UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FILIPE MENDONÇA DE LIMA

ESTIMATIVAS EXTRÍNSECAS DE AUTOVALORES DE OPERADORES ELÍPTICOS EM HIPERSUPERFÍCIES

FORTALEZA-CE
2010

FILIPE MENDONÇA DE LIMA

Estimativas Extrínsecas de Autovalores de Operadores Elípticos em Hipersuperfícies

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Jorge Herbert Soares Lira

FORTALEZA-CE
2010

L698e Lima, Filipe Mendonça de

Estimativas extrínsecas de autovalores de operadores elípticos para hipersuperfícies / Filipe Mendonça de Lima - Fortaleza: 2010.

40 f.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Herbert Soares Lira

Área de concentração: Matemática

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Departamento de Matemática, 2010.

1-Geometria diferencial

CDD 516.36

Para meu avô Paulo, onde estiver.

AGRADECIMENTOS

Gostaria aqui de agradecer a todas as pessoas que acreditaram sempre em mim.

Ao meu orientador Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira, pela paciência e ajuda. Sem ele isso não teria sido possível.

Aos professores da UFC: Aldir Brasil, Antônio Caminha, Cleon Barroso, Fernanda Esther, José Robério, Levi Lima, Lucas Barbosa, Luquésio Jorge, Silvano Menezes. Por terem me ensinado coisas que vão além da compreensão.

Às minha professoras da Graduação, lá na UFRPE: Maité Kulesza, Márcia Pragana, Maria Eulália. Por terem me dado o maior apoio possível para que eu entrasse na pós-graduação.

À Secretária da Pós-Graduação Andréa Costa Dantas, o nosso oráculo com relação a qualquer coisa do curso.

Aos meus pais, Luiz Carlos e Maria José, minha irmã, Mirna Juliana, e minha avó Creuza, pelo apoio incondicional.

À minha tia e madrinha Queu, que ao estar lendo isso estará chorarando, por ter acreditado sempre.

À Renata, Tiago, Rogério e Paulo, minha outra família em Recife.

Às filhas de Seu Dudu (Sr. José Araújo *in memorian*), Aldecira, Aurecir, Aurenice, Auriceia, Aurineia e Auristeia, por incríveis verões passados na infância, e por ter despertado meu prazer pela docência.

Aos meus tios e tias, primos e primas Brasil afora. Por participarem de tudo sem mesmo estar juntos.

Aos meus amigos de jornada, José Deibsom, Leon Denis e Tiago Veras. Foi difícil, mas no fim, conseguimos. Sem eles eu não teria tido forças para continuar.

Ao meu cunhado Kléber Magrão, por estar sempre dando uma força ao menor sinal de hesitação minha.

Ao meu ex-técnico de Atletismo, Prof. Gilberto Freire, pelas inúmeras lições de sabedoria.

À Giselly, a quem prometi que estaria no meu discurso de vitória.

À Michelly, Oldineia e Renata pelas calorosas visitas a Fortaleza.

Aos colegas que conheci aqui na Universidade, e que sempre nos ajudaram e estavam presentes em todos os momentos: Adam Silva, Alexsandro Belém, Antonio Edinardo, Antônio Wilson, Carlos Braúna, Cícero Aquino, Cícero Fágner, Damião Júnio, Davi Carneiro, Ernani Júnior, Flávio França, Francisco Calvi, Francisco Chaves, Francisco de Assis, Gleydson Chaves, João Francisco, João Victor, Jonatan Floriano, José Nazareno, Kelton Silva, Marco Antonio, Maria de Fátima, Michel Rebouças, Priscila Alcântara, Rondinelle Marcolino, Sérgio Faustino, Thadeu Ribeiro, Tiago Cruz, Tiago Alencar, Tiarlos Cruz, Upá Gomes. Obrigado por tudo.

Aos colegas da Parquelândia: Ariel, Betão, Bill, Carlos *Tchan* Augusto, Dona Maria (*in memoriam*), Marcelo Baiano, Maria, Luana, Pedrinho, Vítor. Aquele abraço. Saudades. Nos veremos ainda.

Aos novatos: André Sampaio, Eurípedes Carvalho, Leonardo Tavares, Raquel Costa, Renato Araújo. Ânimo! Que assim vocês chegarão às estrelas.

Aos meus amigos de infância: Adriana Sales, Cínthia Santiago, Cláudio Silva, David Veríssimo, Dayse Monteiro, Edith Mendes, Edson Teixeira, Elaynne Alves, Ewerthon José, Heyder Antunes, Izaak Higino, Jadsom Gonçalves, Jefferson Gonçalves, Jorge Gustavo, José Adeir, Laís Monteiro, Leandro Nascimento, Mário Bandeira, Priscila Castanha, Rafaela Andrade, Renata Mendes, Ricardo Luiz, Thiago Oliveira, Vanessa Monteiro. Que continuemos assim, juntos, por muito mais anos.

Aos amigos *Manobreiros*: Angélica Ribeiro, Artur Souza, Jorge Vieira, Tatiehlly Sant'Anna, Thiego Sant'Anna. Por mais longe que estejamos uns dos outros, as *manobragens* permanecem.

Aos amigos do CCAA: Giselle Oliveira, Ivana Oliveira, Júlio César, Márcia Júlia, Nathália Ingrid. Incríveis dois anos, e amizades para a vida toda.

Aos colegas que (quase) nunca vejo, mas sempre estão por perto para me dar uma força: Anselmo Guerra, Charles Barbosa, Demiam Fonseca, Ferdinando Woicickoski, Leandro Clemente, Márcio Oliveira, Melissa Ravanelli, Suzanne Heist, Thaíze Cordeiro, Tiago Tavolari, Vanessa Arcoverde, Wagner Medeiros, Yuri Petnys.

Aos meus pequeninos Bianca e Gabriel. *O futuro do nosso mundo jaz em suas mãos*.

Aos que eu esqueci, mil desculpas. Foram muitos nomes, eventualmente esqueci de algum.

À Pós-Graduação de Matemática da UFC, pela acolhida.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Arise, arise, Riders of Théoden!
Fell deeds awake, fire and slaughter!
Spear shall be shaken, shield be splintered,
A sword-day, a red day, ere the sun rises!
Ride now, ride now! Ride to ruin, and the world's ending!

Théoden King - *The Ride of the Rohirrim*

"The path of the righteous man is beset on all sides by the iniquities of the selfish and the tyranny of evil men. Blessed is he, who in the name of Charity and Good Will, shepherds the weak through the Valley of Darkness, for he is truly his brother's keeper and the finder of lost children. And I will strike down upon thee with great vengeance and furious anger those who would attempt to poison and destroy my brothers. And you will know my name is the Lord when I lay my vengeance upon thee."

Ezekiel 25:17

RESUMO

O objetivo desse trabalho é mostrar estimativas superiores para o menor autovalor não-nulo λ_1 do operador de Laplace-Beltrami Δ. Os resultados que se seguem foram encontrados por R. Reilly [1] e a dupla A. El Soufi e S. Ilias [2]. A estimativa de Reilly é feita para variedades imersas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, e a de Soufi-Ilias para variedades conformemente imersas na esfera $\mathbb{S}^n$. A partir daí concluiremos o resultado, também de Soufi-Ilias [2], para subvariedades do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$.

Palavras-chave: Estimativa Soufi-Ilias. Desigualdade de Reilly. Autovalores do Operador Laplace-Beltrami

ABSTRACT

The aim of this works is to show superior estimatives to the least non-zero eingenvalue λ_1 of the Laplace-Beltrami operator Δ. The forthcoming results were discovered by Reilly [1] and the duo A. El Soufi and S. Ilias [2]. Reilly's Estimative was calculated for immersed manifolds in the Euclidian Space $\mathbb{R}^n$, and Soufi-Ilias for conformally immersed manifolds in the sphere $\mathbb{S}^n$. Then, we conclude the result, again by Soufi-Ilias [2], for submanifolds of the hyperbolic space $\mathbb{H}^n$.

Keywords: Soufi-Ilias Estimative. Reilly Inequality. Eingenvalues of the Laplace-Beltrami Operator.

Sumário

Introdução

Seja (M, g) uma subvariedade M munida de uma métrica riemanniana g, orientável, compacta, sem fronteira em uma variedade riemanniana (N, h) orientável e com métrica h. Dada uma imersão $\phi : M \to N$, consideramos em M a métrica induzida por ϕ, isto é, o tensor $g = \phi^* h$. Sendo assim, dizemos que M está imersa isometricamente em N e denotamos por B_ϕ e H_ϕ, respectivamente, a segunda forma fundamental e a curvatura média da imersão isométrica $\phi : (M, g) \to (N, h)$.

Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. O **operador de Laplace-Beltrami** ou simplesmente **Laplaciano** de f é a função $\Delta f : M^m \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$$

Um número real λ é autovalor de Δ quando existe uma função não-nula $\varphi \in C^2(M)$ tal que

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0.$$

Neste caso, φ é uma autofunção associada a λ. Denotamos por $\lambda_1(\Delta)$ o primeiro autovalor *não-nulo* de Δ em M.

O foco desse trabalho é provar dois teoremas importantes envolvendo estimativas para o autovalor $\lambda_1(\Delta)$, uma devida a R. Reilly [1] e outra obtida por A. El Soufi e S. Ilias [2]. O primeiro resultado, provado por Reilly em [1] é o seguinte:

Teorema 1 (Reilly, [1]) *O primeiro autovalor não-nulo $\lambda_1(\Delta)$ do operador de Laplace-Beltrami Δ em (M, g) é estimado por*

$$\lambda_1(\Delta) \leq \frac{m}{\operatorname{vol}(M)} \int_M |H_\phi|^2 \, dM. \tag{1}$$

Além disso, ocorre igualdade se e somente se $\phi(M)$ é uma subvariedade mínima de alguma esfera em $\mathbb{R}^n$

Utilizando a imersão canônica de $\mathbb{S}^n$ em $\mathbb{R}^{n+1}$, pode se obter uma estimativa para $\lambda_1(\Delta)$ no caso de subvariedades da esfera $\mathbb{S}^n$. Para o caso de subvariedades do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ há a complicação adicional de que não existe uma imersão do $\mathbb{H}^n$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. Em [3], Heintze obteve resultados parciais e conjecturou desigualdade similar a (1) para subvariedades de $\mathbb{H}^n$. Para alcançar o resultado, A. El Soufi e S. Ilias utilizaram a conformidade das métricas do $\mathbb{H}^n$ e do $\mathbb{S}^n$, e deram uma prova unificada para os casos de subvariedades do $\mathbb{R}^n$, do $\mathbb{S}^n$ e de $\mathbb{H}^n$ em [2]:

Teorema 2 (El Soufi e Ilias, [2]) *Seja (N,h) uma variedade riemanniana de dimensão n a qual pode ser conformemente imersa na esfera euclidiana $\mathbb{S}^n$. Então, dadas uma variedade riemanniana compacta (M,g) de dimensão $m \geq 2$ e uma imersão isométrica $\phi : (M,g) \to (N,h)$, temos*

$$\lambda_1(\Delta) \leq \frac{m}{\mathrm{vol}(M)} \int_M (|H_\phi|^2 + R_\phi^N)\, dM,$$

onde

$$R_\phi^N = \frac{1}{m(m-1)} g^{il} g^{jk} h(R^N(\phi_* e_i, \phi_* e_k)\phi_* e_j, \phi_* e_l).$$

Além disso, ocorre igualdade se e somente se $|H_\phi|^2 + R_\phi^N$ é constante e igual a $\lambda_1(\Delta)/m$.

Embora não mostramos aqui, A. El Soufi e S. Ilias aplicam esse resultado para estudar imersões estáveis de curvatura média constante. Em particular, reobtém os teoremas de Barbosa e do Carmo (espaço ambiente $\mathbb{R}^{n+1}$) e Barbosa, do Carmo, Eschenburg (espaço ambiente $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\mathbb{H}^{n+1}$), respectivamente em [4] e [5].

Observamos que o método pode ser também estendido ao estudo do autovalor do operador obtido pela linearização das curvaturas média de maior ordem, bem como a operadores de Dirac em subvariedades de formas espaciais.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Transformações Conformes e Curvatura

Daqui em diante, N^n denota uma variedade diferenciável de dimensão n. Duas métricas riemannianas h, h' pertencem a uma mesma estrutura conforme em M quando existe uma função diferenciável positiva $\varphi : N \to \mathbb{R}_+$ tal que

$$h' = \varphi^2 \, h. \tag{1.1}$$

Neste caso, dado um referencial local $h-$ortonormal $\{E_a\}_{a=1}^n$, o referencial $\{E'_a\}_{a=1}^n$ é $h'-$ortonormal se definirmos

$$E'_a = \frac{1}{\varphi} E_a, \quad 1 \leq a \leq n. \tag{1.2}$$

As 1-formas ω^a e ${\omega'}^a$, $1 \leq a \leq n$, respectivamente duais aos campos nos referenciais g e g'-ortonormais são relacionadas segundo a expressão

$${\omega'}^a = \varphi \, \omega^a. \tag{1.3}$$

Calculando derivadas exteriores em ambos os lados de (1.3), obtemos

$$\begin{aligned} d{\omega'}^a &= d(\varphi \, \omega^a) = d\varphi \wedge \omega^a + \varphi \, d\omega^a \\ &= -\omega^a \wedge d\varphi - \varphi \, \omega^a_b \wedge \omega^b \\ &= -\omega^a \wedge \varphi_b \, \omega^b - \omega^a_b \wedge {\omega'}^b \\ &= -\frac{\varphi_b}{\varphi} \omega^a \wedge {\omega'}^b - \omega^a_b \wedge {\omega'}^b. \end{aligned}$$

Portanto, uma vez que as formas de conexão devem satisfazer as equações estruturais

$$d{\omega'}^a + \omega'^a_b \wedge {\omega'}^b = 0,$$

$$\omega'^a_b = -\omega'^b_a,$$

concluímos que

$$\omega'^a_b = \omega^a_b + \frac{\varphi_b}{\varphi}\omega^a - \frac{\varphi^a}{\varphi}\omega_b.$$

Sendo assim, denotando por ∇^N e $\nabla^{N'}$ as conexões riemannianas associadas respectivamente às métricas h e h', temos

$$\begin{aligned} \nabla'^N E'_b &= \omega'^a_b E'_a \\ &= (\omega^a_b + \frac{\varphi_b}{\varphi}\omega^a - \frac{\varphi^a}{\varphi}\omega_b)E'_a. \end{aligned}$$

Todavia,

$$\nabla'^N E'_b = \nabla'^N \frac{1}{\varphi} E_b = -\frac{d\varphi}{\varphi^2}E_b + \frac{1}{\varphi}\nabla'^N E_b,$$

o que permite concluir que

$$\begin{aligned} \nabla'^N E_b &= \frac{d\varphi}{\varphi}E_b + \omega^a_b E_a + (\frac{\varphi_b}{\varphi}\omega^a - \frac{\varphi^a}{\varphi}\omega_b)E_a \\ &= \nabla^N E_b + \frac{d\varphi}{\varphi}E_b + (\frac{\varphi_b}{\varphi}\omega^a - \frac{\varphi^a}{\varphi}\omega_b)E_a. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Deste modo, dados campos vetoriais $V, W \in \Gamma(TN)$ de modo que V é expresso localmente como $V = V^b E_b$, temos

$$\nabla'^N_W E_b = \nabla^N_W E_b + \frac{d\varphi(W)}{\varphi}E_b + (\frac{\varphi_b}{\varphi}\omega^a(W) - \frac{\varphi^a}{\varphi}\omega_b(W))E_a$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \nabla^{N'}_W V &= W(V^b)E_b + V^b\nabla^{N'}_W E_b \\ &= W(V^b)E_b + V^b\nabla^N_W E_b + \frac{d\varphi(W)}{\varphi}V^b E_b + V^b\frac{\varphi_b}{\varphi}\omega^a(W)E_a - \frac{\varphi^a}{\varphi}V^b\omega_b(W)E_a \\ &= \nabla^N_W V + h(\frac{\nabla^N\varphi}{\varphi}, W)V + h(\frac{\nabla^N\varphi}{\varphi}, V)W - h(V,W)\frac{\nabla^N\varphi}{\varphi}. \end{aligned}$$

Deduzimos, desta forma, a seguinte regra de transformação da conexão riemanniana sob uma mudança conforme da métrica ambiente.

Proposição 1 *Dadas duas métricas riemannnianas h e h' em uma variedade diferenciável N, conformemente relacionadas por*

$$h' = \varphi^2 h,$$

onde $\varphi : N \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável positiva, as conexões riemannianas ∇^N e ∇'^N nas variedades riemannianas (N,h) e (N,h'), respectivamente, são relacionadas segundo a expressão

$$\nabla^{N'}_W V = \nabla^N_W V + h(\frac{\nabla^N\varphi}{\varphi}, W)V + h(\frac{\nabla^N\varphi}{\varphi}, V)W - h(V,W)\frac{\nabla^N\varphi}{\varphi}, \tag{1.5}$$

onde $V, W \in \Gamma(TN)$.

Passamos, agora, à determinação de uma regra de transformação deste tipo para o tensor de curvatura de Riemann. Para tanto, calculamos, inicialmente,

$$\begin{aligned} d\omega'^a_b &= d\omega^a_b + d\Big(\frac{\varphi_b}{\varphi}\Big)\wedge\omega^a - d\Big(\frac{\varphi^a}{\varphi}\Big)\wedge\omega_b - \frac{\varphi_b}{\varphi}\omega^a_c\wedge\omega^c + \frac{\varphi^a}{\varphi}\omega_{bc}\wedge\omega^c \\ &= d\omega^a_b + \Big(\frac{\varphi_{b,c}}{\varphi} - \frac{\varphi_b\varphi_c}{\varphi^2}\Big)\omega^c\wedge\omega^a - \Big(\frac{\varphi^a_c}{\varphi} - \frac{\varphi^a\varphi_c}{\varphi^2}\Big)\omega^c\wedge\omega_b \\ &\quad -\frac{\varphi_b}{\varphi}\omega^a_c\wedge\omega^c + \frac{\varphi^a}{\varphi}\omega_{bc}\wedge\omega^c. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \omega'^a_c\wedge\omega'^c_b &= (\omega^a_c + \frac{\varphi_c}{\varphi}\omega^a - \frac{\varphi^a}{\varphi}\omega_c)\wedge(\omega^c_b + \frac{\varphi_b}{\varphi}\omega^c - \frac{\varphi^c}{\varphi}\omega_b) \\ &= \omega^a_c\wedge\omega^c_b + \frac{\varphi_b}{\varphi}\omega^a_c\wedge\omega^c - \frac{\varphi^c}{\varphi}\omega^a_c\wedge\omega_b \\ &\quad -\frac{\varphi_c}{\varphi}\omega^c_b\wedge\omega^a + \frac{\varphi_b\varphi_c}{\varphi^2}\omega^a\wedge\omega^c - \frac{\varphi_c\varphi^c}{\varphi^2}\omega^a\wedge\omega_b \\ &\quad +\frac{\varphi^a}{\varphi}\omega^c_b\wedge\omega_c - \frac{\varphi^a\varphi_b}{\varphi^2}\omega_c\wedge\omega^c + \frac{\varphi^a\varphi^c}{\varphi^2}\omega_c\wedge\omega_b. \end{aligned}$$

Somando estas expressões e descartando alguns termos, obtemos

$$\begin{aligned} d\omega'^a_b + \omega'^a_c\wedge\omega'^c_b &= d\omega^a_b + \omega^a_c\wedge\omega^c_b + \Big(\frac{\varphi_{b,c}}{\varphi}\omega^c - 2\frac{\varphi_b\varphi_c}{\varphi^2}\omega^c - \frac{\varphi_c}{\varphi}\omega^c_b\Big)\wedge\omega^a \\ &\quad -\Big(\frac{\varphi^a_c}{\varphi}\omega^c - 2\frac{\varphi^a\varphi_c}{\varphi^2}\omega^c + \frac{\varphi^c}{\varphi}\omega^a_c\Big)\wedge\omega_b - \frac{\varphi_c\varphi^c}{\varphi^2}\omega^a\wedge\omega_b. \end{aligned}$$

Devemos ter em conta que a derivada covariante de $d\varphi$ é dada, por definição, pelos seguintes cálculos:

$$\begin{aligned} (\nabla^N_{E_c}d\varphi)E_b &= E_c(d\varphi(E_b)) - d\varphi(\nabla_{E_c}E_b) \\ &= E_c(\varphi_b) - d\varphi(\omega^a_b(E_c)E_a) \\ &= \varphi_{b,c} - \omega^a_b(E_c)\varphi_a. \end{aligned}$$

Portanto, as componentes $\varphi_{b;c}$ de $\nabla d\varphi$ são dadas por

$$\varphi_{b;c} = (\nabla^N_{E_c}d\varphi)E_b = \varphi_{b,c} - \omega^a_b(E_c)\varphi_a, \tag{1.6}$$

de modo que

$$(\nabla^N d\varphi)E_b = \varphi_{b;c}\omega^c = \varphi_{b,c}\omega^c - \varphi_a\omega_b^a \tag{1.7}$$

Analogamente, as entradas do Hessiano de φ, ou seja, da derivada covariante do gradiente $\nabla^N\varphi = \varphi^a E_a$ de φ são expressas por

$$\varphi^a_{;c} = \varphi^a_{,c}\omega^c + \varphi^c\omega_c^a. \tag{1.8}$$

Assim, concluímos que

$$d\omega_b'^a + \omega_c'^a \wedge \omega_b'^c = d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c + \Big(\frac{\varphi_{b;c}}{\varphi}\omega^c - 2\frac{\varphi_b\varphi_c}{\varphi^2}\omega^c\Big) \wedge \omega^a$$
$$-\Big(\frac{\varphi^a_{;c}}{\varphi}\omega^c - 2\frac{\varphi^a\varphi_c}{\varphi^2}\omega^c\Big) \wedge \omega_b - \frac{\varphi_c\varphi^c}{\varphi^2}\omega^a \wedge \omega_b.$$

Logo, as formas de curvatura

$$\Omega_b^a = d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c \tag{1.9}$$

e

$$\Omega_b'^a = d\omega_b'^a + \omega_c'^a \wedge \omega_b'^c \tag{1.10}$$

associadas, respectivamente, às métricas h e h' em N são relacionadas por

$$\Omega_b'^a = \Omega_b^a + \Big(\frac{\varphi^a_{;c}}{\varphi}\omega_b - \frac{\varphi_{b;c}}{\varphi}\omega^a\Big) \wedge \omega^c + 2\Big(\frac{\varphi_b}{\varphi}\omega^a - \frac{\varphi^a}{\varphi}\omega_b\Big) \wedge \frac{d\varphi}{\varphi} - \frac{|\nabla^N\varphi|^2}{\varphi^2}\omega^a \wedge \omega_b.$$

Denotamos por R^N e R'^N os tensores de curvatura de Riemann em N relativamente às métricas h e h', respectivamente. Por definição das formas de curvatura, temos

$$\Omega_b^a = \omega^a(R^N(\cdot,\cdot)E_b)$$

e

$$\Omega_b'^a = \omega'^a(R'^N(\cdot,\cdot)E_b').$$

Os tensores de Ricci Ric e Ric' de (N,h) e (N,h'), respectivamente, são definidos por

$$\mathrm{Ric}(\cdot) = \frac{1}{n}\sum_{b=1}^{n} R^N(\cdot,E_b)E_b = \frac{1}{n}\sum_{a,b=1}^{n}\Omega_b^a(\cdot,E_b)E_a$$

e

$$\mathrm{Ric}'(\cdot) = \frac{1}{n}\sum_{b=1}^{n} R'^N(\cdot,E_b')E_b' = \frac{1}{n}\sum_{a,b=1}^{n}\Omega_b'^a(\cdot,E_b')E_a'.$$

As curvaturas escalares R e R' de (N,h) e (N,h') são respectivamente definidas segundo as expressões

$$R = \frac{1}{n-1}\sum_{a=1}^{n}\omega^a(\mathrm{Ric}(E_a)) \quad \text{e} \quad R' = \frac{1}{n-1}\sum_{a=1}^{n}\omega'^a(\mathrm{Ric}'(E_a')).$$

Em suma, definimos

$$R = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{a \neq b} \Omega_b^a(E_a, E_b) \quad \text{e} \quad R' = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{a \neq b} \Omega_b'^a(E_a', E_b').$$

Utilizando a relação deduzida acima entre as formas de curvatura em (N, h) e (N, h'), obtemos,

$$\begin{aligned}
\Omega_b'^a(E_k, E_l) \quad &= \quad \Omega_b^a(E_k, E_l) + \frac{\varphi^a_{;c}}{\varphi}\delta_{bk}\delta_l^c - \frac{\varphi_{b;c}}{\varphi}\delta_k^a\delta_l^c - \frac{\varphi^a_{;c}}{\varphi}\delta_{bl}\delta_k^c + \frac{\varphi_{b;c}}{\varphi}\delta_l^a\delta_k^c \\
&\quad +2\frac{\varphi_b\varphi_l}{\varphi^2}\delta_k^a - 2\frac{\varphi^a\varphi_l}{\varphi^2}\delta_{bk} - 2\frac{\varphi_b\varphi_k}{\varphi^2}\delta_l^a + 2\frac{\varphi^a\varphi_k}{\varphi^2}\delta_{bl} \\
&\quad -\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi^2}(\delta_k^a\delta_{bl} - \delta_l^a\delta_{bk}).
\end{aligned}$$

Por outro lado, dados campos vetoriais $U = U^k E_k,\ V = V^l E_l$ e $W = W^b E_b$, temos

$$\begin{aligned}
R'^N(U,V)W \quad &= \quad W^b R'^N(U,V)E_b = \varphi W^b R'^N(U,V)E_b' = \varphi W^b \Omega_b'^a(U,V)E_a' \\
&= \quad W^b \Omega_b'^a(U,V)E_a = U^k V^l W^b \Omega_b'^a(E_k, E_l)E_a.
\end{aligned}$$

A partir desta expressão, calculamos

$$\begin{aligned}
R'^N(U,V)W \quad &= \quad U^kV^lW^b\Omega_b^a(E_k,E_l)E_a + U^kV^lW^b\frac{\varphi^a_{;c}}{\varphi}\delta_{bk}\delta_l^cE_a - U^kV^lW^b\frac{\varphi_{b;c}}{\varphi}\delta_k^a\delta_l^cE_a \\
&\quad -U^kV^lW^b\frac{\varphi^a_{;c}}{\varphi}\delta_{bl}\delta_k^cE_a + U^kV^lW^b\frac{\varphi_{b;c}}{\varphi}\delta_l^a\delta_k^cE_a \\
&\quad +2U^kV^lW^b\frac{\varphi_b\varphi_l}{\varphi^2}\delta_k^aE_a - 2U^kV^lW^b\frac{\varphi^a\varphi_l}{\varphi^2}\delta_{bk}E_a \\
&\quad -2U^kV^lW^b\frac{\varphi_b\varphi_k}{\varphi^2}\delta_l^aE_a + 2U^kV^lW^b\frac{\varphi^a\varphi_k}{\varphi^2}\delta_{bl}E_a \\
&\quad -\frac{|\nabla^N\varphi|^2}{\varphi^2}U^kV^lW^b(\delta_k^a\delta_{bl} - \delta_l^a\delta_{bk})E_a.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
R'^N(U,V)W \quad &= \quad R^N(U,V)W + \langle U,W\rangle\frac{\nabla_V^N\nabla\varphi}{\varphi} - \frac{\langle\nabla_V^N\nabla\varphi, W\rangle}{\varphi}U \\
&\quad -\langle V,W\rangle\frac{\nabla_U^N\nabla\varphi}{\varphi} + \frac{\langle\nabla_U^N\nabla\varphi, W\rangle}{\varphi}V \\
&\quad +2\frac{\langle\nabla^N\varphi, V\rangle\langle\nabla^N\varphi, W\rangle}{\varphi^2}U - 2\langle U,W\rangle\frac{\langle\nabla^N\varphi, V\rangle}{\varphi}\frac{\nabla^N\varphi}{\varphi} \\
&\quad -2\frac{\langle\nabla^N\varphi, U\rangle\langle\nabla^N\varphi, W\rangle}{\varphi^2}V + 2\langle V,W\rangle\frac{\langle\nabla^N\varphi, U\rangle}{\varphi}\frac{\nabla^N\varphi}{\varphi} \\
&\quad -\frac{|\nabla^N\varphi|^2}{\varphi^2}(\langle V,W\rangle U - \langle U,W\rangle V).
\end{aligned}$$

Em particular, segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{n} R'^{N}(E_a,V)E_a &= \sum_{a=1}^{n} R^{N}(E_a,V)E_a + n\frac{\nabla_V^N\nabla\varphi}{\varphi} - \frac{\nabla_V^N\nabla\varphi}{\varphi} \\
&\quad -\frac{\nabla_V^N\nabla\varphi}{\varphi} + \sum_{a=1}^{n}\frac{\langle\nabla_{E_a}\nabla^N\varphi, E_a\rangle}{\varphi}V \\
&\quad +2\frac{\langle\nabla^N\varphi, V\rangle}{\varphi}\frac{\nabla^N\varphi}{\varphi} - 2n\frac{\langle\nabla^N\varphi, V\rangle}{\varphi}\frac{\nabla^N\varphi}{\varphi} \\
&\quad -2\frac{|\nabla^N\varphi|^2}{\varphi^2}V + 2\frac{\langle\nabla^N\varphi, V\rangle}{\varphi}\frac{\nabla^N\varphi}{\varphi} \\
&\quad +(n-1)\frac{|\nabla^N\varphi|^2}{\varphi^2}V.
\end{aligned}$$

Simplificando termos e denotando por Δ o operador de Laplace-Beltrami em M, obtemos

$$\begin{aligned}
-n\varphi^2\mathrm{Ric}'(V) &= -n\mathrm{Ric}(V) + (n-2)\frac{\nabla_V^N\nabla\varphi}{\varphi} + \frac{\Delta\varphi}{\varphi}V - 2(n-2)\frac{\langle\nabla^N\varphi, V\rangle}{\varphi}\frac{\nabla^N\varphi}{\varphi} \\
&\quad +(n-3)\frac{|\nabla^N\varphi|^2}{\varphi^2}V.
\end{aligned}$$

Portanto, usando o fato de que

$$\mathrm{tr}\frac{\langle\nabla^N\varphi,\cdot\rangle}{\varphi}\frac{\nabla^N\varphi}{\varphi} = \sum_{a=1}^{n}\frac{\langle\nabla^N\varphi, E_a\rangle}{\varphi}\langle\frac{\nabla^N\varphi}{\varphi}, E_a\rangle = \frac{|\nabla^N\varphi|^2}{\varphi^2},$$

concluímos que

$$\begin{aligned}
n\varphi^2\mathrm{trRic}'(\cdot) &= n\mathrm{trRic}(\cdot) - (n-2)\frac{\Delta\varphi}{\varphi} - n\frac{\Delta\varphi}{\varphi} + 2(n-2)\frac{|\nabla^N\varphi|^2}{\varphi^2} - n(n-3)\frac{|\nabla^N\varphi|^2}{\varphi^2} \\
&= n\mathrm{trRic}(\cdot) - 2(n-1)\frac{\Delta\varphi}{\varphi} - (n-1)(n-4)\frac{|\nabla^N\varphi|^2}{\varphi^2},
\end{aligned}$$

o que implica que

$$n(n-1)\varphi^2R' = n(n-1)R - 2(n-1)\frac{\Delta\varphi}{\varphi} - (n-1)(n-4)\frac{|\nabla^N\varphi|^2}{\varphi^2}.$$

Logo, a relação entre as curvaturas escalares R e R' das variedades (N,h) e (N,h'), respectivamente, é dada por

$$\varphi^2R' = R - \frac{2}{n}\frac{\Delta\varphi}{\varphi} - \frac{n-4}{n}\frac{|\nabla^N\varphi|^2}{\varphi^2}. \tag{1.11}$$

Escrevemos, alternativamente,

$$\begin{aligned}
\varphi^2 R' &= R - \frac{2}{n}\Big(\Delta \ln \varphi + \frac{|\nabla^N \varphi|^2}{\varphi^2}\Big) - \frac{n-4}{n}|\nabla^N \ln \varphi|^2 \\
&= R - \frac{2}{n}\Delta \ln \varphi - \frac{n-2}{n}|\nabla \ln \varphi|^2.
\end{aligned}$$

Definindo

$$\lambda := \ln \varphi^2 = 2 \ln \varphi,$$

de modo que

$$e^\lambda = \varphi^2,$$

obtemos o seguinte resultado:

Proposição 2 *Dadas duas métricas riemannnianas h e h' em uma variedade diferenciável N satisfazendo*

$$h' = \varphi^2 h,$$

onde $\varphi : N \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável positiva, as curvaturas escalares R e R' nas variedades riemannianas (N, h) e (N, h'), respectivamente, são relacionadas segundo a expressão

$$e^\lambda R' = R - \frac{1}{n}\Delta\lambda - \frac{n-2}{4n}|\nabla^N \lambda|^2, \tag{1.12}$$

onde $\lambda : N \to \mathbb{R}$ é definida por $e^\lambda = \varphi^2$.

1.2 Imersões Isométricas

Daqui em diante, M denota uma variedade diferenciável de dimensão $m \geq 2$ e (N, h) uma variedade riemanniana de dimensão $n \geq m$. Nesta notação, h é uma métrica riemanniana globalmente definida em N.

Dada uma imersão $\phi : M \to N$, consideramos em M a métrica induzida por ϕ, isto é, o tensor $g = \phi^* h$. Sendo assim, denotamos por B_ϕ e H_ϕ, respectivamente, a segunda forma fundamental e a curvatura média da imersão isométrica $\phi : (M, g) \to (N, h)$.

Mantendo a notação fixada anteriormente, consideramos um referencial $h-$ortonormal $\{E_a\}_{a=1}^n$ e as correspondentes formas duais, de conexão e de curvatura. Desta vez, contudo, supomos que os campos $E_1, \ldots, E_m$ são tangentes à subvariedade imersa $\phi(M)$ e, portanto, que os demais campos $E_{m+1}, \ldots, E_n$ são campos vetoriais normais localmente definidos ao longo de ϕ. Distinguimos entre estes campos tangentes e normais, indexando os primeiros por $i, j, , \ldots$ e os últimos por $\alpha, \beta, \ldots$

A equação estrutural, ou equação de curvatura zero,

$$d\omega + \omega \wedge \omega = \Omega,$$

implica em particular que
$$d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \omega_\alpha^i \wedge \omega_j^\alpha = \Omega_j^i.$$
Todavia,
$$\Theta_j^i := d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k$$
são as formas de curvatura da variedade riemanniana (M, g). Por outro lado, dado um vetor tangente $v \in TM$, temos
$$\omega_i^\alpha(v) = h(\nabla^N_{\phi_* v}\phi_* E_i, E_\alpha) = h(B_\phi(v, e_i), E_\alpha),$$
onde $e_1, \ldots, e_m$ são os campos vetoriais $\phi-$relacionados em M a $E_1, \ldots, E_m$, respectivamente. Deste modo, deduzimos a fórmula de Gauss
$$\Omega_j^i = \Theta_j^i - B_{ik}^\alpha B_{jl}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l. \tag{1.13}$$
Assim,
$$\Omega_j^i(E_p, E_q) = \Theta_j^i(E_p, E_q) - B_{ik}^\alpha B_{jl}^\alpha(\delta_p^k \delta_q^l - \delta_q^k \delta_p^l)$$
donde deduzimos que, dados campos vetoriais X, Y, Z tangentes a M, é válido que
$$\begin{aligned}(R^N(\phi_* X, \phi_* Y)\phi_* Z)^i &= (R_\phi(X,Y)Z)^i - h(B_\phi(e_i, X), E_\alpha)h(B_\phi(Z,Y), E_\alpha)\\ &+h(B_\phi(e_i, Y), E_\alpha)h(B_\phi(Z, X), E_\alpha),\end{aligned}$$
onde R_ϕ denota o tensor de curvatura de Riemann em (M, g). Portanto, dado um quarto campo vetorial W tangente a M, temos
$$\begin{aligned}h(R^N(\phi_* X, \phi_* Y)\phi_* Z, \phi_* W) &= g(R_\phi(X,Y)Z, W)\\ &-h(B_\phi(W, X), E_\alpha)h(B_\phi(Z,Y), E_\alpha) + h(B_\phi(W,Y), E_\alpha)h(B_\phi(Z,X), E_\alpha).\end{aligned}$$
Usando a simetria de B_ϕ, concluímos, por fim, que
$$\begin{aligned}h(R^N(\phi_* X, \phi_* Y)\phi_* Z, \phi_* W) &= g(R_\phi(X,Y)Z, W)\\ &-h(B_\phi(X, W), B_\phi(Y, Z)) + h(B_\phi(Y, W), B_\phi(X, Z)),\end{aligned} \tag{1.14}$$
expressão a que nos referimos como *fórmula de Gauss*. Contraindo ambos os lados desta fórmula, obtemos
$$\begin{aligned}\sum_{i,j} h(R^N(E_i, E_j)E_j, E_i) &= \sum_{i,j} g(R_\phi(e_i, e_j)e_j, e_i)\\ &-\sum_{i,j} h(B_\phi(e_i, e_i), B_\phi(e_j, e_j)) + \sum_{i,j} h(B_\phi(e_i, e_j), B_\phi(e_i, e_j)),\end{aligned}$$
o que implica
$$m(m-1)R_\phi^N = m(m-1)R_\phi - m^2|H_\phi|^2 + |B_\phi|^2, \tag{1.15}$$
onde denotamos
$$R_\phi^N = \frac{1}{m(m-1)} \operatorname{tr} \phi^* \mathrm{Ric}.$$
A equação (1.15) será retomada posteriormente.

1.3 Lema de Hersch

Tratamos, nesta dissertação, de estimativas superiores para os autovalores do operador de Laplace-Beltrami Δ definido em uma subvariedade (M, g) orientável, compacta, sem fronteira, isometricamente imersa em uma variedade riemanniana (N, h) orientável. Este operador caracteriza pontos críticos do funcional

$$\mathcal{E}[\varphi] = \int_M |\nabla\varphi|^2 \, dM, \tag{1.16}$$

definido inicialmente para funções $\varphi \in C^1(M)$ e estendido, em seguida, para funções no espaço de Sobolev $H^1(M)$. Este espaço é definido da seguinte forma: consideramos a norma $||\cdot||_1$ definida sobre funções $\varphi \in C^1(M)$ por

$$\begin{aligned} ||\varphi||_1^2 &= ||\varphi||^2_{L^2(M)} + ||\nabla\varphi||^2_{L^2(M)} \\ &= \int_M \varphi^2(x) \, dM + \int_M |\nabla\varphi(x)|^2 \, dM. \end{aligned}$$

Assim, $H^1(M)$ é definido como o completamento em $L^2(M)$ do espaço

$$\{\varphi \in C^\infty(M) : ||\varphi||_1 < +\infty\}$$

com respeito à métrica definida por $||\cdot||_1$. Lembramos que M representa, ao longo deste texto, uma variedade compacta sem fronteira, cuja medida de Lebesgue provém de uma forma de volume riemanniana dM.

Alternativamente, $H^1(M)$ é o espaço das funções em $L^2(M)$ que possuem derivada fraca também em $L^2(M)$. Um campo vetorial X com componentes em $L^2(M)$ é uma derivada fraca de uma função $\varphi \in L^2(M)$ quando a integração por partes for formalmente válida, isto é, quando, para todo campo vetorial Y com componentes $C^1(M)$ ocorrer

$$\int_M \langle X, Y \rangle dM = -\int_M \varphi \mathrm{div} Y dM.$$

Uma função φ em $L^2(M)$ admite no máximo uma derivada fraca, so sentido de campos mensuráveis. Em particular, a existência da derivada fraca de uma função φ, a qual denotamos igualmente como $\nabla\varphi$, assegura, para toda função $\xi \in C^\infty(M)$, que

$$\int_M \langle X, \nabla\xi \rangle dM = -\int_M \varphi \Delta \xi dM.$$

Um número real λ é autovalor de Δ quando existe uma função não-nula $\varphi \in C^2(M)$ tal que

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0. \tag{1.17}$$

Neste caso, φ é uma autofunção associada a λ. Lembramos que 0 é um autovalor de Δ associado às funções constantes, uma vez que M é uma variedade compacta sem fronteira. No que segue, denotamos por $\lambda_1(\Delta)$ o primeiro autovalor *não-nulo* de Δ em M. Observamos, que em termos de derivadas fracas, a equação de autovalor é reescrita como

$$\int_M \langle \nabla\varphi, \nabla\xi\rangle dM = \lambda \int_M \varphi\xi dM, \quad \xi \in C^\infty(M).$$

O fato de que Δ provém da variação da energia definida em (1.16) permite obter uma caracterização variacional dos autovalores deste operador.

Lema 1 *Denotando por $\lambda_1(\Delta)$ o primeiro autovalor não-nulo de Δ, temos*

$$\lambda_1(\Delta) \leq \mathcal{E}[\varphi]/||\varphi||^2_{L^2(M)}, \tag{1.18}$$

para toda função $\varphi \in H^1(M)$ ortogonal em $L^2(M)$ às funções constantes, isto é, satisfazendo a condição de média zero

$$\int_M \varphi dM = 0. \tag{1.19}$$

Ademais, ocorre igualdade em (1.18) *se e somente se φ é uma autofunção associada ao autovalor $\lambda_1(\Delta)$.*

Demonstrações deste resultado podem ser encontradas em [8] e [7].

Um mecanismo bastante útil para a obtenção de funções com média zero adequadas ao cálculo do quociente de Rayleigh no lado direito de (1.18) é dado pelos seguintes Lemas.

Lema 2 (Hersch, [6] apud El Soufi e Ilias) *Seja $\Pi : N^n \to \mathbb{S}^n$ uma imersão, isto é, uma aplicação diferenciável de posto máximo. Então, existe um difeomorfismo $\gamma : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, conforme com respeito à métrica canônica de $\mathbb{S}^n$, tal que a composição $\gamma \circ \Pi : N \to \mathbb{S}^n$ tem centro de massa nulo, isto é,*

$$\int_N \gamma \circ \Pi = 0.$$

Demonstramos o seguinte fato mais geral.

Lema 3 *Seja $\Pi : N^n \to \mathbb{S}^n$ uma imersão, isto é, uma aplicação diferenciável de posto máximo. Considere uma função positiva $\varphi \in C^\infty(M)$. Então, existe um difeomorfismo $\gamma : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, conforme com respeito à métrica canônica de $\mathbb{S}^n$, tal que a aplicação composta $\gamma \circ \Pi : M \to \mathbb{S}^n$ é $L^2(M)-$ortogonal a φ, isto é, tal que*

$$\int_M (\gamma \circ \Pi)\varphi = 0.$$

Prova. Dado $p \in \mathbb{S}^n$, denotamos por π_p a projeção estereográfica $\pi_p : \mathbb{S}^n - \{-p\} \to \mathbb{R}^n$ com pólo $-p \in \mathbb{S}^n$. Fixado $t \in (0,1]$, representamos, ainda, por $H_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a homotetia de razão t definida por $H_t(x) = tx$, $x \in \mathbb{R}^n$. Definimos, fixada esta notação, a composição

$$F_{p,t}(q) = \pi_p^{-1} \circ H_t \circ \pi_p(q), \quad p \in \mathbb{S}^n - \{-p\}.$$

Estendemos continuamente $F_{p,t}$ a $\mathbb{S}^n$ definindo $F_{p,t}(-p) = -p$. Sendo assim, dada a imersão $\Pi : M \to \mathbb{S}^n$, definimos $\psi_{p,t} : M \to \mathbb{R}$ por $\psi_{p,t} = F_{p,t} \circ \Pi$.

Seja $\varphi \in C^\infty(M)$ como no enunciado. Seja $\mathbb{D}^{n+1}$ o disco unitário em $\mathbb{R}^{n+1}$ centrado na origem. Definimos uma aplicação $\Xi : \mathbb{S}^n \times (0,1] \to \mathbb{D}^{n+1}$ por

$$\Xi(p,t) = \frac{1}{\int_M \varphi} \int_M \psi_{p,t}(x)\varphi(x)\, dM.$$

Esta aplicação está bem definida, uma vez que

$$\Big| \int_M \psi(p,t)(x)\varphi(x)\, dM \Big| \leq \int_M |\psi_{(p,t)}(x)|\varphi(x)\, dM = \int_M \varphi(x)\, dM.$$

Estendemos Ξ continuamente a $\mathbb{S}^n \times [0,1]$ pondo

$$\Xi(p,0) = p,$$

visto que $F_{p,0}(q) = p$, para todo $q \in \mathbb{S}^n$ e, portanto,

$$\int_M \psi_{(p,0)}(x)\varphi(x) dM = \Big(\int_M \varphi(x)\, dM \Big)\, p.$$

Portanto, definimos uma aplicação contínua $\Xi : \mathbb{S}^n \times [0,1] \to \mathbb{D}^{n+1}$, tal que

$$\Xi(p,1) = \frac{1}{\int_M \varphi} \int_M \Pi(x)\varphi(x)\, dM =: Q^*$$

não depende de $p \in \mathbb{S}^n$. Aqui, usamos o fato de que $F_{(p,1)}(q) = q$, para todo $q \in \mathbb{S}^n$.

Supomos, por contradição, que Ξ não é sobrejetiva, ou seja, que existe $Q \in \mathbb{D}^{n+1}$ não pertencente à imagem de Ξ, que vem a ser um subconjunto compacto de $\mathbb{D}^{n+1}$. Definimos, neste caso, a homotopia $H : \mathbb{S}^n \times [0,1] \to \mathbb{S}^n$ por

$$H(p,t) = \frac{\Xi(p,t) - Q}{|\Xi(p,t) - Q|}$$

satisfazendo

$$H(p,0) = \frac{p - Q}{|p - Q|}, \quad p \in \mathbb{S}^n$$

e

$$H(p,1) = \frac{Q^* - Q}{|Q^* - Q|}.$$

Uma vez que $\mathbb{S}^n$ não é contrátil, concluímos, por contradição, que F é sobrejetiva. Em particular, existe $(p,t) \in \mathbb{S}^n \times [0,1]$ tal que $\Xi(p,t) = 0$, ou seja, de modo que

$$\int_M \psi_{(p,t)}(x)\varphi(x)\, dM = 0,$$

o que significa que a aplicação $\psi_{(p,t)} = F_{(p,t)} \circ \Pi$ é $L^2(M)-$ortogonal à função φ. $\square$

Esta versão ampliada do Lema de Hersch permite obter funções-teste adequadas à estimativa do segundo autovalor de Δ. De fato, basta fixarmos φ como uma autofunção associada ao primeiro autovalor do operador Δ em M. Sabemos que o primeiro autoespaço deste operador é unidimensional e gerado por uma função estritamente positiva.

Capítulo 2

Estimativa de Reilly para Autovalores do Laplaciano

Relembramos a notação fixada previamente com respeito a imersões isométricas. Como antes, M denota uma variedade diferenciável de dimensão $m \geq 2$ e (N, h) uma variedade riemanniana de dimensão $n \geq m$. Nesta notação, h é uma métrica riemanniana globalmente definida em N.

Dada uma imersão $\phi : M \to N$, consideramos em M a métrica induzida por ϕ, isto é, o tensor $g = \phi^* h$. Sendo assim, denotamos por B_ϕ e H_ϕ, respectivamente, a segunda forma fundamental e a curvatura média da imersão isométrica $\phi : (M, g) \to (N, h)$.

O objetivo central desta seção é apresentar a demonstração do seguinte teorema, devido a R. Reilly [1], o qual estabelece uma estimativa superior para o primeiro autovalor não-nulo do laplaciano de variedades compactas imersas no espaço euclidiano. No enunciado a seguir, fixamos $N = \mathbb{R}^{n+1}$. Denotamos, ao longo desta dissertação, o produto escalar usual em $\mathbb{R}^n$ por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Teorema 3 (Reilly, 1977) *O primeiro autovalor não-nulo $\lambda_1(\Delta)$ do operador de Laplace-Beltrami Δ em (M, g) é estimado por*

$$\lambda_1(\Delta) \leq \frac{m}{\mathrm{vol}(M)} \int_M |H_\phi|^2 \, dM. \tag{2.1}$$

Além disso, ocorre igualdade em (2.1) *se e somente se $\phi(M)$ é uma subvariedade mínima de alguma esfera em $\mathbb{R}^n$*

Para tanto, necessitamos de uma série de lemas, os quais são enunciados e demonstrados a seguir.

Lema 4 *Dados dois vetores* A *e* B *em* $\mathbb{R}^n$*, temos*

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle \mathsf{A}, \theta \rangle \langle \mathsf{B}, \theta \rangle d\theta = \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} \langle \mathsf{A}, \mathsf{B} \rangle.$$

Prova. Definimos o campo vetorial

$$V(x) = \langle \mathsf{A}, x \rangle \mathsf{B}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

de modo que

$$\mathrm{div} V = \langle \mathsf{A}, \mathsf{B} \rangle.$$

Aplicando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\frac{1}{n} |\mathbb{S}^{n-1}| \langle \mathsf{A}, \mathsf{B} \rangle = \int_{\mathbb{D}^n} \mathrm{div} V = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle V(\theta), \theta \rangle \, d\theta = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle \mathsf{A}, \theta \rangle \langle \mathsf{B}, \theta \rangle d\theta,$$

como queríamos demonstrar. □

Enunciamos, agora, a fórmula integral de Minkowski, ingrediente fundamental na demonstração do Teorema 3.

Proposição 3 (Hsiung-Minkowski) *Sejam M uma variedade riemanniana, orientada, compacta sem fronteira e uma imersão isométrica $\phi : M^m \to \mathbb{R}^n$. Se H_ϕ denota o vetor curvatura média de ϕ, então*

$$\int_M (1 + \langle H_\phi, \phi \rangle) \, dM = 0. \tag{2.2}$$

Prova. Fixado um referencial ortonormal local $\{e_i\}_{i=1}^m$, calculamos

$$\frac{1}{2} e_i \langle \phi, \phi \rangle = \langle \bar{\nabla}_{e_i} \phi, \phi \rangle = \langle e_i, \phi \rangle.$$

Portanto

$$\frac{1}{2} \nabla |\phi|^2 = \phi - \sum_{k=1}^{n-m} \langle \phi, N_k \rangle N_k,$$

onde $\{N_k\}_{k=1}^{n-m}$ é um referencial ortonormal local para o fibrado normal de ϕ. Sendo assim, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta |\phi|^2 &= \sum_{i=1}^m \langle \bar{\nabla}_{e_i} \nabla |\phi|^2, e_i \rangle = \sum_{i=1}^m \langle \bar{\nabla}_{e_i} \phi, e_i \rangle - \sum_{k=1}^{n-m} \langle \phi, N_k \rangle \sum_{i=1}^m \langle \bar{\nabla}_{e_i} N_k, e_i \rangle \\ &= m - \sum_{k=1}^{n-m} \langle \phi, N_k \rangle \sum_{i=1}^m \langle \bar{\nabla}_{e_i} N_k, e_i \rangle \\ &= m + \sum_{k=1}^{n-m} \mathrm{tr} A_k \langle \phi, N_k \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2m} \Delta |\phi|^2 = 1 + \langle \phi, H_\phi \rangle.$$

Integrando esta equação e aplicando o Teorema de Stokes, obtemos

$$\int_M (1 + \langle H_\phi, \phi \rangle)\, dM = 0.$$

Isto encerra a demonstração da Proposição. $\square$

Um fato crucial, de interesse independente da prova do Teorema 3, é o seguinte:

Teorema 4 *Se $\phi : M^m \to \mathbb{R}^n$ é uma imersão isométrica para a qual $\int_M \phi dM = 0$, então*

$$\lambda_1(\Delta) \int_M |\phi|^2\, dM \leq m\mathrm{vol}(M). \tag{2.3}$$

Se ocorre igualdade em (2.3), então ϕ é uma imersão mínima de M em uma esfera de $\mathbb{R}^n$.

Prova. Dado um vetor unitário $\theta \in \mathbb{S}^n$, temos, por hipótese,

$$\int_M \langle \phi, \theta \rangle\, dM = 0.$$

Portanto, o Lema 1 implica que

$$\lambda_1(\Delta) \int_M \langle \phi, \theta \rangle^2\, dM \leq \int_M |\nabla \langle \phi, \theta \rangle|^2\, dM. \tag{2.4}$$

Entretanto, fixado um referencial ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^m$ em M, temos

$$\nabla \langle \phi, \theta \rangle = \sum_{i=1}^m e_i \langle \phi, \theta \rangle e_i = \sum_{i=1}^m \langle e_i, \theta \rangle e_i.$$

Deste modo, utilizando o Lema 4, calculamos

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla \langle \phi, \theta \rangle|^2\, d\theta = \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle e_i, \theta \rangle^2\, d\theta = \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} \sum_{i=1}^m \langle e_i, e_i \rangle = \frac{m}{n} |\mathbb{S}^{n-1}|.$$

Analogamente, deduz-se que

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle \phi, \theta \rangle^2\, d\theta = \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} |\phi|^2.$$

Integrando os dois lados de (2.4) com respeito a $\theta \in \mathbb{S}^n$, obtém-se

$$\lambda_1(\Delta) \int_{\mathbb{S}^n} d\theta \int_M \langle \phi, \theta \rangle^2\, dM \leq \int_{\mathbb{S}^n} d\theta \int_M |\nabla \langle \phi, \theta \rangle|^2\, dM.$$

Trocando a ordem de integração e utilizando as igualdades obtidas anteriormente, deduzimos que

$$\lambda_1(\Delta)\frac{1}{n}|\mathbb{S}^{n-1}|\int_M |\phi|^2\, dM \leq \frac{m}{n}|\mathbb{S}^{n-1}|\int_M dM,$$

donde concluímos que

$$\lambda_1(\Delta)\int_M |\phi|^2\, dM \leq m\,\mathrm{vol}(M).$$

A igualdade nesta expressão ocorre se e somente se $\langle \phi, \theta\rangle$ é autofunção de Δ associada ao primeiro autovalor, para qualquer $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, ou seja, se e somente se

$$\Delta\langle \phi, \theta\rangle = -\lambda_1(\Delta)\langle \phi, \theta\rangle, \quad \theta \in \mathbb{S}^{n-1}. \tag{2.5}$$

O Teorema de Takahashi assegura, neste caso, que $\phi(M)$ é uma subvariedade mínima de $\mathbb{S}^{n-1}$. De fato, fixado um referencial ortonormal $\{N_k\}_{k=1}^{n-m}$ no fibrado normal de ϕ, temos

$$\nabla\langle \phi, \theta\rangle = \theta - \sum_{k=1}^{n-m}\langle \theta, N_k\rangle N_k$$

e, com isto, calculamos

$$\Delta\langle \phi, \theta\rangle = \sum_{i=1}^{m}\langle \nabla_{e_i}\nabla\langle \phi, \theta\rangle, e_i\rangle = -\sum_{k=1}^{n-m}\langle \theta, N_k\rangle \sum_{i=1}^{m}\langle \bar{\nabla}_{e_i}N_k, e_i\rangle = \langle H_\phi, \theta\rangle.$$

Substituindo esta equação em (2.5), obtemos

$$\lambda_1(\Delta)\langle \phi, \theta\rangle = \langle H_\phi, \theta\rangle, \quad \theta \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Portanto,

$$\lambda_1(\Delta)\phi = H_\phi. \tag{2.6}$$

Uma vez que $\lambda_1(\Delta) \neq 0$, concluímos que $H_\phi \neq 0$ e, portanto, que o vetor posição é normal a esfera ao longo de ϕ. Deste modo, podemos redefinir o referencial local de campos normais $\{N_k\}_{k=1}^{n-m}$, de modo que $N_1 = \phi$. No caso de codimensão 1, concluímos que $\phi(M)$ é uma subvariedade aberta de $\mathbb{S}^n$. Caso a codimensão da imersão seja maior ou igual a 2, temos

$$\begin{aligned} H_\phi &= \sum_{i=1}^{m}\langle \bar{\nabla}_{e_i}e_i, \phi\rangle\phi + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=2}^{n-m}\langle \bar{\nabla}_{e_i}e_i, N_k\rangle N_k \\ &= \sum_{i=1}^{m}\langle e_i, e_i\rangle\phi + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=2}^{n-m}\langle \bar{\nabla}_{e_i}e_i, N_k\rangle N_k \\ &= m\,\phi + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=2}^{n-m}\langle \bar{\nabla}_{e_i}e_i, N_k\rangle N_k. \end{aligned}$$

Denotando por $H_\phi^{\mathbb{S}^{n-1}}$ a curvatura média de $\phi : M \to \mathbb{S}^{n-1}$ como subvariedade da esfera $\mathbb{S}^n$, concluímos que

$$H_\phi = m\phi + H_\phi^{\mathbb{S}^{n-1}}. \tag{2.7}$$

Comparando (2.6) e (2.7), deduzimos que

$$\lambda_1(\Delta) = m \quad \text{e} \quad H_\phi^{\mathbb{S}^{n-1}} = 0.$$

Isto encerra a demonstração. □

Por fim, reunindo os fatos demonstrados anteriormente, apresentamos a prova do Teorema 3 que está na página 25.

Prova do Teorema 3. Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$\int_M \phi \, dM = 0,$$

bastando para tanto, se necessário, somar à ϕ a constante $-\int_M \phi \, dM / \mathrm{vol}(M)$. Com isto, aplicamos Teorema 4, obtendo

$$\lambda_1(\Delta) \int_M |H_\phi|^2 \, dM \int_M |\phi|^2 \, dM \leq m \, \mathrm{vol}(M) \int_M |H_\phi|^2 \, dM.$$

Por outro lado, a desigualdade de Cauchy-Schwartz implica que

$$\lambda_1(\Delta) \left(\int_M |H_\phi||\phi| dM \right)^2 \leq \lambda_1(\Delta) \int_M |H_\phi|^2 \, dM \int_M |\phi|^2 \, dM.$$

Aplicando uma vez mais a desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos

$$\lambda_1(\Delta) \left(\int_M \langle H_\phi, \phi \rangle \, dM \right)^2 \leq \lambda_1(\Delta) \left(\int_M |H_\phi||\phi| dM \right)^2.$$

Entretanto, a fórmula de Hsiung-Minkowski implica que

$$\mathrm{vol}^2(M) = \left(\int_M dM \right)^2 = \left(\int_M \langle H_\phi, \phi \rangle \, dM \right)^2.$$

Portanto, concluímos que

$$\mathrm{vol}^2(M) \lambda_1(\Delta) \leq m \, \mathrm{vol}(M) \int_M |H_\phi|^2 \, dM,$$

donde concluímos a validade de (2.1). A igualdade ocorre em (2.1) se e somente se as igualdades são atingidas nas duas aplicações da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Para tanto, deve existir, em particular, uma constante c tal que

$$H_\phi = c\phi$$

Observe que $c \neq 0$, visto que, caso contrário, a Fórmula de Hsiung-Minkowski implicaria que

$$\int dM = 0.$$

Portanto, $H_\phi \neq 0$ e a vetor posição ϕ é normal ao longo da imersão. Dado um vetor v tangente à subvariedade, temos

$$\mathsf{v}|\phi|^2 = 2\langle \mathsf{v}(\phi), \phi\rangle = 2\langle \mathsf{v}, \phi\rangle = 0,$$

donde decorre que $\phi(M)$ está contida em uma esfera euclidiana. Além disso,

$$\mathsf{v}(H_\phi) = c\mathsf{v}(\phi) = c\mathsf{v},$$

o que assegura que a componente normal da derivada $\mathsf{v}H_\phi$ é nula, ou seja, que H_ϕ é paralelo no fibrado normal de ϕ.

Finalmente, decorre dos cálculos anteriores que igualdade em (2.1) implica igualdade em (2.3). Neste caso, o Teorema 4 assegura que $\phi(M)$ é uma subvariedade mínima da esfera euclidiana em que está contida. $\square$

Mencionamos que o Teorema 3 pode ser aplicado a imersões isométricas $\phi : M^m \to \mathbb{S}^n$, bastanto considerar a composição $\iota \circ \phi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, onde $\iota : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é a imersão canônica da esfera $\mathbb{S}^n$ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$.

Corolário 1 *Seja $\phi : (M, g) \to \mathbb{S}^n$ uma imersão isométrica com vetor curvatura média H_ϕ. O primeiro autovalor não-nulo $\lambda_1(\Delta)$ do operador de Laplace-Beltrami Δ em (M, g) é estimado por*

$$\lambda_1(\Delta) \leq \frac{m}{\mathrm{vol}(M)} \int_M (|H_\phi|^2 + 1)\, dM. \tag{2.8}$$

Além disso, ocorre igualdade em (2.1) *se e somente se $\phi(M)$ é uma subvariedade mínima de $\mathbb{S}^n$*

A prova deste resultado segue diretamente da seguinte observação: a curvatura média $H_{\iota\circ\phi}$ da imersão $\iota \circ \phi$ é dada por

$$H_{\iota\circ\phi} = \sum_{i=1}^m (D_{E_i} E_i)^\perp,$$

onde D é a conexão euclidiana em $\mathbb{R}^{n+1}$, o referencial $\{E_i\}_{i=1}^m$ é ortonormal e tangente a $\phi(M)$ e $\perp$ denota a projeção sobre o fibrado normal de $\iota \circ \phi$. Assim,

$$\begin{aligned} mH_{\iota\circ\phi} &= \sum_{i=1}^m (D_{E_i} E_i)^\perp = \sum_{k=1}^{n-m} \sum_{i=1}^m \langle D_{E_i} E_i, N_k\rangle N_k + \sum_{i=1}^m \langle D_{E_i} E_i, \phi\rangle \phi \\ &= mH_\phi - \sum_{i=1}^m \langle E_i, E_i\rangle \phi, \end{aligned}$$

onde $\{N_k\}_{k=1}^{n-m}$ é um referencial ortonormal local no fibrado normal de ϕ. Portanto,

$$H_{\iota\circ\phi} = H_\phi - \phi,$$

o que implica $|H_{\iota\circ\phi}|^2 = |H_\phi|^2 + 1$.

Capítulo 3

Estimativa de Soufi-Ilias para Autovalores do Laplaciano

No que segue, lidamos com a parte sem traço τ_ϕ de B_ϕ definida por

$$\tau_\phi = B_\phi - H_\phi\, g \tag{3.1}$$

Deste modo, dado um referencial local $e_1, \ldots, e_m$ em M, em termos do qual as componentes de B_ϕ e g são denotadas por b_{ij} e g_{ij}, calculamos

$$\tau_\phi(e_i, e_j) = b_{ij} - H g_{ij}$$

Tomando traços dos dois lados desta expressão com respeito à inversa (g^{ij}) da matriz (g_{ij}), obtemos

$$\begin{aligned} g^{ij}\tau_\phi(e_i, e_j) &= g^{ij} b_{ij} - H_\phi g^{ij} g_{ij} \\ &= mH_\phi - mH_\phi = 0, \end{aligned}$$

o que assegura que, de fato, τ_ϕ tem traço nulo.

Lembramos que a imersão isométrica é mínima quando $H_\phi = 0$ e totalmente umbílica quando $\tau_\phi = 0$, o que signfica que os tensores B_ϕ e g são, em cada ponto, múltiplos um do outro. No caso em que $B_\phi = 0$, dizemos que ϕ é totalmente geodésica.

Inicialmente, determinamos de que modo o tensor τ_ϕ é alterado por transformações conformes da métrica induzida. Mais precisamente, nosso intuito é demonstrar o seguinte

Lema 5 *Sejam $(\bar{N}, \bar{h})$ uma variedade riemanniana e $\Pi : (N, h) \to (\bar{N}, \bar{h})$ uma imersão conforme e totalmente geodésica. Então:*

$$\tau_{\Pi\circ\phi} = \Pi_* \tau_\phi. \tag{3.2}$$

Demonstração. Lembramos que o fato de que a imersão $\Pi : (N,h) \to (\bar{N},\bar{h})$ é conforme pode ser expressa da seguinte forma: existe uma função $\lambda : N \to \mathbb{R}_+$ tal que $\Pi^*\bar{h} = e^{\lambda}h$, isto é, dados campos vetoriais $V, W \in \Gamma(TN)$ quaisquer, temos

$$\bar{h}(\Pi_* V, \Pi_* W)|_{\Pi(p)} = e^{\lambda(p)} h(V,W)|_p, \quad p \in N. \tag{3.3}$$

Denotamos $h' = e^{\lambda}h$. Analisamos as propriedades geométricas da imersão composta $\Pi \circ \phi : M \to \bar{N}$. Fixando em M a métrica induzida g' por $\Pi \circ \phi$, i.e, a métrica $g' = e^{(\lambda \circ \phi)}g$, temos imersões isométricas $\phi : (M,g') \to (N,h')$ e $\Pi \circ \phi : (M,g') \to (\bar{N},\bar{h})$.

Denotamos por $\nabla^{N'}$ e $\bar{\nabla}$, respectivamente, as conexões de Levi-Civitá nas variedades riemannianas (N,h') e $(\bar{N},\bar{h})$. Seja, ainda, B_Π a segunda forma fundamental da imersão isométrica $\Pi : (N,h') \to (\bar{N},\bar{h})$. Fixado um referencial local $e_1, \ldots, e_m$ em M, temos

$$\bar{\nabla}_{\Pi_*\phi_* e_i} \Pi_* \phi_* e_j = \Pi_* \nabla^{N'}_{\phi_* e_i} \phi_* e_j + B_\Pi(\phi_* e_i, \phi_* e_j). \tag{3.4}$$

Agora, denotamos por ∇' a conexão de Levi-Civitá na variedade riemanniana (M,g') e por $B_{\phi'}$ a segunda forma fundamental da imersão isométrica $\phi : (M,g') \to (N,h')$. Portanto,

$$\nabla^{N'}_{\phi_* e_i} \phi_* e_j = \phi_* \nabla'_{e_i} e_j + B_{\phi'}(e_i, e_j). \tag{3.5}$$

Reunindo estas expressões, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\Pi_*\phi_* e_i} \Pi_* \phi_* e_j &= \Pi_*(\phi_* \nabla'_{e_i} e_j + B_{\phi'}(e_i,e_j)) + B_\Pi(\phi_* e_i, \phi_* e_j) \\ &= (\Pi \circ \phi)_* \nabla'_{e_i} e_j + \Pi_* B_{\phi'}(e_i,e_j) + \phi^* B_\Pi(e_i,e_j), \end{aligned} \tag{3.6}$$

o que permite concluir que a segunda forma fundamental $B_{\Pi\circ\phi}$ da imersão isométrica $\Pi \circ \phi : (M,g') \to (\bar{N},\bar{h})$ é dada por

$$B_{\Pi\circ\phi} = \Pi_* B_{\phi'} + \phi^* B_\Pi. \tag{3.7}$$

Em particular, as curvaturas médias $H_{\Pi\circ\phi}$, $H_{\phi'}$ e H_Π das segundas formas fundamentais $B_{\Pi\circ\phi}$, $B_{\phi'}$ e B_Π, respectivamente, são relacionadas por

$$H_{\Pi\circ\phi} = \Pi_* H_{\phi'} + H_\Pi|_{\Pi\circ\phi}. \tag{3.8}$$

Concluímos que as partes sem traço $\tau_{\Pi\circ\phi}$ e $\tau_{\phi'}$ das segundas formas fundamentais $B_{\Pi\circ\phi}$ e $B_{\phi'}$ satisfazem a relação

$$\begin{aligned} \tau_{\Pi\circ\phi} &= B_{\Pi\circ\phi} - H_{\Pi\circ\phi} g' \\ &= \Pi_* B_{\phi'} + \phi^* B_\Pi - (\Pi_* H_{\phi'} + H_\Pi) g' \\ &= \Pi_* B_{\phi'} - \Pi_* H_{\phi'} g' + \phi^* B_\Pi - H_\Pi g'. \end{aligned}$$

Tendo em conta a hipótese de que $\Pi : (N,h') \to (\bar{N},\bar{h})$ é uma imersão isométrica totalmente geodésica e, portanto, que $B_\Pi = 0$ e $H_\Pi = 0$, concluímos que

$$\tau_{\Pi\circ\phi} = \Pi_* \tau_{\phi'}. \tag{3.9}$$

Deduzimos, desta vez, relações entre as segundas formas fundamentais B_ϕ e $B_{\phi'}$ das imersões isométricas $\phi : (M, g) \to (N, h)$ e $\phi : (M, g') \to (N, h')$, respectivamente. Seja ∇^N a conexão de Levi-Civita da variedade riemanniana (N, h). Dados campos vetoriais $V, W \in \Gamma(TN)$, Proposição 1 assegura que

$$\nabla^{N'}_W V = \nabla^N_W V + \frac{1}{2}(h(W, \nabla^N \lambda)V + h(V, \nabla^N \lambda)W - h(V, W)\nabla^N \lambda). \tag{3.10}$$

Por definição da segunda forma fundamental $B_{\phi'}$, temos

$$\nabla^{N'}_{\phi_* e_i} \phi_* e_j = \phi_* \nabla'_{e_i} e_j + B_{\phi'}(e_i, e_j).$$

Por outro lado, utilizando (3.10), calculamos

$$\begin{aligned}\nabla^{N'}_{\phi_* e_i} \phi_* e_j &= \nabla^N_{\phi_* e_i} \phi_* e_j + \frac{1}{2}(h(\phi_* e_i, \nabla^N \lambda)\phi_* e_j + h(\phi_* e_j, \nabla^N \lambda)\phi_* e_i - g_{ij}\nabla^N \lambda) \\ &= \phi_* \nabla_{e_i} e_j + B_\phi(e_i, e_j) + \frac{1}{2}(g(e_i, \nabla(\lambda \circ \phi))\phi_* e_j + g(e_j, \nabla(\lambda \circ \phi))\phi_* e_i - g_{ij}\nabla^N \lambda).\end{aligned}$$

Separando a última expressão em suas componentes normais e tangenciais, as quais são preservadas pela transformação conforme, concluímos que

$$B_{\phi'}(e_i, e_j) = B_\phi(e_i, e_j) - \frac{1}{2}g(e_i, e_j)(\nabla^N \lambda)^\perp, \tag{3.11}$$

onde $\perp$ indica a projeção perpendicular a $\phi(M)$ com respeito à métrica h em N.

A partir de (3.11), concluímos que as curvaturas médias H_ϕ e $H_{\phi'}$ das imersões isométricas $\phi : (M, g) \to (N, h)$ e $\phi : (M, g') \to (N, h')$, respectivamente, são relacionadas por

$$\begin{aligned} mH_{\phi'} &= g'^{ij} B_{\phi'}(e_i, e_j) = e^{-\lambda} g^{ij} B_\phi(e_i, e_j) - \frac{1}{2} e^{-\lambda} g^{ij} g_{ij} (\nabla^N \lambda)^\perp \\ &= me^{-\lambda} H_\phi - \frac{m}{2} e^{-\lambda} (\nabla^N \lambda)^\perp, \end{aligned}$$

ou seja, mediante a fórmula

$$H_{\phi'} = e^{-\lambda} H_\phi - \frac{1}{2} e^{-\lambda} (\nabla^N \lambda)^\perp. \tag{3.12}$$

A partir destas expressões, calculamos

$$\begin{aligned} \tau_{\phi'} &= B_{\phi'} - H_{\phi'} g' \\ &= B_\phi - \frac{1}{2} g(\nabla^N \lambda)^\perp - (e^{-\lambda} H_\phi - \frac{1}{2} e^{-\lambda} (\nabla^N \lambda)^\perp) e^\lambda g \\ &= B_\phi - H_\phi g, \end{aligned}$$

donde resulta que

$$\tau_{\phi'} = \tau_\phi. \tag{3.13}$$

Finalmente, reunindo as expressões (3.9) e (3.13), obtemos

$$\tau_{\Pi\circ\phi} = \Pi_*\tau_\phi, \tag{3.14}$$

o que encerra a prova do Lema 5. $\square$

Utilizamos, agora, a fórmula de Gauss para obter expressões úteis das normas ao quadrado da segunda forma fundamental, de sua parte sem traço e da curvatura média de uma imersão isométrica. Dada a imersão isométrica $\phi : (M, g) \to (N, h)$, definimos

$$|B_\phi|^2 = g^{ik}g^{jl}g(B_\phi(e_i, e_j), B_\phi(e_k, e_l)) \tag{3.15}$$

e, analogamente,

$$|H_\phi|^2 = g(H_\phi, H_\phi). \tag{3.16}$$

Calculamos, portanto

$$\begin{aligned}
|\tau_\phi|^2 &= g^{ik}g^{jl}g(\tau_\phi(e_i, e_j), \tau_\phi(e_k, e_l)) \\
&= g^{ik}g^{jl}g(B_\phi(e_i, e_j), B_\phi(e_k, e_l)) - g^{ik}g^{jl}g_{ij}g(H_\phi, B_\phi(e_k, e_l)) \\
&\quad -g^{ik}g^{jl}g_{kl}g(B_\phi(e_i, e_j), H_\phi) + g^{ik}g^{jl}g_{ij}g_{kl}g(H_\phi, H_\phi) \\
&= |B_\phi|^2 - 2g^{kl}g(H_\phi, B_\phi(e_k, e_l)) + mg(H_\phi, H_\phi) \\
&= |B_\phi|^2 - 2m|H_\phi|^2 + m|H_\phi|^2,
\end{aligned}$$

donde resulta que

$$|\tau_\phi|^2 = |B_\phi|^2 - m|H_\phi|^2. \tag{3.17}$$

Denotando por R e R^N os tensores de curvatura das variedades riemannianas (M, g) e (N, h), respectivamente. A fórmula de Gauss (1.15) assegura que

$$m(m-1)R_\phi - m(m-1)R^N_\phi = m^2|H_\phi|^2 - |B_\phi|^2,$$

onde denotamos por R_ϕ a curvatura escalar de (M, g) e por R^N_ϕ o escalar definido por

$$R^N_\phi = \frac{1}{m(m-1)}g^{il}g^{jk}h(R^N(\phi_*e_i, \phi_*e_k)\phi_*e_j, \phi_*e_l). \tag{3.18}$$

Concluímos que

$$\begin{aligned}
|\tau_\phi|^2 &= |B_\phi|^2 - m|H_\phi|^2 = -m(m-1)R_\phi + m(m-1)R^N_\phi + m^2|H_\phi|^2 - m|H_\phi|^2 \\
&= m(m-1)(|H_\phi|^2 + R^N_\phi - R_\phi).
\end{aligned}$$

Calculamos, desta vez, as normas dos tensores correspondentes da imersão isométrica $\Pi\circ\phi : (M, g') \to (\bar{N}, \bar{h})$. Uma vez que $\tau_{\Pi\circ\phi} = \Pi_*\tau_\phi$, temos

$$\begin{aligned}
|\tau_{\Pi\circ\phi}|^2 &= g'^{ik}g'^{jl}g'(\tau_{\Pi\circ\phi}(e_i, e_j), \tau_{\Pi\circ\phi}(e_k, e_l)) \\
&= g'^{ik}g'^{jl}g'(\Pi_*\tau_\phi(e_i, e_j), \Pi_*\tau_\phi(e_k, e_l)) \\
&= g'^{ik}g'^{jl}g'(\tau_\phi(e_i, e_j), \tau_\phi(e_k, e_l)) \\
&= e^{-2\lambda}g^{ik}g^{jl}e^{\lambda}g(\tau_\phi(e_i, e_j), \tau_\phi(e_k, e_l)) \\
&= e^{-\lambda}g^{ik}g^{jl}g(\tau_\phi(e_i, e_j), \tau_\phi(e_k, e_l)) = e^{-\lambda}|\tau_\phi|^2.
\end{aligned}$$

Em suma, verificamos que

$$|\tau_{\Pi\circ\phi}|^2 = e^{-\lambda}|\tau_\phi|^2, \tag{3.19}$$

onde as normas dos lados esquerdo e direito são, respectivamente, relativas às métricas g' e g em M. Deste modo, deduzimos que

$$|H_\phi|^2 + R^N_\phi - R_\phi = e^\lambda(|H_{\Pi\circ\phi}|^2 + R^N_{\Pi\circ\phi} - R_{\Pi\circ\phi}), \tag{3.20}$$

cabendo a mesma observação com respeito às normas e contrações envolvidas nos lados esquerdo e direito da expressão.

Por outro lado, a Proposição 2 assegura que, dada a mudança conforme de métrica $g' = e^\lambda g$ em M, as curvaturas escalares R_ϕ e $R_{\Pi\circ\phi}$ das variedades (M, g) e (M, g'), respectivamente, estão relacionadas por

$$R_{\Pi\circ\phi} = e^{-\lambda}\big(R_\phi - \frac{m-2}{4m}|\nabla(\lambda\circ\phi)|^2 - \frac{1}{m}\Delta(\lambda\circ\phi)\big), \tag{3.21}$$

onde os operadores ∇ e Δ são relativos à métrica g em M. Combinando estas expressões, obtemos

$$|H_\phi|^2 + R^N_\phi - R_\phi = e^\lambda(|H_{\Pi\circ\phi}|^2 + R^N_{\Pi\circ\phi}) - R_\phi + \frac{m-2}{4m}|\nabla(\lambda\circ\phi)|^2 + \frac{1}{m}\Delta(\lambda\circ\phi),$$

donde concluímos a demonstração do seguinte resultado

Lema 6 *Seja $\Pi : (N, h) \to (\bar{N}, \bar{h})$ uma imersão conforme e totalmente geodésica. Denotamos por $\lambda : N \to \mathbb{R}$ a função tal que $\Pi^*\bar{h} = e^\lambda h$. Então, dada uma imersão isométrica $\phi : (M, g) \to (N, h)$, temos*

$$|H_\phi|^2 + R^N_\phi = e^{\lambda\circ\phi}(|H_{\Pi\circ\phi}|^2 + R^N_{\Pi\circ\phi}) + \frac{m-2}{4m}|\nabla(\lambda\circ\phi)|^2 + \frac{1}{m}\Delta(\lambda\circ\phi). \tag{3.22}$$

Lembramos que, por definição, a densidade de energia de uma aplicação diferenciável arbitrária $\psi : (M, g) \to (\bar{N}, \bar{h})$ entre as variedades riemannianas (M, g) e $(\bar{N}, \bar{h})$ é calculada como

$$e(\psi) = \frac{1}{2}g^{ij}\bar{h}(\psi_* e_i, \psi_* e_j) = \frac{1}{2}g^{ij}\psi^k_* e_i \psi^l_* e_j \bar{h}_{kl}.$$

É conveniente denotarmos por $\mathfrak{I}(N, \bar{N})$ o conjunto das imersões conformes totalmente geodésicas $\Pi : (N, h) \to (\bar{N}, \bar{h})$.

Passamos, agora, à demonstração do seguinte resultado

Proposição 4 *Fixada a notação acima, temos*

$$\int_M (|H_\phi|^2 + R^N_\phi) dM \geq \frac{2}{m} \sup_{\Pi\in\mathfrak{I}(N,\bar{N})} \int_M e(\Pi\circ\phi) R^N_{\Pi\circ\phi}\, dM \tag{3.23}$$

onde $R^N_{\Pi\circ\phi}$ é o escalar definido por

$$R^N_{\Pi\circ\phi} = \frac{1}{m(m-1)} g^{il}g^{jk}h(R^{\bar{N}}((\Pi\circ\phi)_* e_i, (\Pi\circ\phi)_* e_k)(\Pi\circ\phi)_* e_j, (\Pi\circ\phi)_* e_l). \tag{3.24}$$

Prova. A demonstração é baseada na seguinte afirmação: a densidade de energia da aplicação $\Pi \circ \phi : (M, g) \to (\bar{N}, \bar{h})$ é dada por

$$e(\Pi \circ \phi) = \frac{m}{2} e^{\lambda \circ \phi}. \tag{3.25}$$

De fato, calculamos

$$\begin{aligned} e(\Pi \circ \phi) &= \frac{1}{2} g^{ij} \bar{h}(\Pi_* \phi_* e_i, \Pi_* \phi_* e_j) = \frac{1}{2} g^{ij} \Pi^* \bar{h}(\phi_* e_i, \phi_* e_j) \\ &= \frac{1}{2} g^{ij} h'(\phi_* e_i, \phi_* e_j) = \frac{1}{2} g^{ij} h'(\phi_* e_i, \phi_* e_j) \\ &= \frac{1}{2} g^{ij} \phi^* h'(e_i, e_j) = \frac{1}{2} g^{ij} g'(\phi_* e_i, \phi_* e_j) \\ &= \frac{1}{2} e^{\lambda \circ \phi} g^{ij} g(e_i, e_j) = \frac{1}{2} e^{\lambda \circ \phi} g^{ij} g_{ij} \\ &= \frac{m}{2} e^{\lambda \circ \phi}. \end{aligned}$$

Assim, integrando a expressão enunciada no Lema 6, temos

$$\int_M |H_\phi|^2 + R_\phi^N = \frac{2}{m} \int_M e(\Pi \circ \phi)(|H_{\Pi \circ \phi}|^2 + R_{\Pi \circ \phi}^N) + \frac{m-2}{4m} \int_M |\nabla(\lambda \circ \phi)|^2 + \frac{1}{m} \int_M \Delta(\lambda \circ \phi).$$

Todavia, o Teorema da Divergência, quando aplicado considerando-se o fato de que M é compacta sem bordo, resulta em

$$\int_M |H_\phi|^2 + R_\phi^N = \frac{2}{m} \int_M e(\Pi \circ \phi)(|H_{\Pi \circ \phi}|^2 + R_{\Pi \circ \phi}^N) + \frac{m-2}{4m} \int_M |\nabla(\lambda \circ \phi)|^2.$$

Descartando a segunda integral, termo não-negativo, do lado direito, obtemos por fim

$$\int_M |H_\phi|^2 + R_\phi^N \geq \frac{2}{m} \int_M e(\Pi \circ \phi)(|H_{\Pi \circ \phi}|^2 + R_{\Pi \circ \phi}^N).$$

Posto que esta desigualdade é válida para todas as imersões conformes totalmente geodésicas $\Pi : (N, h) \to (\bar{N}, \bar{h})$, concluímos que

$$\int_M |H_\phi|^2 + R_\phi^N \geq \frac{2}{m} \sup_{\Pi \in \mathcal{I}(N, \bar{N})} \int_M e(\Pi \circ \phi)(|H_{\Pi \circ \phi}|^2 + R_{\Pi \circ \phi}^N), \tag{3.26}$$

o que encerra a demonstração. □

Daqui em diante, fixamos o caso em que $\bar{N} = \mathbb{S}^n$ e a métrica riemanniana $\bar{h}$ é a métrica canônica em $\mathbb{S}^n$ induzida por seu mergulho padrão no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Obtemos, deste modo, o principal resultado deste capítulo.

Teorema 5 (El Soufi e Ilias, [2]) *Seja* (N, h) *uma variedade riemanniana de dimensão* n *a qual pode ser conformemente imersa na esfera euclidiana* $\mathbb{S}^n$*. Então, dadas uma variedade riemanniana compacta* (M, g) *de dimensão* $m \geq 2$ *e uma imersão isométrica* $\phi : (M, g) \to (N, h)$*, temos*

$$\lambda_1(\Delta) \leq \frac{m}{\mathrm{vol}(M)} \int_M (|H_\phi|^2 + R_\phi^N)\, dM, \tag{3.27}$$

onde

$$R_\phi^N = \frac{1}{m(m-1)} g^{il} g^{jk} h(R^N(\phi_* e_i, \phi_* e_k)\phi_* e_j, \phi_* e_l). \tag{3.28}$$

Além disso, ocorre igualdade em (3.27) *se e somente se* $|H_\phi|^2 + R_\phi^N$ *é constante e igual a* $\lambda_1(\Delta)/m$.

Prova. Fixamos uma imersão conforme totalmente geodésica $\Pi : (N, h) \to (\mathbb{S}^n, \bar{h})$, onde $\bar{h}$ denota a métrica canônica em $\mathbb{S}^n$. Em termos da notação acima, temos $\Pi \in \mathcal{I}(N, \mathbb{S}^n)$. Dada a aplicação diferenciável $\Pi \circ \phi : M \to \mathbb{S}^n$, o Lema 2 assegura a existência de um difeomorfismo conforme $\gamma : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ tal que a aplicação $\psi := \gamma \circ \Pi \circ \phi : M \to \mathbb{S}^n$ tem centro de massa nulo, isto é, tal que

$$\int_M \psi = 0.$$

Escrevendo ψ em termos de componentes euclidianas

$$\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_{n+1}),$$

isto significa que $\int_M \psi_i = 0$, para $1 \leq i \leq n + 1$.

Denotamos, por comodidade, $\Pi' = \gamma \circ \Pi \in \mathbb{I}(N, \mathbb{S}^n)$. Temos, pela definição de energia

$$\int_M e(\Pi' \circ \phi) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \int_M |\nabla \psi_i|^2.$$

Todavia visto que as funções componentes ψ_i têm média zero, isto é, posto que

$$\int_M \psi_i = 0,$$

a caracterização variacional de autovalores apresentada no Lema 1 implica que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \int_M |\nabla \psi_i|^2 \geq \lambda_1(\Delta) \sum_{i=1}^{n+1} \int_M \psi_i^2.$$

Finalmente, visto que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \int_M \psi_i^2 = \int_M \sum_{i=1}^{n+1} \psi_i^2 = \int_M dM = \mathrm{vol}(M),$$

concluímos que

$$\int_M e(\Pi' \circ \phi) \geq \frac{\lambda(\Delta)}{2} \mathrm{vol}(M).$$

Por outro lado, em vista da Proposição 4, temos

$$\int_M (|H_\phi|^2 + R_\phi)\, dM \geq \frac{2}{m} \int_M e(\Pi' \circ \phi)\, dM.$$

Portanto, resulta que

$$\int_M (|H_\phi|^2 + R_\phi)\, dM \geq \frac{1}{m} \lambda_1(\Delta) \mathrm{vol}(M). \tag{3.29}$$

Analisamos, agora, quando a igualdade ocorre em (3.27). Neste caso, dada uma aplicação $\Pi \in \mathbb{I}(N, \mathbb{S}^n)$ e um difeomorfismo conforme $\gamma : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ tal que $\psi = \gamma \circ \Pi \circ \phi \in \mathbb{I}(N, \mathbb{S}^n)$, temos, a partir dos cálculos acima, a seguinte cadeia de desigualdades

$$\begin{aligned} \int_M (|H_\phi|^2 + R_\phi)\, dM &\geq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n+1} \int_M |\nabla \psi_i|^2 dM \geq \frac{1}{m} \lambda_1(\Delta) \sum_{i=1}^{n+1} \int_M \psi_i^2 dM \\ &= \frac{\lambda_1(\Delta)}{m} \mathrm{vol}(M). \end{aligned}$$

A igualdade em (3.27) implica, portanto,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \int_M |\nabla \psi_i|^2 dM = \lambda_1(\Delta) \sum_{i=1}^{n+1} \int_M \psi_i^2 dM$$

o que significa que as funções componentes $\psi_i,\ i = 1, \ldots, n+1$, são funções próprias do laplaciano de (M, g) visto que têm média zero e satisfazem a igualdade na caracterização variacional de $\lambda_1(\Delta)$. Portanto,

$$\begin{aligned} e(\psi) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} |\nabla \psi_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} (\psi_i \Delta \psi_i - \Delta \psi_i^2) = \frac{1}{2} (\sum_{i=1}^{n+1} \psi_i \Delta \psi_i - \Delta \sum_{i=1}^{n+1} \psi_i^2) \\ &= \frac{1}{2} \lambda_1(\Delta) \sum_{i=1}^{n+1} \psi_i^2 = \frac{1}{2} \lambda_1(\Delta), \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $\sum_i \psi_i^2 = 1$ e a expressão

$$\Delta \psi_i^2 = 2 \psi_i \Delta \psi_i + |\nabla \psi_i|^2.$$

Seja $e^{\lambda \circ \phi}$ o fator conforme associado à imersão conforme $\Pi' \circ \phi : (M, g) \to (\mathbb{S}^n, \bar{h})$. Observamos, deste modo, que

$$e^{\lambda \circ \phi} = \frac{2}{m} e(\Pi' \circ \phi) = \frac{2}{m} e(\psi) = \frac{1}{m} \lambda_1(\Delta).$$

Sendo assim, a expressão (3.22) no Lema 6 assegura que

$$\begin{aligned}
|H_\phi|^2 + R_\phi^N &= e^{\lambda\circ\phi}(|H_{\Pi'\circ\phi}|^2 + R_{\Pi'\circ\phi}^N) + \frac{m-2}{4m}|\nabla(\lambda\circ\phi)|^2 + \frac{1}{m}\Delta(\lambda\circ\phi) \\
&= \frac{1}{m}\lambda_1(\Delta)(|H_{\Pi'\circ\phi}|^2 + R_{\Pi'\circ\phi}^N) \\
&= \frac{1}{m}\lambda_1(\Delta)(|H_\psi|^2 + 1).
\end{aligned}$$

Integrando os dois lados extremos destas igualdades, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_1(\Delta)}{m}\mathrm{vol}(M) &= \int_M (|H_\phi|^2 + R_\phi^N)dM = \frac{1}{m}\lambda_1(\Delta)\int_M (|H_\psi|^2 + 1)dM \\
&\geq \frac{1}{m}\lambda_1(\Delta)\int_M |H_\psi|^2 dM + \frac{1}{m}\lambda_1(\Delta)\mathrm{vol}(M).
\end{aligned}$$

Concluímos que $H_\psi = 0$ e, portanto, que

$$|H_\phi|^2 + R_\phi^N = \frac{1}{m}\lambda_1(\Delta).$$

Isto encerra a demonstração do Teorema 5 □

Visto que o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ é conforme a um hemisfério aberto da esfera $\mathbb{S}^n$, uma aplicação interessante do Teorema 5 é dada a seguir

Teorema 6 (Theoreme 1 em [2]) *Dada uma imersão isométrica ϕ de uma variedade riemanniana compacta (M, g) no espaço hiperbólico n-dimensional $\mathbb{H}^n$, temos*

$$\lambda_1(\Delta) \leq \frac{m}{\mathrm{vol}(M)}\int_M (|H_\phi|^2 - 1)\, dM. \tag{3.30}$$

Além disso, ocorre igualdade em (3.30) *se e somente se $\phi(M)$ está contida em uma esfera geodésica de raio* $\operatorname{arcsenh}\sqrt{\frac{m}{\lambda_1(\Delta)}}$ *e ϕ é uma imersão mínima de (M, g) nesta esfera.*

Outras aplicações dizem respeito ao primeiro autovalor não-nulo do operador de Jacobi para imersões de curvatura média constante.

Referências Bibliográficas

[1] REILLY, R. On the first eigenvalue of the Laplacian for compact submanifolds of Euclidian space. **Comment. Math. Helv.,** v. 52, n. 4, p. 525-533, 1977.

[2] El SOUFI, A; ILIAS, S. Une inegalité du type Reilly pour les sous-variétés de l'espace hyperbolique. **Comment. Math. Helvetici,** v. 67, n. 2, p. 167-181, 1992.

[3] HEINTZE, E. Extrinsic upper bound for λ_1. **Matth. Ann.** v. 280, p. 389-402 1988

[4] BARBOSA, J. L.; CARMO, M. do. Stability of hypersurfaces of constant mean curvature. **Math. Z.,** v. 197, p. 123-138, 1988.

[5] BARBOSA, J. L.; CARMO, M. do; ESCHENBURG, J. Stability of Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in Riemannian Manifolds. **Math. Z.,** v. 197, p. 123-138, 1988.

[6] HERSCH, J. Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogénes. **C. R. Acad. Sci. Paris,** Ser. A-B, v. 270, p. 1645-1648, 1970.

[7] SAKAI, T. **Riemannian Geometry.** Providence, R.I. : American Mathematical Society, 1996. 358 p.

[8] CHAVEL, I. **Eigenvalues in Riemannian geometry.** Orlando : Academic Press, 1984. 362 p.

[9] CAMINHA, A. **Notas de Geometria Diferencial.** Preprint

[10] CARMO, M. P. do. **Geometria Riemanniana.** 3° ed. Rio de Janeiro. IMPA, 2005. (Projeto Euclides)