UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Hipersuperfícies com r-ésima Curvatura Média Constante Positiva em $M^m \times \mathbb{R}$

Antônia Jocivania Pinheiro

FORTALEZA- CE
MARÇO 2010

Antônia Jocivania Pinheiro

Hipersuperfícies com r-ésima Curvatura Média Constante Positiva em $M^m \times \mathbb{R}$

Tese submetida a Coordenaçao do curso de pós-Graduação em matemática da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria diferencial

Orientador: Antônio Gervásio Colares

FORTALEZA- CE

MARÇO 2010

.

p718h	Pinheiro, Antônia Jocivania.
	Hipersuperfícies com r-ésima Curvatura Média Constante Positiva em $M^m \times \mathbb{R}$.
	50p
	Orientador: Prof. Antônio Gervasio Colares.
	Dissertação (Mestrado)- Universidade Federal do Ceará. departamento de Matemática, 2010.
	1- Geometria Diferencial.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado força, saúde, coragem e determinação diante de tantas dificuldades que a vida nos oferece.

Aos meus pais José e Risoneide pelo amor, carinho, dedicação e por que nunca mediram esforços para que eu continuasse minha jornada acadêmica. Bem como as minhas irmãs Rogeria, Rozângela, Rosimeire e Jocineiva pelo carinho que sempre tiveram por mim e sempre compreenderam a minha ausência. Não podendo esquecer meus sobrinhos Jania Robys, Hugo, Nagela, Stefany e Rebeca. Obrigada Senhor pela família que tenho.

A todos meus tios e primos que de algum modo me deram força para esta vitória. Em especial, agradeço a Rosilene e Aneildo os quais estiveram sempre dispostos a me ajudar.

Ao meu namorado Tharlenton, que com determinação, amor e carinho esteve sempre ao meu lado me dando força e incentivo.

A todos professores e colegas da graduação em matemática da UFC. Em especial, aos professores Afonso, Alexandre, Fernando Pimentel, Alessandro Wilk e Ênio pela motivação, aos colegas (amigos) Eduardo, Horácio, Rilson e Cristina pelo companheirismo.

A todos professores da pós-graduação e colegas do mestrado em matemática da UFC. Em especial, aos professores Abdênago e Fabio por todo tempo que disponibilizaram a me ajudar e aos colegas(amigos) Shirley, Valéria, Cristiane, Kiara, Priscila,Fernando, Davi e Tiago por toda ajuda e pelos momentos de alegria que me proporcionaram.

Ao meu orientador, Professor Gervásio Colares, pela sua orientação, confiança, determinação e por acreditar que eu seria capaz de fazer este trabalho. Agradeço também por me motivar a continuar na busca pelo conhecimento.

Ao professor Gesário que cuida de mim não só como aluna, mas como filha.

Obrigada professor, sou muito grata por tudo que tem feito por mim. Não posso esquecer do meu conselheiro e amigo, professor Valter pelas longas conversas que tivemos, sempre me dizendo o que devo ou não fazer.

A secretária da Pós-Graduação, Andrea, por esta sempre disposta a ajudar, mesmo estando sempre muito ocupada. Aos funcionários da biblioteca Fernanda, Erivan, Rocilda e Junior pelo carinho.

Aos professores Abdênago e Sebastião pelas sugestões, correções e dicas de escrita, bem como por concordarem em participar da banca.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq pelo financiamento da bolça de mestrado.

Por fim, agradeço a todos que de alguma maneira contribuiram para que esse momento se concretizasse. Obrigada, vocês fizeram e fazem a diferença em minha vida.

Resumo

Neste trabalho, definimos as transformações de Newton e provamos algumas propriedades relacionadas a elas. Fizemos um estudo sobre operador elíptico e usamos isso para provar que dadas algumas condições para a curvatura seccional de uma variedade riemanniana M, conseguimos majorar a função altura (em modulo) de um gráfico vertical compacto imerso em MxR.

Abstract

In this paper, we define the transformations of Newton and prove some properties related to them. We did a study on elliptic operator and use it to prove that given some conditions for the sectional curvature of a riemannian manifold M,able function of increasing height (in modulus) of a graph vertical compact immersed in MXR.

Sumário

1 Preliminares **4**

1.1 Fatos Básicos 4

1.2 Imersões Isométricas 11

1.3 Variedade Produto 15

2 Transformação de Newton e Operador L_r **17**

2.1 As Transformações de Newton 17

2.2 As Propriedades Elípticas do Operador L_r 28

3 Estimativa de Altura de Gráficos Verticais e Aplicação **32**

Introdução

Nesta dissertação seguiremos o artigo de Xu Cheng e Harold Rosenberg [1].

Se $\overline{M}^{m+1}$ é uma variedade Riemanniana orientada $(m+1)$-dimensional e Σ^m é uma hipersuperfície em $\overline{M}$, a r-ésima curvatura média de Σ, denotada por H_r, é a média aritmética das r-ésimas funções simétricas da segunda forma fundamental(veja definição 2.1.) As hipersuperfícies com r-ésima curvatura média constante incluem também as de curvatura média constante , e as de curvaturas de Gauss-Kronecker constantes.
Neste trabalho, consideraremos hipersuperfícies orientáveis em uma variedade produto orientada $(m+1)$-dimensional $M \times \mathbb{R}$ com r-ésima curvatura média constante positiva. Aqui M é uma variedade Riemanniana m-dimensional com curvatura seccional limitada. Os modelos típicos são quando $M = \mathbb{R}^m, \mathbb{S}^m, \mathbb{H}^m(-1)$. Obteremos estimativas da altura para tais gráficos verticais compacto com bordo em $M \times \{0\}$. Nós provaremos que,

Teorema 0.1 *(Teo. 3.4)Seja M uma variedade Riemanniana orientada m-dimensional. Seja Σ um gráfico vertical compacto na variedade produto $M \times \mathbb{R}$ com bordo em $M \times \{0\}$ e com H_r constante positivo, para algum $1 \leq r \leq m$. Denotemos $h : \Sigma \to \mathbb{R}$ a função altura de Σ.*

(i) Se a curvatura seccional de M satisfaz $K \geq 0$, então em Σ,

$$|h| \leq H_r^{-\frac{1}{r}}.$$

(ii) Quando $r = 2$, se a curvatura seccional de M satisfaz $K \geq -\tau(\tau > 0)$, e $H_2 > \tau$, então em Σ,

$$|h| \leq \frac{\sqrt{H_2}}{H_2 - \tau}.$$

(iii) Quando $r = 1$, se a curvatura seccional de M satisfaz $K \geq -\tau(\tau > 0)$, e $H_1^2 > \frac{m-1}{m}\tau$, então em Σ

$$|h| \leq \frac{\sqrt{H_1}}{H_1^2 - \frac{m-1}{m}\tau}.$$

Como aplicação do Teorema 0.1 daremos uma estimativa do diâmetro vertical de hipersuperfícies compactas em $M \times \mathbb{R}$ com H_r constante positiva, sobre as mesmas hipóteses de curvatura do Teorema 0.1. Mais precisamente, provamos o

Teorema 0.2 *Seja M uma variedade Riemanniana m-dimensional e seja Σ uma hipersuperfície orientável compacta imersa em $M \times \mathbb{R}$ com $H_r > 0$ constante, para algum $1 \leq r \leq m$. Então Σ é simétrica com relação a superfície horizontal $M \times \{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Além disso,*

(i) Se a curvatura seccional de M safisfaz $K \geq 0$, então o diâmetro vertical de Σ não é maior que $2H_r^{-\frac{1}{r}}$;

(ii) Quando $r = 2$, se a curvatura seccional de M satisfaz $K \geq -\tau$ e $H_2 > \tau(\tau > 0)$, então o diâmetro vertical de Σ não é maior que $\frac{2\sqrt{H_2}}{H_2-\tau}$.

(iii) Quando $r = 1$, se a curvatura seccional de M satisfaz $K \geq -\tau(\tau > 0)$, e $H_1^2 > \frac{m-1}{m}\tau$, então o diâmetro vertical de Σ não é maior que $\frac{2H_1}{H_1^2 - \frac{m-1}{m}\tau}$.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Fatos Básicos

Definição 1.1 *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$, onde T_pM é o plano tangente a M no ponto p. O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \longrightarrow TM$ é diferenciável, onde TM é o fibrado tangente de M. O conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em M será denotados por $\mathfrak{X}(M)$.*

É conveniente pensar em um campo de vetores como uma aplicação
$X : \mathfrak{D}(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$, do conjunto $\mathfrak{D}(M)$ das funções diferenciáveis em M no conjunto $\mathfrak{F}(M)$ das funções em M, definida por $Xf(p) = df_p(X(p))$. Neste contexto X é diferenciável se, e somente se, $Xf \in \mathfrak{D}(M)$ para todo $f \in \mathfrak{D}(M)$.

Definição 1.2 *Uma métrica Riemanniana em uma variedade M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle , \rangle_p$ no espaço tangente T_pM que varia diferenciavelmente, isto é, se $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $x(x_1, x_2, \dots x_n) = q \in x(U)$*

e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, *então*

$$g_{ij}(x_1, x_2, \ldots x_n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q$$

é uma função diferenciável em U, *para todo* $i, j = 1, \ldots, n$. *As funções* $g_{ij} = g_{ji}$ *são chamadas expressão da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas* $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$. *Uma variedade com a métrica Riemanniana chama-se variedade Riemanniana.*

Definição 1.3 *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M *é uma aplicação* $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, *que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

(ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

(iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f, g \in \mathfrak{D}(M)$.

Definição 1.4 *Dizemos que uma conexão* ∇ *em uma variedade Riemanniana* M *é compatível com a métrica se, para todo* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

E dizemos que ∇ *é simétrica se, para todo* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

Teorema 1.1 (Teorema de Levi-Civita): *Dada uma variedade Riemanniana* M*, existe uma única conexão afim* ∇ *em* M *simétrica e compatível com a métrica de* M.

A conexão dada pelo teorema acima é denominada conexão de Levi-Civita ou conexão Riemanniana de M.

Definição 1.5 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é a aplicação*

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M),$$

dada por,

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Proposição 1.1 *Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2}}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Definição 1.6 *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_pM$ o numero real $K(\sigma) = K(x,y)$, onde $\{x,y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamado curvatura seccional de σ em p.*

Definição 1.7 *Um tensor T de ordem r em uma variedade Riemanniana é uma aplicação multilinear*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{r fatores} \longrightarrow \mathfrak{D}(M).$$

Isso quer dizer que dados $X_1, X_2, \ldots, X_r \in \mathfrak{X}(M), T(X_1, \ldots, X_r)$ é uma função diferenciável em M, e que T é linear em cada argumento.

Definição 1.8 *Para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$ a derivada covariante é definida por*

$$\nabla_Z T(X_1, \ldots, X_r) = \nabla T(X_1, \ldots, X_r, Z),$$

onde ∇T é a diferencial covariante definida por

$$\begin{aligned} \nabla T(X_1, \ldots, X_r, Z) &= Z(T(X_1, \ldots, X_r)) - T(\nabla_Z X_1, X_2, \ldots, X_r) \ldots \\ &- T(X_1, \ldots, X_{r-1}, \nabla_Z X_r). \end{aligned}$$

Definição 1.9 *Dizemos que um conjunto de campos de vetores* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *é um referencial ortonormal local em* M, *quando em cada ponto* $p \in M$, $\{e_i(p)\}$ *é uma base ortonormal do plano tangente* T_pM.

Definição 1.10 *Dado* $p \in M$, *existe uma vizinhança* $U \subset M$ *de* p *e campos de vetores* $E_1, \ldots, E_n$ *em* $\mathfrak{X}(U)$, *ortonormais em cada ponto de* U, *tais que* $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$. *Uma tal família* $E_1, \ldots, E_n$ *de campos de vetores é chamada um referencial(local) geodésico em* p.

Definição 1.11 *Seja* M *uma variedade Riemanniana e* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função diferenciável. Definimos o gradiente de* f, *denotado por* $grad\, f \in \mathfrak{X}(M)$, *o único campo vetorial sobre* M *tal que*

$$\langle grad\, f, X\rangle = df(X),\ \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Proposição 1.2 *Se* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *é um referencial ortonormal local em* M, *então,*

$$grad\, f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i.$$

Demonstração: De fato, sendo $grad\, f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, temos que

$$e_j(f) = \langle grad\, f, e_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, e_j \right\rangle = \alpha_j$$

Logo,

$$grad\, f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i.$$

Definição 1.12 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um domínio e* $a : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{n^2}$ *uma matriz, dizemos então que* a *é positiva definida se para quase todo* $x \in \overline{\Omega}$ *tivermos*

$$\xi^{\top} a(x)\xi > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \xi \neq 0.$$

Lema 1.2 *Se $c_0x^m + c_1x^{m-1}y + \ldots + c_my^m = 0$ tem todas suas raizes $\frac{x}{y}$ reais, então o mesmo é verdade para todas as equações não identicas obtidas pela sua diferenciação parcial com respeito a x e y. Além disso, se E é qualquer uma dessas equações, e tem uma raiz α, então α é também uma raiz, de multiplicidade maior que 1, da equação cujo E foi derivado por diferenciação.*

A demonstração deste lema encontra-se em [7].

Proposição 1.3 *Se $a_1, \ldots, a_n$ são n números reais positivos ou negativos, $P_0 = 1$, e P_r é a média aritmétrica dos produtos de r $a's$ diferentes, então $P_{r-1}P_{r+1} \leq P_r^2$ para $r = 1, \ldots, n-1$, a menos que todos os $a's$ sejam iguais.*

Demonstração: Seja

$$f(x,y) = (x + a_1y)\ldots(x + a_ny) = P_0x^n + \binom{n}{1}P_1x^{n-1}y + \ldots + P_ny^n.$$

Como $a_i \neq 0$, $\forall\ i = 1, \ldots, n$ temos $P_n = \sum_{i_1 < \ldots < i_n} a_{i_1}\ldots a_{i_n} = a_1\ldots a_n \neq 0$ já que $C_n^n = 1$ e portanto $\frac{x}{y} = 0$ não é raiz de f, já que, $\frac{x}{y} = 0 \Rightarrow x = 0, y \neq 0 \Rightarrow f(0,y) = P_ny^n \neq 0$. Assim pelo lema anterior, $\frac{x}{y} = 0$ não pode ser uma raiz múltipla de qualquer das equações derivadas. Logo dois $P's$ consecutivos, tais como P_r e P_{r+1} não podem ser zero. Pois, caso contrário, $\frac{x}{y} = 0$ seria raiz da equação

$$P_{r-1}x^2 + P_rxy + P_{r+1}y^2 = 0 \tag{1.1}$$

obtida de f por uma série de diferenciações, contradizendo o lema. Temos ainda para $\frac{x}{y} \neq 0$,

$$f(x,y) = y^n\left(\frac{x}{y} + a_1\right)\left(\frac{x}{y} + a_2\right)\ldots\left(\frac{x}{y} + a_n\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = -a_i \in \mathbb{R}$$

logo, f tem todas suas raízes reais $\frac{x}{y}$. Concluímos então pelo lema que (1.1) também tem todas suas raízes reais $\frac{x}{y}$, assim $\Delta \leq 0$, onde Δ é o discriminante de (1.1), portanto $P_{r-1}P_{r+1} \leq P_r^2$.

Definição 1.13 *Seja (U, φ) um sistema de coordenadas com funções coordenadas $x_1, \ldots, x_m$ e seja $p \in U$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, definimos um campo de vetores tangentes $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \in M_p$ por*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right)(f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i}\Big|_{\varphi(p)}.$$

para cada função f cujo é C^∞ em uma vizinhança de p.

Teorema 1.3 *Seja X um campo vetorial C^∞em uma variedade M. Para cada $m \in M$ existe $a(m)$ e $b(m)$ em $\mathbb{R} \bigcup \{\pm\infty\}$, e uma curva suave*

$$\gamma_m : (a(m), b(m)) \to M \tag{1.2}$$

tais que

(a) $0 \in (a(m), b(m))$ *e* $\gamma_m(0) = m$.

(b) γ_m *é uma curva integral de* X.

(c) Se $\mu : (c, d) \to M$ é uma curva suave satisfazendo as condições (a) e (b), então $(c, d) \subset (a(m), b(m))$ e $\mu = \gamma_m\big|_{(c,d)}$.

Definição 1.14 *Para cada $t \in \mathbb{R}$, definimos uma transformação X_t com domínio*

$$\mathfrak{D}_t = \{m \in M; t \in (a(m), b(m))\}$$

por

$$X_t(m) = \gamma_m(t).$$

(d) Para cada $m \in M$, existe uma vizinhaça aberta V de m e um $\varepsilon > 0$ tais que a aplicação

$$(t, p) \mapsto X_t(p)$$

está definida e é C^∞ em $(-\varepsilon, \varepsilon) \times V \subset M$.

(e) $\mathfrak{D}_t$ *é aberto para cada* t.

(f) $\bigcup_{t>0} \mathfrak{D}_t = M$.

(g) $X_t : \mathfrak{D}_t \to \mathfrak{D}_{-t}$ *é um difeomorfismo com inversa* X_{-t}.

(h) *Seja* s *e* t *números reais. Então o domínio de* $X_s \circ X_t$ *está contido, mas geralmente não é igual a* $\mathfrak{D}_{s+t}$. *No entanto, o domínio de* $X_s \circ X_t$ *é* $\mathfrak{D}_{s+t}$ *nos casos em que* s *e* t *têm ambos o mesmo sinal. Além disso, no domínio de* $X_s \circ X_t$ *nos temos*

$$X_s \circ X_t = X_{s+t}.$$

A demonstração deste teorema encontra-se em [14].

Proposição 1.4 *Sejam* $p \in M^m$ *e* X *um campo vetorial suave em* M *tais que* $X(p) \neq 0$. *Então existe um sistema de coordenadas* (U, φ) *com funções coordenadas* $x_1, \ldots, x_m$ *em uma vizinhança de* p, *tais que*

$$X\Big|_U = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_U.$$

Demonstração: Escolha um sistema de coordenadas (V, τ) centrado p, com funções coordenadas $y_1, \ldots, y_m$, tais que $X_p = \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p$.
Temos pelo teorema anterior item (d) que existem um $\varepsilon > 0$ e uma vizinhaça W de origem em $\mathbb{R}^{m-1}$ tais que a aplicação $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times W \to M$ dada por $\sigma(t, a_2, \ldots, a_m) = X_t(\tau^{-1}(0, a_2, \ldots, a_m))$ está bem definida e é suave em $(t, a_2, \ldots, a_m) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times W \subset \mathbb{R}^m$.

Sendo $d\sigma\Big(\frac{\partial}{\partial r_1}\Big|_0\Big) = X_p = \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p$ e $d\sigma\Big(\frac{\partial}{\partial r_i}\Big|_0\Big) = \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p$ para $i \geq 2$ temos que $Ker(d\sigma) = \{0\}$, e, portanto pelo Teorema da Função Inversa temos que $\varphi = \sigma^{-1}$ é uma aplicação coordenada numa vizinhança U de p. Seja $x_1, \ldots, x_m$ funções coordenadas do sistema de coordenadas (U, φ). Temos então pela definição (1.13) que

$$\frac{\partial}{\partial r_1}(x_i \circ \sigma)\Big|_{(t,a_2,\ldots,a_m)} = \frac{\partial}{\partial r_1}(x_i \circ \varphi^{-1})\Big|_{(t,a_2,\ldots,a_m)} = \frac{\partial x_i}{\partial x_1}\Big|_{X_t(\tau^{-1}(0,a_2,\ldots,a_m))} = \delta_{i1},$$

logo

$$\begin{aligned} X_{\sigma(t,a_2,\ldots,a_m)} &= d\sigma\Big(\frac{\partial}{\partial r_1}\Big|_{(t,a_2,\ldots,a_m)}\Big) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial r_1}(x_i \circ \sigma)\Big|_{(t,a_2,\ldots,a_m)} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\sigma(t,a_2,\ldots,a_m)} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \delta_{i1} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\sigma(t,a_2,\ldots,a_m)} = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{\sigma(t,a_2,\ldots,a_m)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$X\Big|_U = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_U.$$

1.2 Imersões Isométricas

Definição 1.15 (Imersões Isométricas) *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $f : M \longrightarrow N$ é uma* **imersão** *se $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M (m \leq n)$.Se, além disso, f é um homeomorfismo sobre $f(M) \subset N$, onde $f(M)$ tem a topologia induzida por N, diz-se que f é um* **mergulho**. *Caso $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma* **subvariedade** *de N.*

Definição 1.16 (Isometria) *Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \to N$ (isto é, f é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) é chamado uma* **isometria** *se :*

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}$$

para todo $p \in M$ e $u, v \in T_pM$.

Observação 1.1 *Se $f : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ é uma imersão de uma variedade diferenciável M em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ então a métrica Riemanniana de $\overline{M}$ induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M dada por $\langle v_1, v_2 \rangle_p = \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle_{f(p)}$ para $v_1, v_2 \in T_pM$. Desta forma, f passa a ser uma* **imersão isométrica** *de M em $\overline{M}$. Como, pela forma local das imersões, dado $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de M, é comum identificarmos $U \approx f(U)$ e assim considerarmos a decomposição: $T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp$, onde $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Assim, dado $v \in T_p\overline{M}$, $p \in M$ podemos escrever $v = v^\top + v^N$, onde $v^\top \in T_pM$ e $v^N \in (T_pM)^\perp$.*

Indicaremos por $\overline{\nabla}$, a conexão Riemanniana de $\overline{M}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M, e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\top$, onde esta é relativa a métrica induzida de M. Queremos definir a segunda forma fundamental da imersão $f : M \longrightarrow \overline{M}$. Para isto introduziremos previamente a seguinte definição;

Definição 1.17 *Seja $f : M \longrightarrow \overline{M}$ uma imersão. Dados campos locais $X, Y \in M$, a aplicação $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ dada por*

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em $\overline{M}$ normal a M.

Esta provado em [do Carmo p. 140]que $B(X, Y)$ nao depende das extensões $\overline{X}$, $\overline{Y}$, logo $B(X, Y)$ está bem definido.

Proposição 1.5 *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, a aplicação $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ dada por*

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Demonstração: Dados $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in \mathfrak{D}(M)$ temos que:

$$
\begin{aligned}
\cdot B(X+Y, Z+W) &= \overline{\nabla}_{\overline{X+Y}}\overline{Z+W} - \nabla_{(X+Y)}(Z+W) \\
&= \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z+W} + \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z+W} - \nabla_X(Z+W) - \nabla_Y(Z+W) \\
&= \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z} - \nabla_X Z + \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{W} - \nabla_X W + \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z} - \nabla_Y Z + \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{W} - \nabla_Y W \\
&= B(X,Z) + B(X,W) + B(Y,Z) + B(Y,W).
\end{aligned}
$$

$\cdot B(fX, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{fX}}\overline{Y} - \nabla_{fX}Y = \overline{f}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - f\nabla_X Y,$
mas em M temos $\overline{f} = f$, logo

$$B(fX, Y) = f(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y) = fB(X, Y)$$

$\cdot B(X, fY) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{fY} - \nabla_X(fY) = \overline{X}[f]\overline{Y} + \overline{f}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - X[f]Y - f\nabla_X Y,$
como em M temos $\overline{f} = f$, $\overline{X} = X$ e $\overline{Y} = Y$ logo

$$B(X, fY) = X[f]Y - X[f]Y + f(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y) = fB(X, Y),$$

Portanto B é bilinear. Para mostrar que B é simétrica, utilizaremos a simetria da conexão Riemanniana, isto é, $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ e $[\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X}$, logo

$$
\begin{aligned}
B(X, Y) &= \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y = [\overline{X}, \overline{Y}] + \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} - [X, Y] - \nabla_Y X \\
&= \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} - \nabla_Y X = B(Y, X),
\end{aligned}
$$

já que em M, temos $[\overline{X}, \overline{Y}] = [X, Y]$.

Corolário 1.4 *Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. A aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle$$

é uma forma bilinear simétrica.

Definição 1.18 (Segunda Forma Fundamental) *A forma quadrática II_η definida em T_pM por*

$$II_\eta(x) = H_\eta(x,x)$$

é chamada a Segunda Forma Fundamental de f em p segundo o vetor normal η.

Observe que a aplicação H_η fica associada a uma aplicação linear auto-adjunta $A_\eta : T_pM \longrightarrow T_pM$ por

$$\langle A_\eta(x), y\rangle = H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta\rangle. \tag{1.3}$$

Proposição 1.6 *Seja $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M. Então*

$$A_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^\top$$

Demonstração: Seja $y \in T_pM$ e X, Y extensões locais de x, y, respectivamente, e tangentes a M. Sendo N normal a M temos $\langle Y, N\rangle = 0$, logo da compatibilidade da métrica, temos

$$0 = X\langle Y, N\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle + \langle Y, \overline{\nabla}_X N\rangle,$$

ou seja, $\langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle = -\langle Y, \overline{\nabla}_X N\rangle$. Como $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^\top$ temos que $\langle \nabla_X Y, N\rangle = 0$, portanto

$$\begin{aligned}
\langle A_\eta(x), y\rangle &= \langle B(X,Y)(p), N\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N\rangle(p) \\
&= \langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle(p) - \langle \nabla_X Y, N\rangle(p) \\
&= -\langle Y, \overline{\nabla}_X N\rangle(p) = \langle y, -\overline{\nabla}_x N\rangle \\
&= \langle y, -(\overline{\nabla}_x N)^\top - (\overline{\nabla}_x N)^\perp\rangle \\
&= \langle y, -(\overline{\nabla}_x N)^\top\rangle + \langle y, -(\overline{\nabla}_x N)^\perp\rangle \\
&= \langle -(\overline{\nabla}_x N)^\top, y\rangle
\end{aligned}$$

$\forall y \in T_pM$. Logo

$$A_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^\top.$$

Definição 1.19 *Sejam M uma variedade Riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Seja $p \in M$ e sejam $U \subset M$ uma vizinhança de p, e $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$ uma aplicação diferenciável tais que para todo $q \in U$ a curva $t \to \varphi(t, q)$ é a trajetória de X passando por q em $t = 0$. (U e φ são dados pelo teorema fundamental das equações diferenciais ordinárias.) X é chamado um* **campo de Killing** *(ou uma* **isometria infinitesimal** *) se, para todo $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a aplicação $\varphi(t_0) : U \subset M \to M$ é uma isometria.*

1.3 Variedade Produto

Proposição 1.7 *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis e sejam $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$, $\{(U_\beta, y_\beta)\}$ estruturas diferenciáveis de M e N, respectivamente. Considere o produto cartesiano $M \times N$ e a aplicação $\varphi_{\alpha\beta}(p, q) = (x_\alpha(p), y_\beta(q))$, $p \in U_\alpha$, $q \in V_\beta$. Então valem os seguintes itens:*
(i) $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_{\alpha\beta})\}$ é uma estrutura diferenciável em $M \times N$;
(ii) As projeções $\pi_1 : M \times N \to M$ e $\pi_2 : M \times N \to N$ são diferenciáveis.

Demonstração: Prova de (i) :
As aplicações $\varphi_{\alpha\beta} : (U_\alpha \times V_\beta) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to M \times N$ são injetivas, já que $\varphi_{\alpha\beta} = (x_\alpha, y_\beta)$, e x_α, y_β são injetivas. Sendo $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$, $\{(U_\beta, y_\beta)\}$ estruturas diferenciáveis de M e N, respectivamente temos que $M = \bigcup\limits_\alpha x_\alpha(U_\alpha)$ e $N = \bigcup\limits_\beta y_\beta(V_\beta)$, e portanto, $M \times N = \bigcup\limits_{\alpha,\beta}(x_\alpha(U_\alpha), y_\beta(V_\beta)) = \bigcup\limits_{\alpha,\beta} \varphi_{\alpha\beta}(U_\alpha \times V_\beta)$.
Sejam (α_1, β_1) e (α_2, β_2) tais que $\varphi_{\alpha_1\beta_1}(U_{\alpha_1} \times V_{\beta_1}) \bigcap \varphi_{\alpha_2\beta_2}(U_{\alpha_2} \times V_{\beta_2}) \neq \emptyset$. Assim $(x_{\alpha_1}(U_{\alpha_1}), y_{\beta_1}(V_{\beta_1})) \bigcap (x_{\alpha_2}(U_{\alpha_2}), y_{\beta_2}(V_{\beta_2})) \neq \emptyset$, e portanto $W_1 \times W_2 \neq \emptyset$

para $W_1 = (x_{\alpha_1}(U_{\alpha_1}), x_{\alpha_2}(U_{\alpha_2}))$ e $W_2 = (y_{\beta_1}(V_{\beta_1}), y_{\beta_2}(V_{\beta_2}))$. Sendo $x_{\alpha_i}^{-1}(W_1)$ aberto de $\mathbb{R}^m$ e $y_{\beta_j}^{-1}(W_2)$ aberto de $\mathbb{R}^n$, para $1 \leq i, j \leq 2$, temos que $\varphi_{\alpha_i\beta_i}^{-1}(W_1 \times W_2) = (x_{\alpha_i}^{-1}(W_1), y_{\beta_i}^{-1}(W_2))$ é aberto de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, i \in \{1, 2\}$. Como $x_{\alpha_2}^{-1} \circ x_{\alpha_1}$ e $y_{\beta_2}^{-1} \circ y_{\beta_1}$, são diferenciáveis, segue-se que $\varphi_{\alpha_2\beta_2}^{-1} \circ \varphi_{\alpha_1\beta_1} = (x_{\alpha_2}^{-1} \circ x_{\alpha_1}, y_{\beta_2}^{-1} \circ y_{\beta_1})$ é diferenciável. Concluimos então que $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_{\alpha\beta})\}$ é uma estrutura diferenciável em $M \times N$.

Prova de (ii): Dado $(p, q) \in M \times N$ e $x_\alpha : U_\alpha \to M$ uma parametrização em $p = \pi_1(p, q)$, considere $\varphi_{\alpha\beta} : U_\alpha \times V_\beta \to M \times N$ uma parametrização de (p, q). Temos então que $x_\alpha^{-1} \circ \pi_1 \circ \varphi_{\alpha\beta} : U_\alpha \times V_\beta \to U_\alpha$ e

$$x_\alpha^{-1} \circ \pi_1 \circ \varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha^{-1}(p), y_\beta^{-1}(q)) = x_\alpha^{-1} \circ \pi_1 \circ \varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\alpha\beta}^{-1}(p, q) = x_\alpha^{-1} \circ \pi_1(p, q) = x_\alpha^{-1}(p),$$

logo, $x_\alpha^{-1} \circ \pi_1 \circ \varphi_{\alpha\beta}$ é a restrição da projeção $\pi_1 : M \times N \to M$ a $U_\alpha \times V_\beta$, que é diferenciável, já que x_α^{-1} o é. Analogamente concluímos que a projeção $\pi_2 : M \times N \to N$ é diferenciável.

Proposição 1.8 *Sejam M e N variedades Riemannianas e considere o produto cartesiano $M \times N$ com a estrutura diferenciável produto. Sejam $\pi_1 : M \times N \to M$ e $\pi_2 : M \times N \to N$ as projeções naturais. Então fica definida uma métrica Riemanniana em $M \times N$ da seguinte maneira:*

$$\langle u, v \rangle_{(p,q)} := \langle d\pi_1(u), d\pi_1(v) \rangle_p + \langle d\pi_2(u), d\pi_2(v) \rangle_q$$

para todo $(p, q) \in M \times N$ e $u, v \in T_{(p,q)}(M \times N)$.

Demonstração: A prova decorre diretamente da linearidade das aplicações $d\pi_1, d\pi_2$ e das estruturas Riemannianas de M e N.

Capítulo 2

Transformação de Newton e Operador L_r

2.1 As Transformações de Newton

Sejam $\overline{M}^{m+1}$ uma variedade Riemanniana orientada $(m+1)$-dimensional e seja Σ^m uma variedade Riemanniana orientável m-dimensional. Suponha $x : \Sigma \longrightarrow \overline{M}$ uma imersão isométrica. Escolha um campo normal unitário N para Σ e considere o operador forma A associado com a segunda forma fundamental de Σ, definido por (1.1). Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ os autovalores de A. A r-ésima função simétrica de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, denotada por S_r é definida como

$$S_r = \begin{cases} 1, & se\; r = 0 \\ \displaystyle\sum_{i_1 < \ldots < i_r} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_r}, & se\; 1 \leq r \leq m \\ 0, & se\; r > m \end{cases} \tag{2.1}$$

Definição 2.1 *Com as notações acima,* $H_r = \frac{S_r}{C_m^r}$*,* $r = 1, \ldots, m$ *é chamado de* r*-ésima curvatura média de* x*.*

Particularmente, $H_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}{m}$ é a curvatura média; $H_m = \lambda_1 \ldots \lambda_m$ é a curvatura de Gauss- Kronecker.

Definição 2.2 *As transformações de Newton $T_r : \mathfrak{X}(\Sigma) \longrightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ são definidas por* $T_r = \begin{cases} I, & se\ r = 0 \\ S_r I - S_{r-1}A + \ldots + (-1)^r A^r, & se\ r = 1, \ldots, m \end{cases}$

Proposição 2.1 *Prove, para $r = 1, \ldots, m$, os seguintes itens:*

(i) $T_r = S_r I - AT_{r-1}$*;*

(ii) O operador T_r comuta com A, isto é, $T_r A = AT_r$;

(iii) O operador T_r é auto-adjunto;

(iv) T_r é simétrico.

Demonstração:

Item(i): Temos por definição que:

$$\begin{aligned} T_r &= S_r I - S_{r-1}A + S_{r-2}A^2 - \ldots + (-1)^{r-1} S_1 A^{r-1} + (-1)^r A^r \\ &= S_r I - A(S_{r-1}I - S_{r-2}A + \ldots + (-1)^{r-2} S_1 A^{r-2} + (-1)^{r-1} A^{r-1}) \\ &= S_r I - AT_{r-1}. \end{aligned}$$

Item(ii): Provaremos por indução sobre r. Para $r = 0$, temos $T_0 A = IA = A = AI = AT_0$. Suponha que $T_{r-1}A = AT_{r-1}$. Assim

$$AT_r = A(S_r I - AT_{r-1}) = A(S_r I - T_{r-1}A) = S_r A - AT_{r-1}A = (S_r I - AT_{r-1})A = T_r A.$$

Item (iii): Usando indução sobre r temos, para $r = 0$, $T_0 = I$, logo

$$\langle T_0 X, Y \rangle = \langle X, Y \rangle = \langle X, T_0 Y \rangle,$$

$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Suponha que vale $\langle T_{r-1}X, Y\rangle = \langle X, T_{r-1}Y\rangle$. Sendo A um operador auto-adjunto, obtemos: $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$$\begin{aligned}
\langle T_r X, Y\rangle &= \langle (S_r I - AT_{r-1})X, Y\rangle \\
&= \langle S_r X, Y\rangle - \langle AT_{r-1}X, Y\rangle \\
&= \langle X, S_r Y\rangle - \langle T_{r-1}X, AY\rangle \\
&= \langle X, S_r Y\rangle - \langle X, T_{r-1}AY\rangle \\
&= \langle X, (S_r I - T_{r-1}A)Y\rangle \\
&= \langle X, T_r Y\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto $\langle T_r X, Y\rangle = \langle X, T_r Y\rangle, \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Item(iv): O operador T_r é simétrico se, e somente se, $[T_r]_\beta$ em qualquer base ortonormal β de $\mathfrak{X}(\Sigma)$ é uma matriz simétrica. Dada uma base ortonormal de $\mathfrak{X}(\Sigma)$, temos que a matriz do operador T_r é dada por $[T_r] = (\langle T_r e_i, e_j\rangle)$, logo para que $[T_r]$ seja simétrica devemos ter $[T_r] = [T_r]^\top$, onde $[T_r]^\top$ é a matriz transposta de T_r, ou ainda $\langle T_r e_i, e_j\rangle = \langle T_r e_j, e_i\rangle$, $\forall\ i \neq j$ em $\{1, \ldots, m\}$. Mas isso se verifica pois pelo item anterior T_r é auto-adjunto. Sejam $e_1, \ldots, e_m$ as direções principais correspondentes respectivamente as curvaturas principais $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Para $i = 1, \ldots, m$, seja A_i a restrição da transformação A sobre o subespaço $(m-1)$-dimensional normal a e_i, e seja $S_r(A_i)$ a função simétrica associada a A_i, logo

$$\sum_{i_1 < \ldots < i_r} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_r},$$

para $i_j \neq i, j = 1, \ldots, r$. Note que fixado $i = 1, \ldots, m$ podemos dividir a soma S_r em duas parcelas, uma onde λ_i aparece e outra não. Assim $S_r = A + \lambda_i B$, onde $A = S_r(A_i)$ e por outro lado B é a soma cujas parcelas são soma de todos os produtos de $r-1$ curvaturas principais, exceto λ_i. Logo

$$S_r = S_r(A_i) + \lambda_i S_{r-1}(A_i) \Rightarrow S_r(A_i) = S_r - \lambda_i S_{r-1}(A_i).$$

Proposição 2.2 *Para $0 \leq r \leq m, 1 \leq i \leq m$, temos*

(i) $T_r(e_i) = \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} e_i = S_r(A_i)e_i$.

(ii) $(m-r)S_r = tr(T_r) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} S_r(A_i)$.

(iii) $(r+1)S_{r+1} = tr(AT_r) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i S_r(A_i)$.

(iv) $S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2} = tr(A^2 T_r) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 S_r(A_i)$.

Demonstração:

Item (i): Provaremos por indução sobre r. Para $r = 0$, temos $T_0(e_i) = I(e_i) = e_i = 1e_i = S_0(A_i)e_i$. Suponha verdade $T_{r-1}(e_i) = S_{r-1}(A_i)e_i$. Assim

$$\begin{aligned}
T_r(e_i) &= (S_r I - AT_{r-1})(e_i) \\
&= S_r I(e_i) - AT_{r-1}(e_i) \\
&= (S_r(A_i) + \lambda_i S_{r-1}(A_i))I(e_i) - AT_{r-1}(e_i) \\
&= S_r(A_i)e_i + \lambda_i S_{r-1}(A_i)e_i - A(S_{r-1}(A_i)e_i) \\
&= S_r(A_i)e_i + \lambda_i S_{r-1}(A_i)e_i - S_{r-1}(A_i)A(e_i) \\
&= S_r(A_i)e_i + \lambda_i S_{r-1}(A_i)e_i - \lambda_i S_{r-1}(A_i)e_i \\
&= S_r(A_i)e_i.
\end{aligned}$$

Logo $\forall\, r \in \{1, \ldots, m\}$, temos $T_r(e_i) = S_r(A_i)e_i$. Para provarmos a segunda igualdade usaremos o fato de que $S_{r+1}(A_i)$ e $S_r(A_i)$ não dependem de λ_i, logo $\frac{\partial}{\partial \lambda_i}(S_{r+1}(A_i)) = \frac{\partial}{\partial \lambda_i}(S_r(A_i)) = 0$, assim

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda_i} S_{r+1} e_i &= \frac{\partial}{\partial \lambda_i}\Big[S_{r+1}(A_i) + \lambda_i S_r(A_i)\Big]e_i \\
&= \Big[\frac{\partial}{\partial \lambda_i} S_{r+1}(A_i) + \frac{\partial}{\partial \lambda_i}(\lambda_i S_r(A_i))\Big]e_i \\
&= \Big[\frac{\partial}{\partial \lambda_i}(\lambda_i) S_r(A_i) + \lambda_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i}(S_r(A_i))\Big]e_i \\
&= S_r(A_i)e_i
\end{aligned}$$

Concluímos então que $T_r(e_i) = \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} e_i = S_r(A_i)e_i$.

Item (ii): A matriz $[T_r]$ na base formada pelas direções principais é dada por $[T_r] = (a_{ij})$, onde $a_{ij} = \langle T_r(e_i), e_j \rangle$, para $1 \leq i, j \leq m$. Assim pelo item anterior obtemos:

$$\begin{aligned} tr(T_r) &= \sum_{i=1}^{m} a_{ii} = \sum_{i=1}^{m} \langle T_r(e_i), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} \langle S_r(A_i)e_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{m} S_r(A_i) \langle e_i, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} S_r(A_i) \end{aligned}$$

Sendo então $tr(T_r) = \sum_{i=1}^{m} S_r(A_i)$, temos que $tr(T_r) = \sum_{i=1}^{m} S_r(A_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_r}$, para $i_j \neq i$. Portanto

$$tr(T_r) = (m - r) \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_r} = (m - r)S_r$$

Item (iii): Sendo $T_{r+1} = S_{r+1}I - AT_r$ temos que $AT_r = S_{r+1}I - T_{r+1}$ logo pelo item (ii) temos que:

$$\begin{aligned} tr(AT_r) &= tr\Big[S_{r+1}I - T_{r+1}\Big] = S_{r+1}tr(I) - tr(T_{r+1}) \overset{(ii)}{=} mS_{r+1} - \sum_{i=1}^{m} S_{r+1}(A_i) \\ &= mS_{r+1} - \sum_{i=1}^{m} \Big[S_{r+1} - \lambda_i S_r(A_i)\Big] = mS_{r+1} - mS_{r+1} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i S_r(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i S_r(A_i). \end{aligned}$$

Como pelo item (ii), $(m - (r + 1))S_{r+1} = tr(T_{r+1})$ temos que

$$\begin{aligned} tr(AT_r) &= tr\Big[S_{r+1}I - T_{r+1}\Big] = S_{r+1}tr(I) - tr(T_{r+1}) \overset{(ii)}{=} mS_{r+1} - (m - (r + 1))S_{r+1} \\ &= mS_{r+1} - mS_{r+1} + (r + 1)S_{r+1} \\ &= (r + 1)S_{r+1} \end{aligned}$$

Item (iv): Sendo $T_{r+1} = S_{r+1}I - AT_r$ temos $AT_{r+1} = S_{r+1}A - A^2T_r$ logo,

$$tr(A^2T_r) = tr[S_{r+1}A - AT_{r+1}] = S_{r+1}tr(A) - tr(AT_{r+1}) \overset{(iii)}{=} S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}.$$

Por outro lado, sendo $S_{r+1}(A_i) = S_{r+1} - \lambda_i S_r(A_i)$ temos

$$\lambda_i S_{r+1}(A_i) = \lambda_i S_{r+1} - {\lambda_i}^2 S_r(A_i).$$

Logo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} {\lambda_i}^2 S_r(A_i) &= \sum_{i=1}^{m} \Big[\lambda_i S_{r+1} - \lambda_i S_{r+1}(A_i)\Big] \\ &= S_{r+1}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i S_{r+1}(A_i) \\ &\overset{(iii)}{=} S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}. \end{aligned}$$

Dado o tensor Transformação de Newton T_r em Σ temos

$$(\nabla_X T_r)(Y) = \nabla_X(T_rY) - T_r(\nabla_X Y).$$

Proposição 2.3 *Para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ vale a seguinte equação*

$$X(S_r) = tr(T_{r-1}\nabla_X A).$$

Demonstração: Seja $e_1, e_2, \ldots, e_m$ um referencial ortonormal local em Σ^m que diagonaliza o operador A em um ponto $p \in \Sigma$. Denotemos por $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}$ a matriz $r \times r$ obtida quando consideramos apenas linhas e colunas de ordem $i_1, \ldots, i_r$ de A no referencial $e_1, e_2, \ldots, e_m$; e por $v_j^{i_1 \ldots i_r}, j = 1, \ldots, r$, a j-ésima coluna da matriz $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}$. Temos

$$\begin{aligned} S_r &= \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \det(A^{i_1 i_2 \ldots i_r}) \\ &= \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \det(v_{i_1}^{i_1 i_2 \ldots i_r}, v_{i_2}^{i_1 i_2 \ldots i_r}, \ldots, v_{i_r}^{i_1 i_2 \ldots i_r}). \end{aligned}$$

Assim

$$X(S_r) = \sum_{i_1<\ldots<i_r} X(\det(v_{i_1}^{i_1 i_2 \ldots i_r}, \ldots, v_{i_r}^{i_1 i_2 \ldots i_r})).$$

Mas

$$X(\det(v_{i_1}^{i_1 i_2 \ldots i_r}, \ldots, v_{i_r}^{i_1 i_2 \ldots i_r})) = \sum_{j=1}^{r} \det(v_{i_1}^{i_1 i_2 \ldots i_r}, \ldots, X(v_{i_j}^{i_1 i_2 \ldots i_r}), \ldots, v_{i_r}^{i_1 i_2 \ldots i_r}),$$

que em p é igual a

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_{i_1} \ldots X(a_{i_j i_j}) \ldots \lambda_{i_r}.$$

Temos também

$$\begin{aligned}
(\nabla_X A)(e_i) &= \nabla_X(Ae_i) - A(\nabla_X e_i) \\
&= \nabla_X\Big(\sum_{k=1}^{m} a_{ki} e_k\Big) - A\Big(\sum_{j=1}^{m} \langle \nabla_X e_i, e_j\rangle e_j\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \nabla_X(a_{ki} e_k) - \sum_{j=1}^{m} \langle \nabla_X e_i, e_j\rangle \sum_{s=1}^{m} a_{sj} e_s \\
&= \sum_{k=1}^{m} (X(a_{ki}) e_k + a_{ki} \nabla_X e_k) - \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \langle \nabla_X e_i, e_j\rangle a_{sj} e_s \\
&= \sum_{k=1}^{m} \Big(X(a_{ki}) e_k + a_{ki} \sum_{l=1}^{m} \langle \nabla_X e_k, e_l\rangle e_l\Big) - \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \langle \nabla_X e_i, e_j\rangle a_{sj} e_s \\
&= \sum_{k=1}^{m} X(a_{ki}) e_k + \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \langle \nabla_X e_k, e_l\rangle e_l - \sum_{s=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \langle \nabla_X e_i, e_j\rangle a_{sj} e_s.
\end{aligned}$$

Em p temos

$$\begin{aligned}
tr(T_{r-1}\nabla_X A) &= \sum_{i=1}^{m}\langle T_{r-1}((\nabla_X A)e_i), e_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{m}\langle (\nabla_X A)e_i, T_{r-1}e_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{m}\langle (\nabla_X A)e_i, S_{r-1}(A_i)e_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{m}\Big\langle \sum_{k=1}^{m} X(a_{ki})e_k + \sum_{l,k=1}^{m} a_{ik}\langle\nabla_X e_k, e_l\rangle e_l - \sum_{s,j=1}^{m}\langle \nabla_X e_i, e_j\rangle a_{sj}e_s, S_{r-1}(A_i)e_i\Big\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{m}\Big(X(a_{ii}) + \sum_{k=1}^{m}\langle\nabla_X e_k, e_i\rangle a_{ki} - \sum_{j=1}^{m}\langle\nabla_X e_i, e_j\rangle a_{ij}\Big)S_{r-1}(A_i)\\
&= \sum_{i=1}^{m} X(a_{ii})S_{r-1}(A_i) + \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{m}\langle\nabla_X e_k, e_i\rangle a_{ki} - \sum_{j=1}^{m}\langle\nabla_X e_i, e_j\rangle a_{ij}\Big)S_{r-1}(A_i).
\end{aligned}$$

Mas, em p

$$\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{m}\langle\nabla_X e_k, e_i\rangle a_{ki} - \sum_{j=1}^{m}\langle\nabla_X e_i, e_j\rangle a_{ij}\Big)S_{r-1}(A_i) = 0,$$

pois, $a_{ij} = \begin{cases} \lambda_{ii}, se\ i = j \\ 0, \quad se\ i \neq j \end{cases}$.

Logo

$$\begin{aligned}
tr(T_{r-1}\nabla_X A) &= \sum_{i=1}^{m} X(a_{ii})S_{r-1}(A_i)\\
&= \sum_{i=1}^{m}\Big(X(a_{ii}) \sum_{i_1<\ldots<i_r, i_j\neq i} \lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r}\Big)\\
&= \sum_{i_1<\ldots<i_r}\sum_{j=1}^{m}\lambda_{i_1}\ldots X(a_{i_j i_j})\ldots\lambda_{i_r}\\
&= X(S_r),
\end{aligned}$$

em p.

Proposição 2.4 *Para cada* $r(1 \leq r \leq m)$, *se* $H_1, H_2, \ldots, H_r$ *são não negativos, então:*

(i) $H_{r-1}H_{r+1} \leq H_r^2$;

(ii) $H_1 H_r \geq H_{r+1}$, *onde* $H_0 = 1$ *e* $H_{m+1} = 0$;

(iii) $H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}} \geq \ldots \geq H_r^{\frac{1}{r}}$.

Demonstração:

Item (i): Proposição 1.3

Item (ii): Provaremos por indução sobre r. Para $r = 0$, temos $H_1 H_0 = H_1 = H_{0+1}$. Para $H_r > 0, \forall r$, suponha valer $H_1 H_{r-1} \geq H_r$. Sendo $H_r > 0$ temos que pelo item anterior que

$$H_1 H_{r-1} H_r \geq H_r^2 \geq H_{r-1} H_{r+1},$$

e, portanto, $H_1 H_r \geq H_{r+1}$. No caso em que $H_r = 0$, para algum r, temos: $H_r = \frac{S_r}{C_m^r} = 0 \Rightarrow S_r = \sum\limits_{i_1 < \ldots < i_r} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_r} = 0$. Como $S_{r+1} = \sum\limits_{i_1 < \ldots < i_{r+1}} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_{r+1}}$ pode ser reescrito por

$$S_{r+1} = \sum_j \lambda_j \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_r} = \sum_j \lambda_j 0 = 0 \Rightarrow H_j = 0 \forall j \geq r,$$

logo $H_1 H_r = 0 = H_{r+1}$. Em qualquer caso $H_1 H_r \geq H_{r+1}$.

Item (iii): Provaremos por indução sobre r que $H_r^{\frac{1}{r}} \geq H_{r+1}^{\frac{1}{r+1}}, \forall r$. Para $r = 1$, temos pelo item anterior que $H_1^2 \geq H_2 \Rightarrow H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}}$. Suponha verdade $H_{r-1}^{\frac{1}{r-1}} \geq H_r^{\frac{1}{r}}$ assim, $H_{r-1} \geq H_r^{\frac{r-1}{r}}$. Temos pelo item (i) e pela hipotese de indução que:

$$H_r^2 \geq H_{r-1} H_{r+1} \geq H_r^{\frac{r-1}{r}} H_{r+1} = H_r^{1-\frac{1}{r}} H_{r+1} \overset{H_r > 0}{\Rightarrow} H_r \geq H_r^{-\frac{1}{r}} H_{r+1}$$

Logo,

$$H_r^{\frac{r+1}{r}} = H_r H_r^{\frac{1}{r}} \geq H_r^{\frac{1}{r}}.H_r^{-\frac{1}{r}} H_{r+1} = H_{r+1}$$

e, portanto

$$H_r^{\frac{1}{r}} \geq H_{r+1}^{\frac{1}{r+1}}, \forall r.$$

Se $H_j = 0$, para algum j, temos que $H_i = 0 \forall i \geq j$, e logo a partir deste j vale a igualdade. Portanto concluímos que

$$H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}} \geq \ldots \geq H_r^{\frac{1}{r}}.$$

Definição 2.3 *Dada uma função f em $\mathcal{C}^2(\Sigma)$ para $p \in \Sigma$, o operador linear Hessiano de f é definido por*

$$Hessf(X) = \nabla_X(\nabla f), X \in T_p\Sigma,$$

onde ∇ é a conexão induzida em Σ.

Com os operadores T_r e $Hess$, podemos definir o operador diferencial L_r como segue:

Definição 2.4 *Dado $f \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$, $0 \leq r \leq m$,*

$$L_r(f) = tr\Big(T_r Hessf\Big).$$

Dado $p \in \Sigma$, considere um sistema de coordenadas ortonormal de Σ em p com funções coordenadas $x_1, \ldots x_m$. Assim $\nabla f = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(f)\frac{\partial}{\partial x_i}$, logo,

$$\begin{aligned} Hessf\big(\frac{\partial}{\partial x_j}\big) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}(\nabla f) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}(f)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\frac{\partial(f)}{\partial x_i}\big)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Gamma_{ji}^{k}\frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} T_r\Big(Hessf\big(\frac{\partial}{\partial x_j}\big)\Big) &= \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}T_r\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big) + \sum_{i,k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Gamma_{ji}^{k}T_r\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_k}\Gamma_{jk}^{i}\Big)T_r\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big). \end{aligned}$$

Temos então que

$$\begin{aligned} L_r f(p) &= tr(T_r Hessf)(p) = \sum_{j=1}^{m}\Big\langle T_r Hessf\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big), \frac{\partial}{\partial x_j}\Big\rangle \\ &= \sum_{j,i=1}^{m}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_k}\Gamma_{jk}^{i}\Big)\Big\langle T_r\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big), \frac{\partial}{\partial x_j}\Big\rangle \\ &= \sum_{j,i=1}^{m}\Big\langle T_r\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big), \frac{\partial}{\partial x_j}\Big\rangle\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i,j,k=1}^{m}\Big\langle T_r\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big), \frac{\partial}{\partial x_j}\Big\rangle\frac{\partial f}{\partial x_k}\Gamma_{jk}^{i}. \end{aligned}$$

Afirmo que L_r é elíptico se, e somente se, T_r é positivo definido. Com efeito, supondo L_r elíptico temos por definição que existe $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j}\Big\langle T_r\big(\frac{\partial}{\partial x_i}\big), \frac{\partial}{\partial x_j}\Big\rangle(p)v_i v_j \geq \theta|v|^2,$$

para quase todo $p \in \Sigma$ e $\forall\ v \in T_p\Sigma$. Para provarmos que T_r é positivo definido devemos mostrar por definição que $v^\top a_r(p)v > 0$, para quase todo $p \in \Sigma$ e $\forall\ v \in T_p\Sigma, v \neq 0$, onde $a_r(p)$ é a matriz do operador T_r. Mas note que, dado $p \in \Sigma$ e $v = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in T_p\Sigma$

$$\mathbf{v}^\top \mathbf{a_r(p)v} = [v_1 \dots v_n]\begin{pmatrix} \Big\langle T_r\big(\frac{\partial}{\partial x_1}\big), \frac{\partial}{\partial x_1}\Big\rangle & \dots & \Big\langle T_r\big(\frac{\partial}{\partial x_1}\big), \frac{\partial}{\partial x_n}\Big\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Big\langle T_r\big(\frac{\partial}{\partial x_n}\big), \frac{\partial}{\partial x_1}\Big\rangle & \dots & \Big\langle T_r\big(\frac{\partial}{\partial x_n}\big), \frac{\partial}{\partial x_n}\Big\rangle \end{pmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i,j}^{n}\Big\langle T_r\big(\frac{\partial}{\partial x_i}\big), \frac{\partial}{\partial x_j}\Big\rangle(p)v_i v_j \geq \theta|v|^2 > 0,$$

pois $v \neq 0$ e $\theta > 0$. Portanto T_r é positivo definido.

Reciprocamente se T_r é positivo definido então $S_r(A_i) > 0 \; \forall i = 1, \ldots, n$ e portanto $min\{S_r(A_i)\} > 0$, logo

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j}^{n} \Big\langle T_r\big(\frac{\partial}{\partial x_i}\big), \frac{\partial}{\partial x_j}\Big\rangle(p)v_i v_j &= \langle T_r(v), v\rangle = \Big\langle T_r\Big(\sum_{i}^{n} \widetilde{v_i} e_i\Big), \sum_{j}^{n} \widetilde{v_j} e_j\Big\rangle \\
&= \sum_{i,j}^{n} \widetilde{v_i}\widetilde{v_j}\langle T_r(e_i), e_j\rangle = \sum_{i,j}^{n} \widetilde{v_i}\widetilde{v_j} S_r(A_i)\langle e_i, e_j\rangle \\
&\geq min\{S_r(A_j)\} \sum_{i,j}^{n} \widetilde{v_i}\widetilde{v_j}\langle e_i, e_j\rangle \\
&= min\{S_r(A_j)\}\langle v, v\rangle = min\{S_r(A_j)\}|v|^2.
\end{aligned}$$

Logo tomando $\theta = min\{S_r(A_j)\}$ temos que L_r é elíptico.

Neste trabalho, o espaço ambiente qual estudamos é uma variedade produto $(m+1)-$dimensional $M^m \times \mathbb{R}$, onde M é uma variedade Riemanniana de dimensão m e Σ é uma hipersuperfície em $M \times \mathbb{R}$ com $r-$ésima curvatura média constante positiva, isto é, $H_r > 0$ constante.

2.2 As Propriedades Elípticas do Operador L_r

Proposição 2.5 *Sejam $\overline{M}^{m+1}$ uma variedade Riemanniana orientada $(m+1)$-dimensional e Σ^m uma variedade Riemanniana orientável m-dimensional conexa. Seja $x : \Sigma \longrightarrow \overline{M}$ uma imersão isométrica. Se $H_2 > 0$, então o operador L_1 é eliptico.*

Demonstração: Sendo L_1 elíptico se, e somente se, T_1 é positivo definido, provaremos então que T_1 é positivo definido. Temos pelo item (iii) da proposição 2.3 que $H_1^2 \geq H_2$, como $H_2 > 0$, então $H_1^2 > 0$. Mas sendo H_1 continua temos que H_1 assume o mesmo sinal em Σ, pois caso contrario, existiria $p \in \Sigma$ tal que $H_1 = 0$

em p. Podemos encontrar entao um normal N tais que H_1 é positivo, já que, quando mudamos a orientação o sinal do traço de A é alterado. Sendo

$$S_1^2 = \Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\Big)^2 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i{}^2 + 2\sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i{}^2 + 2S_2,$$

temos que $S_1^2 > \lambda_1^2, \forall\, i$, pois $H_2 = \frac{S_2}{C_m^2} > 0 \Leftrightarrow S_2 > 0$. Como $H_1 > 0$ temos $S_1 > 0$, logo existe pelo menos $i \in 1, \ldots, m$ tal que $\lambda_i > 0$, portanto $S_1^2 > \lambda_i^2 \Rightarrow S_i > \lambda_i \Rightarrow S_1(A_i) = S_1 - \lambda_i > 0$. Sendo, pelo item (i) da proposição 2.2, $T_1(e_i) = S_1(A_i)e_i$, temos que

$$\langle T_1 e_i, e_j\rangle = S_1(A_i)\delta_{ij} \geq 0, \forall\, j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Mas como T_1 é auto-adjunto obtemos:

$$S_1(A_j)\langle e_i, e_j\rangle = \langle e_i, S_1(A_j)e_j\rangle = \langle e_i, T_1(e_j)\rangle = \langle T_1(e_i), e_j\rangle \geq 0, \forall j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Devemos ter $S_1(A_j) > 0, \forall\, j \in \{1, \ldots, m\}$, pois caso contrário , teríamos

$$S_1 - \lambda_j = S_1(A_j) = 0 \Rightarrow S_1 = \lambda_j \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i \neq j \Rightarrow S_2 = 0,$$

contradizendo o fato de $S_2 > 0$. Logo T_1 é positiva definida. Na proxima proposição, provaremos a elipticidade de L_r quando a hipersuperfície Σ com r-ésima curvatura média positiva tem um ponto elíptico ou parabólico.

Proposição 2.6 *Seja $\overline{M}^{m+1}$ uma variedade Riemanniana $(m+1)$-dimensional e Σ^m uma variedade Riemanniana orientável m-dimensional conexa (com ou sem fronteira). Suponha $x : \Sigma \longrightarrow \overline{M}$ uma imersão isométrica com $H_r > 0$ para algum $1 \leq r \leq m$. Se existir um ponto interior p de Σ tais que todas as curvaturas principais em p são não-negativas, então para todo $1 \leq j \leq r-1$, o operador L_j é elíptico, e a j-ésima curvatura média H_j é positiva.*

Demonstração: Sendo L_j elíptico se, e somente se, T_j é positivo definido, é suficiente provar que os autovalores de T_j são positivos, isto é, $S_j(A_i) > 0$ em Σ, para todo $1 \leq j \leq r-1$ e $1 \leq i \leq m$. Seja $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ as curvaturas principais de x, logo por hipótese $\lambda_i \geq 0$ em p, assim $S_k \geq 0$, e portanto $H_k \geq 0, \forall k$. Temos então, pela proposição 2.3 item (iii) que $H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}} \geq \ldots \geq H_r^{\frac{1}{r}}$, sendo $H_r > 0$, obtemos que $H_k > 0$, para todo $1 \leq k \leq r$. Sendo $H_r > 0$, temos $S_r = \sum\limits_{i_1<\ldots<i_r} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_r} > 0$, em p, logo devemos ter pelo menos r curvaturas principais positivas. Suponhamos por simplicidade $\lambda_1, \ldots, \lambda_r > 0$. Portanto, em p,

$$S_j(A_i) = \sum_{i_1<\ldots<i_j, i_k \neq i} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_j} > 0.$$

Logo, por continuidade, existe uma bola $B(p) \subset \Sigma$ centrada em p tais que as funções $S_j(A_i) > 0$ em $B(p)$. Sendo Σ conexa, temos que dado qualquer $q \in \Sigma$, existe um caminho $\gamma(t), t \in [0,1]$, ligando p a q tais que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Definamos

$$J = \{t \in [0,1]; S_j(A_i) > 0 \; em \; \gamma_{|_{[0,t]}}\}.$$

Seja $t_0 = supJ$. Sendo $S_j(A_i) > 0$ em $B(p)$ temos que $t_0 > 0$. Mas note que $S_j(A_i)_{\gamma(t)} > 0$, para todo $t \in [0, t_0)$, temos por continuidade que $S_j(A_i)_{\gamma(t_0)} = \lim\limits_{t \longrightarrow t_0^-} S_j(A_i)_{\gamma(t)} \geq 0$,isto é, $S_j(A_i) \geq 0$ em t_0. Provaremos que $S_j(A_i) > 0$ em t_0, e assim $t_0 \in J$. Consideremos primeiramente $j = r-1$. Suponha existir $i \in \{1, \ldots, m\}$ tais que $S_{r-1}(A_i) = 0$ em t_0. Para este i, temos

$$S_r = \lambda_i S_{r-1}(A_i) + S_r(A_i) = S_r(A_i),$$

como $S_r > 0$ em Σ temos $S_r(A_i) > 0$ em t_0. Sendo $S_j(A_i) \geq 0$ em t_0, temos $H_j(A_i) \geq 0$ para $1 \leq j \leq r-1$, e $S_r(A_i) > 0 \Rightarrow H_r(A_i) > 0$. Logo concluímos da proposição 2.4 que

$$H_1(A_i) \geq H_2^{\frac{1}{2}}(A_i) \geq \ldots \geq H_{r-1}^{\frac{1}{r-1}}(A_i) \geq H_r^{\frac{1}{r}}(A_i) > 0,$$

e portanto $H_{r-1}(A_i) > 0 \Rightarrow S_{r-1}(A_i) > 0$, contradição. Concluímos então que $S_{r-1}(A_i) > 0$, em t_0. Sendo $S_{r-1}(A_i) > 0$ e $H_1(A_i) \geq H_2^{\frac{1}{2}}(A_i) \geq \ldots \geq$

$H_r^{\frac{1}{r}}(A_i) > 0$ em t_0, temos que $S_j(A_i) > 0$ em t_0, para $1 \leq j \leq r-1$. E então $t_0 \in J$. Afirmo que $t_0 = 1$, pois caso contrário se $t_0 < 1$, por continuidade, existe uma bola $B(\gamma(t_0))$ centrada em $\gamma(t_0)$, tais que, $S_j(A_i) > 0$ em $B(\gamma(t_0))$, isto é, existe $t_1 > t_0$ tal que $S_j(A_i) > 0$ em t_1, contradizendo o fato de $t_0 = supJ$. Assim obtemos que em q, $S_j(A_i) > 0$. Como q foi tomado arbitrariamente, temos que $S_j(A_i) > 0$ em Σ, e assim L_j é elíptico, $\forall 1 \leq j \leq r-1$. Concluímos ainda da proposição 2.2 que $(m-j)S_j = \sum_{i=1}^{m} S_j(A_i) > 0 \Rightarrow S_j > 0$, e portanto $H_j > 0$.

Capítulo 3

Estimativa de Altura de Gráficos Verticais e Aplicação

Neste capitulo, consideraremos hipersuperfície em uma variedade produto $(m+1)$-dimensional $M^m \times \mathbb{R}$ com r-ésima curvatura média constante positiva. Usaremos t para denotar a ultima coordenada em $M \times \mathbb{R}$.

Definição 3.1 *A função altura, denotada por h, de Σ em $M \times \mathbb{R}$ é definida como a projeção $t_{|\Sigma} : \Sigma \to \mathbb{R}$, isto é, se $p \in \Sigma$, $x(p) \in M \times \{t\}$, então $h(p) = t$.*

Considerando um sistema de coordenadas ortonormal com funções coordenadas $x_1, \ldots x_{m+1}$ em p temos que:

$$\begin{aligned} \nabla h(p) &= \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\partial}{\partial x_i}(h)\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(h)\frac{\partial}{\partial x_i}(p) + \frac{\partial}{\partial x_{m+1}}(h)\frac{\partial}{\partial x_{m+1}}(p) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(h)\frac{\partial}{\partial t}(p) = \frac{\partial}{\partial t}(p). \end{aligned}$$

Lema 3.1 *Seja M uma variedade Riemanniana orientada m-dimensional e seja Σ uma hipersuperfície orientável imersa em $M^m \times \mathbb{R}$ (com ou sem fronteira). Então*

$$L_{r-1}(h) = rS_r n,$$

onde $1 \leq r \leq m+1$, h *denota a função altura de* Σ *e* $n = \langle N, \frac{\partial}{\partial t} \rangle$.

Demonstração: Fixe $p \in \Sigma$. Seja $\{e_i\}$ um referencial ortonormal geodésico de Σ em p. Assim $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$. Podemos assumir que $\{e_i\}$ são as direções principais em p, isto é, $A(e_i)(p) = \lambda_i e_i(p)$, onde λ_i são os autovalores(curvaturas principais) de A em p(este referencial pode ser obtido pela rotação de $\{e_i\}$). Considere a translação vertical $\Phi_s : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi_s(x,t) = (x, t+s).$$

Dados $v, w \in T_{(x_0,t_0)}(M \times \mathbb{R})$, considere as curvas $\alpha : I \longrightarrow M \times \mathbb{R}$ e $\beta : J \longrightarrow M \times \mathbb{R}$ dadas por $\alpha(r) = (x(r), t(r))$, $\beta(l) = (x(l), t(l))$ tais que $\alpha(0) = (x_0, t_0) = \beta(0)$, $\alpha'(0) = v$ e $\beta'(0) = w$ com $0 \in I \cap J$. Assim temos que :

$$\begin{aligned} d(\Phi_s)_{(x_0,t_0)}(v) &= \frac{d}{dr}\Phi_s(\alpha(r))\Big|_{r=0} = \frac{d}{dr}\Big(x(r), t(r)+s\Big)\Big|_{r=0} \\ &= \Big(\frac{d}{dr}x(r)\Big|_{r=0}, \frac{d}{dr}t(r)\Big|_{r=0} + \frac{d}{dr}s\Big|_{r=0}\Big) \\ &= \Big(\frac{d}{dr}x(r)\Big|_{r=0}, \frac{d}{dr}t(r)\Big|_{r=0}\Big) = \alpha'(0) = v \end{aligned}$$

Analogamente, $d(\Phi_s)_{(x_0,t_0)}(w) = w$. Logo

$$\langle d(\Phi_s)_{(x_0,t_0)}(v), d(\Phi_s)_{(x_0,t_0)}(w) \rangle_{\Phi_s(x_0,t_0)} = \langle v, w \rangle_{(x_0,t_0)},$$

e portanto, Φ_s é uma isometria. Note que:

(i) $\Phi : \mathbb{R} \times (M \times \mathbb{R}) \longrightarrow M \times \mathbb{R}$ onde $\Phi(s,x,t) = (x, t+s)$ é diferenciável;

(ii) $\forall\, s \in \mathbb{R}$ a curva $s \longmapsto \Phi(s,x,t)$ é a trajetória de $\frac{\partial}{\partial t}$ passando por (x,t) em $s = 0$. De fato, devemos verificar que $\Phi_s(x,t) = \Phi(s,x,t)$ é o fluxo de $\frac{\partial}{\partial t}$, isto é, $\frac{\partial}{\partial s}\Big(\Phi_s(x,t)\Big) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\Phi_s(x,t)\Big)$. Com efeito, como x não depende nem de s nem de t temos :

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big(\Phi_s(x,t)\Big) = \frac{\partial}{\partial s}\Big(x, t+s\Big) = (0,1) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(x, t+s\Big) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\Phi_s(x,t)\Big).$$

Com as observações acima e sendo $\Phi_s : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times \mathbb{R}$ uma isometria, $\forall s$, temos por definição que $\frac{\partial}{\partial t}$ é um campo de Killing. Considere agora em $M \times \mathbb{R}$ a geodésica dada pela reta $\mathbb{R}$, denotemos ela por γ, assim $\gamma' = \frac{\partial}{\partial t}$ e portanto $\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} = \overline{\nabla}_{\gamma'} \gamma' = 0$. Considere um referencial geodésico $\{e_i\}_{i=1}^{m+1}$ de Σ em $p = (p_1, \dots, p_m, p_{m+1})$, e $\{E_i\}_{i=1}^{m}$ referencial geodésico de M em $(p_1, \dots, p_m)$. Assim $\{E_1, \dots, E_m, \frac{\partial}{\partial t}\}$ forma um referencial ortogonal para $M \times \mathbb{R}$, e portanto $e_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \alpha_j E_j + \beta \frac{\partial}{\partial t}$.

Logo

$$\overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla} h = \overline{\nabla}_{\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j E_j + \beta \frac{\partial}{\partial t}\right)} \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \overline{\nabla}_{E_j} \frac{\partial}{\partial t} + \beta \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \overline{\nabla}_{E_j} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Mas note que, $\forall i, j = 1, \dots, m$

$$\left\langle E_i, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 0 \Rightarrow 0 = E_j \left\langle E_i, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{E_j} E_i, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle + \left\langle E_i, \overline{\nabla}_{E_j} \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle,$$

e portanto, $\left\langle E_i, \overline{\nabla}_{E_j} \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 0$.

E ainda, sendo $\frac{\partial}{\partial t}$ campo de Killing temos

$$\left\langle \overline{\nabla}_{E_j} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t}, E_j \right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \overline{\nabla}_{E_j} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 0.$$

Concluimos então que o campo $\overline{\nabla}_{E_j} \frac{\partial}{\partial t}$ é nulo, $\forall\, j = 1, \dots, m$. E, portanto

$$\overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla} h = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \overline{\nabla}_{E_j} \frac{\partial}{\partial t} = 0.$$

Assim temos que

$$\begin{aligned} Hess(h)(e_i) &= \nabla_{e_i}(\nabla h) = \left[\overline{\nabla}_{e_i}(\nabla h)\right]^{\top} = \left[\overline{\nabla}_{e_i}\big(\overline{\nabla} h - \langle \overline{\nabla} h, N \rangle N\big)\right]^{\top} \\ &= \left[\overline{\nabla}_{e_i}\big(\overline{\nabla} h\big) - \overline{\nabla}_{e_i}\big(\langle \overline{\nabla} h, N \rangle N\big)\right]^{\top} = -\left[\overline{\nabla}_{e_i}\big(\langle \overline{\nabla} h, N \rangle N\big)\right]^{\top}, \end{aligned}$$

onde $\top$ denota a componente tangente dos vetores de $T(M^m \times \mathbb{R})$ em Σ. Logo,

$$\begin{aligned}
\langle Hess(h)(e_i), e_i\rangle(p) &= -\Big\langle \Big[\overline{\nabla}_{e_i}\big(\langle\overline{\nabla}h, N\rangle N\big)\Big]^{\top}, e_i\Big\rangle(p) \\
&= -\langle\overline{\nabla}_{e_i}\big(\langle\overline{\nabla}h, N\rangle N\big), e_i\rangle(p) \\
&= -\langle e_i\big(\langle\overline{\nabla}h, N\rangle\big)N + \langle\overline{\nabla}h, N\rangle\overline{\nabla}_{e_i}N, e_i\rangle(p) \\
&= -\langle\overline{\nabla}h, N\rangle\langle\overline{\nabla}_{e_i}N, e_i\rangle(p).
\end{aligned}$$

Mas note que

$$-A(e_i) = (\overline{\nabla}_{e_i}N)^{\top} = \overline{\nabla}_{e_i}N - (\overline{\nabla}_{e_i}N)^{\perp} \Rightarrow -\overline{\nabla}_{e_i}N = A(e_i) - (\overline{\nabla}_{e_i}N)^{\perp},$$

e, portanto

$$\langle -\overline{\nabla}_{e_i}N, e_i\rangle = \langle A(e_i) - (\overline{\nabla}_{e_i}N)^{\perp}, e_i\rangle = \langle A(e_i), e_i\rangle - \langle(\overline{\nabla}_{e_i}N)^{\perp}, e_i\rangle = \lambda_i\langle e_i, e_i\rangle = \lambda_i.$$

Logo,

$$\langle Hess(h)(e_i), e_i\rangle(p) = \lambda_i\langle\overline{\nabla}h, N\rangle(p) = \lambda_i\Big\langle\frac{\partial}{\partial t}, N\Big\rangle(p) = \lambda_i n(p).$$

Assim

$$\begin{aligned}
L_{r-1}(h) &= tr(T_{r-1}Hess(h))(p) = \sum_{i=1}^{m}\langle T_{r-1}Hessh(e_i), e_i\rangle(p) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\langle Hessh(e_i), T_{r-1}(e_i)\rangle(p) = \sum_{i=1}^{m} S_{r-1}(A_i)\langle Hessh(e_i), e_i\rangle(p) \\
&= \sum_{i=1}^{m} S_{r-1}(A_i)\lambda_i n(p) = n(p)\sum_{i=1}^{m}\lambda_i S_{r-1}(A_i) \\
&= n(p)((r-1)+1)S_{(r-1)+1} = n(p)rS_r.
\end{aligned}$$

Como rS_rn independe da escolha do referencial, obtemos que, em Σ,

$$L_{r-1}(h) = rS_rn.$$

Definição 3.2 *Seja $\Sigma \subset \overline{M}^{m+1}$ uma hipersuperfície orientada. Seja D um dominio compacto de Σ. Definimos a variação de D por*
$\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \overline{D} \longrightarrow M \times \mathbb{R}, \varepsilon > 0,$ tais que para cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a aplicação $\phi_s : \{s\} \times \overline{D} \longrightarrow M \times \mathbb{R}, \phi_s(p) = \phi(s,p)$ é uma imersão, e $\phi_0 = \overline{D}$.

Seja $A_t(p)$ o operador forma de $\Sigma(t)$ em p e para $0 \leq r \leq m$, seja $S_r(t)(p)$ a r-ésima função simétrica dos autovalores de $A_t(p)$.

Proposição 3.1 *Seja $E_s(p) = \frac{\partial}{\partial s}\phi(p,s)$ e $f_s = \langle E_s, N_s \rangle$, onde N_s é o normal unitário a $\phi_s(D)$. Então*

$$\frac{\partial}{\partial s} S_r(s) = L_{r-1}(f_s) + f_s\big(S_1 S_r - (r+1)S_{r+1}\big) + f_s tr(T_{r-1}\overline{R_N}) + E_s^{\top}(S_r),$$

onde $\overline{R}_N$ é definido como $\overline{R}_N(X) = \overline{R}(N,X)N$, $\overline{R}$ o operador curvatura de $\overline{M}$, e $E_s^{\top}$ denota a parte tangente de E_s.

Para provarmos esta proposição precisaremos do seguinte lema:

Lema 3.2 *$A'(s) = Hessf + f\overline{R}_N + fA^2 + \nabla_{E^{\top}}(A)$ (estamos desconsiderando os índices)*

Demonstração do Lema: Dado $p \in \Sigma$ e u, v campos tangentes definidos numa vizinhança de p, sejam $u_s = d\phi_s(u)$ e $v_s = d\phi_s(v)$. Assim

$$II(s)(u_s, v_s) = -\langle \overline{\nabla}_{u_s} N_s, v_s \rangle = \langle A(s)u_s, v_s \rangle.$$

Considerando primeiramente $II(s)(u_s, v_s) = -\langle \overline{\nabla}_{u_s} N_s, v_s \rangle$ temos $-(II(u,v))' = \langle \overline{\nabla}_E \overline{\nabla}_u N, v \rangle + \langle \overline{\nabla}_u N, \overline{\nabla}_E v \rangle$, sendo $E = E^{\top} + E^N$, temos pela dfinição de $\overline{\nabla}$ que,

$$-(II(u,v))' = \langle \overline{\nabla}_{E^{\top}} \overline{\nabla}_u N, v \rangle + \overline{\nabla}_{E^{\perp}} \overline{\nabla}_u N, v \rangle - \langle A(u), \overline{\nabla}_E v \rangle. \qquad (3.1)$$

Mas sendo $\overline{R}(E^{\perp}, u)N = \overline{\nabla}_u \overline{\nabla}_{E^{\perp}} N - \overline{\nabla}_{E^{\perp}} \overline{\nabla}_u N + \overline{\nabla}_{[E^{\perp}, u]} N$, temos

$$\overline{\nabla}_{E^{\perp}} \overline{\nabla}_u N = \overline{\nabla}_u \overline{\nabla}_{E^{\perp}} N + \overline{\nabla}_{[E^{\perp}, u]} N - \overline{R}(E^{\perp}, u)N \qquad (3.2)$$

E ainda, como $[E,u]=0$ temos

$$[E^{\perp},u]=-[E^{\top},u] \tag{3.3}$$

logo

$$\Big\langle\overline{\nabla}_{[E^{\perp},u]}N,v\Big\rangle=\Big\langle-\overline{\nabla}_{[E^{\top},u]}N,v\Big\rangle=\Big\langle-\nabla_{[E^{\top},u]}N,v\Big\rangle=\Big\langle A([E^{\perp},u]),v\Big\rangle. \tag{3.4}$$

Ainda por (3.3) temos que

$$-[E^{\top},u]=[E^{\perp},u]=\overline{\nabla}_{E^{\perp}}u-\overline{\nabla}_{u}E^{\perp},$$

assim $\overline{\nabla}_{E^{\perp}}u=\overline{\nabla}_{u}E^{\perp}-[E^{\top},u]$, e portanto, como $\langle N,u\rangle=0$ temos $0=E^{\perp}\langle N,u\rangle=\langle\overline{\nabla}_{E^{\perp}}N,u\rangle+\langle N,\overline{\nabla}_{E^{\perp}}u\rangle$, logo

$$\begin{aligned}
\langle\overline{\nabla}_{E^{\perp}}N,u\rangle &= -\langle N,\overline{\nabla}_{E^{\perp}}u\rangle=-\langle N,\overline{\nabla}_{u}E^{\perp}-[E^{\top},u]\rangle\\
&= -\langle N,\overline{\nabla}_{u}E^{\perp}\rangle+\langle N,[E^{\top},u]\rangle\\
&= -\langle N,\overline{\nabla}_{u}E^{\perp}\rangle
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Note que :

$$\begin{aligned}
df(u) &= u[f]=u[\langle E,N\rangle]=u(\langle E^{\top},N\rangle+\langle E^{\perp},N\rangle)\\
&= \langle\overline{\nabla}_{u}E^{\perp},N\rangle+\langle E^{\perp},\overline{\nabla}_{u}N\rangle\\
&= \langle\overline{\nabla}_{u}E^{\perp},N\rangle.
\end{aligned}$$

Temos por (3.5) que para todo u tangente

$$\langle\overline{\nabla}_{E^{\perp}}N,u\rangle=-\langle N,\overline{\nabla}_{u}E^{\perp}\rangle=-df(u)=-\langle\nabla f,u\rangle=\langle-\nabla f,u\rangle,$$

logo

$$\overline{\nabla}_{E^{\perp}}N=-\nabla f. \tag{3.6}$$

Substituindo esses valores em (3.1) obtemos:

$$
\begin{aligned}
-(II(u,v))' &= \langle \overline{\nabla}_{E^\top}(-A(u)), v\rangle + \langle \overline{\nabla}_u \overline{\nabla}_{E^\perp} N + \overline{\nabla}_{[E^\perp,u]} N - \overline{R}(E^\perp,u)N, v\rangle \\
&\quad -\langle A(u), \overline{\nabla}_E v\rangle \\
&= -\langle \overline{\nabla}_{E^\top}(A(u)), v\rangle + \langle \overline{\nabla}_u \overline{\nabla}_{E^\perp} N, v\rangle - \langle \overline{R}(E^\perp,u)N, v\rangle + \langle \overline{\nabla}_{[E^\perp,u]} N, v\rangle - \\
&\quad -\langle A(u), \overline{\nabla}_E v\rangle \\
&= -\langle \big(\overline{\nabla}_{E^\top}(A(u))\big)^\top + \big(\overline{\nabla}_{E^\top}(A(u))\big)^\perp, v\rangle + \langle \overline{\nabla}_u(-\nabla f), v\rangle + \langle A([E^\top,u]), v\rangle \\
&\quad -\langle \overline{R}(fN,u)N, v\rangle - \langle A(u), \overline{\nabla}_E v\rangle \\
&= -\langle \nabla_{E^\top}(A(u)), v\rangle - \langle \overline{\nabla}_u(\nabla f), v\rangle + \langle A(\nabla_{E^\top} u - \nabla_u E^\top), v\rangle \\
&\quad -f\langle \overline{R}(N,u)N, v\rangle - \langle A(u), \overline{\nabla}_E v\rangle \\
&= -\langle \nabla_{E^\top}(A)(u) + A(\nabla_{E^\top}(u)), v\rangle - \langle Hess f(u), v\rangle + \langle A(\nabla_{E^\top} u), v\rangle \\
&\quad -\langle A(\nabla_u E^\top), v\rangle - f\langle \overline{R}(N,u)N, v\rangle - \langle A(u), \overline{\nabla}_E v\rangle \\
&= -\langle \nabla_{E^\top}(A)(u), v\rangle - \langle Hess f(u), v\rangle - \langle A(\nabla_u E^\top), v\rangle \\
&\quad -f\langle \overline{R}(N,u)N, v\rangle - \langle A(u), \overline{\nabla}_E v\rangle
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
(II(u,v))' &= \langle \nabla_{E^\top}(A)(u), v\rangle + \langle Hess f(u), v\rangle + \langle A(\nabla_u E^\top), v\rangle \\
&\quad +f\langle \overline{R}(N,u)N, v\rangle + \langle A(u), \overline{\nabla}_E v\rangle.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Por outro lado, sendo $II(s)(u_s,v_s) = \langle A(s)u_s, v_s\rangle$, temos que:

$$
\begin{aligned}
(II(u,v))' &= \langle \overline{\nabla}_E(A(u)), v\rangle + \langle A(u), \overline{\nabla}_E v\rangle \\
&= \langle \nabla_E(A(u)) + \big(\nabla_E(A(u))\big)^\perp, v\rangle + \langle A(u), \overline{\nabla}_E v\rangle \\
&= \langle E(A)(u) + A(\nabla_E u), v\rangle + \langle A(u), \overline{\nabla}_E v\rangle \\
&= \langle A'(u), v\rangle + \langle A(\nabla_E u), v\rangle + \langle A(u), \overline{\nabla}_E v\rangle \\
&= \langle A'(u), v\rangle + \langle A(\nabla_u E), v\rangle + \langle A(u), \overline{\nabla}_E v\rangle,
\end{aligned}
$$

a ultima igualdade foi garantida por $0 = [E, u] = \nabla_E u - \nabla_u E$, ou seja,
$\nabla_E u = \nabla_u E$.
Como $|N| = 1$ temos que $0 = u[\langle N, N\rangle] = 2\langle \overline{\nabla}_u N, N\rangle$, isto é, $\langle \overline{\nabla}_u N, N\rangle = 0$,
como a codimensão de x é 1, temos que $\overline{\nabla}_u N$ é tangente, logo,
$\overline{\nabla}_u E^{\perp} = \overline{\nabla}(fN) = u[f]N + f\overline{\nabla}_u N$, e portanto,
$\nabla_u E^{\perp} = \left(\overline{\nabla}_u E^{\perp}\right)^{\top} = f\overline{\nabla}_u N = f\nabla_u N = -fA(u)$, temos então que

$$\begin{aligned}
(II(u,v))' &= \langle A'(u), v\rangle + \langle A(\nabla_u E), v\rangle + \langle A(u), \overline{\nabla}_E v\rangle \\
&= \langle A'(u), v\rangle + \langle A(\nabla_u E^{\top} + \nabla_u E^{\perp}), v\rangle + \langle A(u), \overline{\nabla}_E v\rangle \\
&= \langle A'(u), v\rangle + \langle A(\nabla_u E^{\top}), v\rangle + \langle A(\nabla_u E^{\perp}), v\rangle + \langle A(u), \overline{\nabla}_E v\rangle \\
&= \langle A'(u), v\rangle + \langle A(\nabla_u E^{\top}), v\rangle + \langle A(-fA(u)), v\rangle + \langle A(u), \overline{\nabla}_E v\rangle \\
&= \langle A'(u), v\rangle + \langle A(\nabla_u E^{\top}), v\rangle - \langle fA^2(u), v\rangle + \langle A(u), \overline{\nabla}_E v\rangle.
\end{aligned}$$

Logo

$$(II(u,v))' = \langle A'(u), v\rangle + \langle A(\nabla_u E^{\top}), v\rangle - f\langle A^2(u), v\rangle + \langle A(u), \overline{\nabla}_E v\rangle \quad (3.8)$$

Igualando (3.7) e (3.8) obtemos:

$$\begin{aligned}
&\langle \nabla_{E^{\top}}(A)(u), v\rangle + \langle Hessf(u), v\rangle + \langle A(\nabla_u E^{\top}), v\rangle + f\langle \overline{R}(N,u)N, v\rangle \\
&+\langle A(u), \overline{\nabla}_E v\rangle = \langle A'(u), v\rangle + \langle A(\nabla_u E^{\top}), v\rangle - \langle fA^2(u), v\rangle + \langle A(u), \overline{\nabla}_E v\rangle,
\end{aligned}$$

como a igualdade acima vale para todo u, v temos que

$$A'(s) = Hessf + f\overline{R}_N + fA^2 + \nabla_{E^{\top}}(A)$$

Demonstração da proposição: Temos pela proposição (2.3) que
$\frac{\partial}{\partial s}(S_r) = tr\big(A^{'}(s)T_{r-1}\big)$. Como A e T_{r-1} comutam temos que
$A^{'}(s)T_{r-1} = T_{r-1}A^{'}(s)$, onde $T_{r-1}^{'} = 0$, logo pelo lema temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}(S_r) &= tr\big(A^{'}(s)T_{r-1}\big) = tr\Big(T_{r-1}\overline{\nabla}_{E^{\top}}(A) + T_{r-1}Hessf + T_{r-1}f\overline{R_N} + T_{r-1}fA^2\Big) \\
&= tr\Big(T_{r-1}\overline{\nabla}_{E^{\top}}(A)\Big) + tr\Big(T_{r-1}Hessf\Big) + tr\Big(T_{r-1}f\overline{R_N}\Big) + tr\Big(T_{r-1}fA^2\Big)
\end{aligned}$$

Novamente pela proposição (2.3) temos que

$$tr(T_{r-1}\overline{\nabla}_{E^{\top}}A) = E^{\top}(S_r),$$

logo sendo $tr(T_{r-1}A^2) = S_1S_r - (r+1)S_{r+1}$, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial s}(S_r) = E^{\top}(S_r) + L_{r-1}(f) + ftr(T_{r-1}\overline{R}_N) + f(S_1S_r - (r+1)S_{r+1}).$$

Lema 3.3 *Com M e Σ como no lema (3.1), assuma H_r de Σ ser constante para algum r, $1 \leq r \leq m+1$. Então, em Σ,*

$$L_{r-1}(n) = -n(S_1S_r - (r+1)S_{r+1} + tr(T_{r-1}\overline{R}_N)).$$

Demonstração do Lema: Considere a variação

$$\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times D \subset (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \to M \times \mathbb{R}$$

dada pela translação vertical de $M \times \mathbb{R}$, $\phi(s, x, t) = (x, t+s)$ onde $(x, t) \in M \times \mathbb{R}$.

Com esta variação as curvaturas principais de $\Sigma(s)$ permanecem inalteradas, logo a r-ésima função simétrica $S_r(s)(x, t)$dos autovalores de $A_s(x, t)$ é igual a r-ésima função simétrica $S_r(0)(x, t)$ dos autovalores de $A_s(x, t)$, onde $A_s(x, t)$ é o operador forma de $\Sigma(s)$ em (x, t).

Sendo H_r constante para algum r, temos que S_r é constante. Como $S_r(s) = S_r(0) = S_r$ concluimos que $\frac{\partial}{\partial s}S_r(s) = \frac{\partial}{\partial s}S_r = 0$. Também pela hipótese de S_r ser constante em Σ, obtemos $E_s^{\top}(S_r) = 0$, para $s = 0$. Mas, note que,

$$E_0(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial s}(s, x, t) \mid_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s}(x, t+s) \mid_{s=0} = (0, 1) = \sum_{i=1}^{m} 0\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Logo quando $s = 0$ temos $f_0 = \langle E_0, N_0 \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial t}, N \rangle = n$. E portanto pela proposição anterior obtemos:

$$L_{r-1}(n) = -n(S_1S_r - (r+1)S_{r+1} + tr(T_{r_1}\overline{R}_N)).$$

Dado $p = (x, t) \in M \times \mathbb{R}$. Para $X \in T_p(M \times \mathbb{R})$, seja X^h a componente horizontal de X e X^V a componente vertical, isto é, $X^h \in T_pM$ e $X^V \in \mathbb{R}$. Seja $\{e_i\}$ um referencial geodésico de Σ em p e N o normal unitário a Σ em p.
Usando a conexão Riemanniana produto e a métrica produto obtemos:

$$\begin{aligned}
\overline{R}(e_i, N)e_i &= \overline{\nabla}_N \overline{\nabla}_{e_i} e_i - \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_N e_i + \overline{\nabla}_{[e_i, N]} e_i \\
&= \overline{\nabla}_N (\nabla_{e_i^h} e_i^h + \nabla^{\perp}_{e_i^V} e_i^V) - \overline{\nabla}_{e_i} (\nabla_{N^h} e_i^h + \nabla^{\perp}_{N^V} e_i^V) + \nabla_{[e_i^h, N^h]} e_i^h + \nabla^{\perp}_{[e_i^V, N^V]} e_i^V \\
&= \nabla_{N^h} \nabla_{e_i^h} e_i^h + \nabla^{\perp}_{N^V} \nabla^{\perp}_{e_i^V} e_i^V - \nabla_{e_i^h} \nabla_{N^h} e_i^h - \nabla^{\perp}_{e_i^V} \nabla^{\perp}_{N^V} e_i^V + \\
&+ \nabla_{[e_i^h, N^h]} e_i^h + \nabla^{\perp}_{[e_i^V, N^V]} e_i^V \\
&= R(e_i^h, N^h) e_i^h + R^{\perp}(e_i^V, N^V) e_i^V
\end{aligned}$$

Mas como $e_i^V, N^V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ temos que $e_i^V = \lambda N^V$, logo temos pela linearidade de $R^{\perp}$ que

$$R^{\perp}(e_i^V, N^V)e_i^V = R^{\perp}(\lambda N^V, N^V)\lambda N^V = \lambda^2 R^{\perp}(N^V, N^V)N^V = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\overline{R}(e_i, N, e_i, N) &= \langle \overline{R}(e_i, N)e_i, N \rangle = \langle R(e_i^h, N^h)e_i^h, N^h \rangle + \langle 0, N^{\perp} \rangle \\
&= K(e_i^h, N^h)|e_i^h \wedge N^h|^2,
\end{aligned}$$

onde K é a curvatura seccional de M.
Se $\{e_i\}$ são também direções principais de A, temos que $T_r(e_i) = S_r(A_i)e_i$, e então

$$\begin{aligned}
tr(T_r \overline{R}_N)(p) &= \sum_i \langle e_i, T_r \overline{R}_N(e_i) \rangle (p) \\
&= \sum_i \langle T_r(e_i), \overline{R}_N(e_i) \rangle (p) \\
&= \sum_i S_r(A_i) \langle \overline{R}(N, e_i)N, e_i \rangle (p) \\
&= \sum_i S_r(A_i) \overline{R}(N, e_i, N, e_i)(p) \\
&= \sum_i S_r(A_i) K(e_i^h, N^h)|e_i^h \wedge N^h|^2(p).
\end{aligned}$$

Teorema 3.4 *Seja M uma variedade Riemanniana orientada m-dimensional. Seja Σ um gráfico vertical compacto na variedade produto $M \times \mathbb{R}$ com bordo em $M \times \{0\}$ e com H_r constante positivo, para algum $1 \leq r \leq m$. Denotemos $h : \Sigma \to \mathbb{R}$ a função altura de Σ.*

(i) Se a curvatura seccional de M satisfaz $K \geq 0$, então em Σ,

$$|h| \leq H_r^{-\frac{1}{r}}. \tag{3.9}$$

(ii) Quando $r = 2$, se a curvatura seccional de M satisfaz $K \geq -\tau(\tau > 0)$, e $H_2 > \tau$, então em Σ,

$$|h| \leq \frac{\sqrt{H_2}}{H_2 - \tau}. \tag{3.10}$$

(iii) Quando $r = 1$, se a curvatura seccional de M satisfaz $K \geq -\tau(\tau > 0)$, e $H_1^2 > \frac{m-1}{m}\tau$, então em Σ

$$|h| \leq \frac{\sqrt{H_1}}{H_1^2 - \frac{m-1}{m}\tau}. \tag{3.11}$$

Demonstração Sejam $p \in \Sigma$ o ponto onde h atinge seu máximo e $n = \langle N, \frac{\partial}{\partial t}\rangle$. Seja $\{e_i\}$ um referencial ortonormal em $T_p\Sigma$ formado pelas direções principais e N normal a Σ em p,logo $A(e_i) = -(\overline{\nabla}_{e_i}N)^\top = -\nabla_{e_i}N$. Assim $\nabla^2 h(e_i, e_i)(p) = \langle \nabla_{e_i}\nabla h, e_i\rangle_p \leq 0$. Sendo $\nabla h = \overline{\nabla} h - \langle \frac{\partial}{\partial t}, N\rangle N = \frac{\partial}{\partial t} - nN$ temos

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_i}\nabla h &= \nabla_{e_i}\Big(\frac{\partial}{\partial t} - nN\Big) = \nabla_{e_i}\frac{\partial}{\partial t} - (e_i(n)N + n\nabla_{e_i}N) \\
&= \Big(\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla} h\Big)^\top - \Big(\langle \nabla_{e_i}N, \frac{\partial}{\partial t}\rangle + \langle N, \nabla_{e_i}\frac{\partial}{\partial t}\rangle\Big)N - n\nabla_{e_i}N \\
&= \langle -\nabla_{e_i}N, \frac{\partial}{\partial t}\rangle N - n\nabla_{e_i}N \\
&= \langle A(e_i), \frac{\partial}{\partial t}\rangle N + nA(e_i) = \lambda_i\langle e_i, \frac{\partial}{\partial t}\rangle N + n\lambda_i e_i \\
&= n\lambda_i e_i
\end{aligned}$$

para todo i. Logo $\nabla^2 h(e_i, e_i)(p) = \langle \nabla_{e_i} \nabla h, e_i \rangle_p = n(p)\lambda_i \leq 0, \forall\, i$, assim se $n \geq 0$ temos $\lambda_i \leq 0, \forall i$ e se $n \leq 0$ então $\lambda_i \geq 0, \forall i$. Concluimos então que as curvaturas principais tem o mesmo sinal em p. Como $H_r > 0$, em Σ, podemos encontrar neste ponto que todas as curvaturas principais são não negativas e o normal unitário N a Σ aponta para dentro. Sendo Σ um gráfico vertical, podemos achar o campo normal unitário suave N a Σ apontando para dentro (isto é, $n = \langle N, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \leq 0$ em Σ.) Podemos então aplicar as proposições 2.5 e 2.6 para obtermos que L_{r-1} é elíptico, e $H_i(1 \leq i \leq r-1)$ são positivos.
Definamos $\varphi = ch + n$ em Σ, onde c é uma constante positiva a ser determinada. Como $\partial\Sigma \subset M \times \{0\}$ temos $h_{|\partial\Sigma} = 0$, e portanrto, em $\partial\Sigma$ temos $\varphi = n \leq 0$. Sendo L_{r-1} um operador elíptico, temos pelo princípio do máximo que, se $L_{r-1}(\varphi) \geq 0$ então $\varphi \leq 0$ em Σ. Então $h \leq \frac{-n}{c} \leq \frac{1}{c}$.
$\Big(-n \leq\mid n \mid=\mid \langle N, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \mid=\mid \cos\theta(N, \frac{\partial}{\partial t}) \mid\leq 1 \Big)$. Agora acharemos c tais que $L_{r-1}(\varphi) \geq 0$. Pelos Lemas 3.1 e 3.3, temos

$$L_{r-1}(\varphi) = cL_{r-1}(h) + L_{r-1}(n) = crS_r n - n\big(S_1 S_r - (r+1)S_{r+1} + tr(T_{r-1}\overline{R}_N)\big).$$

Assim $L_{r-1}(\varphi) \geq 0$ é equivalente a

$$-rS_r c + S_1 S_r - (r+1)S_{r+1} + tr(T_{r-1}\overline{R}_N) \geq 0.$$

Se $K \geq a(a \leq 0)$ temos

$$\begin{aligned} tr(T_{r-1}\overline{R}_N)(p) &= \sum_i S_{r-1}(A_i) K(e_i^h, N^h) \mid e_i^h \wedge N^h \mid^2 \\ &\geq a \sum_i S_{r-1}(A_i) \mid e_i^h \wedge N^h \mid^2 \end{aligned}$$

Mas note que $\mid e_i^h \mid\leq\mid e_i \mid= 1$ e $\mid N^h \mid\leq\mid N \mid= 1$, logo

$$\mid e_i^h \wedge N^h \mid^2=\mid e_i^h \mid^2\mid N^h \mid^2\mid \sin\theta(e_i^h, N^h) \mid^2\leq 1,$$

sendo $S_{r-1}(A_i) > 0$ e $a \leq 0$ temos

$$aS_{r-1}(A_i) \mid e_i^h \wedge N^h \mid^2\geq aS_{r-1}(A_i),$$

e portanto,

$$tr(T_{r-1}\overline{R}_N)(p) \geq a\sum_i S_{r-1}(A_i) = (m-r+1)aS_{r-1}.$$

Agora podemos achar c tais que

$$-rS_rc + S_1S_r - (r+1)S_{r+1} + (m-r+1)aS_{r-1} \geq 0.$$

Mas sendo $H_1, H_2, \ldots, H_r$ não negativo e $H_1H_r \geq H_{r+1}$, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{S_1}{C_m^1}\frac{S_r}{C_m^r} \geq \frac{S_{r+1}}{C_m^{r+1}} \quad & \Rightarrow \quad \frac{S_1}{\frac{m!}{(m-1)!}}\frac{S_r}{\frac{m!}{(m-r)!r!}} \geq \frac{S_{r+1}}{\frac{m!}{(m-r-1)!(r+1)!}} \\
& \Rightarrow \quad \frac{S_1S_r(m-r)!r!}{mm!} \geq \frac{(m-r-1)!(r+1)!S_{r+1}}{m!} \\
& \Rightarrow \quad \frac{(m-r)(m-r-1)!r!}{m}S_1S_r \geq (m-r-1)!(r+1)r!S_{r+1} \\
& \Rightarrow \quad \frac{m-r}{m}S_1S-r \geq (r+1)S_{r+1}.
\end{aligned}$$

Logo

$$S_1S_r - (r+1)S_{r+1} \geq S_1S_r - \frac{m-r}{m}S_1S_r = \frac{r}{m}S_1S_r,$$

e portanto é suficiente achar c tais que

$$-rS_rc + \frac{r}{m}S_1S_r + (m-r+1)aS_{r-1} \geq 0.$$

Então,

$$c \leq \frac{rS_1S_r}{mrS_r} + \frac{(m-r+1)aS_{r-1}}{rS_r} = \frac{S_1}{m} + \frac{(m-r+1)a}{r}\frac{S_{r-1}}{S_r}.$$

Mas note que,

$$\begin{aligned}
\frac{H_{r-1}}{H_r} &= \frac{C_m^r}{C_m^{r-1}}\frac{S_{r-1}}{S_r} = \frac{\frac{m!}{(m-r)!r!}}{\frac{m!}{(m-r+1)!(r-1)!}}\frac{S_{r-1}}{S_r} \\
&= \frac{(m-r+1)(m-r)!(r-1)!}{(m-r)!r(r-1)!}\frac{S_{r-1}}{S_r} \\
&= \frac{(m-r+1)}{r}\frac{S_{r-1}}{S_r},
\end{aligned}$$

logo

$$c \leq H_1 + a\frac{H_{r-1}}{H_r}.$$

(i) Tome $a = 0$ e escolha $c \geq H_r^{\frac{1}{r}}$. Assim $h \leq \frac{1}{c} \leq H_r^{-\frac{1}{r}}$.

Observação: Esta escolha é possivel já que para $a = 0$ temos $c \leq H_1$, como $H_r^{\frac{1}{r}} \leq \ldots \leq H_2^{\frac{1}{2}} \leq H_1$, podemos tomar $H_r^{\frac{1}{r}} \leq c \leq H_1$.

(ii) Tome $a = -\tau(\tau > 0)$. Então $c \leq H_1 - \tau\frac{H_{r-1}}{H_r}$. Quando $r = 2$, temos

$$c \leq H_1 - \tau\frac{H_1}{H_2} = H_1(1 - \frac{\tau}{H_2}).$$

Sendo $c \geq 0$ e $H_1 > 0$ temos que $1 - \frac{\tau}{H_2} \geq 0$. Como $H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}}$ podemos achar c tais que

$$H_2^{\frac{1}{2}}(1 - \frac{\tau}{H_2}) \leq c \leq H_1(1 - \frac{\tau}{H_2}).$$

Assim

$$c \geq H_2^{\frac{1}{2}}(1 - \frac{\tau}{H_2}) = \frac{H_2 - \tau}{H_2^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow h \leq \frac{1}{c} \leq \frac{H_2^{\frac{1}{2}}}{H_2 - \tau}.$$

(iii) Quando $k \geq a(a < o)$ e $r = 1$,

$$\begin{aligned} tr(T_0\overline{R}_N)(p) &= \sum_i S_0(A_i)K(e_i^h, N^h) \mid e_i^h \wedge N^h \mid^2 \\ &\geq a\sum_i \mid e_i^h \wedge N^h \mid^2 \\ &= a\sum_{i, e_i^h \neq N^h} \mid e_i^h \wedge N^h \mid^2 \\ &\geq a\sum_i 1 = a(m-1). \end{aligned}$$

Então, como anteriormente, sendo,

$$-S_1c + S_1^2 - 2S_2 + tr(T_0\overline{R}_N) \geq -S_1c + S_1^2 - 2S_2 + a(m-1) \geq -S_1c + \frac{1}{m}S_1^2 + a(m-1),$$

basta encontrarmos c tais que

$$-S_1c+\frac{1}{m}S_1^2+a(m-1)\geq 0\Rightarrow c\leq\frac{S_1}{m}+\frac{(m-1)a}{S_1}=H_1+a\frac{(m-1)}{H_1}.$$

Tome $a=-\tau(\tau>o)$ temos então que para $c=H_1-\tau\frac{(m-1)}{H_1}$

$$h\leq\frac{1}{c}=\frac{1}{H_1-\tau\frac{(m-1)}{H_1}}=\frac{H_1}{H_1^2-\tau\frac{(m-1)}{m}}.$$

Observação 3.1 *A estimativa da altura no Teorema 3.4 é ótima.Considere um hemisferio da esfera unitária $\mathbb{S}^m$ em $\mathbb{R}^{m+1}$. Ele é um gráfico vertical em $\mathbb{R}^m=\mathbb{R}^m\times\{0\}$ de $H_r=1$ com bordo $\mathbb{S}^{m-1}\times\{0\}$ e tem altura máxima 1.*

Como aplicação do Teorema 3.4 daremos uma estimativa do diâmetro vertical de hipersuperfícies compactas com H_r constante positiva em $M\times\mathbb{R}$.

Teorema 3.5 *Seja M uma variedade Riemanniana m-dimensional e seja Σ uma hipersuperfície orientável compacta imersa em $M\times\mathbb{R}$ com $H_r>0$ constante, para algum $1\leq r\leq m$. Então Σ é simétrica com relação a superfície horizontal $M\times\{t_0\}$, para algum $t_0\in\mathbb{R}$. Além disso,*

(i) Se a curvatura seccional de M satisfaz $K\geq 0$, então o diâmetro vertical de Σ não é maior que $2H_r^{-\frac{1}{r}}$;

(ii) Quando $r=2$, se a curvatura seccional de M satisfaz $K\geq-\tau$ e $H_2>\tau(\tau>0)$, então o diâmetro vertical de Σ não é mais que $\frac{2\sqrt{H_2}}{H_2-\tau}$.

(iii) Quando $r=1$, se a curvatura seccional de M satisfaz $K\geq-\tau(\tau>0)$, e $H_1^2>\frac{m-1}{m}\tau$, então o diâmetro vertical de Σ não é maior que $\frac{2H_1}{H_1^2-\frac{m-1}{m}\tau}$.

Demonstração: Sendo Σ compacto, existem $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ com $t_1<t_2$ tais que

$$\Sigma\subset M^+(t_1)\bigcap M^-(t_2),$$

onde $M^+(t_1) = \{(p,t) \in M \times \mathbb{R}; t \geq t_1\}$ e $M^-(t_2) = \{(p,t) \in M \times \mathbb{R}; t \leq t_2\}$.
Mas como a translação vertical é uma isometria de $M \times \mathbb{R}$, podemos considerar, sem perda de generalidade, que $\Sigma \subset M^+(0)$, e ainda, $\Sigma \bigcap M(0) \neq \emptyset$ e
$\Sigma \bigcap M(t) = \emptyset, \forall t < 0$.
Seja $s \in \mathbb{R}$ o maior t tal que $\Sigma \bigcap M(s) \neq \emptyset$, isto é, $\forall t > s$ temos que
$\Sigma \bigcap M(t) = \emptyset$.
Afirmação: A parte de Σ que encontra-se em $M^+(\frac{s}{2}) \bigcap M^-(s)$ é gráfico de uma função definida num domínio compacto em $M(0)$.
Com efeito, denotemos esta parte de Σ por Σ'.Definamos
$\Sigma_t = \{(p,r) \in \Sigma; r > t\}$ e Σ_t^* sua refletida. Suponhamos por absurdo que Σ' não é gráfico então existe $t \in \left(\frac{s}{2}, s\right)$ tal que a superfície refletida Σ_t^* tangencia Σ, digamos em p. Como Σ_t^* e Σ possuem a r-ésima curvatura média constante e iguais temos pelo princípio da tangência que Σ_t e Σ_t^* coincidem numa vizinhança de p, pela conexidade de Σ concluímos que a reflexão é simétrica. Logo
$\Sigma \bigcap M(0) = \emptyset$, absurdo.
Tome $M(t)$ superfície horizontal com $t \geq s$, transladando $M(t)$, seja t_0 o menor real tal que $\Sigma_{t_0}^*$ tangencie Σ. Logo pelo princípio da tangência e pela conexidade temos que $\Sigma_{t_0}^*$ coincide com Σ, portanto Σ é simétrica com relação superfície horizontal $M(t_0)$. Pelo o que provamos anteriormente $t_0 = \frac{s}{2}$.
Pelo teorema anterior concluímos que a altura de $\Sigma_{\frac{s}{2}}$ satisfaz:
(a)
$$\frac{s}{2} \leq H_r^{-\frac{1}{r}} \Leftrightarrow s \leq 2H_r^{-\frac{1}{r}}$$
(b)
$$\frac{s}{2} \leq \frac{\sqrt{H_2}}{H_2 - \tau} \Leftrightarrow s \leq \frac{2\sqrt{H_2}}{H_2 - \tau}$$
(c)
$$\frac{s}{2} \leq \frac{H_1}{H_1^2 - \frac{m-1}{m}\tau} \Leftrightarrow s \leq \frac{2H_1}{H_1^2 - \frac{m-1}{m}\tau}.$$
Para provarmos este teorema usamos o Método de Reflexão de Alexandrov.

Observação 3.2 *Tome uma superfície horizontal $M(t) = M \times \{t\}$ que não intersecta Σ e mova esta superfície paralelamente até ela tocar Σ pela primeira vez. A partir deste ponto de contato continue a mover a superfície e passe a considerar a reflexão da porção de Σ que ficou para trás em relação a superfície. A porção de superfície refletida esta inicialmente no interior da região limitada por $\Sigma,$ e portanto em algum instante a porção refletida tangencia $\Sigma.$ Ambas tem a mesma r-ésima curvatura média constante e mesmo vetor normal nesse ponto. Em seguida, usando uma versão do princípio do máximo, Alexandrov mostrou que estas variedades coincidem numa vizinhança do ponto de tangência. Além disso, usando um argumento de conexidade, ele provou que as variedades em questão coincidem em todos os pontos da reflexão, concluindo que a superfície horizontal é usuperfície de simetria de $\Sigma.$ Esse processo é hoje denominado o MÉTODO DE REFLEXÃO DE ALEXANDROV.*

Referências Bibliográficas

[1] Cheng, X.; Rosenberg, H. Embedded positive constant r-mean curvature hypersurfaces in $M^m \times R$. *An. Acad. Bras. Ciênc.* v. 77, p. 183-199, 2005.

[2] Abresch, U.; Rosenberg, H. *A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Acta Math.*

[3] Alexandrov A.D. *Uniqueness theorems for surfaces in the large. Amer Math Soc Transl.*, v. 21, p. 412-416, 1962.

[4] Barbosa, J.L.; Colares, A.G. *Stability of hypersurfaces with constant r-mean curvature*. *Ann Global Anal Geom* v. 15,p. 277-297, 1997.

[5] Do Carmo, M.P., *Geometria riemanniana*. Rio de Janeiro:IMPA,1988.

[6] Elbert, M.F. *Constant positive 2-mean curvature hypersurfaces*. *Illinois. J Math*. v. 46,p. 247-267, 2002.

[7] Hardy, G.; Littlewood, J.; Polya, G . *Inequalities*. 2nd.Cambridge: Cambridge. Univ. Press, 1989.

[8] Hoffman, D.; Lira, J.; Rosenberg, H. *Constant mean curvature surfaces in $M \times \mathbb{R}$. Trans Amer Math Soc. 2005.*

[9] Hopf, H. Differential geometry in the large. Berlin: Springer-Verlag, 1989. Lecture Notes in Mathematics, 1000.

[10] Korevaar, N.; Kusner, R.; Meeks, W.; Solomon, B. Constant mean curvature surfaces in hyperbolic space. Amer J Math, v. 114, p. 1-43, 1992.

[11] Trudinger, N. S.; Gilbarg, D., Elliptic partial differential equations of second order. Berlin: Springer-Verlag, 1977.

[12] Reilly, R. Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms. J Differ Geom., v. 8: p. 465-477, 1973.

[13] Rosenberg, H. Hypersurfaces of constant curvature in space forms. Bull Sci Math v. 117, p. 211-239, 1993.

[14] Warner, F. W. Foundations of differentiable manifolds and lie groups. Illinois: Scott, Foresman, c 1971.