

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS – GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA

Landerson Bezerra Santiago

O NÚCLEO DO CALOR EM UMA
VARIEDADE RIEMANNIANA

FORTALEZA

2011

Landerson Bezerra Santiago

**O NÚCLEO DO CALOR EM UMA VARIEDADE
RIEMANNIANA**

Dissertação submetida à Coordenação do
Curso de Pós-Graduação em Matemática,
da Universidade Federal do Ceará, para
a obtenção do grau de Mestre em
Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luquésio Petrola
de Melo Jorge

Fortaleza

2011

Santiago, Landerson Bezerra

S226n O Núcleo do Calor em uma Variedade Riemanniana/ Lander-
son Bezerra Santiago. – Fortaleza: 2011.

50f.

Orientador: Prof. Dr. Luquésio Petrola de Melo Jorge

Área de concentração: Matemática

Dissertação(Mestrado)- Universidade Federal do Ceará,
Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Fortaleza,
2011.

1. Geometria Diferencial. I. Jorge, Luquésio Petrola de Melo
(Orient.)

CDD 516.36

Agradecimentos

A meus pais e meus amigos

Resumo

Em uma Variedade Riemanniana conexa e compacta introduziremos o conceito de espectro do operador laplaciano.

Utilizando a existência e a unicidade do núcleo do calor em uma variedade Riemanniana, provaremos o teorema de decomposição de Hodge. Este teorema afirma que o espaço de Hilbert $L^2(M, g)$ se decompõe em uma soma direta de subespaços de dimensão finita, onde cada subespaço é o auto-espaço associado a um autovalor do laplaciano. Além disso, os autovalores formam uma sequência não-negativa que acumula somente no infinito.

Em seguida iniciaremos a construção do núcleo do calor e, por fim, mostraremos que se duas Variedades Riemannianas são isospectrais então elas possuem o mesmo volume.

Palavras-chave: Operador Laplaciano, Espaço de Hilbert, Autovalor.

Abstract

In a connected and compact Riemannian Manifold we will introduce the concept of spectre of Laplace operator. Using the existence and unicity of the heat kernel in Riemannian Manifold we proof the Hodge composition theorem. This theorem states that the Hilbert space $L^2(M, g)$ decompose in direct sum of subspaces with finite dimesion, where each subspace is the eigen-space relative of a eigenvalue of the laplacian. Furthermore, the eigenvalues form a nonnegative sequence the accumulate only in the infinity.

After that we begin the construction of the heat kernel and, finally, we show that two Isospectral Riemannian Manifolds have the same volume.

Keywords: Laplace operator. Hilbert Space. Eingenvalue

Contents

1	Análise Funcional	8
2	O espectro de uma Variedade Riemanniana	13
3	O núcleo do calor	21
3.1	O núcleo do calor em \mathbb{R}^n	21
3.2	Simetria e unicidade do Núcleo de calor	25
3.3	Teorema de Hodge	26
3.4	Construção do Núcleo do Calor I	30
3.5	Construção do Núcleo do Calor II	33
3.6	Construção do Núcleo do Calor (III)	39
4	A Expansão Assintótica do Núcleo do Calor	46
	Referências Bibliográficas	49

Chapter 1

Análise Funcional

Seja D um operador linear em um espaço de Hilbert H . Seguem-se algumas definições:

- Dizemos que D é limitado se existe $K > 0$ tal que $\|Dx\| \leq K\|x\|, \forall x \in H$. Caso contrário, dizemos que D é ilimitado.
- Dizemos que D é compacto se a imagem de limitados é relativamente compacta.
- Denotando por I o operador identidade em H , e se λ é um escalar então, se a imagem de $\lambda I - D$ é densa em H e se $\lambda I - D$ possui uma inversa limitada em $\text{Im}(\lambda I - D)$, então dizemos que λ pertence ao conjunto resolvente de H , $\rho(D)$.
- Se $\text{Im}(\lambda I - D)$ é denso em H e se $\lambda I - D$ possui uma inversa ilimitada então dizemos que λ pertence ao espectro contínuo de A , $C\sigma(D)$.
- Se $\text{Im}(\lambda I - D)$ não é denso em H e se $\lambda I - D$ possui inversa, então λ pertence ao espectro residual de A , $R\sigma(D)$.

- Se $(\lambda I - D)^{-1}$ não existe, dizemos que λ pertence ao espectro pontual de A , $P\sigma(A)$, ou que λ é um autovalor de D .
- Se λ é autovalor de D , então o conjunto dos $x \in H$, $x \neq 0$ tais que $\lambda x - Dx = 0$ é denotado auto-espço associado a λ , e cada elemento do auto-espço é um autovetor (associado a λ).
- O conjunto $C\sigma(D) \cup R\sigma(D) \cup P\sigma(D)$ denotado por $\sigma(D)$ é chamado espectro de D .
- A adjunta D^* de um operador D é o único operador que satisfaz $\langle Dx, y \rangle = \langle x, D^*y \rangle, \forall x, y \in H$. Se $D^* = D$, dizemos que D é auto-adjunto.

Teorema 1.1 *Se $X, Y \in H$ são autovetores associados a autovalores distintos, então $\langle X, Y \rangle = 0$.*

Demonstração: Ver [3].

■

Teorema 1.2 *Se D é compacto, então $\sigma(D) = P\sigma(D)$.*

Demonstração: Ver [3].

■

Veja que, se $D : H \rightarrow H$ é compacto ou se H tem dimensão finita, então $\sigma(D)$ e o conjunto dos autovalores de D são iguais.

Quando for este o caso, denotaremos o conjunto dos autovalores de D simplesmente por $\sigma(D)$.

Teorema 1.3 *Se $D : H \rightarrow H$ é compacto e auto-adjunto, então seu espectro é real, consiste apenas de autovalores, é enumerável, os autoespaços associados a autovalores não nulos possuem dimensão finita e a soma direta destes autoespaços é H . Além disso, se a quantidade de autovalores é infinita, então eles convergem para 0.*

Demonstração: Ver [3].

■

Teorema 1.4 (Identidade de Parseval) *Seja $A = \{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma base ortonormal para o espaço de Hilbert H . Neste caso:*

$$1) X \in H \Rightarrow X = \sum_{\alpha \in \Lambda} \langle X, X_\alpha \rangle X_\alpha$$

$$2) X, Y \in H \Rightarrow \langle X, Y \rangle = \sum_{\alpha \in \Lambda} \langle X, X_\alpha \rangle \langle X_\alpha, Y \rangle$$

Demonstração: Ver [3].

■

Definição: Seja $f, g \in L^1_{loc}(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e α um multiíndice ($\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$). Dizemos que g é α -ésima derivada parcial fraca de f e escrevemos $D^\alpha f = g$ se

$$\int_U f D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U g \phi dx, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

Lema 1.5 *Uma α -ésima derivada parcial fraca de f , se existe, é unicamente definida a menos de um conjunto de medida nula. Demonstração:* Ver [5].

■

Definição: O Espaço de Sobolev $H_k(U)$ consiste de todas as funções $f \in L^1_{loc}(U)$ tais que, para todo multiíndice α , com $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e pertence a $L^2(U)$.

Definição: Se $f \in H_k(U)$ definimos sua norma como

$$\|u\|_{H_k(U)} := \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^\alpha u|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Proposição 1.1 *O espaço de Sobolev $H_k(U)$ é um espaço de Hilbert com*

$$\langle f, g \rangle_{H_k(U)} = \int_U \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle dx$$

Demonstração: Ver [5].

■

Teorema 1.6 (Rellich-Kondrakov) *A inclusão $H_1(U) \rightarrow L^2(U)$ é compacta*

Demonstração: Ver [5].

■

Passemos agora a definição do espaço de Sobolev em uma variedade Riemanniana M^n .

Definição: Seja M uma Variedade Riemanniana conexa. Seja $(\varphi_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma coleção finita de cartas de modo que $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$.

Dizemos que $f : M \rightarrow \mathbb{R} \in H_k(M)$ se, para qualquer $\psi \in C_c^\infty(U_\alpha)$ e para qualquer carta φ_α vale:

$$(\psi f) \circ \varphi_\alpha^{-1} \in H_k(V_\alpha)$$

Definição: Seja $(\varphi_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma coleção finita de cartas com $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$ e seja $\{g_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma partição da unidade subordinada a cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ou seja $g_\alpha \in C_c^\infty(U_\alpha)$ e $\sum_{\alpha \in I} g_\alpha = 1$ em M .

Dadas $f, g \in H_k(M)$ e para cada $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^n, \alpha \in I$, definimos

$$\langle f, g \rangle_{H_k(M)} = \sum_{\alpha \in I} \langle (g_\alpha f) \circ \varphi_\alpha^{-1}, (g_\alpha g) \circ \varphi_\alpha^{-1} \rangle_{H_k(V_\alpha)}$$

.

Proposição 1.2 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_k(M)}$ define um produto interno em $H_k(M)$ que o torna um espaço de Hilbert.

Demonstração: Ver [4].

■

Teorema 1.7 O Teorema de Rellich-Kondrakov vale para uma variedade Riemanniana compacta M^n , ou seja, a inclusão

$$H_1(M) \rightarrow L^2(M)$$

é compacta

Demonstração: Ver [6]

■

Chapter 2

O espectro de uma Variedade Riemanniana

Seja (M, g) uma Variedade Riemanniana. Neste trabalho consideraremos, a menos de menção em contrário que M é compacta e conexa. Denotamos o espectro de (M, g) , $(\text{Spec}(M, g))$ como sendo o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que existe uma $f \in C^\infty(M)$, $f \neq 0$, com $\Delta f = \lambda f$. Cada $\lambda \in \text{Spec}(M, g)$ é um autovalor. O conjunto $f \in C^\infty(M)$ com $\Delta f = \lambda f$, para um λ fixado é denotado auto-espaço associado a λ e cada elemento do auto-espaço é uma auto-função.

Definição 2.1 *Seja $f \in C^\infty(M)$. O gradiente de f é o campo vetorial suave ∇f definido sobre M por*

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f), \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Propriedade 2.1

1. *Se $\{e_i\}$ é um referencial ortonormal em $U \subset M$, então $\nabla f = e_i(f)e_i$ é independente do referencial.*

2. Se $U \subset M$ é uma vizinhança coordenada, com campos coordenados $\partial_1, \dots, \partial_n$, então, em U ,

$$\nabla f = g^{kl} \frac{\partial f}{\partial X_l} \partial_k$$

onde $(g^{lk})_{n \times n} = (g^{kl})_{n \times n}^{-1}$.

3. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$

4. $\nabla(f \cdot g) = g \nabla f + f \nabla g$

Definição 2.2 Se $X \in \mathfrak{X}(M^n)$, a divergência de X é a função suave $\text{div} X : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(\text{div} X)(p) = \text{traço}\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\}, v \in T_p M$$

Proposição 2.1

1. $X = a_i e_i \Rightarrow \text{div} X = e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle$

2. $\text{div} X = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i \sqrt{g})$.

Definição 2.3 O Laplaciano de f é a função $\Delta f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Delta f = -\text{div}(\nabla f)$

Propriedade 2.2

1. $\{e_i\}$ referencial ortonormal, $\Delta f = -e_i(e_i(f)) + (\nabla_{e_i} e_i)f$.

2. $\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g - 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle = g\Delta f + f\Delta g - 2\langle df, dg \rangle$.

3. Se $U \subset M$ é uma vizinhança coordenada com campos coordenados $\partial_1, \dots, \partial_n$, então o Laplaciano de f em U será

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \partial_i (g^{ij} \sqrt{g} (\partial_j f))$$

4. (Primeira Identidade de Green)

$$\int_M (\langle \nabla g, \nabla f \rangle + f \Delta g) dM = \int_{\partial M} f \frac{\partial g}{\partial \nu} d(\partial M)$$

onde ν denota a normal unitária exterior a M ao longo de ∂M .

5. (Segunda Identidade de Green)

$$\int_M (f \Delta g - g \Delta f) dM = \int_{\partial M} \left(f \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) d(\partial M).$$

Definição 2.4 Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ suave. O Hessiano de f é o campo de operadores lineares

$$(\text{Hess } f)_p : T_p M \rightarrow T_p M$$

definido por

$$(\text{Hess } f)_p(v) = \nabla_v(\nabla f)$$

Propriedade 2.3

1. $(\text{Hess } f)_p : T_p M \rightarrow T_p M$ é auto-adjunto.
2. $\Delta f = -\text{traço}(\text{Hess } f)$

Definição 2.5 Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos a Forma Hessiana de f por

$$(X, Y) \mapsto \text{Hess } f(X, Y),$$

onde

$$\begin{aligned} \text{Hess } f(X, Y) &= \langle \text{Hess } f(X), Y \rangle \\ &= \langle \nabla_X(\nabla f), Y \rangle \\ &= X(\langle \nabla f, Y \rangle) \\ &= X(Yf) - (\nabla_X Y)(f) \end{aligned}$$

Propriedade 2.4

1. Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$, suave. Então, se $y : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é uma geodésica, teremos

$$(\text{Hess}f)_{y(t)}(y'(t), y'(t)) = \frac{d^2}{dt^2}(f \circ y)(t)$$

2.

$$\begin{aligned} (\Delta f)(p) &= -\text{traço}(\text{Hess}f) = -\langle (\text{Hess}f)_p(e_i), e_i \rangle = \\ &= -(\text{Hess}f)_p(e_i, e_i) = -\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} (f \circ y^i)(t) \end{aligned}$$

onde $y^i(t)$ são geodésicas, com $y^i(0) = p, \dot{y}^i(0) = e_i$.

Proposição 2.2 Seja $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ suave. Daí,

$$\left(\Delta^{\mathbb{R}^{n-1}} \right) \Big|_{\mathbb{S}^n} = \Delta^{\mathbb{S}^n} \left(f \Big|_{\mathbb{S}^n} \right) - n \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}.$$

Demonstração: Seja $x_1 \in \mathbb{S}^n$. A partir de x_1 , obtemos uma base ortonormal $\{x_1, x_i\}_{i=2}^{n+1}$ de \mathbb{R}^{n+1} .

Seja y_i a geodésica passando por x_1 em \mathbb{S}^n , determinada pela direção x_i , $i = 2, \dots, n+1$.

$$y_i : \alpha \rightarrow \cos \alpha x_1 + \text{sen } \alpha x_i.$$

Veja que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha}(f \circ y_i)(\alpha) &= -\text{sen} \alpha \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^2}{d^2\alpha} \Big|_{t=0} (f \circ y_i)(\alpha) &= -\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cos \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \Big|_{\alpha=0} = -\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta^{\mathbb{S}^n} \left(f \Big|_{\mathbb{S}^n} \right) (x_s) = -\sum_{i=2}^{n+1} \frac{d^2}{d^2\alpha} \Big|_{t=0} (f \circ y_i) = -\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1) + n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_s).$$

Mas,

$$(\Delta^{\mathbb{R}^n} f)(x_s) = - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_s) = - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_s) \Rightarrow$$

$$(\Delta^{\mathbb{R}^n} f) \Big|_{S^n}(x_1) = \Delta^{S^n}(f|_{S^n})(x_1) - n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_s}(x_s) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_s^2}(x_s)$$

Lembremos que o espectro do Laplaciano agindo em $C^\infty(M^n)$, com o produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_M f \cdot g dM$$

é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que existe $f : M \rightarrow \mathbb{R} \in C^\infty(M), f \neq 0$, com $\Delta f = \lambda f$.

Neste caso, denotaremos o autoespaço associado a $\lambda \in \text{Spec}(M^n)$ por $P_\lambda(M^n)$.

$$P(M^n) = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(\mathbb{R}^n)} P_\lambda(M^n) \text{ será o auto-espaço de } M^n.$$

Lembremos que a soma anterior é direta.

Faremos uso do seguinte Teorema que será provado posteriormente.

Teorema 2.1

1. $\text{Spec}(M^n) = \{0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots\}$ tendendo a $+\infty$.
2. $\forall \lambda \in \text{Spec}(M), P_\lambda(M)$ tem dimensão finita. (A dimensão de $P_\lambda(M)$ será a multiplicidade de λ)
3. $P(M)$ é denso em $C^\infty(M)$.

Lema 2.2 Seja (M^n, g) uma Variedade Riemanniana e suponha que, $\forall i \in \mathbb{N}$ seja dado um subespaço vetorial V_i de $C^\infty(M)$ de maneira que as duas condições sejam verificadas:

1. $\forall i, \exists \lambda_i \in \mathbb{R}; \varphi \in V_i \Rightarrow \Delta \varphi = \lambda_i \varphi$.
2. $\sum_{i \in \mathbb{N}} V_i$ é denso em $C^\infty(M)$.

Neste caso, $\text{Spec}(M) = \{\lambda_i\}_{i>0}$ e $V_i = P_{\lambda_i}(M)$.

Demonstração: Obviamente, $\lambda_i \in \text{Spec}(M) \quad \forall i$. Suponha que existe $\lambda \in \text{Spec}(M)$; $\lambda \notin (\lambda_i)_{i \geq 0}$. Obviamente, $P_\lambda(M) \notin \emptyset$ e $P_\lambda(M)$ será ortogonal a $V_i, \forall i$. Mas isso contradiz o fato de que $\sum V_i$ é denso.

Logo, $\text{Spec}(M) = \{\lambda_i\}_{i \geq 0}$.

Claramente, $V_i \subset P_{\lambda_i}(M)$. Daí, V_i tem dimensão finita e, logo, será fechado.

Se $V_i \neq P_{\lambda_i}(M)$, poderíamos obter $\varphi \in P_{\lambda_i}(M)$ ortogonal a V_i e, conseqüentemente, ortogonal a $V_j, \forall j$.

Mas isso contradiz a densidade de $\sum V_i$.

Logo, $V_i = P_{\lambda_i}(M)$.

■

Lema 2.3 (Stone-Weierstrass) *Seja M uma variedade compacta e \mathcal{A} uma subálgebra de $C^\infty(M)$. Se \mathcal{A} separa pontos e contém as funções constantes, temos que \mathcal{A} é denso em $C^0(M)$, donde, em $C^\infty(M)$.*

Agora, seja H um polinômio homogêneo de grau $k \geq 0$. Daí, podemos escrever

$$H = r^k (H|_{S^n}) \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial r} = kr^{k-1} (H|_{S^n}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} = k(k-1)r^{k-2} (H|_{S^n}).$$

Logo, utilizando a fórmula

$$(\Delta^{\mathbb{R}^n} H)|_{S^n} = \Delta^{S^n} (f|_{S^n}) - n \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{\partial^2 H}{\partial r^2},$$

teremos:

$$\Delta^{S^n} (H|_{S^n}) = (\Delta^{\mathbb{R}^n} H)|_{S^n} + k(n+k-1)H|_{S^n}.$$

Em particular, se H for homogêneo ($\Delta H = 0$) teremos

$$\Delta^{S^n} (H|_{S^n}) = k(n+k-1)H|_{S^n}.$$

Daí, $k(n + k - 1)$, $k \geq 0$ é autovalor de S^n e o conjunto dos polinômios homogêneos e harmônicos, que denotaremos por \mathcal{H}_k , está contido em $P(S^n)$.

Denotaremos por $\tilde{\mathcal{H}}_k$ a restrição de \mathcal{H} a S^n .

Proposição 2.3 *Spec(S^n) com a métrica canônica g_o é igual a $\{\lambda_k\}_{k \geq 0}$ onde $\lambda_k = k(n + k - 1)$ e o auto-espaço associado a λ_k é $\tilde{\mathcal{H}}_k$.*

Antes de demonstrar a Proposição 2.4 introduziremos as notações: Denotaremos por P_k o conjunto dos polinômios homogêneos de grau k em \mathbb{R}^{n+1} , $f = f|_{S^n}$ e em $\oplus_k P_k$ utilizaremos o produto interno $\langle P, Q \rangle = \int_{S^n} \tilde{P} \cdot \tilde{Q}$.

Lema 2.4 $\forall k \geq 0$,

$$P_{2k} = \mathcal{H}_{2k} \oplus r^2 \mathcal{H}_{2k-2} \oplus \dots \oplus r^{2k} \mathcal{H}_0$$

$$P_{2k+1} = \mathcal{H}_{2k+1} \oplus r^2 \mathcal{H}_{2k-1} \oplus \dots \oplus r^{2k} \mathcal{H}_1$$

Demonstração da Proposição 2.4: Supondo provado o Lema, observe que $\widetilde{\oplus P}_{k \geq 0}$ é denso em $C^\infty(S^n)$ (Stone - Weierstrass). Por outro lado, \tilde{P}_k é a soma de $\tilde{\mathcal{H}}_l$ para certos $l \leq k$. Daí, $\oplus_l \tilde{\mathcal{H}}_l = \widetilde{\oplus_k P_k}$. Logo, $\oplus_l \tilde{\mathcal{H}}_l$ é denso em $C^\infty(S^n)$ e, pelo Lema, $\text{Spec}(S^n) = \{\lambda_k\}_{k \geq 0}$ e $P_{\lambda_k}(S^n) = \tilde{\mathcal{H}}_k$.

Demonstração do Lema: Obviamente, o resultado vale para $k = 0, 1$.

Suponha então que, para $0 \leq k \leq n$ vale $P_k = \mathcal{H}_k + r^2 P_{k-2}$. Provaremos, então, que $P_{k+2} = \mathcal{H}_{k+2} + r^2 P_k$.

Vemos, primeiro, que a soma $\mathcal{H}_{k+2} + r^2 P_k$ é direta (isso é o mesmo que dizer que \mathcal{H}_{k+2} e $r^2 P_k$; $\tilde{\mathcal{H}}_{k+2}$ e \tilde{P}_k são ortogonais).

Mas $\tilde{\mathcal{H}}_{k+2} \subset P_{\lambda_{k+2}}(S^n)$ e $\tilde{P}_k \subset \sum_{i=0}^k P_{\lambda_i}(S^n)$.

Logo, $\tilde{\mathcal{H}}_{k+2}$ e \tilde{P}_k são ortogonais.

Veremos agora que, se $P \in P_{k+2}$ é ortogonal a P_k , então P é harmônico.

Como $\Delta P \in P_k$, pela hipótese de indução, $\Delta P = 0 \Leftrightarrow \Delta P$ é ortogonal a $r^{2l}\mathcal{H}_{k-2l}$, $0 \leq 2l \leq k$, ou, equivalentemente, $\widetilde{\Delta P}$ é ortogonal a todos os $\widetilde{\mathcal{H}}_{k-2l}$, $0 \leq 2l \leq k$.

Seja $P \in P_{k+2}$ e $H \in \mathcal{H}_{k-2l}$.

Utilizando a segunda identidade de Green, teremos que

$$\int_{S^n} \widetilde{H} \cdot \Delta \widetilde{P} = \int_{S^n} \widetilde{P} \cdot \Delta \widetilde{H}.$$

Mas

$$\Delta \widetilde{H} = (k - 2n)(n + k - 2l - 1)\widetilde{H} \Rightarrow$$

$$\int_{S^n} \widetilde{P} \cdot \Delta \widetilde{H} = (k - 2n)(n + k - 2l - 1) \int_{S^n} \widetilde{P} \cdot \widetilde{H} = 0.$$

$$\Delta \widetilde{P} = \widetilde{\Delta P} + (k + 2)(n + k + 1)\widetilde{P} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{S^n} \widetilde{H} \cdot \Delta \widetilde{P} = \int_{S^n} \widetilde{H} \cdot \widetilde{\Delta P} + (k + 2)(n + k + 1) \int_{S^n} \widetilde{H} \cdot \widetilde{P} = \int_{S^n} \widetilde{H} \cdot \widetilde{\Delta P}.$$

Logo, $\int_{S^n} \widetilde{H} \cdot \widetilde{\Delta P} = 0 \Rightarrow \widetilde{\Delta P}$ é ortogonal a todos os $\widetilde{\mathcal{H}}_{k-2l} \Rightarrow P$ é harmônica. ■

Chapter 3

O núcleo do calor

3.1 O núcleo do calor em \mathbb{R}^n

Propriedades de convolução e transformada de Fourier:

- $\widehat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iX \cdot \xi} f(\xi) d\xi$
- $\check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iX \cdot \xi} f(\xi) d\xi$
- $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy$
- $(f * g)\widehat{} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot \widehat{f} \cdot \widehat{g}$
- $f = (\widehat{f})^\vee$

Dada a distribuição do calor $f((x) = f(0, x)$ no \mathbb{R}^n , considere a distribuição do calor $f(t, x)$ governada pela equação $(\partial t + \Delta_x)f(t, x) = 0$.

Daí,

$$\Delta_x f(t, x) =$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta_x \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \widehat{f}(t, \xi) d\xi \right) = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} |\xi|^2 \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \widehat{f}(t, \xi) d\xi \\
\Rightarrow \partial_t f(t, x) &= -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} |\xi|^2 \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \widehat{f}(t, \xi) d\xi
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\partial_t f(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \partial_t \widehat{f}(t, \xi) d\xi.$$

Utilizando as duas expressões anteriores, teremos

$$(*) \quad \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} (\partial_t \widehat{f}(t, \xi) + |\xi|^2 \widehat{f}(t, \xi)) d\xi$$

Agora, observe que, se definirmos $g(t, x) = \partial_t f(t, x) + |x|^2 f(t, x)$, teremos

$$\begin{aligned}
&\widehat{g}(t, x) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} (\partial_t f(t, \xi) + |\xi|^2 f(t, x)) d\xi \\
&= \partial_t \widehat{f}(t, x) + |x|^2 \widehat{f}(t, x) \\
&\stackrel{(*)}{\Rightarrow} g(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \widehat{g}(t, \xi) d\xi = 0 \\
\Rightarrow \widehat{g}(t, x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} g(t, \xi) d\xi = 0 \\
\Rightarrow -|\xi|^2 \widehat{f}(t, \xi) &= \partial_t \widehat{f}(t, \xi)
\end{aligned}$$

Concluimos então que $\widehat{f}(t, \xi) = \widehat{f}(0, \xi)e^{-t|\xi|^2} = f(\xi)e^{-t|\xi|^2}$.

Mostraremos agora que $(e^{-t|x|^2})^\vee(\xi) = \frac{1}{(2t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}}$.

Mas

$$\begin{aligned} (e^{-t|x|^2})^\vee(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} e^{-t|x|^2} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{ix_j \xi_j} e^{-tx_j^2} dx_j \end{aligned}$$

Calculemos então o valor de $\int_{\mathbb{R}} e^{ix_j \xi_j} e^{-tx_j^2} dx_j$.

Se fizermos

- $z = t^{\frac{1}{2}} x_j - \frac{\xi_j}{2t^{\frac{1}{2}}} i$, então
- $dx_j = \frac{dz}{t^{\frac{1}{2}}}$
- $z^2 = tx_j^2 - x_j \xi_j i - \frac{\xi_j^2}{4t} \Rightarrow ix_j \xi_j - tx_j^2 = -z^2 - \frac{\xi_j^2}{4t}$.

Daí,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ix_j \xi_j} e^{-tx_j^2} dx_j = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \int_{\Gamma} e^{-z^2 - \frac{\xi_j^2}{4t}} dz = \frac{e^{-\frac{\xi_j^2}{4t}}}{t^{\frac{1}{2}}} \int_{\Gamma} e^{-z^2} dz$$

onde

$$\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C}; I_m(z) = -\frac{\xi_j}{2t^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

Mas, deformando Γ no eixo real, teremos

$$\int_{\Gamma} e^{-z^2} dz = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \pi^{\frac{1}{2}}$$

Daí $\int_{\mathbb{R}} e^{ix_j \xi_j} e^{-tx_j^2} dx_j = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\xi_j^2}{4t}}$, implica que

$$(e^{-t|x|^2})^\wedge(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{j=1}^n \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\xi_j^2}{4t}} = \frac{1}{(2t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \widehat{f}(t, \xi) \\ &= \widehat{f}(\xi) e^{-t|\xi|^2} \\ &= \widehat{f}(\xi) \left\{ \frac{1}{(2t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} \right\}^\wedge(\xi) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \left\{ f * \left(\frac{1}{(2t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}} \right) \right\}^\wedge(\xi) \end{aligned}$$

Como $(\widehat{f})^\sim = f$ temos

$$f(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy$$

Em uma Variedade Riemanniana M , dizemos que $e : \mathbb{R}^+ \times M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, C^1 na primeira variável C^2 na segunda e na terceira, é um núcleo do calor se satisfaz:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t + \Delta_y)e(t, x, y) = 0 \\ (\partial_t + \Delta_x)e(t, x, y) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \int_M e(t, x, y) f(y) dy = f(x), \forall f \in L^2(M) \end{array} \right.$$

No caso do \mathbb{R}^n , vê-se que $e(t, x, y) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$ é um núcleo do calor.

3.2 Simetria e unicidade do Núcleo de calor

Proposição 3.1 *Sejam $a(t, x, y), b(t, x, y) \in C^2(R^+ \times M \times M)$ satisfazendo $(\partial_t + \Delta_3)a = (\partial_t + \Delta_3)b = 0$ e*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_M a(t, x, y) f(y) dy = \lim_{t \rightarrow 0} \int_M b(t, x, y) f(y) dy = f(x),$$

$\forall f \in C^2(M)$. Então $a(t, x, y) = b(t, x, y)$.

Demonstração: Mostremos primeiro que $a(t, x, y) = a(t, y, x)$. Utilizando a segunda identidade de Green para as funções $a(t', y, w)$ e $a(t - t', x, w)$ na variável w , obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M (a(t - t', x, w) \cdot \Delta_3 a(t', y, w) - a(t', y, w) \Delta_3 a(t - t', x, w)) dw \\ &= \int_M (-\partial_{t'} a(t', y, w) \cdot a(t - t', x, w) - a(t', y, w) \partial_{t'} a(t - t', x, w)) dw \\ &= -\partial_{t'} \int_M a(t', y, w) \cdot a(t - t', x, w) dw. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \left(\partial_{t'} \int_M a(t', y, w) \cdot a(t - t', x, w) \right) dt' \\ &= \lim_{t' \rightarrow t} \int_M a(t', y, w) \cdot a(t - t', x, w) dw - \lim_{t' \rightarrow 0} \int_M a(t', y, w) \cdot a(t - t', x, w) dw \\ &= \lim_{t' \rightarrow 0} \int_M a(t', x, w) \cdot a(t, y, w) dw - \lim_{t' \rightarrow 0} \int_M a(t', y, w) \cdot a(t, x, w) dw \\ &= a(t, y, x) - a(t, x, y) = 0. \end{aligned}$$

Logo, $a(t, x, y) = a(t, y, x)$.

Observe que, neste caso,

$$(\partial_t + \Delta_y)a(t, x, y) = (\partial_t + \Delta_y)a(t, y, x) \Rightarrow (\partial_t + \Delta_x)a(t, x, y) = 0.$$

Agora, considere a integral:

$$\int_0^t \left(\partial_s \int_M a(s, x, w) b(t - s, w, y) dw \right) ds \quad (3.1)$$

Por um lado,

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \left(\partial_s \int_M a(s, x, w) b(t-s, w, y) dw \right) ds = \\
&= \lim_{t' \rightarrow 0} \left[\int_M a(t-t', x, w) b(t', w, y) dw - \int_M a(t', x, w) b(t-t', w, y) dw \right] \\
&= \lim_{t' \rightarrow 0} \left[\int_M b(t', y, w) a(t, x, w) dw - \int_M a(t', x, w) b(t, w, y) dw \right] \\
&= a(t, x, y) - b(t, x, y).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \left(\partial_s \int_M a(s, x, w) b(t-s, w, y) dw \right) ds = \\
&= \int_0^t \left(\int_M [\partial_s a(s, x, w) b(t-s, w, y) + a(s, x, w) \partial_s b(t-s, w, y)] dw \right) ds \\
&= \int_0^t \left(\int_M [-\Delta_w a(s, x, w) b(t-s, w, y) + a(s, x, w) \Delta_w b(t-s, w, y)] dw \right) ds = 0.
\end{aligned}$$

■

3.3 Teorema de Hodge

Teorema 3.1 *Seja (M, g) uma variedade riemanianna compacta e conexa. Existe uma base ortonormal de $L^2(M, g)$ consistindo de autofunções do Laplaciano. Todos os autovalores são positivos, exceto que o autovalor zero tem multiplicidade um. Cada autovalor tem multiplicidade finita, e os autovalores acumulam somente no infinito.*

Demonstração: Para a prova, utilizaremos a existência do núcleo do calor em (M, g) , ou seja, existe $e : \mathbb{R}^+ \times M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, C^1 na primeira variável, C^2 na

segunda e na terceira tal que

$$\begin{cases} (\partial_t + \Delta_y)e(t, x, y) = 0 \\ (\partial_t + \Delta_x)e(t, x, y) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \int_M e(t, x, y)f(y)dy = f(x), \forall f \in L^2(M) \end{cases}$$

Definimos o operador do calor $e^{-t\Delta}$ por $e^{-t\Delta}f(x) = \int_M e(t, x, y)f(y)dy$. Daí, $e^{-t\Delta}f(x)$ é solução para a equação do calor com condição inicial $f(x) \in L^2(M)$. Fazendo $f(t, x) = e^{-t\Delta}f(x)$, teremos:

$$(\partial_t + \Delta_x)f(t, x) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, x) = f(x)$$

Como $e(t, x, y)$ é C^2 em x , temos que, para $f \in L^2(M)$,

$$e^{-t\Delta}f \in C^k(M) \quad k = 1, 2 \Rightarrow e^{-t\Delta} \in H_s(M), \quad s = 1, 2.$$

Daí teremos que, se $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ contido em $L^2(M)$ $\|f_i\|_{L^2} \rightarrow 0$ então $\|e^{-t\Delta}f_i\|_{H_1} \rightarrow 0$.

Logo $e^{-t\Delta} : L^2(M) \rightarrow H_1(M)$ é contínua.

Pelo Teorema de Rellich-Kondrakov, a inclusão $H_1 \xrightarrow{i} H_0$ é compacta.

Daí, a composição

$$H_0 = L^2 \xrightarrow{e^{-t\Delta}} H_1 \xrightarrow{i} H_0 = L^2$$

de um operador compacto com um limitado é compacta.

Além disso, o operador do calor é auto adjunto pois:

$$\begin{aligned} \langle e^{-t\Delta}f, g \rangle &= \int_M \left(\int_M e(t, x, y)f(y)dy \right) g(x)dx = \\ &= \int_M \left(\int_M e(t, x, y)g(x)dx \right) f(y)dy = \langle f, e^{-t\Delta}g \rangle, \end{aligned}$$

pela simetria do núcleo do calor.

Pelo Teorema Espectral para operadores compactos auto-adjuntos em espaços de Hilbert, $L^2(M)$ possui uma base ortonormal de autofunções para o operador $e^{-t\Delta}$ com autovalores $y_i(t) \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$.

Afirmção 3.1 $e^{-t\Delta} \cdot e^{-t'\Delta} = e^{-(t+t')\Delta}$

Demonstração: Supondo sem perda de generalidade $t > s > 0$, temos

$$\begin{aligned} e^{-(t-s)\Delta} e^{-s\Delta} f(x) &= e^{-(t-s)\Delta} \left(\int_M e(s, x, y) f(y) dy \right) (x) \\ &= \int_M e(t-s, x, z) \left(\int_M e(s, z, y) f(y) dy \right) dz \\ &= \int_M \left(\int_M e(t-s, x, z) e(s, z, y) dz \right) f(y) dy. \end{aligned}$$

Logo, $e^{-(t-s)\Delta} e^{-s\Delta}$ possui núcleo:

$$\int_M e(t-s, x, z) e(s, z, y) dz$$

Observe que:

$$(\partial_t + \Delta_x) \left(\int_M e(t-s, x, z) e(s, z, y) dz \right) = 0$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \int_M \left(\int_M e(t-s, x, z) e(s, z, y) dz \right) f(y) dy &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_M e(t-s, x, z) \left(\lim_{t \rightarrow 0} \int_M e(s, z, y) f(y) dy \right) dz \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_M e(t, x, z) f(z) dz \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Pela unicidade do núcleo do calor, teremos

$$e(t, x, y) = \int_M e(t-s, x, z) e(s, z, y) dz \Rightarrow e^{-t\Delta} = e^{-(t-s)\Delta} e^{-s\Delta}.$$

Fazendo $t = t' + s$, teremos:

$$e^{-(t'+s)\Delta} = e^{-t'\Delta} e^{-s\Delta}.$$

□

Daí, temos que $y_i(t) > 0$, pois

$$\langle e^{-t\Delta} f, f \rangle = \langle e^{-t/2\Delta} e^{-t/2\Delta} f, f \rangle = \langle e^{-t/2\Delta} f, e^{-t/2\Delta} f \rangle \geq 0.$$

Daí, obviamente, $y_i(t) \geq 0$. Se, por acaso, $y_i(t) = 0$ para algum i então existiria $f \neq 0$ com $e^{-t\Delta} f = 0$. Daí,

$$0 = \langle e^{-t\Delta} f \rangle = \langle e^{t/2\Delta} f, e^{t/2\Delta} f \rangle = e^{-t/2\Delta} f = 0.$$

Repetindo o argumento, teremos

$$e^{-t/2^n \Delta} f = 0 \forall n \Rightarrow f = \lim_{t \rightarrow 0} e^{-t\Delta} f = 0,$$

absurdo.

Logo, $y_i(t) > 0, \forall i$.

Agora, tomemos uma base ortonormal $\{w_i(t)\} \subset L^2(M)$ tal que $e^{-t\Delta} w_i(t) = y_i(t) w_i(t)$.

Veja que $w_i(t)$ é independente de t , pois a equação

$$e^{-s\Delta} \cdot e^{-t\Delta} = e^{-(s+t)\Delta} = e^{-(t+s)\Delta} = e^{-t\Delta} \cdot e^{-s\Delta}$$

implica que o operador $e^{-t\Delta}$ podem ser simultaneamente diagonalizados $\forall t$.

Daí,

$$e^{-t\Delta} w_i = y_i(t) w_i \Rightarrow 0 = (\partial_t + \Delta)(e^{-t\Delta} w_i) = (\partial_t + \Delta)(y_i(t) w_i) = \dot{y}_i w_i + y_i \Delta w_i.$$

Como $y_i > 0$, podemos escrever:

$$\Delta w_i = -\frac{\dot{y}_i}{y_i} w_i.$$

Como Δw_i e w_i não dependem de t , temos que

$$-\frac{\dot{y}_i}{y_i} = C \text{ não depende de } t \Rightarrow y_i(t) = C' e^{-\lambda_i t} \text{ algum } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Quando $t \rightarrow 0$, $e^{-t\Delta}$ vai para a identidade $\Rightarrow y_i(t) \rightarrow 1$ quando $t \rightarrow 0$. Logo, $C' = 1$ e $\lambda_i \geq 0$. Logo, $y_i(t) = e^{-\lambda_i t}$.

Daí, teremos:

$$\Delta w_i = -\frac{\dot{y}_i}{y_i} w_i \Rightarrow \Delta w_i = -\frac{\lambda_i e^{-\lambda_i t}}{e^{-\lambda_i t}} w_i \Rightarrow \Delta w_i = \lambda_i w_i.$$

Agora, utilizando a primeira identidade de Green, temos:

$$\int_M (\langle \nabla f, \nabla g \rangle - f \Delta g) dM = \int_{\partial M} f \frac{\partial g}{\partial \nu} d(\partial M) \Rightarrow \int_M (\langle \nabla f, \nabla f \rangle - f \Delta f) dM = 0.$$

Se $0 \in \text{spec}(M, g)$, então

$$\Delta f = 0 \Rightarrow \int_M \langle \nabla f, \nabla f \rangle dM = 0 \Rightarrow \nabla f \equiv 0.$$

Como M é conexa, teremos $f \equiv C$.

Logo, o auto espaço associado a zero possui dimensão 1.

Como $e^{-t\Delta}$ é compacto, seus autovalores $e^{-t\lambda_i}$ possuem multiplicidade finita e acumulam somente no zero. Logo, podemos listar os autovalores de Δ (repetindo os autovalores de acordo com as multiplicidades) como $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \dots \uparrow \infty$.

3.4 Construção do Núcleo do Calor I

Considere a expressão formal: $\sum_i e^{-\lambda_i t} w_i(x) w_i(y)$,

Onde w_i é uma base ortonormal para $L^2(M, g)$ que consiste de autofunções do laplaciano, e os λ_i são os respectivos autovalores.

Formalmente, teríamos, escrevendo $f = \sum a_i w_i$, $a_i = \int_M f w_i$

$$(1) \int_M \left(\sum_i e^{-\lambda_i t} w_i(x) w_i(y) \right) f(y) dy = \sum_i e^{-\lambda_i t} w_i(x) \int_M w_i(y) f(y) dy = \sum_i e^{-\lambda_i t} w_i(x) a_i.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \int_M \left(\sum_i e^{-\lambda_i t} w_i(x) w_i(y) \right) f(y) dy &= \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \sum_i e^{-\lambda_i t} w_i(x) a_i = \sum_i w_i a_i = f(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (\partial_t + \Delta_y) \left(\sum_i e^{-\lambda_i t} w_i(x) w_i(y) \right) &= \\ \sum_i -\lambda_i e^{-\lambda_i t} w_i(x) w_i(y) + \sum_i e^{-\lambda_i t} \lambda_i w_i(x) w_i(y) &= 0. \end{aligned}$$

$$(3) \quad (\partial_t + \Delta_x) \left(\sum_i e^{-\lambda_i t} w_i(x) w_i(y) \right) = 0.$$

Logo, $\sum_i e^{-\lambda_i t} w_i(x) w_i(y)$ seria um forte candidato para o núcleo do calor.

Provaremos, de fato, que este é o caso.

Proposição 3.2 *Assumamos que existe $e(t, x, y) \in C^2(\mathbb{R}^+ \times M \times M)$ satisfazendo, para todo $f \in L^2(M)$,*

$$\begin{cases} (\partial_t + \Delta_y) e(t, x, y) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \int_M e(t, x, y) f(y) dy = f(x). \end{cases}$$

Então temos a convergência pontual $e(t, x, y) = \sum e^{-\lambda_i t} \phi_i(x) \phi_i(y)$, onde ϕ_i é uma base ortonormal de $L^2(M)$ satisfazendo $\Delta \phi_i = \lambda_i \phi_i$.

Demonstração: Seja ϕ_i como no enunciado. Fixando t e x e escrevendo $e(t, x, \cdot) = \sum f_i(t, x) \phi_i(\cdot)$ na variável y , temos que $f_i(t, x) = \int_M e(t, x, y) \phi_i(y) dy$, desse

modo

$$\begin{aligned}
 \partial_t f_i(t, x) &= \int_M \partial_t e(t, x, y) \phi_i(y) dy \\
 &= - \int_M \Delta_y e(t, x, y) \phi_i(y) dy \quad (\text{Segunda Identidade de Green}) \\
 &= - \int_M e(t, x, y) \Delta_y \phi_i(y) dy \\
 &= -\lambda_i \int_M e(t, x, y) \phi_i(y) dy \\
 &= -\lambda_i f_i(t, x) \\
 \Rightarrow f_i(t, x) &= k_i(x) e^{-\lambda_i t} \\
 \Rightarrow c(t, x, \cdot) &= \sum k_i(x) e^{-\lambda_i t} \phi_i(\cdot)
 \end{aligned}$$

Expressando $f \in L^2(M)$ como $f = \sum a_i \phi_i$, $a_i = \int_M f \phi_i$, temos

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_M e(t, x, y) f(y) dy \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_M \sum_i e^{-\lambda_i t} k_i(x) \phi_i(y) f(y) dy \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \sum_i e^{-\lambda_i t} k_i(x) \int_M \phi_i(y) f(y) dy \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \sum_i e^{-\lambda_i t} k_i(x) a_i \\
 &= \sum_i k_i(x) a_i
 \end{aligned}$$

Logo, $k_i(x) = \phi_i(x) \Rightarrow \sum_i e^{-\lambda_i t} \phi_i(x) \phi_i(y) \rightarrow e(t, x, y)$, na variável y , para t, x fixados. Disso resulta que existe uma sequência $i_k \rightarrow \infty$ tal que

$$\sum_0^{i_k} e^{-\lambda_i t} \phi_i(x) \phi_i(y) \rightarrow e(t, x, y)$$

Pela Identidade de Parseval

$\langle x, y \rangle = \sum_{\alpha} \langle x, x_{\alpha} \rangle \langle x_{\alpha}, y \rangle, \{x_{\alpha}\} \text{ base ortonormal}$
--

temos

$$\begin{aligned} \langle c(\frac{t}{2}, x, \cdot), c(\frac{t}{2}, x', \cdot) \rangle &= \sum_i \left(\int_M e(\frac{t}{2}, x, y) \phi_i(y) dy \right) \cdot \left(\int_M e(\frac{t}{2}, x', y) \phi_i(y) dy \right) \\ &= \sum_i e^{-\lambda_i \frac{t}{2}} \phi_i(x) e^{-\lambda_i \frac{t}{2}} \phi_i(x') \\ &= \sum_i e^{-\lambda_i t} \phi_i(x) \phi_i(x') \end{aligned}$$

Mas $\sum_i e^{-\lambda_i t} \phi_i(x) \phi_i(x')$ converge pontualmente, com limite contínuo em t, x, x' , pois $\langle e(\frac{t}{2}, x, \cdot), e(\frac{t}{2}, x', \cdot) \rangle$ é contínuo.

Logo $\sum_i e^{-\lambda_i t} \phi_i(x) \phi_i(y) \rightarrow e(t, x, y)$ pontualmente, $\forall t, x, y$.

3.5 Construção do Núcleo do Calor II

Sabemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall x \in M$, a exponencial exp_x leva difeomorficamente $B_\varepsilon(0) \subset T_x M$ em uma vizinhança V_x de x . Para $y \in V_x$, seja $r(x, y)$ o comprimento da geodésica radial ligando x a y . Lembre que $r(x, y) < \varepsilon$. Definamos então uma vizinhança U_ε da diagonal a $M \times M$ por $U_\varepsilon = \{(x, y) \in M \times M; y \in V_x\}$ e $G : (R^+ \times U_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ por $G(t, x, y) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x, y)}{4t}}$, $G \in C^\infty(R^+ \times U_\varepsilon)$. (Perceba que G é bem parecida com o núcleo do calor em \mathbb{R}^n).

Fixemos $k \in Z^+$ e consideremos

$$S = S_k = S_k(t, x, y) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x, y)}{4t}} (u_0(x, y) + \dots + u_k(x, y)t^k)$$

para certas funções $u_i \in C^\infty(U_\varepsilon)$.

Desejamos que $(\partial t + \partial y)S = 0$.

Temos:

- $$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(-\frac{n}{2}\right) t^{-\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{r^2}{4t}} + (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \frac{r^2}{4t^2} e^{-\frac{r^2}{4t}} (u_0 + \dots + u_k t^k) \\ &\quad + (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4t}} (u_1 + 2u_2 t + \dots + k u_k t^{k-1}) \\ &= G \left[\left(-\frac{n}{2t} + \frac{r^2}{4t^2}\right) (u_0 + \dots + u_k t^k) + (u_1 + 2u_2 t + \dots + k u_k t^{k-1}) \right] \end{aligned}$$
- $\Delta_y S = (\Delta_y G)(u_0 + \dots + u_k t^k) - 2\langle dG, d(u_0 + \dots + u_k t^k) \rangle + G\Delta(u_0 + \dots + u_k t^k)$

Como G é função de r , temos:

$$\Delta G = -\frac{\partial G}{\partial r^2} - \frac{\partial G}{\partial r} \left(\frac{D'}{D} + \frac{n-1}{r} \right)$$

Onde $D = \det(D \exp_p)$. A prova dessa fórmula pode ser encontrada em [1] e [2]. Mas

$$\frac{\partial G}{\partial r} = -\frac{2r}{4t} G = -\frac{r}{2t} G \Rightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} = -\frac{1}{2t} G = \frac{r}{2t} \left(-\frac{r}{2t} G \right) = -\frac{1}{2t} G + \frac{r^2}{4t^2} G$$

Daí

$$\Delta G =$$

$$\frac{1}{2t} G - \frac{r^2}{4t^2} G + \frac{r}{2t} G \left(\frac{D'}{D} + \frac{n-1}{r} \right) =$$

$$\frac{r}{2t} \frac{D}{D'} G + G \left(\frac{1}{2t} - \frac{r^2}{4t^2} + \frac{n-1}{2t} \right) =$$

$$\frac{r}{2t} \frac{D}{D'} G + G \left(\frac{n}{2t} - \frac{r^2}{4t^2} \right)$$

donde $D' = \partial_r D$

- $\langle dG, d(u_0 + \dots + u_k t^k) \rangle =$

$$\left\langle \frac{\partial G}{\partial r} dr + \frac{\partial G}{\partial \theta} d\theta, \frac{\partial u_0}{r} dr + \frac{\partial u_0}{\partial \theta} d\theta + \dots + t^k \frac{\partial u_k}{\partial r} dr + t^k \frac{\partial u_k}{\partial \theta} d\theta \right\rangle =$$

$$\left\langle \frac{\partial G}{\partial r} dr, \frac{\partial u_0}{\partial r} dr + \dots + t^k \frac{\partial u_k}{\partial r} dr \right\rangle =$$

$$\frac{\partial G}{\partial r} \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} + \dots + t^k \frac{\partial u_k}{\partial r} \right) =$$

$$-\frac{r}{2t} \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} + \dots + t^k \frac{\partial u_k}{\partial r} \right) G$$

Logo,

$$(\partial t + \Delta y)S =$$

$$G \left[u_1 + 2u_2 t + \dots + k u_k t^{k-1} + \frac{r}{t} \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} + \dots + \frac{t^k \partial u_k}{\partial r} \right) + \frac{r}{2t} \frac{D'}{D} (u_0 + \dots + t^k u_k) \right] =$$

$$G \left[\frac{1}{t} \left(\frac{r}{2} \frac{D'}{D} u_0 + r \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) + \sum_{i=1}^k t^{i-1} \left(\left(\frac{r}{2} \frac{D'}{D} + i \right) u_i + r \frac{\partial u_i}{\partial r} + \Delta_y u_{i-1} \right) + t^k \Delta_y u_k \right]$$

Gostaríamos que todos os termos contendo potências de t desaparecessem, exceto $t^k \Delta_y M_k$. Para isso teríamos:

$$r \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{r}{2} \frac{D'}{D} u_0 = 0$$

e

$$r \frac{\partial u_i}{\partial r} + \left(\frac{r}{2} \frac{D'}{D} + i \right) u_i + \Delta_y u_i = 0$$

Da primeira equação temos

$$\frac{u'_0}{u_0} = \frac{-1}{2} \frac{D'}{D} \Rightarrow (\ln u_0)' = (\ln D^{-\frac{1}{2}})' \Rightarrow \ln u_0 = \ln D^{-\frac{1}{2}} + C(\theta) \Rightarrow u_0 = k D^{-\frac{1}{2}}$$

onde $k = k(\theta)$ não depende de r . Fazendo $k \equiv 1$, temos

$$u_0(x, y) = \frac{1}{\sqrt{D(\exp_x^{-1}(y))}} = \frac{1}{\sqrt{\det d \exp_x(\exp_x^{-1} y)}}$$

Em particular, $u_0(x, x) = 1$.

Para encontrar os outros u_i , resolvamos esta versão mais simples da segunda equação:

$$\begin{aligned} r \frac{\partial u_i}{\partial r} + \frac{r}{2} \left(\frac{D'}{D} + i \right) u_i &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial r} + \left(\frac{1}{2} \frac{D'}{D} + \frac{i}{r} \right) u_i &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial h} (D^{\frac{1}{2}} r^i) + \overbrace{\frac{1}{2} \frac{D'}{D} + \frac{i}{r}}^{\frac{d}{dr}(D^{\frac{1}{2}} r^i)} u_i D^{\frac{1}{2}} r^i &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} (u_i D^{\frac{1}{2}} r^i) &= 0 \\ \Rightarrow u_i &= k(\theta) r^{-i} D^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Se exigirmos que $u_i = k(r) r^{-i} D^{-\frac{1}{2}}$ e substituirmos essa expressão na segunda equação teremos:

$$\begin{aligned} r \frac{\partial}{\partial r} (k r^{-i} D^{\frac{1}{2}}) + \left(\frac{r}{2} \frac{D'}{D} + i \right) k r^{-i} D^{-\frac{1}{2}} + \Delta_y u_{i-1} &= 0 \\ \Rightarrow r \left(k' r^{-i} D^{-\frac{1}{2}} + k \left(-i r^{-i-1} D^{-\frac{1}{2}} - \frac{r^{-i}}{2} \frac{D'}{D^{-\frac{3}{2}}} \right) \right) + \left(\frac{r}{2} \frac{D'}{D} + i \right) k r^{-i} D^{-\frac{1}{2}} + \Delta_y u_{i-1} &= 0 \\ \Rightarrow k' r^{-i+1} D^{-\frac{1}{2}} = i k r^{-i} D^{-\frac{1}{2}} + \frac{k r^{-i+1} D'}{2 D^{-\frac{3}{2}}} - \frac{k r^{-i+1} D'}{2 D^{-\frac{3}{2}}} + i k r^{-i} D^{-\frac{1}{2}} + \Delta_y u_{i-1} &= 0 \\ \Rightarrow k' &= -r^{i-1} D^{\frac{1}{2}} \Delta_y u_{i-1} \\ \Rightarrow k &= \int_0^r D^{\frac{1}{2}}(x(s)) \Delta_y u_{i-1}(x(s), y) s^{i-1} ds + \alpha \end{aligned}$$

Pois, se $x(s)$ é a geodésica com velocidade unitária ligando x a y , $s \in [0, r]$, $\Delta_y u_{i-1}$ é função de r ao longo dessa geodésica. Além disso, como $u_i = k(r) r^{-i} D^{-\frac{1}{2}}$ temos que, para $u_i(x, x)$ existir, $\lim_{r \rightarrow 0} k(r) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

Substituindo esta equação em $u_i = dr^{-i}D^{-\frac{1}{2}}$, teremos:

$$u_i(x, y) = -r^{-i}(x, y)D^{-\frac{1}{2}}(y) \int_0^r D^{\frac{1}{2}}(x(s))\Delta_y u_{i-1}(x(s), y)s^{i-1}ds$$

Definindo u_i indutivamente. Por essa equação, teremos

$$(\partial t + \Delta_y)s = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{r^2}{4t}}t^k\Delta u_k$$

Indutivamente também teremos $u_i \in C^\infty(u_\epsilon)$. Agora, extendemos S para uma função em $M \times M$.

Para tanto, considere a "bump function" $\eta \in C^\infty(M \times M)$ com $\eta(x, y) \in [0, 1]$, $\eta \equiv 0$ em $(M \times M) - U_\epsilon$ e $\eta \equiv 1$ em $U_{\frac{\epsilon}{2}}$. Fazemos $H_k \equiv \eta S_k \in C^\infty(R^+ \times M \times M)$

- $(R^0 = R^+ \cup 0)$

Definição 3.1 Um "parametrix" para o operador do calor $\partial t + \Delta_y$ é uma função $H(t, x, y) \in C^\infty(R^+ \times M \times M)$ tal que:

- $(\partial t + \Delta_y)H \in C^0(R^0 \times M \times M)$
- $\lim_{t \rightarrow 0} \int_M H(t, x, y)f(y)dy = f(x)$.

Lema 3.2 H_k é um parametrix se $e > \frac{n}{2}$. Além disso, $(\partial t + \Delta_y)H_k \in C^l(R^0 \times M \times M)$ se $k > l + \frac{n}{2}$.

Demonstração: Mostraremos primeiramente que $(\partial t + \Delta_y)H_k$ se estende para $C^l(R^0 \times M \times M)$ se $k > l + \frac{n}{2}$.

- Temos $H \equiv 0$ em $R^+ \times (M \times M - U_\epsilon)$. Neste caso, $(\partial t + \partial_y)H$ se estende claramente em $C^l(R^0 \times M \times M)$,
- Em $R^+ \times U_{\frac{\epsilon}{2}}$,

$$(\partial t + \Delta_y)H_k = (\partial t + \Delta_y)S_k = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}t^k e^{-\frac{r^2}{4t}}\Delta H_k \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow 0$, pois $k > \frac{n}{2}$, $e^{-\frac{r^2}{4t}} < 1$.

Observe que as derivadas de ordem $0, 1, \dots, l$ desta função são todas contínuas e

também se estendem quando $t \rightarrow 0$, daí $(\partial t + \Delta_y)$ se prolonga a uma função em $C^l(R^0 \times U_{\frac{\epsilon}{2}})$.

• Em $R^{-1} \times U_{\epsilon} - U_{\frac{\epsilon}{2}}$, temos:

$$\begin{aligned} (\partial t + \Delta_y)H_k &= (\partial t + \Delta_y)\eta S_k = \eta \partial t S_k + \eta \Delta_y S_k + \Delta_\eta - 2\langle d\eta, dS_k \rangle \\ &= \eta(\partial t + \Delta_y)S_k - 2\langle d\eta, dS_k \rangle + (\Delta_y, \eta)S_k. \end{aligned}$$

Veja que

$$\begin{aligned} \eta(\partial t + \Delta_y)S_k &= \eta(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} t^k e^{-\frac{r^2}{4t}} \Delta u_k \\ -2\langle d\eta, dS_k \rangle &= -2 \sum \frac{\partial \eta}{\partial y_i} \frac{\partial S_k}{\partial y_j} g_{ij}, \quad \frac{\partial S_k}{\partial y_j} = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \left(\frac{-r}{2t} \right) \frac{\partial r}{\partial y_j} \\ (\Delta_y \eta)S_k &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} (\Delta_y \eta)(u_0 + \dots + u_k t^k) \end{aligned}$$

Logo

$$(\partial t + \Delta_y)H_k = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \varphi(t, x, y), \quad \varphi(t, x, y) \in C^\infty(R^+ \times U_\epsilon - U_{\frac{\epsilon}{2}})$$

Como $r > \frac{\epsilon}{2}$, temos que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-r^2}}{4t} t^{-k} = 0 \quad \forall k > 0$

$\Rightarrow (\partial t + \Delta_y)H_k \in C^l(R^0 \times U_\epsilon - U_{\frac{\epsilon}{2}})$

$\Rightarrow (\partial t + \Delta_y)H_k \in C^l(R^0 \times M \times M)$ com $(\partial t + \Delta_y)H_k = 0$ em $\{0\} \times M \times M$.

Agora devemos mostrar que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_M (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \eta(x, y) (u_0(x, y) + \dots + t^k u_k(x, y)) f(y) dy = f(x)$$

Mas

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow 0} \int_M (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \eta(x, y) u_i(x, y) f(y) dy \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{B_\epsilon(x)} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \eta(x, y) u_i(x, y) f(y) dy \\ &+ \lim_{t \rightarrow 0} \int_{M - B_\epsilon(x)} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \eta(x, y) u_i(x, y) f(y) dy \end{aligned}$$

Mas o limite na última parcela da soma anterior é 0, pois $r > \frac{\epsilon}{2}$.

Fazendo a substituição $y = \exp_x(v)$ teremos

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \int_{B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \subset M} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \eta(x, y) u_i(x, y) f(y) dy \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{B_{\frac{\epsilon}{2}}(0) \subset T_x(M)} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(0,v)}{4t}} u_i(x, \exp_x(v)) f(\exp_x(v)) \det(\exp_x(v)) dv_1 \dots dv_n \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{T_x(M)} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(0,v)}{4t}} u_i(x, \exp_x(v)) f(\exp_x(v)) \det(\exp_x(v)) dv_1 \dots dv_n \end{aligned}$$

Onde aqui, extendemos $u_i = 0$ fora de $B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$.

Identificando $T_x M$ com \mathbb{R}^n . Observe que $(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}}$ é o núcleo do calor no \mathbb{R}^n . Logo, quando $t \rightarrow 0$ a última integral acima converge para:

$$u_i(x, \exp_x(0)) f(\exp_x(0)) \det(\exp_x(0)) = u_i(x, x) f(x)$$

Como $u_0(x, x) = 1$, temos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_M (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \eta(x, y) u_0(x, y) f(y) dy = f(x)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_M (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \eta(x, y) t^i u_i(x, y) f(y) dy = 0$$

o que completa a demonstração.

Observação: Da mesma forma, poderíamos mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_M (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \eta(x, y) (u_0(x, y) + \dots + t^k u_k(x, y)) f(x) dx = f(y)$$

3.6 Construção do Núcleo do Calor (III)

Para $A, B \in C^0(\mathbb{R}^0 \times M \times M)$, definimos:

$$(A * B)(t, x, y) = \int_0^t \left(\int_M A(\theta, x, q) B(t - \theta, q, y) dq \right) d\theta \in C^0(\mathbb{R}^0 \times M \times M)$$

$$A^{*\lambda} = A * \dots * A \quad \lambda \text{ vezes}$$

Lema 3.3 *Seja $K_k = (\partial_t + \Delta_y)H_k$. Então $Q_k = \sum_1^\infty (-1)^{\lambda+1} K_k^{*\lambda}$ existe e está em $C^l(R^0 \times M \times M)$ se $K > l + \frac{n}{2}$. Além disso, dado $T > 0$, existe $C = C(T)$ tal que $|Q_k(t, x, y)| \leq Ct^{k-\frac{n}{2}} \quad \forall t \in [0, T]$.*

Demonstração: Escrevendo $K_k = (\partial_t + \Delta_y)(\eta S_k)$ teremos

$$|K_k| = |\partial_t + \Delta_y(\eta S_k)| = |\eta(\partial_t + \partial_y)S_k - (\Delta_y \eta)S_k| \leq |\eta(\partial_t + \partial_y)S_k| + |(\Delta_y \eta)S_k|$$

$$\text{Mas } |\eta(\partial_t + \partial_y)S_k| \leq t^{k-\frac{n}{2}} |\eta(4\pi)^{-\frac{n}{2}} \Delta u_k| \leq t^{k-\frac{n}{2}} A_1$$

$$|\partial_y \eta S_k| \leq t^{k-\frac{n}{2}} \left| \Delta_y \eta e^{-\frac{r^2}{4t}} \left(\frac{u_0}{t^k} + \dots + u_k \right) \right| \leq t^{k-\frac{n}{2}} A_2(T)$$

Lembrando que $(M \times M) - U_\epsilon, \eta \equiv 0 \Rightarrow \Delta \eta = 0$; em $U_{\frac{\epsilon}{2}}, \eta \equiv 1 \Rightarrow \eta \equiv 0$; e em $U_\epsilon - U_{\frac{\epsilon}{2}}, r \geq U_{\frac{\epsilon}{2}} \Rightarrow |K_k| \leq A(T)t^{k-\frac{n}{2}} \leq A(T)T^{k-\frac{n}{2}} \equiv B$.

Provemos que

$$|K_k^{*\lambda}(t, x, y)| \leq \frac{A' B^{\lambda-1} V^{\lambda-1} t^{k-\frac{n}{2}+\lambda-1}}{(k-\frac{n}{2})(k-\frac{n}{2}+1)\dots(k-\frac{n}{2}+\lambda-1)} = a_\lambda$$

onde $V = \text{vol}M$ e $A' = (k - \frac{n}{2})A$

Para $\lambda = 1$, já temos o resultado. Suponha que o resultado vale para $\lambda - 1$. Daí:

$$|K_k^{*\lambda}(t, x, y)| \leq$$

$$\int_0^t \left(\int_M |K_k^{*(\lambda-1)}(\theta, x, q)| |K_k(t-\theta, q, y)| dq \right) d\theta \leq$$

$$\int_0^t \left(\int_M \frac{AB^{\lambda-2} V^{\lambda-2} \theta^{k-\frac{n}{2}+\lambda-2}}{(k-\frac{n}{2}+1)\dots(k-\frac{n}{2}+\lambda-2)} B dq \right) d\theta =$$

$$\frac{AB^{\lambda-1} V^{\lambda-1}}{(k-\frac{n}{2})\dots(k-\frac{n}{2}+\lambda-2)} \int_0^t \theta^{k-\frac{n}{2}+\lambda-2} d\theta =$$

$$\frac{AB^{\lambda-1} V^{\lambda-1}}{(k-\frac{n}{2})\dots(k-\frac{n}{2}+\lambda-2)} \frac{t^{k-\frac{n}{2}+\lambda-1}}{k-\frac{n}{2}+\lambda-1}$$

Agora observe que

$$\frac{|a^{\lambda+1}|}{|a^\lambda|} = \frac{BVt}{k - \frac{n}{2} + \lambda - 1} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{\lambda+1}}{a_\lambda} \right) = 0, \quad t \in [0, T]$$

Pelo teste de Weierstrass $\sum (-1)^{\lambda+1} K_k^{*\lambda}$ converge uniforme, para $t \in [0, T]$. Isso implica que $\sum (-1)^{\lambda+2} K_k^{*\lambda}$ é contínua, com $t \in [0, T]$.

Aumentando sempre T , temos que

$$\sum (-1)^{\lambda+1} K_k^\lambda \in C^0(R^0 \times M \times M)$$

De maneira análoga, estabelecemos majorações para $|D^S K_k^{*\lambda}|$ onde S é um multiíndice de ordem $\leq l$, e deduzimos que $\sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda+1} D^S K_k^{*\lambda}$ converge para uma função contínua ($D^S Q_k$).

Lema 3.4

- (i) Se $P \in C^0(R \times M \times M)$, então $P * H_k \in C^l(R^+ \times M \times M)$, se $k > l + \frac{n}{2}$
- (ii) $(\partial t + \Delta)(P * H_k) = P + P * H_k$ se $k > 2 + \frac{n}{2}$.

Demonstração: φ está bem definida e é contínua em $\{(t, x, y, \theta) \in R^0 \times M \times M \times R^0; \theta \leq t\}$.

Devemos mostrar que φ se estende continuamente em $\{(t, x, y, \theta) \in R^0 \times M \times M \times R^0; \theta \leq t\}$ com $\varphi(t, x, y, t) = P(t, x, y)$.

Suponha que t, θ permaneçam limitados em $[0, T]$.

Escrevemos $\tau = t - \theta \Rightarrow \theta = t - \tau$

$$\varphi(t, x, y, \theta) = \int_M H_k(\tau, q, y) P(t - \tau, x, q) dq$$

Mas

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_M H_k(\tau, q, y) P(t - \tau, x, q) dq = P(t, x, y)$$

Pois

$$\begin{aligned} & \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_M H_k(\tau, q, y) P(t - \tau, x, q) dq = P(t, x, y) \\ \Rightarrow & \text{ Dado } \epsilon > 0, \exists \delta_1; \tau \in (0, \delta_1) \Rightarrow \left| \int_M H_k(\tau, q, y) P(t, x, q) dq - P(t, x, q) dq \right| < \frac{\epsilon}{2} \\ \Rightarrow & \exists \delta_2 > 0; t' \in (t - \delta_2, t + \delta_2) \\ \Rightarrow & \left| \int_M H_k(\tau, q, y) P(t', x, q) dq - P(t', x, q) dq - \int_M H_k(\tau, q, y) P(t, x, q) dq - P(t, x, q) dq \right| \end{aligned}$$

Se $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ então, se $t' \in (t - \delta, t + \delta)$ e $\tau \in (0, \delta)$ temos:

$$\left| \int_M H_k(\tau, q, y) P(t', x, q) dq - P(t, x, y) \right| < \epsilon$$

Em particular, se $t' = t - \tau$,

$$\left| \int_M H_k(\tau, q, y) P(t - \tau, x, q) dq - P(t, x, y) \right| < \epsilon$$

Logo, $P * H_k$ está definida em $R^0 \times M \times M$ e é contínua.

Para provar que $P * H_k \in C^l(R^0 \times M \times M)$,

Definimos a função

$$\varphi^S(t, x, y, \theta) = \int_M P(\theta, x, q) D_p^S H_k(q, p, t - \theta) dq$$

e provamos a continuidade em $\theta = t$.

(ii) A regra de Leibniz:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha) dx &= \frac{db}{d\alpha}(\alpha) f(b(\alpha), \alpha) - \frac{da}{d\alpha}(\alpha) f(a(\alpha), \alpha) \\ &+ \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, \alpha) \end{aligned}$$

nos dá:

$$\begin{aligned}
(\partial t + \Delta_y)(P * H_k) &= (\partial t + \Delta_y) \int_0^t \left(\int_M P(\theta, x, q) H_k(t - \theta, q, y) dq \right) d\theta \\
&= \lim_{s \rightarrow t} \int_M P(s, x, q) H_k(t - s, q, y) dq \\
&\quad + \int_0^t \left(\int_M P(\theta, x, q) \partial t H_k(t - \theta, q, y) dq \right) d\theta \\
&\quad + \int_0^t \left(\int_M P(\theta, x, q) \Delta_y H_k(t - \theta, q, y) dq \right) d\theta \\
&= P(t, x, y) + \int_0^t \left(\int_M P(\theta, x, q) \overbrace{(\partial t + \Delta_y) H_k}^{K_k}(t - \theta, q, y) dq \right) d\theta \\
&= P + P * K_k.
\end{aligned}$$

■

Teorema 3.5 *Fazendo $e(t, x, y) = H_k(t, x, y) - Q_k * H_k(t, x, y)$ então $e(t, x, y) \in C^\infty(R^+ \times M \times M)$ é independente de k , se $k > 2 + \frac{n}{2}$ e é o núcleo do calor.*

Demonstração: Como $k > 2 + \frac{n}{2}$, $e(t, x, y)$ é, pelo menos, C^2 . Daí:

$$\begin{aligned}
(\partial t + \Delta_y)e(t, x, y) &= (\partial t + \Delta_y)(H_k - Q_k * H_k) \\
&= K_k - Q_k - Q_k * H_k \\
&= K_k - \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda+1} K_k^{*\lambda} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda+1} K_k^{*\lambda} * K_k \\
&= K_k - \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda+1} K_k^{*\lambda} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda+2} K_k^{*(\lambda+1)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \int_M e(t, x, y) f(y) dy &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_M H_k(t, x, y) f(y) dy \\ &\quad - \lim_{t \rightarrow 0} \int_M (Q_k * H_k)(t, x, y) f(y) dy \\ &= f(x) - \lim_{t \rightarrow 0} \int_M (Q_k * H_k)(t, x, y) f(y) dy \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \int_M (Q_k * H_k)(t, x, y) f(y) dy &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_M \left(\int_0^t \left(\int_M Q_k(\theta, x, q) H_k(t - \theta, q, y) dq \right) d\theta \right) f(y) dy \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_M \left(\int_0^t \theta^{k - \frac{n}{2}} \left(\int_M R_k(\theta, x, q) H_k(t - \theta, q, y) f(y) dq \right) d\theta \right) dy \end{aligned}$$

Observe que $Q_k \leq t^{k - \frac{n}{2}} A \Rightarrow R_k = \frac{Q_k}{t^{k + \frac{n}{2}}} \leq A(T)$ é limitado.

Mas, para $t, \theta \in [0, T]$, $\tau = t - \theta$,

$$\begin{aligned} \left| \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_M R_k(\theta, x, q) H_k(t - \theta, q, y) dq \right| &= \left| \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_M H_k(\theta, q, y) R_k(t - \theta, x, q) dq \right| \\ &= |R_k(t, x, y)| \\ &\leq A \end{aligned}$$

tal integral é limitada, para $\theta, t \in [0, T]$.

Daí

$$\begin{aligned} \left| \lim_{t \rightarrow 0} \int_M \int_0^t \theta^{k - \frac{n}{2}} \int_M R_k(\theta, x, q) H_k(t - \theta, q, y) f(y) dq d\theta dy \right| &\leq \left| \lim_{t \rightarrow 0} \int_M \left(\int_0^t C \theta^{k - \frac{n}{2}} d\theta \right) dy \right| \\ &= \left| \lim_{t \rightarrow 0} \int_M \frac{C t^{k - \frac{n}{2} + 1}}{k - \frac{n}{2} + 1} dy \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} C t^{k - \frac{n}{2} + 1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{t \rightarrow 0} \int_M e(t, x, y) f(y) dy = f(x)$. Daí, $e(t, x, y)$ é o núcleo do calor e, pela unicidade, não depende de k .

Além disso $H_k - Q_k * H_k \in C^{k-\frac{n}{2}}(R^+ \times M \times M) \quad \forall \quad k$, que implica que $e(t, x, y) \in C^\infty(R^+ \times M \times M)$.

Chapter 4

A Expansão Assintótica do Núcleo do Calor

Lema 4.1 Se $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \text{spec}(M, g)$ então $\sum e^{-\lambda_i t} = \int_M e(t, x, x) dx$.

Demonstração: $\int_M e(t, x, x) dx = \int_M \sum_i e^{-\lambda_i t} \phi_i(x)^2 dx = \sum_i e^{-\lambda_i t} \int_M \phi_i(x)^2 dx = \sum e^{-\lambda_i t}$

■

Definição: Escrevemos $A(t) \sim \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k t^k$ se $\forall N \geq k_0$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(t) - \sum_{k=k_0}^N b_k t^k}{t^N} = 0$$

A soma $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k t^k$ é chamada expansão assintótica de $A(t)$.

Proposição 4.1

$$e(t, x, x) \sim (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x, x) t^k.$$

Demonstração: $e(t, x, x) = (H_k - Q_k * H_k)(t, x, x)$ para $k \gg 0$. Como $|Q_k| \leq Ct^{k-\frac{n}{2}}$, temos:

$$\begin{aligned} (4\pi t)^{\frac{n}{2}} |Q_k * H_k| &= (4\pi t)^{\frac{n}{2}} \int_0^t \theta^{k-\frac{n}{2}} \left(\int_M R_k(\theta, x, q) H_k(t-\theta, q, y) dq \right) dt \\ &\leq (4\pi t)^{\frac{n}{2}} \int_0^t \theta^{k-\frac{n}{2}} C d\theta = C_1 t^{k+1} \end{aligned}$$

Como $(4\pi t)^{\frac{n}{2}} H_k(t, x, x) = u_0(x, x) + \dots + u_k(x, x)t^k$, então $(4\pi t)^{\frac{n}{2}} e(t, x, x) = u_0(x, x) + \dots + u_k(x, x)t^k + R(t, x)$.

Com $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t, x)}{t^k} = 0$

■

Teorema 4.2 $\sum_i e^{-\lambda_i t} \sim (4\pi t)^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ onde $a_k = \int_M u_k(x, x) dx$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} \sum_i e^{-\lambda_i t} &= \int_M e(t, x, x) dx \\ &\sim \int_M (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \sum_k u_k(x, x) t^k dx \\ &\sim (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \sum_k \left(\int_M u_k(x, x) dx \right) t^k \end{aligned}$$

■

Corolário 4.3 Se M^m e N^n são Variedades Riemannianas isospectrais então M e N têm mesma dimensão e volume.

Demonstração: Seja $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \text{spec}M = \text{spec}N$. Daí,

$$\begin{aligned} (4\pi t)^{-\frac{m}{2}} \sum_k \left(\int_M u_k^M(x, x) \right) t^k &\sim \sum_i e^{-\lambda_i t} \\ &\sim (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_N u_k^N(x, x) \right) t^k \\ &\Rightarrow m = n \text{ (por conta das potências em } t) \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} &(4\pi t)^{-\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_M u_k^M(x, x) - \int_M u_k^N(x, x) \right) t^k \sim 0 \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} &\frac{(4\pi t)^{-\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^{N_0} \left(\int_M u_k^M(x, x) - \int_M u_k^N(x, x) \right) t^k}{t^{N_0}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se $N_0 = 0$, teremos

$$\int_M u_0(x, x) dx - \int_N u_0(x, x) dx = 0 = \text{vol}M - \text{vol}N$$

■

Bibliography

- [1] ROSENBERG, R. *The Laplacian on a riemannian manifold*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. (London Mathematical Society Student Texts;31)
- [2] BERGER, M.; GAUDUCHON, P.; MAZET, E. *Le Spectre d'une variété riemannienne*. Berlin: Springer-Verlag,1971. (Lecture Notes in Mathematics v.194)
- [3] BACHMAN, G.; NARICI, L. *Functional analysis*. New York: Academic Press, 1972.
- [4] COSTA, M. S. A. *Decomposição espectral do laplaciano numa variedade riemanniana*. 2003. 88f. Dissertação (mestrado em matemática)- Departamento de matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.
- [5] EVANS, L. L. *Partial Differential Equations*. Providence, RI: American Mathematical Society, 2002. (Graduate Studies in Mathematics; V.19)
- [6] AUBIN, T., *Some nonlinear problems in riemannian geometry*. Berlin: Springer-Verlag, 1998. (Springer monographs in mathematics)