UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

CARLOS DE ABREU ROGÉRIO DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE OS SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

JUAZEIRO DO NORTE

2014

CARLOS DE ABREU ROGÉRIO DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE OS SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requesito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade

JUAZEIRO DO NORTE

2014

CARLOS DE ABREU ROGÉRIO DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE OS SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 21 / 06 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Plácido Francisco de Assis Andrade

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Ms. Antonio Grangeiro Filho

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Júnio Moreira de Alencar

Prof. Ms. Junio Moreira de Alencar

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Dedico este trabalho primeiramente à Deus e a minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela força e paciência que Ele tem me dado.

Agradeço a todos os professores do PROFMAT, em espacial aos que tiveram a coragem de encabeçar um projeto desse magnitude.

A minha família por nunca me deixar desanimar.

Ao meus orientadores Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade e Prof. Ms. Antônio Grangeiro Filho por terem me orientado com dedicação e paciência.

Ao meu amigo e irmão de coração João Paulo Bezerra de Souza e sua mãe Esmeralda que sempre me apoiaram.

À CAPES, pelo precioso apoio financeiro.

RESUMO

Historicamente o estudo de sistemas de equações lineares precede o estudo de matrizes e determinantes. Seguiremos esta ordem e mostraremos que seguir o curso histórico é viável e dar significado preciso ao conceito de matriz e a definição de determinante, os quais têm sidos imprecisos e incompreendido pela ordem estudada. Atualmente quase todos ou totalmente os livros didáticos de Matemática para o ensino médio que abordam o tema tem adotado a seguinte ordem de estudo: matrizes, determinantes e sistemas de equações lineares. Esta ordem tem tornado inviável a compreensão dos conceitos de matriz e determinante por parte dos alunos e também dos professores que os ensinam. Essa prática tem deixado prejuízos enormes na formação dos alunos. Com uma abordagem simples e objetiva, introduzimos de maneira natural e sucessiva, os conceitos de: equações lineares, sistema de equações lineares, resolução de sistemas de equações lineares, determinante do sistema linear, matrizes e determinante de matrizes, sendo matrizes e determinantes considerados como ferramentas essenciais para o estudo e resolução de sistema de equações lineares. Acreditamos que essa ordem na abordagem pode servir para a melhoria do processo ensino-aprendizagem.

Palavras-Chave: Sistemas Lineares. Determinantes. Matrizes.

ABSTRACT

The study of linear equation systems has historically preceded the study of matrixes and determinants. Following this order, we will show that the historical course is viable, and we will give precise significance to the concept of matrix and to the definition of determinant, which have been imprecise and misunderstood due to the order of study. Nowadays almost all of the mathematics high school textbooks which approach this theme have adopted the following order of study: matrixes, determinants, and linear equation systems. This order has made it impracticable for students and teachers to comprehend the concepts of matrix and determinant. This kind of practice has caused enormous damage in the education process of the students. With a simple and objective approach, we introduce in a natural and successive way the concepts of: linear equations, linear equation systems, resolution of linear equation systems, linear system determinant, matrixes, and determinant of matrixes, keeping in mind that matrixes and detetrminants are essential tools for the study and resolution of linear equation systems. We believe that this order of approach can improve the teaching-learning process.

Keywords: Linear Systems. Determinants. Matrixes.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Objetivos

Atualmente nas escolas brasileiras de ensino médio os alunos estudam Matrizes, Determinantes e Sistemas de Equações Lineares nessa ordem, mas vale destacar que historicamente as coisas não se passaram bem assim, o estudo de matrizes e de determinantes surgiram com o estudo de sistemas de equações lineares.

Em uma aula sobre matrizes é comum os alunos perguntarem ao professor: para que estudar matrizes, onde vamos usá-las? Uma resposta provável é: vamos usar esses conceitos de matrizes quando estivermos estudando sistemas lineares. Uma outra pergunta muito comum em aulas de determinante é: o que é e para que serve o determinante? Uma possível resposta é: determinante é um número que está associado a uma matriz quadrada e serve para dizer se essa matriz possui inversa ou não.

Como podemos perceber, os alunos do ensino médio estudam primeiro os conceitos de matrizes e determinantes para obterem determinada "bagagem" conceitual para depois estudarem os sistemas de equações lineares. O que julgamos ser desnecessário e prejudicial, pois como veremos nesse trabalho, os conceitos de matriz e de determinante surgem de forma natural no decorrer do estudo de sistemas de equações lineares, o que justifica a abordagem dada este trabalho, e a necessidade de entender mais sobre estes conceitos nos leva a desenvolver um estudo mais minucioso sobre esses temas a posteriori.

De acordo com o PNLD (2011, p. 31-32),

> ...para contextualizar as matrizes, elas são vinculadas, de modo satisfatório, a tabelas de dupla entrada, em todas as obras. No entanto, essa contextualização é mais significativa quando se estudam primeiro os sistemas lineares, porque as matrizes surgem como uma ferramenta essencial na resolução desses sistemas.

O presente trabalho tem por objetivos fazer um resgate histórico, por meio de uma revisão bibliográfica sobre a ordem cronológica do desenvolvimento dos tópicos de matrizes, determinantes e sistemas lineares mostrando que o estudo de sistemas de equações lineares precede o estudo dos temas matrizes e determinantes e que seguir o curso histórico é viável e dar significado aos conceitos de matriz e determinante.

Como podemos ver, conforme SÉRGIO,

> Não é de estranhar que o início de matrizes e determinantes está intimamente relacionado com o estudo dos sistemas lineares. Os babilônios estudaram problemas que levam a resolução de um sistema linear de

> duas variáveis e duas equações, sendo que alguns destes problemas foram preservados em tabletas de argilas.

Com uma abordagem simples e objetiva, introduzimos de maneira natural e sucessiva, os conceitos de: equações lineares, sistemas de equações lineares, resolução de sistemas de equações lineares, determinante do sistema linear, matrizes e determinante de matriz, sendo matrizes e determinantes considerados como ferramentas essenciais para o estudo e resolução de sistemas de equações lineares.

Como veremos, este trabalho foi dividido em quadro capítulos, que se distribuem, como segue. No capítulo I, temos os objetivos do trabalho e um resgate histórico sobre o estudo de matrizes, determinantes e sistemas de equações lineares. No capítulo II, falaremos um pouco sobre as equações lineares. Onde veremos as definições de equação linear e suas soluções, e, consequentemente, de incógnita, coeficiente e constante. E também definiremos sistema de equações lineares, estudaremos as soluções de um sistema linear, veremos a interpretação geométrica de sistemas lineares 2×2 e 3×3, assim como as operações elementares com as equações de uma sistema e o método de escalonamento de Gauss. No capítulo III, falaremos sobre a representação matricial de um sistema linear, falaremos sobre noções de permutação e inversão, introduziremos o importante conceito de determinante de um sistema de equações lineares $n \times n$ e demonstraremos a regra de Cramer que servirá para calcular a solução de um sistema linear $n \times n$. No capítulo IV, falaremos sobre matriz, operações com matrizes e suas propriedades e algumas nomenclaturas de matrizes.

Um dos principais diferenciais desse trabalho é a ordem de apresentação e estudo dos temas matrizes, determinantes e sistemas lineares, onde fica claro o conceito de matriz e a definição de determinante. Esse trabalho também traz uma demonstração para a regra de Cramer, demonstração essa que não é encontrada nos nossos livros didáticos. A ordem de apresentação de alguns teoremas mudou e outros foram demonstrados de forma distinta das encontradas nos livros de álgebra. É apresentada as noções de permutação e inversão que são de fundamental importância para o estudo dos determinantes. Os capítulos II e IV já são trabalhados nos livros de álgebra, diferentemente do capítulo III, onde trazemos uma demonstração para a regra de Cramer sem usar matriz inversa.

1.2 Breve histórico

Os Babilônios resolviam equações lineares e quadráticas com duas variáveis e chegavam até a resolver problemas envolvendo equações cúbicas e biquadráticas. Um exemplo desses problemas foi tirado de uma placa do período da 1ª dinastia babilônica, quando o rei Hammurábi reinou na Babilônia (cerca de 1750 a.C.). Atualmente esta placa encontra-se na Biblioteca Nacional e Universitária, em Estrasburgo.

Uma determinada área A, que é a soma de dois quadrados, tem o valor 1000. O lado de um dos quadrados é igual a $\frac{2}{3}$ do lado do outro menos 10. Quanto medem os lados dos quadrados?

Para resolver esse problema os babilônios usavam um sistema de equações não lineares, se a um dos lados do quadrado, atribuirmos a letra a e ao outro lado a letra b, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1000 \\ a - \dfrac{2b}{3} = -10 \end{cases}$$

Já os primeiros registros sobre os sistemas de equações lineares foram encontrados no mais importante dos textos de matemática chinesa antiga, o Chiu Chang Suan-Shu ou "Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática", que de acordo com EVES (2011, p. 243) "... data do período Han mas que muito provavelmente contém material bem mais antigo" e dedica o capítulo 8 aos Sistemas de equações lineares e procedimentos matriciais.

Conforme BOYER, a preocupação com diagramas levou o autor de Chiu Chang Suan-Shu a resolver o sistema de equações lineares de ordem 3×3

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 2y & + & z & = & 39 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 34 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 26 \end{array}$$

efetuando operações sobre o quadrado

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}} \quad \text{para reduzi-la a} \quad \boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{array}}$$

A segunda forma representava as equações lineares $36z = 99$, $5y + z = 24$ e $3x + 2y + z = 39$, das quais facilmente são calculados sucessivamente os valores de x, y e z. Os métodos modernos levariam a dispor os coeficientes das equações lineares em linhas, em vez de colunas, mas como podemos verificar o método é basicamente o mesmo.

Somente na segunda metade do século XVII inicia-se um tratamento sistematizado sobre sistemas de equações lineares, ocorrendo no Japão com Seki S. Kowa (1642-1708). No século XVIII, encontram-se diversos trabalhos sobre sistemas de equações lineares descritos por Colin Maclaurin (1748), Gabriel Cramer (1750) e Etienne Bézout (1779). Eles formularam métodos de resolução de sistemas.

Conforme EVES (2011, p.444), comumente a crição da teoria dos determinantes é atribuída a Leibniz, em 1693, visando o estudo de sistemas de equações lineares, embora considerações semelhantes já tivessem sido feitas dez anos antes no Japão por Seki Kowa. Seki foi o primeiro matemático a calcular determinantes. Em seu livro apresentou vários exemplos, mas não mostrou algo que fosse válido em casos gerais.

De acordo com EVES (2011, p. 536), "Jacobi, ao lado de Cauchy, foi talvez o matemático que mais contribuiu para a teoria dos determinantes". Foi com ele que a palavra determinante recebeu aceitação final.

O matemático escocês Maclaurin (1698-1746) também contribuiu na história dos determinantes. Em 1730, Maclaurin escreveu um livro chamado Um tratado sobre Álgebra, que só foi publicado em 1748, dois anos após a sua morte. Neste livro, Maclaurin apresenta o que chamou de "teorema geral" para eliminação de incógnitas de um sistema linear, fazendo a demonstração para matrizes de ordem 2 e 3 e explica como fazer a demonstração para matrizes de ordem 4. Maclaurin, porém, não comenta se o resultado pode ser generalizado para matrizes de ordem n. O "teorema geral de Maclaurin" é conhecido hoje como regra de Cramer, pois foi o matemático Cramer (1704-1752) quem publicou o resultado para matrizes de ordem n, no apêndice do seu livro Introdução *à* Análise de Curvas Algébricas, de 1750. É interessante observar que a demonstração da regra não constava no livro de Cramer. O termo "determinante" só foi introduzido em 1801, por Gauss.

O início da teoria das matrizes remonta a um artigo de Cayley em 1855. Diga-se de passagem, porém, que o termo matriz já fora usado, com o mesmo sentido, cinco anos antes por Sylvester.

Quanto ás matrizes, Cayley as introduziu para simplificar a notação de uma transformação linear. Assim, em lugar de:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad \text{escrevia} \quad \begin{pmatrix} x', & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x, & y \end{pmatrix}$$

O nome Matriz só veio com James Joseph Sylvester, 1850. Seu amigo Cayley, com sua famosa Memoir on the Theory of Matrices, 1858, divulgou esse nome e iniciou a demonstrar sua utilidade. Para Sylvester as matrizes eram consideradas como meros ingrediente dos determinantes. É só com Cayley que elas passam a ter vida própria e, gradativamente, começam a superar os determinantes em importância.

2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

2.1 Equações lineares

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais.

Definição 2.1. *Uma equação linear de n variáveis no conjunto dos números reais é uma equação do tipo*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

onde $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ são variáveis, $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \in \mathbb{R}$, são os coeficientes da equação linear, e $b \in \mathbb{R}$, a constante da equação.

É usual o termo *incógnita* ser substituído por *variável*. Pela definição, uma equação linear não envolve produtos ou raízes de variáveis. Todas as variáveis ocorrem na primeira potência e não aparecem, por exemplo, como argumento de funções trigonométricas, logarítmicas ou exponenciais. Para equações com até três incógnitas é comum registrá-las utilizando as letras minúsculas x, y ou z, sem indexações.

Exemplo 2.1. As equações abaixo são lineares, mas sempre devemos deixar claro quantas são as variáveis envolvidas.

i) Equação linear em duas variáveis: $4x - y = 6$.

ii) Equação linear em três variáveis: $x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$.

iii) Quando dizemos "a equação em três variáveis $x + 2y = 3$" estamos simplificando o registro da equação linear em três variáveis $x + 2y + 0z = 3$. ◇

Exemplo 2.2. As seguintes equações não são lineares.

i) $x + yx = 0$.

ii) $4x^2 - y - z = 6$.

iii) $x_1 + 3x_2 - x_3^{\frac{1}{2}} = 0$.

◇

A equação linear $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n = b$ é dita degenerada. Quando a equação não é degenerada, o primeiro termo não nulo da equação linear é dito termo principal, ou seja, se $a_k \neq 0$ e $a_1 = a_2 = \cdots = a_{k-1} = 0$, então o k-ésimo termo é o termo principal, x_k é a incógnita principal e a_k é o coeficiente principal. As outras variáveis são ditas variáveis livres da equação.

Observação 2.1. As equações lineares em uma, duas ou três variáveis estão associadas a pontos ($\mathbb{R}$), retas ($\mathbb{R}^2$) e planos ($\mathbb{R}^3$), respectivamente.

- Equação do ponto: $ax = b$, com $a^2 \neq 0$; (1 incógnita)
- Equação da reta: $ax + by = c$, com $a^2 + b^2 \neq 0$; (2 incógnitas)
- Equação do plano: $ax + by + cz = d$, com $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. (3 incógnitas)

2.2 Solução de uma equação linear

Denotaremos por $\mathbb{R}^n$ o conjunto das n-úplas ordenadas, mais precisamente,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n);\ x_i \in \mathbb{R},\ \text{para todo } i \in \mathbb{N},\ \text{com } 1 \leq i \leq n\}.$$

Definição 2.2. *Dada a equação linear com n incógnitas $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, dizemos que $k = (k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n) \in \mathbb{R}^n$ é solução da equação linear se $a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n = b$.*

O conjunto de todas as soluções particulares é denominado conjunto solução da equação linear. Para encontrar o conjunto solução, atribui-se valores as variáveis livres e posteriormente encontra-se a variável principal em termos das anteriores.

Muitas vezes dizemos que os valores $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n$ satisfazem a equação linear.

Exemplo 2.3. Determinemos duas soluções distintas para a equação linear em três variáveis $3x - 2y + z = 6$.

Solução: Verificaremos que $k_1 = (0,\ 0,\ 6)$ e $k_2 = (2,\ 0,\ 0)$ são soluções, de fato

$$3.0 - 2.0 + 1.6 = 0 - 0 + 6 = 6.$$
e
$$3.2 - 2.0 + 1.0 = 6 - 0 + 0 = 6.$$

◇

Exemplo 2.4. Dada a equação linear em três variáveis $3x - 2y + z = 6$, vamos encontrar sua solução geral.

Solução: Como podemos ver, o coeficiente principal é 3, assim y e z são variáveis livres. Tomemos $y = a$ e $z = b$. Tem-se:

$$3.x - 2.a + 1.b = 6 \quad \Rightarrow \quad 3x - 2a + b = 6 \quad \Rightarrow \quad 3x = 6 + 2a - b \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6 + 2a - b}{3}.$$

Portanto, $\left(\frac{1}{3}(6 + 2a - b),\ a,\ b\right)$ é a solução geral e

$$X = \left\{ \left(\frac{1}{3}(6 + 2a - b),\ a,\ b \right); a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

é o conjunto solução. $\diamond$

Teorema 2.1. *Valem as seguintes afirmações sobre o conjunto solução X da equação linear $ax = b$.*

1) Se $a = 0$ e $b = 0$, então $X = \mathbb{R}$, ou seja, tem infinitas soluções.

2) Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então X é vazio, isto é, não existe solução.

3) Se $a \neq 0$, então X tem um único elemento, dada por $k = \dfrac{b}{a}$.

Prova: (1) Se $a = 0$ e $b = 0$, então $0x = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(2) Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então não existe número real k tal que $0k = b$, ou seja, a equação não tem solução.

(3) Se $a \neq 0$, podemos dividir cada termo da equação linear por a, então

$$\frac{ax}{a} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{b}{a}.$$

Isso encerra a demonstração. $\blacksquare$

Teorema 2.2. *Valem as seguintes afirmações sobre o conjunto solução X da equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, com $n \geq 2$.*

1) Se $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ e $b = 0$, então X tem infinitas soluções.

2) Se $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ e $b \neq 0$, então X é vazio.

3) Se $a_l \neq 0$ para algum $1 \leq l \leq n$, então X tem infinitas soluções.

Prova: (1) Se $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ e $b = 0$, então temos infinitas soluções. Vejamos, $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$, para todo $k = (k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n) \in \mathbb{R}^n$.

(2) Se $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ e $b \neq 0$, então não pode existir $(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n)$ tal que $a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n = b$, pois $a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n = 0$.

(3) Se existe $a_l \neq 0$, para algum $1 \leq l \leq n$, então temos infinitas soluções da forma $k = (k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_{l-1},\ k_l,\ k_{l+1},\ \ldots,\ k_n)$, onde $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_{l-1},\ k_{l+1},\ \ldots,\ k_n$ são quaisquer números reais e

$$k_l = \frac{1}{a_l}(b - a_1k_1 - a_2k_2 - \cdots - a_{l-1}k_{l-1} - a_{l+1}k_{l+1} - \cdots - a_nk_n).$$

Isso encerra a demonstração do teorema. $\blacksquare$

2.3 Equações lineares degeneradas

Uma equação linear é denominada degenerada se todos seus coeficientes são nulos, isto é, se ela tem a forma

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$$

A existência de solução da equação degenerada depende apenas do valor da constante b. Mais precisamente,

1) se $b \neq 0$, então a equação não possui solução e

2) se $b = 0$, então todo $k = (k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n)$, em que $k \in \mathbb{R}^n$ é uma solução.

Teorema 2.3. *Se $k_1 = (k_{11},\ k_{12},\ \ldots,\ k_{1n})$ e $k_2 = (k_{21},\ k_{22},\ \ldots,\ k_{2n})$ são soluções distintas da equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, então*

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = \left(\frac{k_{11} + k_{21}}{2},\ \frac{k_{12} + k_{22}}{2},\ \ldots,\ \frac{k_{1n} + k_{2n}}{2}\right)$$

também é uma solução e é distinta das anteriores.

Prova: Verifiquemos por substituição:

$$\begin{aligned}
a_1\frac{(k_{11} + k_{21})}{2} + \cdots + a_n\frac{(k_{1n} + k_{2n})}{2} &= \frac{(a_1k_{11} + a_1k_{21})}{2} + \cdots + \frac{(a_nk_{1n} + a_nk_{2n})}{2} \\
&= \frac{(a_1k_{11} + a_1k_{21}) + \cdots + (a_nk_{1n} + a_nk_{2n})}{2} \\
&= \frac{(a_1k_{11} + \cdots + a_nk_{1n}) + (a_1k_{21} + \cdots + a_nk_{2n})}{2} \\
&= \frac{b + b}{2} = b
\end{aligned}$$

Portanto, $\dfrac{k_1 + k_2}{2}$ é uma solução.

Sendo k_1 e k_2 duas soluções distintas, existe l, com $1 \leq l \leq n$, tal que $k_{1l} \neq k_{2l}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $k_{1l} < k_{2l}$. Para mostrar que a média é uma solução distinta das anteriores é suficiente mostrar que para o índice l temos $k_{1l} < \dfrac{k_{1l} + k_{2l}}{2} < k_{2l}$. Isso é simples, pois

$$k_{1l} = \frac{(k_{1l} + k_{1l})}{2} < \frac{(k_{1l} + k_{2l})}{2} < \frac{k_{2l} + k_{2l}}{2} = k_{2l}.$$

Isso termina a demonstração do teorema. ∎

Operações elementares com equações lineares

Definição 2.3. *Sejam r um número real e*

$$\begin{aligned} L_1 : \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ L_2 : \quad & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \end{aligned}$$

duas equações lineares de n variáveis.

i) A soma dessas equações, é a equação linear de n variáveis $L_1 + L_2$ definida por

$$L_1 + L_2 : \quad (a_{11} + a_{21})x_1 + (a_{12} + a_{22})x_2 + \cdots + (a_{1n} + a_{2n})x_n = b_1 + b_2.$$

ii) A multiplicação da equação linear L_1 por um número real r é a equação linear de n variáveis rL_1, definida por

$$rL_1 : \quad (ra_{11})x_1 + (ra_{12})x_2 + \cdots + (ra_{1n})x_n = (rb_1).$$

2.4 Sistemas de equações lineares

Definição e solução

Definição 2.4. *Um conjunto com m equações lineares de n incógnitas é denominado um sistema de equações lineares $m \times n$.*

A representação usual de um sistema linear $m \times n$ é a seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ & & & \vdots & & & & & & \vdots & \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & a_{i3}x_3 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ & & & \vdots & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. .$$

Indicaremos a equação na i-ésima linha do sistema por L_i.

Definição 2.5. *Uma solução simultânea de todas as equações lineares que compõem o sistema linear é dito solução particular do sistema. O conjunto das soluções particulares é dito conjunto solução do sistema linear.*

Exemplo 2.5. Determinemos uma solução particular para os sistemas lineares 2×2 e 2×3, respectivamente, descritos a seguir.

1. $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}.$ 2. $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + z = 4 \end{cases}.$

Solução: (1) Isolando y na equação L_1, $y = 3x - 2$, e substituiremos na equação L_2, temos:

$$x + (3x - 2) = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{4}.$$

Agora, substituindo o valor $x = \frac{5}{4}$ na equação $y = 3x - 2$, temos:

$$y = 3\frac{5}{4} - 2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{7}{4}.$$

Portanto, $k = \left(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right) \in \mathbb{R}^2$ é solução do sistema. Isso pode ser verificado substituindo os valores encontrados no sistema linear:

$$\begin{cases} 3x - y = 3\frac{5}{4} - \frac{7}{4} = 2 \\ \\ x + y = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = 3 \end{cases}$$

(2) Explicitemos z na equação L_2, $z = 4 - 2x$, e substituamos em L_1:

$$x + y - z = 1 \quad \Rightarrow \quad y = z - x + 1 = (4 - 2x) - x + 1 = 5 - 3x \quad \Rightarrow \quad y = 5 - 3x$$

Observe que $y = 5-3x$ e $z = 4-2x$ satisfaz as equações $\forall x \in \mathbb{R}$. De fato, tomando $x = k \in \mathbb{R}$, $y = 5 - 3k$ e $z = 4 - 2k$, temos que:

$$\begin{cases} x + y + z = k + (5 - 3k) - (4 - 2k) = k + 5 - 3k - 4 + 2k = 1 \\ \\ 2x + z = 2k + (4 - 2k) = 2k + 4 - 2k = 4 \end{cases}$$

$\diamond$

Teorema 2.4. *As seguintes afirmações sobre um sistema linear $m \times n$ são exclusivas:*

1. *o sistema linear não admite solução;*
2. *o sistema linear admite uma única solução;*
3. *o sistema linear admite infinitas soluções.*

Prova: Existem duas possibilidades, o sistema linear $m \times n$ tem solução ou não tem solução. Se não tiver solução a afirmação (1) está satisfeita. Se (1) não for verdadeiro o sistema tem solução. Portanto, tem uma solução única ou mais de uma. Se tiver uma solução única a afirmação (2) está satisfeita.

Suponhamos que (1) e (2) não estão satisfeitas, então o sistema linear $m \times n$ admite no mínimo duas soluções distintas, digamos, $k_1 = (k_{11}, k_{12}, \ldots, k_{1m})$ e $k_2 = (k_{21}, k_{22}, \ldots, k_{2m})$, com $k_{1l} \neq k_{2l}$ para algum $1 \leqslant l \leqslant n$.

Sem perda de generalidade podemos assumir que $k_{1l} < k_{2l}$. Sendo assim, $k_3 = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$ é solução do sistema linear $m \times n$, pois é solução de cada uma das equações lineares, (ver teorema 2.3, p. 16). Além disto temos $k_{1l} < k_{3l} < k_{2l}$, onde $k_{3l} = \dfrac{k_{1l} + k_{2l}}{2}$, o que implica $k_1 \neq k_3 \neq k_2$, portanto temos três soluções distintas.

Temos também que $k_4 = \dfrac{k_1 + k_3}{2}$ é solução e $k_{1l} < k_{4l} < k_{3l} < k_{2l}$ isto implica 4 soluções distintas. Tomando $k_5 = \dfrac{k_1 + k_4}{2}$, temos outra solução com $k_{1l} < k_{5l} < k_{4l} < k_{3l} < k_{2l}$, o que implica 5 soluções distintas. Repetindo o processo podemos construir infinitas soluções para o sistema linear. Portanto, se (1) e (2) não forem válidos tem-se que (3) será satisfeita. ∎

Exemplo 2.6. (Interpretação Geométrica para Sistemas Lineares 2×2) Se as equações de um sistema linear 2×2 forem não degeneradas podemos interpretá-las como equações de retas no plano ($\mathbb{R}^2$) e sua solução como intersecção destas retas. Se o sistema admitir uma única solução, então as retas são concorrentes; se não admitir solução as retas são paralelas e se admitir infinitas soluções as retas são coincidentes.

◇

Exemplo 2.7. (Interpretação Geométrica para Sistemas Lineares 3×3) Pensando de forma análoga ao caso do sistema linear 2×2, se as equações de um sistema linear 3×3 forem equações não degeneradas podemos interpretá-las como equações de planos no espaço ($\mathbb{R}^3$) que representaremos por π_1, π_2 e π_3. As soluções de um sistema linear são os pontos do espaço que pertencem simultaneamente a esses três planos, ou seja, $(x, y, z) \in \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$. As posições relativas dos planos π_1, π_2 e π_3, são um total de oito.

Se o sistema linear admite solução única, então dois planos são concorrentes e o terceiro plano é concorrente com a reta formada pela intersecção dos outros dois planos; se o sistema linear não admite solução, então temos 4 posições possíveis para os planos no espaço, a saber: dois Planos coincidem e são paralelos ao terceiro, ou dois planos são paralelos e o terceiro os intersecta segundo retas paralelas, ou os três planos são paralelos dois a dois ou os três planos se intersectam dois a dois segundo três retas paralelas; Se o sistema linear admite infinitas soluções, então temos 3 posições possíveis para os planos no espaço, a saber: os três planos são coincidentes, ou os três planos têm uma reta em comum ou dois planos coincidem e o terceiro os intersecta segundo uma reta. ◇

Definição 2.6. *Dizemos que um sistema linear $\mathcal{M}$ é incompatível se $\mathcal{M}$ não possui solução; é compatível e determinado se possui solução única e compatível e indeterminado se possui infinitas soluções.*

Observação 2.2. Se um sistema tiver uma equação linear degenerada com constante não nula, então o sistema não admite solução, pois esta equação não admite solução, tem-se portanto um sistema incompatível.

Um sistema linear do tipo

$$\begin{cases} x_1 & & & & = & b_1 \\ & x_2 & & & = & b_2 \\ & & x_3 & & = & b_3 \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & x_n = & b_n \end{cases}$$

é um sistema linear compatível e determinado e $k = (b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_n)$ é sua única solução.

Exemplo 2.8. O sistema linear do tipo

$$\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ 16x - 8y = 4 \end{cases}$$

é um sistema linear compatível e indeterminado, pois como podemos verificar, os pares ordenados $\left(0,\, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{4},\, 0\right)$ são soluções distintas do sistema linear. ◇

2.5 Sistemas lineares escalonados

Definição 2.7. (Sistema escalonado) *Um sistema $\mathcal{M}_{m\times n}$ é dito escalonado se não contém equação linear degenerada e dados os termos principais de L_i e L_{i+1} são $a_{ir_i}x_{r_i}$ e $a_{(i+1)r_{i+1}}x_{r_{i+1}}$ tem-se $r_{i+1} > r_i$.*

A representação de um sistema escalonado é dada abaixo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0x_1 + \cdots + a_{2r_2}x_{r_2} + a_{2(r_2+1)}x_{(r_2+1)} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ 0x_1 + 0x_2 + \ldots + a_{3r_3}x_{r_3} + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m'(r_{m'})}x_{(r_{m'})} + \cdots + a_{m'n}x_n = b_{m'} \end{cases}$$

Em outras palavras; quando o sistema é escalonado a incógnita principal da equação linear inferior está a direita da equação linear superior. Costuma-se não representar os termos $0x_i$.

Exemplo 2.9. Os sistemas de equações lineares abaixo estão escalonados:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & & 2z & + & 3t & = & 4 \\ & & & & 2t & = & 4 \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 4x & - & 2y & + & z & + & 3t & - & w & = & 7 \\ & & & & & & 5t & + & 2w & = & 8 \\ & & & & & & & & w & = & 1 \end{array}\right.$$

$\diamond$

Observação 2.3.

i) Num sistema escalonado o número de linhas é sempre menor que ou igual ao número de variáveis;

ii) Num sistema linear a diferença entre o número de variáveis e o número de equações é igual ao número de variáveis livres. Retirando as variáveis principais do sistema as demais são livres;

Definição 2.8. (Sistema triangular) *Um sistema escalonado em que o número de equações é o mesmo que o número de variáveis é dito triangular.*

Representação geral de um sistema triangular.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcccrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ & & & & & & \ddots & & & \vdots & \\ & & & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

Vamos mostrar que um sistema triangular admite solução única. Para melhor compreender o teorema tomemos o exemplo seguinte.

Exemplo 2.10. Encontremos a solução do sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & 3y & + & 4z & = & 7 \\ & & & & 3z & = & 8 \end{array}\right. .$$

Solução: Para $k = (k_1,\ k_2,\ k_3)$ ser uma solução do sistema linear deve-se ter

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} k_1 & + & 2k_2 & - & k_3 & = & 1 \\ & & 3k_2 & + & 4k_3 & = & 7 \\ & & & & 3k_3 & = & 8 \end{array}\right. .$$

e assim, temos

i)

$$L_3: \ 3k_3 = 8 \ \Rightarrow \ k_3 = \tfrac{8}{3}.$$

ii)

$$\begin{aligned} L_2: \ 3k_2 + 4k_3 = 7 \ &\Rightarrow \ 3k_2 + 4\left(\frac{8}{3}\right) = 7 \\ &\Rightarrow \ 3k_2 + \frac{32}{3} = 7 \\ &\Rightarrow \ k_2 = -\frac{11}{9}. \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} L_1: \ k_1 + 2k_2 - k_3 = 1 \ &\Rightarrow \ k_1 + 2\left(-\tfrac{11}{9}\right) - \tfrac{8}{3} = 1 \\ &\Rightarrow \ k_1 = \frac{55}{9}. \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema dado é $k = (k_1, \ k_2, \ k_3) = \left(\frac{55}{9}, \ -\frac{11}{9}, \ \frac{8}{3}\right)$. ◇

Observamos que num sistema triangular não existem variáveis livres.

Teorema 2.5. *Um sistema triangular $\mathcal{M}_{n\times n}$, admite uma solução única.*

Prova: Seja $\mathcal{M}_{n\times n}$ o sistema linear triangular

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ & & & & & & \ddots & & & \vdots & \\ & & & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. .$$

Observe que L_n admite a solução $k = \left(k_1, \ k_2, \ k_3, \ldots, \ \frac{b_n}{a_{nn}}\right)$, $\forall \ k_1, \ k_2, \ k_3, \ \ldots, \ k_{n-1} \in \mathbb{R}$ e somente solução deste tipo. Temos que L_n e L_{n-1} admitem soluções simultâneas do tipo:

$$k = \left(k_1, \ k_2, \ k_3, \ldots, \ k_{n-2}, \ \frac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}\left(b_{n-1} - a_{(n-1)n}\frac{b_n}{a_{nn}}\right), \ \frac{b_n}{a_{nn}}\right)$$

, $\forall \ k_1, \ k_2, \ k_3, \ \ldots, \ k_{n-2} \in \mathbb{R}$.

Este processo é indutivo e supondo que $k = (k_1, \ k_2, \ k_3, \ldots, \ k_{i-1}, \ k_i, \ \ldots, \ k_n)$, com $k_i, \ k_{i+1}, \ \ldots, \ k_n$ fixos e $k_1, \ k_2, \ k_3, \ldots, \ k_{i-1} \in \mathbb{R}$ quaisquer, é solução simultânea de L_i, L_{i+1},

$L_{i+2}, \ldots, L_n$ tem-se que $k = (k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{i-1}, k_i, \ldots, k_n)$, com $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{i-2}$ são reais quaisquer e $k_{i-1} = \dfrac{1}{a_{(i-1)(i-1)}}\left(b_{i-1} - \sum_{l=i}^{n} a_{(i-1)l}k_l\right)$, $k_i, k_{i+1}, \ldots, k_n$ fixos, é solução de $L_{i-1}, L_i, L_{i+1}, \ldots, L_n$ simultaneamente e portanto a solução de $L_{i-1}, L_i, L_{i+1}, \ldots, L_n$ existe e é da forma $k = (k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{i-2}, k_{i-1}, \ldots, k_n)$, com $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{i-2}$ variáveis e $k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, \ldots, k_n$ fixos.

Então por indução podemos encontrar $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ com $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$, únicos e somente estes, tal que k é solução de $L_1, L_2, \ldots, L_n$ e portanto do sistema triangular $\mathcal{M}_{m\times n}$. ■

Exemplo 2.11. Encontremos a solução do sistema linear 5×5

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 7 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 6 \\ & & & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 4 \\ & & & & & & 3x_4 & + & 2x_5 & = & -7 \\ & & & & & & & & 3x_5 & = & 9 \end{array}\right. .$$

Solução: De L_5, temos $x_5 = 3$. Fazendo $x_5 = 3$ na equação L_4, temos $3x_4 + 2.3 = -7$, ou seja, $x_4 = -\dfrac{13}{3}$. Novamente, substituindo os valores obtidos para x_5 e x_4 na linha L_3, calculamos $x_3 = -\dfrac{47}{3}$. Esse processo nos fornece aos seguintes valores: $x_2 = \dfrac{43}{6}$ e $x_1 = -\dfrac{137}{12}$. Portanto, a solução do sistema é $\left(-\dfrac{137}{12}, \dfrac{43}{6}, -\dfrac{47}{3}, -\dfrac{13}{3}, 3\right)$.

◇

Teorema 2.6. *Se o sistema escalonado não for triangular, então admite infinitas solução.*

Prova: Se o sistema linear não é triangular, então existe(m) variável(is) livre(s), as quais podemos atribuir valores. Ao atribuímos um conjunto de valores fixos para as variáveis livres, obteremos um novo sistema triangular o qual terá pelo teorema anterior, valores únicos para as variáveis principais. Os valores atribuídos as variáveis livres e os valores encontrados para as variáveis não livres constituem uma solução do sistema linear. Como a cada conjunto de valores atribidos as variáveis livres temos uma solução do sistema linear e como podemos atribuir infinitos valores as variáveis livres teremos infinitas soluções do sistema linear. ■

Exemplo 2.12. Consideremos o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 8 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array}\right.$$

Observemos que x_3 é a variável livre. Então podemos atribuir valores a x_3, digamos $x_3 = k \in \mathbb{R}$. Daí segue que

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & - & k & = & 8 \\ & & x_2 & + & k & = & 5 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & = & 8+k \\ & & x_2 & = & 5-k \end{array}\right. .$$

Logo, L_2: $x_2 = 5 - k$. Substituindo $x_2 = 5 - k$ em L_1:

$$\begin{aligned} L_1: \ 3x_1 + 2x_2 = 8 + k &\Rightarrow 3x_1 + 2(5-k) = 8 + k \\ &\Rightarrow 3x_1 + 10 - 2k = 8 + k \\ &\Rightarrow 3x_1 = 3k - 2 \\ &\Rightarrow x_1 = \frac{3k-2}{3}. \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral do sistema é $K = \left(\dfrac{3k-2}{3},\ 5-k,\ k\right)$. São infinitas as soluções, uma para cada valor de $k \in \mathbb{R}$. Por exemplo:

$k = 1 \quad \Rightarrow \quad K = \left(\dfrac{1}{3},\ 4,\ 1\right)$ é solução do sistema.

$k = 2 \quad \Rightarrow \quad K = \left(\dfrac{4}{3},\ 3,\ 2\right)$ é solução do sistema.

$k = 3 \quad \Rightarrow \quad K = \left(\dfrac{7}{3},\ 2,\ 3\right)$ é solução do sistema.

◇

Observação 2.4. Note que dado o sistema linear $\mathcal{M}$, ao operarmos elementarmente com suas equações lineares e obtivermos uma equação linear degenerada com constante não nula, $\mathcal{M}$ não admite solução. Caso encontremos uma equação linear degenerada com constate nula, então a desprezamos, pois ela não interfere na solução do sistema. E mais, se não encontrarmos equação linear degenerada com constante não nula então:

i) $\mathcal{M}$ tem solução única se o escalonado equivalente é triangular;

ii) $\mathcal{M}$ tem infinitas soluções se o escalonado equivalente não é triangular, ou seja tem variáveis livres.

Teorema 2.7. *Todo sistema linear $\mathcal{M}$ é equivalente a um sistema linear escalonado (unido ou não com equação linear degenerada com constante não nula).*

Prova: A desmonstração seguira por indução matemática sobre o número de linhas dos sistema linear $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{m\times n}$.

i) Se $m = 1$ e a equação é não degenerada com constante não nula, então $\mathcal{M}$ já é um sistema escalonado.

ii) Suponhamos válido para $m = k$ e mostremos que continua válido para $m = k+1$. Como $m = k+1$, então o $\mathcal{M}_{(k+1)\times n}$ é da forma

$$\mathcal{M}_{(k+1)\times n} : \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + \cdots + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ & \vdots & & & & & \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + \cdots + & a_{kn}x_n & = & b_k \\ a_{(k+1)1}x_1 & + & a_{(k+1)2}x_2 & + \cdots + & a_{(k+1)n}x_n & = & b_{(k+1)} \end{cases}.$$

Para efeito de cálculo tomaremos $a_{11} \neq 0$. Sendo assim, construiremos um novo sistema linear $\mathcal{M}'$ com as seguintes operações elementares:

- $L_1 \longleftrightarrow L_1$;
- $L_2 \longrightarrow a_{11}L_2 - a_{21}L_1$;
- $L_3 \longrightarrow a_{11}L_3 - a_{31}L_1$;
- $\ldots$;
- $L_k \longrightarrow a_{11}L_k - a_{k1}L_1$;
- $L_{(k+1)} \longrightarrow a_{11}L_{(k+1)} - a_{(k+1)1}L_1$.

Com essas operações obtemos o sistema equivalente

$$\mathcal{M}' : \begin{cases} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ 0x_1 & + \cdots + & (a_{11}a_{2n} - a_{21}a_{1n})x_n & = & (a_{11}b_2 - a_{21}b_1) \\ 0x_1 & + \cdots + & (a_{11}a_{3n} - a_{31}a_{1n})x_n & = & (a_{11}b_3 - a_{31}b_1) \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0x_1 & + \cdots + & (a_{11}a_{kn} - a_{k1}a_{1n})x_n & = & (a_{11}b_k - a_{k1}b_1) \\ 0x_1 & + \cdots + & (a_{11}a_{(k+1)n} - a_{(k+1)1}a_{1n})x_n & = & (a_{11}b_{(k+1)} - a_{(k+1)1}b_1) \end{cases}$$

Operando com $L_2,\ L_3,\ L_4,\ \ldots,\ L_k,\ L_{k+1}$, pois se for o teorema válido para $m = k$, obteremos uma equação linear degenerada com constante não nula, ou obteremos um sistema escalonado, o qual adicionando a primeira equação obteremos um sistema escalonado equivalente ao anterior, isto completa a demonstração do teorema. ■

2.6 Sistemas lineares equivalentes

Definição 2.9. *Dois sistemas lineares de n variáveis são ditos equivalentes se, e somente se, tem conjuntos soluções iguais. Expressaremos que os sistemas $\mathcal{M}$ e $\mathcal{S}$ são equivalentes por $\mathcal{M} \sim \mathcal{S}$.*

Exemplo 2.13. Os sistemas lineares

$$\begin{cases} x & + & y & = & 6 \\ 2x & + & 3y & = & 16 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -x & + & 2y & = & 6 \\ 3x & - & y & = & 2 \end{cases}$$

são equivalentes, pois têm a mesma solução, $k = (2,\ 4)$. ◇

Vamos aprender como obter um sistema equivalente mais simples a partir de outro. Mais simples no sentido da solução puder ser encontrada. Para isto definiremos as operações elementares num sistema linear.

Definição 2.10. *Sejam L_i, em que $1 \leq i \leq m$, as linhas de um sistema linear $m \times n$. Utilizaremos as seguintes notações.*

i) $L_i \longleftrightarrow L_j$: *permutar a i-ésima linha com a j-ésima linha.*

ii) $L_i \longrightarrow rL_i$: *substituir a i-ésima linha pela multiplicação da i-ésima linha por um número real $r \neq 0$.*

iii) $L_i \longrightarrow L_i + rL_j$: *substituir a i-ésima linha pela adição da i-ésima linha com a j-ésima linha multiplicada por um número real.*

Podemos agrupar as operações (ii) e (iii) escrevendo $L_i \longrightarrow r_1L_i + r_2L_j$, em que $r_1 \neq 0$.

Teorema 2.8. *Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{S}$ dois sistemas de equações lineares $m \times n$. Se $\mathcal{S}$ pode ser obtido de $\mathcal{M}$ por um número finito de operações elementares, então os dois sistemas são equivalentes.*

Prova: Seja $\mathcal{S}_1$ o sistema de equações lineares obtido de $\mathcal{M}$ por uma operação elementar. Se a operação elementar foi:

i) $L_i \longleftrightarrow L_j$,

As equações lineares não mudam e portanto $\mathcal{M}$ e $\mathcal{S}$ têm as mesmas soluções.

ii) $L_i \longrightarrow rL_i$, em que $r \neq 0$,

Se k é solução de $\mathcal{M}$, então é solução de $L_i : a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ e das demais equações lineares do sistema. Mas k é também solução de rL_i, pois

$$(ra_{i1})k_1 + (ra_{i2})k_2 + \cdots + (ra_{in})k_n = r(a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \cdots + a_{in}k_n) = (rb_i).$$

Portanto k é solução de $\mathcal{S}_1$. Reciprocamente, se k é solução de $\mathcal{S}_1$, k é solução de rL_i e das demais equações lineares. Logo, é solução de $\frac{1}{r}(rL_i)$=L_i, em que $r \neq 0$, como mostrado anteriormente, e das demais. Portanto, k é solução de $\mathcal{M}$.

iii) $L_i \longrightarrow L_i$+rL_j.

Seja $k = (k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n)$ solução do sistema linear $\mathcal{M}$. Como vimos acima, k é solução de L_i e rL_j, ou seja,

$$a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \cdots + a_{in}k_n = b_i \quad \text{e} \quad (ra_{j1})k_1 + (ra_{j2})k_2 + \cdots + (ra_{jn})k_n = (rb_j).$$

Adicionando essas duas equações temos

$$(a_{i1} + ra_{j1})k_1 + (a_{i2} + ra_{j2})k_2 + \cdots + (a_{in} + ra_{jn})k_n = (b_i + rb_j),$$

o que mostra ser k solução de $L_i + rL_j$. Portanto k é solução de $\mathcal{S}_1$, pois as outras linhas de $\mathcal{M}$ não foram alteradas. Reciprocamente, se k é solução de $\mathcal{S}_1$, então k é solução de $L_i + rL_j$ e $-rL_j$. Logo, pelo visto anteriormente, k é solução de $(L_i + rL_j) + (-rL_j) = L_i$ e das demais equações do sistema. Portanto, k é solução de $\mathcal{M}$.

Em qualquer operação tem-se $\mathcal{M} \sim \mathcal{S}_1$. Logo, se $\mathcal{S}$ é obtido por um número finito de operações por linhas, os sistemas intermediários obtidos por cada operação são equivalentes, e portanto, $\mathcal{M} \sim \mathcal{S}$, pois a equivalência de sistemas lineares é transitiva.

■

Observação 2.5. Se partindo de $\mathcal{M}$ obtivermos $\mathcal{S}$, por operações elementares, e $\mathcal{S}$ não admite solução (ter uma equação linear degenerada com constante não nula) então $\mathcal{M}$ também não admite solução; se $\mathcal{S}$ admite uma única solução, então $\mathcal{M}$ admite uma única solução; se $\mathcal{S}$ admite infinitas soluções, então $\mathcal{M}$ admite infinitas soluções.

A técnica para resolver um sistema linear é obter um sistema linear escalonado equivalente, e então analisá-lo. Este processo pode ser feito usando o algoritmo de Gauss seguinte.

Algoritmo (Método de escalonamento de Gauss)

O método de escalonamento de Gauss consiste de uma sequência de operações elementares com linhas num sistema de equações lineares, da forma seguinte.

i) Permutar as equações lineares, se necessário, para ter na linha L_1 o coeficiente $a_{11} \neq 0$;

ii) Obter novas equações lineares $L_2, L_3, \ldots, L_m$ com coeficientes de x_1 iguais a zero, com as operações $L_j \longrightarrow a_{11}L_j - a_{j1}L_1,\ 2 \leq j \leq m$.

iii) Verifique se há equação linear degenerada. Se houver equação linear degenerada com coeficiente não nulo o sistema não tem solução; se tiver equação linear degenerada com coeficiente nulo retire essa(s) equação(ões).

iv) Repita caso não exista equação linear degenerada com coeficiente não nulo os passos anteriores, até obter um sistema escalonado equivalente ao inicial.

Exemplo 2.14. Solucione os sistemas lineares abaixo, se possível.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 13 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ 3x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$

c) $\begin{cases} x + 2y - z + 3t = 3 \\ 2x + 4y + 4z + 3t = 9 \\ 3x + 6y - z + 8t = 10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - z = 5 \\ 2x - 5y + 3z = -4 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$

Solução:

(a) Vamos escalonar o sistema realizando as seguintes operações elementares,

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + z = 1 \\ -x + 3y + 2z = 13 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 + L_1 \\ \sim \end{matrix} \quad \begin{cases} x + y - z = 2 \\ \quad - 3y + 3z = -3 \\ \quad 4y + z = 15 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \longrightarrow \left(-\frac{1}{3}\right) L_2 \\ L_3 \longrightarrow L_3 + \left(\frac{4}{3}\right) L_2 \\ \sim \end{matrix} \quad \begin{cases} x + y - z = 2 \\ \quad y - z = 1 \\ \quad 5z = 11 \end{cases}$$

Por L_3 temos $z = \dfrac{11}{5}$. Substituindo esse valor em L_2, oberemos:

$$y - \frac{11}{5} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{5y - 11}{5} = 1 \quad \Rightarrow \quad 5y - 11 = 5 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{16}{5}.$$

Agora, substituindo $z = \dfrac{11}{5}$ e $y = \dfrac{16}{5}$ em L_1:

$$x + \frac{16}{5} - \frac{11}{5} = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 2 - \frac{16}{5} + \frac{11}{5} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{10 - 16 + 11}{5} \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

Portanto, a solução do sistema é $k = (x,\ y,\ z) = \left(1,\ \dfrac{16}{5},\ \dfrac{11}{5}\right)$.

(b) Procedendo de forma análoga ao item (a), temos,

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 3L_1 \\ \sim \end{matrix} \quad \begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ \quad - 9y + 5z = 0 \\ \quad - 11y + 8z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \longleftrightarrow L_2 \\ L_3 \longrightarrow 9L_3 - 11L_2 \\ \sim \end{matrix} \quad \begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ \quad - 9y + 5z = 0 \\ \quad 17z = 0 \end{cases}.$$

Logo,

$$17z = 0 \Longrightarrow z = 0, \quad -9y + 5z = 0 \Longrightarrow y = 0 \quad \text{e} \quad x + 3y - 2z = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

Portanto, a solução do sistema é $k = (0,\ 0,\ 0)$

(c) Procedendo de forma análoga ao item (a):

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & 3t & = & 3 \\ 2x & + & 4y & + & 4z & + & 3t & = & 9 \\ 3x & + & 6y & - & z & + & 8t & = & 10 \end{array}\right. \quad \begin{array}{lcl} L_2 & \longrightarrow & L_2 - 2L_1 \\ L_3 & \longrightarrow & L_3 - 3L_1 \\ & & \sim \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & 3t & = & 3 \\ & & & & 6z & - & 3t & = & 3 \\ & & & & 2z & - & t & = & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{lcl} L_2 & \longrightarrow & \left(\frac{1}{3}\right) L_2 \\ L_3 & \longrightarrow & L_3 - \left(\frac{1}{3}\right) L_2 \\ & & \sim \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & 3t & = & 3 \\ & & & & 2z & - & t & = & 1 \\ & & & & & & 0t & = & 0 \end{array}\right.$$

Resolvendo o sistema , temos que L_3 é degenerada com constante nula, logo tem infinitas soluções. De L_2 obtemos $z = \dfrac{1+t}{2}$. Substituindo esse valor em L_1:

$$x + 2y - \frac{1+t}{2} + 3t = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 3 - 2y + \frac{1+t}{2} - 3t \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7-4y-5t}{2}.$$

Portanto, a solução do sistema é $S = \left\{\left(\dfrac{7-4y-5t}{2},\ y,\ \dfrac{1+t}{2},\ t\right) / y,\ t \in \mathbb{R}\right\}$.

(d) Procedendo de forma análoga ao item (a), temos,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 5 \\ 2x & - & 5y & + & 3z & = & -4 \\ x & + & 4y & + & 6z & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{lcl} L_2 & \longrightarrow & L_2 - 3L_1 \\ L_3 & \longrightarrow & L_3 - 2L_1 \\ L_4 & \longrightarrow & L_4 - L_1 \\ & & \sim \end{array} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ & - & 8y & - & 7z & = & -1 \\ & - & 9y & - & z & = & -8 \\ & & 2y & + & 4z & = & -2 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lcl} L_2 & \longrightarrow & (-1)L_2 \\ L_3 & \longrightarrow & L_3 + \left(\frac{9}{2}\right) L_4 \\ L_4 & \longrightarrow & L_4 + \frac{1}{4} L_2 \\ & & \sim \end{array} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ & & 8y & + & 7z & = & 1 \\ & & & & 17z & = & -17 \\ & & & & 9z & = & -9 \end{array}\right. \sim$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ & & 8y & + & 7z & = & 1 \\ & & & & z & = & -1 \end{array}\right.$$

Logo,

$$z = -1, \quad 8y + 7z = 1 \Longrightarrow y = 1 \quad \text{e} \quad x + 2y + 2z = 2 \Longrightarrow x = 2$$

Portanto, a solução do sistema é $k = (2,\ 1,\ -1)$. $\diamond$

Exemplo 2.15. Determine o valor de k para que o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & kz & = & 3 \\ x & + & ky & + & 3z & = & 2 \end{array}\right. ,$$

i) tenha solução única;

ii) tenha infinitas soluções;

iii) não admita solução.

Solução: Vamos escalonar o sistema realizando as seguintes operações elementares,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & kz & = & 3 \\ x & + & ky & + & 3z & = & 2 \end{array}\right. \quad \begin{array}{lcl} L_1 & \longleftrightarrow & L_1 \\ L_2 & \longrightarrow & L_2 - 2L_1 \\ L_3 & \longrightarrow & L_3 - L_1 \\ & \sim & \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & (k+2)z & = & 1 \\ & & (k+1)y & + & 4z & = & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{lcl} L_1 & \longleftrightarrow & L_1 \\ L_2 & \longleftrightarrow & L_2 \\ L_3 & \longrightarrow & L_3 - (k-1)L_2 \\ & & \sim \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & y & + & (k+2)z & = & 1 \\ & & & - & (k+3)(k-2)z & = & -(k-2) \end{array}\right.$$

i) Para o sistema ter solução única o sistema escalonado equivalente deve ser triangular. Portanto, $-(k+3)(k-2) \neq 0$, ou seja, $k \neq -3$ e $k \neq 2$.

ii) Para o sistema ter infinitas soluções o sistema escalonado equivalente deve ter uma variável livre e não ter equação linear degenerada com constante não nula. Somente z pode ser livre e isto acontece quando $k = -3$ ou $k = 2$ e para ter uma equação linear degenerada com constante nula deve-se ter $k = 2$. Portanto $k = 2$.

iii) Para o sistema não admitir solução o sistema escalonado equivalente deve ter uma equação degenerada com constante não nulo. Portanto $k = -3$. ◇

Exemplo 2.16. Qual a condição para que o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 2x & + & 6y & - & 11z & = & b \\ x & - & 2y & + & 7z & = & c \end{array}\right. ,$$

i) tenha solução única;

ii) tenha infinitas soluções;

iii) não admita solução.

Solução: Vamos escalonar o sistema dado, realizando as seguintes operações elementares,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 2x & + & 6y & - & 11z & = & b \\ x & - & 2y & + & 7z & = & c \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - L_1 \\ \qquad \sim \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ & & 2y & - & 5z & = & b - 2a \\ & - & 4y & + & 10z & = & c - a \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_2 \longleftrightarrow L_2 \\ L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_2 \\ \qquad \sim \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ & & 2y & - & 5z & = & b - 2a \\ & & & & 0z & = & -5a + 2b + c \end{array}\right.$$

i) Como o sistema escalonado não é triangular $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$, tem-se que o sistema não admite solução única.

ii) Tem infinitas soluções quando houver equação linear degenerada com constante nula, ou seja, $-5a + 2b + c = 0$.

iii) Deve ter uma equação degenerada com constante não nula, logo $-5a+2b+c \neq 0$.

$\diamond$

2.7 Sistemas lineares homogêneos

Definição 2.11. *Um sistema linear é dito homogêneo se as suas constantes forem nulas.*

Explicitando a definição, um sistema de equações lineares é homogêneo se tem a forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & 0 \\ & & & \vdots & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}.$$

Qualquer sistema linear homogêneo admite no mínimo uma solução, $k = (0,\ 0, \ldots,\ 0)$ dita solução nula ou trivial. Se admitir outra solução além da trivial então admite infinitas soluções.

Dado o sistema linear não homogêneo

$$\mathcal{M} : \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ & & & \vdots & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

dizemos que o sistema linear homogêneo abaixo

$$\mathcal{M}' : \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & 0 \\ & & & \vdots & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

é o sistema linear homogêneo associado ao sistema linear $\mathcal{M}$.

Teorema 2.9. *Se x é solução do sistema linear $\mathcal{M}_{m\times n}$ e x_h é solução do seu sistema linear homogêneo associado, então $x + x_h$ é solução de $\mathcal{M}_{m\times n}$. Também, se x_1 e x_2 são soluções de $\mathcal{M}_{m\times n}$, então $x_1 - x_2$ é solução do sistema linear homogêneo associado.*

Prova: Seja $x = (k_1,\ k_2,\ k_3,\ \ldots,\ k_n)$ uma solução do sistema linear de $\mathcal{M}_{m\times n}$ e $x_h = (r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots,\ r_n)$ uma solução do sistema linear homogêneo associado. Para toda equação linear l, com $1 \leq l \leq m$, temos

$$\begin{cases} a_{l1}k_1 & + & a_{l2}k_2 & + & a_{l3}k_3 & + & \cdots & + & a_{ln}k_n & = & b_l \\ a_{l1}r_1 & + & a_{l2}r_2 & + & a_{l3}r_3 & + & \cdots & + & a_{ln}r_n & = & 0 \end{cases}$$

Somando as duas equações obtemos

$$a_{l1}(k_1 + r_1) + a_{l2}(k_2 + r_2) + a_{l3}(k_3 + r_3) + \ldots + a_{ln}(k_n + r_n) = b_l, \quad \forall l, 1 \leq l \leq m.$$

Logo, $x + x_h$ é solução do sistema linear $\mathcal{M}_{m\times n}$, pois é solução de todas as suas equações do sistema.

Dadas $x_1 = (k_{11},\ k_{12},\ k_{13},\ \ldots,\ k_{1n})$ e $x_2 = (k_{21},\ k_{22},\ k_{23},\ \ldots,\ k_{2n})$ duas soluções do sistema linear $\mathcal{M}_{m\times n}$ e l uma de suas linhas, com $1 \leq l \leq m$, temos:

$$\begin{cases} a_{l1}k_{11} & + & a_{l2}k_{12} & + & a_{l3}k_{13} & + & \cdots & + & a_{ln}k_{1n} & = & b_l \\ a_{l1}k_{21} & + & a_{l2}k_{22} & + & a_{l3}k_{23} & + & \cdots & + & a_{ln}k_{2n} & = & b_l \end{cases}$$

tomando a diferença das equações obtemos

$$a_{l1}(k_{11} - k_{21}) + a_{l2}(k_{12} - k_{22}) + a_{l3}(k_{13} - k_{23}) + \cdots + a_{ln}(k_{1n} - k_{2n}) = 0.$$

Isso significa que $x_1 - x_2$ é solução do sistema linear homogêneo associado, pois é solução de todas as suas equações.

$\blacksquare$

3 REPRESENTAÇÃO MATRICIAL E DETERMINANTE DE UM SISTEMA LINEAR

3.1 Representação matricial de um sistemas linear

Para simplificar o processo de escalonamento vamos representar o sistema linear

$$\mathcal{M}_{m\times n}\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ & & & & \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

de modo simplificado, usando as seguintes convenções:

i) Não serão representadas as variáveis, os símbolos de adição e os de igualdade; serão representados apenas os coeficientes e as constantes. É obrigatório colocar os coeficientes nulos e constantes nulas;

ii) Os coeficientes e as constantes ficarão dispostos de forma retangular, estando na primeira linha os elementos da primeira equação, na segunda linha os elementos da segunda equação, e assim sucessivamente. Na primeira coluna ficarão os coeficientes da primeira variável, na segunda coluna os elementos da segunda variável, e assim sucessivamente, estando na penúltima coluna os elementos da última variável e na última coluna as constantes da equações;

iii) Podemos colocar estes números entre colchetes ou parenteses.

O sistema linear acima será representado da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Está representação simplificada será dita representação matricial do sistema ou matriz associada ao sistema. A matriz associada ao sistema $m \times n$ será dita matriz $m \times (n+1)$.

Exemplo 3.1. O sistema linear 3×3

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ 2x + 3z = 4 \\ 2y + z = -2 \end{cases}$$

tem a seguinte representação matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

◇

Exemplo 3.2. Temos que

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

é a representação matricial do sistema de equações lineares 3×4

$$\begin{cases} 3x + 2y + z + 5w = 0 \\ -x + 4y = 3 \\ 6x - w = 2 \end{cases}$$

A última coluna é constituída pelas constantes do sistema. ◇

Usaremos a representação simplificada dos sistemas equivalentes no processo de escalonamento. É como se as operações elementares com as equações fossem feitas com as linhas da representação matricial do sistema.

Podemos realizar as operações elementares nas linhas do sistema simplificado, obtendo um novo sistema também simplificado. Vejamos um exemplo.

Exemplo 3.3. Usando representação matricial resolva os sistemas abaixo.

$$\text{a)} \begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 3z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 4 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} x + 2y - 3z + w = 0 \\ x - 3y + z - 2w = 0 \\ 2x + y - 3z + 5w = 0 \end{cases}$$

Solução:

$$\text{a)} \begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 3z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} L_1 & \longleftrightarrow & L_1 \\ L_2 & \longrightarrow & 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 & \longrightarrow & 2L_3 - 5L_1 \end{matrix} \quad \sim$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 12 & -28 \\ 0 & 3 & 16 & -42 \end{array} \quad \underset{\sim}{\begin{array}{lcl} L_1 & \longleftrightarrow & L_1 \\ L_2 & \longleftrightarrow & L_2 \\ L_3 & \longrightarrow & L_3 - 3L_2 \end{array}} \quad \begin{array}{cccc} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 12 & -28 \\ 0 & 0 & -20 & 42 \end{array} \quad \underset{\sim}{\begin{array}{lcl} L_1 & \longrightarrow & L_1 - L_2 \\ L_2 & \longleftrightarrow & L_2 \\ L_3 & \longrightarrow & \left(-\frac{1}{20}\right)L_3 \end{array}}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 0 & -14 & 38 \\ 0 & 1 & 12 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{21}{10} \end{array} \quad \underset{\sim}{\begin{array}{lcl} L_1 & \longrightarrow & \frac{1}{2}L_1 + 7L_3 \\ L_2 & \longrightarrow & L_2 - 12L_3 \\ L_3 & \longleftrightarrow & L_3 \end{array}} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{43}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{28}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{21}{10} \end{array}$$

Logo, $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & 2z & = & 10 \\ 3x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 5x & + & 4y & + & 3z & = & 4 \end{array} \right. \quad \sim \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \frac{43}{10} \\ y & = & -\frac{28}{10} \\ z & = & -\frac{21}{10} \end{array} \right.$

Portanto, a solução do sistema é $S = \left(\frac{43}{10}, -\frac{28}{10}, -\frac{21}{10}\right)$.

b) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & + & w & = & 0 \\ x & - & 3y & + & z & - & 2w & = & 0 \\ 2x & + & y & - & 3z & + & 5w & = & 0 \end{array} \right. \longrightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 5 & 0 \end{array} \quad \underset{\sim}{\begin{array}{lcl} L_1 & \longleftrightarrow & L_1 \\ L_2 & \longrightarrow & L_2 - L_1 \\ L_3 & \longrightarrow & L_3 - 2L_1 \end{array}}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & 0 \end{array} \quad \underset{\sim}{\begin{array}{lcl} L_1 & \longleftrightarrow & L_1 \\ L_2 & \longleftrightarrow & L_2 \\ L_3 & \longrightarrow & -\frac{1}{3}L_3 \end{array}} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \quad \underset{\sim}{\begin{array}{lcl} L_1 & \longleftrightarrow & L_1 \\ L_2 & \longrightarrow & L_3 \end{array}}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -3 & 0 \end{array} \quad \underset{\sim}{\begin{array}{lcl} L_1 & \longrightarrow & L_1 - 2L_2 \\ L_2 & \longleftrightarrow & L_2 \\ L_3 & \longrightarrow & L_3 + 5L_2 \end{array}} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 0 \end{array} \quad \underset{\sim}{\begin{array}{lcl} L_1 & \longleftrightarrow & L_1 \\ L_2 & \longleftrightarrow & L_2 \\ L_3 & \longrightarrow & (-1)L_3 \end{array}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\begin{array}{ccc} L_1 & \longrightarrow & L_1 + L_3 \\ L_2 & \longrightarrow & L_2 + L_3 \\ L_3 & \longleftrightarrow & L_3 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, $\begin{cases} x + 2y - 3z + w = 0 \\ x - 3y + z - 2w = 0 \\ 2x + y - 3z + 5w = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 11w = 0 \\ y + 7w = 0 \\ z + 8w = 0 \end{cases} \sim$

$$\sim \begin{cases} x = -11w \\ y = -7w \\ z = -8w \\ w = w \end{cases}$$

Portanto, a solução do sistema dado é $S = \{(-11w,\ -7w,\ -8w,\ w); \forall w \in \mathbb{R}\}$.

◇

Definição 3.1. *Chamaremos de matriz completa do sistema a representação simplificada de um sistema linear e matriz dos coeficientes a representação matricial do sistema linear excluída a coluna das constantes.*

Dado o sistema linear,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sua matriz completa é

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

e a matriz dos coeficientes é

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

3.2 Determinante de um sistema linear $n \times n$

Dado um sistema linear $n \times n$ iremos determinar a condição necessária e suficiente para que esse sistema tenha solução única. A condição é dada por um número (que será chamado de determinante do sistema) que depende apenas dos coeficientes do sistema. Mostraremos isto por indução matemática, fazendo os casos $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e n qualquer.

Teorema 3.1. (Sistema Linear 1×1) *Um sistema linear $a_{11}x_1 = b_1$ tem solução única se, e somente se,*

$$a_{11} \neq 0, \text{ e neste caso } x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

Prova: i) Mostraremos que se o sistema linear tem solução única, então $a_{11} \neq 0$. Supondo que a_{11} seja igual a zero, temos:

$$0x_1 = b_1.$$

Analisando a equação acima, podemos ver que ela terá infinitas soluções se $b_1 = 0$ e não terá solução se $b_1 \neq 0$, e em ambos os casos contraria a hipótese.

Portanto $a_{11} \neq 0$ e a solução do sistema será dada por

$$a_{11}x_1 = b_1 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

ii) Mostraremos agora que se $a_{11} \neq 0$, então o sistema terá solução única. De fato, pois como $a_{11} \neq 0$, podemos dividir ambos os membros da equação $a_{11}x_1 = b_1$ por a_{11}, obteremos

$$a_{11}x_1 = b_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a_{11}x_1}{a_{11}} = \frac{b_1}{a_{11}} \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

o que mostra que o sistema tem solução única.

■

Teorema 3.2. (Sistema Linear 2×2**)** *O sistema linear* $\left\{\begin{array}{rcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array}\right.$ *tem solução única se e somente se*

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0,$$

e neste caso

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad e \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Prova: i) Mostraremos que se o sistema linear tem solução única então

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

Como por hipótese o sistema tem solução única, ele não possui variável livre, e assim, um dos coeficientes de x_1 deve ser não nulo. Para efeito de cálculo suponhamos que $a_{11} \neq 0$. Façamos uma operação elementar ($L_2 \longrightarrow a_{11}L_2 - a_{21}L_1$) nas linhas da matriz completa do sistema linear:

$$\left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right) \quad \underset{\sim}{L_2 \longrightarrow a_{11}L_2 - a_{21}L_1} \quad \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{array}\right).$$

Agora, do sistema da representação matricial acima vamos excluir a primeira linha e a primeira coluna, obtendo assim, a representação de um novo sistemas linear formado por uma única equação com uma única variável (x_2). Pelo caso anterior, este sistema linear 1×1 tem solução única se o coeficiente de x_2 for não nulo, ou seja, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Portanto, temos o valor

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 &= a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \\ x_2 &= \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{aligned}$$

Tendo este sistema solução única, o sistema completo 2×2 terá também solução única, bastando substituir o valor de x_2 na primeira equação para encontrarmos um valor único para x_1. De fato,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}} = \frac{b_1 - a_{12}\left(\dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\right)}{a_{11}} \\ x_1 &= \frac{b_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - a_{12}(a_{11}b_2 - b_1a_{21})}{a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \\ x_1 &= \frac{a_{11}a_{22}b_1 - a_{11}a_{12}b_2}{a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{aligned}$$

Portanto, o sistema linear 2×2 terá solução única dada por:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

ii) Mostraremos que se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, então o sistema terá solução única. Como por hipótese $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, tem-se que $a_{11} \neq 0$ ou $a_{21} \neq 0$. Para efeito de cálculo, suponhamos que $a_{11} \neq 0$. Consideremos a matriz completa do sistema e realizemos a operação elementar $L_2 \longrightarrow a_{11}L_2 - a_{21}L_1$, assim:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{L_2 \longrightarrow a_{11}L_2 - a_{21}L_1} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{pmatrix}$$

Como $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ tem-se que x_2 admite um valor única. Sendo $a_{11} \neq 0$, temos que x_1 também admitirá valor único.

■

Chamaremos o número $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ de determinante do sistema linear 2×2. Observe que esse número está intimamente ligada a matriz dos coeficientes e é simplesmente lembrado como sendo o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária. Simbolizaremos o determinante do sistema 2×2 por

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Assim, usando essa notação, temos:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Observe que o "determinante" no numerador é obtido do determinante no denominador substituindo a primeira coluna pela coluna das constantes para x_1 e a segunda coluna para x_2.

Teorema 3.3. (Sistema Linear 3×3**)** *O sistema linear*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases},$$

tem solução única se e somente se

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \neq 0,$$

e neste caso

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2a_{33} - a_{13}b_2a_{31} - b_1a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}b_3 + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}}$$

$$x_3 = \frac{a_{11}a_{22}b_3 - b_1a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}b_3 - a_{11}b_2a_{32} + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}}$$

Prova: i) Procedendo de forma análoga ao caso anterior, mostraremos que se o sistema linear tem solução única então $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \neq 0$. Como por hipótese o sistema tem solução única, ele não possui variável livre, e assim, $a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 \neq 0$. Para efeito de cálculo suponhamos que $a_{11} \neq 0$. Temos então:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix} \begin{array}{ccc} L_1 & \longleftrightarrow & L_1 \\ L_2 & \longrightarrow & a_{11}L_2 - a_{21}L_1 \\ L_3 & \longrightarrow & a_{11}L_3 - a_{31}L_1 \\ & & \sim \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{11}b_3 - a_{31}b_1 \end{pmatrix}.$$

Novamente, excluindo a primeira linha e a primeira coluna obtemos um novo sistemas linear 2×2 nas variáveis x_2 e x_3. Pelo caso anterior, este tem solução única se o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundário da matriz dos coeficientes do sistema linear,

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 & + & (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})x_3 & = & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \\ (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})x_2 & + & (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})x_3 & = & a_{11}b_3 - a_{31}b_1 \end{cases}$$

for não nulo, ou seja, se

$$\begin{aligned} 0 &\neq \begin{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{vmatrix} \\ &\neq (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) \\ &\neq a_{11}(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \neq 0$$

Podemos encontrar x_2 e x_3 como no teorema anterior.

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11}b_2 - a_{21}b_1 & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ a_{11}b_3 - a_{31}b_1 & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{vmatrix}} \\
&= \frac{(a_{11}b_2 - a_{21}b_1)(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})(a_{11}b_3 - a_{31}b_1)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})} \\
&= \frac{a_{11}^2a_{33}b_2 - a_{11}a_{13}a_{31}b_2 - a_{11}a_{21}a_{33}b_1 - a_{11}^2a_{23}b_3 + a_{11}a_{23}a_{31}b_1 + a_{11}a_{13}a_{21}b_3}{a_{11}^2a_{22}a_{33} - a_{11}a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}^2a_{23}a_{32} + a_{11}a_{12}a_{23}a_{31} + a_{11}a_{13}a_{21}a_{32}} \\
&= \frac{a_{11}b_2a_{33} - a_{13}b_2a_{31} - b_1a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}b_3 + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
x_3 &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \\ a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}b_3 - a_{31}b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{vmatrix}} \\
&= \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{11}b_3 - a_{31}b_1) - (a_{11}b_2 - a_{21}b_1)(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})} \\
&= \frac{a_{11}^2a_{22}b_3 - a_{11}a_{22}a_{31}b_1 - a_{11}a_{12}a_{21}b_3 - a_{11}^2a_{32}b_2 + a_{11}a_{12}a_{31}b_2 + a_{11}a_{21}a_{32}b_1}{a_{11}^2a_{22}a_{33} - a_{11}a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}^2a_{23}a_{32} + a_{11}a_{12}a_{23}a_{31} + a_{11}a_{13}a_{21}a_{32}} \\
&= \frac{a_{11}a_{22}b_3 - b_1a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}b_3 - a_{11}b_2a_{32} + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}}
\end{aligned}
$$

Para encontrar o valor de x_1 vamos substituir os valores de x_2 e x_3 encontrados na primeira equação do sistema linear 3×3. Como $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$ tem-se

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}\\
&= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}x_2}{a_{11}} - \frac{a_{13}x_3}{a_{11}}\\
&= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}\left(\dfrac{a_{11}b_2a_{33} - a_{13}b_2a_{31} - b_1a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}b_3 + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}}\right)}{a_{11}} -\\
&\quad - \frac{a_{13}\left(\dfrac{a_{11}a_{22}b_3 - b_1a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}b_3 - a_{11}b_2a_{32} + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}}\right)}{a_{11}}\\
&= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}\left(a_{11}b_2a_{33} - a_{13}b_2a_{31} - b_1a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}b_3 + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3\right)}{a_{11}\left(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right)} -\\
&\quad - \frac{a_{13}\left(a_{11}a_{22}b_3 - b_1a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}b_3 - a_{11}b_2a_{32} + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32}\right)}{a_{11}\left(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right)}\\
&= \frac{a_{11}a_{22}a_{33}b_1 - a_{11}a_{23}a_{32}b_1 - a_{12}a_{11}b_2a_{33} + a_{12}a_{11}a_{23}b_3 - a_{13}a_{11}a_{22}b_3 + a_{13}a_{11}b_2a_{32}}{a_{11}\left(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right)}\\
&= \frac{b_1a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}}
\end{aligned}
$$

Portanto, o sistema linear 3×3 terá solução única dada por:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2a_{33} - a_{13}b_2a_{31} - b_1a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}b_3 + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}}$$

$$x_3 = \frac{a_{11}a_{22}b_3 - b_1a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}b_3 - a_{11}b_2a_{32} + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}}$$

ii) Mostraremos que se $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \neq 0$, então o sistema terá solução única. Como por hipótese $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \neq 0$, podemos afirmar que um dos $a_{i1} \neq 0$, em que $i = 1,\ 2,\ 3$. Para efeito de cálculo, suponhamos que $a_{11} \neq 0$. Consideremos a matriz completa do sistema e realizemos a operação elementar $L_k \longrightarrow a_{11}L_k - a_{k1}L_1$, em que $2 \leq k \leq 3$, sobre as linhas da matriz. Assim:

$$\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right) \begin{array}{ccc} L_1 & \longleftrightarrow & L_1 \\ L_2 & \longrightarrow & a_{11}L_2 - a_{21}L_1 \\ L_3 & \longrightarrow & a_{11}L_3 - a_{31}L_1 \\ & \sim & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{11}b_3 - a_{31}b_1 \end{array}\right).$$

Excluindo a primeira linha e a primeira coluna obtendo a representação de um novo sistemas linear 2×2, nas variáveis x_2 e x_3. Pelo caso anterior, este sistemas linear terá solução única se o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária for não nulo, ou seja,

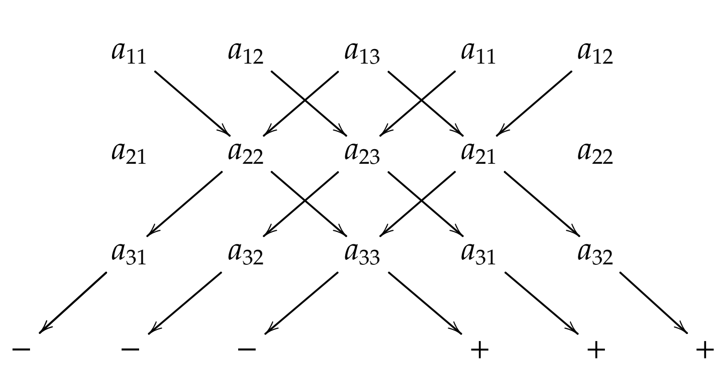
$$\begin{array}{rcl} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) & \neq & 0 \\ a_{11}(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) & \neq & 0 \\ a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} & \neq & 0 \end{array}$$

Mas isto é verdadeiro por hipótese e portanto o sistema linear 2×2 tem solução única. Substituindo x_2 e x_3 na primeira linha do sistema linear 3×3 obteremos um único x_1, pois $a_{11} \neq 0$. Portanto o sistema terá solução única.

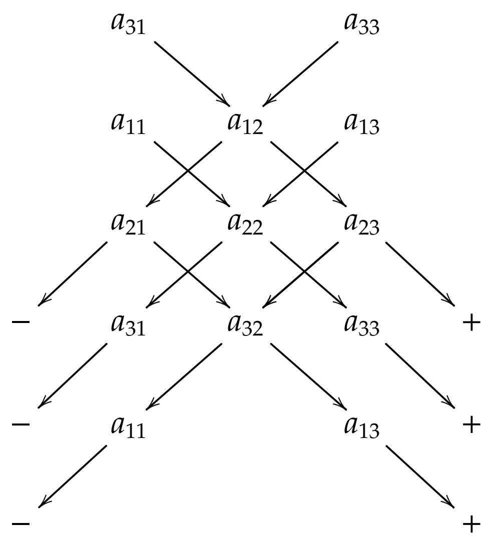
■

Observação 3.1. Para guardar esse número, que chamaremos de determinante do sistema 3×3, podemos usar dois algoritmos muito conhecidos, a saber:

i) Algoritmos de Sarrus:



ou



Em ambos os casos efetuaremos as multiplicações seguindo os sentidos das setas, assim:

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

ii) Desenvolvimento de Laplace:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Em qualquer um dos dois casos, podemos representar o número

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \neq 0$$

usando o símbolo do determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Assim,

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Observe que, para x_2, nas parcelas do numerador os $b_1,\ b_2,\ b_3$ substituem os $a_{12},\ a_{22},\ a_{32}$ das parcelas do denominador, respectivamente, e para x_3, os números $b_1,\ b_2,\ b_3$ substituem os $a_{13},\ a_{23},\ a_{33}$. Portanto, x_2 e x_3 são lembrados usando o símbolo do determinante, substituindo a segunda coluna pela coluna das constantes para x_2, e substituindo a terceiro coluna pela coluna das constantes para x_3. Ficando assim:

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2a_{33} - a_{13}b_2a_{31} - b_1a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}b_3 + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

e

$$x_3 = \frac{a_{11}a_{22}b_3 - b_1a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}b_3 - a_{11}b_2a_{32} + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

De forma análoga às anteriores, ao calcular x_1, observamos que nas parcela do numerador os $b_1,\ b_2,\ b_3$ substituem os $a_{11},\ a_{21},\ a_{31}$, respectivamente, das parcelas do denominador. Portanto, ele é facilmente guardado usando o determinante, substituindo a primeira coluna da matriz do numerador pela coluna das constantes. Ficando assim:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Assim, temos a solução única:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

Observações importantes:

i) O determinante do sistema linear 3×3 será simbolizado por $det(S_{3\times3})$ e é dado por uma soma de produtos, em que cada parcela dessa soma possui 3 fatores distintos, sendo um de cada linha e um de cada coluna;

ii) O número de produtos desse determinante será $3! = 6$;

iii) O sinal de cada produto será determinado pelo número de inversões da ordem 123. Se não houve inversões ou teve um número par de inversões o sinal é positivo; se o número de inversões for ímpar o sinal é negativo. Portanto o sinal do termo será dado por $(-1)^j$, onde j é o número de inversões de uma permutação. Veremos em seguida o que é uma permutação e o que é uma inversão.

Definição 3.2. (Permutação) *Dado o conjunto $I_n = \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$ com n números naturais, qualquer sequência com n números desse conjunto será dito uma permutação de I_n.*

Exemplo 3.4. Consideremos o conjunto $I_3 = \{1,\ 2,\ 3\}$. Com os 3 elementos desse conjunto temos um total de $3! = 3.2.1 = 6$ permutações, a saber:

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321$$

◇

Exemplo 3.5. Considere o conjunto $I_4 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. Com os 4 elementos desse comjunto temos um total de $4! = 4.3.2.1 = 24$ permutações, como podemos ver abaixo:

$$1234,\ 1243,\ 1324,\ 1342,\ 1423,\ 1432,\ 2134,\ 2143,\ 2314,\ 2341,\ 2413,\ 2431,$$
$$3124,\ 3142,\ 3214,\ 3241,\ 3412,\ 3421,\ 4123,\ 4132,\ 4213,\ 4231,\ 4312,\ 4321$$

◇

Cada permutação será simbolizada por uma letra minúscula e o conjunto de todas essas permutações de $I_n = \{1,\ 2,\ \dots\ n\}$ será simbolizada por S_n.

Portanto:

$$S_3 = \{123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321\}$$

$S_4 = \{1234,\ 1243,\ 1324,\ 1342,\ 1423,\ 1432,\ 2134,\ 2143,\ 2314,\ 2341,\ 2413,\ 2431,$ $3124,\ 3142,\ 3214,\ 3241,\ 3412,\ 3421,\ 4123,\ 4132,\ 4213,\ 4231,\ 4312,\ 4321\}$

Observe que o conjunto S_n tem $n!$ permutações.

Definição 3.3. (Inversão) *Uma inversão é a mudança de dois números vizinhos numa permutação. Uma permutação em que os números estão na ordem crescente é dita sem inversões.*

Para determinar a quantidade de inversões de uma permutação dada partisse da permutação sem inversões e conta-se quantas inversões serão necessárias para obtermos tal permutação, ou parte da permutação e retornar para a ordem natural.

Exemplo 3.6. Na permutação 1243 há uma inversão, do 3 com 4; na permutação 1423 há duas inversão: do 4 com 3 e do 4 com 2; na permutação 4123 há três inversões: do 4 com 3, 4 com 2 e do 4 com 1. ◇

Observação 3.2. O número de inversões j pode ser determinado pela soma das quantidades de números menores a direita de cada um dos número da permutação; ou pela soma das quantidades de números maiores a esqurda de cada número da permutação.

Exemplo 3.7. Na permutação 4123 de S_4 há três inversões, pois *à* direita do 4 há 3 números menores que 4, e *à* direita do 1, do 2 e do 3 não hão números menores. Portanto, $j = 3 + 0 + 0 + 0 = 3$. ◇

Exemplo 3.8. Na permutação 54132 de S_5 hão oito inversões, pois a direita do 5 há 4 números menores que 5, hão 3 números menores que 4 a direita do 4, há 0 números menores que 1 a direita do 1 e há 1 números menores que 3 a direita do 3. Portanto, $j = 4 + 3 + 0 + 1 = 8$. ◇

Teorema 3.4. (Sistema Linear $n \times n$, Regra de Cramer) *O sistema linear*

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1(n-1)}x_{(n-1)} & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2(n-1)}x_{(n-1)} & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & \cdots & + & a_{3(n-1)}x_{(n-1)} & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n(n-1)}x_{(n-1)} & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases},$$

tem solução única se e somente se

$$det(S_{n\times n}) = \sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} l_n \in S_n} (-1)^j a_{1l_1} a_{2l_2} \ldots a_{(n-1)l_{(n-1)}} a_{nl_n} \neq 0$$

e neste caso cada x_i será dado por

$$x_i = \frac{\displaystyle\sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} l_n \in S_n} (-1)^j a_{1l_1} a_{2l_2} a_{3l_3} \ldots a_{(i-1)l_{(i-1)}} b_{l_i} a_{(i+1)l_{(i+1)}} \ldots a_{(n-1)l_{(n-1)}} a_{nl_n}}{\displaystyle\sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} l_n \in S_n} (-1)^j a_{1l_1} a_{2l_2} a_{3l_3} \ldots a_{(i-1)l_{(i-1)}} a_{il_i} a_{(i+1)l_{(i+1)}} \ldots a_{(n-1)l_{(n-1)}} a_{nl_n}},$$

em que $1 \leq i \leq n$.

Prova: i) Mostraremos que se o sistema linear tem solução única, então $det(S_{n\times n}) \neq 0$.

Faremos isto por indução matemática. Já vimos que vale para $n = 1$. Suponhamos válido para $n-1$ e mostraremos que é válido para n. Como por hipótese o sistema linear $n \times n$ tem solução única, este não possui variável livre, e assim, um dos coeficientes de x_n deve ser não nulo. Para efeito de cálculo suponhamos $a_{nn} \neq 0$. Vamos agora realizar algumas operações elementares com as linhas desse sistema linear, com o objetivo de zerar todos os coeficientes a_{kn} de x_n, em que $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Trocaremos L_k por $a_{nn}L_k - a_{kn}L_n$, para $1 \leq k \leq (n-1)$ e manteremos L_n fixa. Assim, temos o novo sistema linear equivalente ao anterior,

$$\left\{\begin{array}{rcccccl}
(a_{11}a_{nn} - a_{1n}a_{n1})x_1 & + & \cdots & + & 0x_n & = & b_1a_{nn} - a_{1n}b_n \\
(a_{21}a_{nn} - a_{2n}a_{n1})x_1 & + & \cdots & + & 0x_n & = & b_2a_{nn} - a_{2n}b_n \\
(a_{31}a_{nn} - a_{3n}a_{n1})x_1 & + & \cdots & + & 0x_n & = & b_3a_{nn} - a_{3n}b_n \\
 & \vdots & & & & \vdots & \\
(a_{(n-1)1}a_{nn} - a_{(n-1)n}a_{n1})x_1 & + & \cdots & + & 0x_n & = & b_{(n-1)}a_{nn} - a_{(n-1)n}b_n \\
a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}\right.$$

Fazendo $a_{kl}a_{nn} - a_{kn}a_{nl} = A_{kl}$ e $b_ka_{nn} - a_{kn}b_n = B_k$, com $1 \leq k,\ l \leq (n-1)$, no sistema acima, obtemos o sistema linear abaixo,

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & \cdots & + & A_{1(n-1)}x_{(n-1)} & + & 0x_n & = & B_1 \\
A_{21}x_1 & + & A_{22}x_2 & + & \cdots & + & A_{2(n-1)}x_{(n-1)} & + & 0x_n & = & B_2 \\
A_{31}x_1 & + & A_{32}x_2 & + & \cdots & + & A_{3(n-1)}x_{(n-1)} & + & 0x_n & = & B_3 \\
 & & \vdots & & & & & & \vdots & & \\
A_{(n-1)1}x_1 & + & A_{(n-1)2}x_2 & + & \cdots & + & A_{(n-1)(n-1)}x_{(n-1)} & + & 0x_n & = & B_{(n-1)} \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n(n-1)}x_{(n-1)} & + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}\right.$$

Excluindo do sistema linear acima a última linha (L_n) e a última coluna dos coeficientes de x_n, obtemos um novo sistema linear $(n-1) \times (n-1)$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & \cdots & + & A_{1(n-1)}x_{(n-1)} & = & B_1 \\
A_{21}x_1 & + & A_{22}x_2 & + & \cdots & + & A_{2(n-1)}x_{(n-1)} & = & B_2 \\
A_{31}x_1 & + & A_{32}x_2 & + & \cdots & + & A_{3(n-1)}x_{(n-1)} & = & B_3 \\
 & & \vdots & & & & & & \vdots \\
A_{(n-1)1}x_1 & + & A_{(n-1)2}x_2 & + & \cdots & + & A_{(n-1)(n-1)}x_{(n-1)} & = & B_{(n-1)}
\end{array}\right.$$

Como o sistema completo tem solução única, tem-se que o sistema acima também tem solução única e portanto deve ter, por hipótese de indução:

$$\sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} \in S_{(n-1)}} (-1)^j A_{1l_1}A_{2l_2}A_{3l_3}\ldots A_{(n-1)l_{(n-1)}} \neq 0$$

Temos então

$$0 \neq \sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} \in S_{(n-1)}} (-1)^j A_{1l_1} A_{2l_2} A_{3l_3} \ldots A_{(n-1)l_{(n-1)}} =$$

$$= \sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} \in S_{(n-1)}} (-1)^j (a_{1l_1} a_{nn} - a_{1n} a_{nl_1})(a_{2l_2} a_{nn} - a_{2n} a_{nl_2}) \ldots (a_{(n-1)l_{(n-1)}} a_{nn} - a_{(n-1)n} a_{nl_{(n-1)}})$$

Como podemos ver, o somatório acima é formado por um produto de $(n-1)$ fatores, e cada um desses fatores é da forma $a_{kl_k} a_{nn} - a_{kn} a_{nl_k}$. Antes de aplicar o samatório vamos encontrar o produto, procedendo da seguinte forma: Vamos multiplicar todas as primeiras parcelas de cada fator; posteriormente vamos multiplicar a segunda parcela do primeiro fator por todas as primeiras parcelas dos demais fatores; posteriormente a segunda parcela do segundo fator por todas as primeiras parcelas dos demais fator, e continuaremos esse processo de multiplicar a segunda parcela de cada fator por todas as primeiras parcelas dos demais fatores até a última parcela. Os demais termos do produto será denotado por R e mostraremos depois que $R = 0$.

Temos então

$$\begin{aligned}
= \sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} \in S_{(n-1)}} (-1)^j \, \{ & a_{1l_1} a_{2l_2} a_{3l_3} \ldots a_{(n-2)l_{(n-2)}} a_{(n-1)l_{(n-1)}} a_{nn} a_{nn}^{n-2} - \\
& - a_{1n} a_{2l_2} a_{3l_3} \ldots a_{(n-2)l_{(n-2)}} a_{(n-1)l_{(n-1)}} a_{nl_1} a_{nn}^{n-2} - \\
& - a_{1l_1} a_{2n} a_{3l_3} \ldots a_{(n-2)l_{(n-2)}} a_{(n-1)l_{(n-1)}} a_{nl_2} a_{nn}^{n-2} - \\
& - a_{1l_1} a_{2l_2} a_{3n} \ldots a_{(n-2)l_{(n-2)}} a_{(n-1)l_{(n-1)}} a_{nl_3} a_{nn}^{n-2} - \\
& - \cdots - a_{1l_1} a_{2l_2} a_{3l_3} \ldots a_{(n-2)l_{(n-2)}} a_{(n-1)n} a_{nl_{(n-1)}} a_{nn}^{n-2} \} + R =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} \in S_{(n-1)}} (-1)^j a_{1l_1} a_{2l_2} a_{3l_3} \ldots a_{(n-2)l_{(n-2)}} a_{(n-1)l_{(n-1)}} a_{nn} a_{nn}^{n-2} + \\
&+ \sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} \in S_{(n-1)}} -(-1)^j a_{1n} a_{2l_2} a_{3l_3} \ldots a_{(n-2)l_{(n-2)}} a_{(n-1)l_{(n-1)}} a_{nl_1} a_{nn}^{n-2} + \\
&+ \sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} \in S_{(n-1)}} -(-1)^j a_{1l_1} a_{2n} a_{3l_3} \ldots a_{(n-2)l_{(n-2)}} a_{(n-1)l_{(n-1)}} a_{nl_2} a_{nn}^{n-2} + \\
&+ \sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} \in S_{(n-1)}} -(-1)^j a_{1l_1} a_{2l_2} a_{3n} \ldots a_{(n-2)l_{(n-2)}} a_{(n-1)l_{(n-1)}} a_{nl_3} a_{nn}^{n-2} +
\end{aligned}$$

$$+\cdots+\sum_{l_1l_2\ldots l_{(n-1)}\in S_{(n-1)}} -(-1)^j a_{1l_1}a_{2l_2}a_{3l_3}\ldots a_{(n-2)l_{(n-2)}}a_{(n-1)n}a_{nl_{(n-1)}}a_{nn}^{n-2}+R$$

Observe que $S_n=\bigcup_{j=1}^{n} S_n^j$, onde S_n^j é o subconjunto das permutações de S_n em que n ocupa a j-ésima posição. Ou seja, S_n é a reunião dos subconjuntos de S_n em que n ocupa a última posição com o subconjunto de S_n em que n ocupa a penúltima posição com os subconjuntos de S_n em que n ocupa a antipenúltima posição, ..., unido com o subconjunto de S_n em que n ocupa a primeira posição.

Observe também que $j(l_1l_2\ldots l_{(n-1)}\mathbf{n}) = j(l_1l_2\ldots l_{(n-1)})$, onde $l_1l_2\ldots l_{(n-1)}n\in S_n$ e $l_1l_2\ldots l_{(n-1)}\in S_{n-1}$, onde j é o número de inverões. Tem-se portanto

$$\begin{aligned}
(-1)^{j(l_1l_2\ldots l_{(n-1)}n)} &= (-1)^{j(l_1l_2\ldots l_{(n-1)})}\\[2ex]
(-1)^{j(l_1l_2\ldots nl_{(n-1)})} &= (-1)^{1+j(l_1l_2\ldots l_{(n-1)}n)} = -(-1)^{j(l_1l_2\ldots l_{(n-1)}n)} =\\
&= -(-1)^{j(l_1l_2\ldots l_{(n-1)})}\\[2ex]
(-1)^{j(l_1l_2\ldots nl_{(n-1)}l_{(n-2)})} &= (-1)^{2+j(l_1l_2\ldots l_{(n-1)}l_{(n-2)}n)} = (-1)^2(-1)^{j(l_1l_2\ldots l_{(n-1)}l_{(n-2)}n)} =\\
&= (-1)^{j(l_1l_2\ldots l_{(n-1)}l_{(n-2)}n)} = (-1)^{1+j(l_1l_2\ldots l_{(n-2)}l_{(n-1)}n)} =\\
&= -(-1)^{j(l_1l_2\ldots l_{(n-2)}l_{(n-1)})}\\[2ex]
(-1)^{j(l_1l_2\ldots nl_{(n-2)}l_{(n-1)}l_{(n-3)})} &= (-1)^{3+j(l_1l_2\ldots l_{(n-2)}l_{(n-1)}l_{(n-3)}n)} = (-1)^3(-1)^{j(l_1l_2\ldots l_{(n-1)}l_{(n-3)}n)} =\\
&= -(-1)^{j(l_1l_2\ldots l_{(n-2)}l_{(n-1)}l_{(n-3)}n)} = -(-1)^{2+j(l_1l_2\ldots l_{(n-3)}l_{(n-2)}l_{(n-1)}n)} =\\
&= -(-1)^{j(l_1l_2\ldots l_{(n-3)}l_{(n-2)}l_{(n-1)}n)} =\\
&= -(-1)^{j(l_1l_2\ldots l_{(n-3)}l_{(n-2)}l_{(n-1)})}
\end{aligned}$$

De modo geral, temos

$$(-1)^{j(l_1l_2\ldots l_{(k-1)}nl_{(k+1)}\ldots l_{(n-1)}l_k)} =$$

$$= (-1)^{(n-k)+j(l_1l_2\ldots l_{(k-1)}l_{(k+1)}\ldots l_{(n-2)}l_{(n-1)}l_kn)} =$$

$$= (-1)^{(n-k)}(-1)^{j(l_1l_2\ldots l_{(k-1)}l_{(k+1)}\ldots l_{(n-2)}l_{(n-1)}l_kn)} =$$

$$= (-1)^{(n-k)}(-1)^{((n-1)-k)+j(l_1l_2\ldots l_{(k-1)}l_kl_{(k+1)}\ldots l_{(n-2)}l_{(n-1)}n)} =$$

$$= (-1)^{(n-k)}(-1)^{((n-1)-k)}(-1)^{j(l_1l_2\ldots l_{(k-1)}l_kl_{(k+1)}\ldots l_{(n-1)}n)} =$$

$$= (-1)^{2(n-k)-1}(-1)^{j(l_1 l_2 \ldots l_{(k-1)} l_k l_{(k+1)} \ldots l_{(n-2)} l_{(n-1)} n)} =$$
$$= -(-1)^{j(l_1 l_2 \ldots l_{(k-1)} l_k l_{(k+1)} \ldots l_{(n-2)} l_{(n-1)} n)} =$$
$$= -(-1)^{j(l_1 l_2 \ldots l_{(k-1)} l_k l_{(k+1)} \ldots l_{(n-2)} l_{(n-1)})}$$

Pois quando n estiver na posição k, para levá-lo para a última posição serão feitas $n-k$ inversões e neste momento l_k estará na posiçõ $n-1$; para l_k ir para a posiçõ k deverão ser feitas $(n-1)-k = n-k-1$ inversões. Teremos um total de $(n-k)+(n-k-1) = 2(n-k)-1$ inversões, ou seja, um número ímpar de inversões.

Segue então:

$$\sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} \in S_{(n-1)}} (-1)^j A_{1l_1} A_{2l_2} A_{3l_3} \ldots A_{(n-1)l_{(n-1)}} =$$

$$= a_{nn}^{n-2} \sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} n \in S_n^n} (-1)^j a_{1l_1} a_{2l_2} a_{3l_3} \ldots a_{(n-2)l_{(n-2)}} a_{(n-1)l_{(n-1)}} a_{nn} +$$
$$+ a_{nn}^{n-2} \sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} n \in S_n^1} -(-1)^j a_{1n} a_{2l_2} a_{3l_3} \ldots a_{(n-2)l_{(n-2)}} a_{(n-1)l_{(n-1)}} a_{nl_1} +$$
$$+ a_{nn}^{n-2} \sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} n \in S_n^2} -(-1)^j a_{1l_1} a_{2n} a_{3l_3} \ldots a_{(n-2)l_{(n-2)}} a_{(n-1)l_{(n-1)}} a_{nl_2} +$$
$$+ a_{nn}^{n-2} \sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} n \in S_n^3} -(-1)^j a_{1l_1} a_{2l_2} a_{3n} \ldots a_{(n-2)l_{(n-2)}} a_{(n-1)l_{(n-1)}} a_{nl_3} +$$
$$+ \cdots + a_{nn}^{n-2} \sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} n \in S_n^{(n-1)}} -(-1)^j a_{1l_1} a_{2l_2} a_{3l_3} \ldots a_{(n-2)l_{(n-2)}} a_{(n-1)n} a_{nl_{(n-1)}} + R =$$
$$= a_{nn}^{n-2} \sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} l_n \in S_n} (-1)^j a_{1l_1} a_{2l_2} a_{3l_3} \ldots a_{(n-2)l_{(n-2)}} a_{(n-1)l_{(n-1)}} a_{nl_n} + R$$

Mostraremos agora que R é igual a zero. Observe que R é dado por uma soma de produtos, nos quais aparece no mínimo dois elementos da forma $a_{kn} a_{nl_k}$ e $a_{sn} a_{nl_s}$, que são dois segundos elementos em que $1 \leq k \leq n$ e $1 \leq s \leq n$, ou seja, contém o fator $a_{nl_k} a_{nl_s}$.

Então R contém parcelas da forma $(-1)^j B a_{nl_k} a_{nl_s}$, com B constante. Dado

$$(-1)^{j(l_1 l_2 \ldots l_{(k-1)} l_{(k+1)} \ldots l_{(s-1)} l_{(s+1)} \ldots l_n l_k l_s)} B a_{nl_k} a_{nl_s} \in R$$

tem-se também que

$$(-1)^{j(l_1 l_2 \ldots l_{(k-1)} l_{(k+1)} \ldots l_{(s-1)} l_{(s+1)} \ldots l_n l_s l_k)} B a_{nl_s} a_{nl_k} =$$

$$= -(-1)^{j(l_1 l_2 \ldots l_{(k-1)} l_{(k+1)} \ldots l_{(s-1)} l_{(s+1)} \ldots l_n l_k l_s)} B a_{nl_k} a_{nl_s} \in R,$$

que é o sismétrico do anterior.

Assim, o R será igual a zero, pois será dado por soma de simétricos.

Resulta então

$$\sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} l_n \in S_n} (-1)^j a_{1l_1} a_{2l_2} \ldots a_{(n-1)l_{(n-1)}} a_{nl_n} \neq 0$$

Então, para $1 \leq k \leq (n-1)$, temos por indução

$$x_k = \frac{\displaystyle\sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} \in S_{(n-1)}} (-1)^j A_{1l_1} A_{2l_2} A_{3l_3} \ldots A_{(k-1)l_{(k-1)}} B_{l_k} A_{(k+1)l_{(k+1)}} \ldots A_{(n-1)l_{(n-1)}}}{\displaystyle\sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} \in S_{(n-1)}} (-1)^j A_{1l_1} A_{2l_2} A_{3l_3} \ldots A_{(k-1)l_{(k-1)}} A_{kl_k} A_{(k+1)l_{(k+1)}} \ldots A_{(n-1)l_{(n-1)}}} =$$

$$= \frac{a_{nn}^{n-2} \displaystyle\sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} l_n \in S_n} (-1)^j a_{1l_1} a_{2l_2} a_{3l_3} \ldots a_{(k-1)l_{(k-1)}} b_{l_k} a_{(k+1)l_{(k+1)}} \ldots a_{nl_n}}{a_{nn}^{n-2} \displaystyle\sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} l_n \in S_n} (-1)^j a_{1l_1} a_{2l_2} a_{3l_3} \ldots a_{(k-1)l_{(k-1)}} a_{kl_k} a_{(k+1)l_{(k+1)}} \ldots a_{(n-1)l_{(n-1)}} a_{nl_n}}$$

Pois $B_k = b_k a_{nn} - a_{kn}$ no numerador substitui $A_{kl_k} = a_{kl_k} a_{nn} - a_{kn} a_{nl_k}$ do denominador, ou seja, os b_{l_k} substituem os a_{kl_k}.

Em notação do determinante, para $1 \leq k \leq (n-1)$, tem-se

$$x_k = \frac{a_{nn}^{n-2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & b_3 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{a_{nn}^{n-2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3k} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & b_3 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3k} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Para encontrarmos x_n permutaremos a última coluna com a primeira, obtendo o seguinte sistema, o qual tem solução única:

$$\begin{cases} a_{1n}x_n & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1(n-1)}x_{(n-1)} & + & a_{11}x_1 & = & b_1 \\ a_{2n}x_n & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2(n-1)}x_{(n-1)} & + & a_{21}x_1 & = & b_2 \\ a_{3n}x_n & + & a_{32}x_2 & + & \ldots & + & a_{3(n-1)}x_{(n-1)} & + & a_{31}x_1 & = & b_3 \\ & & & & \vdots & & & & & \vdots & \\ a_{nn}x_n & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{n(n-1)}x_{(n-1)} & + & a_{n1}x_1 & = & b_n \end{cases}$$

Temos pelo item anterior, que

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{11} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{21} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{31} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{n1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1n} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{11} \\ a_{2n} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{21} \\ a_{3n} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{31} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n1}a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3(n-1)} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & b_n \end{vmatrix}}{-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3(n-1)} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Mostraremos posteriormente que trocando duas colunas ou duas linhas o determinante altera apenas o sinal.

ii) Mostraremos que se

$$det(S_{n\times n}) = \sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} l_n \in S_n} (-1)^j a_{1l_1} a_{2l_2} \ldots a_{(n-1)l_{(n-1)}} a_{nl_n} \neq 0,$$

então sistema tem solução única. Temos então que pelo menos 1 dos $a_{nl_n} \neq 0$ e para efeito de cálculo suponhamos que $a_{nn} \neq 0$.

Faremos agora algumas operações elementares com as linhas do sistema linear S, com o objetivo de zerar todos os coeficientes a_{kn} de x_n, em que $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Trocaremos a linha L_k, por $a_{nn}L_k - a_{kn}L_n$, em que $1 \leq k \leq (n-1)$, e manteremos L_n fixa. Assim, temos o novo sistema linear equivalente ao anterior,

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & \cdots & + & A_{1(n-1)}x_{(n-1)} & + & 0x_n & = & B_1 \\
A_{21}x_1 & + & A_{22}x_2 & + & \cdots & + & A_{2(n-1)}x_{(n-1)} & + & 0x_n & = & B_2 \\
A_{31}x_1 & + & A_{32}x_2 & + & \cdots & + & A_{3(n-1)}x_{(n-1)} & + & 0x_n & = & B_3 \\
 & & \vdots & & & & & & \vdots & & \\
A_{(n-1)1}x_1 & + & A_{(n-1)2}x_2 & + & \cdots & + & A_{(n-1)(n-1)}x_{(n-1)} & + & 0x_n & = & B_{(n-1)} \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n(n-1)}x_{(n-1)} & + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}\right.$$

onde $A_{lk} = a_{lk}a_{nn} - a_{ln}a_{nk}$ e $B_l = b_l a_{nn} - a_{ln}b_n$.

Esse sistema linear tem solução única desde que

$$\sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} \in S_{(n-1)}} (-1)^j A_{1l_1} A_{2l_2} \ldots A_{(n-1)l_{(n-1)}} \neq 0$$

Mas isso implica

$$\sum_{l_1 l_2 \ldots l_{(n-1)} l_n \in S_n} (-1)^j a_{1l_1} a_{2l_2} \ldots a_{(n-1)l_{(n-1)}} a_{nl_n} \neq 0$$

o que de fato é verdade por hipótese. Tem-se então que o sistema linear $(n-1)\times(n-1)$ tem solução única e sendo $a_{nn} \neq 0$ tem-se portanto que o sistema linear $n \times n$ tem solução única.

■

3.3 Propriedades do determinante do sistema linear $n \times n$

Teorema 3.5.

$$\sum_{l_1 l_2 l_3 \ldots l_n \in S_n} (-1)^j a_{1l_1} a_{2l_2} a_{3l_3} \ldots a_{nl_n} = \sum_{l_1 l_2 l_3 \ldots l_n \in S_n} (-1)^j a_{l_1 1} a_{l_2 2} a_{l_3 3} \ldots a_{l_n n}$$

Prova: Dado o número $(-1)^j a_{k_1 1} a_{k_2 2} \ldots a_{k_n n}$, vamos então reorganiza o produto de tal forma que os primeiros elementos dos índices dos elementos do produto fiquem em ordem crescente. Fazendo isto teremos

$$a_{k_1 1}a_{k_2 2}a_{k_3 3}\ldots a_{k_n n} = a_{1l_1}a_{2l_2}a_{3l_3}\ldots a_{nl_n}$$

com $l_1l_2l_3\ldots l_n$ univocamente determinado por $k_1k_2k_3\ldots k_n$. Observe que como os dois índices estão juntos, ao mesmo tempo obtemos $l_1l_2l_3\ldots l_n$ de $123\ldots n$ obtemos também $123\ldots n$ de $k_1k_2k_3\ldots k_n$, de onde resulta terem o mesmo número de inversões, ou seja,

$$j(k_1k_2k_3\ldots k_n) = j(l_1l_2l_3\ldots l_n)$$

Portanto

$$(-1)^j a_{k_1 1}a_{k_2 2}a_{k_3 3}\ldots a_{k_n n} = (-1)^j a_{1l_1}a_{2l_2}a_{3l_3}\ldots a_{nl_n}.$$

Segue então que

$$\sum_{k_1k_2k_3\ldots k_n\in S_n}(-1)^j a_{k_1 1}a_{k_2 2}a_{k_3 3}\ldots a_{k_n n} = \sum_{l_1l_2l_3\ldots l_n\in S_n}(-1)^j a_{1l_1}a_{2l_2}a_{3l_3}\ldots a_{nl_n}$$

utilizando os mesmos índices, tem-se

$$\sum_{l_1l_2l_3\ldots l_n\in S_n}(-1)^j a_{l_1 1}a_{l_2 2}a_{l_3 3}\ldots a_{l_n n} = \sum_{l_1l_2l_3\ldots l_n\in S_n}(-1)^j a_{1l_1}a_{2l_2}a_{3l_3}\ldots a_{nl_n}$$

■

Antes de demonstrar o teorema seguinte, observe que

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

ou seja, o determinante de um sistema linear 3×3 pode ser expresso em termos do determinante de um sistema 2×2. Isto é devido ao processo de indução matemática e mostraremos no teorema seguinte que este processo é sempre válido, ou seja, expressaremos o determinante de um sistema $n\times n$ em termos do determinante de um sistema $(n-1)\times(n-1)$. Vamos necessitar da notação seguinte: o determinante $|A_{ij}|$ é o determinante da matriz quadrada A_{ij}, obtida da matriz quadrada A ao retirarmos a i-ésima linha e a j-ésima. No caso acima, temos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}|$$

$$= \sum_{k=1}^{3}(-1)^{1+k}a_{1k}|A_{1k}|$$

Teorema 3.6. (Teorema de Laplace) *O determinante de um sistema linear $n \times n$ pode ser expresso em termos de n determinantes de sistemas lineares $(n-1)\times(n-1)$, do seguinte modo*

$$det\left(a_{ij}\right)_{n\times n} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|$$

Prova:

$$det(a_{ij})_{(n\times n)} = \sum_{l_1l_2\ldots l_k\ldots l_n}(-1)^{j}a_{1l_1}a_{2l_2}\ldots \underline{a_{kl_k}}\ldots a_{nl_n} =$$

$$= \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{l_1l_2\ldots \mathbf{p}\ldots l_n}(-1)^{j}a_{1l_1}a_{2l_2}\ldots \underline{a_{kp}}\ldots a_{nl_n}\right)$$

O número de inversões de $l_1l_2\ldots p\ldots l_n$ será igual ao número de inversões de $l_1l_2\ldots\ldots l_{p-1}pl_{p+1}\ldots l_{k-1}l_{k+1}\ldots l_n$ mais o número de inversões, partindo deste, que se fará para obter $l_1l_2\ldots l_{p-1}l_{p+1}\ldots l_{k-1}pl_{k+1}\ldots l_n$, que é $|p-k|$.

Então,

$$j(l_1l_2\ldots l_{p-1}pl_{p+1}\ldots l_n) = j(l_1l_2\ldots l_{p-1}pl_{p+1}\ldots l_{k-1}l_{k+1}\ldots l_n) + \left|p-k\right|$$

Observe que $j(l_1l_2\ldots l_{p-1}pl_{p+1}\ldots l_{k-1}l_{k+1}\ldots l_n)$ é diferente de $j(l_1l_2\ldots l_{p-1}l_{p+1}\ldots$ $\ldots l_{k-1}l_{k+1}\ldots l_n)$, onde p não entra, por um número par de inversões, pois para um elemento da esquerda permutar com um elemento da sua direita deve passar por p e depois p deve retornar para sua posição inicial.

Portanto,

$$\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+k}a_{kp}\sum_{l_1l_2\ldots l_{k-1}l_{k+1}\ldots l_n\in S_{n-1}}(-1)^{j}a_{1l_1}a_{2l_2}\ldots a_{kn}\ldots a_{nl_n} = \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+k}a_{kp}|A_{kp}|$$

Semelhantemente mostra-se a outra igualdade, levando em conta o teorema anterior.

■

Teorema 3.7.

i) *Se trocarmos duas linhas ou duas colunas da matriz dos coeficientes de um sistema linear, representada por A, então o determinante dessa matriz é o mesmo em módulo, porém com sinal oposto;*

ii) *Se a matriz dos coeficientes de um sistema linear, representada por A, tiver duas linhas ou duas colunas iguais, então o determinante dessa matriz será zero;*

iii) *Se somarmos a i-ésima linha a j-ésima linha multiplicada por uma constante k o determinante da matriz dos coeficientes de um sistema linear não se altera;*

iv) *Se A é a matriz obtida pela multiplicação de uma linha ou uma coluna da matriz dos coeficientes de um sistema linear, representada por B, por uma constante k, então $det(A) = kdet(B)$;*

v) *Se uma linha ou uma coluna da matriz dos coeficientes de um sistema linear for nula, representada por A, então $det(A) = 0$;*

vi) *Se uma linha ou uma coluna da matriz dos coeficientes de um sistema linear, representada por A, for múltipla de outra, então $det(A) = 0$;*

Prova: **i)** Se B é a matriz quadrada obtida da matriz A pela troca da coluna i pela coluna j, supondo $i < j$ (podemos mostra da mesma forma usando as linhas da matriz),

$$det(B) = \sum_{l_1 l_2 \ldots l_n \in S_n} (-1)^j a_{1l_1} \ldots a_{(i-1)l_{(i-1)}} a_{jl_j} a_{(i+1)l_{(i+1)}} \ldots a_{(j-1)l_{(j-1)}} a_{il_i} a_{(j+1)l_{(j+1)}} \ldots a_{nl_n}$$

Observe na igualdade acima que a_{il_i} está ocupando a posição do a_{jl_j}, e vice-versa. Assim para trocarmos suas posições devemos realizar $(j - i)$ inversões para levar a_{il_i} para seu lugar original e depois $(j - i) + 1$ inversões para levar a_{jl_j} para sua posição original. Assim o número de inversões para trocar as posições de a_{il_i} com a_{jl_j} é dado por $(j - i) + (j - i + 1) = 2(j - i) + 1$, que é ímpar e portanto $(-1)^{2(j-i)+1} = -1$.

Ou seja,

$$\begin{aligned} det(B) &= \sum_{l_1 l_2 \ldots l_n \in S_n} (-1)^j a_{1l_1} \ldots a_{(i-1)l_{(i-1)}} a_{jl_j} a_{(i+1)l_{(i+1)}} \ldots a_{(j-1)l_{(j-1)}} a_{il_i} a_{(j+1)l_{(j+1)}} \ldots a_{nl_n} \\ &= - \sum_{l_1 l_2 \ldots l_n \in S_n} (-1)^j a_{1l_1} \ldots a_{(i-1)l_{(i-1)}} a_{il_i} a_{(i+1)l_{(i+1)}} \ldots a_{(j-1)l_{(j-1)}} a_{jl_j} a_{(j+1)l_{(j+1)}} \ldots a_{nl_n} \\ &= - \ det(A) \end{aligned}$$

Portanto,

$$det(B) = -det(A)$$

ii) Se a matriz dos coeficientes de um sistema linear tem as linhas l_i e l_j iguais ao permutarmos essas linhas, como vimos em i), seu determinante muda de sinal, porém sem se alterar (já que as linhas são iguais), portante

$$det(A) = 0$$

iii) Seja a matriz B obtida da matriz dos coeficientes de um sistema linear, representada por A, tendo trocado a linha i de A (l_{iA}) pela linha i de A mais k vezes a linha j de A (l_{jA}) e conservando todas as outras linhas da matriz A, ou seja, $l_{iB} = l_{iA} + kl_{jA}$ e $l_{rB} = l_{rA}$, $\forall r \neq i$

$$\begin{aligned}
det(B) &= \sum_{l_1l_2\ldots l_n\in S_n} (-1)^j b_{1l_1}b_{2l_2}\ldots b_{il_i}\ldots b_{nl_n} \\
&= \sum_{l_1l_2\ldots l_n\in S_n} (-1)^j a_{1l_1}a_{2l_2}\ldots a_{(i-1)l_{(i-1)}}(a_{il_i} + ka_{jl_j})a_{(i+1)l_{(i+1)}}\ldots a_{nl_n} \\
&= \sum_{l_1l_2\ldots l_n\in S_n} (-1)^j a_{1l_1}a_{2l_2}\ldots a_{il_i}\ldots a_{nl_n} + \sum_{l_1l_2\ldots l_n\in S_n} (-1)^j a_{1l_1}a_{2l_2}\ldots ka_{jl_j}\ldots a_{nl_n} \\
&= \sum_{l_1l_2\ldots l_n\in S_n} (-1)^j a_{1l_1}\ldots a_{il_i}\ldots a_{jl_j}\ldots a_{nl_n} + k\sum_{l_1l_2\ldots l_n\in S_n} (-1)^j a_{1l_1}\ldots a_{jl_j}\ldots a_{jl_j}\ldots a_{nl_n} \\
&= det\,(A) + k.0 = det\,(A)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$det\,(B) = det\,(A)$$

iv) $det(A) = \sum_{l_1l_2\ldots l_n\in S_n} (-1)^j a_{1l_1}a_{2l_2}\ldots ka_{il_i}\ldots a_{nl_n} = k\sum_{l_1l_2\ldots l_n\in S_n} (-1)^j a_{1l_1}a_{2l_2}\ldots a_{nl_n} = kdet(B).$

v) Se a matriz dos coeficientes de um sistema linear, representada por A, tiver pelo menos uma linha (ou coluna) nula, então pelo menos um dos a_{1l_1}, a_{2l_2}, $\ldots$, a_{nl_n} será igual a zero, assim temos que

$$det(A) = \sum_{l_1l_2\ldots l_n\in S_n} (-1)^j a_{1l_1}a_{2l_2}\ldots 0\ldots a_{nl_n} = 0$$

vi)

$$\begin{aligned}
det(A) &= \sum_{l_1l_2\ldots l_n\in S_n} (-1)^j a_{1l_1}a_{2l_2}\ldots ka_{il_i}\ldots a_{il_i}\ldots a_{nl_n} \\
&= k\sum_{l_1l_2\ldots l_n\in S_n} (-1)^j a_{1l_1}a_{2l_2}\ldots a_{il_i}\ldots a_{il_i}\ldots a_{nl_n} \\
&= k0 = 0
\end{aligned}$$

4 MATRIZES

Coleções retangulares de números reais, de polinômios, de funções, etc, aparecem em várias aplicações da matemática. Como vimos, a matriz formada pelos coeficientes de um sistema de equações lineares é um bom exemplo disto. Neste capítulo, estudaremos matrizes como objetos independentes, definindo sobre elas as operações de adição, subtração, multiplicação por escalar e multiplicação de matrizes.

4.1 Conceitos de matriz

Vamos tomar matriz como um conceito primeiro, não definido, tendo como modelo de matriz a representação simplificada de um sistema linear. Podemos pensar em uma matriz como sendo um conjunto de números, polinômios, funções, etc, dispostos em forma retangular entre parênteses ( ), ou entre colchetes [ ], em que os elementos estão nas intersecções de linhas horizontais e verticais traçadas nesse retângulo de modo equidistantes (imaginariamente). As linhas horizontais onde estão os números são chamadas de linhas da matriz e são ordenadas de cima para baixo, e as linhas verticais são ditas as colunas da matriz e são ordenadas da esquerda para a direita. As matrizes serão denotadas por letras latinas maiúsculas. Uma matriz A com m linhas e n colunas (em que $m,\ n \in \mathbb{N}^*$, conjunto dos números naturais não nulos), será denotada por $A_{m\times n}$, e diremos que a matriz A tem ordem $m \times n$ ou é do tipo $m \times n$ (lê-se: m por n). O elemento da matriz A que estiver na linha i e na coluna j será simbolizado por a_{ij}, os elementos a_{ij} são chamados de entradas ou elementos da matriz A. Conhecendo os elementos a_{ij} de uma matriz $A_{m\times n}$, de forma explicita ou por meio de uma sentença, essa matriz fica perfeitamente determinada por:

$$A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

Exemplo 4.1. (Exemplo de matriz) Em uma mercearia, o proprietário quer registrar os valores das compras realizadas em determinado ano por 6 de seus clientes. Ele organizou esses dados da seguinte forma:

	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Cliente 1	105	120	120	115	180	150	220	120	145	102	135	112
Cliente 2	160	140	145	160	165	100	260	160	102	132	200	164
Cliente 3	112	136	125	134	126	112	211	102	100	135	130	260
Cliente 4	132	260	360	130	162	136	123	201	203	302	360	240
Cliente 5	98	201	109	200	210	120	160	132	125	136	168	360
Cliente 6	99	101	103	105	153	146	109	165	142	130	125	136

A identificação de um determinado valor gasto por um cliente pode ser feita da seguinte forma: quando quisermos saber quanto o cliente 4 gastou no mês setembro, por exemplo, basta procurar na linha 4 o elemento que está na coluna referente ao mês de setembro, obtendo portanto o valor 203.

Tendo em mente a ordem dos clientes e a ordem dos meses, esta tabela poderia ser representada de modo simplificado da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 120 & 120 & 115 & 180 & 150 & 220 & 120 & 145 & 102 & 135 & 112 & 123 \\ 160 & 140 & 145 & 160 & 165 & 100 & 260 & 160 & 102 & 132 & 200 & 164 \\ 112 & 136 & 125 & 134 & 126 & 112 & 211 & 102 & 100 & 135 & 130 & 260 \\ 132 & 260 & 360 & 130 & 162 & 136 & 123 & 201 & 203 & 302 & 360 & 240 \\ 98 & 201 & 109 & 200 & 210 & 120 & 160 & 132 & 125 & 136 & 168 & 360 \\ 99 & 101 & 103 & 105 & 153 & 146 & 109 & 165 & 142 & 130 & 125 & 136 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4.2. Vejamos outros exemplos de matrizes:

a) $A_{1\times 2} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ ◇

4.2 Nomenclatura de matrizes

Dada uma matriz M de ordem $m \times n$. Quando $m = 1$ chamaremos a matriz $M_{1\times n}$ de **matriz linha**, e quando $n = 1$ chamaremos a matriz $M_{m\times 1}$ de **matriz coluna**. Chamaremos de **matriz nula** toda matriz cujos elementos são todos iguais a 0 (zero). Para não confundir a matriz nula com o número real zero usaremos a notação $\mathbf{0}_{m\times n}$ para representar a matriz nula.

Exemplo 4.3. (Matriz Linha)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}_{1\times 2} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -10 & 7 & 3 \end{pmatrix}_{1\times 5}$$

◇

Exemplo 4.4. (Matriz Coluna)

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}_{3\times1} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}_{4\times1}$$

◇

Exemplo 4.5. (Matriz Nula)

$$\mathbf{0}_{1\times2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}_{1\times2} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{0}_{2\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times3}$$

◇

Chamaremos de **matriz quadrada** toda matriz do tipo $n \times n$ ($m = n$), ou seja, em que o número de linhas é igual ao número de colunas. Numa matriz quadrada $A_{n\times n}$, os elementos a_{ij} tais que $i = j$ formam a *diagonal principal* da matriz, e os elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$ formam a *diagonal secundária*. **Matriz diagonal** é toda matriz quadrada ($m = n$) onde $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$, isto é, os elementos que não estão na diagonal principal são todos iguais a 0 (zero). Note que os elementos da diagonal principal ($i = j$) também podem ser iguais a 0 (zero). **Matriz antidiagonal** é toda matriz quadrada ($m = n$) onde $a_{ij} = 0$, para $i + j \neq n + 1$, isto é, os elementos que não estão na antidiagonal (também chamada de diagonal secundária) são todos iguais a 0 (zero). Note que os elementos da "antidiagonal", em que $i + j = n + 1$, também podem ser iguais a 0 (zero).

Exemplo 4.6. (Matriz Quadrada)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times2} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 5 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}_{3\times3} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 9 & 0 & 6 \\ 3 & -7 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times4}$$

◇

Exemplo 4.7. (Matriz Diagonal)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2\times2} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times3} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times4}$$

◇

Exemplo 4.8. (Matriz Antidiagonal)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$\diamond$

Matriz identidade é toda matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$, para $i = j$, denotaremos a matriz identidade $n \times n$ por I_n. Chamaremos de **matriz triangular superior** toda matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero. De forma simbólica, $a_{ij} = 0$, para $i > j$. Chamaremos de **matriz triangular inferior** toda matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal principal são iguais a zero. De forma simbólica $a_{ij} = 0$, para $i < j$.

Exemplo 4.9. (Matriz Identidade)

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\diamond$

Exemplo 4.10. (Matriz Triangular Superior)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\diamond$

Exemplo 4.11. (Matriz Triangular Inferior)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$\diamond$

Chamaremos de **matriz simétrica** toda matriz quadrada onde $a_{ij} = a_{ji}$. Chamaremos de **matriz antissimétrica** toda matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$, para $i = j$ e $a_{ij} = -a_{ji}$, para $i \neq j$.

Exemplo 4.12. (Matriz Simétrica)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} a & x & y & t \\ x & b & e & f \\ y & e & c & g \\ t & f & g & d \end{pmatrix}$$

◇

Exemplo 4.13. (Matriz Antissimétrica)

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -x & -y & -t \\ x & 0 & e & f \\ y & -e & 0 & g \\ t & -f & -g & 0 \end{pmatrix}$$

◇

4.3 Operações com matrizes

4.3.1 *Igualdade de matrizes*

Definição 4.1. *Duas matrizes de mesma ordem $m \times n$, $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são iguais se seus elementos correspondentes forem iguais. Ou seja,*

$$A = B \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, m \text{ e } j = 1, 2, \ldots, n$$

Exemplo 4.14. Determine os valores de x e y para que as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -2 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} x+y & x^3 \\ x-y & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sejam iguais.

Solução: Sendo as matrizes A e B de mesma ordem devemos ter,

$$x^3 = 8 \quad \text{e} \quad x + y = 6 \Longrightarrow x = 2 \quad \text{e} \quad y = 4$$

◇

4.3.2 *Adição e subtração de matriz*

Definição 4.2. *Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ são duas matrizes de mesma ordem, então a soma de A com B, simbolizada por $A + B$, é a matriz $C_{m\times n} = (c_{ij})_{m\times n}$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, e a diferença $A - B$ é á matriz $D_{m\times n} = (d_{ij})_{m\times n}$, em que $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.*

Observação 4.1. Não podemos somar ou subtrair matrizes de ordens distintas.

Exemplo 4.15. Se

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -6 \\ 4 & 5 & 10 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

teremos

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 & -6 \\ 4 & 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -7 \\ 2 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 & -6 \\ 4 & 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 5 \\ -6 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

◇

Observe que as expressões $A + C$, $A - C$, $B - C$ e $B + C$ não estão definidas.

Teorema 4.1. *Dadas as matrizes $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$ e $C_{m\times n}$, tem-se*

i) $A + B = B + A$ *(**Comutatividade**);*

ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(**Associatividade**);*

iii) $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$*, onde* $\mathbf{0}$ *é a matriz nula e tem o mesmo tipo que a matriz* A *(**Existência do elemento neutro**);*

iv) $A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{0}$ *(**Elemento oposto**).*

Prova: Provaremos somente o item *ii*) (associatividade), pois, assim como essa, as demais propriedades decorrem diretamente das definições de igualdade e adição de matrizes.

ii) Se $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$, então

$$A + (B + C) = (a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij}) = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] \overset{(1)}{=} [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] =$$

$$= (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij}) = (A + B) + C$$

onde usamos a propriedade associativa da adição de números reais, na passagem (1).

■

4.3.3 Multiplicação de escalar por matriz

Definição 4.3. *Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e um número real k, definiremos a matriz kA, por $kA = (ka_{ij})_{m\times n}$*

Exemplo 4.16.

$$3\begin{pmatrix} -1 & 8 & 5 \\ -6 & 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 24 & 15 \\ -18 & 0 & -30 \end{pmatrix}$$

◇

Teorema 4.2. *Dadas as duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$, e os escalares reais k, k_1 e k_2, temos*

i) $k(A + B) = kA + kB$;

ii) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$;

iii) $0.A = \mathbf{0}$;

iv) $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$.

Prova: Provaremos *i*), pois as demonstrações são bem simples.

i) Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são matrizes de mesma ordem e k um número real, então

$$k(A + B) = k(a_{ij} + b_{ij}) = [k(a_{ij} + b_{ij})] \overset{(1)}{=} [ka_{ij} + kb_{ij}] = (ka_{ij}) + (kb_{ij}) =$$

$$= k(a_{ij}) + k(b_{ij}) = kA + kB$$

onde usamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição na passagem (1).

■

4.3.4 Multiplicação de matrizes

Antes de definir a multiplicação de matrizes, veremos o que levou Cayley a defini-la da forma como conhecemos hoje. O conceito de matriz apareceu em 1858 num trabalho de Cayley, sobre transformações do plano, e a operação matricial envolvida é justamente a multiplicação de matrizes. Cayley considerava transformações lineares do plano $\mathbb{R}^2$ em si próprio, ou seja, do tipo

$$T(x; y) = (ax + by; cx + dy)$$

Se não quisermos pensar em transformações lineares, podemos considerar mudanças de variáveis.

$$T : \begin{cases} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{cases}$$

Suponhamos duas mudanças de variáveis:

$$T_1 : \begin{cases} r &= Au + Bv \\ s &= Cu + Dv \end{cases} \qquad\qquad T_2 : \begin{cases} u &= ax + by \\ v &= cx + dy \end{cases}$$

Qual será a expressão de r e s em termos de x e y?

Substituindo as expressões de T_2 em T_1 obtemos:

$$T : \begin{cases} r &= A(ax + by) + B(cx + dy) = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ s &= C(ax + by) + D(cx + dy) = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y \end{cases}$$

Sendo $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} Aa + Bc & Ca + Dc \\ Ab + Bd & Cd + Db \end{pmatrix}$ as matrizes associadas a T_1, T_2 e T respectivamente, Cayley definiu o produto de $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ por $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ como sendo

$$\begin{pmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Db \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{pmatrix}$$

Definição 4.4. (Multiplicação de matrizes) *Dadas as matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$ definimos a matriz produto de A por B, simbolizada por AB, por $AB_{m\times p} = (AB)_{ij}$, com*

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Exemplo 4.17. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2}$ e $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2}$, vamos encontrar a matriz $C = AB$. Como vimos acima os elementos de C são dados por

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kj}$$

Assim, temos:

$$(AB)_{11} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k}b_{k1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \qquad (AB)_{12} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k}b_{k2} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$$
$$(AB)_{21} = \sum_{k=1}^{2} a_{2k}b_{k1} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \qquad (AB)_{22} = \sum_{k=1}^{2} a_{2k}b_{k2} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$
$$(AB)_{31} = \sum_{k=1}^{2} a_{3k}b_{k1} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} \qquad (AB)_{32} = \sum_{k=1}^{2} a_{3k}b_{k2} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (AB)_{11} & (AB)_{12} \\ (AB)_{21} & (AB)_{22} \\ (AB)_{31} & (AB)_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

$\diamond$

Observação 4.2. Só podemos multiplicar duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{p\times q}$ quando o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B, ou seja, só podemos multiplicar a matriz A pela matriz B se $n = p$.

Para demonstrar as propriedades da multiplicação de matrizes precisamos do seguinte lema.

Lema 4.1. *Se $A_{ij} = A(x_i, y_j)$, então*

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A(x_i, y_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} A(x_i, y_j)$$

Prova:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\right) &= \sum_{i=1}^{m}(A_{i1}+A_{i2}+\cdots+A_{in})\\
&= (A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n})+(A_{21}+A_{22}+\cdots+A_{2n})+\cdots+\\
&\quad +(A_{m1}+A_{m2}+\ldots+A_{mn})\\
&= (A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{m1})+(A_{12}+A_{22}+\cdots+A_{m2})+\cdots+\\
&\quad +(A_{1n}+A_{2n}+\ldots+A_{mn})\\
&= \sum_{i=1}^{m}A_{i1}+\sum_{i=1}^{m}A_{i2}+\cdots+\sum_{i=1}^{m}A_{in}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}A_{ij}\right)
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}A_{ij}$$

O que encerra a demonstração do lema. ■

Teorema 4.3. *Dadas as matrizes $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$ e $C_{p\times q}$, temos*

i) $(AB)C = A(BC)$ *(**Associatividade**);*

ii) $A(B+C) = AB+AC$ *e* $(A+B)C = AC+BC$ *(**Distributividade**).*

Prova: Demonstração.

i) Consideremos as matrizes $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$ e $C_{p\times q}$, assim

$$
\begin{aligned}
((AB)C)_{ij} &= \sum_{k=1}^{p}(AB)_{ik}\,c_{kj}=\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lk}\right)c_{kj} \overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lk}c_{kj}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n}\left(a_{il}b_{lk}c_{kj}\right) \overset{(2)}{=} \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\left(a_{il}b_{lk}c_{kj}\right)=\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p}a_{il}b_{lk}c_{kj}\right)\\
&= \sum_{l=1}^{n}a_{il}\left(\sum_{k=1}^{p}b_{lk}c_{kj}\right)=\sum_{l=1}^{n}a_{il}\left(BC_{lj}\right)=(A(BC))_{ij}
\end{aligned}
$$

A passagem (1) se justifica, pois c_{kj} é constante em relação a l. Na passagem (2) aplicamos o Lema 4.1, na página 69. Portanto,

$$(AB)C = A(BC)$$

ii) Consideremos as matrizes $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$ e $C_{p\times q}$. Temos que

$$\begin{aligned}(A(B+C))_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,(B+C)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(b_{kj}+c_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}b_{kj}+a_{ik}c_{kj}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} = (AB)_{ij} + (AC)_{ij}\end{aligned}$$

Isto mostra que

$$A(B+C) = AB + AC$$

A demonstração da distributividade a direita é semelhante. ■

Observação 4.3. A existência do produto AB não implica a existência do produto BA, e muito menos que $AB = BA$, em geral $AB \neq BA$.

Definição 4.5. *O **traço** de uma matriz quadrada A, simbolizado por $tr(A)$, é a soma de todos os elementos da diagonal principal, ou seja*

$$tr(A_{n\times n}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Teorema 4.4. *Dadas as matrizes quadradas A, B, I_n e $\mathbf{0}$ de ordem n, tem-se:*

i) $tr(\mathbf{0}) = 0$;

ii) $tr(I_n) = n$;

iii) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$;

iv) $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$, *em que* α *é um número real;*

v) $tr(A^t) = tr(A)$;

vi) $tr(AB) = tr(BA)$.

Prova: Provaremos apenas a propriedade *vi*), a qual oferece mais dificuldades. As demais são imediatas.

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} \overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik} = \sum_{k=1}^{n}(BA)_{kk} = tr(BA)$$

Na passagem (1) aplicamos o lema 4.1, página 69. ■

4.3.5 *Transposição*

Definição 4.6. *Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, definiremos a matriz transposta de A, simbolizada por A^t, por $A^t = (a^t_{ij})_{n\times m}$, em que $a^t_{ij} = a_{ji}$.*

Teorema 4.5. *Sejam A e B duas matrizes(cujas ordens são tais que as operações indicadas podem ser realizadas) e k um escalar. Então:*

i) $\mathbf{0}^t = \mathbf{0}$;

ii) $I^t = I$;

iii) $(A + B)^t = A^t + B^t$, *com as matrizes A e B de mesma ordem;*

iv) $(kA)^t = kA^t$;

v) $(AB)^t = B^tA^t$, *em que A é uma matriz de ordem $m \times n$ e B matriz de ordem $n \times p$ (Observe a ordem dos fatores do produto no segundo membro da igualdade).*

Prova: Provaremos apenas a propriedade *v*), pois as demais decorrem imediatamente da definição.

Dadas as matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$, temos

$$(AB)^t_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} \left(a_{jk}b_{ki}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(b_{ki}a_{jk}\right),$$

$$(B^tA^t)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left(b^t_{ik}a^t_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(b_{ki}a_{jk}\right)$$

Portanto,

$$(AB)^t = B^tA^t$$

■

4.4 Matrizes elementares

O estudo das matrizes elementares é fundamental para o estudo das matrizes inversas e para o determinante de matrizes. Vamos então definir o que são operações elementares e matrizes elementares.

Definição 4.7. (Operações Elementares) *As operações elementares sobre as linhas (colunas) da matriz A, são:*

i) *troca de duas linhas (colunas),* $(L_i \longrightarrow L_j)$;

ii) *multiplicação de uma linha (coluna) por uma constante k não nula,* $(L_j \longrightarrow kL_j)$*;*

iii) *adição a uma linha (coluna) de outra linha (coluna) multiplicada por uma constante k,* $(L_i \longrightarrow L_i + kL_j)$*.*

Observação 4.4. A operação *iii*) poderia ter sido definida simplesmente como a adição de uma linha a outra.

Definição 4.8. (Matrizes Elementares) *Uma matriz obtida da matriz identidade I_n por uma das operações elementares é denominada matriz elementar. As matrizes elementares são de três tipos:*

i) ***tipo I****, se ela for obtida da matriz I_n permutando duas linhas;*

ii) ***tipo II****, se ela for obtida da matriz I_n multiplicando-se uma das suas linhas por uma constante real não nula k;*

iii) ***tipo III****, se ela for obtida da matriz I_n multiplicando uma linha por k, nesse caso k pode ser igual a* 0*, e adicionando-se à outra linha.*

Teorema 4.6. *Sejam E e A matrizes quadradas de ordem n e E elementar. Então multiplicar A por E à esquerda (à direita) tem o efeito de efetuar a mesma operação elementar sobre as linhas (as colunas) de A que foi efetuada sobre I_n para obter E.*

Prova: Consideremos a matriz quadrada A de ordem n dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

i) Consideremos que E é uma matriz elementar do tipo I, ou seja, E foi obtida de I_n trocando a linha i pela linha j. Suponhamos que $i < j$, para melhor fixação. Assim, a matriz elementar E será dada por

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Vejamos agora o que acontece com a matriz quadrada A quando multiplicada *à* esquerda e *à* direita por E:

$$\begin{aligned} EA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Observe que multiplicando a matriz A *à* esquerda por uma matriz elementar E do tipo I, obtemos uma matriz que pode ser obtida de A, se efetuamos em A a mesma operação elementar que foi feita em I_n para obter E.

$$AE = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Observe que multiplicando a matriz A *à* direita por uma matriz elementar E do tipo I, obtemos uma matriz que pode ser obtida de A, se efetuamos em A a mesma operação elementar que foi feita em I_n para obter E.

ii) Consideremos que E é uma matriz elementar do tipo II, ou seja, E foi obtida de I_n multiplicando a linha i por uma constante real não nula. Assim, a matriz elementar E será dada por

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Vejamos agora o que acontece com a matriz quadrada A quando multiplicada *à* esquerda e *à* direita por E:

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{ii} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Observe que multiplicando a matriz A *à* esquerda por uma matriz elementar E do tipo II, obtemos uma matriz que pode ser obtida de A, se efetuamos em A a mesma operação elementar que foi feita em I_n para obter E.

$$AE = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & ka_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & ka_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & ka_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Observe que multiplicando a matriz A *à* direita por uma matriz elementar E do tipo II, obtemos uma matriz que pode ser obtida de A, se efetuamos em A a mesma operação elementar que foi feita em I_n para obter E.

iii) Consideremos que E é uma matriz elementar do tipo III, ou seja, E foi obtida de I_n trocando a linha i pela linha i mais k vezes a linha j. Suponhamos que $i < j$. Assim, a matriz elementar E será dada por

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Vejamos agora o que acontece com a matriz quadrada A quando multiplicada *à* esquerda e *à* direita por E:

$$\begin{aligned} EA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{ii} + ka_{ji} & \cdots & a_{ij} + ka_{jj} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Observe que multiplicando a matriz A *à* direita por uma matriz elementar E do tipo III, obtemos uma matriz que pode ser obtida de A, se efetuamos em A a mesma operação elementar que foi feita em I_n para obter E.

Como queríamos demonstrar. ■

Exemplo 4.18. Consideremos a matriz $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Como podemos ver, essa matriz foi obtida da matriz identidade I_3 trocando a primeira linha pela terceira, e consequentemente E_1 é uma matriz elementar do tipo I. Vejamos o que acontece com uma matriz quadrada A de ordem 3 quando multiplicada *à* esquerda e *à* direita por E_1:

$$E_1A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

$$AE_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{pmatrix}$$

Observe que multiplicar a matriz A *à* esquerda (*à* direita) por E_1 equivale a efetuar a mesma operação elementar sobre A que foi efetuada sobre I_3, ou seja trocar a primeira linha (coluna) pela terceira. ◇

Exemplo 4.19. Consideremos a matriz $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Como podemos ver essa matriz foi obtida da matriz identidade I_3 multiplicando a segunda linha por 2, e portanto E_2 é uma matriz elementar do tipo II. Vejamos o que acontece com uma matriz quadrada A de ordem 3 quando multiplicada a esquerda e a direita por E_3,

$$E_2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$AE_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Observe no exposto acima que ao calcularmos EA com E sendo uma matriz do tipo II estaremos multiplicando por 2 uma linha da matriz A que corresponde à linha de I_3 que foi multiplicada por 2 para obter a matriz E. ◇

Exemplo 4.20. Consideremos a matriz $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Como podemos ver essa matriz foi obtida da matriz identidade I_3 multiplicando a segunda linha por 3 e adicionando-a a linha 3, e portanto E_3 é uma matriz elementar do tipo III. Vejamos o que acontece com uma matriz quadrada A de ordem 3 quando multiplicada a esquerda e a direita por E_3,

$$E_3A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + 3a_{21} & a_{32} + 3a_{22} & a_{33} + 3a_{23} \end{pmatrix}$$

$$AE_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + 3a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + 3a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + 3a_{33} & a_{33} \end{pmatrix}$$

De forma geral, se E é do tipo III, então calcular EA é equivalente a fazer a mesma operação que foi feita em I_n nas linhas de A. ◇

Observação 4.5. Dada uma matriz elementar E, sempre existirá uma matriz elementar F tal que $EF = FE = I$, onde a matriz elementar F é obtida de I_n efetuando a operação inversa a operação que foi efetuada em I_n para obter E.

Definição 4.9. *Dadas as matrizes elementares E e F, dizemos que F é a inversa de E, simbolizada por $F = E^{-1}$, se*

$$EF = FE = I_n.$$

Exemplo 4.21. Dada a matriz elementar $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pela observação acima podemos esperar que tomando $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, teremos,

$$E_2F = FE_2 = I.$$

De fato,

$$E_2F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

e

$$FE_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Portanto,

$$E_2F = FE_2 = I.$$

Como queríamos verificar. ◇

Exemplo 4.22. Consideremos a matriz elementar $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Observe que E_3 foi obtida da matriz I_3 pela operação elementar: $L_2 \longrightarrow L_2 + 3L_1$ (a linha 2 foi substituída pela linha 2 mais 3 vezes a linha 1).

Pela observação anterior podemos concluir que existe a matriz elementar F dada por $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, que foi obtida de I_3 pela operação elementar: $(L_2 \longrightarrow L_2 + (-3)L_1)$, tal que

$$E_3F = FE_3 = I.$$

De fato,

$$E_3F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

e

$$FE_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Portanto,

$$E_3F = FE_3 = I.$$

Como queríamos verificar. $\diamond$

Definição 4.10. *Dadas duas matrizes A e B de mesma ordem. Dizemos que a matriz B é equivalente a matriz A quando, a matriz B puder ser obtida de A por um número finito de operações elementares. E neste caso, denotamos por $B \sim A$.*

Teorema 4.7. *A matriz A é equivalente a matriz I_n se, e somente se, existem matrizes elementares E_1, E_2, $\ldots$, E_{n-1}, E_n tais que $E_nE_{n-1}E_{n-2}\ldots E_2E_1A = AE_nE_{n-1}E_{n-2}\ldots\ldots E_2E_1 = I$ e $A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}\ldots E_{n-1}^{-1}E_n^{-1}$.*

Prova: Se $A \sim I_n$ tem-se que por uma quantidade finita de operações elementares sobre as linhas de A obtemos I_n. Como cada operação elementar sobre as linhas equivale a multiplicar a matriz por uma matriz elementar a esquerda, tem-se $E_nE_{n-1}E_{n-2}\ldots E_2E_1A = I_n$.

Então,

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}\ldots E_{n-1}^{-1}E_n^{-1} \Longrightarrow AE_nE_{n-1}E_{n-2}\ldots E_2E_1 = I_n$$

Se $E_nE_{n-1}E_{n-2}\dots E_2E_1A = I_n$ como cada multiplicação por uma matriz elementar a esquerda equivale a fazer uma operação elementar nas linhas de A, tem-se $A \sim I_n$.

■

4.5 Determinante de uma matriz

Vimos que a cada sistema linear $n \times n$ podemos associar uma matriz quadrada dos seus coeficientes e temos também que a cada matriz quadrada podemos associar um sistema linear, por exemplo o sistema linear homogêneo. Definiremos o determinante da matriz como sendo o determinante do sistema homogêneo associado. Veremos que este determinante estará associado ao aspecto da matriz ser invertível ou não.

Definição 4.11. *O determinante de uma matriz quadrada $A_{n\times n}$, denotado por det (A), det (a_{ij}) ou $|A|$, é definido por:*

$$det\ (A_{n\times n}) = \sum_{l_1l_2\dots l_{(n-1)}l_n\in S_n} (-1)^j a_{1l_1}a_{2l_2}\dots a_{(n-1)l_{(n-1)}}a_{nl_n}$$

onde j é o número de inversões da permutação $l_1l_2\dots l_{(n-1)}l_n$ e S_n é o conjunto de todas essas permutações.

Exemplo 4.23. Dada a matriz quadrada $A = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}$ de ordem 1, tem-se que

$$det\ (A) = a_{11}$$

◇

Exemplo 4.24. Dada a matriz quadrada $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ de ordem 2, tem-se que

$$\begin{aligned} det\ (B) &= \sum_{l_1l_2\in S_2} (-1)^j a_{1l_1}a_{2l_2} \\ &= (-1)^j a_{11}a_{22} + (-1)^j a_{12}a_{21} \\ &= (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

Então,

$$det\ (B) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

◇

Exemplo 4.25. Dada a matriz quadrada $C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ de ordem 3, tem-se que

$$\begin{aligned}
det\ (C) &= \sum_{l_1 l_2 l_3 \in S_3} (-1)^j a_{1l_1} a_{2l_2} a_{3l_3} \\
&= (-1)^j a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^j a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^j a_{12}a_{21}a_{33} + \\
&\quad + (-1)^j a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^j a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^j a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + \\
&\quad + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}$$

Então,

$$det\ (C) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

◇

Teorema 4.8. (Teorema de Laplace) *O determinante de um sistema linear $n \times n$ pode ser expresso em termos de n determinantes de sistemas lineares $(n-1) \times (n-1)$, ou seja*

$$det\left(a_{ij}\right)_{n \times n} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

A demonstração desse teorema está na página 57. ■

Teorema 4.9. (Propriedades do Determinante de uma Matriz)

i) Se uma matriz quadrada A for triangular, então $det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} \ldots a_{nn}$;

ii) O determinante de uma matriz quadrada A é igual ao determinante sua transposta.

Prova: i) Suponhamos que a matriz A seja triangular superior, ou seja, $a_{ij} = 0$ se $j < i$, assim A é da forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \sum(-1)^j a_{1l_1}a_{2l_2}\dots a_{nl_n} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn},$$

pois outra permutação de $l_1l_2l_3\dots l_n \neq 123\dots n$ teríamos um inversão e portanto um a_{ij} com $j < i$, o que resultaria em um produto nulo.

ii) O determinante da matriz A é dado por

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum(-1)^j a_{1l_1}a_{2l_2}\dots a_{nl_n} \overset{(1)}{=} \sum(-1)^j a_{l_11}a_{l_22}\dots a_{l_nn} \\ &= det\ (A^t) \end{aligned}$$

onde usamos o teorema 3.5 página 55 na igualdade (1). ■

Observação 4.6. Todas as propriedades estudadas no capítulo anterior sobre o determinante de um sistema linear valem para o determinante de uma matriz.

Vejamos agora dois exemplos importantes de determinante.

Exemplo 4.26. Calcule o determinante da matriz abaixo, conhecido como determinante de Vandermonde, aplicando as propriedades do determinante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & \cdots & x_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Solução: Vamos aplicar o teorema de Laplace e algumas operações elementares sobre as colunas e sobre as linhas da matriz A. Assim,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & \cdots & x_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \underset{=}{\begin{array}{ccc} C_1 & \longleftrightarrow & C_1 \\ C_2 & \longrightarrow & C_2 - C_1 \\ C_3 & \longrightarrow & C_3 - C_1 \\ & \vdots & \\ C_n & \longrightarrow & C_n - C_1 \end{array}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^2 - x_1^2 \\ x_1^3 & x_2^3 - x_1^3 & x_3^3 - x_1^3 & \cdots & x_n^3 - x_1^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & x_3^{n-1} - x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=}$$

$$\begin{array}{ccc} L_1 & \longleftrightarrow & L_1 \\ L_2 & \longrightarrow & L_2 - x_1 L_1 \\ L_3 & \longrightarrow & L_3 - x_1 L_2 \\ & \vdots & \\ L_n & \longrightarrow & L_n - x_1 L_{n-1} \end{array}$$

$$\stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 & x_4^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^2 - x_1^2 \\ x_2^3 - x_1^3 & x_3^3 - x_1^3 & x_4^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^3 - x_1^3 \\ x_2^4 - x_1^4 & x_3^4 - x_1^4 & x_4^4 - x_1^4 & \cdots & x_n^4 - x_1^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & x_3^{n-1} - x_1^{n-1} & x_4^{n-1} - x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & x_4(x_4 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ x_2^2(x_2 - x_1) & x_3^2(x_3 - x_1) & x_4^2(x_4 - x_1) & \cdots & x_n^2(x_n - x_1) \\ x_2^3(x_2 - x_1) & x_3^3(x_3 - x_1) & x_4^3(x_4 - x_1) & \cdots & x_n^3(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & x_4^{n-2}(x_4 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & \cdots & x_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & x_4^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Nas passagens (1) aplicamos o teorema de Laplace. Observe no produto acima que encontramos um determinante idêntico ao inicial só que de ordem $(n-1) \times (n-1)$. Assim, continuando o processo de baixar a ordem da matriz, concluiremos que o determinante da matriz A será dado por,

$$[(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)][(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\cdots(x_n - x_2)]\ldots[(x_n - x_{n-1})] =$$

$$= \prod_{i>k}(x_i - x_k),\ 2\ \leq i\ \leq n \text{ e } 1\ \leq k\ \leq n-1$$

Portanto,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & \cdots & x_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>k}(x_i - x_k),\ 2\ \leq i\ \leq n \text{ e } 1\ \leq k\ \leq n-1$$

◇

Exemplo 4.27. Usando as propriedades do determinante, mostraremos que

$$\begin{vmatrix} m & a & a & \cdots & a \\ a & m & a & \cdots & a \\ a & a & m & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & m \end{vmatrix} = (m-a)^{n-1}[m + (n-1)a]$$

Solução: Vamos aplicar o teorema de Laplace e algumas operações elementares sobre as colunas e sobre as linhas da matriz A. Assim,

$$|A| \ = \begin{vmatrix} m & a & a & \cdots & a & a \\ a & m & a & \cdots & a & a \\ a & a & m & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & m & a \\ a & a & a & \cdots & a & m \end{vmatrix} \quad \begin{array}{ccc} L_1 & \longrightarrow & L_1 - L_n \\ L_2 & \longrightarrow & L_2 - L_n \\ & \vdots & \\ L_{n-1} & \longrightarrow & L_{n-1} - L_n \\ L_n & \longleftrightarrow & L_n \\ & = & \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} m-a & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-m \\ 0 & m-a & 0 & \cdots & 0 & a-m \\ 0 & 0 & m-a & \cdots & 0 & a-m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m-a & a-m \\ a & a & a & \cdots & a & m \end{vmatrix}$$

Vamos aplicar o teorema de Laplace para calcular o determinante acima. Escolhendo a primeira coluna, temos

$$|A| = (-1)^{1+1}(m-a)\begin{vmatrix} m-a & 0 & \cdots & 0 & a-m \\ 0 & m-a & \cdots & 0 & a-m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m-a & a-m \\ a & a & \cdots & a & m \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} +$$

$$+(-1)^{1+n}a\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a-m \\ m-a & 0 & \cdots & 0 & a-m \\ 0 & m-a & \cdots & 0 & a-m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m-a & a-m \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

Observe na igualdade acima que o primeiro determinante é igual ao determinante inicial (com uma linha e uma coluna a menos) e o segundo determinante é o determinante de uma matriz triangular (para chegar a essa conclusão basta realizar algumas trocas com as linhas da matriz, lembre que ao trocar linhas o determinante muda de sinal), assim teremos

$$|A| = (-1)^{1+1}(m-a)\begin{vmatrix} m-a & 0 & \cdots & 0 & a-m \\ 0 & m-a & \cdots & 0 & a-m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m-a & a-m \\ a & a & \cdots & a & m \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} + a(m-a)^{n-1}$$

Continuando esse processo de baixar a ordem da matriz concluiremos que

$$|A| = (m-a)^{n-1}m + (n-1)a(m-a)^{n-1} = (m-a)^{n-1}[m + (n-1)a].$$

Portanto,

$$|A| = (m-a)^{n-1}[m + (n-1)a].$$

Como queríamos mostrar. ◇

Teorema 4.10. *A matriz quadrada A é equivalente a matriz I_n se, e somente se, $det(A) \neq 0$.*

Prova: Tem-se,

$$det(A) \neq 0 \iff AX = \mathbf{0} \text{ tem solução única } X = \mathbf{0} \iff I_nX = \mathbf{0} \iff A \sim I_n.$$

■

Teorema 4.11. *Seja E uma matriz elementar e A uma matriz qualquer de mesma ordem que E, então*

$$det(EA) = det(E).det(A).$$

Prova: Podemos verificar facilmente, que o determinante de uma matriz elementar E será dado por

$$|E| = \begin{cases} -1, & \text{se E for do tipo I} \\ k, & \text{se E for do tipo II} \\ 1, & \text{se E for do tipo III} \end{cases}$$

Se E for uma matriz elementar do tipo I, temos pelo teorema 4.6, página 73 que EA é a matriz obtida de A permutando duas linhas, logo $|EA| = -|A|$ e como podemos ver acima, $|E| = -1$ e portanto $|EA| = |E||A|$.

Se E for uma matriz elementar do tipo II, temos pelo teorema 4.6, página 73 que EA é a matriz obtida de A multiplicando uma linha por k, logo $|EA| = k|A|$ e como podemos ver acima, $|E| = k$, assim $|EA| = |E||A|$.

Se E for uma matriz elementar do tipo III, temos pelo teorema 4.6, página 73 que EA é a matriz obtida de A substituindo a linha i pela linha i mais k vezes a linha j, logo $|EA| = |A|$ e como podemos ver acima, $|E| = 1$.

Portanto,

$$|EA| = |E||A|$$

Como queríamos demonstrar.

■

Teorema 4.12. *A matriz A é produto de matrizes elementares se, e somente se, $det(A) \neq 0$.*

Prova: Se $det(A) \neq 0$, então $A \sim I_n$ e pelo teorema 4.7 página 80 tem-se que $A = E_nE_{n-1}E_{n-2}\dots E_2E_1$ é produto de matrizes elementares.

Se $A = E_1E_2E_3\dots E_{n-1}E_n$, então $|A| = |E_1E_2E_3\dots E_{n-1}E_n| = |E_1||E_2E_3\dots E_{n-1}E_n| = |E_1||E_2||E_3\dots E_{n-1}E_n| = \dots = |E_1||E_2||E_3|\dots|E_{n-1}||E_n|$, pelo teorema anterior $|A| = |E_1||E_2||E_3|\dots$ $\dots|E_{n-1}||E_n| \neq 0$, pois $|E_i| \neq 0$, já que E_i são matrizes elementar. ■

Teorema 4.13. *Dadas as matrizes quadradas de mesma ordem tem-se*

$$det(AB) = det(A).det(B).$$

Prova: Se $|A| \neq 0$, então pelo teorema anterior A é produto de matrizes elementares, $A = E_1E_2E_3\dots E_{n-1}E_n$. Temos então:

$$|AB| = |E_1E_2E_3\dots E_{n-1}E_nB| = |E_1E_2E_3\dots E_{n-1}E_n||B| = |A||B|.$$

Se $|A| = 0$, então $|AB| = 0$ e portanto $|AB| = |A||B|$. De fato, pois se $|AB| \neq 0$, então $ABX = \mathbf{0} \Longrightarrow X = \mathbf{0}$ e portanto $A(BX) = \mathbf{0} \Longrightarrow BX = \mathbf{0}$ como única solução $\Longrightarrow |A| \neq 0$.

■

Corolário 4.1. *Se A é uma matriz invertível, então*

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}.$$

Prova: Como a matriz A é invertível, temos que $A^{-1}A = I$, logo

$$1 = |I| = |A^{-1}A| = |A^{-1}||A| \Longrightarrow |A^{-1}| = |A|^{-1}$$

Portanto,

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}.$$

■

Definição 4.12. *As matrizes A e B são ditas semelhantes se existe uma matriz invertível P tal que*

$$A = P^{-1}BP.$$

Corolário 4.2. *Se as matrizes A e B são semelhantes, então*

$$det(A) = det(B).$$

Prova: Dada $A = P^{-1}BP$, temos

$$|A| = |P^{-1}BP| = |P^{-1}||BP| = |P^{-1}||B||P| = |P^{-1}||P||B| = |P^{-1}P||B| = |I||B| = |B|.$$

Portanto,

$$|A| = |B|.$$

■

4.6 Matriz inversas

Definição 4.13. Uma matriz quadrada A de ordem n é dita invertível se existir uma matriz quadrada B também de ordem n, tal que $AB = BA = I_n$. Neste caso B é dita a inversa de A e será representada por A^{-1}.

Exemplo 4.28. As matrizes quadradas $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ são invertíveis, pois

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -15+15 \\ 2-2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & 10-10 \\ -3+3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto, $B = A^{-1}$, ou ainda, $A = B^{-1}$. ◇

Observação 4.7. Se A e B são invertíveis de mesma ordem, então AB também é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. De forma geral se $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_n$ são invertíveis de mesma ordem, então $A_1A_2A_3\ldots A_n$ é invertível e $(A_1A_2A_3\ldots A_n)^{-1} = A_n^{-1}A_{(n-1)}^{-1}A_{(n-2)}^{-1}\ldots A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}$.

De fato, pois

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

Portanto,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Observação 4.8. É importante observar que se uma matriz quadrada A de ordem n for invertível, então podemos associá-la a resolução de um sistema linear homogênio com n equações e n incógnitas, $AX = \mathbf{0}$.

Teorema 4.14. *Se uma matriz quadrada A de ordem n é invertível, então a sua inversa é única.*

Prova: De fato, pois se B e C são inversas de A, tem-se

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C,$$

ou seja, as matrizes B e C são iguais. ■

Teorema 4.15. *A matriz A é invertível se, e somente se, $A \sim I_n$.*

Prova: Se $A \sim I_n$, tem-se pelo teorema que existem as matrizes elementares $E_1,\ E_2,\ E_3,\ \ldots,\ E_{n-1},\ E_n$ tais que $E_nE_{n-1}E_{n-2}\ldots E_2E_1A = AE_nE_{n-1}E_{n-2}\ldots E_2E_1 = I$ e portanto A é invertível com $A^{-1} = (E_nE_{n-1}E_{n-2}\ldots E_2E_1)^{-1}$.

Se A é invertível, então

$$AX = \mathbf{0} \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}\mathbf{0} \Longrightarrow IX = \mathbf{0} \Longrightarrow X = \mathbf{0} \Longrightarrow AX = \mathbf{0} \sim I_nX = \mathbf{0} \Longrightarrow A \sim I_n$$

■

Teorema 4.16. *A matriz A é invertível se, e somente se,* $det(A) \neq 0$.

Prova: Como $det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow A \sim I_n \Longleftrightarrow \exists A^{-1}$ tem-se $det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow \exists A^{-1}$

No primeiro ($\Longleftrightarrow$) usamos o teorema 4.10, página 86, no segundo ($\Longleftrightarrow$) usamos o teorema 4.15, página 89. ■

Teorema 4.17. *Se a matriz A é invertível a esquerda ou a direita, então A é invertível e sua inversa, a inversa à esquerda e a inversa à direita são iguais.*

Prova: Se $\exists B$ tal que $BA = I$, então $AX = \mathbf{0} \Longrightarrow BAX = B\mathbf{0} \Longrightarrow IX = \mathbf{0} \Longrightarrow X = \mathbf{0} \Longrightarrow det(A) \neq 0$, pois $AX = \mathbf{0}$ tem solução única. Pelo corolário anterior $\exists A^{-1}$.

Sendo $BA = I$, tem-se $BAA^{-1} = IA^{-1} \Longrightarrow B = A^{-1}$.

Se $\exists B$ tal que $AB = I$, então A é uma inversa *à* esquerda de B e pelo item anterior

$$A = B^{-1} \Longrightarrow BA = I \Longrightarrow B = A^{-1}$$

■

Teorema 4.18. *Se A é invertível então* $E_nE_{n-1}E_{n-2}\dots E_2E_1A = I_n$ *e* $E_nE_{n-1}E_{n-2}\dots E_2E_1I_n = A^{-1}$*, ou seja, a matriz inversa é encontrada realizando a mesma sequencia de operações elementares sobre* I_n *que foi efetuada sobre A para obter* I_n.

Prova: Temos pelo teorema 1 que

$$E_nE_{n-1}E_{n-2}\dots E_2E_1A = AE_nE_{n-1}E_{n-2}\dots E_2E_1 = I \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow E_nE_{n-1}E_{n-2}\dots E_2E_1A = I$$

e

$$E_nE_{n-1}E_{n-2}\dots E_2E_1 = A^{-1} \Longrightarrow E_nE_{n-1}E_{n-2}\dots E_2E_1I = A^{-1}I \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow E_nE_{n-1}E_{n-2}\dots E_2E_1I = A^{-1}$$

■

Para obtermos A^{-1} operamos simultaneamente com as matrizes A e I, colocadas uma ao lado da outra, por meio de operações elementares, transformando A em I e I em A^{-1}.

$$\left(A \vdots I\right) \longrightarrow \left(I \vdots A^{-1}\right)$$

Exemplo 4.29. Verifique se a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ admite inversa e se admitir a encontre.

Solução: Como as operações elementares são as mesmas para A e I_4, usaremos a representação a seguir,

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_2 \\ L_2 \longrightarrow L_3 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \longrightarrow L_4 + L_1 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_3 \longrightarrow L_3 - L_2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \longrightarrow L_2 - L_3 \\ L_4 \underset{\sim}{\longrightarrow} L_4 + L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 + 2L_4 \\ L_2 \longrightarrow L_2 - 4L_4 \\ L_3 \underset{\sim}{\longrightarrow} L_3 + 3L_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Como $A \sim I_4$, tem-se que A é invertível e

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\diamond$

Observação 4.9. Podemos representar um sistema linear por $Ax = B$, em que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

.

Se $det(A) \neq 0$, então a matriz A é invertível e o sistema linear tem solução única. Portanto

$$Ax = B \Longrightarrow x = A^{-1}B$$

Teorema 4.19. *Se $det(A) \neq 0$, então*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}|A_{11}| & (-1)^{1+2}|A_{12}| & \cdots & (-1)^{1+n}|A_{1n}| \\ (-1)^{2+1}|A_{21}| & (-1)^{2+2}|A_{22}| & \cdots & (-1)^{2+n}|A_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}|A_{n1}| & (-1)^{n+2}|A_{n2}| & \cdots & (-1)^{n+n}|A_{nn}| \end{pmatrix}^t$$

onde A_{ij} é a matriz obtida de A pela exclusão da linha i e da coluna j e $|A_{ij}| = det(A_{ij})$.

Prova: Dado um sistema de equações lineares $Ax = B$ ele terá solução única se $|A| \neq 0$, assim existe A^{-1} tal que

$$Ax = B \Longrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}B \Longrightarrow x = A^{-1}B. \tag{4.1}$$

Vamos usando a notação de Laplace para dá a solução do sistema,

$$x_i = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}|A_{ki}|b_k.$$

Logo, podemos representar única solução do sistema da seguinte forma

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{(k+1)}|A_{k1}|b_k \\ \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{(k+2)}|A_{k2}|b_k \\ \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{(k+3)}|A_{k3}|b_k \\ \vdots \\ \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{(k+n)}|A_{kn}|b_k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{|A|}\left((-1)^{(1+1)}|A_{11}|b_1 + (-1)^{(2+1)}|A_{21}|b_2 + \cdots + (-1)^{(n+1)}|A_{n1}|b_n\right) \\ \frac{1}{|A|}\left((-1)^{(1+2)}|A_{12}|b_1 + (-1)^{(2+2)}|A_{22}|b_2 + \cdots + (-1)^{(n+2)}|A_{n2}|b_n\right) \\ \frac{1}{|A|}\left((-1)^{(1+3)}|A_{13}|b_1 + (-1)^{(2+3)}|A_{23}|b_2 + \cdots + (-1)^{(n+3)}|A_{n3}|b_n\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{|A|}\left((-1)^{(1+n)}|A_{1n}|b_1 + (-1)^{(2+n)}|A_{2n}|b_2 + \cdots + (-1)^{(n+n)}|A_{nn}|b_n\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} (-1)^{(1+1)}\,|A_{11}| & (-1)^{(2+1)}\,|A_{21}| & \cdots & (-1)^{(n+1)}\,|A_{n1}| \\ (-1)^{(1+2)}\,|A_{12}| & (-1)^{(2+2)}\,|A_{22}| & \cdots & (-1)^{(n+2)}\,|A_{n2}| \\ (-1)^{(1+3)}\,|A_{13}| & (-1)^{(2+3)}\,|A_{23}| & \cdots & (-1)^{(n+3)}\,|A_{n3}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{(1+n)}\,|A_{1n}| & (-1)^{(2+n)}\,|A_{2n}| & \cdots & (-1)^{(n+n)}\,|A_{nn}| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} (-1)^{(1+1)}\,|A_{11}| & (-1)^{(1+2)}\,|A_{12}| & \cdots & (-1)^{(1+n)}\,|A_{1n}| \\ (-1)^{(2+1)}\,|A_{21}| & (-1)^{(2+2)}\,|A_{22}| & \cdots & (-1)^{(2+n)}\,A_{2n} \\ (-1)^{(3+1)}\,|A_{31}| & (-1)^{(3+2)}\,|A_{32}| & \cdots & (-1)^{(3+n)}\,|A_{3n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{(n+1)}\,|A_{n1}| & (-1)^{(n+2)}\,|A_{n2}| & \cdots & (-1)^{(n+n)}\,|A_{nn}| \end{pmatrix}^t\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} (-1)^{(1+1)}\,|A_{11}| & (-1)^{(1+2)}\,|A_{12}| & \cdots & (-1)^{(1+n)}\,|A_{1n}| \\ (-1)^{(2+1)}\,|A_{21}| & (-1)^{(2+2)}\,|A_{22}| & \cdots & (-1)^{(2+n)}\,|A_{2n}| \\ (-1)^{(3+1)}\,|A_{31}| & (-1)^{(3+2)}\,|A_{32}| & \cdots & (-1)^{(3+n)}\,|A_{3n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{(n+1)}\,|A_{n1}| & (-1)^{(n+2)}\,|A_{n2}| & \cdots & (-1)^{(n+n)}\,|A_{nn}| \end{pmatrix}^t B$$

Ou seja,

$$x = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} (-1)^{(1+1)}\,|A_{11}| & (-1)^{(1+2)}\,|A_{12}| & \cdots & (-1)^{(1+n)}\,|A_{1n}| \\ (-1)^{(2+1)}\,|A_{21}| & (-1)^{(2+2)}\,|A_{22}| & \cdots & (-1)^{(2+n)}\,|A_{2n}| \\ (-1)^{(3+1)}\,|A_{31}| & (-1)^{(3+2)}\,|A_{32}| & \cdots & (-1)^{(3+n)}\,|A_{3n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{(n+1)}\,|A_{n1}| & (-1)^{(n+2)}\,|A_{n2}| & \cdots & (-1)^{(n+n)}\,|A_{nn}| \end{pmatrix}^t B \qquad (4.2)$$

Portanto, comparando as igualdades 4.1 e 4.2 concluímos que

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}|A_{11}| & (-1)^{1+2}|A_{12}| & \cdots & (-1)^{1+n}|A_{1n}| \\ (-1)^{2+1}|A_{21}| & (-1)^{2+2}|A_{22}| & \cdots & (-1)^{2+n}|A_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}|A_{n1}| & (-1)^{n+2}|A_{n2}| & \cdots & (-1)^{n+n}|A_{nn}| \end{pmatrix}^t$$

Como queríamos demonstrar. ■

Definição 4.14. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Define-se o* ***cofator*** *de a_{ij} como*

$$cof(a_{ij}) = \Delta_{ij} = (-1)^{i+j} det\,(A_{ij})$$

em que a matriz quadrada A_{ij} é a matriz obtida da matriz A excluída a i-ésima linha e a j-ésima coluna.
A matriz

$$\begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

é denominada matriz dos cofatores da matriz A $\left(\text{representada por } \Delta_{ij}(A)\right)$ e sua transposta será chamada de matriz adjunta da matriz A e denotada por $Adj\ (A)$.

Exemplo 4.30. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ com $ad - bc \neq 0$, tem-se

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}|A_{11}| & (-1)^{1+2}|A_{12}| \\ (-1)^{2+1}|A_{21}| & (-1)^{2+2}|A_{22}| \end{pmatrix}^t \\ &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}|A_{11}| & (-1)^{2+1}|A_{21}| \\ (-1)^{1+2}|A_{12}| & (-1)^{2+2}|A_{22}| \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, temos que $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$. ◇

Exemplo 4.31. Dada a matriz $B = \begin{pmatrix} cos\ \theta & -sen\ \theta \\ sen\ \theta & cos\ \theta \end{pmatrix}$, tem-se

$$\begin{aligned} B^{-1} &= \frac{1}{det(B)} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}|A_{11}| & (-1)^{1+2}|A_{12}| \\ (-1)^{2+1}|A_{21}| & (-1)^{2+2}|A_{22}| \end{pmatrix}^t \\ &= \frac{1}{sen^2\ \theta + cos^2\ \theta} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}|A_{11}| & (-1)^{2+1}|A_{21}| \\ (-1)^{1+2}|A_{12}| & (-1)^{2+2}|A_{22}| \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} cos\ \theta & sen\ \theta \\ -sen\ \theta & cos\ \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

◇

4.7 Mais nomenclaturas de matrizes

Definição 4.15. (Matriz Idempotente) *Chamaremos de matriz idempotente toda matriz quadrada não nula A tal que*

$$A^2 = A$$

Exemplo 4.32. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

é idempotente, pois

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A$$

◇

Definição 4.16. (Matriz Nilpotente) *Chamaremos de matriz nilpotente toda matriz quadrada não nula A se existir um número natural $k \geqslant 2$ tal que $A^k = \mathbf{0}$, onde o $\mathbf{0}$ representa a matriz nula.*

Exemplo 4.33. A matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

é nilpotente, pois

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

◇

Definição 4.17. (Matriz Unipotente) *Chamaremos de matriz unipotente toda matriz quadrada A, em que $(A - I)$ é nilpotente.*

Exemplo 4.34. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

é unipotente, pois seja a matriz $B = A - I_3$. Temos

$$B = A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

◇

Definição 4.18. (Matriz Ortogonal) *Chamaremos de matriz ortogonal toda matriz invertível cuja inversa é sua transposta, ou seja, que satisfaz a igualdade*

$$AA^t = A^tA = I$$

Exemplo 4.35. A matriz abaixo

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

é ortogonal, pois

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

◇

Definição 4.19. (Matrizes Semelhantes) *As matrizes quadradas de mesma ordem n são ditas semelhantes se existir uma matriz invertível S de ordem n tal que*

$$S^{-1}AS = B$$

Exemplo 4.36. As matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ são semelhantes, pois existe a matriz $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ tal que

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = B$$

◇

Definição 4.20. (Matrizes Hermitianas) *Dizemos que uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ complexas é uma matriz Hermitiana se a transposta da sua conjugada for igual à própria matriz, isto é, $(\overline{A})^t = A$. Geralmente indicamos $A^* = A$ para denotar uma matriz Hermitiana.*

Exemplo 4.37. A matriz abaixo é hermitiana

$$\begin{pmatrix} 0 & i & i \\ -i & 0 & i \\ -i & -i & 0 \end{pmatrix}$$

Verifique! ◇

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; Rorres, C. *Álgebra Linear com Aplicações*. Tradução técnica: Claus Ivo Doering. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BOLDRINI, J. L. [et. al.]. *Álgebra Linear*. 3. ed. São Paulo: Harbra & Row do Brasil, 1980.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Revista por Uta C. M.; Tradução Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo. Editora Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. *Guia de livros didáticos: PNLD 2012: Matemática*. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros curriculares nacionais (PCN) ensino médio: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias, parte III*. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros curriculares nacionais + (PCN+): ensino médio: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias, parte III*. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. *Matriz de referência para o ENEM 2009*. Brasília: INEP, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. *Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2006. v.2.

CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. *Álgebra Linear e Aplicações*. 6. ed. Rev. São Paulo: Atual, 1990.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. 5. ed. Campinas, sp: Editora da Unicamp, 2011.

HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. S. *Introdução à Álgebra Linear*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SÉRGIO, Paulo. *Uma Breve História das Matrizes e Determinantes*. Disponível em: <http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2011/10/uma-breve-historia-das-matrizes-e.html>. Acesso em: 09/03/2014.

LIMA, E. L. *Coordenadas no Espaço* . 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

LIMA, E. L. *Sobre o ensino de sistemas lineares*. RPM. São Paulo: SBM, n.23: 8-18.

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. L. *Álgebra Linear*. Tradução: Dr. Claus Ivo Doering. 4.

ed. Porto Alegre: Bookman, 2011.

POOLE, D. *Álgebra Linear*. Tradutoras técnicas Martha Salerno Monteiro (coord.) ... [et al.]. Reimpr. da 1. ed. de 2004. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

SHOKRANIAN, S. *Uma Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2009.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.