I = \mathcal{R}$ -] -1, 1[.
- Período é $2\pi\ rad$.
- Função ímpar, pois $cossec\ (-x) = -cossec\ (x)$.

- Simetria

$$cossec\ (\pi - x) = cossec\ x$$
$$cossec\ (\pi + x) = -cossec\ x$$
$$cossec\ (2\pi - x) = -cossec\ x$$

- Sinal / monotonicidade

  1º quadrante: positiva/decrescente

  2º quadrante: positiva/crescente

  3º quadrante: negativa/crescente

  4º quadrante: negativa/decrescente

A função na forma $f(x) = a + b.cossec(cx + d)$, com $b \neq 0$;

Possui período igual a $\frac{2\pi}{|c|}$

Conjunto imagem igual a $\mathcal{R} -]a - b, a + b[$

4.6 Estudo dos parâmetros nos gráficos das funções trigonométricas do tipo $\mathbf{f(x) = a + b.y'.(cx + d)}$, onde $\mathbf{a, b, c}$ e $\mathbf{d}$ são denominados parâmetros, onde $b \neq 0$ e $\mathbf{y'}$ é uma das funções trigonométricas, seno, cosseno, tangente, cotangente, secante ou cossecante.

Parâmetro $\boldsymbol{a}$

Como estamos somando uma mesma constante às ordenadas de cada um dos pontos pertencentes ao gráfico, o resultado é um deslocamento vertical;

- No sentido positivo do eixo (para cima), se o valor do parâmetro for positivo;
- No sentido negativo do eixo (para baixo), se o valor do parâmetro for negativo.

Parâmetro $\boldsymbol{b}$

O coeficiente b determina o alongamento ou a compressão vertical da curva;

- Se b é negativo ($b < 0$) além do alongamento ou da compressão ocorrerá também a reflexão da curva em torno de seu eixo;
- Se $|b| > 1$ (ou seja, $-1 > a > 1$) a curva alonga na vertical;
- Se $|b| < 1$ (ou seja, $-1 < a < 1$) a curva comprime na vertical.

Parâmetro $\boldsymbol{c}$

O coeficiente c determina o alongamento ou a compressão horizontal da curva e, por consequência, determina também o intervalo em que a curva se repete;

- Uma compressão horizontal se valor do parâmetro for maior que 1;
- Um alongamento horizontal se valor do parâmetro estiver entre 0 e 1;
- Uma compressão horizontal composto com reflexão em relação ao eixo vertical se valor do parâmetro for menor que -1;

- Um alongamento composto com reflexão em relação ao eixo vertical se valor do parâmetro estiver entre - 1 e 0.

Parâmetro ***d***

O parâmetro aditivo d determina translação horizontal no gráfico da função;.

- No sentido positivo do eixo x (para a direita), se o valor do parâmetro for negativo;
- No sentido negativo do eixo x (para a esquerda), se o valor do parâmetro for positivo.

5 PESQUISA

5.1 A Pesquisa

Neste trabalho iremos investigar a aplicação das funções trigonométricas em dois contextos. O primeiro refere-se à sala de aula, e será constituída por aulas ministradas pelo professor responsável pela disciplina na turma do 2º ano do E.E.F.M. Educandário Emília de Lima Pinho em Acopiara, no estado do Ceará. O segundo será chamado de “Contexto do computador” e irá explorar a aplicação do software GeoGebra.

Nosso objetivo é analisar as potencialidades e limitações do software GeoGebra no estudo das funções trigonométricas no círculo trigonométrico e suas representações gráficas .

5.2 GeoGebra

O GeoGebra é um programa de Matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da Álgebra e da Geometria. Como se tem vindo a confirmar pela investigação realizada nos últimos anos, as aplicações de geometria dinâmica favorecem a compreensão dos conceitos e de relações geométricas, pelo que devem ser utilizadas para observar, analisar, relacionar e construir figuras geométricas e operar com elas. A possibilidade de manipulação gráfica do GeoGebra associada à respectiva representação algébrica constitui uma mais valia, quando comparado com outras aplicações.

O software apresenta três diferentes janelas: gráfica, algébrica ou numérica, e a folha de cálculo. Elas permitem que os objetos matemáticos sejam vistos em três diferentes representações: graficamente (pontos, gráficos de funções), algebricamente (coordenadas de pontos, equações) e nas células da folha de cálculo. Lopes (2011), ao trabalhar com alunos do Ensino Médio com o conteúdo de trigonometria usando recursos do software GeoGebra, ressalta que dentre as potencialidades apresentadas pelo referido *software* estão a construção, o dinamismo, a investigação, visualização e argumentação.

O software GeoGebra pode ser instalado no computador a partir do site http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/.

5.3 Metodologia

Nossos sujeitos são alunos que estudam as funções trigonométricas, inclusive algumas de suas representações gráficas, em uma aula expositiva, com utilização do quadro e pincel. A expectativa é que, ao longo das atividades ministradas com o GeoGebra, o aluno melhore sua intepretação das funções no ciclo trigonométrico, construa tabelas e, a partir delas, gráficos, analisando seu Domínio, Imagem, Período e Monotonicidade, levando a percebê-lo que os gráficos construídos representam funções.

Além disso, estaremos discutindo outras características totalmente novas para estudantes, como amplitude e translação vertical e horizontal do gráfico.

5.3.1 Desenho do experimento

A pesquisa envolve 40 alunos distribuídos em dois grupos, que denominaremos Grupo A e B, sendo o primeiro o de referência e outro, um grupo experimental. Descrevemos a seguir as três fases do estudo em que eles serão submetidos.

Fase 1: Aplicação de um Pré-Teste, feita coletivamente em cada um dos grupos, com resolução individual e sem consulta. O objetivo será a investigação do que o aluno consegue resolver, antes das atividades.

Fase 2: Compreende a aplicação das atividades didáticas, com o contexto do computador para o grupo B e as respectivas discussões e institucionalizações locais**.** Para o grupo A esta fase se resume às aulas ministradas pelo professor da disciplina em sala de aula.

Fase 3: Aplicação de tarefas para casa.

Fase 4: Aplicação do Pós-teste para os dois grupos. O objetivo será a investigação do que o aluno consegue resolver, depois da realização da sequência didática.

Quadro I - Planejamento do Experimento para os dois grupos

<table>
<tr><td rowspan="2">Fase 1</td><td colspan="2">Pré-Teste</td></tr>
<tr><td>Grupo A</td><td>Grupo B</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Fase 2</td><td>Aulas</td><td>Computador</td></tr>
<tr><td>Grupo A</td><td>Grupo B</td></tr>
<tr><td>Fase 3</td><td colspan="2">Atividade para casa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Fase 4</td><td colspan="2">Pré-Teste</td></tr>
<tr><td>Grupo A</td><td>Grupo B</td></tr>
</table>

5.3.2 Cronograma

Após conversa prévia com os alunos, foi feita uma explanação do trabalho aos alunos, informando que esse trabalho era uma pesquisa sem o objetivo de atribuição de nota, mas de entender as suas dúvidas e dificuldades objetivando avaliar uma técnica de ensino. Após a explanação foi feito à escolha dos grupos e definido o calendário dos trabalhos.

A aplicação do procedimento ocorreu durante as três últimas semanas do mês de abril de 2014. Da seguinte forma:

Para o Grupo A:

- Aplicação do Pré-teste (1º encontro – 11/04/2014).
- No período de 12/04/2014 até 28/04/2014, foram ministradas aulas em sala, pelo professor com utilização do quadro branco e pincel.
- Aplicação do Pós-teste. (2º encontro - 29/04/2014).

Para o Grupo B:

- Aplicação do Pré-teste (1º encontro – 11/04/2014).
- 1 h/a de estudo sobre função seno, onde o aluno e professor-pesquisador interagiam com atividades no GeoGebra (Anexo 1.1) fazendo a representação do seno do arco no ciclo trigonométrico, permitido ao aluno identificar o quadrante, o sinal, o valor do seno do arco por exemplo e monotonicidade. (2º encontro – 15/04/2014)
- 1 h/a de estudo sobre função cosseno, onde o aluno e professor-pesquisador interagiam com atividades do GeoGebra (Anexo 1.2) fazendo a representação do cosseno do arco no ciclo trigonométrico,

permitido ao aluno identificar o quadrante, o sinal, o valor do cosseno do arco, e a monotonicidade. (3º encontro – 16/04/2014).1 h/a para correção de exercícios feitos em casa. (4º encontro – 21/04/2014).

- 2 h/a para orientação e construção de gráficos pelo aluno no próprio computador (Anexo 1.3), permitindo ao aluno verificar a periodicidade das funções seno e cosseno, determinar domínio, conjunto imagem, período, valor máximo e mínimo e auxiliando a perceber relações de valores escrito na lei de formação da função com sua representação, por exemplo, o período da função. (5º encontro – 22/04/2014)
- 1 h/a de estudo sobre função tangente e cotangente, onde o aluno e professor-pesquisador interagiam com atividades do GeoGebra (Anexo 1.2) fazendo a representação do cosseno do arco no ciclo trigonométrico, permitido ao aluno identificar o quadrante, o sinal, o valor do cosseno do arco, se a função é crescente ou decrescente. (6º encontro – 23/04/2014)
- 1 h/a de estudo sobre função secante e cossecante, onde o aluno e professor-pesquisador interagiam com atividades do GeoGebra (Anexo 1.2) fazendo a representação do cosseno do arco no ciclo trigonométrico, permitido ao aluno identificar o quadrante, o sinal, o valor do cosseno do arco, se a função é crescente ou decrescente. (7º encontro – 24/04/2014)
- 2 h/a para orientação e construção de gráficos pelo aluno. (8º encontro – 25/04/2014)
- 1 h/a para correção de exercícios feitos em casa (9º encontro – 28/04/2014).
- Aplicação do Pós-teste. (10º encontro - 29/04/2014)

6 OS TESTES

Os dois testes foram aplicados ao longo do trabalho de campo: o primeiro, que chamamos de **Pré-Teste,** foi feito antes de ter início qualquer das atividades planejadas. O segundo, denominado **Teste**, aconteceu após a aplicação de toda a sequência didática.

Os testes foram do tipo formal, como os utilizado nas escolas e contiveram problemas descontextualizados, com o objetivo de identificar o nível de assimilação de conceitos pelo aluno até aquele momento da aplicação.

O **Pré-Teste** foi feito no primeiro encontro, para saber o que os alunos conseguiam resolver a partir de seus conhecimentos anteriores, tendo em vista que eles já estudaram trigonometria. Nosso objetivo foi obter subsídios para comparar o que o aluno consegue responder com os seus conhecimentos prévios e o que conseguirá responder após passar pela sequência didática.

Com o **Teste** investigamos até que ponto a sequência de ensino foi vantajoso para o aluno apropriar dos conceitos das funções trigonométricas, no círculo e suas representações gráficas.

Quanto ao conteúdo, os testes procuravam avaliar os conhecimentos sobre:

- Intepretação das funções trigonométricas no círculo trigonométrico.
- Construção e interpretação de gráficos de funções trigonométricas.
- O conceito de Domínio, Imagem e Período de uma função trigonométrica.
- Translação horizontal e vertical do gráfico das funções.
- Monotonicidade.
- Determinar valor máximo e mínimo das funções.
- Identificação da lei de formação da função trigonométrica a partir do gráfico.

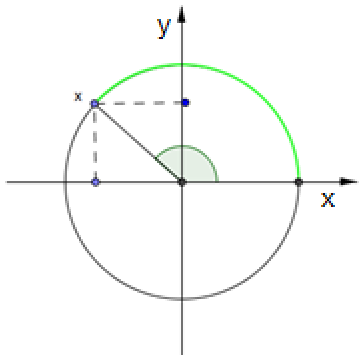
6.1 Pré-Teste

Esta sessão destina-se relatar as questões contidas no pré-teste, expondo seu objetivo.

A 1ª questão solicitou a intepretação das funções seno e cosseno, dado o sua representação gráfica.

1) **De acordo com a localização do arco x, no círculo trigonométrico abaixo, podemos afirmar que:**

FIGURA 21: Círculo Trigonométrico no GeoGebra.



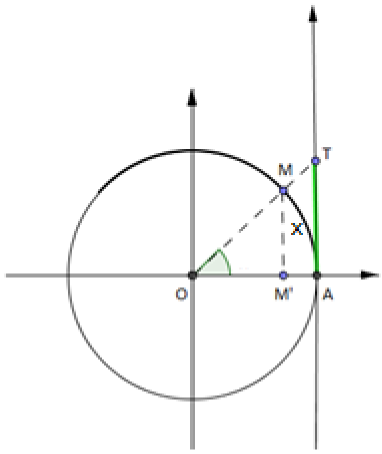
Fonte: Arquivo pessoal do autor.

$\mathbf{a)\ sen\,x = cos\,x}$ $\mathbf{b)\ sen\,x < 0}$ $\mathbf{c)\ cos\,x > 0}$ $\mathbf{d)\ (sen\,x).(cos\,x) < 0}$

A segunda questão solicitou ao aluno a identificação de uma função a partir de sua representação no círculo trigonométrico.

2) De acordo com o círculo trigonométrico abaixo, o segmento $\overline{AT}$, representa:

FIGURA 22: Círculo Trigonométrico no GeoGebra.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

$\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{sen\ x}$ $\quad \boldsymbol{b})\ \boldsymbol{cos\ x}$ $\quad \boldsymbol{c})\ \boldsymbol{tg\ x}$ $\quad \boldsymbol{d})\ \boldsymbol{sec\ x}$ $\quad \boldsymbol{e})\ \boldsymbol{cotg\ x}$

A terceira questão investigou se o aluno conhecia o radiano como unidade de medida de ângulos e se sabia transformar unidades de medidas, de grau para radiano.

3) Um ângulo de medida 30° é equivalente a um ângulo de ______ rad.

A quarta questão abordou a comparação de dois valores de funções trigonométricas. Nosso objetivo foi verificar se o aluno já possuía conhecimentos que permitissem fazer comparações, inclusive com valores de medidas maiores que 90°.

4) Complete com < , > ou =.

$\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{sen\ 20°}$ __$\boldsymbol{sen\ 50°}$ $\quad \boldsymbol{b})\ \boldsymbol{sen\ 230°}$ __ $\boldsymbol{sen\ 310°}$ $\quad \boldsymbol{c})\ \boldsymbol{cos\ 50°}$___ $\boldsymbol{cos\ 80°}$

$\boldsymbol{d})\ \boldsymbol{cos\ 220°}$ __ $\boldsymbol{cos\ 250°}$ $\quad \boldsymbol{e})\ \boldsymbol{sec\ 10°}$ __ $\boldsymbol{sec\ 80°}$ $\quad \boldsymbol{f})\ \boldsymbol{sec\ 310°}$ __ $\boldsymbol{sec\ 340°}$

A quinta questão envolveu a intepretação no círculo das funções e comparação de seus valores.

5) Para $x = 85°$, pode-se conclui:

$\boldsymbol{a)}\ \boldsymbol{sen\,x < cos\,x < tg\,x}$ $\boldsymbol{b)}\ \boldsymbol{sen\,x < tg\,x < cos\,x}$ $\boldsymbol{c)}\ \boldsymbol{cos\,x < tg\,x < sen\,x}$
$\boldsymbol{d)}\ \boldsymbol{tg\,x < sen\,x < cos\,x}$ $\boldsymbol{e)}\ \boldsymbol{cos\,x < sen\,x < tg\,x}$

A sexta questão requisitava do aluno a construção de gráfico e a determinação de seu domínio, conjunto imagem e o período da função trigonométrica.

6) Esboce o gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = sen\,x}$, determinando o domínio, conjunto imagem e o período da função.

A sétima questão envolveu a determinação dos valores máximo e mínimo de uma função para a construção do conjunto imagem.

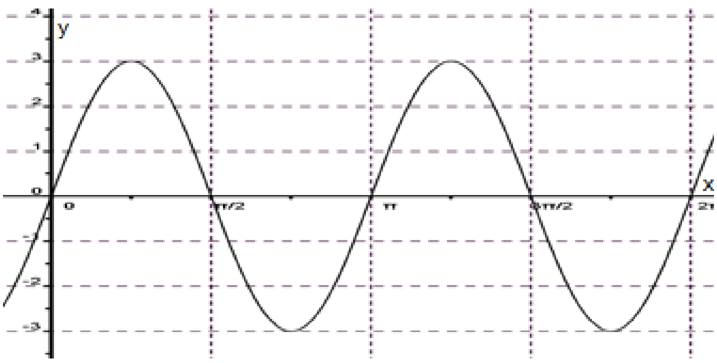
7) Seja a função f, de IR em IR definida por $\boldsymbol{f(x) = 1 + 3cos\,x}$. O conjunto imagem dessa função é o intervalo:

$\boldsymbol{a)[-3,4]}$ $\boldsymbol{b)\ [3,4]}$ $\boldsymbol{c)\ [-2,4]}$ $\boldsymbol{d)\ [1,3]}$ $\boldsymbol{e)\ [-1,1]}$

A oitava questão solicitou a identificação das características da função a partir de seu gráfico.

8) A figura mostra a parte do gráfico da função $\boldsymbol{y = 3.sen(2x)}$. Identifique seu domínio, seu conjunto imagem e seu período.

FIGURA 23: Construção no GeoGebra.

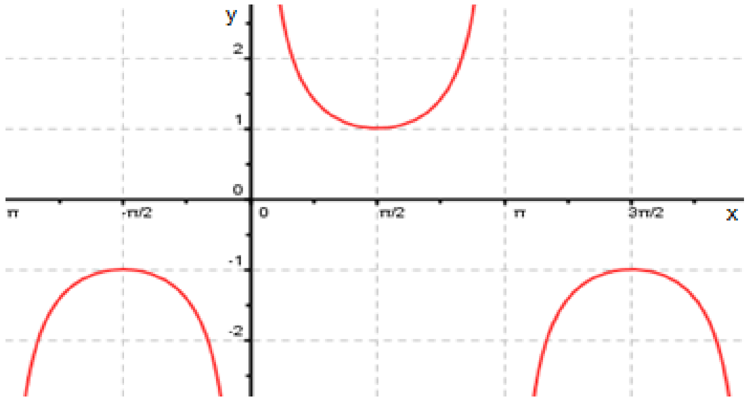


Fonte: Arquivo pessoal do autor

A nona questão envolvia identificação da função a partir de seu gráfico.

9) O gráfico abaixo representa a função:

FIGURA 24: Construção no GeoGebra



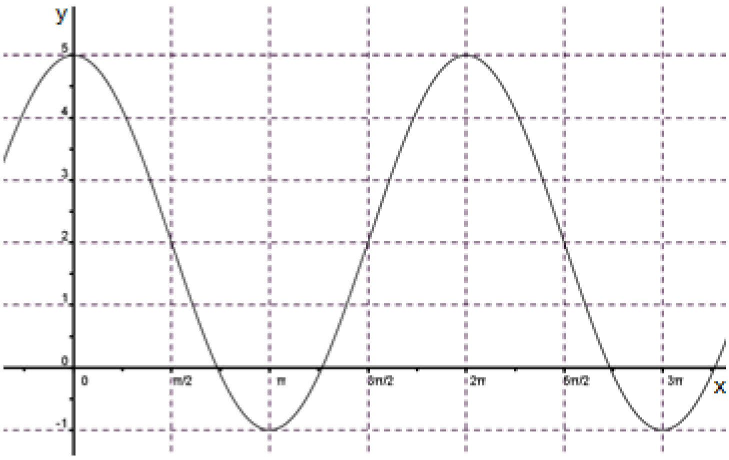
Fonte: Arquivo pessoal do autor

$\boldsymbol{a)\ tg\ x}$ $\boldsymbol{b)\ cotg\ x}$ $\boldsymbol{c)\ sec\ x}$ $\boldsymbol{d)\ cossec\ x}$

A décima questão investigou se alunos eram capazes de identificar os parâmetros a partir do gráfico.

10) Se $\boldsymbol{y = a + b.sen\ x}$ tem como gráfico

FIGURA 25: Construção no GeoGebra



Fonte: Arquivo pessoal do autor

Então:

$a)\ a = -1 \text{ e } b = 5$ $\quad b)\ a = 5 \text{ e } b = -1$

$c)\ a = 2 \text{ e } b = 3$ $\quad d)\ a = 3 \text{ e } b = 5$

6.2 Teste

Mantivemos os mesmos tipos de perguntas do Pré-Teste. Foram mudados os dados, mas foi mantido a mesma equivalência matemática e semântica, na maioria das questões.

A primeira questão é semelhante quarta questão do Pré-Teste.

1ª) Complete com < , > ou =.

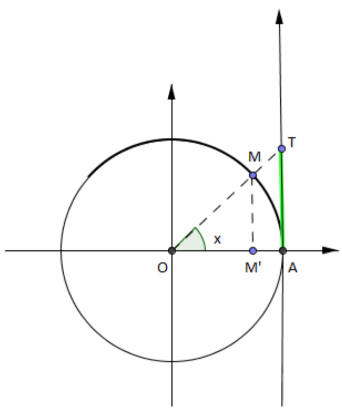
$a)\ sen\ 70° \_\ sen\ 20°$ $\quad b)\ sen\ 230° \_\_\ sen\ 310°$ $\quad c)\ cos\ 5° \_\_\ cos\ 50°$

$d)\ cos\ 20° \_\_\ cos\ 140°$ $\quad e)\ sec\ 50° \_\_\ sec\ 10°$ $\quad f)\ sec\ 30° \_\_\ sec\ 220°$

A segunda questão é semelhante segunda questão do Pré-Teste.

2ª) Sendo x um arco do primeiro quadrante, conforme a figura abaixo, podemos afirmar:

FIGURA 26: Círculo trigonométrico no GeoGebra.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

$a)\ sen\ x = \overline{OM'}$ $\quad b)\ sen\ x = \overline{AT}$ $\quad c)\ cos\ x = \overline{OM'}$ $\quad d)\ cos\ x = \overline{AT}$

A terceira questão é semelhante sexta questão do Pré-Teste.

3ª) Esboce o gráfico da função $f(x) = 2cos\ x$, determinando o domínio, conjunto imagem e o período da função.

A quarta questão é semelhante a primeira do Pré-Teste.

4) O produto $P = (sen\ 100°) . (cos\ 200°). (sec\ 300°) . (cossec\ 400°)$:

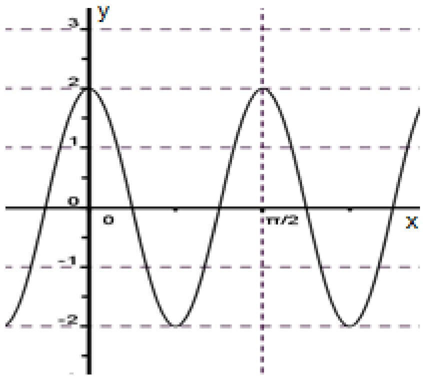
a) é positivo **b) é negativo**

c) é nulo **d) é impossível determinar o seu sinal.**

A quinta questão é semelhante sétima questão do Pré-Teste.

5ª) A figura mostra a parte do gráfico da função $y = 2. sen(4x)$:

FIGURA 27: Construção no GeoGebra



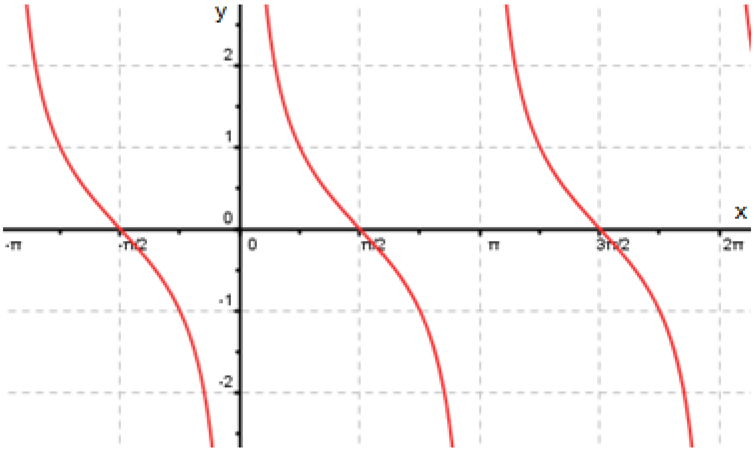
Fonte: Arquivo pessoal do autor

Identifique seu domínio, seu conjunto imagem e seu período.

A sexta questão é semelhante nona questão do Pré-Teste.

6ª) O gráfico abaixo representa a função:

FIGURA 28: Construção no GeoGebra



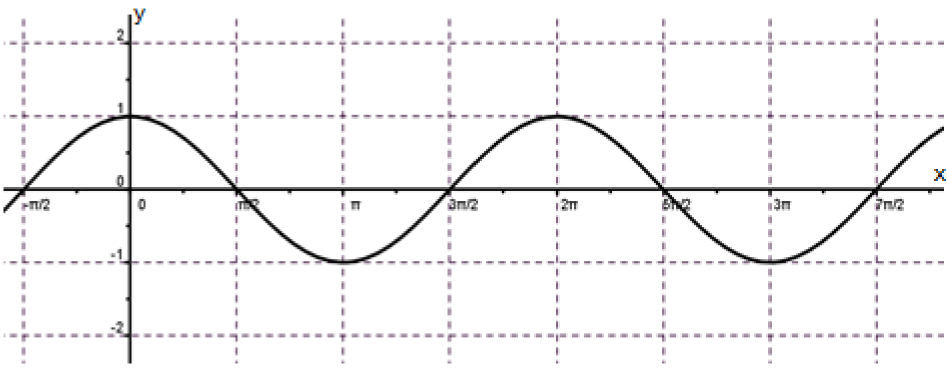
Fonte: Arquivo pessoal do autor

$\boldsymbol{a)\ tg\ x}$ $\boldsymbol{b)\ cotg\ x}$ $\boldsymbol{c)\ sec\ x}$ $\boldsymbol{d)\ cossec\ x}$

Na sétima a construção de um novo gráfico a partir de outro, bem como conjuntos domínio imagem e o período de outra função.

7) Sabendo que o gráfico da função $y = cos\ x$ é:

FIGURA 29: Construção no GeoGebra



Fonte: Arquivo pessoal do autor

Determine:

a) Seu conjunto imagem e seu domínio

b) Esboce o gráfico de $y = 2 + cos\, x$

c) O conjunto imagem, o domínio e o período da função $y = 2 + 3cos\, x$

Na oitava questão, investiguei sobre o conhecimento da fórmula do período.

8) O período da função dada por $y = sec\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ **é:**

a) π $b)\ 2\pi$ **c)** $\frac{\pi}{4}$ **d)** $\frac{\pi}{2}$ **e)** $\frac{\pi}{3}$

A nona questão é semelhante quinta questão do Pré-Teste.

9) Para $x = 260°$**, pode-se conclui:**

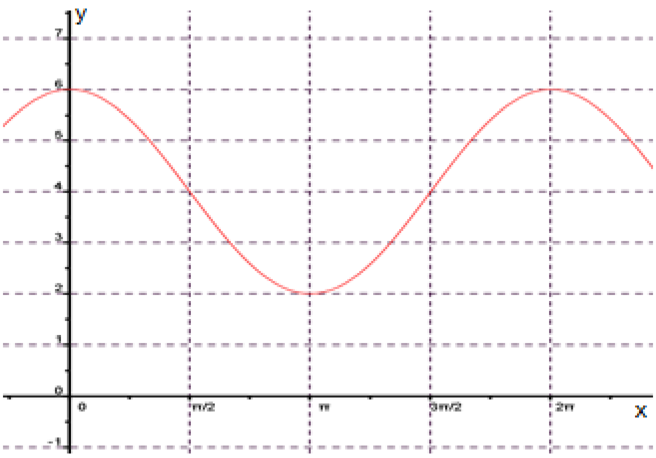
$a)\ sen\, x < cos\, x < tg\, x$ $b)\ sen\, x < tg\, x < cos\, x$ $c)\ cos\, x < tg\, x < sen\, x$

$d)\ tg\, x < sen\, x < cos\, x$ $e)\ cos\, x < sen\, x < tg\, x$

A décima questão é semelhante décima questão do Pré-Teste.

10) Se $y = a + b.cos\, x$ **tem como gráfico**

FIGURA 30: Construção no GeoGebra



Fonte: Arquivo pessoal do autor

Então:

$a)\ a = 2$ e $b = 6$ $\quad b)\ a = 6$ e $b = -2$

$c)\ a = 2$ e $b = 4$ $\quad d)\ a = 4$ e $b = 2$

7 ANÁLISE DE RESULTADOS

Neste capítulo apresentaremos uma análise dos resultados, de caráter quantitativo com o objetivo de avaliar o desempenho de alunos da 2ª série do Ensino Médio, na aquisição de conceitos de funções trigonométricas.

O caminho que escolhemos para análise da eficiência das atividades, em cada contexto, foi o dos testes formais, onde os alunos são habituados a responder questões.

Assim, na tentativa de tornar mais isenta possível nossa avaliação, procuramos apresentar questões que não fossem repetições do que foi discutido na sequência didática, mas conhecimentos das funções trigonométricas e suas representações gráficas. Desta forma, o grupo experimental recebeu as informações necessárias para respondê-las, a partir da sequência de estudos no GeoGebra, e o grupo de referência, a partir da sequência ministrada pelo professor em sala de aula.

7.1 Análise do desempenho dos grupos nos testes

Inicialmente tabulamos todos os resultados por aluno e pontuação por questão, com o objetivo de comparar o desempenho de cada um deles. O grupo A e o grupo B têm 20 alunos cada, que responderam 10 itens no pré-teste, o que nos dá uma possibilidade de 200 pontos em cada grupo. No pós-teste existiu, também, a possibilidade de 200 pontos em cada grupo.

Tabela 1 – Desempenho do grupo de referência no pré-teste

A: GRUPO DE REFERÊNCIA (PRÉ-TESTE)											
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	nota
ALUNO 1	1		1	1		0,5		0,5			4,0
ALUNO 2		1	1	0,5		0,5	1	1	1		6,0
ALUNO 3			1	1	1	0,5	1				3,5
ALUNO 4	1	1	1	0,5	1	1		1		1	7,5
ALUNO 5		1									1,0
ALUNO 6				0,5	1						1,5
ALUNO 7	1		1	1				1			4,0
ALUNO 8			1	0,5		0,5	1	0,5			3,5
ALUNO 9			1		1						3,0
ALUNO 10	1	1	1	1	1	0,5		0,5	1		7,0
ALUNO 11		1	1	1							3,0
ALUNO 12			1	1	1	1				1	5,0
ALUNO 13	1	1			1	1					4,0
ALUNO 14	1		1	0,5							2,5
ALUNO 15	1						1				2,0
ALUNO 16			1	0,5					1		2,5
ALUNO 17	1		1			0,5	1	1			4,5
ALUNO 18	1	1		1	1	1		1			6,0
ALUNO 19				0,5					1		1,5
ALUNO 20		1	1	0,5			1	0,5			4,0
PONTUAÇÃO POR QUESTÃO	9	8	14	11	8	7	6	7	4	2	76,0

Tabela 2 – Desempenho do grupo de referência no teste

A: GRUPO DE REFERÊNCIA (TESTE)											
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Nota
ALUNO 1	1	1	1		0,5		1	1	1	1	7,5
ALUNO 2	0,5			1			0,5	1		1	4,0
ALUNO 3	0,5		1		0,5		0,5		1	1	4,5
ALUNO 4	1	1	0,5	1	1	1	1	1	1	1	9,5
ALUNO 5	0,5		1	1	1				1		4,5
ALUNO 6	0,5		1	1	1	1	1	1	1	1	8,5
ALUNO 7	1		1	1			0,5				3,5
ALUNO 8			0,5		1			1			2,5
ALUNO 9	0,5	1	0,5		0,5				1		3,5
ALUNO 10	1		0,5	1	1	1	1	1	1	1	8,5
ALUNO 11	1	1	0,5	1			0,5	1			5,0
ALUNO 12	1		0,5		0.5	1	0,5	1	1	1	6,0
ALUNO 13	1	1	1	1	0,5	1					5,5
ALUNO 14	0,5			1	0,5			1		1	4,0
ALUNO 15	1		1	1	0,5						3,5
ALUNO 16	0,5		0,5	1	0,5	1	0,5	1	1		6,0
ALUNO 17	0,5	1			1						2,5
ALUNO 18	1				1			1	1	1	5,0
ALUNO 19		1	1	1	1		1	1		1	7,0
ALUNO 20	0,5	1	0,5	1	0,5		0,5	1	1		6,0
PONTUAÇÃO POR QUESTÃO	13,5	8	12	13	11,5	7	8	13	11	10	107,0

Tabela 3 – Desempenho do grupo experimental no pré-teste

B: GRUPO EXPERIMENTAL (PRÉ-TESTE)											
	Q1	**Q2**	Q3	**Q4**	**Q5**	**Q6**	Q7	**Q8**	**Q9**	**Q10**	Nota
ALUNO 1	**1**		1	**0,5**				**1**			3,5
ALUNO 2			1	**0,5**	**0,5**	**0,5**		**0,5**			3,0
ALUNO 3		**1**	1	**0,5**				**0,5**	**1**		4,0
ALUNO 4	**1**	**1**		**1**	**1**	**1**		**1**			6,0
ALUNO 5		**1**									1,0
ALUNO 6			1	**0,5**	**1**						2,5
ALUNO 7	**1**		1	**1**				**1**			4,0
ALUNO 8			1	**0,5**		**0,5**	1	**0,5**			3,5
ALUNO 9	**1**	**1**	1	**0,5**	**1**	**1**	1	**1**		**1**	8,5
ALUNO 10			1	**0,5**					**1**		2,5
ALUNO 11		**1**	1	**0,5**		**0,5**					3,0
ALUNO 12			1	**1**	**1**	**1**		**0,5**			4,5
ALUNO 13	**1**	**1**	1		**1**						4,0
ALUNO 14	**1**		1	**0,5**				**0,5**			3,0
ALUNO 15	**1**	**1**	1	**0,5**			1				4,5
ALUNO 16				**0,5**					**1**		1,5
ALUNO 17	**1**		1			**0,5**	1	**1**			4,5
ALUNO 18				**0,5**	**1**		1	**0,5**			3,0
ALUNO 19			1	**0,5**					**1**		2,5
ALUNO 20	**1**	**1**	1	**0,5**				**1**			4,5
PONTUAÇÃO POR QUESTÃO	**9**	**8**	16	**10**	**6,5**	**5**	5	**9**	**4**	**1**	**73,5**

Tabela 4 – Desempenho do grupo de experimental no teste

B: GRUPO EXPERIMENTAL (TESTE)											
	Q1	**Q2**	**Q3**	**Q4**	**Q5**	**Q6**	**Q7**	Q8	**Q9**	**Q10**	Nota
ALUNO 1	**1**	**1**	**1**		**0,5**		**1**	1	**1**	**1**	7,5
ALUNO 2	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0,5**	1	**1**	**1**	9,5
ALUNO 3	**0,5**	**1**	**1**		**0,5**		**0,5**	1	**1**	**1**	6,5
ALUNO 4	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	1	**1**	**1**	10,0
ALUNO 5	**0,5**	**1**	**0,5**	**1**	**1**	**1**	**1**	1		**1**	8,0
ALUNO 6	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	1	**1**	**1**	10,0
ALUNO 7	**1**	**1**	**1**	**1**	**0,5**	**1**	**0,5**	1	**1**		8,0
ALUNO 8	**1**		**1**	**1**	**1**		**1**	1	**1**	**1**	8,0
ALUNO 9	**0,5**	**1**	**0,5**	**1**	**0,5**	**1**		1	**1**		6,5
ALUNO 10	**1**	**1**	**0,5**	**1**	**1**	**1**	**1**	1	**1**	**1**	9,5
ALUNO 11	**0,5**		**1**	**1**	**1**					**1**	4,5
ALUNO 12	**1**	**1**	**0,5**		**0.5**	**1**	**0,5**	1	**1**	**1**	7,0
ALUNO 13	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**		1			7,0
ALUNO 14	**1**	**1**	**1**	**1**	**0,5**	**1**	**0,5**	1	**1**	**1**	9,0
ALUNO 15	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**		1			7,0
ALUNO 16	**1**		**0,5**	**1**	**0,5**	**1**	**0,5**	1	**1**	**1**	7,5
ALUNO 17	**0,5**	**1**	**0,5**	**1**	**1**	**1**	**0,5**				5,5
ALUNO 18	**1**	**1**	**1**	**1**	**0,5**	**1**	**1**	1	**1**	**1**	9,5
ALUNO 19	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	1		**1**	9,0
ALUNO 20	**0,5**	**1**	**0,5**	**1**	**0,5**	**1**	**0,5**	1	**1**	**1**	8,0
PONTUAÇÃO POR QUESTÃO	**17**	**17**	**16,5**	**17**	**15**	**16**	**12**	18	**14**	**15**	**157,5**

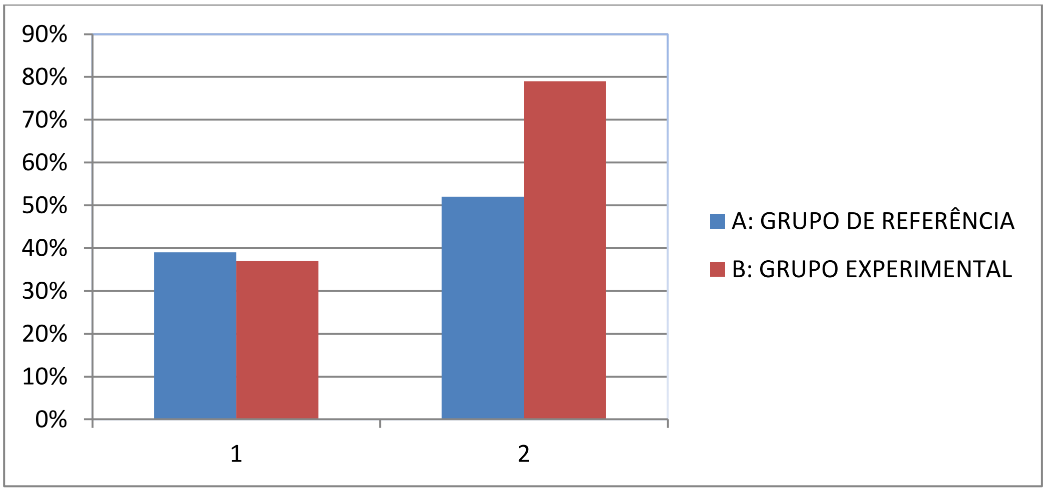
Nesta segunda etapa, a partir de dados das tabelas acima, fizemos um levantamento, por grupo, da pontuação dos grupoS nos testes com o objetivo de comparar o desempenho de cada um dos grupos.

As porcentagens referentes aos pontos estão apresentadas abaixo.

Tabela 5 – Percentual de acertos por grupo

GRUPO	PRÉ-TESTE	TESTE
A (REFERÊNCIAL)	38%	54%
B (EXPERIMENTAL)	37%	79%

Gráfico 1: Percentual de acertos por grupo



Fonte: O autor

Observei que os grupos A e B tiveram, aproximadamente, o mesmo resultado, no pré-teste. Após a aplicação da sequência didática o grupo B, o experimental, evolui em mais de 100% o seu número de acertos, enquanto o grupo A, o de referência, evoluiu cerca de 42%, como mostra o resultado da pesquisa.

Assim, enfatizamos que o percentual de questões respondidas de forma correta pelo grupo experimental foi acima de 70%, resultado que, em qualquer sistema escolar, é considerado um sucesso.

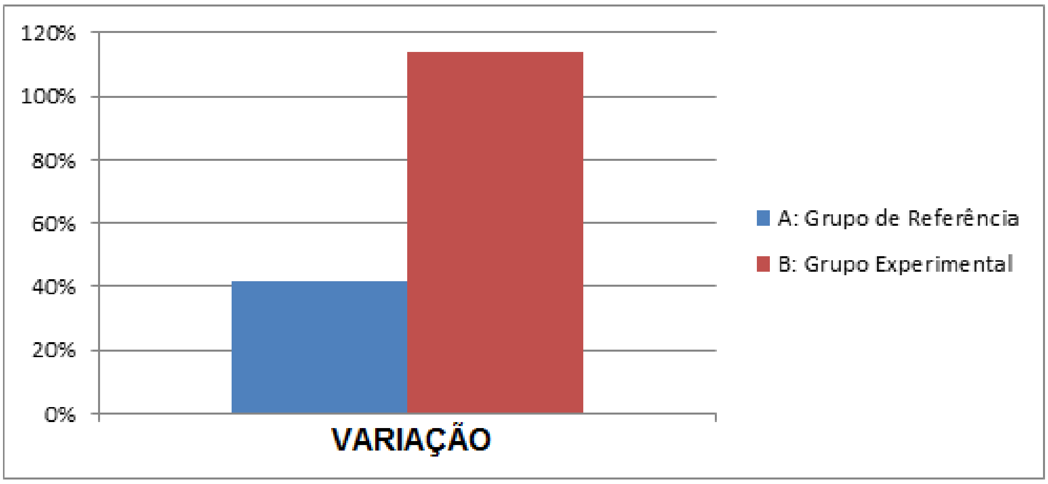
7.2 Análise da taxa de variação de acertos por grupos

A tabela abaixo apresenta evolução do desempenho destes grupos em percentual de questões certas no Pré-Teste e no Teste e a variação percentual que isto representa para cada um dos grupos, considerando como ponto de partida o que os alunos dos dois grupos conseguiram resolver de forma correta antes da sequência didática e comparando com o que acertaram depois.

Tabela 6 – Percentual de acertos por grupo

GRUPO	PRÉ-TESTE	TESTE	VARIAÇÃO
A (REFERÊNCIAL)	38%	54%	16%
B (EXPERIMENTAL)	37%	79%	42%

Gráfico 2 : Taxa de variação de acertos



Fonte: Do autor

O gráfico II mostra que a maior variação foi do grupo experimental, sugerindo que a utilização do ambiente computacional influencia em melhoria rendimento dos alunos.

Uma possível explicação para uma menor evolução no número de acertos do grupo A, pode ser a falta de comprometimento com o projeto, pois os alunos tinham conhecimento que não participariam da sequência didática do computador, sendo apenas um grupo de referência. Ainda, é importante notar que as diferenças individuais também são um determinante fator e interferência.

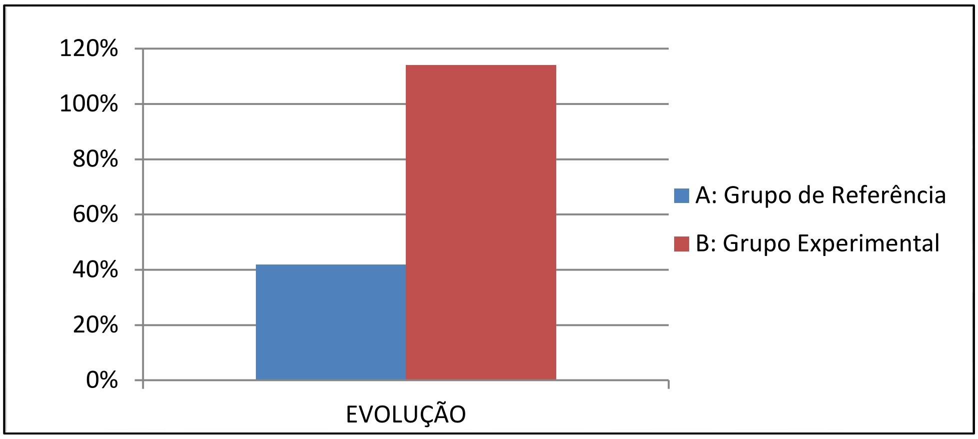
7.3 Análise da evolução da taxa de acertos por grupos

Para nós é importante analisar a evolução de acertos do pré-teste para o pós-teste destes grupos. Para tanto, consideramos como ponto de partida percentual de acertos no dos dois grupos no pré-teste e no pós-teste. Estabelecemos a partir daí, a taxa de evolução percentual de acertos, ao longo do experimento.

Tabela 7 – Evolução percentual dos grupos.

GRUPO	PRÉ-TESTE	TESTE	EVOLUÇÃO
A (REFERÊNCIAL)	38%	54%	42%
B (EXPERIMENTAL)	37%	79%	114%

Gráfico 3: Taxa de evolução de acertos



Fonte: Do autor

O dado da tabela e do gráfico III também nos sugere que o caminho trilhado pelo Grupo B, foi o mais adequado para levar a uma maior evolução no desempenho, pois o grupo experimental superou o dobrou do seu percentual de acertos, um aumento bastante significativo, o que nos leva a entender a metodologia computacional deve ser mais valorizada no processo de ensino-aprendizagem atual.

7.4 Análise do desempenho dos grupos por tema nos testes

Agora analisaremos o desempenho dos grupos por tema trabalhado, pois assim conseguiremos apontar em qual parte do conteúdo a sequência didática foi mais eficiente.

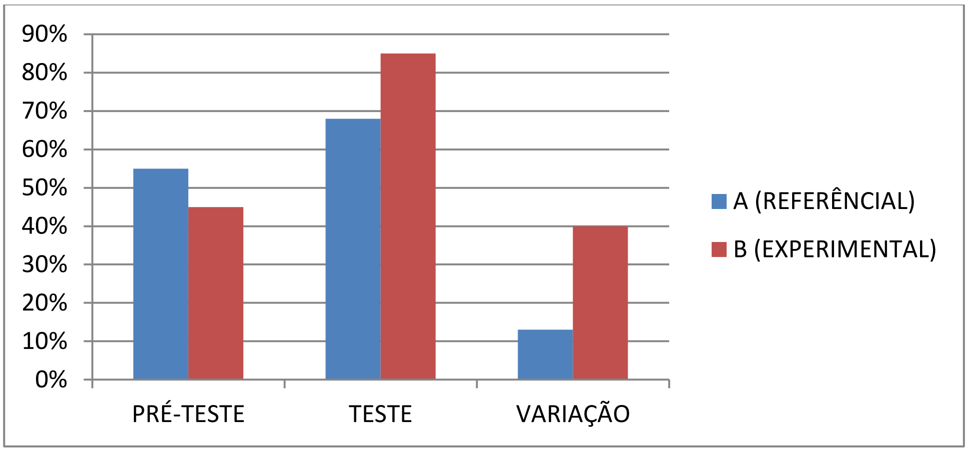
TEMA 1: Interpretação do sinal das funções no círculo

Esse tema, foi abordado na questão 1 do pré-teste e na questão 4 do teste.

Tabela 8 – Desempenho dos grupos em relação ao tema 1.

GRUPO	PRÉ-TESTE	TESTE	VARIAÇÃO
A (REFERÊNCIAL)	45%	65%	20%
B (EXPERIMENTAL)	45%	85%	40%

Gráfico 4: Desempenho dos grupos em relação ao estudo do sinal da função.



Fonte: Do autor

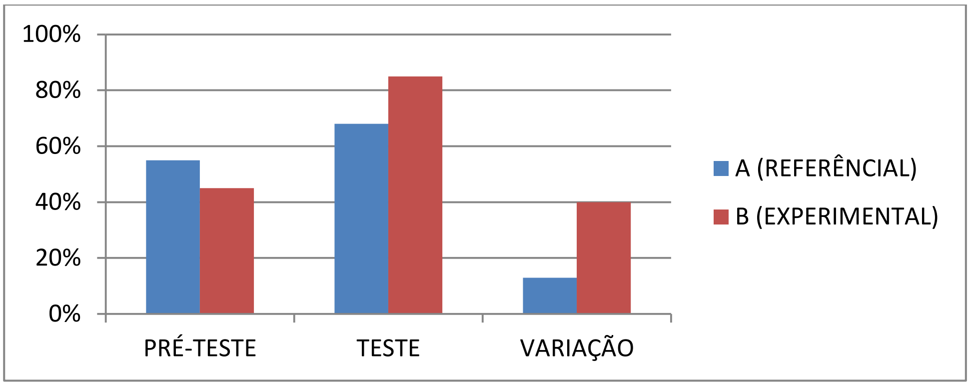
TEMA 2: Identificação das Funções Trigonométricas no Círculo

Esse tema, foi abordado na questão 2 do pré-teste e na questão 2 do teste.

Tabela 9 – Desempenho dos grupos em relação ao tema 2.

GRUPO	PRÉ-TESTE	TESTE	VARIAÇÃO
A (REFERÊNCIAL)	40%	40%	0%
B (EXPERIMENTAL)	35%	80%	45%

Gráfico 5: Desempenho do grupo na identificação da função



Fonte: Do autor

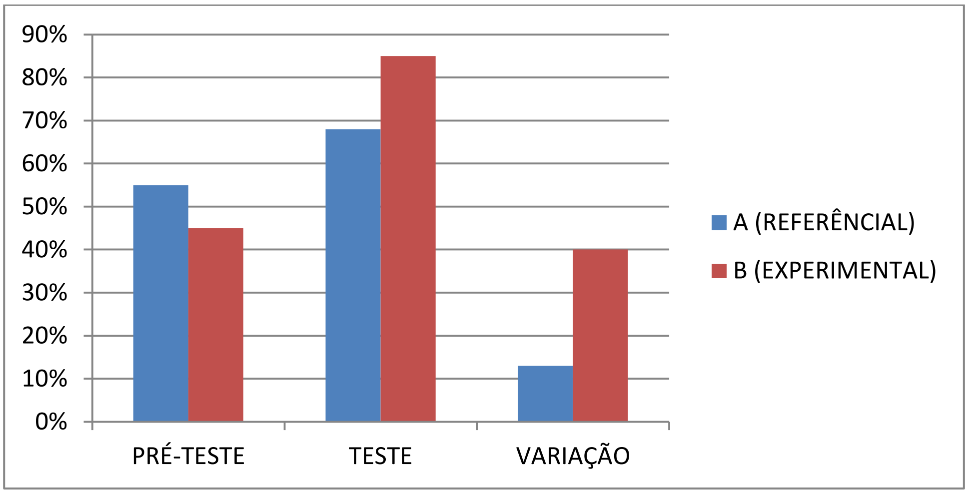
TEMA 3: Monotonicidade da Funções Trigonométricas

Esse tema foi abordado na questão 4 do pré-teste e na questão 1 do teste.

Tabela 10 − Desempenho dos grupos em relação ao tema 3.

GRUPO	PRÉ-TESTE	TESTE	VARIAÇÃO
A (REFERÊNCIAL)	55%	68%	13%
B (EXPERIMENTAL)	45%	85%	40%

Gráfico 6: Desempenho dos grupos em relação a monotonicidade da função



Fonte: Do autor

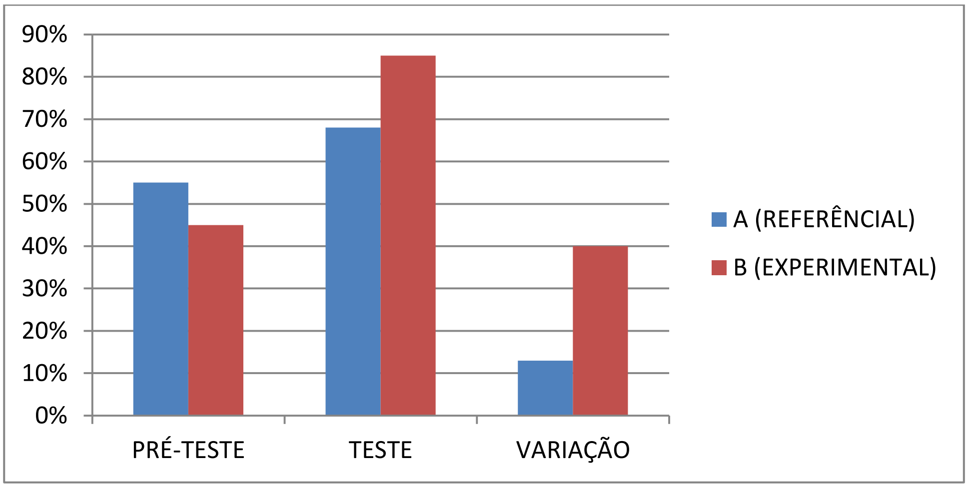
TEMA 4: Comparar os valores das funções seno, cosseno e tangente.

Esse tema, foi abordado na questão 5 do pré-teste e na questão 9 do teste.

Tabela 11 – Desempenho dos grupos em relação ao tema 4.

GRUPO	PRÉ-TESTE	TESTE	VARIAÇÃO
A (REFERÊNCIAL)	40%	55%	15%
B (EXPERIMENTAL)	35%	70%	35%

Gráfico 7: Desempenho dos grupos na comparação do seno, cosseno e tangente de um arco



Fonte: Do autor

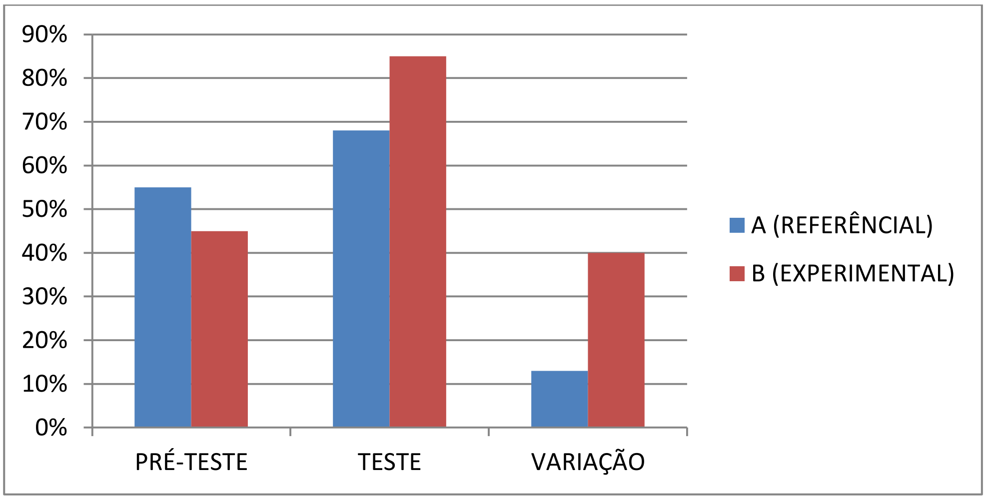
TEMA 5: Construção do gráfico de uma função, identificando seu conjunto domínio, imagem e seu período.

Esse tema, foi abordado na questão 6 do pré-teste e na questão 3 do teste.

Tabela 12 – Desempenho dos grupos em relação ao tema 5.

GRUPO	PRÉ-TESTE	TESTE	VARIAÇÃO
A (REFERÊNCIAL)	35%	60%	25%
B (EXPERIMENTAL)	20%	83%	63%

Gráfico 8: Desempenho dos grupos na construção de gráficos



Fonte: Do autor

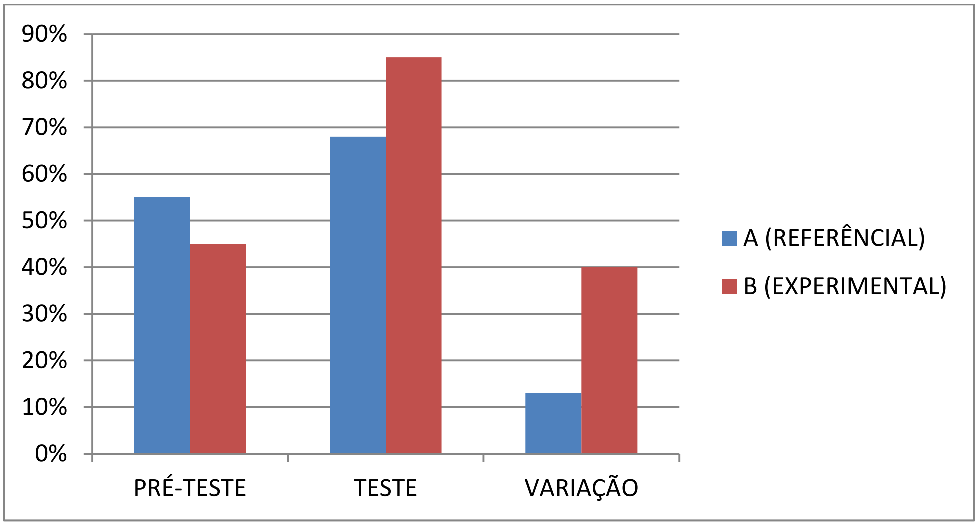
TEMA 6: Identificação da função a partir de seu gráfico

Esse tema, foi abordado na questão 9 do pré-teste e na questão 6 do teste.

Tabela 13 – Desempenho dos grupos em relação ao tema 6.

GRUPO	PRÉ-TESTE	TESTE	VARIAÇÃO
A (REFERÊNCIAL)	20%	35%	15%
B (EXPERIMENTAL)	20%	80%	60%

Gráfico 9: Desempenho dos grupos na identificação da função, a partir do seu gráfico.



Fonte: Do autor

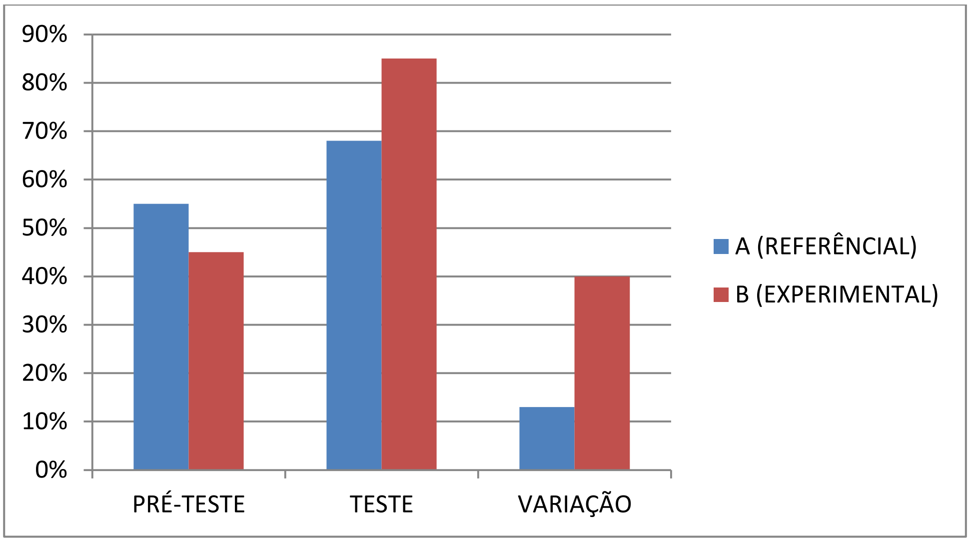
TEMA 7: Dado um gráfico, identificar os parâmetros da função

Esse tema foi abordado na questão 10 do pré-teste e na questão 10 do teste.

Tabela 14 – Desempenho dos grupos em relação ao tema 7.

GRUPO	PRÉ-TESTE	TESTE	VARIAÇÃO
A (REFERÊNCIAL)	10%	50%	40%
B (EXPERIMENTAL)	5%	75%	70%

Gráfico 10: Desempenho dos grupos na identificação dos parâmetros da função



Fonte: Do autor

A partir dos dados coletados acima entre os resultados do pré-teste e do teste, podemos observar e concluir:

- A variação percentual do grupo experimental (B), em todos os temas, foi superior a variação do grupo de referência (A), mostrando maior rendimento na assimilação de conceitos lecionados.
- O tema 2, um crescimento de mais de 100%, para grupo experimental, enquanto o crescimento do grupo de referência foi nulo. Esse resultado indica que a interação, a aplicação dos controles deslizantes e as várias formas de colorir as figuras no ambiente virtual é muito superior ao uso do quadro branco e pincel.

- Observando o tema 7, percebemos que a pontuação do pré-teste foi muito pequeno em ambos os grupos, porém, após a sequência didática, o grupo experimental aumentou sua pontuação em 15 vezes, enquanto o grupo de referência aumentou em 5 vezes. Foi nesse tema que a aplicação do GeoGebra mostrou-se mais eficiente.
- Outro tema que chama atenção, foi tema 3, que trata do crescimento ou decrescimento de uma função, ele mostra que a variação percentual do pontos obtidos pelo grupo experimental é mais de 3 vezes superior a variação do grupo de referência. Esse resultado é mais uma evidência que a possibilidade de movimentar um ponto no círculo e observar o crescimento ou decrescimento da função associada a esse ponto, mostrou-se como recurso pedagógico muito eficiente.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Toda mudança vem acompanhada de alguma resistência e no caso da introdução do uso do GeoGebra como recurso didático não poderia ser diferente. Essa resistência advém da falta de intimidade de muitos profissionais da educação com a informática. Aqueles que ainda não dominam o computador e resistem a ele levantam várias questões, na verdade pseudoproblemas, na tentativa vã de impedir que as novas tecnologias entrem na escola. Isso não significa que não se deve questionar o uso do computador, pelo contrário, ele deve ser constantemente avaliado como todos os outros recursos didáticos utilizados.

Nesse sentido, este trabalho teve como objeto de estudo o processo ensino-aprendizagem de Matemática no Ensino Médio, apontando resultados alcançados, após uso de duas práticas pedagógicas.

O que vai apontar se determinada prática escolhida foi à adequada, é o resultado obtido com ela, ou seja, a aprendizagem gerada. A gama de possibilidades de ensino com a informática cria um ambiente rico de aprendizagem onde aprendizes podem vivenciar e desenvolver suas capacidades.

É importante salientar que os momentos de discussão que tivemos com o grupo experimental (as institucionalizações) desempenharam papel relevante no estabelecimento das conclusões dos estudantes. Observar que as vantagens do uso do GeoGebra em sala de aula pelo professor, não são só as pedagógicas, mas as de ordem estrutural pois alunos, mesmo não tendo conhecimento do *s*oftware, familiarizaram-se com rapidez e não apresentaram dificuldades em manuseá-lo, podendo fazer download gratuitamente deste software, sendo fácil o acesso a qualquer usuário.

Em relação as nossas análises dos resultados podemos afirmar que:

- O grupo B foi o grupo que atingiu melhor desempenho no Pós-Teste, cerca de 79%.
- O grupo B foi o grupo que teve maior evolução em números de acertos por grupo, entre o Pré-teste e o Teste, obtendo o uma evolução bastante significativa, superando o dobro no percentual de acertos.
- A evolução do grupo B, em quantidades de alunos com notas maiores ou iguais a seis, foi de 800%, enquanto o grupo A foi de 100%, ou seja, oito vezes menor.

Esses resultados apontam um crescimento significativo na formação de conceitos do grupo experimental em relação ao crescimento do grupo de referência. Nesse sentido, esse trabalho sugere que o aprendizado no contexto computacional é mais eficiente.

Embora nossa amostra fosse pequena e realizada em uma escola particular, nosso estudo sugere que o aprendizado no contexto computacional é uma ferramenta viável para o professor na sua busca de ambientes didáticos que facilitem o entendimento e o processo de construção do conhecimento.

Contudo, o uso do computador em sala de aula não significa que o aluno vai fazer o que quer na hora que bem entende, e para que isso não aconteça o professor deve ter, mais que nunca, clareza dos seus objetivos. O professor deve planejar bem os seus cursos, pensando sempre que habilidades e competências precisam desenvolver nos alunos para, a partir disso, elaborar atividades que cumpram esse objetivo.

Portanto, para que haja uma boa educação no ambiente escolar, o professor deve estar consciente, que na formação integral do educando, a tecnologia também é essencial, pois pode trazer positivas mudanças na metodologia de aquisição de conceitos de seus alunos. A utilização da informática como recurso pedagógico traz um mundo possível de ser utilizado como recurso em sala de aula que adicionam possibilidades pedagógicas às já existentes.

Por último, como resultado desse trabalho, espero mais crescimento pessoal e profissional na minha missão de ensinar Matemática.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, Marlos Gomes de. **Um ambiente computacional para aprendizagem matemática baseado no modelo pedagógico de Maria Montessori.** 2000.67 f.. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

BORBA, Marcelo de C.; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática.** 2ª. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1974.

CALMON ROCHA, A M. Uso do *software* Winplot para o estudo de Trigonometria. **Rev. de Educação Básica do CEPAE/UFG** Disponível no site: http://www.revistas.ufg.br/index.php/sv/article/download/16292/9910

DANTE, L. R.: **Matemática.** 1ª ed., vol.: 2, Ed. Ática, São Paulo, 2004.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**: Arte ou técnica de explicar e conhecer. 4ª. ed. São Paulo: Ática,1998.

EVES, H.: **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues, 4ª ed., Ed. Unicamp, Campinas, São Paulo, 2004.

FREIRE, Paulo. **Educação e mudança.** Tradução de Moacir Gadotti e Lillian Lopes Martin. Rio de janeiro: Paz e Terra, 1997.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. **IV Congresso Ribie**. Brasília: 1998. Disponível na Internet: http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/artigos/artigos.htm.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; HAZZAN, Samuel; POMPEU, José Nicolau; **Fundamentos de matemática elementar:** Vol. 3. Atual. 4ª ed. São Paulo, 1977.

KENNEDY, E. S. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula**. volume 5: Trigonometria, trad. de Hygino H. Domingues - Ed. Atual Ltda, 1994.

LIMA, E. L., CAVRALHO, P.C.P., WAGNER, Eduardo, MORGADO, A. C.: **A matemática do ensino médio**: Volume 1. SBM, Rio de Janeiro, 8ª ed., 2005.

LIMA, E. L. Meu Professor de Matemática e outras histórias. - I.M.P.A., Vitae, Rio de Janeiro, 1991.

LOBO DA COSTA, N.M. **Funções seno e cosseno**: Uma Sequência de Ensino a Partir dos Contextos do Mundo Experimental. e do Computador. Dissertação de Mestrado, PUC/SP, 1997.

SILVA, Claudio Xavier da; BARRETO FILHO, Benigno. **Aula por aula.** 2ª ed. renovada - FTD, 2005.

TRINDADE CYRINO**,** M. C. C.; FERREIRA BALDINI, L. A. O Software GeoGebra na Formação De Professores De Matemática – Uma Visão a partir de Dissertações e Teses. **Rev. Paranaense de Educação Matemática**; 2012 Disponível na internet: http://www.fecilcam.br/rpem/documentos/v1n1/Software%20Geogebra.pdf

APÊNDICE A – ATIVIDADE DESENVOLVIDA NO DIA 15/04

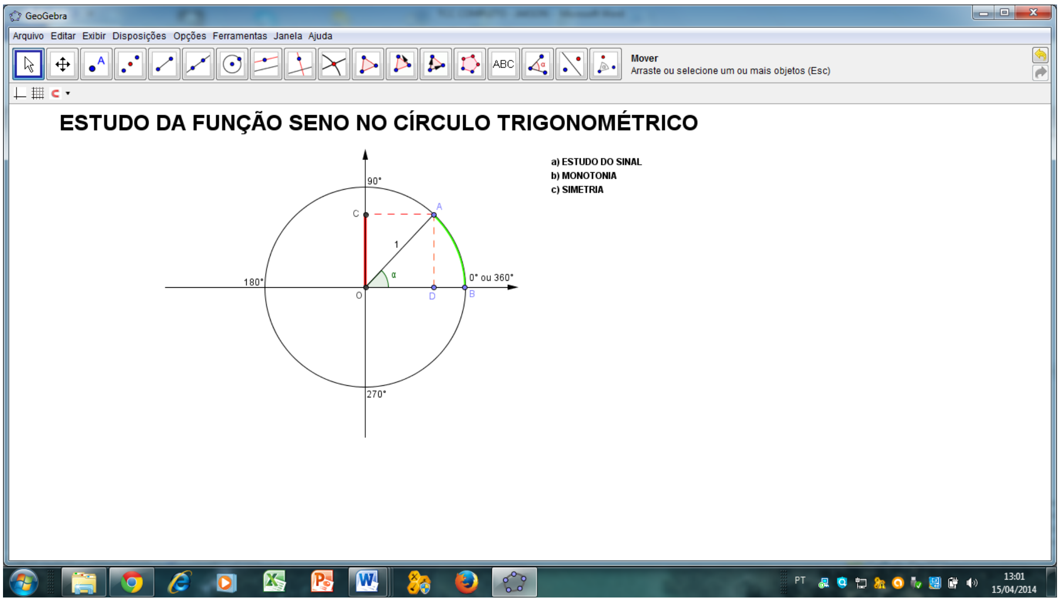


FIGURA 29: Captura de tela do Geogebra

Fonte: Arquivo pessoal do autor

APÊNDICE B – ATIVIDADE DESENVOLVIDA NO DIA 16/04

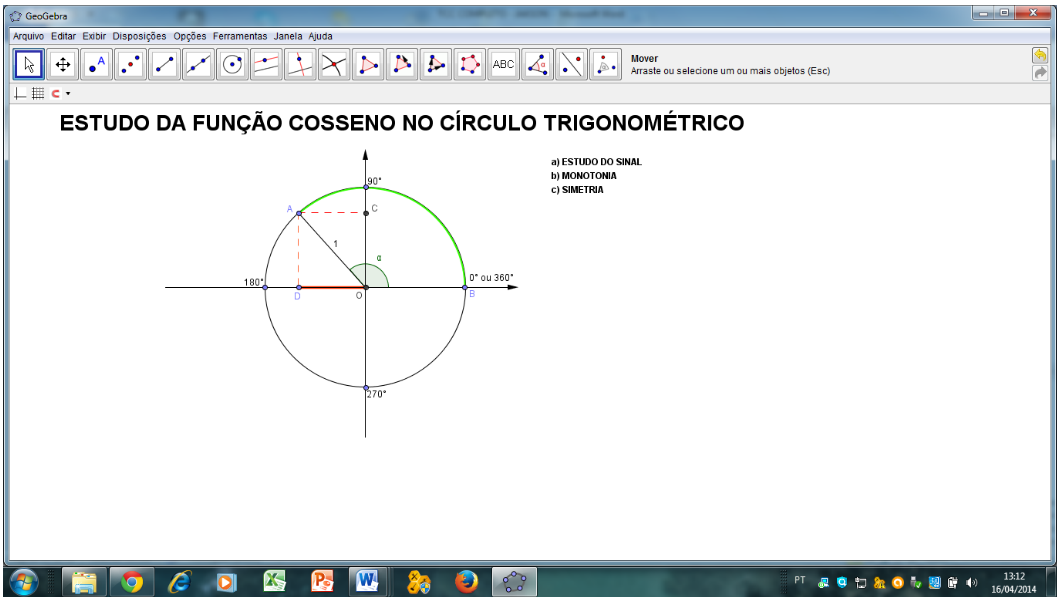


FIGURA 30: Captura de tela do Geogebra

Fonte: Arquivo pessoal do autor

APÊNDICE C – ATIVIDADE DESENVOLVIDA NO DIA 22/04

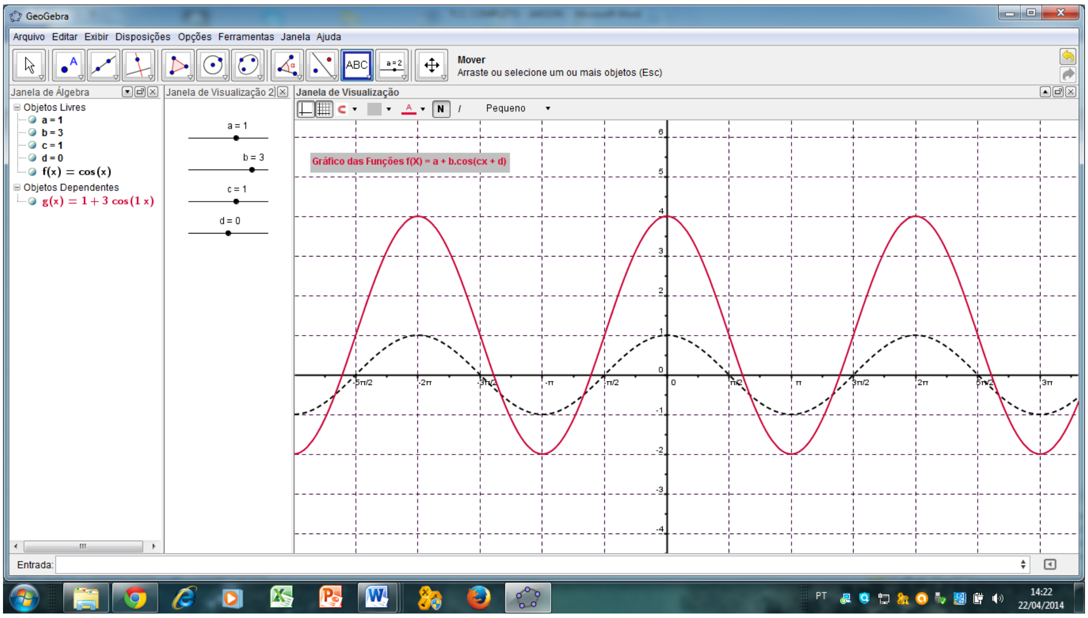


FIGURA 31: Captura de tela do Geogebra

Fonte: Arquivo pessoal do autor

APÊNDICE D – ATIVIDADE DESENVOLVIDA NO DIA 23/04

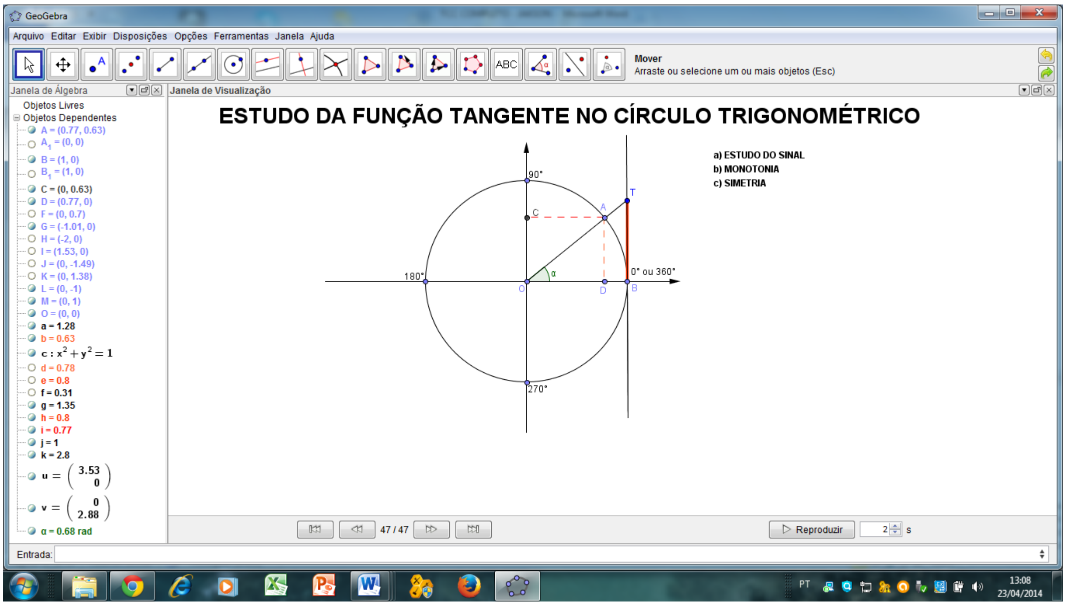


FIGURA 32: Captura de tela do Geogebra

Fonte: Arquivo pessoal do autor

APÊNDICE E – ATIVIDADE DESENVOLVIDA NO DIA 24/04

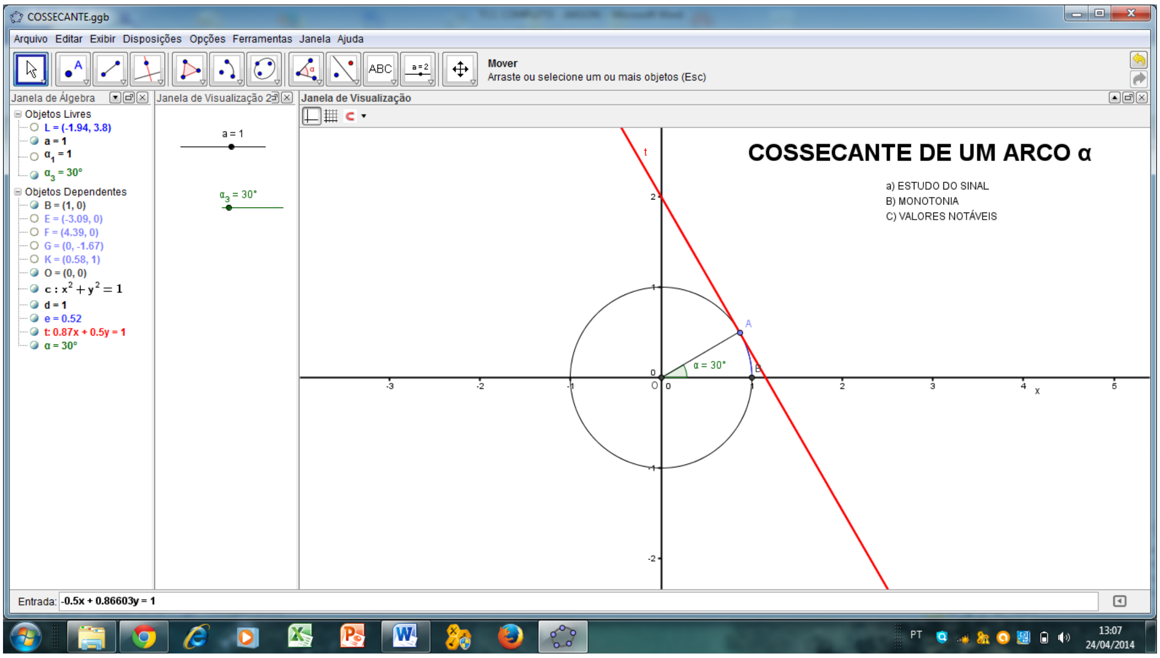


FIGURA 33: Captura de tela do Geogebra

Fonte: Arquivo pessoal do autor

APÊNDICE F – ATIVIDADE DESENVOLVIDA NO DIA 25/04

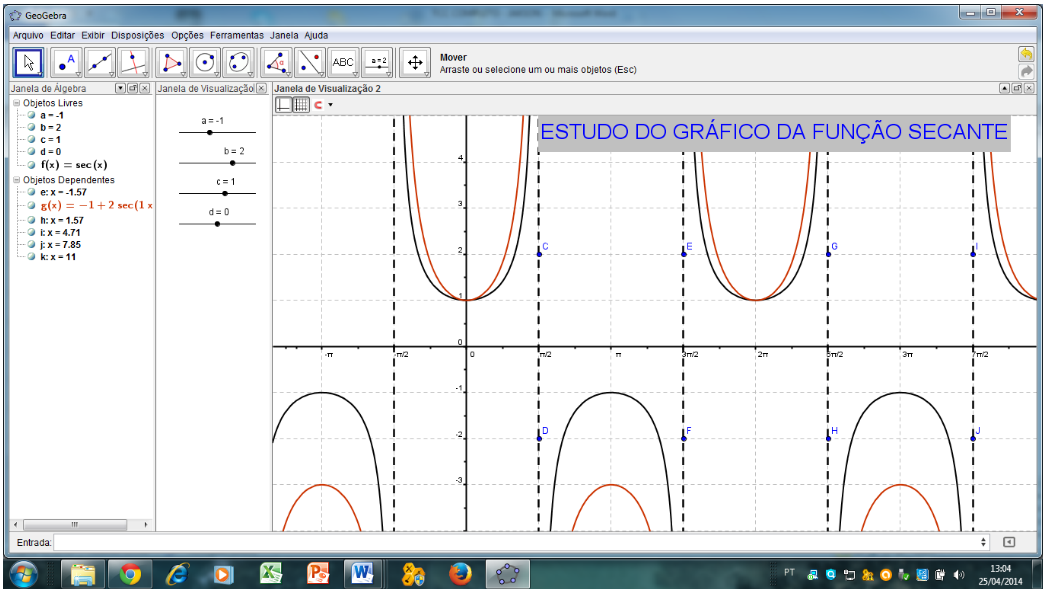
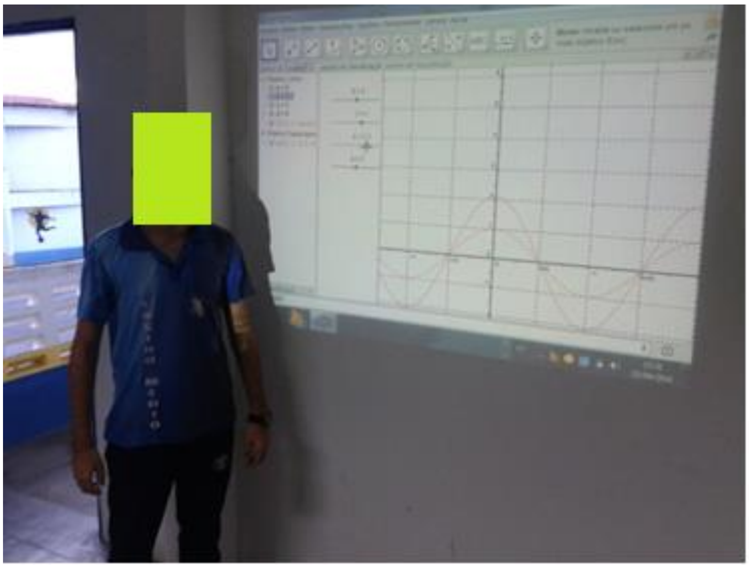


FIGURA 34: Captura de tela do Geogebra

Fonte: Arquivo pessoal do autor

APÊNDICE G – FOTOS



APÊNDICE H – PRÉ-TESTE RESOLVIDO POR UM ALUNO DE GRUPO DE REFERÊNCIA (A)

FOLHA 1

E.E.L.P.

Educandário Emília de Lima Pinho

Fazendo o futuro com você

2

Título: Matemática / Pré - teste (A)

Professor (a): [redacted]

Nota: 60

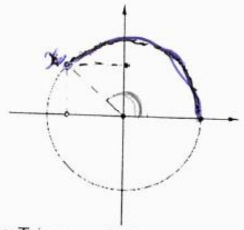
Aluno (a): [redacted]

Nº [redacted]

INSTRUÇÕES E OBSERVAÇÕES:

01. Preencha o cabeçalho corretamente.
02. Verifique se seu exemplar está completo. Nenhuma folha poderá ser destacada ou substituída.
03. Verifique, após autorizado o início da avaliação, se existem falhas ou imperfeições gráficas que lhe causem dúvidas.
04. Reclamações só serão aceitas durante os primeiros quinze minutos da avaliação.
05. A interpretação faz parte da avaliação, por isso, leia atentamente cada questão.
06. Os cálculos, quando necessário, podem ser feitos a lápis. As respostas devem ser grafadas com caneta azul ou preta.
07. Sempre que houver gabarito, este deverá ser preenchido com letra de forma.
08. Não é permitida a utilização de livros, cadernos, calculadoras, etc.
09. Não é permitida a troca de material entre os alunos.
10. A fraude, a indisciplina e o desrespeito ao(s) professor(es) encarregado(s) da fiscalização são faltas passíveis de punição.

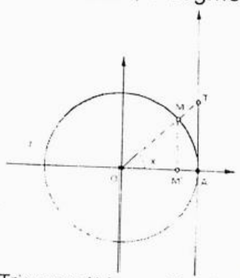
1ª) De acordo com a localização do arco x, no círculo trigonométrico abaixo, podemos afirmar que:



Círculo Trigonométrico no GeoGebra.
Fonte: Arquivo pessoal do autor.

a) sen x = cos x   b) sen x < 0   c) cos x > 0   d) (sen x).(cos x) < 0.

2) De acordo com o círculo trigonométrico abaixo, o segmento AT, representa:



Círculo Trigonométrico no GeoGebra.
Fonte: Arquivo pessoal do autor.

1,0

a) sen x   b) cos x   c) tg x   d) sec x   e) cotg x.

3) Um ângulo de medida 30° é equivalente a um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ rad.

4ª) Complete com < , > ou =.

a) sen 20° < sen 50°   b) sen 230° = sen 310°   c) cos 50° < cos 80°
d) cos 220° < cos 250°   e) sec 10° = sec 80°   f) sec 310° > sec 340°

5ª) Para x = 85°, pode-se conclui:

a) sen x < cos x < tg x   b) sen x < tg x < cos x   c) cos x < tg x < sen x
d) tg x < sen x <cos x   e) cos x < sen x < tg x

APÊNDICE H – PRÉ-TESTE RESOLVIDO POR UM ALUNO DE GRUPO DE REFERÊNCIA (A)

FOLHA 2

0,5

6ª) Esboce o gráfico da função f(x) = sen x, determinando o domínio, conjunto imagem e o período da função. $P = 2\pi$ $Im = [-1, 1]$ $D = \mathbb{R}$

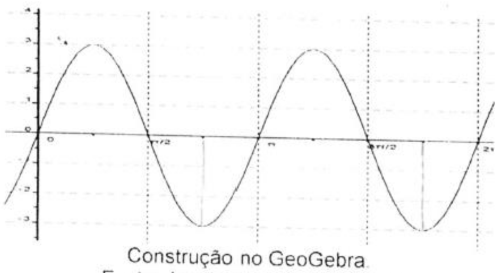
7ª) Seja a função f, de IR em IR definida por f(x) = 1 + 3cos x. O conjunto imagem dessa função é o intervalo:

1,0

a)[-3, 4]　　b) [3,4]　　c) [-2, 4]　　d) [1, 3]　　e) [-1, 1]

8ª) A figura mostra a parte do gráfico da função y = 3.sen(2x). Identifique seu domínio, seu conjunto imagem e seu período.

1,0

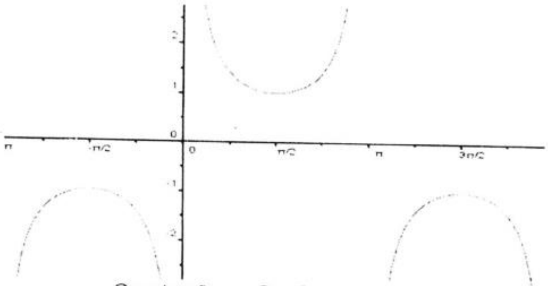


$P = \pi$
$Im = [-3, 3]$
$D = \mathbb{R}$

Construção no GeoGebra.
Fonte: Arquivo pessoal do autor

9ª) O gráfico abaixo representa a função:

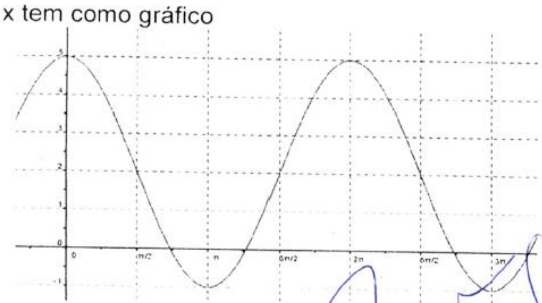
1,0



Construção no GeoGebra.
Fonte: Arquivo pessoal do autor

a) tg x　　b) cotg x　　c) sec x　　d) cossec x

10ª) Se y = a + b.sen x tem como gráfico



Construção no GeoGebra.
Fonte: Arquivo pessoal do autor

Então:

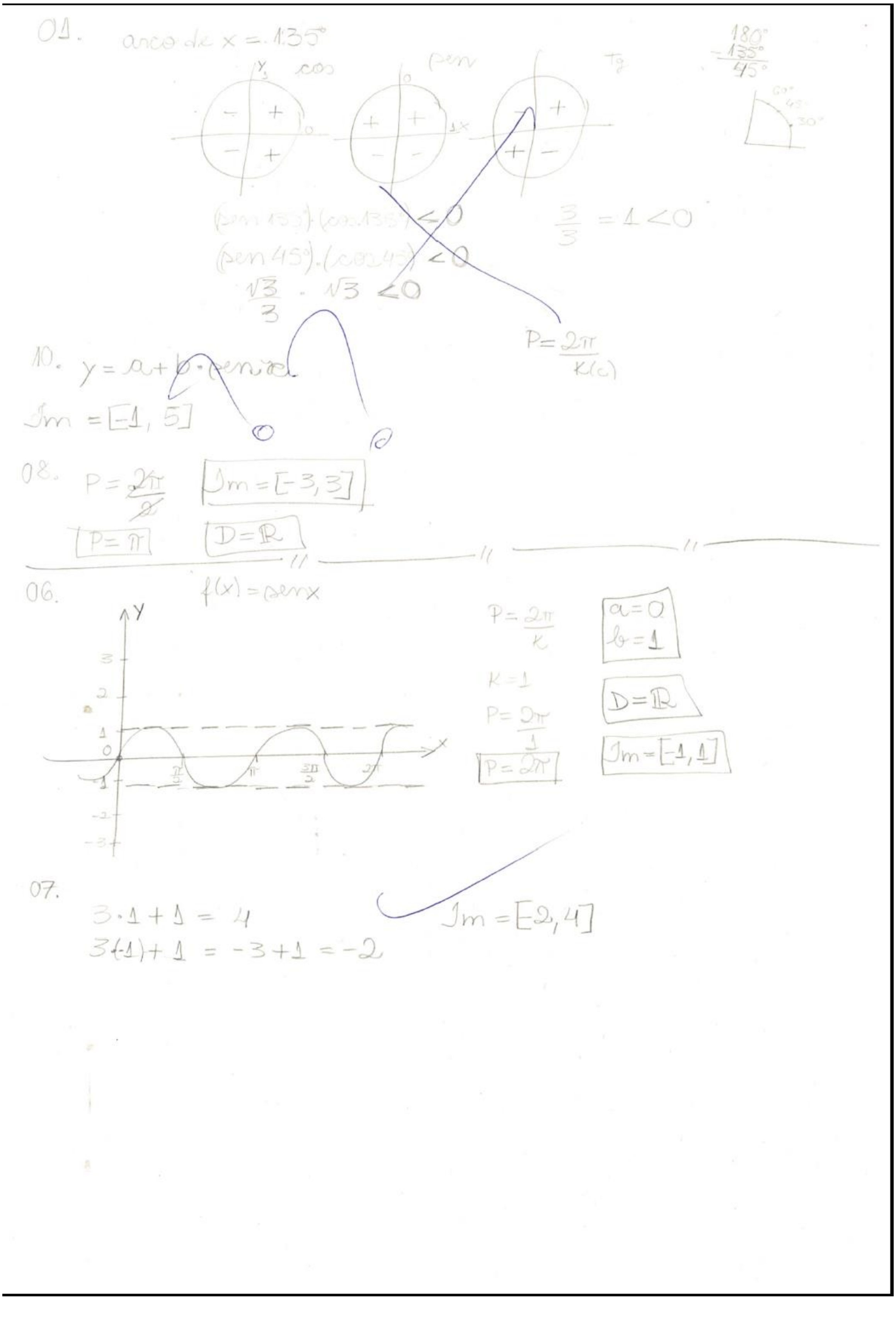
a) a = -1 e b = 5　　b) a = 5 e b = -1　　c) a = 2 e b = 3　　d) a = 3 e b = 5

0

Falta Cálculos?

APÊNDICE H – PRÉ-TESTE RESOLVIDO POR UM ALUNO DE GRUPO DE REFERÊNCIA (A)

FOLHA 3



01. arco de $x = 135°$

cos sen tg

$180° - 135° = 45°$

$(sen\,135°) \cdot (cos\,135°) < 0$

$(sen\,45°) \cdot (cos\,45°) < 0$

$\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} < 0$

$\frac{3}{3} = 1 < 0$

$P = \frac{2\pi}{K(c)}$

10. $y = a + b \cdot sen\,x$

$Im = [-1, 5]$

08. $P = \frac{2\pi}{2}$ $\boxed{Im = [-3, 3]}$

$\boxed{P = \pi}$ $\boxed{D = \mathbb{R}}$

06. $f(x) = sen\,x$

$P = \frac{2\pi}{k}$ $\boxed{a = 0 \quad b = 1}$

$k = 1$ $\boxed{D = \mathbb{R}}$

$P = \frac{2\pi}{1}$

$\boxed{P = 2\pi}$ $\boxed{Im = [-1, 1]}$

07.

$3 \cdot 1 + 1 = 4$ $Im = [2, 4]$

$3(-1) + 1 = -3 + 1 = -2$

APÊNDICE I – PRÉ-TESTE RESOLVIDO POR UM ALUNO DE GRUPO EXPERIMENTAL (B)

FOLHA 1

3

Educandário Emília de Lima Pinho

Fazendo o futuro com você

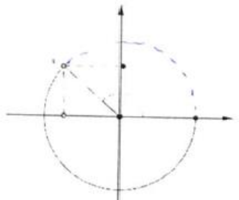
2

Título: Matemática / Pré - teste (B)	Professor (a) [redacted]	Nota
Aluno (a) [redacted]	[redacted]	6,0

INSTRUÇÕES E OBSERVAÇÕES:

01. Preencha o cabeçalho corretamente.
02. Verifique se seu exemplar está completo. Nenhuma folha poderá ser destacada ou substituída.
03. Verifique, após autorizado o início da avaliação, se existem falhas ou imperfeições gráficas que lhe causem dúvidas.
04. Reclamações só serão aceitas durante os primeiros quinze minutos da avaliação.
05. A interpretação faz parte da avaliação, por isso, leia atentamente cada questão.
06. Os cálculos, quando necessário, podem ser feitos a lápis. As respostas devem ser grafadas com caneta azul ou preta.
07. Sempre que houver gabarito, este deverá ser preenchido com letra de forma.
08. Não é permitida a utilização de livros, cadernos, calculadoras, etc.
09. Não é permitida a troca de material entre os alunos.
10. A fraude, a indisciplina e o desrespeito ao(s) professor(es) encarregado(s) da fiscalização são faltas passíveis de punição.

1ª) De acordo com a localização do arco x, no círculo trigonométrico abaixo, podemos afirmar que:

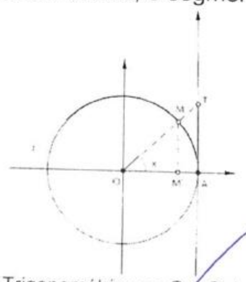


segundo quadrante
sen → negativo
cos → positivo

Círculo Trigonométrico no GeoGebra.
Fonte: Arquivo pessoal do autor.

a) sen x = cos x b) sen x < 0 c) cos x > 0 d) (sen x).(cos x) < 0.

2) De acordo com o círculo trigonométrico abaixo, o segmento AT, representa:



Círculo Trigonométrico no GeoGebra.
Fonte: Arquivo pessoal do autor.

a) sen x b) cos x c) tg x d) sec x e) cotg x.

3) Um ângulo de medida 30° é equivalente a um ângulo de ___ rad.

4ª) Complete com < , > ou =.

a) sen 20° < sen 50° b) sen 230° = sen 310° c) cos 50° > cos 80°
d) cos 220° < cos 250° e) sec 10° < sec 80° f) sec 310° > sec 340°
340°

5ª) Para x = 85°, pode-se conclui:

a) sen x < cos x < tg x b) sen x < tg x < cos x c) cos x < tg x < sen x
d) tg x < sen x <cos x e) cos x < sen x < tg x

APÊNDICE I – PRÉ-TESTE RESOLVIDO POR UM ALUNO DE GRUPO EXPERIMENTAL (B)

FOLHA 2

6ª) Esboce o gráfico da função f(x) = sen x, determinando o domínio, conjunto imagem e o período da função. rascunho.

7ª) Seja a função f, de IR em IR definida por f(x) = 1 + 3cos x. O conjunto imagem dessa função é o intervalo:

a)[-3, 4] b) [3,4] c) [-2, 4] d) [1, 3] e) [-1, 1]

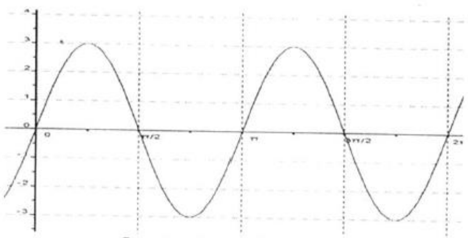
FALTA CALCULOS?

8ª) A figura mostra a parte do gráfico da função y = 3.sen(2x). Identifique seu domínio, seu conjunto imagem e seu período.

$P = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

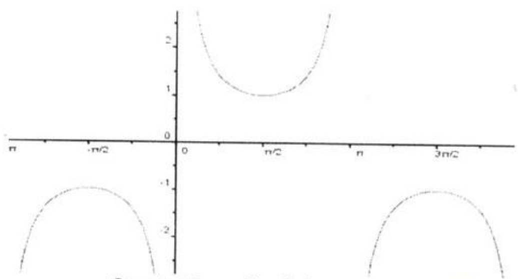
$D = IR$

$Im = [-3, 3]$



Construção no GeoGebra.
Fonte: Arquivo pessoal do autor

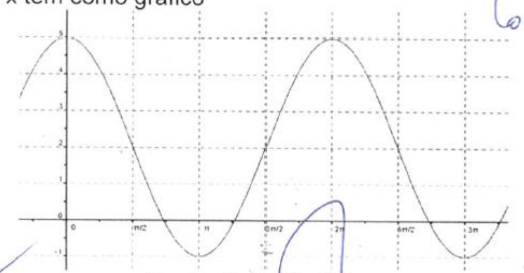
9ª) O gráfico abaixo representa a função:



Construção no GeoGebra.
Fonte: Arquivo pessoal do autor

a) tg x b) cotg x c) sec x d) cossec x

10ª) Se y = a + b.sen x tem como gráfico



Construção no GeoGebra.
Fonte: Arquivo pessoal do autor

cálculos??

Então:

a) a = -1 e b = 5 b) a = 5 e b = -1 c) a = 2 e b = 3 d) a = 3 e b = 5

APÊNDICE I – PRÉ-TESTE RESOLVIDO POR UM ALUNO DE GRUPO EXPERIMENTAL (B)

FOLHA 3

06ª)

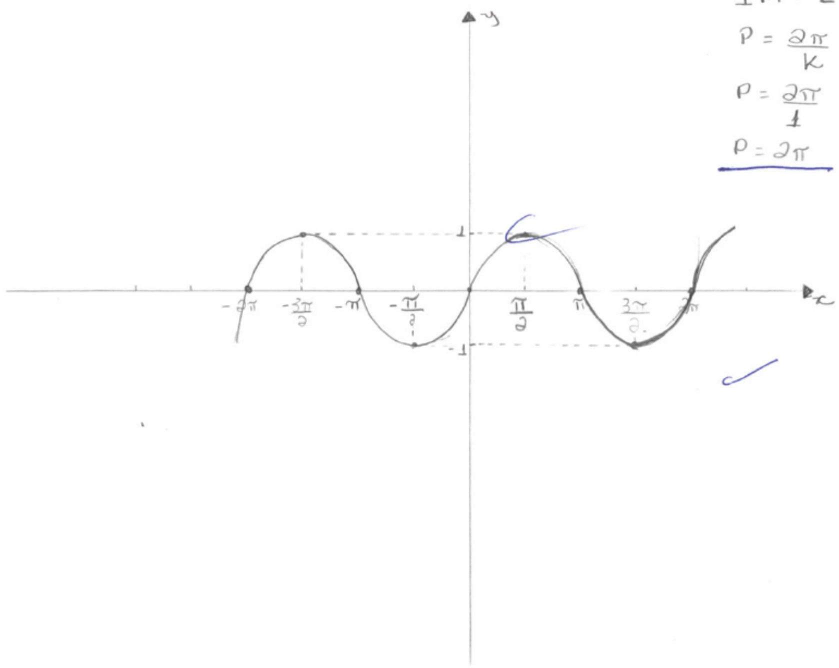
$Im = [-1, 1]$

$P = \frac{2\pi}{k}$

$P = \frac{2\pi}{1}$

$P = 2\pi$

$D = ?$



x	y
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0
0	0
$-\frac{\pi}{2}$	-1
$-\pi$	0
$-\frac{3\pi}{2}$	1
-2π	0

APÊNDICE J – TESTE RESOLVIDO POR UM ALUNO DE GRUPO DE REFERÊNCIA (A)

FOLHA 1

E.E.L.P. **Educandário Emília de Lima Pinho** 2

Fazendo o futuro com você

Título: Matemática / Teste (A) | Professor (a): [redacted] | Nota: 7,0

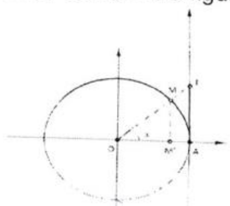
Aluno (a): [redacted] | Nº [redacted] Turma [redacted] Turno [redacted] Data [redacted]

INSTRUÇÕES E OBSERVAÇÕES:
01. Preencha o cabeçalho corretamente.
02. Verifique se seu exemplar está completo. Nenhuma folha poderá ser destacada ou substituída.
03. Verifique, após autorizado o início da avaliação, se existem falhas ou imperfeições gráficas que lhe causem dúvidas.
04. Reclamações só serão aceitas durante os primeiros quinze minutos da avaliação.
05. A interpretação faz parte da avaliação, por isso, leia atentamente cada questão.
06. Os cálculos, quando necessário, podem ser feitos a lápis. As respostas devem ser grafadas com caneta azul ou preta.
07. Sempre que houver gabarito, este deverá ser preenchido com letra de forma.
08. Não é permitida a utilização de livros, cadernos, calculadoras, etc.
09. Não é permitida a troca de material entre os alunos.
10. A fraude, a indisciplina e o desrespeito ao(s) professor(es) encarregado(s) da fiscalização são faltas passíveis de punição.

1ª) Complete com <, > ou =.

a) sen 70° > sen 20° b) sen 230° < sen 310° c) cos 5° < cos 50°
d) cos 20° > cos 140° e) sec 50° < sec 10° f) sec 30° < sec 220°

2ª) Sendo x um arco do primeiro quadrante, conforme a figura abaixo, podemos afirmar:



sen x = MM / mO
cos x = Om / mO

1,0

Círculo Trigonométrico no GeoGebra.
Fonte: Arquivo pessoal do autor.

a) sen x = OM' b) sen x = AT c) cos x = OM' d) cos x = AT

3ª) Esboce o gráfico da função f(x) = 2cos x, determinando o domínio, conjunto imagem e o período da função.

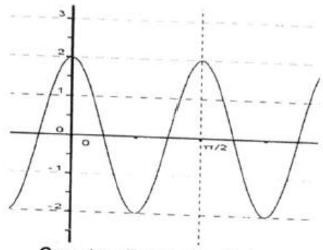
1,0

4ª) O produto P = (sen 100°) . (cos 200°) . (sec 300°) . (cossec 400°):

a) é positivo b) é negativo
c) é nulo d) é impossível determinar o seu sinal.

1,0

5ª) A figura mostra a parte do gráfico da função y = 2.sen(4x):



1,0

Construção no GeoGebra.
Fonte: Arquivo pessoal do autor.

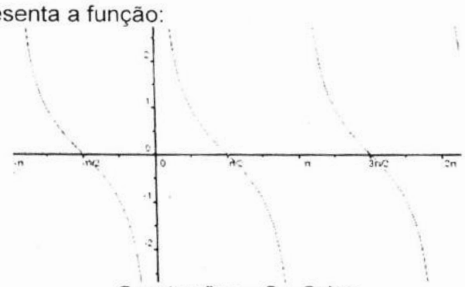
Identifique seu domínio, seu conjunto imagem e seu período.

D = ℝ
Im = [-2, 2]
P = 2π/4 : 2/2
P = π/2

APÊNDICE J– TESTE RESOLVIDO POR UM ALUNO DE GRUPO DE REFERÊNCIA (A)

FOLHA 2

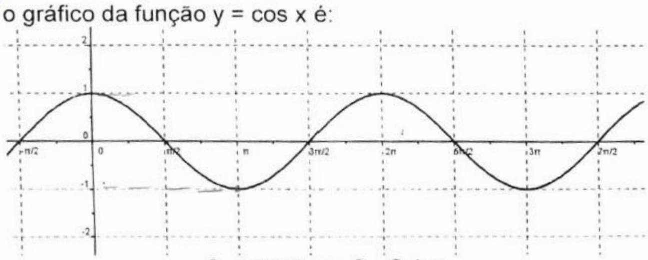
6ª) O gráfico abaixo representa a função:



Construção no GeoGebra.
Fonte: Arquivo pessoal do autor.

~~a)~~ tg x C   b) cotg x   c) sec x   d) cossec x

7ª) Sabendo que o gráfico da função y = cos x é:



Construção no GeoGebra.
Fonte: Arquivo pessoal do autor.

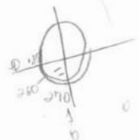
Determine:
a) Seu conjunto imagem e seu domínio   Im = [-1, 1] C   D = ℝ C
b) Esboce o gráfico de y = 2 + cos x
1,0   c) O conjunto imagem, o domínio e o período da função y = 2 + 3cos x

2 - 3 = -1
2 + 3 = 5

8ª) O período da função dada por y = sec$\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ é: $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

1,0   a) π   b) 2π   c) $\frac{\pi}{4}$ ~~d)~~ $\frac{\pi}{2}$ C   e) $\frac{\pi}{3}$

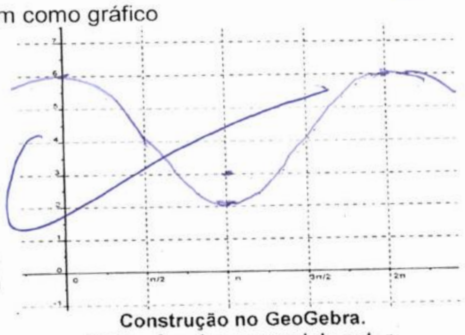
9ª) Para x = 260°, pode-se conclui:
a) sen x < cos x < tg x   b) sen x < tg x < cos x   ~~c)~~ cos x < tg x < sen x C
d) tg x < sen x < cos x   e) cos x < sen x < tg x



10ª) Se y = a + b.cos x tem como gráfico

$\begin{cases} a+b=6 \\ a-b=2 \end{cases}$
2a = 8
$\boxed{a=4}$
a+b=6
4+b=6
$\boxed{b=2}$

1,0



Construção no GeoGebra.
Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Então:
a) a = 2 e b = 6   b) a = 6 e b = -2   c) a = 2 e b = 4   ~~d)~~ a = 4 e b = 2

APÊNDICE J – TESTE RESOLVIDO POR UM ALUNO DE GRUPO EXPERIMENTAL (B)

FOLHA 3

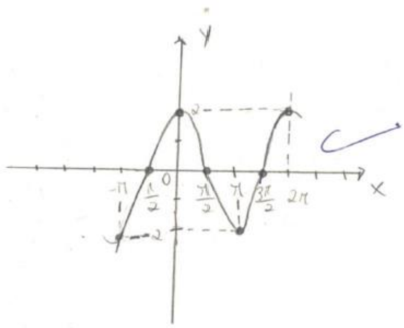
3ª) $f(x) = 2\cos x$

$f(x) = 2 \cdot \cos(-90)$

$f(x) = 2 \cdot 0$

$2 \cdot \cos 0$

x	y
$-\pi$	-2
$-\frac{\pi}{2}$	0
0	2
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-2
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	2

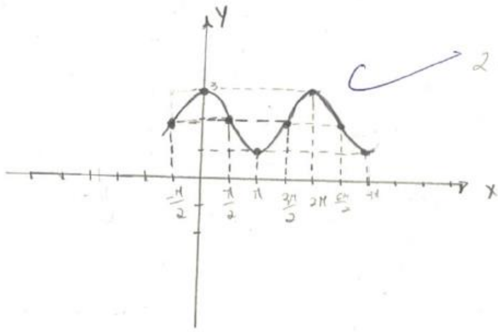


$D = \mathbb{R}$

$Im = [-2, 2]$

$P = 2\pi$

4ª) b)



$2 - 1 = -1$

$2 - 1 = 1$

c) $Im = [-1, 5]$

$P = 2\pi$

$D = \mathbb{R}$

APÊNDICE K – TESTE RESOLVIDO POR UM ALUNO DE GRUPO EXPERIMENTAL (B)

FOLHA 1

Educandário Emília de Lima Pinho

Fazendo o futuro com você

2

Título: Matemática / Teste (B)	Professor (a): Jakson	Nota: 10,0 DEZ
Aluno (a): [redacted]	Nº [redacted]	

INSTRUÇÕES E OBSERVAÇÕES:

01. Preencha o cabeçalho corretamente.
02. Verifique se seu exemplar está completo. Nenhuma folha poderá ser destacada ou substituída.
03. Verifique, após autorizado o início da avaliação, se existem falhas ou imperfeições gráficas que lhe causem dúvidas.
04. Reclamações só serão aceitas durante os primeiros quinze minutos da avaliação.
05. A interpretação faz parte da avaliação, por isso, leia atentamente cada questão.
06. Os cálculos, quando necessário, podem ser feitos a lápis. As respostas devem ser grafadas com caneta azul ou preta.
07. Sempre que houver gabarito, este deverá ser preenchido com letra de forma.
08. Não é permitida a utilização de livros, cadernos, calculadoras, etc.
09. Não é permitida a troca de material entre os alunos.
10. A fraude, a indisciplina e o desrespeito ao(s) professor(es) encarregado(s) da fiscalização são faltas passíveis de punição.

1ª) Complete com < , > ou =.

1,0

a) sen 70° $>$ sen 20° b) sen 230° $=$ sen 310° c) cos 5° $<$ cos 50°

d) cos 20° $>$ cos 140° e) sec 50° $>$ sec 10° f) sec 30° $>$ sec 220°

2ª) Sendo x um arco do primeiro quadrante, conforme a figura abaixo, podemos afirmar:

Círculo Trigonométrico no GeoGebra.
Fonte: Arquivo pessoal do autor.

1,0

a) sen x = OM' b) sen x = AT c) cos x = OM' d) cos x = AT

3ª) Esboce o gráfico da função f(x) = 2cos x, determinando o domínio, conjunto imagem e o período da função.

1,0

4ª) O produto P = (sen 100°) . (cos 200°). (sec 300°) .(cossec 400°):

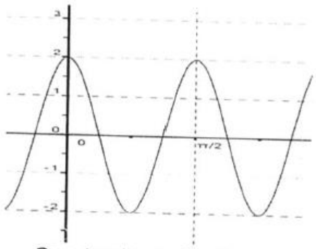
1,0

a) é positivo b) é negativo

c) é nulo d) é impossível determinar o seu sinal.

5ª) A figura mostra a parte do gráfico da função y = 2.sen(4x):

1,0



Construção no GeoGebra.
Fonte: Arquivo pessoal do autor.

$P = \frac{\pi}{2}$

$D = \mathbb{R}$

$Im = [-2, 2]$

Identifique seu domínio, seu conjunto imagem e seu período.

APÊNDICE K – TESTE RESOLVIDO POR UM ALUNO DE GRUPO EXPERIMENTAL (B)

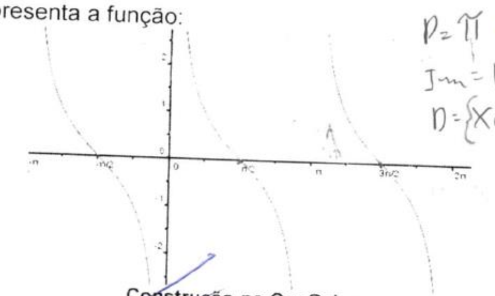
FOLHA 2

6ª) O gráfico abaixo representa a função:

P = π

Im = IR

D = {x ∈ IR | x ≠ k.π, com k ∈ ℤ

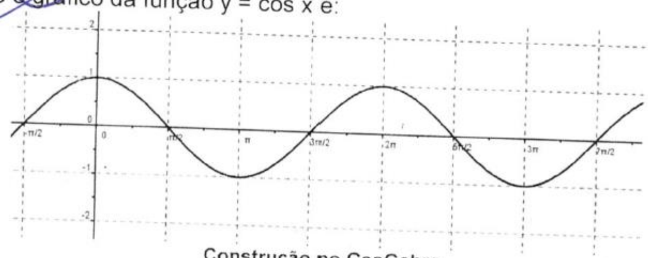


1,0

Construção no GeoGebra.
Fonte: Arquivo pessoal do autor.

a) tg x b) ~~cotg x~~ c) sec x d) cossec x

7ª) Sabendo que o gráfico da função y = cos x é:



Construção no GeoGebra.
Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Determine:

a) Seu conjunto imagem e seu domínio Im = [-1, 1]; D = IR

b) Esboce o gráfico de y = 2 + cos x

c) O conjunto imagem, o domínio e o período da função y = 2 + 3cos x

1,0

8ª) O período da função dada por y = sec$\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ é:

1,0

a) π b) 2π c) $\frac{\pi}{4}$ d) ~~$\frac{\pi}{2}$~~ e) $\frac{\pi}{3}$

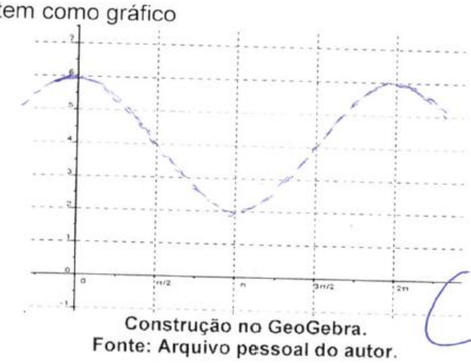
9ª) Para x = 260°, pode-se conclui:

1,0

a) ~~sen x < cos x < tg x~~ b) sen x < tg x < cos x c) cos x < tg x < sen x

d) tg x < sen x < cos x e) cos x < sen x < tg x

10ª) Se y = a + b.cos x tem como gráfico



1,0

Construção no GeoGebra.
Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Então:

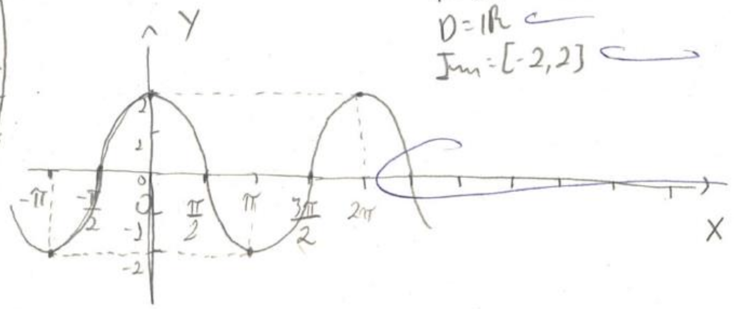
a) a = 2 e b = 6 b) a = 6 e b = -2 c) a = 2 e b = 4 d) ~~a = 4 e b = 2~~

APÊNDICE K – TESTE RESOLVIDO POR UM ALUNO DE GRUPO EXPERIMENTAL (B)

FOLHA 3

3)

	cosx	2.cosx
$-\pi$	-1	-2
$-\pi/2$	0	0
0	1	2
$\pi/2$	0	0
π	-1	-2
$3\pi/2$	0	0



$P = 2\pi$

$D = \mathbb{R}$

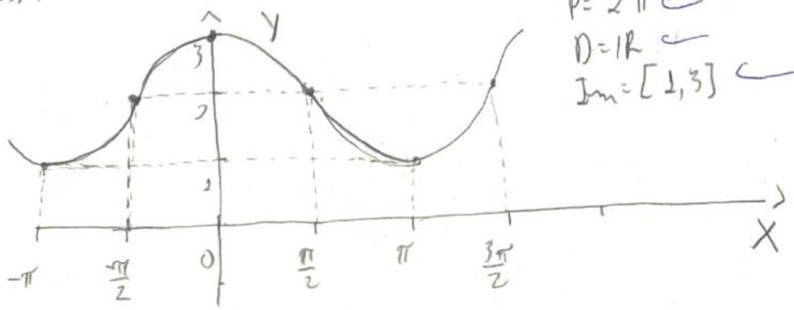
$Im = [-2, 2]$

4) $sen\,100° \cdot cos\,200° \cdot sec\,300° \cdot cossec\,400°$

$+ \quad \cdot \quad - \quad \cdot \quad + \quad\quad +$

7) b) $y = 2 + cos\,x$

$-\pi$	-1	1
$-\frac{\pi}{2}$	0	2
0	1	3
$\frac{\pi}{2}$	0	2
π	-1	1
$\frac{3\pi}{2}$	0	2



$P = 2\pi$

$D = \mathbb{R}$

$Im = [1, 3]$

c) $P = 2\pi$

$y_{max} = 3 + 2 = 5$

$y_{min} = -3 + 2 = -1$

$Im = [-1, 5]$

$D = \mathbb{R}$

8) $c = 4$

$P = \frac{2\pi}{c}$

$P = \frac{2\pi}{4}$

$P = \frac{\pi}{2}$

9)

$sen \cong -1$

$cos \cong 0$

$tg \cong \infty$

$sen < cos < tg$

10) $\begin{cases} a + b = y_{max} \\ a - b = y_{min} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ a - b = 2 \end{cases} \rightarrow a + b = 6$

$4 + b = 6$

$b = 2$

$2a = 8$

$a = 4$

APÊNDICE L – ATIVIDADE DESENVOLVIDA PARA FIXAÇÃO DE CONCEITOS

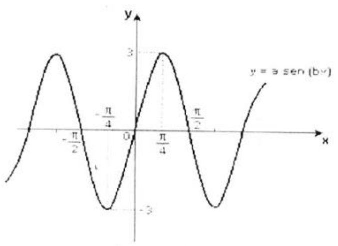
FOLHA 1

Educandário Emília de Lima Pinho

Fazendo o futuro com você

Título	Professor (a)				Nota
Matemática / Trabalho					
Aluno (a)	Nº	Turma	Turno	Data	
		Única	Tarde		

1ª) (Ufrn) A figura abaixo representa o gráfico da função y=a.sen(.bx), onde $a \neq 0$ e b>0.



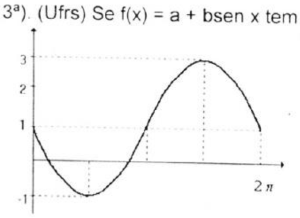
Para o menor valor possível de b, os valores de a e b são, respectivamente:

a) - 3 e 2 b) 3 e 2 c) 3 e ½ d) - 3 e ½

2ª). (Unirio) Seja f: R é R, onde R denota o conjunto dos números reais, uma função definida por f(x)=[3/(4+cosx)]+1.
O menor e o maior valor de f(x), respectivamente, são:

a) 1, 6 e 2 b) 1, 4 e 3 c) 1, 6 e 3
d) 1, 4 e 1,6 e) 2 e 3

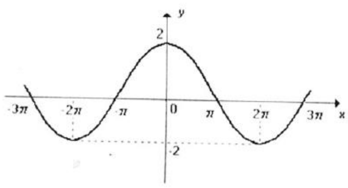
3ª). (Ufrs) Se f(x) = a + bsen x tem como gráfico



Então:

a) a = -2 e b = 1 b) a = -1 e b = 2 c) a = 1 e b = -1
d) a = 1 e b = -2 e) a = 2 e b = -1

4ª). (Puc - Camp) Na figura a seguir tem-se parte do gráfico da função f, de IR em IR, dada por f(x)=k.cos(tx).



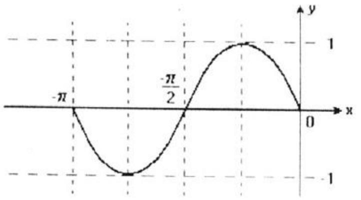
Nessas condições, calculando-se k-t obtém-se

a) -3/2 b) -1 c) 0 d) 3/2 e) 5/2

APÊNDICE L – ATIVIDADE DESENVOLVIDA PARA FIXAÇÃO DE CONCEITOS

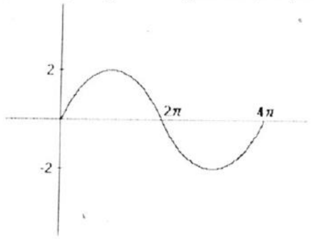
FOLHA 2

5ª). (Unitau) Indique a função trigonométrica f(x) de domínio R; Im=[-1, 1] e período π que é representada, aproximadamente, pelo gráfico a seguir:



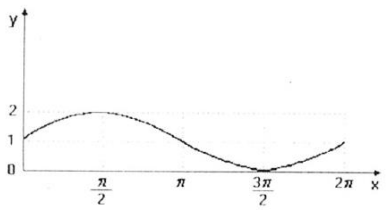
a) y = 1 + cos x. b) y = 1 - sen x. c) y = sen (-2x).
d) y = cos (-2x). e) y = - cos x.

6ª). (Fuvest) A figura a seguir mostra parte do gráfico da função:



a) sen x b) 2 sen (x/2) c) 2 sen x d) 2 sen 2x e) sen 2x

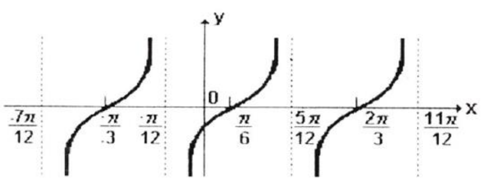
7ª). (Faap) Considerando $0 \leq x \leq 2\pi$, o gráfico a seguir corresponde a:



a) y = sen (x + 1) b) y = 1 + sen c) y = sen x + cos x
d) y = sen^2 x + cos^2 x e) y = 1 - cos x

8ª). (Uff) Para θ = 89°, conclui-se que:
a) tg θ < sen θ < cos θ b) cos θ < sen θ < tg θ c) sen θ < cos θ < tg θ
d) cos θ < tg θ < sen θ e) sen θ < tg θ < cos θ

9. (Puc-camp) Na figura a seguir tem-se o gráfico de uma função f, de A $\subset$ IR em IR.



É correto afirmar que
a) f é crescente para todo x real tal que π /6<x<2 π /3.
b) f é positiva para todo x real tal que 0<x<5 π /12.
c) o conjunto imagem de f é IR - {0}.
d) o domínio de f é IR - {(π /2) + k π, com k Æ Z}
e) o período de f é π /2.

APÊNDICE L – ATIVIDADE DESENVOLVIDA PARA FIXAÇÃO DE CONCEITOS

FOLHA 3

10. (Puc-camp) Sobre a função f, de IR em IR, definida por f(x)=cos 3x, é correto afirmar que
a) seu conjunto imagem é [-3; 3].
b) seu domínio é [0; 2 π].
c) é crescente para x $\in$ [0; π /2].
d) sua menor raiz positiva é π /3.
e) seu período é 2 π /3.