UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO EM MATEMÁTICA

ERNANI DE SOUSA RIBEIRO JÚNIOR

ESTABILIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES TIPO-ESPAÇO EM FOLHEAÇÕES ESPAÇO-TEMPO

FORTALEZA-CE

2009

ERNANI DE SOUSA RIBEIRO JÚNIOR

ESTABLILIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES TIPO-ESPAÇO EM FOLHEAÇÕES ESPAÇO-TEMPO

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial

Orientador: Prof. Dr. Aldir Chaves Brasil Júnior

FORTALEZA-CE

2009

R369e Ribeiro Júnior, Ernani de Sousa

Estabilidade de hipersupefícies tipo-espaço em folheações espaço-tempo / Ernani de Sousa Ribeiro Júnior. Fortaleza. 2009.

44 f.

Orientador: Prof. Dr. Aldir Chaves Brasil Júnior

Área de concentração: Geometria Diferencial

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Departamento de Matemática, Fortaleza, 2009.

CDD 516.36

Ao Rei dos reis e Senhor dos senhores, Jesus Cristo.

Agradecimentos

A princípio, agradeço a Deus por ter me guiado e ter aberto muitas portas durante toda minha trajetória de vida, tendo provado sua existência e sua bondade de várias maneiras, provando ainda que seus servos serão sempre vencedores, e que a vitória é o único resultado das batalhas onde os servos de Deus estão convocados.

Agradeço também a meu pai, senhor Ernani, um eterno amigo, companheiro, orientador, e mais que tudo a razão de tanto esforço. A minha mãe, Fátima, confidente, conselheira e eterna cúmplice. A minha noiva Carlene, minha amada, sincera, delicada e que meu deu muita força nessa batalha. A minha irmã Cristiele por ter orado muito por mim e por ter me dado motivos para seguir em frente nesta batalha. Além de toda minha família, tias, tios, minhas avós, meus primos e todos os quais formam essa família tão abençoada.

Agradeço também aos meus amigos, Halyson, Manoel, Kelton, Adam, Marcolino, Wilson, Valteir, Lutyl, Erivelton, Vinícius, Milton, eternos amigos. Além de tantos outros do mestrado, os quais formam uma lista tão grande que prefiro apenas dizer que todos tem um significado muito importante nessa conquista, obrigado a todos.

Quero também agradecer ao Professor Abdênago pelo apoio, coorientação, palavras de incentivo e muitas dicas de geometria e análise, muito obrigado. Além do mais, ao Professor Aldir, que me ajudou muito na orientação do trabalho de dissertação, ajudou também com palavras de incentivo e apoio. Agradeço também aos Professores, Antonio Caminha, João Lucas e Jorge Herbert, que tiveram um papel significativo durante o curso de Mestrado, além da Professora Fernanda Ester por ter participado da banca. Agradeço também a Andrea e a Catarina que resolveram toda parte burocrática de maneira ágil e prestativa.

Agradeço ainda aos Professores: João Xavier, Jurandir e Vicente, da Universidade Federal do Piauí, que me ajudaram muito durante o período de graduação e me encaminharam ao mestrado. Além destes, agradeço ao Professor Rocha e senhor Messias (Semec-Teresina) pelo grande apoio e palavras de incentivo durante o início dos meus estudos.

Agradeço o apoio financeiro da CAPES.

Por fim, agradeço a todos citados e não citados neste texto, mas que tiveram uma grande importância na minha vida, e que contribuíram de forma direta ou indireta para mais essa vitória. Obrigado a todos!

“Bom mesmo é ir a luta com determinação, abraçar a vida e viver com paixão, perder com classe e viver com ousadia. Pois o triunfo pertence a quem se atreve e a vida é muito bela para ser insignificante.”

Charles Chaplin

Resumo

Dado um espaço-tempo $\overline{M}^{n+1} = I \times_\phi F^n$ Robertson-Walker generalizado onde ϕ é a função warping que verifica uma certa condição de convexidade, vamos classificar hipersuperfícies tipo-espaço fortemente estáveis com curvatura média constante. Mais precisamente, vamos mostrar que, considerando $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço fortemente estável, fechada imersa em $\overline{M}^{n+1}$ com curvatura média constante H, se a função warping ϕ satifaz $\phi^{''} \geq max\{H\phi^{'}, 0\}$ ao longo de M, então M^n é maximal ou uma folha tipo-espaço $M_{t_0} = \{t_0\} \times F$, para algum $t_0 \in I$.

Palavras-chave: Hipersuperfície tipo-espaço. Fortemente Estável. Espaço-tempo.

Abstract

Give a generalized $\overline{M}^{n+1} = I \times_\phi F^n$ Robertson-Walker spacetime whose warping function verifies a certain convexity condition, we classify strongly stable spacelike hypersurfaces with constant mean curvature. More precisely, we will show that given $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ a closed, strongly stable spacelike hypersurfaces of $\overline{M}^{n+1}$ with constant mean curvature H, if the warping function ϕ satisfying $\phi \geq max\{H\phi^{'}, 0\}$ along M is either maximal or a spacelike slice $M_{t_0} = \{t_0\} \times F$, for some $t_0 \in I$.

Keywords: Hypersurfaces space-like. Stongly stable. Space-time.

Conteúdo

Introdução

As hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média constante em variedades de Lorentz têm sido de grande interesse nos últimos anos, tanto pelo ponto de vista físico quanto matemático. Em [1], os autores estudaram a unicidade de hipersuperfícies com curvatura média constante (CMC) em espaço-tempo Robertson-Walker generalizado (GRW), a saber, produto warped Lorentz com base negativa definida de dimensão 1 e fibra Riemanniana. Eles provaram que em um espaço-tempo obedecendo a condição de convergência tipo-tempo (isto é, a curvatura Ricci é não-negativa nas direções tipo-tempo), toda hipersuperfície tipo-espaço compacta com CMC deve ser umbílica. Recentemente, Alías e Montiel obtiveram, em [2], mais uma condição geral para a função warping f que é suficiente a fim de garantir a unicidade. Mais precisamente, eles provaram o seguinte:

Teorema: Seja $f : I \to R$ uma função diferenciável positiva definida num intervalo aberto, tal que $ff'' - (f')^2 \leq 0$, isto é, tal que a função $-logf$ é convexa. Então, as únicas hipersuperfícies tipo-espaço compacta imersas num espaço-tempo Robertson-Walker generalizado $-I \times_f F^n$ e tendo curvatura média constante são as folhas $\{t\} \times F$, para uma (necessariamente compacta) variedade Riemanniana F.

Algumas questões envolvendo a estabilidade de hipersuperfícies compacta CMC em espaço Riemanniano foram estudadas por Barbosa e do Carmo em [3], e Barbosa, do Carmo e Eschenburg em [4]. Eles introduziram a noção de estabilidade e provaram que esferas são estáveis somente para pontos críticos da função área para variações preservando balanço-volume. No caso de hipersuperfícies tipo-espaço em variedade de Lorentz, Barbosa e Oliker provaram em [5] que hipersuperfícies tipo-espaço CMC são pontos críticos da variação preservando balanço-volume. Além disto, para o cálculo da fórmula da segunda variação eles mostraram que esferas CMC mergulhadas num espaço de Sitter S_1^{n+1} maximizam a função área para tal variação. Nesta dissertação será dada uma caracterização de hipersuperfícies tipo-espaço CMC num espaço-tempo GRW, *fortemente estável*, ferramenta essencial para se provar a existência de uma fórmula para o laplaciano de uma nova função suporte, que foi obtido no caso Riemanniano por Fornari e Ripoll em [11] . Mais precisamente apresentaremos a prova do seguinte teorema enunciado em [6].

Teorema: Seja $\overline{M}^{n+1} = I \times_\phi F^n$ um espaço-tempo Robertson-Walker generalizado, e $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço fechada de $\overline{M}^{n+1}$ com curvatura média constante H. Se a função warping ϕ satisfaz $\phi^{''} \geq max\{H\phi^{'}, 0\}$, e M^n é fortemente estável, então M^n é maximal ou uma folha tipo-espaço $M_{t_0} = \{t_0\} \times F$ para algum $t_0 \in I$.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo objetiva estabelecer as notações que serão utilizadas nos demais capítulos desta dissertação, bem como resultados que faremos uso posteriormente. Para maiores datalhes, indicamos como referências [9], [10] e [12].

1.1 Variedades semi-Riemannianas

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma forma bilinear simétrica $b = \langle \, , \, \rangle : V \times V \to R$ é dita:

- **Positiva definida:** se $\langle v, v \rangle > 0$ para todo $v \in V - \{0\}$.

- **Negativa definida:** se $\langle v, v \rangle < 0$ para todo $v \in V - \{0\}$.

- **Não-degenerada:** se $\langle v, w \rangle = 0$ para todo $w \in V$ implica que $v = 0$.

Se b é uma forma bilinear simétrica sobre V, um subespaço W de V é dito *não-degenerado* se $b|_{W\times W} : W \times W \to R$ for *não-degenerada*.

O *índice* de uma forma bilinear simétrica b sobre V é a maior dimensão de um subespaço W de V tal que $b|_{W\times W} : W \times W \to R$ seja negativa definida.

Dados uma forma bilinear simétrica b sobre V e um subespaço W de V, definimos o complemento ortogonal $W^{\perp}$ de W em V por:

$$W^{\perp} = \{v \in V; \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W\}.$$

Lema 1.1 *Sejam b uma forma bilinear simétrica sobre o espaço vetorial de dimensão finita V e W um subespaço de V, então:*

(a) *b é não-degenerada se, e somente se, sua matriz com respeito a uma base de V for invertível. Deste modo, ela será invertível com respeito a qualquer base.*

(b) *Se W é não-degenerado, então $dim(W)+dim(W^{\perp}) = dim(V)$ e $(W^{\perp})^{\perp} = W$.*

(c) *W é não-degenerado se, e somente se, $V = W \oplus W^{\perp}$. Em particular, W é não-degenerado se, e somente se, $W^{\perp}$ for não-degenerado.*

No que segue, supomos que $b = \langle\, , \rangle$ é uma forma bilinear simétrica e não-degenerada sobre o espaço vetorial real V. Em relação a b, dizemos que $v \in V - \{0\}$ é:

1. *Tipo-tempo*, quando $\langle v, v \rangle < 0$;

2. *Tipo-luz*, quando $\langle v, v \rangle = 0$;

3. *Tipo-espaço*, quando $\langle v, v \rangle > 0$.

Analogamente, define-se o que significa para um subespaço não-degenerado W de V ser tipo-tempo, tipo-luz ou tipo-espaço. Se $v \in V - \{0\}$ não for tipo-luz, define-se o *sinal* $\epsilon_v \in \{-1, 1\}$ de v por

$$\epsilon_v = \frac{\langle v, v \rangle}{|\langle v, v \rangle|}.$$

A *norma* de $v \in V$ é $|\, v \,| = \sqrt{\epsilon_v \langle v, v \rangle}$ e v é unitário se $|\, v \,| = 1$. Seja $\{e_i\}$ uma base de V ortonormal com respeito a b, isto é, $\langle e_i, e_j \rangle = \epsilon_i \delta_{ij}$, onde ϵ_i é o sinal de e_i (cf. [12], lema 2.24). Desse modo a expansão ortonormal de $v \in V$ com respeito a $\{e_i\}$ é dada por

$$v = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \langle v, e_i \rangle e_i. \tag{1.1}$$

Sejam V um espaço vetorial no qual uma forma bilinear simétrica e não-degenerada $b = \langle\, , \rangle$ de índice 1 está definida, e $\tau = \{u \in V; \langle u, u \rangle < 0\}$. Para cada $u \in \tau$, definimos o *cone tipo-tempo ou cone temporal* de V contendo u por $C(u) = \{v \in \tau : \langle u, v \rangle < 0\}$.

Definição 1.1 *Um tensor métrico sobre uma variedade diferenciável* $\overline{M}$ *é um 2-tensor covariante e simétrico* $\overline{g}$ *sobre* $\overline{M}$*, tal que* $\overline{g_p}$ *é não degenerado para todo* $p \in \overline{M}$*. Uma variedade semi-Riemanniana* $\overline{M}$ *é um par* $(\overline{M}, \overline{g})$ *onde* $\overline{M}$ *é uma variedade diferenciável e* $\overline{g} = \langle\, , \,\rangle$ *é um tensor métrico de índice constante sobre* $\overline{M}$*.*

Definição 1.2 *Sejam* $\overline{M}$ *uma variedade semi-Riemanniana,* $p \in \overline{M}$ *e* $\sigma \subset T_p\overline{M}$ *um subespaço de dimensão 2 não-degenerado de* $T_p\overline{M}$*. O número*

$$K(\sigma) = \frac{\langle\, \overline{R}(v,w)v, w \,\rangle}{\langle\, v, v \,\rangle\langle\, w, w \,\rangle - \langle\, v, w \,\rangle^2},$$

independente da base escolhida $\{v, w\}$ *de* σ*, e é denominado curvatura seccional de* $\overline{M}$ *em* p *segundo* σ*.*

Definição 1.3 *Uma variedade semi-Riemanniana* $\overline{M}$ *tem curvatura seccional constante se, para cada* $p \in \overline{M}$*, os números* $K(\sigma)$ *da definição acima independerem do subespaço de dimensão 2 não-degenerado* σ *de* $T_p\overline{M}$*.*

Aproximando subespaços de dimensão 2, degenerados σ de $T_p\overline{M}$ através de subespaços não-degenerados, pode-se mostrar que o fato de $\overline{M}$ ter curvatura seccional constante determina seu tensor curvatura $\overline{R}$. Mais precisamente, se $\overline{M}$ tiver curvatura seccional constante c, então

$$\overline{R}(X,Y)Z = c[\langle\, X, Z \,\rangle Y - \langle\, Y, Z \,\rangle X]. \tag{1.2}$$

Para todos $X, Y, Z \in \chi(\overline{M})$.

Se o índice v de $\overline{M}$ é zero, $\overline{M}$ é dita uma variedade Riemanniana; quando $v = 1$, $\overline{M}$ é dita uma variedade de Lorentz (ou espaço-tempo).

Definição 1.4 *Seja* $\overline{M}$ *uma variedade de Lorentz. Uma aplicação* τ*, que associa a cada* $p \in \overline{M}$ *um cone tipo-tempo* τ_p *em* $T_p\overline{M}$ *é suave se, para cada* $p \in \overline{M}$*, existem uma vizinhança aberta* U *de* p *e* $V \in \chi(U)$*, tais que* $V(q) \in \tau_q$ *para todo* $q \in U$*. Caso uma aplicação* τ *exista, diz-se que* $\overline{M}$ *é temporalmente orientável.*

Proposição 1.1 *Uma variedade de Lorentz* $\overline{M}$ *é temporalmente orientável se, e somente se, existir um campo de vetores tipo-tempo* $K \in \chi(\overline{M})$*.*

Demonstração: Se existe $K \in \chi(\overline{M})$ tipo-tempo defina $\tau_p = C(K(p))$ Reciprocamente, seja τ uma orientação temporal de $\overline{M}$. Como τ é diferenciável, cada ponto $p \in \overline{M}$ possui uma vizinhança U em $\overline{M}$ na qual está definido um campo de vetores tipo-tempo K_U tal que $K_U(q) \in \tau_q$, para cada $q \in U$. Sejam agora $\{U_\alpha\}$ uma tal cobertura de $\overline{M}$ e $\{f_\alpha\}$ uma partição da unidade estritamente subordinada a $\{U_{\alpha\}}$. Obtemos então,

$$K = \sum_\alpha f_\alpha K_{U_\alpha} \in \chi(\overline{M})$$

tipo-tempo, o que conclui a prova.

Seja τ uma orientação temporal para $\overline{M}$, e $V \in \chi(\overline{M})$. Se $V(q) \in \tau_q$, para todo $q \in \overline{M}$, diz-se que V aponta para o futuro. Da mesma forma, se $-V(q) \in \tau_q$ para todo $q \in \overline{M}$, diz-se que V aponta para o passado. Assim, sendo K uma orientação temporal para $\overline{M}$ temos que um campo vetorial tipo-tempo V sobre $\overline{M}$ aponta para o futuro (passado) se, e somente se, $\langle V, K \rangle < 0$, $(\langle V, K \rangle > 0)$.

1.2 Hipersuperfícies tipo-espaço

Seja $(\overline{M}^{n+1}, \langle\, , \rangle)$ uma variedade de Lorentz de dimensão $n+1$. Uma imersão suave $\psi : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ de uma variedade diferenciável e conexa M de dimensão n é dita uma hipersuperfície tipo-espaço se a métrica induzida em M pela imersão ψ for Riemanniana. Neste caso, denotaremos por $\langle\, , \rangle$ a métrica de M.

Proposição 1.2 *Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço de uma variedade de Lorentz temporalmente orientada $\overline{M}^{n+1}$. Então M^n admite um campo vetorial normal unitário (diferenciável) $N \in \chi(M)^\perp$, apontando para o futuro. Em particular, M^n é orientável.*

Demonstração: Fixe um campo $K \in \chi(\overline{M})$ que dá a orientação temporal de $\overline{M}$, e observe que, para todo $p \in M$, o conjunto de todos os vetores tipo-tempo $v \in T_p\overline{M}$ é a união disjunta de $C(K(p))$ e $C(-K(p))$. Tome, em cada $p \in M$, um vetor unitário $N(p) \in T_pM^\perp$. Como $N(p)$ é tipo-tempo, trocando $N(p)$ por $-N(p)$ se necessário, podemos supor que $N(p) \in C(K(p))$. Deste modo, definimos unicamente um campo vetorial normal unitário N em M, apontando para o futuro. Para mostrar que tal campo é diferenciável, fixe $p \in M$ e tome um referencial móvel $\{e_i\}$ numa vizinhança aberta e conexa U de p em M. Então $\overline{N} = K - \sum_{i=1}^{n} \langle K, e_i \rangle e_i$ é suave e normal a M em U, com

$$\langle \overline{N}, \overline{N} \rangle = \langle \overline{N}, K \rangle = \langle K, K \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle K, e_i \rangle^2.$$

Mas $\langle K, K \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle K, e_i \rangle^2 - \langle K, N \rangle^2$, onde $\langle \overline{N}, \overline{N} \rangle = -\langle K, N \rangle^2 < 0$. Portanto, $\overline{N}(q) \in C(K(q))$, para cada $q \in U$, e $N = \frac{\overline{N}}{|\overline{N}|}$ é diferenciável.

Definição 1.5 *Se U é um subconjunto aberto de R^n, uma k-folha de U é um subconjunto da forma*

$$S = \{(x^1, ..., x^k, x^{k+1}, ..., x^n) \in U; x^{k+1} = c^{k+1}, ..., x^n = c^n\}$$

para $c^{k+1}, ..., c^n \in R$.

Feita a escolha da orientação temporal N da hipersuperfície tipo-espaço $\psi : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ imersa num espaço-tempo, denotaremos também por N a aplicação normal de Gauss de M. Denotamos por ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita, do mesmo modo, R e $\overline{R}$ denotão os tensores curvatura de M e $\overline{M}$, respectivamente. Para todos $X, Y \in \chi(M)$ tem-se $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T$, onde T denota a componente tangente. Assim,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \tag{1.3}$$

onde $\alpha : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi^{\perp}(M)$ é a *segunda forma fundamental* da imersão ψ. Uma vez que α é $C^{\infty}(M)$-bilinear e simétrica, definindo

$$\langle AX, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), N \rangle,$$

obtemos um campo $A : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ de operadores lineares auto-adjuntos $A_p : T_pM \longrightarrow T_pM$ $(p \in M)$, chamados *operadores da segunda forma fundamental da imersão ψ*. Não é difícil verificar que

$$AX = -\overline{\nabla}_X N$$

e

$$\alpha(X, Y) = -\langle AX, Y \rangle N.$$

Proposição 1.3 *Seja* $\psi : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ *uma imersão isométrica . Então, para quaisquer campos de vetores* $X, Y, Z \in \chi(M)$*, temos as seguintes equações:*

- ***Equação de Gauss***

$$R(X,Y)Z = (\overline{R}(X,Y)Z)^T + \langle AY, Z \rangle AX - \langle AX, Z \rangle AY \qquad (1.4)$$

- ***Equação de Codazzi***

$$(\overline{R}(X,Y)N)^T = (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X \qquad (1.5)$$

1.3 Espaço-tempo de Robertson-Walker Generalizado

Sejam F^n uma variedade Riemanniana conexa orientada de dimensão n, $I \subset R$ um intervalo aberto e $f : I \longrightarrow R$ uma função diferenciável positiva. Considere a variedade produto $\overline{M}^{n+1} = I \times F^n$, denotemos π_I e π_F as projeções canônicas sobre os fatores I e F, respectivamente. Munindo $\overline{M}$ com a métrica

$$\langle\, , \,\rangle = -\pi_I^*(dt^2) + f^2(\pi_I)\pi_F^*(\langle\, , \,\rangle_F), \qquad (1.6)$$

obtemos uma classe importante de variedade de Lorentz a qual é denominada um *espaço-tempo de Robertson-Walker Generalizado* (GRW), que será denotada simplesmente por $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f F^n$. Em particular, se F^n tem curvatura seccional constante, $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f F^n$ é denominado classicamente um *espaço-tempo de Robertson-Walker* (RW), para maiores detalhes veja [12].

Observemos que, se $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f F^n$ é um espaço-tempo GRW, o campo de vetores

$$K = f\partial_t = (f \circ \pi_I)\partial_t, \qquad (1.7)$$

é conforme fechado, com fator conforme $\phi = f'$, onde $(')$ denota a derivação com respeito a $t \in I$.

Capítulo 2

Hipersuperfícies tipo-espaço imersas num espaço-tempo

Considerando $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f F^n$ um espaço-tempo GRW. E, por simplicidade, escrevemos a métrica de $\overline{M}^{n+1}$ como

$$\langle \, , \, \rangle = -dt^2 + f^2(t)\langle \, , \, \rangle_F,$$

onde $\langle , \rangle_F$ denota a métrica Riemanniana de F.

Seja $\partial_t = (\frac{\partial}{\partial_t})_{(t,q)}$, $t \in I$, $q \in F$ um campo de vetores tipo-tempo unitário globalmente definido em $-I \times_f F^n$.

Assim, dada uma hipersuperfície tipo-espaço M, existe um único campo unitário normal tipo-tempo N globalmente definido em M, que é alguma tempo-orientação em ∂_t, tal que

$$\langle \, \partial_t, N \, \rangle \leq -1, \tag{2.1}$$

onde, ∂_t e N são unitários, e por [12](Cap.05. Prop.30-1), obtemos o resultado acima.

Sejam $\overline{\nabla}$ e ∇ conexões de Levi-Civita de $-I \times_f F^n$ e M, respectivamente. Então a fórmula de Gauss e Weingarten para hipersuperfícies em $-I \times_f F^n$ são dadas, respectivamente por

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle \, AX, Y \, \rangle N \tag{2.2}$$

e

$$A(X) = -\overline{\nabla}_X N. \tag{2.3}$$

Para quaisquer campos de vetores tangentes $X, Y \in \chi(M)$.

A curvatura média de M é definida por

$$H = \frac{-1}{n} tr(A), \tag{2.4}$$

onde $A : \chi(M) \to \chi(M)$ define o operador forma de M com respeito a N.

Portanto $H(p) > 0$ no ponto $p \in M$ se, e somente se, $H(p)$ é alguma tempo-orientação em N.

Lema 2.1 *Seja $-I \times_f F^n$ um Espaço-tempo (GRW), daí:*

- *Se um Espaço-tempo Robertson-Walker generalizado $-I \times_f F^n$ admite uma hipersuperfície compacta, então a fibra F é necessariamente compacta.*
- *Se o recobrimento universal da fibra de um espaço-tempo Robertson-Walker generalizado $-I \times_f F^n$ é compacto, então toda hipersuperfície tipo-espaço completa tal que $f(\pi_I)$ é limitada deve ser necessariamente compacta.*

Lema 2.2 *Seja $f : I \longrightarrow R$ uma função diferenciável definida num intervalo aberto tal que $ff'' - (f')^2 \leq 0$, isto é, tal que $-logf$ é convexa, e seja $-I \times_f F^n$ um espaço-tempo GRW com fibra Riemanniana F (necessariamente compacta). Então a curvatura média de toda hipersuperfície tipo-espaço compacta imersa em $-I \times_f F^n$ satisfaz*

$$minH \leq (logf)'(t_{max}) \leq (logf)'(t_{min}) \leq maxH, \tag{2.5}$$

onde t_{min} e t_{max} denotam, respectivamente, os valores mínimo e máximo de $\pi_I |_M = \pi_I \circ \psi$ em M.

Demonstração: Consideremos $\pi = \pi_I |_M = \pi_I \circ \psi$, que é uma função diferenciável em M, $p \in M$ e $v \in T_pM$.

$$\begin{aligned} \langle grad\pi, v \rangle &= \langle \sum_i (E_i(\pi))E_i, v \rangle \\ &= \langle \sum_i (E_i(\pi_I \circ \psi))E_i, v \rangle \\ &= \langle -\partial_t^T, v \rangle \\ &\Rightarrow grad\pi = -\partial_t^T, \end{aligned}$$

onde $\partial_t^T \in \chi(M)$ denota a componente tangente de ∂_t, isto é,

$$\nabla \pi = -\partial_t^T = -\partial_t - \langle\, \partial_t, N \,\rangle N. \tag{2.6}$$

Por [12](Cap.7, Prop.35 -3), temos que

$$\overline{\nabla}_Z \partial_t = -(\langle\, Z, \partial_t \,\rangle / f) gradf = (logf)^{'}(\pi_I) Z^F, \tag{2.7}$$

para todo campo de vetores Z em $-I \times_f F^n$, onde Z^F denota a projeção Z na fibra $(F^n, \langle\, , \,\rangle_F)$, isto é, $Z^F = Z + \langle\, Z, \partial_t \,\rangle \partial_t$.

Tomando a derivada covariante em (2.6) e usando (2.2) e (2.3), obtemos por (2.7) que

$$\begin{aligned}
\langle\, \nabla_X \nabla \pi, Y \,\rangle &= \langle\, \nabla_X(-\partial_t - \langle\, \partial_t, N \,\rangle N), Y \,\rangle \\
&= \langle\, -\nabla_X \partial_t - X(\langle\, \partial_t, N \,\rangle) N - \langle\, \partial_t, N \,\rangle \nabla_X N, Y \,\rangle \\
&= \langle\, -\overline{\nabla}_X \partial_t - \langle\, AX, \partial_t \,\rangle N - X(\langle\, \partial_t, N \,\rangle) N - \langle\, \partial_t, N \,\rangle (\nabla_X N), Y \,\rangle \\
&= \langle\, -\overline{\nabla}_X \partial_t - \langle\, \partial_t, N \,\rangle \overline{\nabla}_X N, Y \,\rangle \\
&= -\langle\, \overline{\nabla}_X \partial_t, Y \,\rangle - \langle\, \partial_t, N \,\rangle \langle\, \overline{\nabla}_X N, Y \,\rangle \\
&= -\langle\, \overline{\nabla}_X \partial_t, Y \,\rangle + \langle\, \partial_t, N \,\rangle \langle\, AX, Y \,\rangle \\
&= -\langle\, (logf)^{'}(\pi) X^F, Y \,\rangle + \langle\, \partial_t, N \,\rangle \langle\, AX, Y \,\rangle \\
&= \langle\, -(logf)^{'}(\pi)(X + \langle\, X, \partial_t \,\rangle \partial_t), Y \,\rangle + \langle\, \partial_t, N \,\rangle \langle\, AX, Y \,\rangle \\
&= \langle\, -(logf)^{'}(\pi) X - (logf)^{'}(\pi) \langle\, X, \partial_t \,\rangle \partial_t, Y \,\rangle + \langle\, \partial_t, N \,\rangle \langle\, AX, Y \,\rangle \\
&= \langle\, -(logf)^{'}(\pi)(X + \langle\, X, \partial_t \,\rangle \partial_t^T) + \langle\, \partial_t, N \,\rangle AX, Y \,\rangle,
\end{aligned}$$

para quaisquer $X, Y \in \chi(M)$.

Portanto

$$\nabla_X \nabla \pi = -(logf)^{'}(\pi)(X + \langle\, X, \partial_t \,\rangle \partial_t^T) + \langle\, \partial_t, N \,\rangle AX,$$

para todo campo de vetores $X \in \chi(M)$.

Consideremos um referencial ortonormal $\{e_i\}$, com isso, teremos

$$\begin{aligned}
\Delta\pi &= \sum_i \langle \nabla_{e_i}(\nabla\pi), e_i\rangle \\
&= \sum_i \langle -(logf)^{'}(\pi)e_i - (logf)^{'}(\pi)\langle e_i, \partial_t\rangle \partial_t^T + \langle \partial_t, N\rangle Ae_i, e_i\rangle \\
&= \sum_i \langle -(logf)^{'}(\pi)e_i, e_i\rangle + \sum_i \langle -(logf)^{'}(\pi)\langle e_i, \partial_t\rangle \partial_t^T, e_i\rangle + \sum_i \langle \langle \partial_t, N\rangle Ae_i, e_i\rangle \\
&= -n(logf)^{'}(\pi) - (logf)^{'}(\pi)\sum_i \langle e_i, \partial_t\rangle \partial_t^T + \langle \partial_t, N\rangle \sum_i \langle Ae_i, e_i\rangle \\
&= -n(logf)^{'}(\pi) - nH\langle \partial_t, N\rangle - (logf)^{'}(\pi) \mid \partial_t^T \mid^2 \\
&= -n(logf)^{'}(\pi) - nH\langle \partial_t, N\rangle - (logf)^{'}(\pi) \mid \nabla\pi \mid^2 \\
&= -n((logf)^{'}(\pi) + H\langle \partial_t, N\rangle) - (logf)^{'}(\pi) \mid \nabla\pi \mid^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\Delta\pi = div(grad\pi) = -n((logf)^{'}(\pi) + H\langle\, \partial_t, N\,\rangle) - (logf)^{'}(\pi) \mid \nabla\pi \mid^2 . \quad (2.8)$$

Sendo M compacta, existem pontos p_{min} e $p_{max} \in M$ onde a função π atinge o mínimo e o máximo, respectivamente, isto é

$$\pi(p_{min}) = min\pi(p) = t_{min} \leq t_{max} = \pi(p_{max}) = max\pi(p),\ p \in M.$$

Em particular, p_{min} e p_{max} são pontos críticos de π, e por (2.6) temos que

$$N(p_{min}) = (\partial_t)_{p_{min}} \text{ e } N(p_{max}) = (\partial_t)_{p_{max}}.$$

Usando isto em (2.8) temos que

$$\Delta\pi(p_{min}) = -n((logf)^{'}\pi(p_{min}) - H(p_{min})) \geq 0$$

e

$$\Delta\pi(p_{max}) = -n((logf)^{'}\pi(p_{max}) - H(p_{max}) \leq 0,$$

isto é,

$$\begin{aligned}
0 \leq \Delta\pi(p_{min}) &= -n((logf)^{'}(t_{min}) - H(p_{min})) \\
&= -n(logf)^{'}(t_{min}) + nH(p_{min}).
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$(log f)^{'}(t_{min}) \leq H(p_{min}) \leq max H.$$

Da mesma forma temos

$$\begin{aligned} 0 \geq \Delta\pi(p_{max}) &= -n((log f)^{'}(t_{max}) - H(p_{max})) \\ &= -n(log f)^{'}(t_{max}) + nH(p_{max}). \end{aligned}$$

Logo,

$$(log f)^{'}(t_{max}) \geq H(p_{max}) \geq min H.$$

Portanto,

$$min H \leq H(p_{max}) \leq (log f)^{'}(t_{max}) \tag{2.9}$$

e

$$max H \geq H(p_{min}) \geq (log f)^{'}(t_{min}). \tag{2.10}$$

Finalmente, sendo $-log f$ convexa, então $(log f)^{'}$ é não crescente e, $(log f)^{'}(t_{max}) \leq (log f)^{'}(t_{min})$, que juntamente com (2.9) e (2.10), resultam

$$min H \leq (log f)^{'}(t_{max}) \leq (log f)^{'}(t_{min}) \leq max H.$$

Corolário 2.1 *(Generalização) Seja $-I \times_f F^n$ um espaço-tempo GRW com fibra riemanniana F (necessariamente compacta). Então a curvatura média de toda hipersuperfície tipo-espaço compacta em $-I \times_f F^n$ satisfaz $min H \leq (log f)^{'}(t_{max})$ e $max H \geq (log f)^{'}(t_{min})$, onde t_{min} e t_{max} denotam respectivamente, o mínimo e o máximo de $\pi_I|_M = \pi_I \circ \psi$ em M.*

Teorema 2.1 *Seja $f : I \to R$ uma função positiva diferenciável definida num intervalo aberto, tal que $ff^{''} - (f^{'})^2 \leq 0$, isto é, tal que $-log f$ é convexa. Então, as únicas hipersuperfícies tipo-espaço imersas num Espaço-tempo Robertson-Walker generalizado $-I \times_f F^n$ e com curvatura média constante são as folhas $\{t\} \times F$, para variedade Riemanniana F (necessariamente compacta).*

Demonstração: Consideremos as desigualdades

$$min H \leq (log f)^{'}(t_{max}) \leq (log f)^{'}(t_{min}) \leq max H.$$

Como, por hipótese a curvatura média é constante, então $minH = maxH$, assim $H = (logf)^{'}(t_{max}) = (logf)^{'}(t_{min})$ e, portanto, $(logf)^{'}$ é constante em $[t_{min}, t_{max}]$, visto que $(logf)^{'}$ é não crescente em I, pois $-logf$ é convexa. Portanto,

$$H = (logf)^{'}(\pi) = \frac{f^{'}(\pi)}{f(\pi)}, \tag{2.11}$$

em M e, assim, (2.8) se escreve como

$$\Delta\pi = -nH(1 + \langle\, \partial_t, N\,\rangle) - H \mid \nabla\pi \mid^2 . \tag{2.12}$$

Consideremos a função diferenciável $u = g(\pi)$ onde $g : I \longrightarrow R$ é uma função crescente dada por

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds,$$

para $t_0 \in I$ fixado arbitrariamente.

Segue, então, por (2.11) e (2.12) que

$$\nabla u = g^{'}(\pi)\nabla\pi$$

e, ainda,

$$\begin{aligned}
\Delta u &= g^{'}(\pi)\Delta\pi + g^{''} \mid \nabla\pi \mid^2 \\
&= -f(\pi)nH(1 + \langle\, \partial_t, N\,\rangle) - f(\pi)H \mid \nabla\pi \mid^2 + f^{'}(\pi) \mid \nabla\pi \mid^2 \\
&= -nHf(\pi)(1 + \langle\, \partial_t, N\,\rangle) + (f^{'}(\pi) - Hf(\pi)) \mid \nabla\pi \mid^2 \\
&= -nHf(\pi)(1 + \langle\, \partial_t, N\,\rangle),
\end{aligned}$$

pois $\frac{f^{'}(\pi)}{f(\pi)} = H$.

Além disso, $1 + \langle\, \partial_t, N\,\rangle \leq 0$ por (2.1). Consequentemente u é subharmônica ou superharmônica em M, que é compacta. Deste modo, segue que u é constante na hipersuperfície, e sendo g crescente em I, temos que π é constante em M, isto é, uma folha. Isto finalmente prova o teorema.

Capítulo 3

Hipersuperfícies tipo-espaço estáveis

Consideremos $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade de Lorentz, orientável, temporalmente orientável, com métrica Lorentziana $\langle\, ,\, \rangle$ e conexão semi-Riemanniana $\overline{\nabla}$.

Lema 3.1 *Uma hipersuperfície M de uma variedade orientável $\overline{M}$ é orientável se, e somente se, existe um campo de vetores normal unitário diferenciável globalmente definido em M.(cf. [12], pág. 189)*

Se $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ é uma hipersuperfície tipo-espaço de $\overline{M}^{n+1}$, então pelo Lema 3.1 M^n é orientável e, portanto, podemos escolher um campo de vetores normal globalmente definido em M^n, com a mesma orientação temporal de V, isto é, tal que

$$\langle V, N \rangle < 0,$$

em M.

Uma *variação* de x é uma aplicação diferenciável definida por $X : M^n \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longmapsto \overline{M}^{n+1}$ satisfazendo a seguinte condição:

(1) Para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a aplicação $X_t : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ dada por $X_t(p) = X(t, p)$ é uma imersão tipo-espaço.

(2) $X_t|_{\partial M} = x|_{\partial M}$, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, se $\partial M \neq$.

Seja $f = -\langle \frac{\partial X}{\partial t}, N_t \rangle$, onde N_t é o campo de vetores normal em M com respeito a métrica induzida por X_t e tal que $N_0 = N$, e seja, $f_t = f(t, \cdot)$. O *campo variacional* associado a variação X é o campo de vetores $W = \frac{\partial X}{\partial t}|_{t=0}$, que pode ser decomposto como

$$W = f_0 N + W^T,$$

onde W^T representa a compotente tangente de W.
O *balanço de volume* da variação X é a função $V : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow R$ dada por:

$$V(t) = \int_{M\times[0,t]} X^* d\overline{M},$$

onde $d\overline{M}$ denota o elemento de volume de $\overline{M}$.

O *funcional área* $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow R$ associada a variação X é dada por:

$$A(t) = \int_M dM_t,$$

onde dM_t denota o elemento de volume da métrica induzida em M por X_t. Note que $dM_0 = dM$ e $A(0) = A$.

Definição 3.1 *Uma variação é normal se W é paralelo a N e preserva volume se $V(t) = V(0)$ para todo t.*

Lema 3.2 *Dada uma função diferenciável $f : M \longrightarrow R$ com $f|_{\partial M} = 0$ e $\int_M f dM = 0$, existe uma variação normal preservando volume onde o vetor variação é fN.*

Demonstração: Seja $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \longrightarrow R$ uma função diferenciável e defina uma variação $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \longrightarrow \overline{M}$ por

$$X(t,p) = exp_{x(p)} \varphi(t,p) N,\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon),\ p \in M. \tag{3.1}$$

X é uma variação normal com $(\frac{\partial X}{\partial t})_0 = (\frac{\partial \varphi}{\partial t})_0 N$. Queremos mostrar que φ pode ser tomada de modo que X satisfaça as condições do Lema.

Para isso, calculemos a função volume $V(t)$ de X. Note que $X = e \circ \psi$, onde $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \longrightarrow R \times M$ é a aplicação $\psi(t,p) = (\varphi(t,p), p)$ e $e(u,p) = exp_{x(p)} uN$, $u \in R$. Sendo $E(u,p) = det(de_{(u,p)})$, obtemos

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_{[0,t]\times M} X^* d\overline{M} \\ &= \int_{[0,t]\times M} \psi^* e^* d\overline{M} \\ &= \int_{[0,t]\times M} E(\varphi(t,p),p) \frac{\partial \varphi}{\partial t} (dM \wedge dt) \\ &= \int_M (\int_0^t E(\varphi(t,p),p) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt) dM. \end{aligned}$$

Seja $f : M \longrightarrow R$ dado no lema, e seja φ a solução do valor inicial do problema

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{f(p)}{E(\varphi(t), p)}, \text{ com } \varphi(0, p) = 0.$$

Apartir da expressão acima para $V(t)$ e do fato que $\int_M f dM = 0$, segue que $V(t) = 0$ $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, para tal variação. Sendo $E(\varphi(0), p) = 1$, esta é uma variação normal preservando volume onde o vetor variação é fN.

Lema 3.3 *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade de Lorentz temporalmente orientada e $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço fechada. Considerando uma variação $X : M^n \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ de x, temos:*

(i) $\frac{dV}{dt} = \int_M f_t dM_t$;

(ii) $\frac{dA}{dt} = \int_M nH_t f_t dM_t$,

onde $H_t = H(t, \cdot)$ denota a curvatura média de M com respeito a métrica induzida por X_t.

Demonstração: **(i)** Fixe $p \in M$ e tome $e_1, ..., e_n, e_{n+1} = N$ um referencial ortonormal local em torno de $x(p)$. Então

$$X^*(d\overline{M}) = a(p, t) dM_t \wedge dt,$$

onde

$$\begin{aligned} a(p, t) &= X^*(d\overline{M})(e_1, ..., e_n, \frac{\partial}{\partial t}) \\ &= d\overline{M}(dX_t(e_1, ..., dX_t(e_n), \frac{\partial X}{\partial t}). \end{aligned}$$

Uma vez que $W = fN + W^T$, temos que

$$\begin{aligned} a(p, 0) &= d\overline{M}(dx(e_1), ..., dx(e_n), W) \\ &= f d\overline{M}(dx(e_1), ..., dx(e_n), N) \\ &= f dM(e_1, ..., e_n) = f vol(e_1, ..., e_n) \\ &= f. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}(0) &= \frac{d}{dt}(\int_{[0,t]\times M} a(p,t)dM_t\wedge dt)|_{t=0}\\ &= \int_M a(p,0)dM\\ &= \int_M f dM,\end{aligned}$$

portanto,

$$\int_M f_t dM_t = \frac{dV}{dt}.$$

(ii) O cálculo de $\frac{dA}{dt}$ é bem conhecido e é análago ao caso Riemanniana. Finalizaremos com a equação

$$\frac{dA}{dt}(0) = \int_M n\langle W, \overrightarrow{H_t}\rangle dM_t,$$

onde $\overrightarrow{H_t} = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n}(\overline{\nabla}_{e_i}e_i)^{\perp}$ é o vetor curvatura média. Temos que $\overrightarrow{H_t} = H_tN$ e usando que $W = f_tN + W^T$, obtemos que:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt}(0) &= \int_M \langle f_tN + W^T, H_tN\rangle dM_t\\ &= \int_M nf_tH_tdM_t + \int_M n\langle W_T, H_tN\rangle dM_t\\ &= \int_M nf_tH_tdM_t.\end{aligned}$$

Sejam $H_0 = H$, a curvatura média de M com respeito a $X_0 = x$ e $\overrightarrow{H} = \frac{1}{A}\int_M HdM$.

Denotando $H_0 = H$ e definindo $J : (-\varepsilon,\varepsilon) \to R$ por

$$J(t) = A(t) - nH_0V(t),$$

obtemos a seguinte

Proposição 3.1 *Seja $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *X possui curvatura média constante $H_0 \neq 0$.*

(ii) *Para cada domínio relativamente compacto $D \subset M$ com bordo diferenciável, e que cada variação preserva balanço de volume e fixa o bordo ∂D, $A'(0) = 0$.*

(iii) *Para cada $D \subset M$ como em (ii) e cada (não necessariamente preservando balanço de volume) variação que fixa o bordo ∂D, $J^{'}(0) = 0$.*

Demonstração: Considere os seguintes casos,

(i)⇒(iii) Se X tem curvatura média constante H_0, temos pela equação de Jacobi que

$$\begin{aligned} J^{'}(0) = A^{'}(0) - n\overline{H}_0 V^{'}(0) &= \frac{dA}{dt}(0) - n\overline{H}_0 \frac{dV}{dt}(0) \\ &= \int_M n\overline{H}_0 f dM - n\overline{H}_0 \int_M f dM \\ &= n\overline{H}_0 \int_M f dM - n\overline{H}_0 \int_M f dM \\ &= 0. \end{aligned}$$

(iii)⇒(ii) Se $J^{'}(0) = 0$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= J^{'}(0) = A^{'}(0) - n\overline{H}_0 V^{'}(0) \\ &\Rightarrow A^{'}(0) = n\overline{H}_0 V^{'}(0) = n\overline{H}_0 \int_M f dM = 0. \end{aligned}$$

(ii)⇒(i) Suponha, por absurdo, que existe $p \in D$ onde $(H - H_0)(p) \neq 0$, e assuma, sem perca de generalidade, que $(H - H_0)(p) > 0$. Sejam

$D^{+} = \{q \in D; (H - H_0)(q) > 0\}$ e $D^{-} = \{q \in D; (H - H_0)(q) < 0\}$

e φ e ψ funções reais diferenciáveis não negativas em $\overline{D}$ tais que as seguintes condições sejam satisfeitas:

$$p \in supp\varphi \subset D^{+},\ supp\psi \subset D^{-}, \int_D (\varphi + \psi)(H - H_0) dM = 0.$$

Sendo $\int_D (H - H_0) dM = 0$, uma tal escolha é claramente possível. Seja $f = (\varphi + \psi)(H - H_0)$. Então $f = 0$ em ∂D e $\int_D f dM = 0$. Pelo lema (3.2), obtemos uma variação que preserva balanço de volume, onde o campo variação é fN. Por hipótese temos que

$$0 = A^{'}_D(0) = -\int_D nHf dM,$$

para uma tal variação. Assim

$$0 = \int_D f(H - H_0) dM = \int_D (\varphi + \psi)(H - H_0)^2 dM > 0,$$

o que é um absurdo. Portanto $H = H_0$ em D. Usando (ii) temos para cada $D \subset M$, que $H = H_0$, concluímos a prova.

Desta forma, x possui curvatura média constante H_0 se, e somente se, $J^{'}(0) = 0$ para toda variação X de x.

Queremos estudar imersões $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ que maximizam J para toda variação X. Assim x deve ser um ponto crítico de J, e segue da discussão acima que a imersão x deve ter curvatura média constante. Portanto, anlisaremos se uma imersão crítica x é realmente um máximo de J, certamente a única dificuldade é estudar a segunda variação $J^{''}(0)$. Vamos iniciar com a seguinte:

Proposição 3.2 *Sejam $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço fechada de uma variedade de Lorentz temporalmente orientada $\overline{M}^{n+1}$ e $X : M^n \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma variação de x. Então,*

$$n\frac{\partial H}{\partial t}|_{t=0} = \triangle f_0 - \{\overline{Ric}(N, N) + \mid A \mid^2\} f_0 - n\langle\, W^T, \nabla H\,\rangle, \qquad (3.2)$$

onde $\overline{Ric}$ denota o tensor Ricci de $\overline{M}$, A a segunda forma fundamental de x com respeito a N, $H = -\frac{1}{n}tr(A)$ a curvatura média de x e ∇H o gradiente de H na métrica original de M.

Demonstração: Por simplicidade, nos cálculos seguintes usaremos o caso $t = 0$ sempre que for conveniente, não fazendo menção especial a este uso. Sejam $p \in M$ e $\{e_k\}$ um referencial móvel numa vizinhança $U \subset M$ de p, geodésico em p. Diagonalizando A em p, com $Ae_k = \lambda_k e_k$ para $1 \leq k \leq n$. Estendendo N e os $e_{k's}$ a uma vizinhança de $p \in \overline{M}$, tal que $\langle\, N, e_k\,\rangle = 0$ e $(\overline{\nabla}_N e_k)(p) = 0$. Então

$$\begin{aligned} n\frac{\partial H}{\partial t} &= -tr\frac{\partial A}{\partial t} \\ &= -\sum_k \langle\, \frac{\partial A}{\partial t} e_k, e_k\,\rangle \\ &= -\sum_k \langle\, (\overline{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} A) e_k, e_k\,\rangle \\ &= -\sum_k \{\langle\, \overline{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} A e_k, e_k\,\rangle - \langle\, A\overline{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} e_k, e_k\,\rangle\} \\ &= \sum_k \langle\, \overline{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} \overline{\nabla}_{e_k} N, e_k\,\rangle + \sum_k \langle\, A\overline{\nabla}_{e_k} \frac{\partial X}{\partial t}, e_k\,\rangle, \end{aligned}$$

usamos na última igualdade que $[\frac{\partial X}{\partial t}, e_k] = 0$ o que implica que $\overline{\nabla}_{e_k}\frac{\partial X}{\partial t} = \overline{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} e_k$ e assim obtemos a última igualdade. Agora fazendo

$$I = \sum_k \langle\, \overline{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} \overline{\nabla}_{e_k} N, e_k\,\rangle \text{ e } II = \textstyle\sum_k \langle\, A\overline{\nabla}_{e_k}\frac{\partial X}{\partial t}, e_k\,\rangle$$

temos

$$
\begin{aligned}
I &= \sum_k \{\langle\, \overline{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} \overline{\nabla}_{e_k} N - \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} N + \overline{\nabla}_{[e_k, \frac{\partial X}{\partial t}]} N, e_k \,\rangle + \langle\, \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} N, e_k \,\rangle \\
&= \sum_k \{\langle\, \overline{R}(e_k, \frac{\partial X}{\partial t}) N, e_k \,\rangle + \langle\, \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} N, e_k \,\rangle\} \\
&= -\overline{Ric}(\frac{\partial X}{\partial t}) + \sum_k \langle\, \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} N, e_k \,\rangle.
\end{aligned}
$$

Usando que $\{e_k\}$ é um referencial geodésico em p, segue que

$$
\langle\, \overline{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} N, \overline{\nabla}_{e_k} e_k \,\rangle = \langle\, \overline{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} N, N \,\rangle \langle\, \overline{\nabla}_{e_k} e_k, N \,\rangle = 0,
$$

em p. Mas

$$
\begin{aligned}
\langle\, \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} N, e_k \,\rangle &= e_k \langle\, \overline{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} N, e_k \,\rangle \\
&= e_k \frac{\partial X}{\partial t} \langle\, N, e_k \,\rangle - e_k \langle\, N, \overline{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} e_k \,\rangle \\
&= -e_k \langle\, N, \overline{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} e_k \,\rangle \\
&= -e_k \langle\, N, \overline{\nabla}_{e_k} \frac{\partial X}{\partial t} \,\rangle \\
&= -e_k e_k \langle\, N, \frac{\partial X}{\partial t} \,\rangle + e_k \langle\, \overline{\nabla}_{e_k} N, \frac{\partial X}{\partial t} \,\rangle \\
&= e_k e_k (f_0) + e_k \langle\, \overline{\nabla}_{e_k} N, f_o N + W^T \,\rangle \\
&= e_k e_k (f_0) + e_k \langle\, \overline{\nabla}_{e_k} N, W^T \,\rangle \\
&= e_k e_k (f_0) + \langle\, \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_k} N, W^T \,\rangle - \langle\, A e_k, \overline{\nabla}_{e_k} W^T \,\rangle.
\end{aligned}
$$

Usando a definição de II, temos

$$
\begin{aligned}
II &= \sum_k \langle\, A e_k, \overline{\nabla}_{e_k} \frac{\partial X}{\partial t} \,\rangle \\
&= \sum_k \langle\, A e_k, \overline{\nabla} e_k (f_0 N + W^T) \,\rangle \\
&= \sum_k \langle\, A e_k, f_0 \overline{\nabla} e_k N \,\rangle + \sum_k \langle\, A e_k, \overline{\nabla} e_k W^T \,\rangle \\
&= -f_0 \mid A \mid^2 + \sum_k \langle\, A e_k, \overline{\nabla} e_k W^T \,\rangle.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
n \frac{\partial X}{\partial t}|_{t=0} = -\overline{Ric}(W, N) + \triangle f_0 - f_0 \mid A \mid^2 + \sum \langle\, \overline{\nabla} e_k \overline{\nabla} e_k N, W^T \,\rangle. \tag{3.3}
$$

Agora, sendo $W = \sum_l^n \alpha_l e_l + f_0 N$ e $Ae_k = \sum_j h_{jk} e_j$, ficamos com

$$\begin{aligned}
\overline{Ric}(W,N) &= \sum_l \alpha_l \overline{Ric}(N,e_l) + f_0 \overline{Ric}(N,N) \\
&= \sum_{k,l} \alpha_l \langle \overline{R}(e_k,e_l)e_k, N \rangle + f_0 \overline{Ric}(N,N),
\end{aligned}$$

onde $\overline{R}$ estenda o tensor curvatura de $\overline{M}$. Como $(\overline{\nabla}_N e_k)(p) = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\langle \overline{R}(e_k,e_l)e_k, N \rangle_p &= \langle \overline{\nabla}_{e_l}\overline{\nabla}_{e_k} e_k - \overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_{e_l} e_k, N \rangle_p \\
&= e_l \langle \overline{\nabla}_{e_k} e_k, N \rangle_p - \langle \overline{\nabla}_{e_k} e_k, \overline{\nabla}_{e_l} N \rangle_p - e_k \langle \overline{\nabla}_{e_l} e_k, N \rangle_p \\
&= -e_l \langle e_k, \overline{\nabla}_{e_k} N \rangle_p + e_k \langle e_k, \overline{\nabla}_{e_l} N \rangle_p \\
&= e_l(h_{kk}) - e_k(h_{kl}),
\end{aligned}$$

de modo que

$$\overline{Ric}(W,N)_p = \sum_{k,l} \alpha_l e_l(h_{kk}) - \sum_{k,l} \alpha_l e_k(h_{kl}) + f_0 \overline{Ric}(N,N)_p. \tag{3.4}$$

Da mesma forma

$$\begin{aligned}
\alpha_l \langle \overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_{e_k} N, e_l \rangle &= \alpha_l \langle \nabla_{e_k}\overline{\nabla}_{e_k} N, e_l \rangle \\
&= -\alpha_l \langle \nabla_{e_k} Ae_k, e_l \rangle \\
&= -\alpha_l \sum_j \langle \nabla_{e_k} h_{kj} e_j, e_l \rangle \\
&= -\alpha_l \sum_j \{ e_k(h_{kj})\delta_{lj} + h_{kj} \langle \nabla_{e_k} e_j, e_l \rangle \} \\
&= -\alpha_l e_k(h_{kl}).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_k \langle \overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_{e_k} N, W^T \rangle = -\sum_{k,l} \alpha_l e_k(h_{Kl}). \tag{3.5}$$

Substituindo (3.4) e (3.5) em (3.3) temos

$$\begin{aligned}
n\frac{\partial H}{\partial t}|_{t=o} &= -\sum_{k,l} \alpha_l e_l(h_{kk}) - f_0 \overline{Ric}(N,N) + \Delta f_0 - f_0 \mid A \mid^2 \\
&= -W^T(nH) - f_0 \overline{Ric}(N,N) + \Delta f_0 - f_0 \mid A \mid^2 .
\end{aligned}$$

Proposição 3.3 *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade de Lorentz e $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço fechada com curvatura média constante H. Se*

$X : M^n \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ é uma variação de x, com $f_t(\cdot) = f(t, \cdot)$ como anteriormente, então

$$J''(0) = \int_M f_0\{\Delta f_0 - (\overline{Ric}(N,N) + \mid A \mid^2 f_0\} dM. \tag{3.6}$$

Demonstração: Como $H = H_0 = \overline{H_0}$, segue, pelo Lema 3.3, que

$$J'(t) = \int_M n(H_t - H) f_t dM_t.$$

Derivando novamente com respeito a t, ficamos com

$$\begin{aligned} J''(t)(f_0) &= \int_M n\frac{\partial H}{\partial t}|_{t=0} f_0 dM_0 + \int_M n(H_0 - H)\frac{\partial}{\partial t}(f_t dM_t)|_{t=0} \\ &= \int_M n\frac{\partial H}{\partial t}|_{t=0} f_0 dM. \end{aligned}$$

Assim, a relação (3.3) é agora dada por (3.6).

Segue, pelo resultado anterior que $J''(0) = J''(0)(f_0)$ depende somente de $f_0 \in C^\infty(M)$.

Definição 3.2 *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade de Lorentz e $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço fechada com curvatura média constante H. Dizemos que x é fortemente estável se, para toda função $g \in C^\infty(M)$, temos $J''(0)(g) \le 0$.*

Capítulo 4

Campo de Vetores Conformes

Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade de Lorentz. Um campo de vetores V em $\overline{M}^{n+1}$ é chamado *conforme* se $L_V g = 2\psi\langle , \rangle$ para alguma função $\psi \in C^\infty(\overline{M})$, onde L é a derivada de Lie de uma métrica Lorentziana de $\overline{M}$. A função ψ é chamada *fator conforme* de V. Uma vez que $L_V(X) = [V, X]$ para todo $X \in \chi(\overline{M})$, segue pelo caráter tensorial de L_V que $V \in \chi(\overline{M})$ é conforme se, e somente se,

$$\langle \overline{\nabla}_X V, Y \rangle + \langle X, \overline{\nabla}_Y V \rangle = 2\psi\langle X, Y \rangle, \tag{4.1}$$

para quaisquer $X, Y \in \chi(\overline{M})$. Em particular, dizemos que V é um campo de Killing relativamente a $\overline{g}$ se, e somente se, $\psi \equiv 0$.

Definição 4.1 *Uma variedade de Lorentz $\overline{M}^{n+1}$ possuindo um campo de vetores tipo-tempo conforme globalmente definido é chamada espaço-tempo conformemente estacionário.*

Proposição 4.1 *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade de Lorentz conformemente estacionária, com um campo de vetores conforme V tendo fator conforme dado por $\psi : \overline{M}^{n+1} \longrightarrow R$. Seja também $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço de $\overline{M}^{n+1}$, e N apontando para o futuro um campo unitário de vetores normais globalmente definido em M^n. Se $\eta = \langle V, N \rangle$, então:*

$$\Delta\eta = n\langle V, \nabla H \rangle + \eta\{\overline{Ric}(N, N) + | A |^2\} + n\{H\psi - N(\psi)\}, \tag{4.2}$$

onde $\overline{Ric}$ denota o tensor Ricci de $\overline{M}$, A a segunda forma fundamental de x com respeito a N, $H = \frac{-1}{n} tr(A)$ a curvatura média de x e ∇H o gradiente de H na métrica de M.

Demonstração: Fixe $p \in M$ e seja $\{e_k\}$ um referencial móvel ortonormal em M, geodésico em p. Estenda e_k a uma vizinhança de $p \in \overline{M}$, daí $(\overline{\nabla}_N e_k)(p) = 0$, e seja

$$V = \sum_l^n \alpha_l e_l - \eta N.$$

Então,

$$\begin{aligned} \eta = \langle V, N \rangle \Rightarrow e_k(\eta) &= e_k(\langle V, N \rangle) \\ &= \langle \overline{\nabla}_{e_k} V, N \rangle + \langle V, \overline{\nabla}_{e_k} N \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_{e_k} V, N \rangle - \langle V, A(e_k) \rangle. \end{aligned}$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned} \Delta\eta &= \sum_k e_k(e_k(\eta)) \\ &= \sum_k e_k(-\langle Ae_k, V \rangle + \langle N, \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle) \\ &= -\sum_k e_k \langle Ae_k, V \rangle + \sum_k e_k \langle N, \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle \\ &= -\sum_k \langle \overline{\nabla}_{e_k} Ae_k, V \rangle - \sum_k \langle Ae_k, \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle \\ &+ \sum_k \langle \overline{\nabla}_{e_k} N, \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle + \sum_k \langle N, \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle \\ &= -\sum_k \langle \overline{\nabla}_{e_k} Ae_k, V \rangle - \sum_k \langle Ae_k, \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle - \sum_k \langle Ae_k, \overline{\nabla}_{e_k} N \rangle \\ &+ \sum_k \langle N, \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle \\ &= -\sum_k \langle \overline{\nabla}_{e_k} Ae_k, V \rangle - 2\sum_k \langle Ae_k, \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle + \sum_k \langle N, \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta\eta = -\sum_k \langle \overline{\nabla}_{e_k} Ae_k, V \rangle - 2\sum_k \langle Ae_k, \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle + \sum_k \langle N, \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle. \quad (4.3)$$

Agora derivando $Ae_k = \sum_l h_{kl}e_l$ com respeito a e_k e aplicando em p, temos

$$\begin{aligned}
\sum_k \langle \overline{\nabla}_{e_k} A_{e_k}, V \rangle &= \sum_k \langle \overline{\nabla}_{e_k} (\sum_l h_{kl} e_l), V \rangle \\
&= \sum_{k,l} e_k(h_{kl}) \langle e_l, V \rangle + \sum_{k,l} (h_{kl}) \langle \overline{\nabla}_{e_k} e_l, V \rangle \\
&= \sum_{k,l} \alpha_l e_k(h_{kl}) + \sum_{k,l} (h_{kl}) \langle \overline{\nabla}_{e_k} e_l, \sum_l \alpha_l e_l - \eta N \rangle \\
&= \sum_{k,l} \alpha_l e_k(h_{kl}) + \sum_{k,l} (h_{kl}) \langle \overline{\nabla}_{e_k} e_l, \alpha_l e_l \rangle - \sum_{k,l} (h_{kl}) \langle \overline{\nabla}_{e_k} e_l, \eta N \rangle \\
&= \sum_{k,l} \alpha_l e_k(h_{kl}) - \sum_{k,l} (h_{kl}) \langle \overline{\nabla}_{e_k} e_l, N \rangle \langle V, N \rangle \\
&= \sum_{k,l} \alpha_l e_k(h_{kl}) - \sum_{k,l} (h_{kl})(h_{kl}) \eta \\
&= \sum_{k,l} \alpha_l e_l(h_{kl}) - \sum_{k,l} (h_{kl})^2 \eta \\
&= \sum_{k,l} e_k(h_{kl}) - \eta \mid A \mid^2 . \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Onde utilizamos que

$$\begin{aligned}
e_k(\eta) &= e_k(\langle V, N \rangle) \\
&= \langle \overline{\nabla}_{e_k} V, N \rangle - \langle V, Ae_k \rangle.
\end{aligned}$$

Tome $v = e_l$, obtemos então que

$$\begin{aligned}
e_k(\langle e_l, N \rangle) &= \langle \overline{\nabla}_{e_k} e_l, N \rangle - \langle e_l, Ae_k \rangle \\
&\Rightarrow \langle \overline{\nabla}_{e_k} e_l, N \rangle = \langle e_l, Ae_k \rangle.
\end{aligned}$$

Além do mais,

$$Ae_k = \sum_l h_{kl} e_l \Rightarrow \langle Ae_k, e_l \rangle = h_{kl}.$$

Voltando a demonstração, vamos requerer ainda mais que $\{e_k\}$ é um referencial geodésico em p que diagonaliza A, isto é, $Ae_k = \lambda_k e_k$ em p, deste modo

$$\begin{aligned}
\sum_k \langle Ae_k, \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle &= \sum_k \lambda_k \langle e_k, \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle \\
&= \sum_k \lambda_k \psi \\
&= -nH\psi. \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Pois $H = \frac{-1}{n} tr(A)$, e $-nH = tr(A) = \sum_k \lambda_k$.

Agora, por (4.1), substituindo $X = Y = e_k$, temos

$$\langle \overline{\nabla}_{e_k} V, e_k \rangle + \langle e_k, \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle = 2\psi \langle e_k, e_k \rangle \Rightarrow \langle \overline{\nabla}_{e_k} V, e_k \rangle = \psi.$$

Observe que

$$\langle \overline{\nabla}_N V, e_k \rangle + \langle N, \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle = 2\psi \langle N, e_k \rangle = 0,$$

para todo k.

Derivando a relação acima na direção e_k, ficamos com

$$\begin{aligned} 0 &= e_k(\langle \overline{\nabla}_N V, e_k \rangle + \langle N, \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle) \\ &= \langle \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_N V, e_k \rangle + \langle \overline{\nabla}_N V, \overline{\nabla}_{e_k} e_k \rangle + \langle \overline{\nabla}_{e_k} N, \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle + \langle N, \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle, \end{aligned}$$

Onde, em p, temos

$$\begin{aligned} \langle \overline{\nabla}_N V, \overline{\nabla}_{e_k} e_k \rangle &= \langle \overline{\nabla}_N V, -\overline{\nabla}_{e_k} e_k \langle N, N \rangle \rangle \\ &= -\langle \overline{\nabla}_N V, \langle \overline{\nabla}_{e_k} e_k, N \rangle N \rangle \\ &= -\langle \overline{\nabla}_N V, \lambda_k N \rangle \\ &= -\lambda_k \psi \langle N, N \rangle \\ &= \lambda_k \psi. \end{aligned}$$

Afinal,

$$\begin{aligned} \langle \overline{\nabla}_X V, Y \rangle + \langle X, \overline{\nabla}_Y V \rangle &= 2\psi \langle X, Y \rangle \\ &\Rightarrow \langle \overline{\nabla}_N V, N \rangle = \psi \langle N, N \rangle. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \langle \overline{\nabla}_{e_k} N, \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle &= \langle -Ae_k, \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle \\ &= \langle -\lambda_k e_k, \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle \\ &= -\lambda_k \langle e_k, \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle \\ &= -\lambda_k \psi. \end{aligned}$$

Assim, obtemos a seguinte expressão

$$\langle \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_N V, e_k \rangle + \langle N, \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_k} V \rangle = 0. \tag{4.6}$$

Sendo

$$[N, e_k](p) = (\overline{\nabla}_N e_k)(p) - (\overline{\nabla}_{e_k} N)(p) = \lambda_k e_k(p).$$

Segue de (4.6) que

$$\begin{aligned}
\langle \overline{R}(N,e_k)V,e_k \rangle_p &= \langle \overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_N V - \overline{\nabla}_N\overline{\nabla}_{e_k}V + \overline{\nabla}_{[N,e_k]}V, e_k \rangle_p \\
&= \langle \overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_N V, e_k \rangle_p - \langle \overline{\nabla}_N\overline{\nabla}_{e_k}V, e_k \rangle_p + \langle \overline{\nabla}_{[N,e_k]}V, e_k \rangle_p \\
&= \langle \overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_N V, e_k \rangle_p - \langle \overline{\nabla}_N\overline{\nabla}_{e_k}V, e_k \rangle_p \\
&- \langle \overline{\nabla}_{e_k}V, \overline{\nabla}_N e_k \rangle_p + \langle \overline{\nabla}_{\lambda_k e_k}V, e_k \rangle_p \\
&= \langle \overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_N V, e_k \rangle_p - N\langle \overline{\nabla}_{e_k}V, e_k \rangle_p + \lambda_k\langle \overline{\nabla}_{e_k}V, e_k \rangle_p \\
&= -\langle N, \overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_{e_k}V \rangle_p - N(\psi) + \lambda_k\psi,
\end{aligned}$$

mas

$$\sum_k \langle N, \overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_{e_k}V \rangle_p = -nN(\psi) - nH\psi - \overline{Ric}(N,V)_p. \tag{4.7}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\overline{Ric}(N,V) &= \sum_l \alpha_l \overline{Ric}(N,e_l) - \eta\overline{Ric}(N,N) \\
&= \sum_{k,l} \alpha_l \langle \overline{R}(e_k,e_l)e_k, N \rangle - \eta\overline{Ric}(N,N)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \overline{R}(e_k,e_l)e_k, N \rangle_p &= \langle \overline{\nabla}_{e_l}\overline{\nabla}_{e_k}e_k - \overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_{e_l}e_k, N \rangle_p \\
&= \langle \overline{\nabla}_{e_l}\overline{\nabla}_{e_k}e_k, N \rangle_p - \langle \overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_{e_l}e_k, N \rangle_p \\
&= e_l\langle \overline{\nabla}_{e_k}e_k, N \rangle_p - \langle \overline{\nabla}_{e_k}e_k, \overline{\nabla}_{e_l}N \rangle_p - e_k\langle \overline{\nabla}_{e_l}e_k, N \rangle_p \\
&+ \langle \overline{\nabla}_{e_l}e_k, \overline{\nabla}_{e_k}N \rangle_p \\
&= -e_l\langle e_k, \overline{\nabla}_{e_k}N \rangle_p + e_k\langle e_k, \overline{\nabla}_{e_l}N \rangle_p \\
&= e_l(h_{kk}) - e_k(H_{kl}).
\end{aligned}$$

Daí

$$\overline{Ric}(N,V)_p = \sum_{k,l} \alpha_l e_l(h_{kk}) - \sum_{k,l} \alpha_l e_k(h_{kl}) - \eta\overline{Ric}(N,N)_p.$$

Segue de (4.7) que

$$\sum_k \langle N, \overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_{e_k}V \rangle_p = -nN(\psi) - nH\psi + V^T(nH) + \sum_{k,l} \alpha_l e_k(h_{kl}) + \eta\overline{Ric}(N,N). \tag{4.8}$$

Por fim, substituindo (4.4),(4.5) e (4.8) em (4.3), obtemos a fórmula (4.2) procurada.

Capítulo 5

Aplicações

Uma classe particular de espaço-tempo conformemente estacionário é o espaço-tempo *Robertson-Walker Generalizado* [1], que é por definição, produto warped $\overline{M}^{n+1} = I \times_\phi F^n$, onde $I \subseteq R$ é um intervalo com métrica $-dt^2$, F^n é uma variedade Riemanniana de dimensional n e $\phi : I \longrightarrow R$ é uma função positiva e diferenciável. Para tal espaço, seja $\pi_I : \overline{M}^{n+1} \longrightarrow I$ a projeção canônica no primeiro fator. Então o campo de vetores

$$V = (\phi \circ \pi_I)\frac{\partial}{\partial_t},$$

é conforme, tipo-tempo e fechado (no sentido que sua 1-forma dual é fechada), com fator conforme $\psi = \phi^{'}$, onde o $(')$ denota a diferencial com respeito a t. Além disso, de acordo com [13], para $t_0 \in I$, orientando a folha (tipo-espaço) $M^n_{t_0} = \{t_0\} \times F^n$ por um campo de vetores N normal unitário apontando para o futuro, segue que M_{t_0} possui curvatura média

$$H = \frac{\phi^{'}(t_0)}{\phi(t_0)}.$$

Se $\overline{M}^{n+1} = I \times_\phi F^n$ é um espaço-tempo Robertson-Walker generalizado, e $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ é uma hipersuperfície tipo-espaço completa de $\overline{M}^{n+1}$ tal que $\psi \circ \pi_I$ é limitada em M, então $\pi_F|_M : M^n \longrightarrow F^n$ é necessariamente uma aplicação recobrimento [1]. Em particular, se M^n é fechada, então pelo Lema 2.1 F^n é também fechada.

Corolário 5.1 *Sejam $\overline{M}^{n+1} = I \times_\phi F^n$ um espaço-tempo Robertson-Walker generalizado e $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ é uma hipersuperfície tipo-espaço de $\overline{M}^{n+1}$, tendo curvatura média constante H. Seja também N um campo de vetores* *normal, unitário, apontando para o futuro, globalmente definido em M^n. Se $V = (\phi \circ \pi_I)\dfrac{\partial}{\partial t}$ e $\eta = \langle V, N \rangle$, então*

$$\Delta \eta = \{\overline{Ric}(N,N) + \mid A \mid^2\}\eta + n\{H\phi' + \phi''\langle N, \frac{\partial}{\partial t}\rangle\}, \tag{5.1}$$

onde, por abuso de notação, vamos considerar $\phi' = \phi' \circ ((\pi_I)|_M)$ e também $\phi'' = \phi'' \circ ((\pi_I)|_M)$.

Demonstração: Seja $\phi = \phi \circ ((\pi_I)|_M)$, onde

$$\begin{aligned} \eta &= \langle V, N \rangle \\ &= \langle (\phi \circ \pi_I)\frac{\partial}{\partial t}, N \rangle \\ &= \langle \phi \frac{\partial}{\partial t}, N \rangle \\ &= \phi \langle N, \frac{\partial}{\partial t} \rangle. \end{aligned}$$

Agora por (4.2) e de $H = \dfrac{\phi'(t_0)}{\phi(t_0)}$, temos que

$$\begin{aligned} \Delta \eta &= n\langle V, \nabla H \rangle + \eta\{\overline{Ric}(N,N) + \mid A \mid^2\} + n\{H\psi - N(\psi)\} \\ &= n\langle V, \nabla H \rangle + \eta\{\overline{Ric}(N,N) + \mid A \mid^2\} + n\{H\phi' - N(\phi')\} \\ &= n\langle V, \frac{\phi''(t_0)\phi(t_0) - \phi'(t_0)\phi'(t_0)}{\phi(t_0)^2} \rangle + \eta\{\overline{Ric}(N,N) + \mid A \mid^2\} + n\{H\phi' - N(\phi')\} \\ &= \eta\{\overline{Ric}(N,N) + \mid A \mid^2\} + n\{H\phi' - N(\phi')\}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}\phi' &= -\langle \overline{\nabla}\phi', \frac{\partial}{\partial t} \rangle \frac{\partial}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}(\phi')\frac{\partial}{\partial t} \\ &= -\phi'' \frac{\partial}{\partial t}, \end{aligned}$$

da definição de gradiente. Temos também que

$$\begin{aligned} N(\phi') &= \langle N, \overline{\nabla}\phi' \rangle \\ &= -\langle N, \phi'' \frac{\partial}{\partial t} \rangle \\ &= -\phi'' \langle N, \frac{\partial}{\partial t} \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta \eta = \{\overline{Ric}(N,N) + \mid A \mid^2\}\eta + n\{H\phi' + \phi''\langle N, \frac{\partial}{\partial t}\rangle\}.$$

Agora podemos provar o resultado principal,

Teorema 5.1 *Sejam* $\overline{M}^{n+1} = I \times_\phi F^n$ *um espaço-tempo Robertson-Walker generalizado, e* $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço fechada de* $\overline{M}^{n+1}$ *com curvatura média constante* H. *Se a função warping* ϕ *satisfaz* $\phi^{''} \geq max\{H\phi^{'}, 0\}$ *e* M^n *é fortemente estável, então* M^n *é maximal ou uma folha tipo-espaço* $M_{t_0} = \{t_0\} \times F$ *para algum* $t_0 \in I$.

Demonstração: Como M^n é fortemente estável, temos

$$0 \geq J^{''}(0)(g) = \int_M g\{\Delta g - (\overline{Ric}(N,N) + \mid A \mid^2)g\}dM,$$

para toda função $g \in C^\infty(M)$. Em particular, para $\eta = \langle V, N\rangle$, onde $V = (\phi \circ \pi_I)\dfrac{\partial}{\partial t}$, e $g = -\eta = -\langle V, N\rangle$.

Logo,

$$\Delta g = \{\overline{Ric}(N,N) + \mid A \mid^2\}g - n\{H\phi^{'} + \phi^{''}\langle N, \frac{\partial}{\partial t}\rangle\}.$$

Portando, substituindo a expressão acima na fórmula para $J^{''}(0)(g)$, temos

$$\begin{aligned}
0 &\geq \int_M g\{\Delta g - (\overline{Ric}(N,N) + \mid A \mid^2)g\}dM \\
&\geq \int_M g\{(\overline{Ric}(N,N) + \mid A \mid^2)g - n\{H\phi^{'} + \phi^{''}\langle N, \frac{\partial}{\partial t}\rangle\} - (\overline{Ric}(N,N) + \mid A \mid^2)g\}dM \\
&\geq \int_M -gn\{H\phi^{'} + \phi^{''}\langle N, \frac{\partial}{\partial t}\rangle\}dM \\
&\geq \int_M n\phi\langle N, \frac{\partial}{\partial t}\rangle\{H\phi^{'} + \phi^{''}\langle N, \frac{\partial}{\partial t}\rangle\}dM \\
&\geq \int_M \phi\langle N, \frac{\partial}{\partial t}\rangle\{H\phi^{'} + \phi^{''}\langle N, \frac{\partial}{\partial t}\rangle\}dM.
\end{aligned}$$

Sendo θ o ângulo hiperbólico entre N e $\dfrac{\partial}{\partial t}$, segue pela desigualdade inversa de Cauchy-Schwarz que $\cosh\theta \geq -\langle N, \dfrac{\partial}{\partial t}\rangle$, com $\cosh\theta \equiv 1$ se, e somente se, N e $\dfrac{\partial}{\partial t}$ são colineares em todo ponto, isto é, se, e somente se, M^n é uma folha tipo-espaço M_{t_0} para algum $t_0 \in I$. Daí,

$$0 \geq \int_M \phi cosh\theta\{-H\phi^{'} + \phi^{''}cosh\theta\}dM.$$

Note que $-H\phi^{'} + \phi^{''}cosh\theta \geq -\phi^{''} + \phi^{''}cosh\theta$, pois da hipótese que $\phi^{''} \geq H\phi^{'}$ obtemos

$$\phi cosh\theta(-H\phi^{'} + \phi^{''}cosh\theta) \geq \phi\phi^{''}cosh\theta(cosh\theta - 1).$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
0 &\geq \int_M \phi cosh\theta(-H\phi^{'} + \phi^{''} cosh\theta) dM \\
&\geq \int_M \phi\phi^{''} cosh\theta(cosh\theta - 1) dM \geq 0,
\end{aligned}
$$

e, assim,

$$\phi^{''}(cosh\theta - 1) = 0$$

e

$$\phi^{''} = H\phi^{'},$$

em M.

Se, para algum $p \in M$, temos $\phi^{''}(p) = 0$, então $\phi^{'} H = 0$ em p. Se $H \neq 0$, então $\phi^{'}(p) = 0$. Mas, se isto ocorre, então a Proposição 7.35 [12] garante que

$$\overline{\nabla}_V \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\phi^{'}}{\phi} V = 0,$$

em p para algum V, e M é totalmente geodésica em p. Em particular, $H = 0$, o que é uma contradição.

Portanto, $\phi^{''}(p) = 0$ para algum $p \in M$, e M é maximal, ou $\phi^{''} \neq 0$ em todo ponto de M, donde $\cosh\theta = 1$ sempre, e M é uma folha umbílica tal que $\phi^{''} = H\phi^{'}$.

Se a folha M_{t_0} possui curvatura média $H = \dfrac{\phi^{'}(t_0)}{\phi(t_0)}$ com respeito a $N = \dfrac{\partial}{\partial t}$, é imediato que podemos tomar $\phi(t) = \cosh t$ ou $\phi(t) = e^t$ no teorema. Em particular o espaço de Sitter $R \times_{\cosh t} S^n$ satisfaz as hipóteses do nosso teorema.

Bibliografia

[1] L.J. Alías, A. Brasil Jr., A.G. Colares, *Integral formulae for spacelike hypersurfaces in conformally stationary spacetime and applications*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 46 (2003) 465-488.

[2] L.J. Alías, S. Montiel, *Uniqueness of spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in generalized Robertson-Walker spacetime*, in: Procedings of the Internacional Conference held to honour the 60th birthday of A.M. Navieira, World Scientific, 2001, 59-69.

[3] J.L.M. Barbosa, M. do Carmo, *Stability of hypersurfaces with constante mean curvature*, Math. Z. 185 (1984) 339-353.

[4] J.L.M. Barbosa, M do Carmo, J. Eschenburg, *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature in Riemannian Manifolds*, Math. Z. 197 (1988) 123-138.

[5] J.L.M. Barbosa, V. Oliker, *Spacelike hipersurfaces with constante mean curvature in Lorentz spaces*, Matem. Contemporânea 4 (1993) 27-44.

[6] A. Barros, A. Brasil, A, Caminha, *Stability of spacelike hypersurfaces in foliated spacetimes*, Differential Geometry and Its Applications, v.26, (2008) 357-365.

[7] M. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Coleção Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[8] M. do Carmo, *O Método do Referencial Móvel*, III Escola Latino-Americana de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro,1976.

[9] H. de Lima, *Formulas Integrais Tipo-Minkoviski para Hipersuperfícies Tipo-Espaço em Variedade de Lorentz Conformente Estacionárias e*

Aplicações, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, 2002.

[10] H. de Lima, *Hipersuperfícies Tipo-Espaço com Curvatura de Ordem Superior Constante*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Ceará, 2007.

[11] S. Fornari, J. Ripoll,*Killing fields, mean curvature, translation maps*, Illinois J. Math. 48 (2004) 1385-1403.

[12] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, London, 1983.

[13] S. Montiel, *Uniqueness of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in foliated spacetime*, Math. Ann. 314 (1999) 529-553.