UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO EM MATEMÁTICA

Cícero Fagner Alves da Silva

EXISTÊNCIA E UNICIDADE PARA OS PROBLEMAS DE DIRICHLET E NEUMANN SOBRE UM DOMÍNIO COM FRONTEIRA SUAVE

Fortaleza

2010

Cícero Fagner Alves da Silva

EXISTÊNCIA E UNICIDADE PARA OS PROBLEMAS DE DIRICHLET E NEUMANN SOBRE UM DOMÍNIO COM FRONTEIRA SUAVE

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Caminha Muniz Neto.

Fortaleza

2010

.

Silva, Cícero Fagner Alves da

S579e Existência e unicidade para os problemas de Dirichlet e Neumann sobre um domínio com fronteira suave / Cícero Fagner Alves da Silva Fortaleza: 2010.

92 f

Orientador: Prof. Dr. Antônio Caminha Muniz Neto.

Área de Concentração: Análise.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Depto de Matemática, 2010.

1. Análise.

CDD 515

A Deus e meus familiares, em especial, a minha mãe Francisca Alves (Quinha de Preta), a minha esposa Lívia Flavyanne e a minha sobrinha Amábyle.
Ao meu pai Francisco Izidro (Chico Costa) e ao meu amigo Cícero Lúcio (in memorian).

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pois sem sua permissão nada disso poderia ser realizado, sem seu amor nada seria. Aos meus pais Francisca Alves da Silva e Francisco Izidro Furtado, a minha sobrinha Amábyle, a minha irmã Flaviana Alves e aos demais irmãos e a minha esposa Lívia Flavyanne.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Antônio Caminha Muniz Neto, pela orientação e confiança depositada em mim.

Agradeço aos meus amigos Zirland Fernandes, Francisco Valdemiro, Luiz Antônio, Fabrício Figueredo, José Nazareno, Darcio Monteiro pelo constante apoio que me deram, considero-os como irmãos; Loester Sá, Francisco das Chagas, Vitor Hugo, Carlos Luide, Erisvandro Américo, José Reinaldo, Flávio França, Flávio (cantina), Michel Rebouças, Filipe Mendonça, José Deibsom, Leon Denis, Francisco de Assis, Carlos Victor, Clodomir Neto; minhas amigas Maria Wanderlândia, Heloisa Frazão, Cristiane Brandão, Maria de Fátima, Andrea Dantas e aos outros amigos, o meu muito obrigado.

Novamente ao Clodomir Neto, obrigado pelo trabalho e paciência para comigo no LaTeX.

Aos professores Luquésio Jorge, Alexandre Fernandes, Abdênago Barros, Silvano Menezes, agradeço pela atenção que me deram.

A Capes pela ajuda financeira.

Um erro não se converte em verdade pelo fato de que todo mundo acredite nele. *"Ghandi"*

Nunca vi nada selvagem ter pena de si mesmo. Um pássaro cairá morto de um galho sem jamais ter sentido pena de si mesmo. *"D. H. Lawrence"*

RESUMO

Seja Ω um domínio fixado em $\mathbb{R}^n$ com fronteira S de classe C^2 e denote $\Omega' = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Ambos Ω e Ω' não necessariamente conexos. Nessas condições, pretendemos resolver os problemas de Dirichlet e Neumann.

No intuito da resolução dos problemas citados, faremos um estudo da Teoria de Fredholm (operadores compactos), bem como da transformada de Kelvin, harmonicidade no infinito e dos potenciais de camada.

ABSTRACT

Let Ω be a fixed domain in $\mathbb{R}^n$ with boundary S of class C^2 and denote $\Omega' = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Both Ω and Ω' not necessarily connected. Under these conditions, we intend to solve the problems of Dirichlet and Neumann.

In order to overcome the mentioned the problems, we will study the Fredholm theory (compact operators), the Kelvin transformed, harmonicity in the infinite and potential of the layer.

Sumário

Entre os problemas de valor de fronteira para o Laplaciano, os dois problemas que julgamos mais importantes e para os quais dedicaremos mais de nossa atenção, são chamados problemas de Dirichlet e Neumann. Durante esta discussão, Ω será um domínio em $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave S.

O problema de Dirichlet: Dada a função f em Ω e g em S, encontre uma função u definida em $\overline{\Omega}$ satisfazendo

$$\Delta u = f \,\mathrm{em}\, \Omega,\ u = g \,\mathrm{em}\, S \tag{1}$$

O problema de Neumann: Dada a função f em Ω e g em S, encontre uma função u em $\overline{\Omega}$ satisfazendo

$$\Delta u = f \,\mathrm{em}\, \Omega \,\mathrm{e}\, \partial_\nu u = g \,\mathrm{em}\, S \tag{2}$$

O teorema da unicidade apresentado nas preliminares mostra que a solução do problema de Dirichlet (se existir) será única, e no mínimo se requer $u \in C(\overline{\Omega})$.

Para o problema de Neumann, a unicidade não é verdade, pois podemos adicionar a u, uma função que seja constante em cada componente conexa de Ω. No entanto, existe essa condição necessária para o problema de Neumann ser solúvel: Se u satisfaz (2) e Ω' é uma componente conexa de Ω, pela identidade de Green, tomando $v = 1$, temos:

$$\int_{\Omega'} f = \int_{\Omega'} \Delta u = \int_{\partial\Omega'} \partial_\nu u = \int_{\partial\Omega'} g$$

O problema de Dirichlet é facilmente reduzido aos casos ou $f = 0$ ou $g = 0$. Realmente, se podemos encontrar v e w satisfazendo:

$$\Delta v = f \,\mathrm{em}\, \Omega,\ v = 0 \,\mathrm{em}\, S \tag{3}$$

$$\Delta w = 0 \,\mathrm{em}\, \Omega,\ w = g \,\mathrm{em}\, S \tag{4}$$

assim $u = v + w$ satisfará (1). Além do mais, os problemas (3) e (4) são equivalentes. Realmente, suponha que possamos resolver (3) e desejamos resolver (4). Assuma que g possui uma extensão $\tilde{g}$ a $\overline{\Omega}$ a qual é de classe C^2, então podemos encontrar v satisfazendo

$$\Delta v = \Delta \tilde{g} \text{ em } \Omega, \ v = 0 \text{ em } S$$

daí é só tomar $u = \tilde{g} - v$ como solução para (4).

Por outro lado, suponha agora que possamos resolver (4) e desejamos resolver (3). Extenda f pondo igual a zero fora de Ω e coloque $v' = f \cdot N$, como N é uma solução fundamental, desse modo, temos que $\Delta v' = f$.

Resolvemos então,

$$\Delta w = 0 \text{ em } \Omega, \ w = v' \text{ em } S$$

daí é só tomar $v = v' - w$ como solução de (3). Portanto, quando considerarmos o problema de Dirichlet usualmente assumimos que $f = 0$ ou $g = 0$.

Semelhante observação aplica-se ao problema de Neumann, dividindo nos casos $f = 0$ ou $g = 0$, e esses são de certa forma equivalentes. Para deduzir o análogo da equivalência de (4) e (3), assumiremos que existe $\tilde{g} \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $\partial_\nu \tilde{g} = g$ em S e resolve

$$\Delta v = \Delta \tilde{g} \text{ em } \Omega, \ \partial_\nu v = 0 \text{ em } S$$

E a volta, tomemos $v' = f \cdot N$ e resolvemos

$$\Delta w = 0 \text{ em } \Omega, \ \partial_\nu w = \partial_\nu v' \text{ em } S$$

Existe várias abordagens aos problemas de Dirichlet e Neumann, e no presente trabalho investigaremos uma delas. Mas é bastante enriquecedor a investigação das demais abordagens, já que métodos diferentes rendem alguns resultados diferentes, e também porque as técnicas envolvidas são aplicáveis a outros problemas. De fato, resolveremos os problemas de Dirichlet e Neumann por potenciais de camada.

Capítulo 1

Preliminares

Agora apresentaremos algumas definições e explicitaremos afirmações as quais serão omitidas as demonstrações. No entanto, as mesmas trarão uma melhor compreensão do presente trabalho e consequentemente, maior velocidade de leitura. Assim, o leitor interessado em maiores detalhes de demonstrações ver [1].

Afirmação 1.1 *Seja S uma hipersuperfície orientada de classe C^k, $k \geqslant 2$. Existe uma vizinhança V de S em $\mathbb{R}^n$ e um número $\epsilon > 0$ tal que a aplicação*

$$F(x,t) = x + t\nu(x)$$

é um difeomorfismo de classe C^{k-1} de $S \times (\epsilon, -\epsilon)$ sobre V.

Tal vizinhança na afirmação 1.1 é chamada de vizinhança tubular e se u é uma função diferenciável em V, para $x \in S$ e $-\epsilon < t < \epsilon$ formalizamos

$$\partial_\nu u(x + t\nu(x)) = \nu(x) \cdot \nabla u(x + t\nu(x)) \tag{1.1}$$

Afirmação 1.2 *(**Teorema da Divergência**) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira $S = \partial\Omega$ de classe C^1 e F um campo vetorial de classe C^1 em $\overline{\Omega}$. Então*

$$\int_S F(y) \cdot \nu(y) d\sigma(y) = \int_\Omega \nabla \cdot F(x) dx$$

Afirmação 1.3 *(**Desigualdade de Young Generalizada**) Seja (x, μ) um espaço de medida σ-finita e $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $c > 0$. Suponha k uma função mensurável em $X \times X$ tal que*

$$\sup_{x \in X} \int_X |k(x,y)| d\mu(y) \leqslant c$$
$$\sup_{y \in X} \int_X |k(x,y)| d\mu(x) \leqslant c.$$

Se $f \in L^p(X)$, a função T_f definida por

$$T_f(x) = \int_S k(x,y) f(y) d\mu(y)$$

está bem definida quase sempre e pertence a $L^p(X)$, com $\| T_f \|_p \leqslant c \| f \|_p$.

Definição 1.1 *Uma função f em $\mathbb{R}^n$ é dita radial se é invariante por rotação, isto é, $f \circ T = f$ para toda rotação T.*

Afirmação 1.4 *Se $f(x) = \phi(r)$ é uma função em $\mathbb{R}^n$ então f satisfaz $\Delta f = 0$ em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ se e somente se $\phi(r) = a + br^{2-n}$ com $n \neq 2$ ou $\phi(r) = a + b \log r$ com $n = 2$, onde a e b são constantes.*

Definição 1.2 *Uma função de classe C^2 definida num subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ é dita harmônica se $\Delta u = 0$.*

Afirmação 1.5 ***(Identidade de Green)*** *Se Ω é um domínio limitado com fronteira suave S e u, v são de classe C^1 em $\overline{\Omega}$ então*

$$\int_S v\partial_\nu u d\sigma = \int_S (v\Delta u + \nabla v \cdot \nabla u) dx \tag{1.2}$$

$$\int_S v\partial_\nu u - u\partial_\nu v d\sigma = \int_S (v\Delta u - u\Delta v) dx. \tag{1.3}$$

Afirmação 1.6 *Se u é harmônica em Ω então* $\displaystyle\int_S \partial_\nu u d\sigma = 0.$

Afirmação 1.7 ***(Teorema do Valor Médio)*** *Suponha u harmônica num conjunto aberto Ω. Se $x \in \Omega$ e $r > 0$ é pequeno o suficiente tal que $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$ então*

$$u(x) = \frac{1}{r^{n-1} w_n} \int_{S_r(x)} u(y) d\sigma(y) = \frac{1}{w_n} \int_{S_1(0)} u(x + ry) d\sigma(y).$$

Afirmação 1.8 *Se u, Ω e r são como na afirmação 1.7 então*

$$u(x) = \frac{n}{r^n w_n} \int_{B_r(x)} u(y) d\sigma(y) = \frac{n}{w_n} \int_{B_1(0)} u(x + ry) dy.$$

Afirmação 1.9 ***(A recíproca do Teorema do Valor Médio)*** *Suponha que u é contínua num conjunto aberto Ω e sempre que $x \in \Omega$ e $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$ temos*

$$u(x) = \frac{1}{w_n} \int_{S_1(0)} u(x + ry) d\sigma(y)$$

então $u \in C^\infty(\Omega)$ e u é harmônica em Ω.

Afirmação 1.10 ***(Princípio do Máximo)*** *Suponha Ω aberto conexo. Se u é harmônica, assumindo valores reais em Ω e $\sup\limits_{x \in \Omega} u(x) = \Delta < \infty$ então ou $u(x) < \Delta$ para todo $x \in \Omega$ ou $u(x) = \Delta$ para todo $x \in \Omega$.*

Afirmação 1.11 *(**Teorema da Unicidade**) Suponha $\overline{\Omega}$ compacto. Se u_1 e u_2 são funções harmônicas em Ω as quais são contínuas em $\overline{\Omega}$ e $u_1 = u_2$ em $\partial\Omega$ então $u_1 = u_2$ em Ω.*

Afirmação 1.12 *Seja*

$$N(x) = \frac{|x|^{2-n}}{(2-n)w_n} \text{ se } n > 2$$
$$N(x) = \frac{1}{2\pi}\log|x| \text{ se } n = 2$$

então N é uma solução fundamental para Δ (operador laplaciano). Isto é, $\langle \Delta N, \phi \rangle = \phi(0)$ para qualquer $\phi \in C^\infty$.

Afirmação 1.13 *Suponha que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e que $\displaystyle\int |f(y)| \log|y| dy < \infty$ em caso $n = 2$. Então $f \cdot N$ está bem definida como uma função localmente integrável e $\Delta(f \cdot N) = f$.*

Afirmação 1.14 *Se $f \in L^1(S)$ e P é dado por:*

$$P(x,y) = \frac{1-|x|^2}{w_n|x-y|^n}, \text{ pondo } x \in B \text{ e } y \in S$$
$$u(x) = \int_S P(x,y)f(y)d6(y), \text{ com } x \in B.$$

Então u é harmônica em B. Se f é contínua, u extende continuamente ao $\overline{B}$ e $u = t$ em S. Se $f \in L^p(S)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, então $u_r \to t$ na norma L^p quando $r \to 1$ $(u_r(y) = u(ry),\ 0 < r < 1)$.

Se $f \in L^1(S)$ e p é dada por $p(x,y) = \dfrac{1-|x|^2}{w_n|x-y|^n}$, sendo

$$u(x) = \int_S p(x,y)f(y)d\sigma(y) \text{ com } x \in B$$

então u é harmônica em B. Se f é contínua, então u extende continuamente a $\overline{B}$ e $n = f$ em S. Se $f \in L^p(S)$ com $1 \leqslant p < \infty$, então $u_r \to f$ na norma de L^p, quando $r \to 1$.

Capítulo 2

Operadores Compactos

Faremos neste capítulo uma breve exposição sobre os operadores compactos e a Teoria de Fredholm. Este capítulo será de grande importância para identificarmos os subespaços de soluções, no intuito de solucionarmos os problemas propostos de Neumann e Dirichlet.

Seja X um espaço de Banach e T um operador linear limitado em X. Denotaremos os subespaços núcleo e imagem do operador T por $N(T)$ e $R(T)$ respectivamente.

Definição 2.1 *Um operador linear limitado T definido num espaço de Banach X é dito compacto se sempre que $\{x_j\}_{j=1}^{+\infty}$ for uma sequência limitada em X, então a sequência $\{Tx_j\}_{j=1}^{+\infty}$ possui uma subsequência convergente.*

Uma outra definição equivalente daremos a seguir:

Definição 2.2 *T é compacto se aplica conjunto limitado em conjunto com fecho compacto.*

Diremos que um operador T é de rank finito se $R(T)$ possui dimensão finita. Como todo conjunto limitado num espaço de Banach de dimensão finita possui fecho compacto, tem-se que todo operador limitado de rank finito é compacto.

O teorema que segue nos dá informações sobre características dos conjuntos dos operadores compactos contidos no conjunto dos operadores limitados, considerando a álgebra, topologia e norma do último conjunto.

Teorema 2.1 *O conjunto dos operadores em X é um ideal à esquerda e à direita na Àlgebra dos operadores limitados é um conjunto fechado na norma da topologia.*

Demonstração

Dividiremos a demonstração em duas partes. provaremos primeiro que o conjunto dos operadores é um ideal como no enunciado.

Parte I: i) Se T_1, T_2 são operadores compactos tem-se que $a_1T_1 + a_2T_2$ também o é, onde a_1, a_2 são constantes complexas.

Prova de i) Seja $\{x_j\} \subset X$ uma sequência limitada. Do fato de T_1 e T_2 serem compactos, podemos encontrar $\{y_j\}$ subsequência de $\{x_j\}$ tal que $\{T_1y_j\}$ converge e, consequentemente encontra-se $\{z_j\}_{j=1}^{+\infty}$ subsequência de $\{y_j\}_{j=1}^{+\infty}$ tal que $\{T_2z_j\}_{j=1}^{+\infty}$ converge, assim $\{[a_1T_1 + a_2T_2](z_j)\}_{j=1}^{+\infty}$ converge, logo $a_1T_1 + a_2T_2$ é compacto.

ii) Se T é um operador compacto e δ um operador limitado, então $T \circ \delta$ é compacto.

Prova de ii) Ora, qualquer sequência limitada $\{x_j\}_{j=1}^{+\infty}$ em X tem-se que $\{\delta x_j\}_{j=1}^{+\infty}$ é limitada em X do fato de δ ser limitado, daí $\{T(\delta x_j)\}_{j=1}^{+\infty}$ possui uma subsequência convergente, portanto $T \circ \delta$ é compacto.

iii) Se T é um operador compacto e δ um operador limitado, então $\delta \circ T$ é compacto.

Prova de iii) Se $\{x_j\}_{j=1}^{+\infty}$ é uma sequência limitada em X, tem-se que podemos encontrar $\{y_j\}_{j=1}^{+\infty}$ subsequência de $\{x_j\}_{j=1}^{+\infty}$ tal que $\{Ty_j\}_{j=1}^{+\infty}$ converge, como

$$\begin{aligned} \parallel \delta(Ty_m) - \delta(Ty_n) \parallel &= \parallel \delta(Ty_m - Ty_n) \parallel \\ &\leqslant \parallel \delta \parallel \parallel Ty_m - Ty_n \parallel \end{aligned}$$

e a sequência $\{Ty_j\}_{j=1}^{+\infty}$ é de Cauchy, temos que $\{\delta(Ty_j)\}_{j=1}^{+\infty}$ também o é, como X é Banach segue que $\{\delta(Ty_j)\}_{j=1}^{+\infty}$ converge, portanto $\delta \circ T$ é compacto.

Parte II Mostraremos agora que o conjunto dos operadores compactos é fechado na norma da topologia induzida.

Suponha $\{T_m\}_{m=1}^{+\infty}$ uma sequência de operadores compactos convergindo para T na norma da topologia induzida. Queremos mostrar que T é um operador compacto. Para isso, seja $\{x_j\}_{j=1}^{+\infty}$ uma sequência limitada em X com $\parallel x_j \parallel \leqslant c$ para todo $j = 1, 2, 3, \ldots$, escolha uma subsequência $\{x_{1j}\}_{j=1}^{+\infty}$ tal que $\{T, x_{1j}\}_{j=1}^{+\infty}$ convirja e depois escolha $\{x_{2j}\}_{j=1}^{+\infty}$ subsequência de $\{x_{1j}\}_{j=1}^{+\infty}$ tal que $\{T_2 x_{2j}\}_{j=1}^{+\infty}$ convirja. Como toda subsequência de uma sequência limitada é limitada, podemos extrair $\{x_{mj}\}_{j=1}^{+\infty}$ subsequência de $\{x_{(m-1)j}\}_{j=1}^{+\infty}$, para $m \geqslant 3$, tal que $\{T_m x_{mj}\}_{j=1}^{+\infty}$ convirja. Pondo $y_j = x_{jj}$ temos que $\{T_m y_j\}_{j=1}^{+\infty}$ converge para todo $m = 1, 2, 3, \ldots$. Portanto, dado $\epsilon > 0$ pela convergência $T_m \to T$ quando $m \to +\infty$ temos que existe m_0 suficientemente grande tal que para $m \geqslant m_0$ tem-se $\parallel T_m - T \parallel < \dfrac{\epsilon}{4c}$ e para cada $m \geqslant m_0$, $\{T_m y_j\}$ é de Cauchy. Assim, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $j, k \geqslant j_0$ tem-se $\parallel T_m y_j - T_m y_k \parallel < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Concluímos que

$$\begin{aligned}
\| Ty_j - Ty_k \| &= \| Ty_j - T_m y_j + T_m y_j - T_m y_k + T_m y_k - Ty_k \| \\
&\leqslant \| (T - T_m) y_j \| + \| T_m y_j - T_m y_k \| + \| (T_m - T) y_k \| \\
&\leqslant \| T - T_m \| \| y_j \| + \| T_m y_j - T_m y_k \| + \| T_m - T \| \| y_k \| \\
&\leqslant 2c \| T - T_m \| + \| T_m y_j - T_m y_k \| \\
&\leqslant 2c \cdot \frac{\epsilon}{4c} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Mostramos assim, que $\{Ty_j\}_{j=1}^{+\infty}$ é de Cauchy, como X é completo, tem-se que $\{Ty_j\}_{j=1}^{+\infty}$ converge, logo T é compacto.

Corolário 2.1 *Se T é um operador limitado em X e existe uma sequência $\{T_m\}_{m=1}^{+\infty}$ de operadores de rank finito tal que $\| T_m - T \| \to 0$, então T é compacto.*

No caso de X ser um espaço de Hilbert, o corolário acima possui a recíproca, e é o que faremos agora. A prova deste teorema deve ser lida, pois o artifício utilizado na demonstração será usado posteriormente em outra prova.

Teorema 2.2 *Se T é um operador compacto em um espaço de Hilbert X, então T é um limite de operadores de rank finito.*

Demonstração

Suponha $\epsilon > 0$ e seja B uma bola unitária em X. Como T é compacto, $T(B)$ possui o fecho compacto, e portanto totalmente limitado, isto é, existe $y_1, \ldots, y_n$ pertence à $T(B)$ tais que para todo $y \in T(B)$ tem-se $\| y - y_j \| < \epsilon$

para algum $j = 1, \ldots, n$. Considere P_ϵ a projeção ortogonal sobre o espaço gerado pelo os elementos $y_1, \ldots, y_n$, escreva $T_\epsilon = P_\epsilon T$. Note que T_ϵ possui rank finito. Sendo $T_\epsilon x$ o elemento mais próximo de Tx em $R(P_\epsilon)$, temos

$$\| Tx - T_\epsilon x \| \leqslant \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \| Tx - y_j \| < \epsilon, \, \forall x \in B$$

Noutras palavras, $\| T - T_\epsilon \| < \epsilon$, daí pela arbitrariedade do $\epsilon > 0$ tem-se $T_\epsilon \to T$ quando $\epsilon \to 0$. Concluímos assim, que T é limite de operadores de rank finito.

Teorema 2.3 *O operador T no espaço de Banach X é compacto se e somente se o operador dual T^* no espaço dual X^* é compacto.*

Demonstração

Sejam B e B^* bolas unitárias em X e X^* respectivamente. Suponha T compacto, queremos mostrar que T^* é compacto.

Seja $\{f_j\}_{j=1}^{+\infty}$ uma sequência limitada em X^*. Multiplicando as f_j's por uma constante suficientemente pequena, podemos assumir que $\{f_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset B^*$. Dado $\epsilon > 0$ e $x \in X$, tem-se

$$\| f_j(y) - f_j(x) \| = \| f_j(y - x) \| \leqslant \| f_j \| \| y - x \| = \| y - x \| < \epsilon$$

sempre que $\| y - x \| < \delta = \epsilon$, assim $\{f_j\}_{j=1}^{+\infty}$ é equicontínua. Como $\| f_j \| \leqslant 1$ temos que $\{f_j\}_{j=1}^{+\infty}$ é uniformemente limitada sobre conjuntos limitados, daí pelo Teorema de Arzelá-Ascoli existe uma subsequência de $\{f_j\}_{j=1}^{+\infty}$ que denotaremos por $\{f_k\}_{k=1}^{+\infty}$ a qual converge uniformemente sobre conjuntos compactos de X, em particular sobre $\overline{T(B)}$.

Como $T^* f_k(x) = f_k(Tx)$ converge uniformemente, para $x \in B$, tem-se $\| T^* f_k(x) - T^* f_n(x) \|_{X^*} = \| f_n(T(x)) - f_m(T(x)) \| \leqslant \| f_n - f_m \| \| T \|$, portanto $\{T^* f_k\}_{k=1}^{+\infty}$ é de Cauchy na norma da topologia de X^*. Portanto, T^* é compacto pela completude de X^*.

Por outro lado, suponha que T^* seja compacto. Pelo o que já provamos, tem-se que T^{**} é compacto em X^{**}, Mas X está embutido isometricamente em X^{**}. Afirmamos que T é a restrição de T^{**} a X, e assim T é compacto.

Considere a aplicação $J : X \to X^{**}$ dada por $J_x : X^* \to \mathbb{C}$ para cada $x \in X$ ou ainda $J_x(f) = f(x)$ para $f \in X^*$.

Afirmação 2.1 *J_X é linear e isométrica.*

Se $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ então $J_{x+\lambda y}(f) = f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$ (pois $f \in X^*) = (J_x + \lambda J_y)(f)$, daí J é linear.

Sendo $x \in X$, tem-se

$$\begin{aligned} \| J_x \| &= \sup_{\|f\| \leqslant 1} |J_x(f)| \\ &= \sup_{\|f\| \leqslant 1} |f(x)| \\ &= \| x \| \end{aligned}$$

a última desigualdade se deve ao Teorema de Hanh-Banach. Concluímos que J_X inclui X isometricamente em X^{**}.

Como $T : X \to X$ tem-se $T^{**} : X^{**} \to X^{**}$ e $T^{**} \circ J : X \to X^{**}$, assim $x \in X$

$$\begin{aligned} (T^{**} \circ J)(x) &= T^{**}(J_x) \\ &= T^{**} \circ J_x. \end{aligned}$$

Portanto faz sentido escrever, para $f \in X^*$,

$$\begin{aligned}(T^{**} \circ J_x)(f) &= J_x(T^*(f)) \\ &= T^*(f)(x) \\ &= f(T(x)) \\ &= J_{T(x)}(f).\end{aligned}$$

Concluímos que,

$$\begin{aligned}(T^{**} \circ J)(x) &= T^{**} \circ J_x \\ &= J_{T(x)} \\ &= (J \circ T)(x) \,\text{para}\, x \in X\end{aligned}$$

logo, $T^{**}|_X = T$, portanto T é compacto.

Agora apresentaremos o principal teorema à estrutra para a teoria dos operadores compactos. Este teorema foi primeiro provado por I. Fredholm, por diferentes métodos, para certos operadores integrais no espaço L^2. No espaço abstrato de Hilbert, o que faremos aqui é devido a F. Riesz, e feito mais tarde para um espaço de Banach arbitrário por J. Schauder. Por essa razão é ao mesmo tempo chamado a Teoria de Riesz-Schauder. No entanto, precisamos somente do caso em que o espaço é Hilbert.

Teorema 2.4 *Seja T um operador compacto num espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, sejam:*

$$V_\lambda = \{x \in X : Tx = \lambda x\}$$
$$W_\lambda = \{x \in X : T^* x = \lambda x\}$$

então:

a) *O conjunto dos* $\lambda \in \mathbb{C}$ *para os quais* $V_\lambda \neq \{0\}$ *é finito ou enumerável, e no último caso, possui o zero como o único ponto de acumulação.*

b) *Se* $\lambda \neq 0$ *então* $dim(V_\lambda) = dim(W_{\overline{\lambda}})$.

c) *Se* $\lambda \neq 0$ *então* $R(\lambda I - T)$ *é fechado.*

Demonstração

Prova de a) Primeiro mostraremos que a afirmação (a) é equivalente a seguinte afirmação:

$\tilde{a}$) Para cada $\epsilon > 0$, o espaço gerado pelas combinações lineares dos vetores dos V_λ com $|\lambda| \geqslant \epsilon$ possui dimensão finita.

a) $\Rightarrow$ $\tilde{a}$) Como o zero é o único ponto de acumulação do conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $V_\lambda \neq \{0\}$, qualquer $\epsilon > 0$ dado, existirá somente uma quantidade finita desses λ's $\in \mathbb{C}$, com $|\lambda| \geqslant \epsilon$, como para cada $\lambda \neq 0$, a $dim(V_\lambda) < \infty$ e a únião finita de conjuntos finitos é finita, tem-se que, o espaço gerado pelas combinações lineares dos vetores dos V_λ com $|\lambda| \geqslant \epsilon$ possui dimensão finita.

$\tilde{a}$) $\Rightarrow$ a) Como cada autovetor está associado a um único autovalor, tem-se que dado $\epsilon > 0$ existe no máximo finito λ's tais que $V_\lambda \neq \{0\}$ e $|\lambda| \geqslant \epsilon$, isso nos diz que, se tomarmos $\epsilon_n = \dfrac{1}{n}$, somente finito λ's satisfaz $|\lambda| \geqslant \dfrac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, como a união enumerável de conjuntos finitos é no máximo infinito enumerável, temos que o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $V_\lambda \neq \{0\}$ é finito ou infinito enumerável e $dim(V_\lambda) < +\infty$ para cada $\lambda \neq 0$ já que a dimensão do espaço gerado por todos os vetores dos V_λ com $|\lambda| \geqslant \epsilon$ é finita.

Portanto basta provarmos que para cada $\epsilon > 0$, o espaço gerado pelas combinações lineares dos V_λ com $|\lambda| \geqslant \epsilon$ possui dimensão finita.

Suponha o contrário, isto é, existe $\epsilon > 0$ e uma sequência infinita $\{x_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset X$ de elementos linearmente independentes tal que $Tx_j = \lambda_j x_j$ com $|\lambda_j| \geqslant \epsilon$ para todo $j = 1, 2, 3, \ldots$. Como $|\lambda_j| \leqslant \| T \|$, podemos tomar uma subsequência que denotaremos por $\{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ que é de Cauchy. Considere X_m o espaço gerado pelos elementos $x_1, \ldots, x_m$. Para cada m, escolha $y_m \in X_m$ com $\| y_m \| = 1$ e $y_m \perp X_{m-1}$. Assim, podemos escrever $y_m = \sum_{j=1}^{m} c_{mj} x_j$ para alguns escalares c_{mj}, daí

$$\begin{aligned}
\lambda_m^{-1} T y_m &= \lambda_m^{-1} \left[T \left(\sum_{j=1}^{m} c_{m_j} x_j \right) \right] \\
&= \lambda_m^{-1} \sum_{j=1}^{m} c_{m_j} \lambda_j x_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} c_{m_j} \lambda_m^{-1} \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^{m-1} c_{m_j} x_j - \sum_{j=1}^{m-1} c_{m_j} x_j \\
&= c_{mm} x_m + \sum_{j=1}^{m-1} c_{m_j} x_j + \sum_{j=1}^{m} c_{m_j} (\lambda_m^{-1} \lambda_j - 1) x_j \\
&= y_m + \sum_{j=1}^{m-1} c_{m_j} (\lambda_m^{-1} \lambda_j - 1) x_j
\end{aligned}$$

Se $n < m$ então

$$\lambda_m^{-1} T y_m - \lambda_n^{-1} T y_n = y_m - y_n + \sum_{j=1}^{m-1} c_{mj} (\lambda_j \lambda_m^{-1} - 1) x_j - \sum_{j=1}^{n-1} c_{nj} (\lambda_j \lambda_n^{-1} - 1) x_j$$

Chame $v = -y_n + \sum_{j=1}^{m-1} c_{mj} (\lambda_j \lambda_m^{-1} - 1) x_j - \sum_{j=1}^{n-1} c_{nj} (\lambda_j \lambda_n^{-1} - 1) x_j$, como

$n < m$, então $v \in X_{m-1}$ e do fato de $y_m \perp X_{m-1}$, tem-se

$$\begin{aligned} \| \lambda_m^{-1} T y_m - \lambda_n^{-1} T y_n \|^2 &= \| y + v \|^2 \\ &= \| y \|^2 + 2 \langle y, v \rangle + \| v \|^2 \\ &= 1 + \| v \|^2 \\ &\geqslant 1 \end{aligned}$$

portanto,

$$\| \lambda_m^{-1} T y_m - \lambda_n^{-1} T y_n \| \geqslant 1$$

e

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant \| \lambda_m^{-1} T y_m - \lambda_n^{-1} T y_n \| \\ &= \| \lambda_m^{-1} T y_m - \lambda_m^{-1} T y_n - \lambda_m^{-1} T y_n - \lambda_n^{-1} T y_n \| \\ &\leqslant |\lambda_m^{-1}| \, \| T y_m - T y_n \| + |\lambda_m^{-1} - \lambda_n^{-1}| \, \| T y_n \| \end{aligned}$$

assim,

$$|\lambda_m^{-1}| \, \| T y_n - T y_m \| \geqslant 1 - |\lambda_m^{-1} - \lambda_n^{-1}| \, \| T y_n \|$$
$$\| T y_n - T y_m \| \geqslant |\lambda_m| - |1 - \lambda_m \lambda_n^{-1}| \, \| T y_n \|$$

Como $|\lambda_m| \geqslant \epsilon$, $\| T y_n \| \leqslant \| T \|$ e $\lambda_m \lambda_n^{-1} \to 1$, então $\| T y_n - T y_m \| \geqslant \epsilon$, logo $\{T y_n\}$ não possui subsequência convergente, contrariando o fato de T ser compacto.

Prova de b) Dado $\lambda \neq 0$, pelo Teorema (2.2) podemos escrever $T = T_0 + T_1$ onde T_0 possui rank finito e $\| T_1 \| < |\lambda|$. Para isto, basta escolher $\epsilon = |\lambda|$, $T_0 = T_\epsilon$ e $T_1 = T - T_\epsilon$. Assim, o operador $\lambda I - T_1 = \lambda(I - \lambda^{-1} T_1)$ é invertível, observe que,

$$\begin{aligned}(\lambda I - T_1)^{-1}(\lambda I - T) &= (\lambda I - T_1)^{-1}(\lambda I - T_1 - T_0) \\ &= I - (\lambda I - T_1)^{-1}T_0. \qquad (2.1)\end{aligned}$$

Chame $T_2 = (\lambda I - T_1)^{-1}T_0$. Então, $x \in V_\lambda \Leftrightarrow Tx = \lambda x \Leftrightarrow (T_0 + T_1)x = \lambda x \Leftrightarrow T_0 x + T_1 x = \lambda x \Leftrightarrow T_0 x = (\lambda I - T_1)x \Leftrightarrow (\lambda I - T_1)^{-1}T_0 x = x \Leftrightarrow 0 = x - T_2 x$. Por outro lado, tomando o adjunto de ambos os lados de (2.1), temos:

$$\begin{aligned}[(\lambda I - T_1)^{-1}(\lambda I - T)]^* &= [I - T_2]^* \\ (\lambda I - T)^*[(\lambda I - T_1)^{-1}]^* &= I - T_2^* \\ (\overline{\lambda} I - T^*)[(\lambda I - T_1)^*]^{-1} &= I - T_2^* \\ (\overline{\lambda} I - T^*)(\overline{\lambda} I - T_1^*)^{-1} &= I - T_2^*.\end{aligned}$$

Daí, $y = (\overline{\lambda} I - T^*)^{-1}x$ está em $W_{\overline{\lambda}} \Leftrightarrow x - T_2^* x = 0$. De fato, como $(\overline{\lambda} I - T^*)(\overline{\lambda} I - T_1^*)^{-1}x = (I - T_2^*)x \Leftrightarrow (\overline{\lambda} I - T^*)y = (I - T_2^*)x \Leftrightarrow 0 = \overline{\lambda} I y - \overline{\lambda} I y = (I - T_2^*)x$ que é o mesmo que $x - T_2^* x = 0$.

Mostraremos que as equações $x - T_2 x = 0$ e $x - T_2^* x = 0$ possuem o mesmo número de soluções independentes, e assim concluímos que $dim(V_\lambda) = dim(W_{\overline{\lambda}})$.

Desde que T_0 possui rank finito acontece o mesmo para T_2. Seja $u_1, \ldots, u_n$ uma base ortonormal para $R(T_2)$. Então para cada $x \in X$ temos $T_2 x = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)u_j$ onde $\sum_{j=1}^{n} |f_j(x)|^2 = \| T_2 x \|^2$. Segue que $x \longmapsto f_j(x)$ é um funcional linear limitado para cada $j = 1, \ldots, n$ em X, assim existe $v_1, \ldots, v_n$ tais que

$$T_2 x = \sum_{j=1}^{n} \langle x | v_j \rangle \, u_j \; (x \in X).$$

Tomando $\beta_{jk} = \langle u_j, v_k \rangle$ e dado $x \in X$, considere $\alpha_j = \langle x|v_j \rangle$. Se $x - T_2 x = 0$, então $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$. Fazendo o produto interno com v_k temos:

$$\alpha_k - \sum_j \beta_{jk} \alpha_j = 0,\ k = 1 \ldots, n. \tag{2.2}$$

Inversamente, se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ satisfaz (2.2), então $x = \sum \alpha_j u_j$ satisfaz $x - T_2 x = 0$. Por outro lado, como

$$\begin{aligned}
\langle x, T_2^* y \rangle &= \langle T_2 x, y \rangle \\
&= \left\langle \sum \langle x, v_j \rangle u_j, y \right\rangle \\
&= \sum \langle x, v_j \rangle \langle u_j, y \rangle \\
&= \sum \langle x, v_j \rangle \langle y, u_j \rangle \\
&= \left\langle x, \sum \langle y, u \rangle v_j \right\rangle
\end{aligned}$$

tem-se que $T_2^* x = \sum \langle x|u_j \rangle v_j$. Daí, pela mesma razão: $x - T_2^* x = 0 \Leftrightarrow x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$ onde

$$\alpha_k - \sum_j \beta_{jk} \alpha_j = 0,\ k = 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Mas as matrizes $(\delta_{jk} - \beta_{jk})$ e $(\delta_{jk} - \overline{\beta}_{kj})$ são adjuntas uma da outra, daí possui o mesmo rank. Então (2.2) e (2.3) possui o mesmo número de soluções independentes.

Prova de c) Suponha $\{y_j\}_{j=1}^{+\infty}$ uma sequência em $R(\lambda I - T)$ na qual converge para um $y \in X$. Vamos mostrar que $y \in R(\lambda I - T)$. Podemos encrever $y_j = (\lambda I - T)x_j$ para algum $x_j \in X$, se $x_j = u_j + v_j$ onde $u_j \in V_\lambda$ e $v_j \perp V_\lambda$, temos $y_j = (\lambda I - T)v_j$.

Afirmamos que $\{v_j\}_{j=1}^{+\infty}$ é uma sequência limitada. Caso contrário, passando a uma subsequência podemos assumir $\| v_j \| \to +\infty$. Tomando $w_j =$

$\dfrac{v_j}{\| v_j \|}$ então passando a uma subsequência podemos assumir que $\{Tw_j\}_{j=1}^{+\infty}$ converge para um limite z.

Desde que y_j's são limitados e $\| v_j \| \to +\infty$, $\lambda w_j = Tw_j + \dfrac{y_j}{\| v_j \|} \to z$ quando $j \to +\infty$, então $z \perp V_\lambda$ e $\| z \| = \lambda$. Mas também

$$(\lambda I - T)z = \lim(\lambda I - T)\lambda w_j = \lim \frac{\lambda y_j}{\| v_j \|} = 0$$

daí $z \in V_\lambda$. Isto contradiz o fato de termos assumido $\lambda \neq 0$.

Agora, sendo $\{v_j\}_{j=1}^{+\infty}$ limitada, passando a uma subsequênca, podemos assumnir que $\{Tv_j\}_{j=1}^{+\infty}$ converge ao limite x. Mas

$$v_j = \lambda^{-1}(y_j + Tv_j) \to \lambda^{-1}(y + x) \text{ quando } j \to +\infty$$

daí

$$y = \lim(\lambda I - T)v_j = (\lambda I - T)\lambda^{-1}(y + x)$$

então $y \in R(\lambda I - T)$ como queríamos.

Corolário 2.2 *Suponha $\lambda \neq 0$. Então:*

i) *A equação $(\lambda I - T)x = y$ possui uma solução se, e somente se, $y \perp W_{\overline{\lambda}}$;*

ii) *$\lambda I - T$ é sobrejetiva se, e somente se, é injetiva.*

Demonstração

Prova de i) Segue da parte (c) do teorema e do fato de $\overline{R(\lambda I - T)} = N(\overline{\lambda} I - T^*)^\perp$, portanto, $R(\lambda I - T) = N(\overline{\lambda} I - T^*)^\perp$.

Prova de ii) $\Rightarrow$) Suponha $\lambda I - T$ sobrejetiva, isto é, $X = R(\lambda I - T) = N(\overline{\lambda} I - T^*)^\perp$ segue que $dim(W_{\overline{\lambda}}) = 0$. Pela parte (b) do teorema, $dim(V_\lambda) = dim(W_{\overline{\lambda}})$, logo $N(\lambda I - T) = \{\overrightarrow{O}\}$, portanto $\lambda I - T$ é injetiva.

$\Leftarrow$) Se $\lambda I - T$ é injetiva, então $V_\lambda = N(\lambda I - T) = \{\overrightarrow{O}\}$. Novamente pela parte (b) do teorema e $X = N(\overline{\lambda} I - T^*)^\perp = R(\lambda I - T)$, segue que $\lambda I - T$ é sobrejetiva. No qual pode acontecer que os espaços V_λ são todos triviais. No entanto, se T é autoadjunto, existem autovetores.

Lema 2.1 *Se T é um operador compacto autoadjunto em um espaço de Hilbert X, então ou $\| T \|$ ou $- \| T \|$ é um autovalor para T.*

Demonstração

Mostrar o lema é o mesmo que provar a seguinte afirmação: existe $0 \neq x \in X$ tal que $[(T - \| T \| I)(T + \| T \| I)]x = (T^2 - \| T \|^2)x = 0$.

Seja $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ com $\| x_n \| = 1$, $\forall n$, tal que $\| Tx_n \| \to \| T \|$. Como T é compacto, existe subsequência de $(Tx_n)_{n=1}^{+\infty}$, que denotaremos por $(Tx_k)_{k=1}^{+\infty}$ convergente, do fato de T ser contínuo, $(T^2 x_k)_{k=1}^{+\infty}$ também converge.

Teorema 2.5 *Se T é um operador compacto autoadjunto sobre um espaço de Hilbert X, então X possui uma base ortonormal consistindo de autovetores para T.*

Demonstração

Apresentaremos primeiro duas propriedades de operadores autoadjuntos que serão úteis na demonstração.

Afirmação 2.2 *Autovetores para diferentes autovalores são ortogonais.*

Prova

Sejam λ, μ autovalores diferentes para T e v, w seus respectivos autovetores associados, assim

$$\langle T(v), w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$$

Por outro lado,

$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle = \mu \langle v, w\rangle$$

segue que, $(\lambda - \mu)\langle v, w\rangle = 0$ como $\lambda - \mu \neq 0$, implica que $v \perp w$.

Afirmação 2.3 *Se Y é um subespaço de X tal que $T(Y) \subset Y$ então $T(Y^{\perp}) \subset Y^{\perp}$.*

Prova

Se $y \in Y^{\perp}$, para qualquer $x \in Y$ tem-se

$$\langle T(y), x\rangle = \langle y, T(x)\rangle = 0 \text{ pois } T(x) \in Y.$$

Daí, $T(y) \in Y^{\perp}$.

Em particular, seja Y o fecho do espaço gerado pela combinação linear de todos os autovetores de T. Se escolhermos uma base ortonormal para cada autoespaço de T e tomarmos a união, por (i) obtemos uma base para Y. Por (ii), $T|Y^{\perp}$ é um operador compacto em $Y^{\perp}$, e não possui autovetores, desde que todos os autovetores de T pertencem a Y. Pelo lema (2.1), temos que pelo menos um dos valores $\| T \|$ ou $- \| T \|$ é um autovalor para T, portanto só há uma saída $Y^{\perp} = \{\overrightarrow{O}\}$, daí, $Y = X$.

Concluímos este capítulo, construindo uma útil classe de operadores em $L^2(\mu)$, com μ uma medida σ-finita sobre um espaço S. Se k é uma função mensurável em $S \times S$, definimos formalmente o operador T_k sobre funções definidas em S por

$$T_k f(x) = \int k(x, y) f(y) d\mu(y).$$

Se $k \in L^2(\mu \times \mu)$ então k é chamado um kernel de Hilbert-Schmidt.

Teorema 2.6 *Seja k um kernel de Hilbert-Schmidt. Então T_k é um operador compacto sobre $L^2(\mu)$ e $\| T_k \| \leqslant \| k \|_2$*

Demonstração

Primeiro mostraremos que T_k está bem definido em $L^2(\mu)$ e é limitado por $\| k \|_2$. Assim, para $f \in L^2(\mu)$:

$$\begin{aligned} |T_k f(x)| &\leqslant \int |k(x,y)||f(y)|d\mu(y) \\ &\leqslant \left(\int |k(x,y)|^2 d\mu(y) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |f(y)|^2 d\mu(y) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Isso mostra que $T_k f$ é finito quase sempre, e além disso

$$\begin{aligned} \| T_k f \|_2^2 &= \int |T_k f(x)|^2 d\mu(y) \\ &= \int \left| \int k(x,y) f(y) d\mu(y) \right|^2 d\mu(x) \\ &= \int \left(\int |k(x,y)||f(y)|d\mu(y) \right)^2 d\mu(x) \\ &\leqslant \int \left[\left(\int |k(x,y)|^2 d\mu(y) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |f(y)|^2 d\mu(y) \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 d\mu(x) \\ &= \| f \|_2^2 \int \int |k(x,y)|^2 d\mu(y) d\mu(x) \\ &= \| k \|_2^2 \| f \|_2^2 \end{aligned}$$

daí $\| T_k \| \leqslant \| k \|_2$.

Agora do fato de $L^2(\mu)$ ser Hilbert temos que existe $\{\phi_j\}_{j=1}^{+\infty}$ uma base ortonormal para $L^2(\mu)$. Considere o conjunto $S = \{\psi_{ij}(x,y) = \phi_i(x)\phi_j(y);\ i,j \geqslant 1\}$. Queremos mostrar que S forma uma base ortonormal para $L^2(\mu \times \mu)$. Para isso, seja $f \in L^2(\mu \times \mu)$ tal que $f \in \overline{S}^{\perp}$ e $g \in S$. Daí,

$$\int f(x,y) g(x,y) d(\mu \times \mu) = 0$$

tomando $g(x,y) = \phi_k(x)h(y)$, para qualquer k fixado e h pertencente ao espaço gerado por $\{\phi_j\}_{j=1}^{+\infty}$ contido em $L^2(\mu)$. Temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int f(x,y)g(x,y)d(\mu\times\mu) \\ &= \int\int f_y(x)\phi_k(x)d\mu(x)h(y)d\mu(y) \end{aligned}$$

pela arbitrariedade de h tem-se que

$$\int f_y(x)\phi_k(x)d\mu(x) = 0, \; y \text{ quase sempre.}$$

Usando o mesmo argumento mostra-se que

$$\int f_x(y)\phi_n(y)d\mu(y) = 0, \; x \text{ quase sempre.}$$

Como $\{\phi_j\}_{j=1}^{+\infty}$ é uma base para $L^2(\mu)$, e n é arbitrário, tem-se $f(x,y) \equiv 0$, (x,y) quase sempre. Logo S forma uma base para $L^2(\mu\times\mu)$ e ainda

$$\begin{aligned} \int \psi_{ij}(x,y)\psi_{kn}(x,y)d(\mu\times\mu) &= \int\int(\phi_i(x)\phi_j(y))(\phi_k(x)\phi_n(y))d\mu(x)d\mu(y) \\ &= \int\int \phi_i(x)\phi_k(x)\phi_j(y)\phi_n(y))d\mu(x)d\mu(y) \\ &= \left(\int \phi_i(x)\phi_k(x)d\mu(x)\right)(\phi_j(y)\phi_n(y))d\mu(y)) \\ &= \begin{cases} 1, \text{ se } (i,j) = (k,n) \\ 0, \text{ se } (i,j) \neq (k,n) \end{cases} \end{aligned}$$

Consequentemente, podemos escrever $k = \sum a_{ij}\psi_{ij}$. Para $N = 1, 2, \ldots$, seja

$$\begin{aligned} k_N &= \sum_{i+j\leqslant N} a_{ij}\psi_{ij}(x,y) \\ &= \sum_{i+j\leqslant N} a_{ij}\phi_i(x)\phi_j(y) \end{aligned}$$

assim, para $f \in L^2(\mu)$ tem-se

$$\begin{aligned}
T_{k_N} f(x) &= \int k_N(x,y) f(y) d\mu(y) \\
&= \int \sum_{i+j \leqslant N} a_{ij} \phi_i(x) \phi_j(y) f(y) d\mu(y) \\
&= \sum_{i+j \leqslant N} \int a_{ij} \phi_j(y) f(y) d\mu(y) \phi_i(x).
\end{aligned}$$

Então $R(T_{k_N})$ está contido no espaço gerado por $\phi_1, \ldots, \phi_N$, daí T_{k_N} possui rank finito. Por outro lado,

$$\| k - k_N \|_2^2 = \sum_{i+j>N} |a_{ij}|^2 \to 0 \text{ quando } N \to +\infty.$$

Assim, pelas observações feitas

$$\| T_k - T_{k_N} \| = \| k - k_N \|_2 \to 0 \text{ quando } N \to +\infty.$$

Construímos assim uma sequência de operadores com rank finito convergindo para T_k, daí pelo corolário (2.1), T_k é compacto.

Capítulo 3

Funções Harmônicas

De início faremos um estudo sobre algumas propriedades das funções harmônicas.

Proposição 3.1 *Seja Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}^{n+1}$ (com coordenadas $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$) com a propriedade $(x,-t) \in \Omega$ se $(x,t) \in \Omega$. Seja $\Omega_+ = \{(x,t) \in \Omega;\ t > 0\}$ e $\Omega_0 = \{(x,t) \in \Omega;\ t = 0\}$. Se u é contínua em $\Omega_+ \cup \Omega_0$, harmônica em Ω_+ e zero em Ω_0. Então u pode ser extendida de forma harmônica a Ω, colocando $u(x,-t) = -u(x,t)$.*

Demonstração

Inicialmente mostraremos que a extensão de u definida acima é contínua. Basta mostrarmos a continuidade em pontos pertencentes a Ω_0. Considere então a sequência $y_k = (x_k, -t_k)$ com $t_k > 0$ e $(x_k, t_k) \to (x_0, 0) \in \Omega_0$. Assim, $u(y_k) = u((x_k, -t_k)) = -u(x_k, t_k)$. Como $u((x,0)) = 0$ temos a continuidade. Note ainda que u é harmônica em $\Omega \setminus \Omega_0$, pois para $(x,t) \in \Omega_+$, tem-se que u é harmônica por hipótese, e $(x,-t)$ tem-se

$$u(x,-t) = -u(x,t) \Longrightarrow \Delta u(x,-t) = \Delta(-u(x,t)) = -\Delta u(x,t) = 0.$$

Agora, dado $(x_0, 0) \in \Omega_0$, mostraremos que u é harmônica em $(x_0, 0)$. Seja B é uma bola centrada em x_0 a qual o fecho está contido em Ω, isto é, $\overline{B} \subset \Omega$.

Por uma translação e dilatação de coordenada, podemos assumir que $x_0 = 0$ e B é unitária. Desde que u é contínua em $\overline{B}$, podemos resolver o problema de Dirichlet:

$$\Delta v = 0 \text{ em } B \text{ e } v = u \text{ em } \partial B.$$

Com $v \in C(\overline{B})$, pela afirmação (1.14).
Assim, escrevendo

$$v(x,t) = \int_S P((x,t),(y,t))u(y,t)d\sigma(\tilde{y}), \text{ com } ((x,t) \in B)$$

temos

$$\begin{aligned} v(x,-t) &= \int_S \left(\frac{1 - |(x,-t)|^2}{w_n|(x,-t) - (y,-t)|^n} \right) u(y,-t)d\sigma(\tilde{y}) \\ &= -\int_S \left(\frac{1 - |(x,-t)|^2}{w_n|(x,t) - (y,t)|^n} \right) u(y,t)d\sigma(\tilde{y}) \\ &= -v(x,t). \end{aligned}$$

Daí, $v(x,-0) = v(x,0) \Rightarrow v(x,0) = 0$. Deste modo, v concorda com u no hemisfério superior e inferior de ∂B. Pela afirmação (1.11) temos a unicidade, pois $v = u$ no interior, implica $v = u$ em B. Em particular, u é harmônica em B.

Considere $T : \Omega \to \Omega'$ translação $x \longmapsto x + a$ e a sua inversa $T^{-1} : \Omega' \to \Omega$, onde ($T(\Omega) = \Omega'$), dada por $y \longmapsto y - a$. Então,

$$\begin{aligned}
\Delta(u \circ T^{-1}) &= \sum_j \frac{\partial^2}{\partial y_j}[u(y-a)] \\
&= \sum_j \frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial y_j}(y-a)\right] \\
&= \sum_j \frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{\partial u}{\partial x_j}(y-a)\right] \\
&= \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u(y-a) = 0.
\end{aligned}$$

Suponha Ω uma vizinhança de $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Se u é uma função harmônica em $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, u é dita possuir uma singularidade removível em x_0 se u pode ser redefinida em x_0 de forma a ser harmônica em Ω.

Considere a aplicação dilatação $T : \Omega \to \Omega'$ com $T(\Omega) = \Omega'$, dada por $x \to \lambda x$ e sua inversa $T^{-1} : \Omega' \to \Omega$, tem-se $y \to \dfrac{1}{\lambda} y$. Sendo u uma função harmômica em Ω, $u \circ T^1$ ainda é harmônica, pois

$$\begin{aligned}
\Delta(u \circ T^{-1}) &= \sum_j \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\left(u\left(\frac{1}{\lambda}y\right)\right) \\
&= \sum_j \frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}u\left(\frac{1}{\lambda}y\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{1}{\lambda}y\right)\right] \\
&= \sum_j \frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}u\left(\frac{1}{\lambda}y\right) \cdot \frac{1}{\lambda}\right] \\
&= \sum_j \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}u\left(\frac{1}{\lambda}y\right)\right] \\
&= \sum_j \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Teorema 3.1 *Suponha u harmônica em $\Omega\backslash\{x_0\}$. Se $|u(x)| = o\left(|x - x_0|^{2-n}\right)$ para $n > 2$ ou $|u(x)| = o\left(\log|x - x_0|^1\right)$ para $n = 2$, quando $x \to x_0$, então u possui uma singularidade removível em x_0.*

Demonstração

Por argumentos mostrados anteriormente, a menos de translação e dilatação, podemos supor que Ω contém o fecho da bola unitária $\overline{B_1} = \overline{B_1(0)}$ e $x_0 = 0$. Podemos assumir ainda que u é real, já que se u for complexa, tem-se as desigualdades $|Re\, u|$, $|Im\, u| \leqslant |u|$. Desde que u é contínua em ∂B_1, pela afirmação (1.14) existe $v \in C(\overline{B_1})$ satisfazendo

$$\Delta v = 0 \text{ em } B_1 \text{ e } v = u \text{ em } \partial B_1.$$

Mostremos que $u = v$ em $B_1 \setminus \{0\}$, daí podemos remover a singularidade fazendo $u(0) = v(0)$. Dado $\varepsilon > 0$ e $\delta \in (0, 1)$, considere a função

$$f(x) = u(x) - v(x) - \varepsilon\left(|x|^{2-n} - 1\right) \text{ para } n > 2$$

e

$$g(x) = u(x) - v(x) + \varepsilon \log|x| \text{ para } n = 2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= u(x) - v(x) - \varepsilon\left(|x|^{2-n} - 1\right) \\ &= u(x) - \varepsilon|x|^{2-n} - v(x) + \varepsilon \\ &= |x|^{2-n}\left(\frac{u}{|x|^{2-n}} - \varepsilon\right) + \varepsilon - v(x). \end{aligned}$$

Como $\dfrac{u}{|x|^{2-n}} \to 0$, podemos escolher $\delta \in (0, 1)$ tal que $\dfrac{u}{|x|^{2-n}} - \varepsilon < \dfrac{-\varepsilon}{2}$, $\forall\, 0 < |x| \leqslant \delta$. Assim, $|x| = \delta$ tem-se $f(x) < \delta^{2-n}\left(\dfrac{-\varepsilon}{2}\right) + \varepsilon - v(x)$.

Como $v(x) \to v(0)$ quando $\delta \to 0$, tem-se $f(x) \to -\infty$ para $n > 2$. Logo existe $\delta \in (0,1)$ tal que $|x| \leqslant \delta$ tem-se $f(x) \leqslant 0$, daí f é não positiva em $B_1 \setminus \overline{B_\delta}$, assim pelo Princípio do Máximo, f é não positiva em $B_1 \setminus \{0\}$. Refazendo as contas para $\overline{f}(x) = v(x) - u(x) - \varepsilon\left(|x|^{2-n} - 1\right)$ e usando o mesmo argumento, mostra-se que $f \geqslant 0$ em $B_1 \setminus \{0\}$. Pela arbitrariedade do $\varepsilon > 0$, temos $u = v$ em $B_1 \setminus \{0\}$. Desse modo podemos remover a singularidade de f, escrevendo $u(0) = v(0)$.

Seja T uma bijeção de classe C^∞ de um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ em um aberto $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ com inversa C^∞. Sejam $y = T(x)$ e, $J_T = \left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ e $J_{T^{-1}} = \left(\dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)$ são as matrizes jacobianas de T e T^{-1} respectivamente.

Defina a matriz (g_{ij}) em Ω' por

$$\begin{aligned}(g_{ij}(y)) &= (J_{T^{-1}})^t(y) J_{T^{-1}}(y)\\ &= \sum \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial y_j}(y).\end{aligned}$$

a matriz inversa (g^{ij}) de (g_{ij}) é então

$$\begin{aligned}(g^{ij}(y)) &= (JJ^T)(T^{-1}(y))\\ &= \sum_k \frac{\partial y_i}{\partial x_k}\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\bigg|_{T^{-1}(y)}.\end{aligned}$$

além do mais,

$$\begin{aligned}g &= \det(g_{ij})\\ &= \det((J_{T^{-1}})^t(y) \cdot J_{T^{-1}}(y))\\ &= \det((J_{T^{-1}})(y)) \det(J_{T^{-1}}(y))\\ &= \det(J_{T^{-1}})^2\end{aligned}$$

Daí, $\det J_{T^{-1}} = \sqrt{g}$ e temos a relação abaixo entre os elementos de volume dx e dy:

$$dx = |\det J_{T^{-1}}|dy = \sqrt{g}dy$$

Teorema 3.2 *Se u é de classe C^2 em Ω e $U = u \circ T^{-1}$, então*

$$\Delta(u \circ T^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(g^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial U}{\partial y_i}\right).$$

Demonstração

Dado $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, seja $\psi = \phi \circ T^{-1}$. Então

$$\begin{aligned}
\int (\Delta u)\phi dx &= \int \sum_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\phi dx \\
&= \sum_k \int \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\phi dx \\
&= -\sum_k \int \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \phi}{\partial x_k} dx \\
&= -\sum_k \int \frac{\partial u}{\partial x_k}(T^{-1}(y))\frac{\partial \phi}{\partial x_k}(T^{-1}(y))|J_{T^{-1}}|dy \\
&= -\sum_k \int \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \psi(y)}{\partial x_k}\sqrt{g}dy \\
&= -\sum_{i,j,k} \int \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\sqrt{g}dy \\
&= -\sum_{i,j,k} \int \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial \psi}{\partial y_j}\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\right)\sqrt{g}dy \\
&= -\sum_{i,j} \int \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial \psi}{\partial y_j}\left(\sum_k \frac{\partial y_i}{\partial x_k}\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\right)\sqrt{g}dy \\
&= -\sum_{i,j} \int \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial \psi}{\partial y_j} g^{ij}\sqrt{g}dy \\
&= \sum_{i,j} \int \frac{\partial}{\partial y_i}\left(g^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial U}{\partial y_i}\right)\psi dy \\
&= \sum_{i,j} \int \left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(g^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial U}{\partial y_i}\right) \circ T\right]\phi dx.
\end{aligned}$$

Isto é verdade para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, o resultado segue.

Estamos particularmente interessado na transformação

$$y = T(x) = |x|^{-2}x \text{ no } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

obtida por inversão na esfera unitária. De $x = |y|^{-2}y$, vemos que

$$\frac{\partial x_k}{\partial y_i} = \frac{-2y_i y_k}{|y|^4} + \frac{\delta_{ik}}{|y|^2} \text{ e}$$

$$\begin{aligned}
g_{ij} &= \sum_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \right) \\
&= \sum_k \left[\frac{-2y_i y_k}{|y|^4} + \frac{\delta_{ik}}{|y|^2} \right] \left[\frac{-2y_i y_k}{|y|^4} + \frac{\delta_{ik}}{|y|^2} \right] \\
&= \sum_k \left[\frac{4y_i y_j y_k^2}{|y|^8} - \frac{2y_i y_k \delta_{jk}}{|y|^6} - \frac{2y_j y_k \delta_{ik}}{|y|^6} + \frac{\delta_{ik}\delta_{jk}}{|y|^4} \right] \\
&= \frac{4y_i y_j \sum\limits_k y_k^2}{|y|^8} - \frac{2y_i y_j}{|y|^6} - \frac{2y_j y_i}{|y|^6} + \frac{\delta_{ii}\delta_{jj}}{|y|^4} \\
&= \frac{4y_i y_j}{|y|^6} - \frac{2y_i y_j}{|y|^6} - \frac{2y_j y_i}{|y|^6} + \frac{\delta_{ij}}{|y|^4} = \frac{\delta_{ij}}{|y|^4}.
\end{aligned}$$

Daí $g^{ij} = |y|^4 \delta_{ij}$ e $g = |y|^{-4n}$. Então, se u é uma função em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $U(y) = u\left(|y|^{-2}y\right)$, temos

$$
\begin{aligned}
\Delta u(|y|^{-2}y) &= \Delta u \circ T^{-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial U}{\partial y_i} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{|y|^{4n}}}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[|y|^4 \delta_{ij} \sqrt{\frac{1}{|y|^{4n}}} \frac{\partial U}{\partial y_i} \right] \\
&= |y|^{2n} \sum_j \frac{\partial}{\partial y_j} \left[|y|^4 \cdot |y|^{-2n} \frac{\partial U}{\partial y_i} \right] \\
&= |y|^{2n} \sum_j \frac{\partial}{\partial y_j} \left[|y|^{2(2-n)} \frac{\partial U}{\partial y_i} \right] \\
&= |y|^{2n} \sum_j \left[(2-n)|y|^{2(1-n)} \cdot 2y_j \frac{\partial U}{\partial y_i} + |y|^{4-2n} \frac{\partial^2 U}{\partial y_i^2} \right] \\
&= |y|^{2n} \sum_j \left[(4-2n)|y|^{2(1-n)} y_j \frac{\partial U}{\partial y_i} + |y|^{4-2n} \frac{\partial^2 U}{\partial y_i^2} \right] \\
&= |y|^{2n} \sum_j \left[2(2-n)|y|^{2(1-n)} y_j \frac{\partial U}{\partial y_i} + |y|^{4-2n} \frac{\partial^2 U}{\partial y_i^2} \right] \\
&= |y|^{n+2} \sum_j \left[2(2-n)|y|^{-n)} y_j \frac{\partial U}{\partial y_i} + |y|^{2-n} \frac{\partial^2 U}{\partial y_i^2} \right] \\
&= |y|^{n+2} \sum_j \left[\frac{\partial^2 |y|^{2-n}}{\partial_j^2} U + 2 \frac{\partial |y|^{2-n}}{\partial y_i} \frac{\partial U}{\partial y_i} + |y|^{2-n} \frac{\partial^2 U}{\partial y_i^2} \right] \\
&= |y|^{n+2} \sum_j \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \left[|y|^{2-n} U \right]. \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\frac{\partial |y|^{2-n}}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[(|y|^2)^{1-\frac{n}{2}} \right] = \left(1 - \frac{n}{2} \right) |y|^{-n} \cdot \partial y_j = (2-n)|y|^{-n} y_j.
$$

Daí

$$
\Delta u(|y|^{-2}y) = |y|^{n+2} \sum \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \left(|y|^{2-n} U \right), \; U(y) = u\left(|y|^{-2} y \right).
$$

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tomemos

$$\tilde{\Omega} = \{|x|^{-2}x;\, x \in \Omega\}.$$

Se u é uma função em Ω, sua transformada de Kelvin é a função $\tilde{u}$ definida em $\tilde{\Omega}$ por $\tilde{u}(x) = |x|^{2-n}u(|x|^{-2}x)$.

Teorema 3.3 *Se u é harmônica em $\Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, então sua transformada de Kelvin $\tilde{u}$ é harmônica em $\tilde{\Omega}$.*

Demonstração

Usando a notação de (3.1), temos que

$$\Delta u(|y|^{-2}y) = |y|^{n+2} \sum \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}(|y|^{2-n}U),\ U(y) = u(|y|^{-2}y).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\tilde{U}(y) &= \tilde{u}(|y|^{-2}y) \\
&= ||y|^{-2}y|^{2-n}u(||y|^{-2}y|^{-2}|y|^{-2}y) \\
&= |y|^{-4+2n}|y|^{2-n}u(|y|^4|y|^{-2}|y|^{-2}y) \\
&= |y|^{n-2}u(y).
\end{aligned}$$

Tem-se $\tilde{U}(y) = |y|^{2-n}u(y)$ ou $u(y) = |y|^{2-n}\tilde{U}(y)$. Por (3.1):

$$\begin{aligned}
\Delta\tilde{u}(|y|^{-2}y) &= |y|^{n+2}\Delta(|y|^{2-n}\tilde{U})(y) \\
&= |y|^{n+2}\Delta u(y).
\end{aligned}$$

Portanto se u é harmônica em Ω, temos que $\tilde{u}$ é harmônica em $\tilde{\Omega}$.

Se u é harmônica fora de um conjunto limitado, então na transformada de Kelvin $\tilde{u}$ é harmônica na vizinhança de origem, exceto nula na origem.

Definição 3.1 *Dizemos que u é harmônica no infinito se $\tilde{u}$ possui uma singularidade removível no O.*

Proposição 3.2 *Se u é harmônica num complemento de um conjunto limitado do $\mathbb{R}^n$, o que se segue são equivalentes:*

a. *u é harmônica no infinito;*

b. *$u(x) \to 0$ quando $x \to \infty$ se $n > 2$, ou $|u(x)| = O(\log|x|)$ quando $x \to \infty$ se $n = 2$;*

c. *$|u(x)| = O(|x|^{2-n})$ quando $x \to \infty$.*

Demonstração

Ver [1].

Proposição 3.3 *Suponha u harmônica no infinito. Então $|\partial_r u(x)| = O(|x|^{1-n})$ quando $x \to \infty$. Além do mais, no caso $n = 2$ tem-se $|\partial_r u(x)| = O(|x|^{-2})$ quando $x \to \infty$.*

Demonstração

Ver [1].

Capítulo 4

Potenciais de Camada

As seções deste capítulo são dedicados à soluções dos problemas de Dirichlet e Neumann para o Laplaciano pelo método de potenciais de camada. Este método reduz os problemas a resolver certas equações integrais, para os quais pode-se usar a Teoria de Operadores Compactos.

4.1 Problemas

De agora em diante, Ω será um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ fixado com fronteira de classe C^2 e $\Omega' = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Ambos Ω e Ω' será permitido desconexo; de qualquer modo, desde que S é diferenciável, terá finitas componentes. Denotaremos as componentes de Ω por $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ e as de Ω' por $\Omega'_0, \Omega'_1, \ldots, \Omega'_m$, onde Ω'_0 é a componente ilimitada.

Para tratarmos o problema de Neumann, precisamos ter cuidado sobre o significado da derivada normal, uma vez que não desejamos tornar confusa a teoria com pressupostos estranhos de suavidade. Recordem que definimos a derivada normal ∂_ν numa vizinhança de S pela fórmula (1.1). Define-se $C_\nu(\Omega)$ o espaço de funções $u \in C'(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que o limite

$$\partial_{\nu_-} u(x) = \lim_{t \to 0^-} \nu(x) \cdot \nabla u(x + t\nu(x)), \text{ com } \nu(x) \text{ normal a } S \text{ no ponto } x,$$

existe para cada $x \in S$, a convergência é de natureza uniforme em S. Então $\partial_{\nu_-} u$ é uma função contínua em S. Semelhantemente, definimos $C_\nu(\Omega')$ como o espaço de funções $u \in C^1(\Omega') \cap C(\overline{\Omega}')$ tal que o limite

$$\partial_{\nu_+} u(x) = \lim_{t \to 0^+} \nu(x) \cdot \nabla u(x + t\nu(x)), \text{ com } \nu(x) \text{ normal a } S \text{ no ponto } x,$$

existe para cada $x \in S$, a convergência é de natureza uniforme em S. Os operadores ∂_{ν_-} e ∂_{ν_+} são chamados de derivadas normal interior e exterior em S.

Enunciaremos agora os problemas que pretendemos resolver:

- O Problema Interior de Dirichlet: Dada $f \in C(S)$, encontrar $u \in C(\overline{\Omega})$ tal que u seja harmônica em Ω e $u = f$ em S.

- O Problema Exterior de Dirichlet: Dada $f \in C(S)$, encontrar $u \in C(\overline{\Omega'})$ tal que u seja harmônica em $\Omega' \cup \{\infty\}$ e $u = f$ em S.

- O Problema Interior de Neumann: Dada $f \in C(S)$, encontrar $u \in C_\nu(\Omega)$ tal que u seja harmônica em Ω e $\partial_{\nu_-} u = f$ em S.

- O Problema Exterior de Neumann: Dada $f \in C(S)$, encontrar $u \in C_\nu(\Omega')$ tal que u seja harmônica em $\Omega' \cup \{\infty\}$ e $\partial_{\nu_+} u = f$ em S.

Observamos aqui, que para os problemas exteriores, a solução caso ela exista será uma função harmônica fora de um conjunto limitado, que é o caso de harmônica no infinito, como já foi discutido anteriormente. Desse fato, obtemos a unicidade.

Esses quatro problemas estão ligados, e obteremos as soluções para todos eles simultaneamente. Os seguintes resultados são referentes à unicidade das soluções de tais problemas.

Proposição 4.1.1 *Se u é solução do Problema Interior de Dirichlet com $f = 0$, então $u = 0$.*

Demonstração

Podemos considerar u real, pois para u complexa, o argumento é o mesmo para as partes real e imaginária de u. Note que $u = 0$ em $\partial\Omega$, pelo Princípio do Máximo u atinge o máximo na fronteira, note ainda que $-u$ também é solução e atinge o máximo na fronteira, daí $u = 0$.

Proposição 4.1.2 *Se u é solução para o Problema Exterior de Dirichlet com $f = 0$ então $u = 0$.*

Demonstração

Como já mostramos que a harmonicidade é preservada por translação e dilatação de coordenadas, podemos supor que $0 \notin \overline{\Omega}$. Pelo Teorema (3.3), a transformada de Kelvin $\tilde{u}$ de u é solução para o problema de Dirichlet com $f = 0$, para o domínio limitado $\overline{\Omega}' = \{x = |x|^{-2}x \in \Omega'\}$. Como $u(x) = |x|^{2-n}\tilde{u}(|x|^{-2}x)$, se $\tilde{u} = 0$ então $u = 0$.

Proposição 4.1.3 *Se u é solução para o Problema Interior de Neumann com $f = 0$ então u é constante em cada componente de Ω.*

Demonstração

Pela identidade de Green tem-se

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = -\int_\Omega u(\Delta u) + \int_S u\partial_{\nu_-} u = 0, \text{ pois}$$
$$\int_S u\partial_{\nu_-} u = 0, \text{ já que } \partial_\nu u|_S = f = 0, \text{ e}$$
$$\int_\Omega u(\Delta u) = 0, \text{ pois } u \text{ é harmônica.}$$

Seja Ω_i uma componente conexa de Ω. Temos que

$$0 = \int_\Omega |\nabla u|^2 \geqslant \int_{\Omega_i} |\nabla u|^2 \geqslant 0 \text{ portanto } \int_{\Omega_i} |\nabla u|^2 = 0.$$

Como Ω_i é conexo tem-se $|\nabla u|^2 = 0$ em Ω_i, daí u é constante em Ω_i.

Proposição 4.1.4 *Se u é solução do Problema Exterior de Neumann com $f = 0$ então u é constante em cada componente Ω', e $u = 0$ na componente ilimitada Ω'_0 quando $n > 2$.*

Demonstração

Tome $r > 0$ grande o bastante de tal forma que $\overline{\Omega} \subset B_r = B_r(0)$. A identidade de Green nos dá,

$$\int_\Omega (v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v) = \int_S v\partial_\nu u.$$

Do fato de u ser harmônica em Ω' e $\partial_{\nu_+} u = 0$ em S, tem-se

$$\begin{aligned}\int_{B_r\setminus\Omega} |\nabla u|^2 &= -\int_{B_r\setminus\Omega} u(\Delta u) - \int_S u\partial_{\nu_+} u + \int_{\partial B_r} u\partial_r u \\ &= \int_{\partial B_r} u\partial_\Omega u\end{aligned}$$

pois no caso da bola, a derivada normal coincide com a derivada radial. Pelas proposições (3.2) e (3.3) temos, respectivamente, que $|u(x)| = O\left(|x|^{2-n}\right)$ e

$|\partial_r u(x)| = O\left(|x|^{1-n}\right)$. Assim

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\partial B_r} u\partial_r u d\sigma(x)\right| &\leqslant \int_{\partial B_r} |u||\partial_r u| d\sigma(x) \\
&\leqslant \int_{\partial B_r} c_1|x|^{2-n} c_2|x|^{1-n} d\sigma(x) \\
&= c_3 \int_{\partial B_r} r^{2-n} r^{1-n} d\sigma(x) \\
&= c_3 r^{2-n} r^{1-n} \int_{\partial B_r} d\sigma(x) \\
&= c_3 r^{2-n} r^{1-n} \sigma(S^{n-2}) \int_0^r t^{n-1} dt \\
&= c_4 r^{2-n} r^{1-n} \frac{r^{n-1}}{n-1} \\
&= c r^{2-n}
\end{aligned}$$

Daí, quando $n > 2$, fazendo $r \to \infty$ tem-se $\displaystyle\int_{\Omega'} |\nabla u|^2 = 0$. Então $\nabla u = 0$ em Ω', assim u é localmente constante em Ω' e $u = 0$ em Ω'_0 pois $|u(x)| = O\left(|x|^{2-n}\right)$. Se $n = 2$ novamente a proposição (3.3) nos dá $|\partial_r u(x)| = O\left(r^{-2}\right)$, como

$$\begin{aligned}
\int_{B_r\setminus\Omega} |\nabla u|^2 d\sigma(x) &= -\int_{B_r\setminus\Omega} u(\Delta u) d\sigma(x) - \int_S u\partial_{\nu_+} u d\sigma(\delta) + \int_{\partial B_r} u\partial_r u d\sigma(x') \\
&= \int_{\partial B_r} u\partial_r u d\sigma(x')
\end{aligned}$$

tem-se

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\partial B_r} u\partial_r u d\sigma(x')\right| &\leqslant \int_{\partial B_r} |u||\partial_r u| d\sigma(x') \\
&\leqslant c_1 \int_{\partial B_r} |\partial_r u| d\sigma(x') \\
&\leqslant c_2 \int_{\partial B_r} |x|^{-2} d\sigma(x') \\
&= c_3 \int_{\partial B_r} r^{-2} d\sigma(x') \\
&= c_3 r^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^r t dt d\theta \\
&= c r^{-2} \cdot r \\
&= c r^{-1}
\end{aligned}
$$

Logo, $\left|\int_{\partial B_r} u\partial_r u d\sigma(x')\right| = O\left(r^{-1}\right)$. Daí $|\nabla u| = 0$ em Ω', então u é localmente constante em Ω'.

Veremos que os problemas interior e exterior de Dirichlet são sempre resolvíveis. Para os problemas de Neumann, no entanto, existem algumas condições necessárias.

Proposição 4.1.5 *Se o problema interior de Neumann possui uma solução, então* $\int_{\partial\Omega_j} f = 0$ *para* $j = 1, \ldots, m$*.*

Demonstração

Usando a identidade de Green, tem-se

$$\int_S v\partial_\nu u = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega v(\Delta u).$$

Tomando $v = 1$ obtemos $\int_S \nabla_\nu u = \int_\Omega \Delta u$, como u é harmônica temos que a integral é nula.

Do fato de u ser harmônica em cada componente conexa Ω_j, $j = 1, \ldots, m$, temos $\displaystyle\int_{\partial\Omega_j} \partial_\nu u = 0$, como $\partial_\nu u|_S = f$ e $\partial\Omega_j \subset S$ tem-se

$$0 = \int_{\partial\Omega_j} \partial_\nu u = \int_{\partial\Omega_j} f,\ \forall j = 1, \ldots, m.$$

Proposição 4.1.6 *Se o Problema Exterior de Neumann possui solução, então* $\displaystyle\int_{\partial\Omega'_j} f = 0$ *para* $j = 1, \ldots, m$, *e também para* $j = 0$ *no caso* $n = 2$.

Demonstração

Aplicando a proposição anterior tem-se que $\displaystyle\int_{\partial\Omega'_j} f = 0$ para $j \geqslant 1$.

Se $u = 2$, seja r suficientemente grande tal que $\overline{\Omega} \subset B_r = B_r(0)$. Pela afirmação (1.6), tem-se

$$\int_{\partial B} \partial_r u - \int_{\partial\Omega'_0} \partial_{\nu_+} u = 0$$

Mas, $|\partial_r u(x)| = O\left(|x|^{-2}\right)$ pela proposição (3.3), daí

$$\int_{\partial B_r} \partial_r u \to 0 \text{ quando } r \to \infty \text{ e}$$

$$0 = \int_{\partial\Omega'_j} \partial_{\nu_+} u = \int_{\partial\Omega'_0} f.$$

4.2 Operadores Integrais

Estudaremos na próxima seção o potencial de camada dupla, entretanto precisamos de algumas informações sobre certos tipos de operadores integrais sobre a fronteira S do nosso domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Definição 4.2.1 *Seja k uma função mensurável em $\{S \times S\}$, e suponha $0 \leqslant \alpha \leqslant n-1$. Diremos k um kernel de ordem $\alpha > 0$ se*

$$k(x, y) = A(x, y)|x - y|^{\alpha} \tag{4.1}$$

com A uma função limitada em $\{S \times S\}$. Se $\alpha = 0$, k é um kernel de ordem zero se

$$k(x,y) = A(x,y)\log|x-y| + B(x,y) \tag{4.2}$$

onde A e B são funções limitadas em $\{S \times S\}$.

Caso k seja contínua em $\{(x,y) \in \{S \times S\}; x \neq y\}$, dizemos que k é um kernel contínuo de ordem α. Se k é um kernel de ordem α, com $0 \leqslant \alpha \leqslant n-1$, definimos o operador T_k por

$$T_k f(x) = \int_S k(x,y) f(y) d\sigma(y).$$

Proposição 4.2.1 *Se k é um kernel de ordem α, $0 \leqslant \alpha \leqslant n-1$, então T_k é limitado em $L^p(S)$ para $1 \leqslant p < \infty$. Além do mais, existe uma constante $c > 0$ dependendo somente de α tal que se k com suporte em $\{(x,y); |x-y| < \epsilon\}$, então*

$$\| T_k f \|_p \leqslant C\epsilon^{n-1-\alpha} \| A \|_\infty \| f \|_p, \ \textit{com } \alpha > 0$$
$$\| T_k f \|_p \leqslant C\epsilon^{n-1}(\| A \|_p (1 + |\log \epsilon| + \| B \|_\infty)) \| f \|_\infty, \ \textit{com } \alpha = 0$$

onde A e B são como (4.1) e (4.2).

Demonstração

Note que,

$$\begin{aligned}
\int |k(x,y)| d\sigma(x) &\leqslant \| A \|_\infty \int_{|x-y|<\epsilon} |x-y|^{-\alpha} dy \\
&= \| A \|_\infty \int_{S^{n-2}} \int_0^\epsilon r^{-\alpha} r^{n-2} dr d\sigma(y') \\
&= \sigma(S^{n-2}) \| A \|_\infty \int_0^\epsilon r^{n-2-\alpha} dr \\
&= \sigma(S^{n-2}) \| A \|_\infty \left. \frac{r^{n-\alpha-1}}{n-\alpha-1} \right|_0^\epsilon \\
&= C \| A \|_\infty \epsilon^{n-\alpha-1}
\end{aligned}$$

Usando então a Desigualdade de Young generalizada, tem-se que

$$\| T_k f \|_p \leqslant C\epsilon^{n-\alpha-1} \| A \|_\infty \| f \|_p, \text{ com } \alpha > 0.$$

Para $\alpha = 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
\int |k(x,y)| d\sigma(y) &= \int_{|x-y|<\epsilon} |A(x,y) \log|x-y| + B(x,y)| d\sigma(y) \\
&\leqslant \| A \|_\infty \int_{|x-y|<\epsilon} \log|x-y| d\sigma(y) + \| B \|_\infty \int_{|x-y|<\epsilon} d\sigma(y) \\
&= \| A \|_\infty \int_{S^{n-2}} \int_0^\epsilon (\log r) r^{n-2} dr d\sigma(y') + c_1 \| B \|_\infty \epsilon^{n-1} \\
&= \sigma(S^{n-2}) \| A \|_\infty \int_0^\epsilon (\log r) r^{n-2} dr + c_1 \| B \|_\infty \epsilon^{n-1} \\
&= c_2 \| A \|_\infty \left[(\log r) \frac{r^{n-1}}{n-1} \bigg|_0^\epsilon - \int_0^\epsilon \frac{r^{n-2}}{n-1} dr \right] + c_1 \| B \|_\infty \epsilon^{n-1} \\
&= c_2 \| A \|_\infty \left[(\log \epsilon) \frac{\epsilon^{n-1}}{n-1} - \frac{\epsilon^{n-1}}{(n-1)^2} \right] + c_1 \| B \|_\infty \epsilon^{n-1} \\
&\leqslant c\epsilon^{n-1} [\| A \|_\infty (1 + |\log \epsilon|) + \| B \|_\infty].
\end{aligned}$$

Notamos aqui que $\lim_{r\to\infty} (\log r) \dfrac{r^{n-1}}{n-1} = 0$, daí concluímos novamente pela Desigualdade de Young generalizada que $\| T_k f \|_p \leqslant C\epsilon^{n-1} [\| A \|_\infty (1 + |\log \epsilon|) + \| B \|_\infty] \| f \|_\infty$, quando $\alpha = 0$.

Proposição 4.2.2 *Se k é um kernel de ordem α com $0 \leqslant \alpha \leqslant n-1$, então T_k é compacto em $L^2(S)$.*

Demonstração

Dado $\epsilon > 0$, defina $k_\epsilon(x,y) = k(x,y)$ para $|x-y| > \epsilon$ e $k_\epsilon(x,y) = 0$, caso contrário. Seja $k'_\epsilon = k - k_\epsilon$. Note que para $|x-y| > \epsilon$ tem-se

$$\begin{aligned} |k_\epsilon(x,y)| &= |A(x,y)|x-y|^{-\alpha}|, \text{ para } 0 < \alpha < n-1 \\ &\leqslant \| A \|_\infty |x-y|^{-\alpha} \\ &= \frac{\| A \|_\infty}{|x-y|^\alpha} \\ &\leqslant \frac{\| A \|_\infty}{\epsilon^\alpha}. \end{aligned}$$

Daí, k_ϵ é limitado em $S \times S$, logo é um kernel Hilbert-Schmidt, por isso T_{k_ϵ} é limitado em $L^2(S)$ pelo Teorema (2.6). Por outro lado, pela Proposição (4.2.1) a norma do operador $T_{k'_\epsilon} = T_k - T_{k_\epsilon}$ tende a zero quando $\epsilon \to \infty$. Daí, como exibimos uma sequência de operadores compactos que converge para T_k tem-se T_k compacto pelo corolário (2.1).

Proposição 4.2.3 *Se k é um kernel de ordem α contínua, $0 \leqslant \alpha < n-1$, então T_k transforma funções limitadas em funções contínuas.*

Demonstração

Podemos assumir $\alpha > 0$, desde que um kernel contínuo de ordem zero é também um kernel contínuo de ordem α para qualquer $\alpha > 0$. Escrevendo então $k(x,y) = A(x,y)|x-y|^{-\alpha}$. Dado $x \in S$ e $\delta > 0$, considere o conjunto $B_\delta = \{y \in S; |x-y| < \delta\}$. Se $y \in B_\delta$, temos

$$\begin{aligned}
|T_k f(x) - T_k f(y)| &= \left| \int_S [k(x,z) - k(y,z)] f(z) d\sigma(z) \right| \\
&\leqslant \int_{B_{2\delta}} [|k(x,z)| + |k(y,z)|] |f(z)| d\sigma(z) \\
&+ \int_{S \setminus B_{2\delta}} |k(x,z) - k(y,z)| |f(z)| d\sigma(z) \\
&\leqslant \| f \|_\infty \| A \|_\infty \cdot \int_{B_{2\delta}} [|x - z|^{-\alpha} + |y - z|^{-\alpha}] d\sigma(z) \\
&+ \int_{S \setminus B_{2\delta}} |k(x,z) - k(y,z)| |f(z)| d\sigma(z)
\end{aligned}$$

Na última desigualdade, a primeira integral do lado direito escreve-se

$$\int_{B_{2\delta}} [|x - z|^{-\alpha} + |y - z|^{-\alpha}] d\sigma(z) = \int_{B_{2\delta}} |x - z|^{-\alpha} d\sigma(z) + \int_{B_{2\delta}} |y - z|^{-\alpha} d\sigma(z).$$

Agora, faremos o cálculo da integral $\int_{B_{2\delta}} |x - z|^{-\alpha} d\sigma(z)$. Procede-se de modo análogo para a segunda integral da última igualdade. Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno temos que $B_{2\delta}$ é localmente um gráfico sobre $\{z' \in \mathbb{R}^{n-1}; |y' - z'| \leqslant \delta\}$. Assim considerando $\phi(x) = (x, f(x))$ a parametrização, tem-se $(\pi \circ \phi)(x) = x$. Portanto $\det(J(\pi \circ \phi)(x)) = \det(Id) = 1$. Logo, usando coordenadas polares e a identidade de $\int_{R \subset S} f(x) d\sigma(x) = \int_{\varphi^{-1}(R)} f(\varphi(y)) \sqrt{\det(g_{ij})} d\sigma(y)$. Temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_{2\delta}} |x - z|^{-\alpha} d\sigma(z) &\leqslant c_2 \int_{\tilde{B}_{2\delta}} |x' - z'|^{-\alpha} d\sigma(z') \\
&= c_1 \int_{S^{n-2}} \int_0^\epsilon r^{-\alpha} r^{n-2} dr d\sigma(S^{n-2}) \\
&= c_1 \sigma(S^{n-2}) \int_0^\delta r^{-\alpha+n-2} \\
&= c\delta^{n-\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ podemos fazer esses termos menores que $\frac{1}{2}\epsilon$ para δ suficientemente pequeno. Por outro lado, para $y \in B_\delta$ e $z \in \delta \setminus B_{2\delta}$ temos $|x-z| \geqslant 2\delta$ e $|y-z| \geqslant \delta$, daí a continuidade de k fora da diagonal implica que $k(x,z)-k(y,z)$ converge uniformemente para zero em $z \in \delta \setminus B_{2\delta}$ quando $y \to x$. Portanto a integral sobre $\delta \setminus B_{2\delta}$ será menor que $\frac{1}{2}\epsilon$ para y suficientemente próximo de x, para isso, basta tomar $\delta > 0$ satisfazendo as duas condições.

Proposição 4.2.4 *Suponha k um kernel contínuo de ordem α com $0 \leqslant \alpha < n-1$. Se $u \in L^2(S)$ e $u + T_k u \in C(S)$, então $u \in C(S)$.*

Demonstração

Dado $\epsilon > 0$, escolha $\phi \in C(S \times S)$ tal que $0 \leqslant \phi \leqslant 1$, com $\phi(x,y) = 1$ para $|x-y| < \frac{1}{2}\epsilon$, e $\phi(x,y) = 0$ para $|x-y| > \epsilon$. Tomando $k_0 = \phi k$ e $k_1 = (1-\phi)k$. Então pela desigualdade de Schwarz,

$$\begin{aligned}
|T_{k_1}u(x) - T_{k_1}u(y)| &\leqslant \int |k_1(x,z) - k_1(y,z)||u(z)|d\sigma(z) \\
&\leqslant \left(\int |k_1(x,z) - k_1(y,z)|^2 d\sigma(z)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |u(z)|^2 d\sigma(z)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \| u \|_2 \left(\int |k_1(x,z) - k_1(y,z)|^2 d\sigma(z)\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Desde que k_1 é contínuo, argumento semelhante ao da proposição (4.2.3) temos que a integral à direita tende a zero quando $y \to x$, isto é, dado $\epsilon > 0$ podemos tomar $\delta > 0$ tal que $|x-y| < \delta$ tem-se que $|T_{k_1}u(x) - T_{k_1}u(y)| < \epsilon$. Daí a continuidade de $T_{k_1}u$.

Agora, tomando $g = (u + T_k u) - T_{k_1}u$ notamos que g é contínua e que $g = u + T_{k_0}u$, pois

$$\begin{aligned}
g(x) &= u(x) + \int k(x,y)u(y)d\sigma(y) - \int k_1(x,y)u(y)d\sigma(y) \\
&= u(x) + \int [k(x,y) - k_1(x,y)]u(y)d\sigma(y) \\
&= u(x) + \int [k(x,y) - (1-\phi)k(x,y)]u(y)d\sigma(y) \\
&= u(x) + \int \phi(x,y)k(x,y)u(y)d\sigma(y) \\
&= u(x) + T_{k_0}u(x).
\end{aligned}$$

Pela Proposição (4.2.1), se ϵ é suficientemente pequeno, a norma do operador T_{k_0} em L^2 e L^∞ é menor que 1. Daí $I+T_{k_0}$ é invertível, podemos expressar assim: $u = (I + T_{k_0})^{-1}g$ em "série geométrica"temos $u = \sum_{j=0}^{\infty}(-T_{k_0})^j g$. Pela proposição (4.2.3) temos que cada termo da série é contínuo, como a série converge na norma L^∞, tem-se que converge uniformemente. Daí o limite u é contínua. Para o que resta, seja T um operador limitado, tal que $\| T \| < 1$, mostraremos que $(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$, onde a série converge na norma uniforme. Ora, desde que o espaço dos operadores limitados sobre $L^2(S)$ é Banach, temos $\| T^k \| \leqslant \| T \|^k$, com $k = 1, 2, \ldots$. Assim $\sum_{k=0}^{\infty} \| T \|^k$ converge, para $\| T \| < 1$. Portanto, a série $\sum_{k=0}^{\infty}$ converge absolutamente sob a hipótese $\| T \| < 1$.

Como $L^2(S)$ é completo, temos que o espaço dos operadores limitados sobre $L^2(S)$ também o é. Consequentemente, convergência absoluta implica convergência. Ainda, temos

$$(I - T)\sum_{k=0}^{n} T^k = I - T^{n+1}$$

mas $\| T \| < 1$ implica que $T^{n+1} \to 0$ quando $n \to \infty$. Logo, $\sum_{k=0}^{\infty} T^k = (I-T)^{-1}$.

4.3 Potencial de Camada Dupla

Nosso estudo se direciona aqui às propriedades do potencial de camada dupla com momento ϕ, onde ϕ é uma função contínua em S, definido como segue

$$u(x) = \int_S \partial_{\nu_y} N(x,y)\phi(y)d\sigma(y);\ x \in \mathbb{R}^n \setminus S. \tag{4.3}$$

Veremos que essa fórmula tem papel importante na solução dos problemas internos e externos de Dirichlet.

De início, sendo $x \in \mathbb{R}^n \setminus S$ e $y \in S$, como $N(x,y) = \dfrac{|x-y|^{2-n}}{w_n(2-n)} = \dfrac{(|x-y|^2)^{1-\frac{n}{2}}}{w_n(2-n)}$ $(n>2)$ temos

$$\begin{aligned}
\partial_{\nu_y} N(x,y) &= \left(1-\frac{n}{2}\right)\frac{((|x-y|^2)^{-\frac{n}{2}})}{w_n(2-n)} \cdot [2(x-y)\cdot\nu(y)] \\
&= -\frac{|x-y|^{-n}}{w_n} \cdot (x-y)\cdot \nu(y) \\
&= -\frac{(x-y)\cdot\nu(y)}{w_n|x-y|^n}.
\end{aligned}$$

Então $\partial_{\nu_y} N(x,y)$ é contínua em y e escrevendo $\partial_{\nu_y} N(x,y) = f(r)$ temos que, a menos de uma translação e dilatação de coordenadas, podemos considerar $y=0$ (origem), daí $f(r)$ estará na forma $f(r) = ar^{2-n}$ que pela afirmação (1.4) temos que $\partial_{\nu_y} N(x,y)$ é harmônica e x. Ora, como a derivada em x comuta com a derivada em y, e $|\partial_{\nu_y} N(x,y)| = O\left(|x|^{1-n}\right)$ quando $x \to \infty$. Concluímos que u é harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \delta$ e $|u(x)| = O\left(|x|^{1-n}\right)$ quando $x \to \infty$.

Assim u também é harmônica no infinito.

Lema 4.3.1 *Existe uma constante $c > 0$ tal que para todo $x, y \in S$,*

$$|(x-y)\cdot\nu(y)| \leqslant c|x-y|^2.$$

Demonstração

É suficiente mostrarmos que existe tal $c > 0$ para todo $x, y \in S$ tal que $|x-y| \leqslant 1$. De fato, se $|x-y| > 1$ note que se $v = \dfrac{(x-y)}{|x-y|^2}$ satisfaz $|v| = \dfrac{|x-y|}{|x-y|^2} = \dfrac{1}{|x-y|} \leqslant 1$. Logo,

$$\left|\frac{(x-y)}{|x-y|^2}\cdot\nu(y)\right| \leqslant c\left|\frac{(x-y)}{|x-y|^2}\right| = \frac{c}{|x-y|} \leqslant c.$$

Daí, $|(x-y)\cdot\nu(y)| \leqslant c|x-y|^2$. Portanto, basta considerar $|x-y| \leqslant 1$. Dado $y \in \delta$, a menos de translação e rotação, podemos considerar $y = 0$ e $\nu(y) = (0, 0, \ldots, 1)$. Portanto $(x-y)\cdot\nu(y) = x_n$, e próximo de y, S é localmente em gráfico de uma equação $x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ onde $f \in C^2$, $f(0) = 0$ e $\nabla f(0) = 0$. Pelo Teorema de Taylor, tem-se

$$\begin{aligned} |(x-y)\cdot\nu(y)| &= |f(x_1,\ldots,x_{n-1})| \\ &\leqslant c|(x_1,\ldots,x_{n-1})|^2 \\ &\leqslant c|x|^2 \\ &= c|x-y|^2, \text{ para } |x| \leqslant 1 \end{aligned}$$

onde c só depende das derivadas parciais de segunda ordem de f. Desde que S é compacto e de classe C^2, existe tal constante que torna a desigualdade verdadeira para todo $y \in S$.

Daremos uma notação especial para o kernel $\partial_{\nu_y} N(x,y)$, quando x e y estão ambos em S. Daí, colocamos

$$k(x,y) = \partial_{\nu_y} N(x,y);\ (x,y \in S, x \neq y). \tag{4.4}$$

A razão disso é que o kernel vem fazendo um papel especial na nossa teoria. Segundo, há um pequeno risco considerar k como a derivada normal de N para $x \in S$, o que comentaremos posteriormente.

Agora, discutiremos a continuidade de k sobre S.

Proposição 4.3.1 *k é um kernel contínuo de ordem $n-2$ sobre δ.*

Demonstração

Ora, observe que

$$k(x,y) = \frac{A(x,y)}{|x-y|^{n-2}}, \text{ onde } A(x,y) = -\frac{(x-y)\nu(y)}{w_n|x-y|^2}. \tag{4.5}$$

Pelo lema anterior, temos que existe $c > 0$ tal que para todo $x,y \in S$ temos $|(x-y)\cdot\nu(y)| \leqslant c|x-y|^2$. Daí

$$|A(x,y)| = \frac{|(x-y)\nu(y)|}{w_n|x-y|^2} \leqslant \frac{c|x-y|^2}{w_n|x-y|^2} = \frac{c}{w_n},$$

portanto limitada. Logo, $k(x,y) = A(x,y)|x-y|^{n-2}$ que é um kernel de ordem $n-2$, para $x,y \in S$ com $x \neq y$, é naturalmente contínuo, daí faz sentido extender u a S por

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_S k(x,y)\phi(y)d\sigma(y) \\ &= T_k\phi(x);\ x \in S. \end{aligned}$$

Pela proposição (4.2.3), a restrição de u a S é contínua em S. No entanto, u não é contínua em $\mathbb{R}^n$, existe um salto quando aproximam os pontos em S por pontos em $\mathbb{R}^n \setminus S$. Observe a seguinte proposição onde utilizamos $\phi = 1$.

Proposição 4.3.2 $\displaystyle\int_S \partial_\nu N(x,y)d\sigma(y) = \begin{cases} 1, \ se\, x \in \Omega \\ 0, \ se\, x \in \Omega' = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \end{cases}$

$$\int_S k(x,y)d\sigma(y) = \frac{1}{2}, \ se\, x \in S.$$

Demonstração

O resultado para $x \in \Omega'$ segue da afirmação (1.6), desde que $N(x,y)$ é C^∞ em $\overline{\Omega}$ e harmônica em Ω como uma função de y quando $x \in \Omega'$. Por outro lado, se $x \in \Omega$, seja $\epsilon > 0$ pequeno o suficiente tal que $\overline{B_\epsilon} = \overline{B_\epsilon(x)} \subset \Omega$. Podemos então aplicar a afirmação (1.6) para $N(x,\cdot)$ no domínio $\Omega \setminus \overline{B_\epsilon}$ como na prova do Teorema do Valor Médio:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial(\Omega \setminus \overline{B_\epsilon})} \partial_{\nu_y} N(x,y)d\sigma(y) \\
&= \int_S \partial_{\nu_y} N(x,y)d\sigma(y) + \int_{\partial B_\epsilon} \partial_{\nu_y} N(x,y)d\sigma(y) \\
&= \int_S \partial_{\nu_y} N(x,y)d\sigma(y) - \int_{\partial B_\epsilon} \frac{(x-y)\nu(y)}{w_n|x-y|^n} d\sigma(y) \\
&= \int_S \partial_{\nu_y} N(x,y)d\sigma(y) - \frac{1}{w_n \epsilon^n} \int_{\partial B_\epsilon} (x-y)\nu(y)d\sigma(y) \\
&= \int_S \partial_{\nu_y} N(x,y)d\sigma(y) - \frac{1}{w_n \epsilon^n} \int_{\partial B_\epsilon} (x-y) \cdot \frac{1}{\epsilon}(x-y)d\sigma(y) \\
&= \int_S \partial_{\nu_y} N(x,y)d\sigma(y) - \frac{1}{w_n \epsilon^{n+1}} \int_{\partial B_\epsilon} \epsilon^2 d\sigma(y) \\
&= \int_S \partial_{\nu_y} N(x,y)d\sigma(y) - \frac{\epsilon^{1-n}}{w_n} \int_S d\sigma(y) \\
&= \int_S \partial_{\nu_y} N(x,y)d\sigma(y) - \frac{\epsilon^{1-n}}{w_n} \int_{\partial B_\epsilon} d\sigma(y) \\
&= \int_S \partial_{\nu_y} N(x,y)d\sigma(y) - \frac{\epsilon^{1-n}}{w_n} \cdot w_n \cdot \epsilon^{n-1} \\
&= \int_S \partial_{\nu_y} N(x,y)d\sigma(y) - 1
\end{aligned}$$

Daí, $\int_S \partial_{\nu_y} N(x,y) d\sigma(y) = 1$.

Agora suponha $x \in S$ e novamente seja $B_\epsilon = B_\epsilon(x)$. Considere a notação

$$S_\epsilon = S \setminus (S \bigcap B_\epsilon),\ \partial B'_\epsilon = \partial B_\epsilon \bigcap \Omega;$$
$$\partial B''_\epsilon = \{y \in \partial B_\epsilon : \nu(x)y < 0\}.$$

Então $\partial B''_\epsilon$ é o hemisfério de ∂B_ϵ vivendo no mesmo lado do plano tangente a S no ponto x quanto em Ω. Por outro lado, claramente

$$\int_S k(x,y)d\sigma(y) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{S_\epsilon} k(x,y)d\sigma(y)$$

Como $N(x,\cdot)$ é harmônica em $\Omega \setminus \overline{B}_\epsilon$ e suave sobre o bordo $S_\epsilon \bigcup \partial B'_\epsilon$, a afirmação (1.6) implica

$$0 = \int_{S_\epsilon} k(x,y)d\sigma(y) + \int_{\partial B'_\epsilon} \partial_{\nu_y} N(x,y) d\sigma(y).$$

Então, tomando dentro do cálculo a orientação própria em ∂B_ϵ, levando em conta que ν aponta para fora de Ω.

$$\begin{aligned}
\int_S k(x,y)d\sigma(y) &= -\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial B'_\epsilon} \partial_{\nu_y} N(x,y) d\sigma(y) \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial B'_\epsilon} \frac{(x-y)\nu(y)}{w_n |x-y|^n} d\sigma(y) \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial B'_\epsilon} \frac{(x-y)}{w_n \epsilon^n} \cdot \frac{1}{\epsilon}(x-y) d\sigma(y) \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{w_n \epsilon^{n+1}} \int_{\partial B'_\epsilon} \epsilon^2 d\sigma(y) \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon^{1-n}}{w_n} \int_{\partial B'_\epsilon} d\sigma(y)
\end{aligned}$$

Mas, sendo S de C^2, a diferença simétrica entre $\partial B'_\epsilon$ e $\partial B''_\epsilon$ está contida em uma "faixa equatorial"

$$\{y \in \partial B_\epsilon; |y \cdot \nu(x)| \leqslant c(\epsilon)\},\ c(\epsilon) = O(\epsilon^2)$$

cuja a área é $O(\epsilon^n)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\partial B'_\epsilon} d\sigma(y) &= \int_{\partial B''_\epsilon} d\sigma(y) + O(\epsilon^n) \\ &= \frac{1}{2}\epsilon^{n-1} w_n + O(\epsilon^n). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_S k(x,y) d\sigma(y) &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon^{1-n}}{w_n} \left(\frac{1}{2}\epsilon^{n-1} w_n + O(\epsilon^n) \right) \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon^{1-n}}{w_n} O(\epsilon^n) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar. Aqui utilizamos o Teorema de Divergência para uma superfície com canto, para melhores detalhes veja [2].

Para extender este resultado a densidade geral ϕ, precisamos de dois lemas preliminares.

Lema 4.3.2 *Existe uma constante $c < \infty$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus S$, então*

$$\int_S |\partial_{\nu_y} N(x,y)| d\sigma(y) \leqslant c$$

Demonstração

Seja $d(x, S)$ a distância do ponto x ao ponto mais próximo de S. Fixado $\delta > 0$ com as seguintes propriedades:

i) $\delta < \dfrac{1}{2c}$ onde c é a constante do lema (4.3.1);

ii) O conjunto dos x tal que $d(x,S) < \frac{1}{2}\delta$ é uma vizinhança tubular de S como na afirmação 1.1. Então, se $d(x,S) < \frac{1}{2}\delta$ existem únicos $x_0 \in S$ e $t \in \left(\frac{-1}{2}\delta, \frac{1}{2}\delta\right)$ tal que $x = x_0 + t\nu(x_0)$, onde x_0 é o ponto em S mais próximo de x. A existência de x_0 é garantida pelo Princípio dos Múltiplos de Lagrange.

Caso I: $d(x,S) \geqslant \frac{1}{2}\delta$. Então $|\partial_{\nu_y} N(x,y)| \leqslant c_1 \delta^{1-n}$ para todo $y \in S$, daí

$$\int_S |\partial_{\nu_y}| N(x,y) d\sigma(y) \leqslant c_1 \delta^{1-n} \int_S d\sigma = c_2.$$

Caso II: $d(x,\delta) < \frac{1}{2}\delta$. Seja x_0 o único ponto de S tal que $x = x_0 + t\nu(x_0)$ com $|t| < \frac{1}{2}\delta$, e seja $B_\delta = \{y \in S : |x_0 - y| < \delta\}$. Estimemos a integral de $|\partial_{\nu_y} N|$ sobre $S \setminus B_\delta$ e sobre B_δ separadamente. Se $y \in S \setminus B_\delta$ então

$$|x-y| \geqslant |x_0 - x| - |x - x_0| \geqslant \delta - \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\delta$$

Portanto, $|\partial_{\nu_y} N(x,y)| \leqslant c_1 \delta^{1-n}$. Logo a integral sobre $S \setminus B_\delta$ é limitada por c_2 como acima. Para estimar a integral sobre B_δ, notemos que

$$\begin{aligned}
w_n |\partial_{\nu_y} N(x,y)| &= \frac{|(x-y)\nu(y)|}{|x-y|^n} \\
&= \frac{|(x-y)\nu(y) + (x_0 - x_0)\nu(y)|}{|x-y|^n} \\
&= \frac{|(x-x_0)\nu(y) + (x_0 - y)\nu(y)|}{|x-y|^n} \\
&\leqslant \frac{|(x-x_0)\nu(y)| + |(x_0 - y)\nu(y)|}{|x-y|^n} \\
&\leqslant \frac{|(x-x_0)\nu(y)| + c|x_0 - y|^2}{|x-y|^n}, \text{ pelo lema (4.3.1).}
\end{aligned}$$

Além do mais,

$$\begin{aligned} |x-y|^2 &= |x-x_0+x_0-y|^2 \\ &= |(x-x_0)+(x_0-y)|^2 \\ &= |x-x_0|^2+2(x-x_0)\cdot(x_0-y)+|x_0-y|^2. \end{aligned}$$

Note ainda que,

$$\begin{aligned} |2(x-x_0)\cdot(x_0-y)| &= 2|x-x_0||\nu(x_0)\cdot(x_0-y)| \\ &\leqslant 2c|x-x_0||x_0-y|^2 \\ &\leqslant |x-x_0||x_0-y| \end{aligned}$$

pois $\delta < \dfrac{1}{2c}$ e $|x-y| < \delta$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} |x-y|^2 &= |x-x_0|^2+|x_0-y|^2+2(x-x_0)\cdot(x_0-y) \\ &\geqslant |x-x_0|^2+|x_0-y|^2+2(x-x_0)\cdot(x_0-y)-2|x-x_0||x_0-y| \\ &\geqslant |x-x_0|^2+|x_0-y|^2-|x-x_0||x_0-y| \\ &\geqslant \frac{1}{2}(|x-x_0|^2+|x_0-y|^2)+\frac{1}{2}(|x-x_0|^2-2|x-x_0||x_0-y|+|x_0-y|^2) \\ &\geqslant \frac{1}{2}(|x-x_0|^2+|x_0-y|^2)+\frac{1}{2}(|x-x_0|-|x_0-y|)^2 \\ &\geqslant \frac{1}{2}(|x-x_0|^2+|x_0-y|^2). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |\partial_{\nu_y}N(x,y)| &\leqslant c_3\frac{|x-x_0|+c|x_0-y|^2}{(|x-x_0|^2+|x_0-y|^2)^{\frac{n}{2}}} \\ &= \frac{c_3|x-x_0|}{(|x-x_0|^2+|x_0-y|^2)^{\frac{n}{2}}}+\frac{c_3c|x_0-y|^2}{(|x-x_0|^2+|x_0-y|^2)^{\frac{n}{2}}} \\ &\leqslant \frac{c_3|x-x_0|}{(|x-x_0|^2+|x_0-y|^2)^{\frac{n}{2}}}+\frac{c_3c|x_0-y|^2}{(|x_0-y|^2)^{\frac{n}{2}}} \\ &\leqslant \frac{c_3|x-x_0|}{(|x-x_0|^2+|x_0-y|^2)^{\frac{n}{2}}}+\frac{c_3c}{|x_0-y|^{n-2}}. \end{aligned}$$

Passando à coordenadas polares temos, $r = |x_0 - y|$ e $a = x - x_0$. Donde,

$$\int_{B_\delta} |\partial_{\nu_y} N(x,y)| \leqslant c_4 \int_0^\delta \left[\frac{a}{(a^2+r^2)^{\frac{n}{2}}} + \frac{1}{r^{n-2}} \right] r^{n-2} dr.$$

substituindo $r = as$, temos

$$\begin{aligned} c_4 \int_0^\delta \left[\frac{a}{(a^2+r^2)^{\frac{n}{2}}} + \frac{1}{r^{n-2}} \right] r^{n-2} dr &= c_4 \int_0^\delta \frac{ar^{n-2}}{(a^2+r^2)^{\frac{n}{2}}} dr + c_4 \int_0^\delta dr \\ &= c_4 \int_0^\delta \frac{ar^{n-2}}{(a^2+r^2)^{\frac{n}{2}}} dr + c_4\delta \\ &\leqslant c_4 \int_0^\infty \left[\frac{a(as)^{n-2}}{(a^2+(as)^2)^{\frac{n}{2}}} \right] ds + c_4\delta \\ &= c_4 \int_0^\infty \left[\frac{a^n s^{n-2}}{a^n + (1+s^2)^{\frac{n}{2}}} \right] ds + c_4\delta \\ &= c_4 \int_0^\infty \frac{s^{n-2}}{(1+s^2)^{\frac{n}{2}}} ds + c_4\delta. \end{aligned}$$

Esta última integral converge desde que o integrando é $O(s^{-2})$ quando $s \to +\infty$.

Lema 4.3.3 *Suponha $\phi \in C(S)$ e $\phi(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in S$. Se u é definido por*

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_S \partial_{\nu_y} N(x,y)\phi(y) d\sigma(y) \ \textit{com } x \in \mathbb{R}^n \setminus S \ \textit{e} \\ u(x) &= \int_S k(x,y)\phi(y) d\sigma(y) = T_k\sigma(x) \ \textit{com } x \in S \end{aligned}$$

então u é contínua no ponto x_0.

Demonstração

Dado $\epsilon > 0$, desejamos encontrar $\delta > 0$ tal que $|u(x) - u(x_0)| < \epsilon$ quando $|x - x_0| < \delta$. Sejam c como no lema (4.3.2) e $c' = \int_S |k(x,y)| d\sigma(y)$, o qual é finito, desde que k seja um kernel de ordem $n-2$, conforme a prova de (4.2.1).

Escolha $\eta > 0$ tal que $|\phi(y)| < \dfrac{2\epsilon}{3(c+c')}$ quando $y \in B_\eta = \{z \in S; |z-z_0| < \eta$. Então,

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(x_0)| &\leqslant \int_{B_\eta} (|\partial_{\nu_y} N(x,y)| + |\partial_{\nu_y} N(x,y)|)|\phi(y)|d\sigma(y) + \\
&+ \int_{S\setminus B_\eta} |\partial_{\nu_y} N(x,y) - \partial_{\nu_y} N(x_0,y)||\phi(y)|d\sigma(y) \\
&\leqslant \int_{B_\eta} |\partial_{\nu_y} N(x,y)||\phi(y)|d\sigma(y) + \int_{B_\eta} |\partial_{\nu_y} N(x_0,y)||\phi(y)|d\sigma(y) + \\
&+ \int_{S\setminus B_\eta} |\partial_{\nu_y} N(x,y) - \partial_{\nu_y} N(x_0,y)||\phi(y)|d\sigma(y) \\
&\leqslant \frac{2\epsilon}{3(c+c')} \int_{B_\eta} |k(x,y)|d\sigma(y) + \frac{2\epsilon}{3(c+c')} \int_{B_\eta} |k(x_0,y)|d\sigma(y) + \\
&+ \int_{S\setminus B_\eta} |\partial_{\nu_y} N(x,y) - \partial_{\nu_y} N(x_0,y)||\phi(y)|d\sigma(y) \\
&< \frac{2\epsilon c'}{3(c+c')} + \frac{2\epsilon c}{3(c+c')} + \frac{\epsilon}{3} \\
&= \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Usamos acima o fato de $\partial_{\nu_y} N = k$ quando ambas as entradas estão em S. A primeira integral à direita é menor que $\frac{2\epsilon}{3}$. Além do mais, se $|x - x_0| < \frac{1}{2}\eta$ o integrando do terceiro termo é limitado e contínuo em $S \setminus B_\eta$ e tende a zero uniformemente quando $x \to x_0$. Portanto, podemos escolher $\delta < \frac{1}{2}\eta$ pequeno o suficiente tal que o terceiro termo seja menor que $\frac{\epsilon}{3}$ sempre que $|x - x_0| < \delta$. Fica registrado aqui que δ depende somente de η e de norma uniforme de ϕ.

Agora estamos preparados para o principal teorema desta seção. Se u é definido por

$$u(x) = \int_S \partial_{\nu_y} N(x,y)\phi(y)d\sigma(y) \text{ com } x \in \mathbb{R}^n \setminus S$$

definamos u_t em S para $t \neq 0$ pequeno, (isto é, com o módulo pequeno) por

$$\begin{aligned} u_t(x) &= u(x+tv(x)) \\ &= \int_S \partial_{\nu_y} N(x+tv(x),y)\phi(y)d\sigma(y). \end{aligned}$$

Então, u_t é a restrição de u à superfície paralela a S que dista $|t|$ de S.

Teorema 4.3.1 *Suponha $\phi \in C(S)$ e u definida por*

$$u(x) = \int_S \partial_{\nu_y} N(x,y)\phi(y)d\sigma(y) \text{ com } x \in \mathbb{R}^n \setminus S.$$

A restrição de u a Ω possui uma extensão contínua a $\overline{\Omega}$, e a restrição de u a Ω' possui uma extensão contínua a $\overline{\Omega}'$. Mais precisamente, a função u_t converge uniformemente em S ao limite contínua u_- e u_+ quando t aproxima de zero por baixo e por cima, respectivamente. Assim, u_- e u_+ são dadas por:

$$u_-(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \int_S k(x,y)\phi(y)d\sigma(y)$$
$$u_+(x) = \frac{-1}{2}\phi(x) + \int_S k(x,y)\phi(y)d\sigma(y).$$

Isto é, $u_- = \frac{1}{2}\phi + T_k\phi$ e $u_+ = \frac{-1}{2}\phi + T_k\phi$.

Demonstração

Sejam $x \in S$ e $t < 0$ suficientemente pequeno no sentido dado, então

$x + v(x) \in \Omega$, daí pela proposição (4.3.2)

$$\begin{aligned}
u_t(x) &= \int_S \partial_{\nu_y} N(x+tv(x),y)\phi(y)d\sigma(y) - \int_S \partial_{\nu_y} N(x+tv(x),y)\phi(x)d\sigma(y) \\
&+ \int_S \partial_{\nu_y} N(x+tv(x),y)\phi(x)d\sigma(y) \\
&= \phi(x)\int_S \partial_{\nu_y} N(x+tv(x),y)d\sigma(y) \\
&+ \int_S \partial_{\nu_y} N(x+tv(x),y)[\phi(y)-\phi(x)]d\sigma(y) \\
&= \phi(x) + \int_S \partial_{\nu_y} N(x+tv(x),y)[\phi(y)-\phi(x)]d\sigma(y).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
u_-(x) &= \lim_{t\to 0^-} u_t(x) \\
&= \phi(x) + \int_S k(x,y)\phi(y)d\sigma(y) - \phi(x)\int_S k(x,y)d\sigma(y) \\
&= \phi(x) + \int_S k(x,y)\phi(y)d\sigma(y) - \frac{1}{2}\phi(x) \\
&= \frac{1}{2}\phi(x) + \int_S k(x,y)\phi(y)d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{2}\phi(x) + T_k\phi(x).
\end{aligned}$$

Se $t > 0$ suficientemente pequeno, então $x + tv(x) \in \Omega'$, pela proposição (4.3.2) temos

$$\begin{aligned}
u_t(x) &= \int_S \partial_{\nu_y} N(x+tv(x),y)\phi(y)d\sigma(y) \\
&= \phi(x)\int_S \partial_{\nu_y} N(x+tv(x),y)d\sigma(y) + \int_S \partial_{\nu_y} N(x+tv(x),y)[\phi(y) \\
&- \phi(x)]d\sigma(y) \\
&= \phi(x)\cdot 0 + \int_S \partial_{\nu_y} N(x+tv(x),y)\phi(y)d\sigma(y) \\
&- \phi(x)\int_S \partial_{\nu_y} N(x+tv(x),y)d\sigma(y).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} u_+ &= \lim_{t\to 0^+} u_t(x) \\ &= \frac{-1}{2}\phi(x) + \int_S \partial_{\nu_y} N(x,y)\phi(y)d\sigma(y) \\ &= \frac{-1}{2}\phi(x) + T_k\phi(x). \end{aligned}$$

Corolário 4.3.1 $\phi = u_- - u_+$.

Demonstração

Ora, sendo

$$u_-(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \int_S \partial_{\nu_y} N(x,y)\phi(y)d\sigma(y) \text{ e}$$
$$u_+(x) = \frac{-1}{2}\phi(x) + \int_S \partial_{\nu_y} N(x,y)\phi(y)d\sigma(y)$$

temos

$$u_- - u_+ = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2}\phi(x) = \phi(x).$$

O Teorema (4.3.1) pode ser interpretado como segue. Se para $t \neq 0$ pequeno definimos a função k_t em $S \times S$ por

$$k_t(x,y) = \partial_{\nu_y} N(x + tv(x), y)$$

então para cada $x \in S$ temos:

$$\lim_{t\to 0^-} k_+(x,\cdot) = \frac{1}{2}\delta_x + k(x,\cdot)$$
$$\lim_{t\to 0^+} k_+(x,\cdot) = \frac{-1}{2}\delta_x + k(x,\cdot)$$

onde δ_x é a função delta de Dirac no ponto x, ou seja, $\langle \delta_x, \phi\rangle = \phi(x)$ que é interpretado como uma distribuição (ou medida) em S.

4.4 Potencial de Camada Simples

Consideramos agora o potencial de camada simples

$$u(x) = \int_S N(x,y)\phi(y)d\sigma(y)$$

com momento ϕ, onde $\phi \in C(S)$. Como no caso do potencial de camada dupla: u é harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus S$; $|u(x)| = O(|x|^{2-n})$ quando $x \to \infty$ com $n > 2$ e u é harmônica no infinito para $n > 2$. Além do mais, a restrição de N a $S \times S$ é um kernel de ordem $n-2$, daí u está bem definida em S.

Proposição 4.4.1 *Se $\phi \in C(S)$ e u definida por*

$$u(x) = \int_S N(x,y)\phi(y)d\sigma(y)$$

então u é contínua em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração

Precisamos somente mostrar a continuidade em S, e a prova é semelhante ao do lema (4.3.3). Dados $x_0 \in S$ e $\epsilon > 0$, seja $B_\delta = \{y \in S; |x_0 - y| < \delta\}$ para $\delta > 0$. Então

$$\begin{aligned} |u(x) - u(x_0)| &\leqslant \int_{B_\delta} |N(x,y)\phi(y)|d\sigma(y) + \int_{B_\delta} |N(x_0,y)\phi(y)|d\sigma(y) \\ &+ \int_{S \setminus B_\delta} |N(x, y - N(x_o, y))||\phi(y)|d\sigma(y) \\ &\leqslant \parallel \phi \parallel_\infty \int_{B_\delta} |N(x,y)|d\sigma(y) + \parallel \phi \parallel_\infty \int_{B_\delta} |N(x_0,y)|d\sigma(y) \\ &+ \parallel \phi \parallel_\infty \int_{S \setminus B_\delta} |N(x,y) - N(x_0,y)|d\sigma(y). \qquad (*) \end{aligned}$$

Desde que ϕ é limitada e $N(x,y) = O(|x-y|^{2-n})$ (ou $O(\log|x-y|^{-1})$ se $n=2$). Daí, integrando em coordenadas polares, tem-se, para $n>2$:

$$
\begin{aligned}
\int_{B_\delta} |N(x,y)|d\sigma(y) &= c\int_{B_\delta} |x-y|^{2-n}d\sigma(y)\\
&\leqslant c\int_{B'_\delta} |x'-y'|^{2-n}dy'\\
&\leqslant 2^{2-n}\delta^{2-n}c\sigma(S^{n-2})\int_0^\delta r^{n-2}dr\\
&= c'\delta^{2-n}\cdot\delta^{n-1}\\
&= c'\delta.
\end{aligned}
$$

Assim, $\displaystyle\int_{B_\delta} |N(x,y)|d\sigma(y) = O(\delta)$. Procede-se de modo análogo para $\displaystyle\int_{B_\delta} |N(x_0,y)|d\sigma(y)$. Agora, se $n=2$, como já vimos $|x-y|^2 \geqslant \dfrac{1}{2}(|x-x_0|^2 + |y-x_0|^2)$. Então

$$
\begin{aligned}
\int_{B_\delta} |N(x,y)| d\sigma(y) &= c \int_{B_\delta} \log |x-y|^{-1} d\sigma(y) \\
&\leqslant c \int_{B'_\delta} \log |x'-y'|^{-1} dy' \\
&\leqslant \frac{c}{2} \int_{B'_\delta} \log |x'-y'|^{-2} dy' \\
&\leqslant \frac{c}{2} \int_{B'_\delta} \log \left(\frac{|x'-x'_0|^2 + |y'-x'_0|^2}{2} \right)^{-1} dy' \\
&\leqslant \frac{c}{2} \int_{B'_\delta} 2 \frac{(\log |x'-x'_0|^{-1} + \log |y'-x'_0|^{-1})}{2} dy' \\
&\leqslant \frac{c}{2} \int_{B'_\delta} (\log |x'-x'_0|^{-1} + \log |y'-x'_0|^{-1}) dy' \\
&= c \left[\frac{1}{2} \log |x'-x'_0|^{-1} \pi \delta^2 + c_1 \int_0^\delta (\log r^{-1}) r dr \right] \\
&= c_2 \delta^2 + c_3 \int_0^\delta (\log r^{-1}) r dr \\
&= c_2 \delta^2 - c_3 \int_0^\delta r (\log r) dr \\
&= c_2 \delta^2 + c_3 [\delta^2 \log \delta^{-1} + \delta^2] \\
&= c_4 \delta^2 + c_5 \delta^2 (\log \delta^{-1}) \\
&= c_4 \delta (O(\log \delta^{-1})) + c_5 \delta (\delta \log \delta^{-1}) \\
&= O(\delta \log \delta^{-1}).
\end{aligned}
$$

Daí, dado $\epsilon > 0$, podemos fazer esses termos em $(*)$ cada um menor que $\frac{\epsilon}{3}$ para $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Exigindo $|x - x_0| < \frac{1}{2}\delta$, o integrando no terceiro termo é limitado em $S \setminus B_\delta$ e tende uniformemente a zero quando $x \to x_0$. Daí tomando $|x - x_0|$ pequeno suficiente, podemos fazer o terceiro termo menor que $\frac{\epsilon}{3}$. Usamos aqui o fato de toda hiperfície ser localmente um gráfico.

Agora, consideremos a derivada normal de u. Seja V a vizinhança tubular de S dada pela afirmação (1.1). Recordando que definimos a derivada normal da seguinte forma: se u é diferenciável em V, para $x \in S$ e $-\epsilon < t < \epsilon$ temos

$$\partial_\nu u(x + tv(x)) = \nu(x) \cdot \nabla u(x + tv(x)).$$

Então para $x \in V \setminus S$ vale

$$\partial_\nu u(x) = \int_S \partial_{\nu_x} N(x,y)\phi(y)d\sigma(y). \tag{4.6}$$

Isto é justamente um potencial de camada dupla exceto que ∂_ν é aplicado a N com respeito a x em vez de y. De fato, desde que $N(x,y) = N(y,x)$, $\partial_{\nu_x} N(x,y)$ é justamente $\partial_{\nu_y} N$ avaliado no (y,x). Em particular, se colocarmos

$$k^*(x,y) = k(y,x)$$

o lado direito de (4.6) faz sentido para $x \in S$ se interpretarmos como

$$\int_S k^*(x,y)\phi(y)d\sigma(y) = T_{k^*}\phi(x). \tag{4.7}$$

Desde que k é um kernel contínuo de ordem $n-2$, também o é k^*. Então (4.7) define uma função contínua em S pela proposição (4.2.3). Além do mais, desde que k é real podemos ver que T_{k^*} é adjunto de T_k como um operador em $L^2(S)$. Daí (4.7) é justamente $T_k^*\phi(x)$.

Note, para $\phi, \psi \in L^2(S)$

$$\begin{aligned}
\langle T_k\phi, \psi\rangle &= \int_S (T_k\phi)\overline{\psi} d\sigma(x) \\
&= \int_S \left(\int_S k(x,y)\phi(y)d\sigma(y)\right)\overline{\psi}(x)d\sigma(x) \\
&= \int_S \int_S k(x,y)\phi(y)\overline{\psi}(x)d\sigma(x)d\sigma(y) \\
&= \int_S \overline{\overline{\int_S k(x,y)\overline{\psi}d\sigma(x)}}\phi(y)d\sigma(y) \\
&= \int_S \overline{\int_S k^*(x,y)\psi(x)d\sigma(x)}\phi(y)d\sigma(y) \\
&= \int_S \overline{(T_k^*\psi)}\phi(y)d\sigma(y) \\
&= \langle \phi, T_k^*\psi\rangle .
\end{aligned}$$

Daí, T_{k^*} é o adjunto de T_k. Observe que na terceira igualdade foi usado o Teorema de Fubini.

Como esperado, existe um salto descontínuo entre a quantidade definida por (4.6) em $V \setminus S$ e por (4.7) em S. Realmente, temos o seguinte teorema.

Teorema 4.4.1 *Suponha $\phi \in C(S)$ e u é definido em $\mathbb{R}^n$ por*

$$u(x) = \int_S N(x,y)\phi(y)d\sigma(y).$$

Então a restrição de u a $\overline{\Omega}$ (respectivamente em $\overline{\Omega}'$) está em $C_\nu(\Omega)$ (respectivamente em $C_\nu(\Omega')$), e para $x \in S$ temos

$$\begin{aligned}
\partial_{\nu_-}u &= \frac{-1}{2}\phi(x) + \int_S k(x,y)\phi(y)d\sigma(y) \\
\partial_{\nu_+}u &= \frac{1}{2}\phi(x) + \int_S k(x,y)\phi(y)d\sigma(y).
\end{aligned}$$

isto é,

$$\partial_{\nu_-} u = \frac{-1}{2}\phi + T_k^*\phi$$
$$\partial_{\nu_+} u = \frac{1}{2}\phi + T_k^*\phi.$$

Demonstração

Já sabemos que u é contínua. Considere o potencial de camada dupla

$$v(x) = \int_S \partial_{\nu_y} N(x,y)\phi(y)d\sigma(y)$$

em $\mathbb{R}^n \setminus S$, e defina a função f na vizinhança tubular V de S por

$$f(x) = \begin{cases} v(x) + \partial_\nu u(x); \text{ se } x \in V \setminus S \\ T_k\phi(x) + T_k^*\phi(x); \text{ se } x \in S. \end{cases}$$

Afirmamos que f é contínua em V. A restrição de f a $V \setminus S$ e S são contínuas, daí é suficiente mostrar que se $x_0 \in S$ e $x = x_0 + t\nu(x_0)$ então $f(x) - f(x_0) \to 0$ quando $t \to 0$, a convergência sendo uniforme em x_0. Mas

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \int_S [\partial_{\nu_x} N(x,y) + \partial_{\nu_y} N(x,y) - \partial_{\nu_x} N(x_0,y) \\ &- \partial_{\nu_y} N(x_0,y)]\phi(y)d\sigma(y) \end{aligned}$$

Procedemos como na prova do lema (4.3.3), escreva esta expressão como na integral sobre $B_\delta = \{y \in S : |x_0 - y| < \delta\}$ mais uma integral sobre $S \setminus B_\delta$ que tende uniformemente a zero quando $x \to x_0$. Por outro lado, a integral sobre B_δ é limitada por

$$\parallel \phi \parallel_\infty \int_{B_\delta} |\partial_{\nu_x} N(x,y) + \partial_{\nu_y} N(x,y)| d\sigma(y)$$

somada à mesma expressão com x substituído por x_0. Então é suficiente mostrar que para todo x sobre a normal de x_0,

$$\int_{B_\delta} |\partial_{\nu_x} N(x,y) + \partial_{\nu_y} N(x,y)| d\sigma(y)$$

pode ser feito arbitrariamente pequeno tomando δ suficientemente pequeno, independente de x e x_0. Agora,

$$\partial_{\nu_x} N(x,y) = \frac{(x-y)\cdot\nu_{x_0}}{w_n|x-y|^n}$$
$$\partial_{\nu_y} N(x,y) = \frac{-(x-y)\cdot\nu_y}{w_n|x-y|^n}.$$

Daí,

$$\partial_{\nu_x} N(x,y) + \partial_{\nu_y} N(x,y) = \frac{(x-y)[\nu_{x_0}-\nu_y]}{w_n|x-y|^n}.$$

Como ν é de classe C^1, tem-se $|\nu(x_0)-\nu(y)| = O(|x_0-y|)$ e $|x-y| \geqslant c|x_0-y|$ desde que x está sobre a normal em x_0. Desse modo

$$|\partial_{\nu_x} N(x,y) + \partial_{\nu_y} N(x,y)| \leqslant c'|x_0-y|^{2-n}$$

e a integral é dominada por

$$\int_0^\delta r^{2-n} r^{n-2} dr = \delta.$$

Então $f = v + \partial_\nu u$ estende-se continuamente através de S. Portanto, pelo teorema (4.3.1) para todo $x \in S$ temos

$$\begin{aligned} T_k\phi(x) + T_k^*\phi(x) &= v_-(x) + \partial_{\nu_-} u(x) \\ &= \frac{1}{2}\phi(x) + T_k\phi(x) + \partial_{\nu_-} u(x) \end{aligned}$$

de modo que,

$$\partial_{\nu_-} u(x) = \frac{-1}{2}\phi(x) + T_k^*\phi(x)$$

e também

$$\begin{aligned} T_k\phi(x) + T_k^*\phi(x) &= v_+(x) + \partial_{\nu_+} u(x) \\ &= \frac{-1}{2}\phi(x) + T_k\phi(x) + \partial_{\nu_+} u(x). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\partial_{\nu_+} u(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + T_k^* \phi(x).$$

A convergência de $\partial_\nu u(x + tv(x))$ à $\partial_{\nu_-^+} u(x)$ é uniforme em x desde que o mesmo é verdadeiro para v e $v + \partial_v u$.

Corolário 4.4.1 $\phi = \partial_{\nu_+} u - \partial_{\nu_-} u$

Concluímos a discussão sobre o potencial de camada única com três lemas que serão necessários na seção seguinte.

Lema 4.4.1 *Se $\phi \in C(S)$ e $\frac{1}{2}\phi + T_k^*\phi = f$, então $\int_S \phi = \int_S f$.*

Demonstração

Ora,

$$\begin{aligned}
\int_S f(x) d\sigma(x) &= \frac{1}{2}\int_S \phi(x) d\sigma(x) + \int_S \int_S k(x,y)\phi(y) d\sigma(y) d\sigma(x) \\
&= \frac{1}{2}\int_S \phi(x) d\sigma(x) + \int_S \int_S k(y,x)\phi(y) d\sigma(y) d\sigma(x) \\
&= \frac{1}{2}\int_S \phi(x) d\sigma(x) + \frac{1}{2}\int_S \phi(y) d\sigma(y) \\
&= \int_S \phi(x) d\sigma(x).
\end{aligned}$$

Lema 4.4.2 *Suponha $n = 2$. Se $\phi \in C(S)$, o potencial de camada simples u com momento ϕ é harmômica no infinito se e somente se $\int_S \phi = 0$. Além disso, u se anula no infinito.*

Demonstração

Temos:

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_S \phi(y) \log|x-y| d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_S (\log|x-y| - \log|x| + \log|x|)\phi(y) d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_S (\log|x-y| - \log|x|)\phi(y) d\sigma(y) + \frac{1}{2\pi}\log|x| \int_S \phi(y) d\sigma(y).
\end{aligned}$$

Desde que S é compacto, $\log|x-y| - \log|x| \to 0$ uniformemente para $y \in S$ quando $x \to \infty$. Assim a primeira integral se anula quando $x \to \infty$. Daí, pela Proposição (3.2), segue o resultado.

Lema 4.4.3 *Suponha* $u = 2$. *Se* $\phi \in C(S)$, $\int_S \phi = 0$ *e o potencial de camada simples* u *com momento* ϕ *é constante em* $\overline{\Omega}$, *então* $\phi = 0$ *e desse modo* $u = 0$.

Demonstração

Pelo lema (4.4.2), u é harmônica no infinito. Daí se $u = c$ em $\overline{\Omega}$ então u resolve o Problema Exterior de Dirichlet com $f = c$. Mas a solução a este problema é única, pela proposição (3.2) e é $u = c$. Então $u = c$ no $\mathbb{R}^2$, daí $\phi = 0$ pelo corolário (4.4.1), porque $0 = \Delta u = \phi$.

Capítulo 5

Soluções dos Problemas

Aplicaremos agora a Teoria de Fredholm para resolver os problemas de Dirichlet e Neumann. Sabemos que

$$T_k\phi(x) = \int_S k(x,y)\phi(y)d\sigma(y)$$

e

$$T_k^*\phi(x) = \int_S k(y,x)\phi(y)d\sigma(y)$$

são operadores compactos vistos como operadores em $L^2(S)$. Dada, $f \in C(S)$, considere as equações integrais

$$\frac{1}{2}\phi + T_k\phi = f, \;\; \frac{-1}{2}\phi + T_k\phi = f, \;\; \frac{1}{2}\phi + T_k^*\phi = f, \;\; \frac{-1}{2}\phi + T_k^*\phi = f \quad (5.1)$$

ou equivalentemente

$$\phi + T_{2k}\phi = 2f, \; \phi + T_{-2k}\phi = -2f, \; \phi + T_{2k}^*\phi = 2f, \; \phi + T_{-2k}^*\phi = -2f$$

onde $k(x,y) = \partial_{\nu_y}N(x,y)$ com $x, y \in S$, $x \neq y$.

Sendo $\phi + T_{\pm 2k}\phi$ e $\phi + T_{\pm 2k}^*\phi$ pertencentes a $C(S)$ temos pela proposição

(4.2.4) que se ϕ existir, será contínua. Notemos que o potencial de camada dupla

$$u(x) = \int_S \partial_{\nu_y} N(x,y)\phi(y)d\sigma(y),\ x \in \mathbb{R}^n \setminus S$$

com momento ϕ, resolve o problema interior (respectivamente exterior) de Dirichlet se ϕ satisfaz $\frac{1}{2}\phi + T_k\phi = f$ (respectivamente $\frac{-1}{2}\phi + T_k\phi = f$), reveja o Teorema (4.3.1). E o potencial de camada única

$$u(x) = \int_S N(x,y)\phi(y)d\sigma(y)$$

com momento ϕ satisfazendo $\frac{-1}{2}\phi + T_k^* = f$ (respectivamente $\frac{1}{2}\phi + T_k^* = f$), resolve o problema interior (respectivamente exterior) de Neumann. Existe uma exceção: Se $n = 2$ em geral o potencial de camada única concorda com $\log|x|$ no infinito, daí não será um harmônico no infinito.

Portanto para $n = 2$ existe uma condição extra necessária para a solução do problema exterior de Neumann dado pela Proposição (4.1.6) e esta condição é equivalente a harmonicidade no infinito pelos lemas (4.4.1) e (4.4.2). Então se as equações integrais possuem soluções e as condições necessárias forem satisfeitas, os problemas de valor da fronteira possuem solução.

Continuando o estudo da existência das soluções das equações (5.1), recorremos aos resultados apresentados na seção Operadores Compactos. Consideremos os autoespaços:

$$V_+ = \{\phi : T_k\phi = \frac{1}{2}\phi\},\ V_- = \{\phi : T_k\phi = \frac{-1}{2}\phi\}$$
$$W_+ = \{\phi : T_k^*\phi = \frac{1}{2}\phi\},\ W_- = \{\phi : T_k^*\phi = \frac{-1}{2}\phi\}$$

Pela Proposição (4.2.4) podemos assumir ϕ em $L^2(S)$ ou $C(S)$ que teremos o mesmo resultado.

Recordando que Ω possui as componentes $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ e que Ω' possui as componentes $\Omega'_0, \dots, \Omega'_{m'}$, onde Ω'_0 é ilimitada.

Definição 5.1 *Definamos as funções $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ e $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{m'}$ em S por*

$$\alpha_j(x) = \begin{cases} 1, \ \textit{se}\, x \in \partial\Omega_j \\ 0, \ \textit{caso contrário} \end{cases}$$

$$\alpha'_j(x) = \begin{cases} 1, \ \textit{se}\, x \in \partial\Omega'_j \\ 0, \ \textit{caso contrário} \end{cases}$$

Proposição 5.1 *As funções $\alpha_j \in V_+$ para $j = 1, \dots, m$ e $\alpha'_j \in V_-$ para $j = 1, \dots, m'$.*

Demonstração

Observe que

$$\begin{aligned} T_k\alpha_j(x) &= \int_S k(x,y)\alpha_j(y)d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial\Omega_j} k(x,y)d\sigma(y) \ (x \in \partial\Omega_j \subset S) \\ &= \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\alpha_j \text{ em } S \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T_k\alpha_j(x) &= \int_S k(x,y)\alpha_j(y)d\sigma(y) \\ &= 0 \ (x \in S \setminus \partial\Omega_j) \\ &= \frac{1}{2}\alpha_j \ (x \in S \setminus \partial\Omega_j) \end{aligned}$$

Veja também que

$$\begin{aligned} T_k\alpha_j'(x) &= \int_S k(x,y)\alpha_j'(y)d\sigma(y) \\ &= \frac{-1}{2}\alpha_j'(x)\ (x \in \partial\Omega_j' \subset S) \end{aligned}$$

e

$$T_k\alpha_j'(x) = 0 = \frac{-1}{2}\alpha_j'(x);\ (x \in S \setminus \partial\Omega_j),$$

aqui temos o sinal (-) pois o normal ν aponta para dentro de Ω_j' o que consideramos como orientação oposta.

Proposição 5.2 *Os espaços V_+ e W_+ possuem dimensão m. Além do mais:*

a) *Se $n > 2$, para cada $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{C}^m$ existe um único $\beta \in W_+$ tal que o potencial de camada única w com momento β satisfaz $w|\Omega_j = a_j$ para $j = 1, \ldots, m$.*

b) *Se $n = 2$, existe um subespaço $(m-1)$-dimensional X de $\mathbb{C}^m$ tal que:*

i) $\mathbb{C}^m = X \oplus \mathbb{C}(1, 1, \ldots, 1)$

ii) *Para cada $(a_1, \ldots, a_m) \in X$ existe um único $\beta \in W_+^0$ tal que o potencial de camada única w com momento β satisfaz $w|\Omega_j = a_j$ para $j = 1, \ldots, m$.*

Demonstração

Prova de a) Notemos inicialmente que as funções $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ são linearmente independentes, pois sejam $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{C}$ tais que $r_1\alpha_1(x) + \ldots + r_m\alpha_m(x) = 0$; $x \in \delta$. Daí se $x \in \partial\Omega_j$ temos $0 = r_1 \cdot 0 + r_j \cdot 1 + \ldots + r_m \cdot 0 = r_j$.

Portanto os α_js são linearmente independentes. Daí, $dimV_+ \geqslant m$ fazendo a identificação correta usando o item b) do teorema (2.4) temos que $dimW_+ = dimV_+$.

Consideremos a aplicação de W_+ em $\mathbb{C}^m$ definida por

$$\beta \longmapsto (w|\Omega_1, \ldots, w|\Omega_m),$$

que denotaremos por $\psi : W_+ \longmapsto \mathbb{C}^m$, onde w é o potencial de camada única com momento β. Do fato de $\beta \in W_+$ e do Teorema (4.4.1) tem-se $\partial_{\nu_-} w = 0$, assim w é constante em cada Ω_j pela proposição (4.4.1). Daí a aplicação está bem definida.

Afirmação 5.1 *ψ é injetiva.*

Demonstração

Se $w|\Omega = 0$ então w resolve o problema exterior de Dirichlet com $f = 0$, daí $w|\Omega' = 0$ pela proposição (4.1.1). Portanto $w \equiv 0$, como $\beta = \partial_{\nu_+} w - \partial_{\nu_-} w = 0$, segue que $dimW_+ \leqslant m$. Portanto $dimW_+ = m$ e ψ é um isomorfismo.

Prova de b) Primeiro provaremos o item (i). Para tanto, tomemos $W_+^0 = \{\beta \in W_+ : \int_S \beta = 0\}$, em vista do lema (4.4.2) e restrigindo a aplicação ψ definida na prova de (a) ao subespaço W_+^0 contínua injetiva, e pelo lema (4.4.3) temos que a imagem da restrição a W_+^0 não contém o vetor $(1, 1, \ldots, 1)$, pois caso o contrário teríamos u um potencial de camada com momento $\beta' \in W_+^0$ tal que $\psi(\beta') = (u|\Omega_1, \ldots, u|\Omega_m) = (1, 1, \ldots, 1)$ assim u seria constante em $\overline{\Omega}$, pelo lema (4.4.3) tem-se que $\beta' = 0$, logo $u = 0$. Portanto, $dimW_+^0 \leqslant m - 1$. Mas pelo Teorema do Núcleo e Imagem temos que $dimW_+^0 \geqslant dimW_+ - 1$ desde que W_+^0 é o núcleo de um funcional linear.

Daí como $dimW_+ = m$. Assim, basta tomarmos $X = \psi(W_+^0)$.

Agora, resta provar o item (ii). Se $w|\Omega = 0$, então w resolve o problema de Dirichlet com $f \equiv 0$. Daí $w|\Omega' = 0$ pela proposição (4.1.1) e pelo lema (4.4.2), já que temos por hipótese que $\beta \in W_+^0$. Tem-se $\displaystyle\int_S \beta = 0$, temos pelo lema (4.4.3) que $\beta = 0$. Daí a injetividade de ψ restrita a W_+^0.

Proposição 5.3 *Os espaços V_- e W_- possuem dimensão m'. Para cada $(a_1, \ldots, a_{m'}) \in \mathbb{C}^{m'}$ existe um único $\beta \in W_-$ tal que o potencial de camada única w com momento β satisfaz $w|\Omega'_j = a_j$ para $j = 1, \ldots, m'$ e $w|\Omega'_0 = 0$.*

Demonstração

Com um argumento semelhante ao da prova da Proposição (5.2), utilizando as funções $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{m'}$ linearmente independentes da proposição (5.1), tem-se que $dimV_- \geqslant m'$, pois $dimW_- = dimV_- \geqslant m'$ pelo item b) da proposição (2.4). Defina agora $\tilde{\psi} : W_- \longmapsto \mathbb{C}^{m'}$ por $\tilde{\psi}(\beta) = (w|\Omega'_1, \ldots, w|\Omega'_{m'})$ onde w é o potencial de camada única com momento β.

Afirmação 5.2 *$\tilde{\psi}$ é injetiva.*

Demonstração

Se $w = 0$ em Ω' então w resolve o problema interior de Dirichlet, assim pela unicidade tem-se que $w = 0$. Daí como $0 = \partial_{V_+} w - \partial_{V_-} w = \beta$ tem-se $\beta = 0$, logo $\tilde{\psi}$ é injetiva, daí $dimW_- \leqslant m'$. Assim temos $\tilde{\psi}$ um isomorfismo.

Portanto para cada $(a_1, \ldots, a_{m'}) \in \mathbb{C}^{m'}$ existe um único $\beta \in W_-$ tal que o potencial de camada única com momento β satisfaz $w|\Omega_j = a_j$ para $j = 1, \ldots, m'$. Resta, então mostrarmos que $w|\Omega'_0 = 0$. E é o que faremos.

Temos que w resolve o problema exterior de Neumann com $f = 0$, pela proposição (4.1.4) tem-se que w é constante em cada componente conexa de

Ω', como $\displaystyle\int_S \beta = \int_S f = 0$ pelo lema (4.4.2), w se anula no infinito, daí $w = 0$ em Ω'_0.

Proposição 5.4 $L^2(S) = V_+^\perp \oplus W_+ = V_-^\perp \oplus W_-$.

Demonstração

Pela proposição (2.4), temos que $V_+^\perp$ é fechado e de codimensão m, assim faz sentido escrevermos $V_+^\perp \oplus E$, onde E é o subespaço complementar de dimensão m. Como pela mesma proposição, tem-se que $dim W_+ = m$. Para a primeira igualdade é suficiente mostrar que $V_+^\perp \bigcap W_+ = \{0\}$. Para isso, seja $\phi \in V_+^\perp \bigcap W_+$ então $T_k^*\phi = \frac{1}{2}\phi$ por pentencer a W_+, e pelo corolário (2.2) a equação $\phi = \frac{-1}{2}\psi + T_k^*\psi$ possui solução, já que $\phi \in V_+^\perp$ para alguma $\psi \in L^2(S)$.

Pela proposição (4.2.4), ϕ e ψ são contínuas. Considere agora u e v potenciais de camada única com momento ϕ e ψ respectivamente. Então, pelo Teorema (4.4.1)

$$\begin{aligned} \partial_{\nu_-} u &= \frac{-1}{2}\phi + T_k^*\phi \\ &= \frac{-1}{2}\phi + \frac{1}{2}\phi \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \partial_{\nu_-} v &= \frac{-1}{2}\psi + T_k^*\psi \\ &= \phi \\ &= \frac{1}{2}\phi + \frac{1}{2}\psi \\ &= \frac{1}{2}\phi + T_k^* \\ &= \partial_{\nu_+} u. \end{aligned}$$

Multiplicando $\partial_{\nu_-} u = 0$ por v e $\partial_{\nu_-} v = \partial_{\nu_+} u$ por u, subtraindo e integrando sobre S, obtemos

$$\int_S (u\partial_{\nu_-} v - v\partial_{\nu_-} u) = \int_S u\partial_{\nu_+} u.$$

Pela identidade de Green, temos:

$$\begin{aligned}\int_S (u\partial_{\nu_-} v - v\partial_{\nu_-} u) &= \int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\\ &= 0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_S u\partial_{\nu_+} u &= -\int_{\Omega'} (u\Delta u + \nabla u\cdot\nabla u)\\ &= -\int_{\Omega'} (u\Delta u + |\nabla u|^2)\\ &= -\int_{\Omega'} |\nabla u|^2.\end{aligned}$$

Logo, $\int_{\Omega'} |\nabla u|^2 = 0$, daí u é localmente constante em Ω'. Então $\phi = \partial_{\nu_+} u - \partial_{\nu_-} u = \partial_{\nu_+} u = 0$.

A prova que $L^2(S) = V_- \oplus W_-$ é a mesma: novamente é suficiente mostrar que se $\phi \in V_-^\perp \cap W_-$ então $\phi = 0$. Mas para tal ϕ temos $T_k^*\phi = \frac{-1}{2}\phi$ e $\phi = \frac{1}{2}\psi + T_k^*\psi$ para alguma $\psi \in L^2(S)$. Daí se u e v são potenciais de camada única com momento ϕ e ψ, segue que $\partial_{\nu_+} u = 0$ e $\partial_{\nu_+} u = 0$ e $\partial_{\nu_+} v = \phi = \partial_{\nu_-} u$, pois

$$\begin{aligned}\partial_{\nu_+} u &= \frac{1}{2}\phi + T_k^*\phi\\ &= \frac{1}{2}\phi - \frac{1}{2}\phi\\ &= 0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\partial_{\nu_+} v &= \frac{1}{2}\psi + T_k^*\psi \\
&= \phi \\
&= \frac{1}{2}\phi + \frac{1}{2}\phi \\
&= -\left(\frac{-1}{2}\phi + T_k^*\phi\right) \\
&= -\partial_{\nu_-} u.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_S (v\partial_{\nu_+} u - u\partial_{\nu_+} v) = \int_S u\partial_{\nu_-} u$$

Pela identidade de Green,

$$\begin{aligned}
0 &= -\int_{\Omega'} (v\Delta u - u\Delta v) \\
&= \int_S (v\partial_{\nu_+} u - u\partial_{\nu_+} v) \\
&= \int_S u\partial_{\nu_-} u \\
&= \int_\Omega (u\Delta u + \nabla u \cdot \nabla u).
\end{aligned}$$

Daí $\int_{\Omega'} |\nabla u|^2 = 0$, o que nos dá u localmente constante em Ω e então $\phi = \partial_{\nu_-} u = 0$.

Para justificar esses usos da identidade de Green na região ilimitada Ω' substituindo Ω' por $\Omega' \bigcap B_r(0)$ e fazendo $r \to \infty$ como na prova da proposição (4.1.4). Para fazer isso funcionar é suficiente saber que u é harmônica radial e satisfaz as estimativas da proposição (3.2) e (3.3). Harmonicidade no infinito é automática quando $n > 2$, e para $n = 2$ é equivalente a condição $\int_S \phi = 0$

pelo lema (4.4.2). A última condição é válida quando $\phi \in V_+^\perp$, pois pela Proposição (5.1), como $\int_S \phi = \sum_{j=1}^{m} \langle \phi|\alpha_j \rangle = 0$ e é válido quando $\phi \in W_-$, como $\frac{1}{2}\phi + T_k^*\phi = 0$, pelo lema (4.4.1) temos $\int_S \phi = \int_S 0 = 0$.

Corolário 5.1

$$\begin{aligned} L^2(S) &= \mathit{Range}\left(\frac{-1}{2}I + T_k\right) \oplus V_+ \\ &= \mathit{Range}\left(\frac{1}{2}I + T_k\right) \oplus V_- \end{aligned}$$

Demonstração

Desde que Range $\left(\frac{-1}{2}I + T_k\right) = W_+^\perp$ e Range $\left(\frac{1}{2}I + T_k\right) = W_-^\perp$ pelo corolário (2.2), como na prova da proposição (5.4) é suficiente mostrar que $W_+^\perp \bigcap V_+ = W_-^\perp \bigcap V_- = \{0\}$. Suponha $\phi \in W_+^\perp \bigcap V_+$. Pela proposição anterior, podemos escrever $\phi = \phi_1 + \phi_2$ onde $\phi_1 \in W_+$ e $\phi_2 \in V_+^\perp$. Mas $\langle \phi|\phi_1 \rangle = 0$ desde que $\phi \in W_+^\perp$ e $\langle \phi|\phi_2 \rangle = 0$ desde que $\phi \in V_+$, portanto $\langle \phi|\phi \rangle = 0$, logo $\phi = 0$. Da mesma forma mostra-se $W_-^\perp \bigcap V_- = \{0\}$.

Teorema 5.1 *Com a notação e terminologia do capítulo intitulado Potenciais de Camada, temos:*

a) *O problema interior de Dirichlet possui uma única solução para cada $f \in C(S)$.*

b) *O problema exterior de Dirichlet possui uma única solução para cada $f \in C(S)$.*

c) *O problema interior de Neumann para $f \in C(S)$ possui uma solução se, e somente se, $\int_{\partial\Omega'_j} f = 0$ para $j = 1, \ldots, m$. A solução é única módulo funções as quais são constantes em cada Ω_j.*

d) *O problema exterior de Neumann para $f \in C(S)$ possui uma solução se, e somente se, $\int_{\partial\Omega'_j} f = 0$ para $j = 1, \ldots, m'$ e também para $j = 0$ no caso $n = 2$. A solução é única módulo funções as quais são constantes em $\Omega'_1, \ldots, \Omega'_{m'}$ e também em Ω'_0 no caso $n = 2$.*

Demonstração

Prova de a) Pelo corolário (5.1) podemos escrever

$$f = \frac{1}{2}\phi + T_k\phi + h \text{ onde } h \in V_-,$$

como mostramos que as funções α'_j de acordo com a definição (5.1) formam uma base para o subespaço V_-, nos dá $h = \sum_{j=1}^{m'} a_j\alpha'_j$ com $a_j \in C$. Assim temos $f = \frac{1}{2}\phi + T_k\phi + \sum_{j=1}^{m'} a_j\alpha'_j$ como $\frac{1}{2}\phi + T_k\phi = f - \sum_{j=1}^{m'} a_j\alpha'_j \in C(S)$, tem-se que $\phi \in C(S)$ pela Proposição (4.2.4). Pelo Teorema (4.3.1), o potencial de camada dupla v com momento ϕ resolve o problema de Dirichlet com $\frac{1}{2}\phi + T_k\phi$ no lugar de f. Além do mais, pela proposição (5.2), existe único $\beta \in W_-$ tal que o potencial de camada única w com momento β satisfaz $w|\Omega'_j = a_j$ para $j \geqslant 1$ e $w|\Omega'_0 = 0$. Assim, $w|S = \sum_{j=1}^{m'} a_j\alpha'_j$ como w é contínua em S pela proposição (4.4.1), daí a solução do problema de Dirichlet é $u = v + w$.

Prova de b) Se $n > 2$ então pelo corolário (5.1) podemos escrever

$$f = \frac{-1}{2}\phi + T_k\phi + g \text{ com } g \in V_+$$

como mostramos que as funções α_j's definidas em S formam uma base para o subespoaço V_+, assim g pode ser escrito como $g = \sum_{j=1}^{m} c_j\alpha_j$ onde $c_j \in \mathbb{C}$ para $j = 1, \ldots, m$ são constantes. Daí $f = \frac{-1}{2}\phi + T_k\phi + \sum_{j=1}^{m} c_j\alpha_j$; se $\frac{-1}{2}\phi + T_k\phi = f - \sum_{j=1}^{m} c_j\alpha_j \in C(S)$ tem-se que $\phi \in C(S)$ pela proposição (4.2.4). Reescrevendo o problema exterior de Dirichlet com $\frac{-1}{2}\phi + T_k\phi$ no lugar de f, tem-se que o potencial de camada dupla v com momento ϕ resolve tal problema. Além do mais, pela proposição (5.2) existe único $\beta \in W_+$ tal que o potencial $\overline{v}$ com momento β satisfaz $w|\Omega_j = c_j$ para $j = 1, \ldots, m$. No entanto, $w|S = \sum_{j=1}^{m} c_j\alpha_j$, como w é contínua em S pela proposição (4.4.1), daí a solução do problema de Dirichlet é $u = v + w$.

Para $n = 2$, precisamos fazer algumas modificações. Como acima podemos escrever

$$f = \frac{-1}{2}\phi + T_k\phi + \sum_{j=1}^{m} a_j\alpha_j \text{ com } \phi \in C(S) \text{ e } a_j \in \mathbb{C}$$

O potencial de camada única v com momento ϕ resolve o problema exterior de Dirichlet com $\frac{-1}{2}\phi + T_k\phi$ no lugar de f. Além do mais, desde que $\sum_{j}^{m} \alpha_j = 1$ em S, pela proposição (5.2) podemos escrever

$$\sum_{j=1}^{m} a_j\alpha_j = \sum_{j=1}^{m} b_j\alpha_j + c \text{ com } (b_1, \ldots, b_m) \in X \text{ e } c \in \mathbb{C}$$

e existe $\beta \in W_+^0$ tal que o potencial de camada única w com momento β satisfaz $w|\Omega_j = b_j$. Do fato de $\beta \in W_+^0$ tem-se que w é harmônica no infinito pelo Lema (4.4.2). Daí w resolve o problema exterior de Dirichlet, com a hipótese de $b_j\alpha_j$ no lugar de f. Finalmente, a função constante c resolve o problema exterior de Dirichlet com a hipótese de c no lugar de f, daí a solução do problema original de Dirichlet é $u = v + w + c$.

Prova de c) Simplesmente observemos que $\int_{\partial\Omega_j} f = \langle f|\alpha_j\rangle$, então essas integrais se anulam se, e somente se $f \in V_+^\perp$. Pelo corolário (2.2), ou seja, é necessário e suficiente para resolver a equação integral $\frac{-1}{2}\phi + T_k^*\phi = f$. Se ϕ é uma solução, então ϕ é contínua, pela proposição (4.2.4), daí pelo teorema (4.4.1), o potencial de camada simples com momento ϕ resolve o problema interior de Neumann.

Prova de d) De modo semelhante, como $\int_{\partial\Omega'_j} f = \langle f|\alpha_j\rangle$ para $j = 1, \ldots, m'$, pela proposição (5.1), então essas integrais se anulam se, e somente se $f \in V_-^\perp$, em tal caso podemos resolver a equação $\frac{1}{2}\phi + T_k^*\phi = f$ novamente pelo corolário (2.2), e resolvemos o problema exterior de Neumann com o potencial de camada simples com momento ϕ pelo teorema (4.4.1). Para o que resta, caso $n = 2$, pelos lemas (4.4.1) e (4.4.2) este potencial é harmônico no infinito se, e somente se $\int_{\partial\Omega'_0} f = 0$.

Referências Bibliográficas

[1] FOLLAND, G. B. **Introduction to partial differential equations**. 2. ed. New Jersey: Princeton University Press; 1995.

[2] LEE, J. M. **Introduction to smooth manifolds**. New York: Springer-Verlag; 2003.

[3] JAIN, P. K.; AHUJA, O. P.; AHMAD, K. **Functional analysis**. New York: John Wiley e Sons; 1995.

[4] ARBOGAST, T.; BONA, J. **Methods of applied mathematics**. 5. ed. Texas; 2005.