



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE POS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FERNANDO DO CARMO BATISTA

UTILIZANDO AS PLANILHAS ELETRÔNICAS PARA DETERMINAR OS
ELEMENTOS DAS CÔNICAS

FORTALEZA

2014

FERNANDO DO CARMO BATISTA

UTILIZANDO AS PLANILHAS ELETRÔNICAS PARA DETERMINAR OS
ELEMENTOS DAS CÔNICAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino em Matemática.

Orientador: Prof. DR. Jonatan Floreano da Silva

FORTALEZA

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

-
- B336u Batista, Fernando do Carmo
 Utilizando as planilhas eletrônicas para determinar os elementos das cônicas / Fernando do Carmo
 Batista. – 2014.
 83 f. : il., enc.; 31 cm
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2014.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva.

1. Geometria analítica. 2. Software educacional. 3. Planilhas eletrônicas. I. Título.

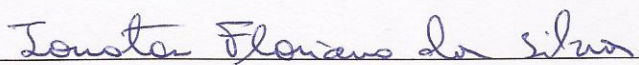
FERNANDO DO CARMO BATISTA

UTILIZANDO AS PLANILHAS ELETRÔNICAS PARA DETERMINAR OS
ELEMENTOS DAS CÔNICAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em
Matemática em Rede Nacional, do
Departamento de Matemática da
Universidade Federal do Ceará, como
requisito parcial para a obtenção do
Título de Mestre em Matemática. Área
de concentração: Ensino de Matemática.

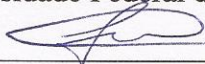
Aprovada em: 28 / 06 / 2014.

BANCA EXAMINADORA



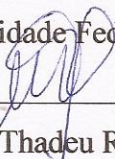
Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo

Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Ms. Thadeu Ribeiro Benicio Milfont

Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA)

*Dedico este trabalho à minha esposa
Clemilda Ivo Feijão do Carmo e à minha
filhinha Eva Feijão do Carmo que está
próximo de nascer.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus pelo dom da vida e por todas as bênçãos a mim concedidas.

Agradeço à minha esposa, Clemilda Ivo Feijão do Carmo, pelo incentivo, apoio e carinho em todos os momentos de nossa união.

Agradeço ao meu pai e amigo José Evandro Batista e à minha mãe Maria Vilani do Carmo Batista pelo apoio e motivação em todos os momentos de minha vida.

Agradeço à minha mãe biológica Maria José Nery de Sousa pela minha vida.

Agradeço a toda minha família, amigos e a todos meus colegas do PROFMAT, que, não foram citados aqui, mas que contribuíram direta ou indiretamente para o fechamento deste trabalho.

Agradeço à SBM e toda a sua diretoria pela oportunidade ofertada no curso PROFMAT que me concedeu mais uma oportunidade de aperfeiçoamento profissional.

Por fim, agradeço aos meus professores e principalmente ao meu professor orientador, Dr. Jonatan Floriano da Silva, pela paciência.

RESUMO

Neste trabalho, falaremos sobre cônicas e equação geral do segundo grau, histórico e parte teórica, aplicando estes conhecimentos na elaboração de planilhas eletrônicas para identificar qual a cônica (elipse, hipérbole ou parábola, bem como seus casos degenerados) e determinar seus principais elementos a partir de suas equações, na forma canônica ou geral do segundo grau. Para melhor compreensão e fixação do que vai ser exposto, faremos uso de atividades interativas com a utilização de computador.

Palavras-chave: Softwares Educacionais. Geometria Analítica. Secções Cônicas.

ABSTRACT

In this paper, we will discuss general conic and quadratic equation, historical and theoretical part, applying this knowledge in designing spreadsheets to identify which conic (ellipse, parabola or hyperbola, as well as their degenerate cases) and determine its main elements from their equations in canonical or general high school. For better understanding and assessment of what will be, we will make use of interactive activities with the use of computer.

Keywords: Educational software. Analytic Geometry. Conic Sections.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Cone duplo e secções cônicas.....	22
Figura 2 – Pontos da elipse.....	23
Figura 3 – Relação notável da elipse	24
Figura 4 – Pontos da hipérbole	37
Figura 5 – Relação notável da hipérbole	38
Figura 6 – Pontos da parábola	48

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	25
Gráfico 2 – Elipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$	26
Gráfico 3 – Elipse $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$	26
Gráfico 4 – Elipse $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$	27
Gráfico 5 – Elipse $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	28
Gráfico 6 – Elipse $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$	28
Gráfico 7 – Hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	38
Gráfico 8 – Hipérbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$	39
Gráfico 9 – Hipérbole $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	40
Gráfico 10 – Hipérbole $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$	40
Gráfico 11 – Hipérbole $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	41
Gráfico 12 – Hipérbole $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$	41
Gráfico 13 – Assíntotas e retângulo de base da hipérbole	42
Gráfico 14 – Parábola $y^2 = 4px$	49
Gráfico 15 – Parábola $y^2 = 4x$	50
Gráfico 16 – Parábola $y^2 = -4x$	50
Gráfico 17 – Parábola $x^2 = 4py$	50
Gráfico 18 – Parábola $x^2 = 4y$	51
Gráfico 19 – Parábola $x^2 = -4y$	51
Gráfico 20 – Parábola $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$	51
Gráfico 21 – Parábola $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$	52
Gráfico 22 – Rotação dos eixos coordenados OX e OY por um ângulo θ	60
Gráfico 23 – Parábola de equação $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 204x - 472y - 756 = 0$..	62
Gráfico 24 – Rotação dos eixos coordenados OX e OY	66
Gráfico 25 – Par de retas paralelas	67

Gráfico 26 – Gráfico da hipérbole $f(x,y) = 7x^2 - 48xy - 7y^2 - 30x - 40y + 75$ 71

Gráfico 27 – Translação de Sistema81

LISTA DE PLANILHAS

Planilha 1 – Inserindo a expressão $ax^2 + bx + c$	32
Planilha 2 - Inserindo os termos procurados a partir dos coeficientes da equação do 2º grau	33
Planilha 3 – Planilha programada (equação do 2º grau).....	33
Planilha 4 – Visualização das fórmulas (equação do 2º grau)	34
Planilha 5 – Planilha programada (elipse com eixo focal paralelo a OX)	35
Planilha 6 – Visualização das fórmulas (elipse com eixo focal paralelo a OX)	35
Planilha 7 – Planilha programada (equação do 2º grau com $AC > 0$).....	36
Planilha 8 – Planilha programada (hipérbole com eixo focal paralelo a OX).....	46
Planilha 9 – Visualização das fórmulas (hipérbole com eixo focal paralelo a OX) ...	46
Planilha 10 – Planilha programada (equação do 2º grau com $AC < 0$).....	47
Planilha 11 – Planilha programada (parábola com eixo focal paralelo a OX)	55
Planilha 12 – Visualização das fórmulas (parábola com eixo focal paralelo a OX) ..	56
Planilha 13 – Planilha programada (equação do 2º grau com $AC = 0$)	56
Planilha 14 – Planilha programada (equação geral do 2º grau)	73
Planilha 15 – Planilha de fórmulas (equação geral do 2º grau)	74
Planilha 16 – Planilha de fórmulas (equação geral do 2º grau) (continuação)	72

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Fórmulas das células (equação do 2º grau com $AC > 0$)	36
Tabela 2 – Fórmulas das células (equação do 2º grau com $AC < 0$)	47
Tabela 3 – Fórmulas das células (equação do 2º grau com $AC = 0$)	57

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	19
2	HISTÓRICO DAS CÔNICAS	21
3	CÔNICAS	23
3.1	Elipse	23
3.1.1	<i>Forma canônica da elipse</i>	24
3.1.2	<i>Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC > 0$</i>	29
3.1.3	<i>Proposta de atividade</i>	32
3.1.3.1	<i>Atividade resolvida</i>	32
3.1.3.2	<i>Atividade</i>	34
3.2	Hipérbole	37
3.2.1	<i>Forma canônica da hipérbole</i>	38
3.2.2	<i>Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC < 0$</i>	42
3.2.3	<i>Proposta de atividade</i>	45
3.2.3.1	<i>Atividade</i>	45
3.3	Parábola.....	48
3.3.1	<i>Forma canônica da parábola</i>	49
3.3.2	<i>Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC = 0$</i>	52
3.3.3	<i>Proposta de atividade</i>	55
3.3.3.1	<i>Atividade</i>	55
3.4	Equação geral do segundo grau em $\mathbb{R}^2$	58
3.4.1	<i>Autovalores e autovetores</i>	58
3.4.2	<i>Rotação dos eixos coordenados</i>	60
3.4.3	<i>Formas quadráticas</i>	62
3.4.4	<i>Equação geral do segundo grau em $\mathbb{R}^2$</i>	68
3.4.5	<i>Proposta de atividade</i>	73
3.4.5.1	<i>Atividade</i>	73
4	CONCLUSÃO	75
	REFERÊNCIAS	77
	APÊNDICE A - PLANILHAS MAIS SOFISTICADAS PARA SE DETERMINAR OS PRINCIPAIS ELEMENTOS DAS CÔNICAS	79
	APÊNDICE B – TRANSLAÇÃO DE SISTEMA	81

1 INTRODUÇÃO

Podemos afirmar que a educação brasileira está longe de ser um sucesso, em particular na disciplina de Matemática. Os números comprovam. Na última edição do *Programme for International Student Assessment* (Pisa)¹ - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, em 2012, o Brasil ocupou a posição 58º, no ranking de Matemática, dentre 65 países analisados, ficando atrás de países sulamericanos, como Chile (51º) e Uruguai (55º). Já internamente, um dos indicadores do nível dos estudantes vem do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), onde a comparação é entre escolas públicas e privadas. Em 2010, por exemplo, dentre as 100 melhores escolas, 13, apenas, eram públicas e destas, a maioria vinculada a uma universidade pública. Vale levar em consideração que as melhores escolas, na comparação entre escolas públicas e privadas, possuem turmas homogêneas de alunos com bom nível de conhecimento, elevando suas respectivas médias.

Tentar compartilhar um conhecimento que requer bastantes pré-requisitos, como é o caso da Matemática, em uma sala de ensino médio do sistema público em que mais da metade da sala tem dificuldades com a matéria, é uma tarefa quase que impossível. Tentamos ensinar como se os conteúdos não tivessem pré-requisitos.

Pensando em melhorar o ensino de Matemática, com todos os obstáculos que possuímos, como falta de estrutura física e desinteresse pela matéria, vemos nas tecnologias da informação e comunicação (Tic's), alternativas para estimular e atrair os alunos, além de melhorar a qualidade do ensino. Desenvolver atividades que propiciem a obtenção de habilidades e competências com o apoio das tecnologias está prevista nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) para o ensino médio. A exemplo dessas competências e habilidades, podemos citar: "Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e

¹ Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - é uma iniciativa internacional de avaliação comparada, aplicada a estudantes na faixa dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países. (Fonte: INEP)

de comunicação” e “Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades”.

Motivado pelo interesse às tecnologias e facilidade em manusear softwares matemáticos, decidimos elaborar algumas atividades práticas elementares, com a utilização de planilhas eletrônicas, que não exigem maiores conhecimentos sobre esses aplicativos, apenas instruções básicas de manuseio. Nossos principais objetivos são: estimular o estudo da matemática, a criatividade e a utilização do computador para fins educacionais; mostrar a importância da escrita em matemática; e colaborar com a formação profissional dos alunos.

Iniciamos este trabalho descrevendo alguns aspectos históricos que fazem parte da evolução dos estudos sobre as cônicas, enfatizando seus mentores. Em seguida, fazemos uma explanação teórica da elipse, hipérbole, parábola e equação geral do segundo grau em $\mathbb{R}^2$, estes acompanhados de propostas de atividades utilizando as planilhas eletrônicas.

Salientamos que para ter sucesso na execução das atividades propostas é necessário ter uma noçãozinha sobre planilhas eletrônicas e que o aluno precisa ter resolvido vários exercícios sobre os temas que são abordados neste trabalho. Não elaboramos listas de exercícios de fixação da parte teórica, mas os mesmos são facilmente encontrados em livros do 3º ano do ensino médio, com exceção da equação geral do segundo grau em $\mathbb{R}^2$ que não é comum em livro da educação básica. Este, por ser um pouco complexo para os alunos de ensino médio pode ser trabalhado de forma complementar e bem superficial.

Ao final, no Apêndice A, disponibilizamos por meio de links, planilhas mais bem elaboradas que consideram os casos gerais das cônicas e com a utilização de mais funções internas da planilha, que podem ser objetos de estudos e servir de base para outras atividades.

2 HISTÓRICO DAS CÔNICAS

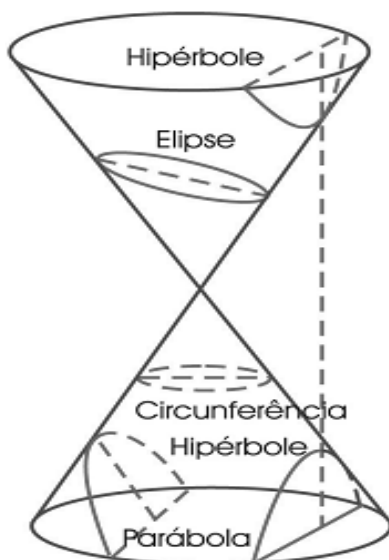
O estudo que levou às secções cônicas foi motivado inicialmente pelo desafio que era o problema da duplicação do cubo. Menaecmus (viveu por volta de 390 a.C.) que ao procurar a solução deste problema, utilizando cortes em cones retos e conhecimentos básicos de geometria, chegou às equações da parábola e da hipérbole, na notação da época. As deduções dessas equações apresentam fortes indícios da utilização de geometria analítica, porém não há como ter certeza, justificado por Boyer (2010, p. 65) no trecho:

Como esse material tem forte ar de uso de coordenadas, [...], foi algumas vezes sustentado que ele dispunha de geometria analítica. Tal opinião é apenas parcialmente justificável, pois certamente Menaecmus não sabia que uma equação em duas quantidades incógnitas determina uma curva. Na verdade, o conceito geral de equação em quantidades incógnitas era estranho ao pensamento grego.

A grande contribuição dada às cônicas foi fruto dos estudos de Apolônio de Perga, que apesar de não termos certeza, sugere-se que viveu de 262 a 190 a.C. Tido como matemático de destaque, assim como Euclides e Arquimedes, Apolônio escreveu, entre outros assuntos, oito livros de título *As Cônicas* nos quais apenas sete conseguiram se preservar até hoje. Outros autores, como Euclides e Aristeu, já haviam, antes de Apolônio, escrito sobre estas curvas, porém sua obra virou um clássico da antiguidade, assim como *Os Elementos* de Euclides. Além de reunir os conceitos já existentes sobre o tema, Apolônio apresentou informações aparentemente inéditas, como por exemplo, demonstrou que não é necessário tomar secções perpendiculares a um elemento do cone e que de um único cone podem ser obtidas todas as três espécies de secções cônicas, simplesmente variando a inclinação do plano de secção e substituiu o cone de uma só folha (como um cone de sorvete) por um duplo (semelhantes a dois cones de sorvete colocados, em sentidos oposto e indefinidamente estendidos, de modo que seus vértices coincidam e os eixos estejam sobre a mesma reta. Até então, a hipérbole que hoje a conhecemos por ter dois ramos, era tida como sendo duas hipérboles. Os nomes, parábola, elipse e hipérbole, também foram adotados por ele em sua obra, motivado

por algumas propriedades dessas curvas e embasado em termos utilizados por outros matemáticos, como por exemplo, os pitagóricos.

Figura 1 – Cone duplo e secções cônicas



Fonte: <http://evanilson.blogspot.com.br/>

O matemático árabe Omar khayyam (cerca de 1050 – 1122) também utilizou idéias sobre cônicas para encontrar soluções de equações cúbicas, por meio da interseção dessas curvas, o que não deixa de ser uma aplicação.

Outro grande avanço foi devido a René Descartes (1596-1650), pois suas generalizações a respeito da relação da álgebra com a geometria e vice-versa – geometria analítica – deu mais praticidade na interpretação das cônicas e seus elementos. Boyer cita também que Descartes trabalhou com equações do segundo grau com o termo xy .

Outros matemáticos que colaboraram no estudo das cônicas foram: Pierre de Fermat (1601 – 1665), rival de Descartes; John Wallis (1616 – 1703); Isaac Newton (1642-1727); etc..

A princípio o estudo mais refinado das cônicas não teve aplicabilidade, como diversos temas da matemática que surgem. Mas atualmente, utilizamos conhecimentos dessas curvas nos receptores parabólicos, telescópios, sistema de navegação LORAN (sistema de localização de aviões e navios), etc.

3 CÔNICAS

3.1 Elipse

Considere dois pontos F_1 e F_2 , pertencentes a um plano α , cuja distância entre eles seja $2c \geq 0$.

Elipse é o conjunto dos pontos de α cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ (sendo $2a > 2c$).

$$\mathcal{E} = \{P \in \alpha \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$

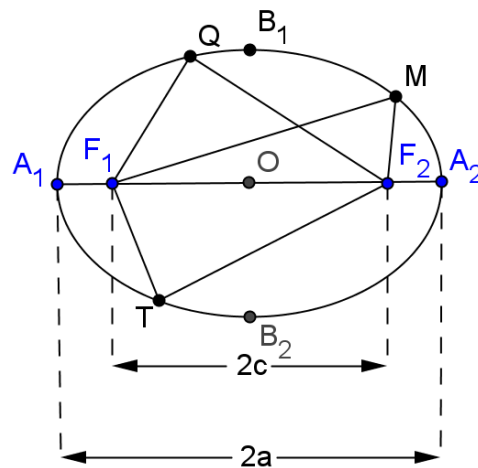
Assim, temos:

$$d(Q, F_1) + d(Q, F_2) = 2a$$

$$d(T, F_1) + d(T, F_2) = 2a$$

$$d(M, F_1) + d(M, F_2) = 2a$$

Figura 2 – Pontos da Elipse



Notemos que $d(A_1, A_2) = 2a$, pois:

$$d(A_1, F_1) + d(A_1, F_2) = d(A_2, F_2) + d(A_2, F_1)$$

Então

$$x + (x + 2c) = y + (y + 2c)$$

portanto $x = y$.

$$d(A_1, A_2) = d(A_1, F_1) + d(F_1, F_2) + d(F_2, A_2) = x + 2c + y = 2(x + c) = 2a$$

Elementos Principais

F_1 e $F_2 \rightarrow$ focos

$O \rightarrow$ centro

$A_1A_2 \rightarrow$ eixo maior

$B_1B_2 \rightarrow$ eixo menor

$2c \rightarrow$ distância focal

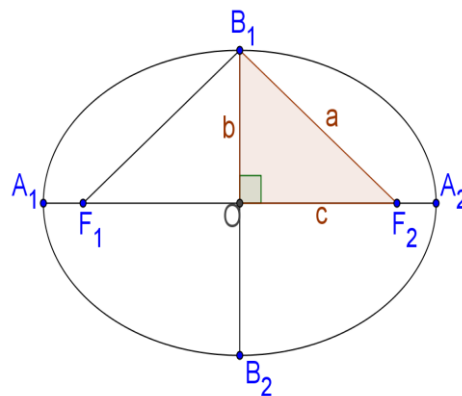
$2a \rightarrow$ medida do eixo maior

$2b \rightarrow$ medida do eixo menor

$\frac{c}{a} \rightarrow$ excentricidade²

Relação notável: $a^2 = b^2 + c^2$

Figura 3 – Relação notável da elipse



3.1.1 Forma canônica da elipse

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal tal que A_1A_2 e B_1B_2 contidos nos eixos OX e OY , respectivamente.

É evidente que os focos são os pontos: $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

Nestas condições, chama-se forma canônica da elipse a equação que $P(x, y)$, ponto genérico da curva, verifica.

A dedução é imediata:

$P \in \text{elipse} \Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$. Então:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

² Observamos que: $e = \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow c = 0 \Leftrightarrow \mathcal{E} = \{P | d(P, C) = a\}$ é um círculo de centro C e raio a .

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx \rightarrow a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = (a^2 - cx)^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

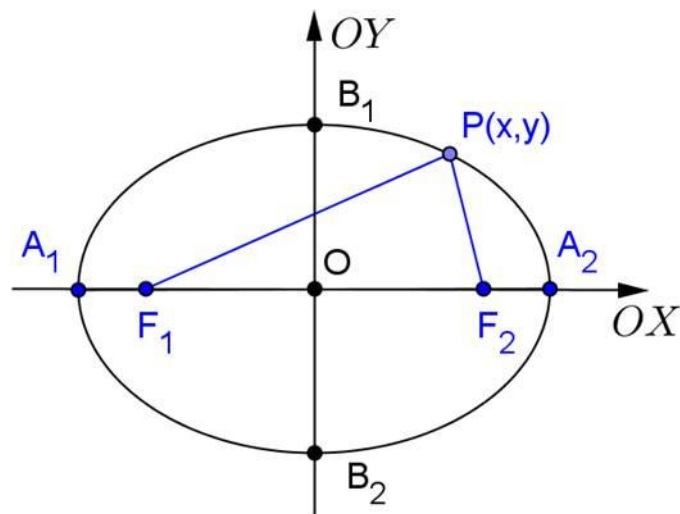
$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

Gráfico 1 – Elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



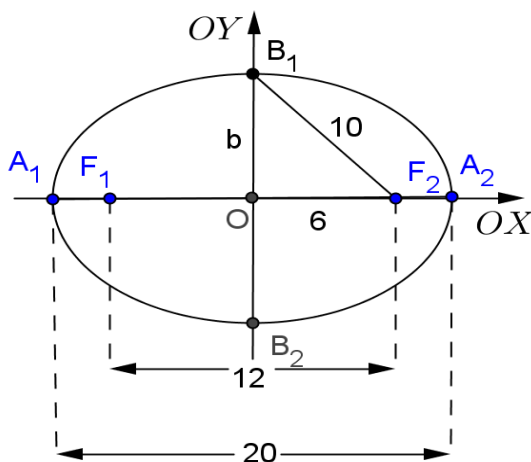
Assim, por exemplo, uma elipse com eixo maior 20 e distância focal 12 apresenta:

$$\left. \begin{array}{l} a = 10 \\ c = 6 \end{array} \right\} \rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 100 - 36 = 64$$

Se a posição da elipse é a indicada na figura, isto é, A_1A_2 e B_1B_2 contidos nos eixos OX e OY , respectivamente, então sua equação é:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

Gráfico 2 – Elipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$



Analogamente ao que vimos acima, se a elipse apresenta A_1A_2 e B_1B_2 contidos nos eixos OY e OX , respectivamente, temos:

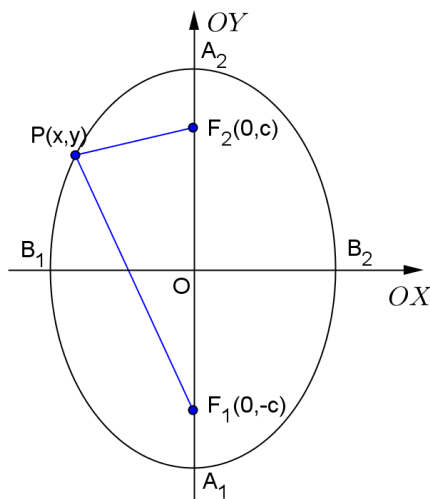
$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = 2a$$

Notemos que esta relação é a mesma que se obtém permutando x com y na relação (1) e, daí, decorre a equação da elipse:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

Gráfico 3 – Elipse $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$



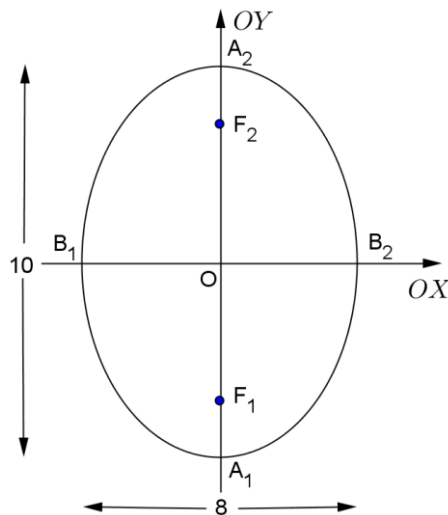
Assim, por exemplo, uma elipse com eixo maior 10 e eixo menor 8, na posição indicada na figura, isto é, A_1A_2 e B_1B_2 contidos nos eixos OY e OX , respectivamente, tem equação:

$$\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$$

ou ainda:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Gráfico 4 – Elipse $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$



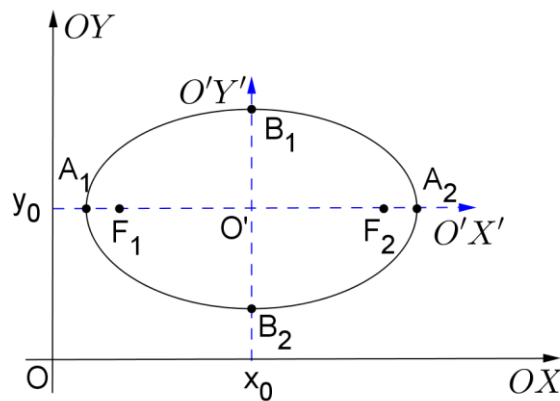
Se uma elipse tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $A_1A_2 \parallel OX$, sua equação em relação ao sistema auxiliar $OX'Y'$ é:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

portanto, de acordo com as fórmulas de translação (Apêndice B), sua equação relativamente ao sistema OXY é:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

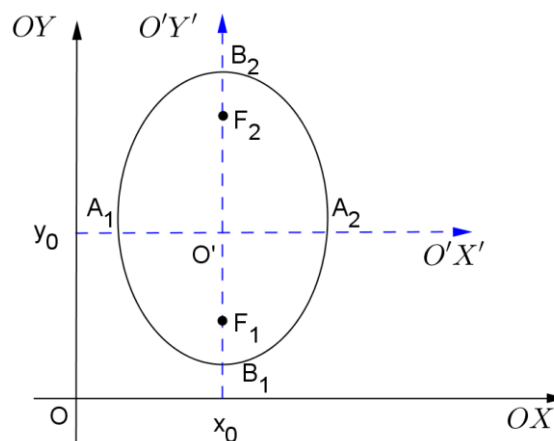
Gráfico 5 – Elipse $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$



Analogamente, se a elipse tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $A_1A_2 \parallel OY$, sua equação relativamente ao sistema OXY é:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

Gráfico 6 – Elipse $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$



Assim, por exemplo, uma elipse que tem centro no ponto $O'(7,8)$, semieixo maior $2a = 10$ e semieixo menor $2b = 8$, apresenta equação:

$$\frac{(x-7)^2}{25} + \frac{(y-8)^2}{16} = 1 \text{ se } A_1A_2 \parallel OX$$

ou

$$\frac{(x-7)^2}{16} + \frac{(y-8)^2}{25} = 1 \text{ se } A_1A_2 \parallel OY.$$

3.1.2 Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC > 0$

Consideremos a equação da elipse $\mathcal{E}$ de centro (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OX :

$$\mathcal{E}: \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Desenvolvendo essa equação, obtemos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_0x - 2a^2y_0y + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0,$$

que é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

com $A = b^2$, $B = 0$, $C = a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = -2a^2y_0$ e $F = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2$.

Então, $B = 0$ e A e C **tem o mesmo sinal**. O mesmo vale para a equação da elipse com centro (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OY .

Reciprocamente, temos:

Proposição 1: Se os coeficientes A e C da equação do segundo grau

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (5)$$

tem o mesmo sinal, então a equação representa um dos seguintes conjuntos:

- uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados;
- um ponto;
- o conjunto vazio.

Demonstração:

Dividindo a equação (5) por AC , obtemos:

$$\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{A} + \frac{D}{AC}x + \frac{E}{AC}y + \frac{F}{AC} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{x^2 + \frac{D}{A}x}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y}{A} = -\frac{F}{AC}.$$

Completando os quadrados, temos:

$$\frac{x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2}}{A} = -\frac{F}{AC} + \frac{D^2}{4A^2C} + \frac{E^2}{4AC^2}.$$

Isto é,

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{M}{4A^2C^2}} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{M}{4AC^3}} = \frac{C^2D^2 + ACE^2 - 4AFC^2}{4A^2C^3} = \frac{M}{4A^2C^3} \quad (6)$$

onde $M = C^2D^2 + ACE^2 - 4AFC^2$.

Se $M = 0$, a equação (6) representa o ponto $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$, pois A e C tem o mesmo sinal.

Se $M \neq 0$, podemos escrever a equação (6) na forma:

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{M}{4A^2C^2}} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{M}{4AC^3}} = 1. \quad (7)$$

Como $AC > 0$, a equação (7) representa uma elipse de eixos paralelos aos eixos coordenados e centro no ponto $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$, se $M > 0$.

Se $M < 0$, a equação (7) representa o conjunto vazio, pois, neste caso, $\frac{M}{4A^2C^2} < 0$ e $\frac{M}{4AC^3} < 0$.

Os casos em que a equação do segundo grau $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com $AC > 0$, representa um ponto ou o conjunto vazio são denominados casos **degenerados da elipse**.

Exemplo

Verifique se a equação $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$ representa uma elipse ou uma elipse degenerada. Caso seja uma elipse, determine seus principais elementos.

Solução:

Como $25x^2 + 9y^2 = 225$, obtemos, dividindo por 225, que a equação $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ representa uma elipse com:

- $a = 5$, $b = 3$ e $c = \sqrt{25 - 9} = 4$;
- centro: $C = (0,0)$;
- reta focal: $l =$ eixo OY : $x = 0$;
- reta não focal: $l' =$ eixo OX : $y = 0$;
- vértices sobre a reta focal: $A_1(0,5)$ e $A_2(0,-5)$;
- vértices sobre a reta não focal: $B_1(3,0)$ e $B_2(-3,0)$;
- focos: $F_1(0,4)$ e $F_2(0,-4)$.

Observe que a demonstração da **proposição 1** apresenta uma fórmula, a partir dos coeficientes da equação do segundo grau, para identificar se a equação representa

uma elipse ou uma elipse degenerada. Porém, podemos identificá-la tentando deixá-la na forma $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ ou na forma $\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$.

Em seguida, digitamos os elementos a serem encontrados. Incluiremos o delta como um desses elementos. Novamente, a planilha ficará da seguinte forma:

Planilha 2 - inserindo os termos procurados a partir dos coeficientes da equação do 2º grau

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	a	x ²	+	b	x	+	c								
2	1	x ²	+	4	x	+	3								
3															
4	Delta:	Δ=			raízes:	x ₁ =			vértices:	x _v =					
5						x ₂ =				y _v =					
6															
7															

Observe que há umas células preenchidas com a cor amarela. Estas conterão as fórmulas, e portanto retornará aos valores procurados.

Continuando, inserimos a fórmula para calcular o delta, na célula C4: “=D2^2-4*A2*G2”. Nesta fórmula, D2 é o coeficiente b , A2 é o a , e G2, o c . Em seguida inserimos as fórmulas “=(-D2+RAIZ(C4))/(2*A2)”; “=(-D2-RAIZ(C4))/(2*A2)”, “=-D2/(2*A2)” e “=-C4/(4*A2)” nas células G4, G5, K4 e K5, respectivamente. Observe que utilizamos a função RAIZ, em duas das fórmulas anteriores, que como o próprio nome já diz, retorna o valor da raiz quadrada da célula dentro do parêntese à sua direita. Lembramos que o delta, o vértice e as raízes são obtidos comumente pelas fórmulas: $\Delta = b^2 - 4ac$, $V = \left(\frac{-b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ e $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, respectivamente. Pronto! A planilha ficará como na figura abaixo:

Planilha 3 – planilha programada (equação do 2º grau)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	a	x ²	+	b	x	+	c					
2	1	x ²	+	4	x	+	3					
3												
4	Delta:	Δ=	4		raízes:	x ₁ =	-1		vértices:	x _v =	-2	
5						x ₂ =	-3			y _v =	-1	

Para a visualização das fórmulas da planilha programada utilizamos o comando “Ctrl + Shift + `”:

Planilha 4 – visualização das fórmulas (equação do 2º grau)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	a	x^2	+	b	x	+	c				
2	1	x^2	+	4	x	+	3				
3											
4	Delta:	$\Delta=$	$=D^2-4*A2*G2$	raízes:	$x_1=$	$=(-D2+RAIZ(C4))/(2*A2)$	vértices:	$x_v=$	$=-D2/(2*A2)$		
5					$x_2=$	$=(-D2-RAIZ(C4))/(2*A2)$		$y_v=$	$=-C4/(4*A2)$		
6											
7											

3.1.3.2 Atividade

1- Programar uma planilha eletrônica para calcular os principais elementos (a , b , c , focos, vértices sobre a reta focal, vértices sobre a reta não focal, centro, reta focal, reta não focal e excentricidade) de uma elipse cuja reta focal é paralela ao eixo OX a partir de sua equação na forma canônica, e sua equação geral do segundo grau.

2- Programar uma planilha para determinar a equação da elipse na forma canônica a partir da equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com $AC > 0$ e $|C| > |A|$. Obs.: ao programar a planilha poderemos verificar, também, se a equação representa uma elipse (com reta focal paralela ao eixo OX) ou uma elipse degenerada. O caso em que $|C| < |A|$, ou seja, cuja reta focal é paralela ao eixo OY , é análogo.

Solução:

1- Iremos programar o caso em que a reta focal é paralela ao eixo OX . O caso em que a reta focal é paralela ao eixo OY é análogo. Vejamos abaixo a planilha programada:

Planilha 5 – Planilha programada (elipse com eixo focal paralelo a OX)

Planilha 5 displays the calculation of ellipse parameters from its canonical equation. The equation is $(x - (-6))^2/100 + (y - 5)^2/64 = 1$. The center is at $(-6, 5)$. The semi-major axis a is 10.00, the semi-minor axis b is 8.00, and the distance from the center to a focus c is 6.00. The eccentricity is 0.6. The foci are at $(-12, 5)$ and $(0, 5)$. The vertices on the major axis are at $(-16, 5)$ and $(4, 5)$. The vertices on the minor axis are at $(-6, -3)$ and $(-6, 13)$. The focal line is $y = 5$ and the non-focal line is $x = -6$. The second-degree equation is $64x^2 + 100y^2 + 768x - 1000y - 1596 = 0$.

As células cuja cor de preenchimento é branco, são digitações comuns de texto; as de cor azul, são as entradas (centro, a^2 e b^2); e as de cor amarela dependem direta ou indiretamente das que possuem cor azul. Células horizontalmente vizinhas e de cor amarela, representam as coordenadas x e y de algum ponto, como por exemplo, as células B9 e C9 são as coordenadas de um dos focos e as células B10 e C10, as do outro foco.

Vejamos, abaixo, as fórmulas que compõem a planilha:

Planilha 6 – Visualização das fórmulas (elipse com eixo focal paralelo a OX)

Planilha 6 shows the formulas used in Planilha 5. The center coordinates are $D3$ and $J3$. The semi-major axis a is $=RAIZ(C4)$, the semi-minor axis b is $=RAIZ(I4)$, and the distance from the center to a focus c is $=RAIZ(F7^2 - F8^2)$. The eccentricity is $=F9/F7$. The foci are at $(D3 - F9, J3)$ and $(D3 + F9, J3)$. The vertices on the major axis are at $(D3 - F7, J3)$ and $(D3 + F7, J3)$. The vertices on the minor axis are at $(D3, J3 - F8)$ and $(D3, J3 + F8)$. The focal line is $y = J3$ and the non-focal line is $x = D3$. The second-degree equation is $=I4x^2 + C4y^2 + (-2*I4*D3)x + (-2*C4*J3)y + (4*D3^2 + C4*J3^2 - C4*I4) = 0$.

2- As cores de preenchimento das células seguem a mesma legenda da questão anterior. Vejamos a planilha programada:

Planilha 7 – Planilha programada (equação do 2º grau com $AC > 0$)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Transformando a equação do segundo grau sem o termo xy, com $AC > 0$ e $ C > A $, na equação da elipse na forma canônica														
2															
3															
4	4	x^2	+	9	y^2	+	-40	x	+	36	y	+	100	=	0
5															
6															
7	(	x	-	5	) ²	+	(	y	-	-2	) ²	=	1		
8			9						4						
9															
10															

Quando ambas as células C8 e I8 contêm números negativos ou iguais a zero, teremos os casos degenerados da elipse, conjunto vazio e um único ponto, respectivamente.

A tabela abaixo contém as fórmulas das células de cor amarela:

Tabela 1 – Fórmulas das células (equação do 2º grau com $AC > 0$)

Célula	Fórmula
C8	$= (D4^2 * G4^2 + A4 * D4 * J4^2 - A4 * M4 * D4^2) / (4 * A4^2 * D4^2)$
I8	$= (D4^2 * G4^2 + A4 * D4 * J4^2 - 4 * A4 * M4 * D4^2) / (4 * A4 * D4^3)$
D7	$= -G4 / (2 * A4)$
J7	$= -J4 / (2 * D4)$

3.2 Hipérbole

Considere dois pontos distintos F_1 e F_2 , pertencentes a um plano α , seja $2c$ a distância entre eles. Hipérbole é o conjunto dos pontos de α cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ (sendo $0 < 2a < 2c$).

$$\mathcal{H} = \{P \in \alpha \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$$

Assim, temos:

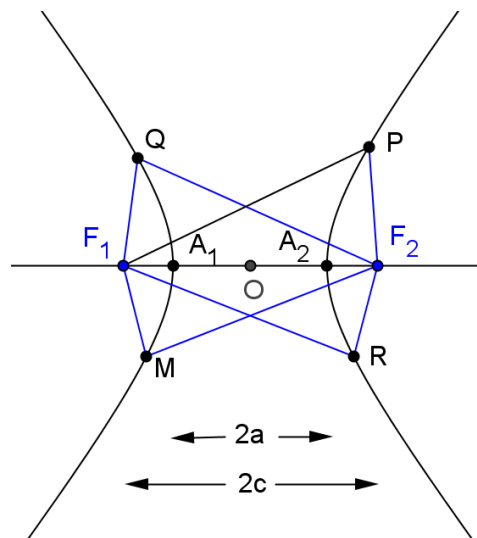
$$|d(Q, F_1) - d(Q, F_2)| = 2a$$

$$|d(M, F_1) - d(M, F_2)| = 2a$$

$$|d(R, F_1) - d(R, F_2)| = 2a$$

$$|d(A_1, F_1) - d(A_1, F_2)| = 2a$$

Figura 4 – Pontos da hipérbole



Notemos que o módulo é abolido desde que façamos a diferença da maior para a menor distância. Se um ponto X está no ramo da direita, temos:

$$d(X, F_1) - d(X, F_2) = 2a, \text{ pois } d(X, F_1) > d(X, F_2).$$

Se um ponto X está no ramo da esquerda,

$$d(X, F_2) - d(X, F_1) = 2a, \text{ pois } d(X, F_2) > d(X, F_1).$$

Elementos Principais

F_1 e $F_2 \rightarrow$ focos

$O \rightarrow$ centro

$A_1A_2 \rightarrow$ eixo real ou transversal

$B_1B_2 \rightarrow$ eixo imaginário

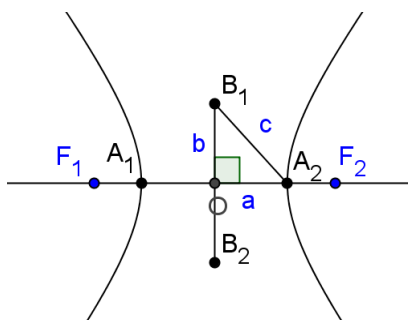
$2c \rightarrow$ distância focal

$2a \rightarrow$ medida do eixo real

$2b \rightarrow$ medida do eixo imaginário

$\frac{c}{a} \rightarrow$ excentricidade (Note que $e > 1$, pois $c > a$.)

Figura 5 – Relação notável da hipérbole



Relação notável: $c^2 = a^2 + b^2$

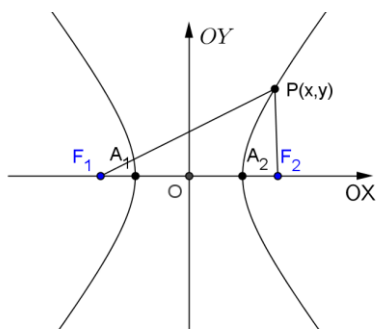
Notemos que, sendo a hipérbole uma curva aberta, o significado geométrico do eixo imaginário B_1B_2 é, por enquanto, abstrato.

3.2.1 Forma canônica da hipérbole

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal tal que A_1A_2 e B_1B_2 contidos nos eixos OX e OY , respectivamente.

É evidente que os focos são os pontos: $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

Gráfico 7 – Hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Nestas condições, chama-se forma canônica da hipérbole a equação que $P(x, y)$, ponto genérico da curva, verifica.

A dedução é imediata:

$P \in \text{hipérbole} \Leftrightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$. Então:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$$

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \rightarrow cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(cx - a^2)^2 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2$$

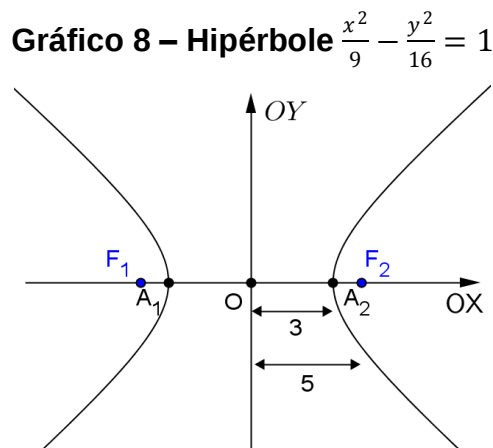
$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (8)$$

Assim, por exemplo, uma hipérbole com eixo real 6 e distância focal 10 apresenta:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16.$$



Se a posição da hipérbole é a indicada na figura, isto é, A_1A_2 e B_1B_2 estão contidos nos eixos OX e OY , então sua equação é:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Analogamente, se a hipérbole apresenta A_1A_2 e B_1B_2 contidos nos eixos OX e OY , respectivamente, temos:

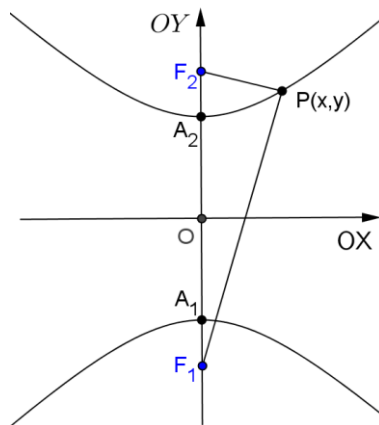
$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = \pm 2a$$

Desenvolvendo a expressão acima obtemos a equação da hipérbole:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \quad (9)$$

Gráfico 9 – Hipérbole $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$



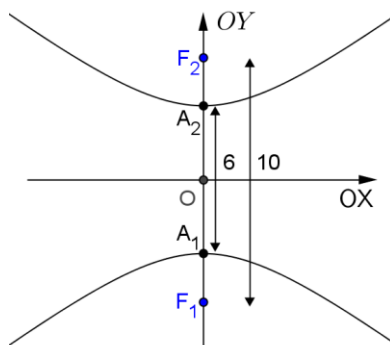
Assim, por exemplo, uma hipérbole com eixo real 6 e distância focal 10, na posição indicada na figura, isto é, apresenta A_1A_2 e B_1B_2 contidos nos eixos OY e OX e, respectivamente, tem equação

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1.$$

Que obviamente não é equivalente a:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1.$$

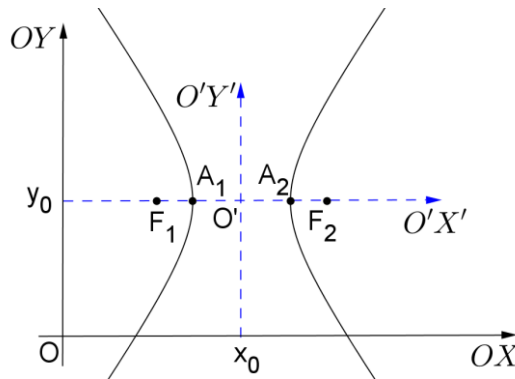
Gráfico 10 – Hipérbole $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$



Se uma hipérbole tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $A_1A_2 // OX$, sua equação em relação ao sistema auxiliar $O'X'Y'$ é:

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

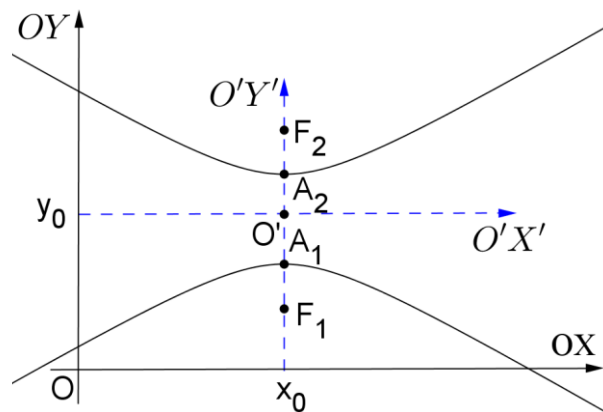
Gráfico 11 – Hipérbole $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$



Portanto, sua equação relativamente ao sistema OXY é:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (10)$$

Gráfico 12 – Hipérbole $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$



Analogamente, se uma hipérbole tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $A_1A_2 // OY$, sua equação em relação ao sistema auxiliar $O'X'Y'$ é:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1 \quad (11)$$

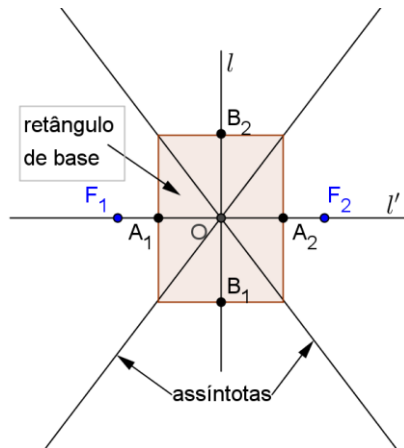
Assim, por exemplo, uma hipérbole que tem centro $O'(7,8)$, semieixo real $a = 4$ e semieixo imaginário $b = 3$, apresenta equação:

$$\frac{(x-7)^2}{16} - \frac{(y-8)^2}{9} = 1 \quad \text{se } A_1A_2 // OX$$

$$\text{Ou } \frac{(x-7)^2}{16} - \frac{(y-8)^2}{9} = 1 \quad \text{se } A_1A_2 // OY.$$

Obs.: O retângulo de base da hipérbole $\mathcal{H}$ é o retângulo cujos lados tem A_1 , A_2 , B_1 e B_2 como pontos médios. As retas que contêm as diagonais do retângulo de base são as **assíntotas** de $\mathcal{H}$. Portanto, as assíntotas de $\mathcal{H}$ são as retas que passam pelo centro da hipérbole e tem inclinação $\pm \frac{b}{a}$ em relação à reta focal. Assim, l e l' são as bissetrizes das assíntotas.

Gráfico 13 – Assíntotas e retângulo de base da hipérbole



3.2.2 Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC < 0$

Desenvolvendo a equação da hipérbole $\mathcal{H}$ de centro (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OX :

$$\mathcal{H}: \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

obtemos:

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2x_0x + 2a^2y_0y + b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0,$$

que é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

com $A = b^2$, $B = 0$, $C = -a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = 2a^2y_0$ e $F = b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2$.

Em particular, $B = 0$ e os coeficientes A e C **tem sinais opostos**.

Podemos verificar que o mesmo ocorre quando desenvolvemos a equação da hipérbole de reta focal paralela ao eixo OY .

Reciprocamente, temos:

Proposição 2: Se os coeficientes A e C da equação do segundo grau

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (12)$$

tem sinais opostos, então a equação representa um dos seguintes conjuntos:

- uma hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados;
- um par de retas concorrentes.

Demonstração:

Suponhamos que $A > 0$ e $C < 0$. Então

$$\begin{aligned} Ax^2 + Dx - (-Cy^2 - Ey) &= -F, \\ \frac{(x^2 + \frac{D}{A}x)}{-C} - \frac{(y^2 + \frac{E}{C}y)}{A} &= \frac{F}{AC}, \\ \frac{(x + \frac{D}{2A})^2}{-C} - \frac{(y + \frac{E}{2C})^2}{A} &= \frac{F}{AC} - \frac{D^2}{4A^2C} - \frac{E^2}{4AC^2}, \\ \frac{(x + \frac{D}{2A})^2}{C} - \frac{(y + \frac{E}{2C})^2}{A} &= \frac{-CD^2 - AE^2 + 4AFC}{4A^2C^2}. \end{aligned}$$

Logo, a equação (12) representa uma hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados, se $-CD^2 - AE^2 + 4AFC \neq 0$, e representa o par de retas concorrentes

$$y + \frac{E}{2C} = \pm \sqrt{\frac{-A}{C}} \left(x + \frac{D}{2A} \right),$$

se $-CD^2 - AE^2 + 4AFC = 0$.

O caso em que a equação do segundo grau (12), com $AC < 0$, representa um par de retas concorrentes é chamado caso **degenerado da hipérbole**.

Exemplo

Verifique se a equação $9x^2 - 25y^2 - 225 = 0$ representa uma elipse ou uma elipse degenerada. Caso seja uma elipse, determine seus principais elementos.

Solução:

Como $9x^2 - 25y^2 = 225$, obtemos, dividindo por 225, que a equação $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ representa uma hipérbole com:

- $a = 5$, $b = 3$ e $c = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$;
- centro: $C = (0,0)$;

- reta focal: $l = \text{eixo } OX: y = 0$;
- reta não focal: $l' = \text{eixo } OY: x = 0$;
- vértices sobre a reta focal: $A_1(5,0)$ e $A_2(-5,0)$;
- vértices sobre a reta não focal: $B_1(0,3)$ e $B_2(0,-3)$;
- focos: $F_1(\sqrt{34}, 0)$ e $F_2(-\sqrt{34}, 0)$.
- assíntotas: $y = \pm \frac{3}{5}x$, ou seja, $3x \pm 5y = 0$.

3.2.3 Proposta de atividade

Objetivos: conscientizar sobre a importância da escrita matematicamente correta; fixar fórmulas e conceitos; estimular o uso do computador para a resolução de situações problemas; adquirir conhecimentos úteis ao mundo do trabalho.

Duração: 2 h/a.

Sugestão: utilizar as fórmulas expostas na parte teórica do texto.

3.2.3.1 Atividade

1- Programar uma planilha eletrônica para calcular os principais elementos (a , b , c , focos, vértices sobre a reta focal, vértices sobre a reta não focal, centro, reta focal, reta não focal e excentricidade) de uma hipérbole cuja reta focal é paralela ao eixo OX a partir de sua equação na forma canônica e sua equação geral do segundo grau.

2- Programar uma planilha para determinar a equação da hipérbole na forma canônica a partir da equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com $AC < 0$ e $-C(4ACF - CD^2 - AE^2) > 0$ ou $(4ACF - CD^2 - AE^2) = 0$. Obs.: os dois casos, $-C(4ACF - CD^2 - AE^2) > 0$ e $(4ACF - CD^2 - AE^2) = 0$, representam uma hipérbole, com reta focal paralela ao eixo OX , ou uma hipérbole degenerada, respectivamente; e os casos em que $-C(4ACF - CD^2 - AE^2) < 0$ ou $(4ACF - CD^2 - AE^2) = 0$ representam uma hipérbole, com reta focal paralela ao eixo OY ou uma hipérbole degenerada, respectivamente.

Solução

1- Segue, abaixo, a planilha programada:

2- Na planilha abaixo há um “Indicador” com o objetivo de identificar se a equação geral do segundo grau se enquadra na condição inicial, $-C(4ACF - CD^2 - AE^2) > 0$ ou $(4ACF - CD^2 - AE^2) = 0$, caso contrário, a equação na forma canônica não estará correta.

Planilha 10 – Planilha programada (equação do 2º grau com $AC < 0$)

Área de F...		Fonte		Alinhamento		Número		Estilo		Células		Edição			
B5		fx=D3*(4*A3*D3*M3-D3*G3^2-A3*J3^2)													
1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Transformando a equação do segundo grau sem o termo xy, com AC<0, na equação da hipérbole na forma canônica														
2															
3	9	x ²	+	-16	y ²	+	90	x	+	-128	y	+	-31	=	0
4															
5	indicador:	0													
6															
7	(	x	-	-5	) ²	-	(	y	-	-4	) ²	=	1		
8			0						0						
9															
10															

A questão não pede para criar um indicador para o caso considerado. A falta deste poderá deixar o aluno com algumas interrogações.

A tabela abaixo contém as fórmulas das células de cor amarela:

Tabela 2 – Fórmulas das células (equação do 2º grau com $AC < 0$)

Célula	Fórmula
C8	$=(-A3*J3^2-D3*G3^2+4*A3*M3*D3)/(-4*A3^2*D3)$
I8	$=(-A3*J3^2-D3*G3^2+4*A3*M3*D3)/(4*A3*D3^2)$
D7	$=-G3/(2*A3)$
J7	$=-J3/(2*D3)$
C5	$=D3*(4*A3*D3*M3-D3*G3^2-A3*J3^2)$

3.3 Parábola

Considere um ponto F e uma reta d , pertencentes a um plano α , com $F \notin d$, seja p a distância entre F e d . Parábola é o conjunto dos pontos de α que estão à mesma distância de F e de d .

$$\mathcal{P} = \{P \in \alpha \mid d(P, F) = d(P, d)\}$$

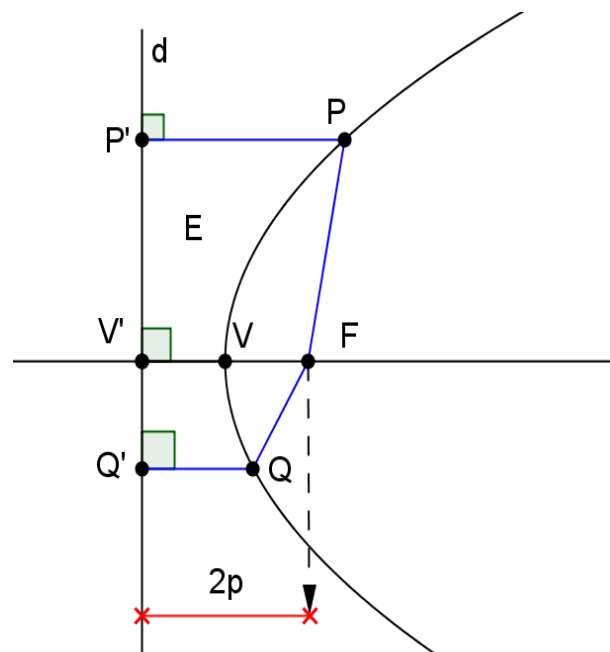
Assim, temos:

$$d(V, F) = d(V, V')$$

$$d(P, F) = d(P, P')$$

$$d(Q, F) = d(Q, Q')$$

Figura 6 – Pontos da parábola



Elementos principais

$F \rightarrow$ foco

$d \rightarrow$ diretriz

$2p \rightarrow$ parâmetro

$V \rightarrow$ vértice

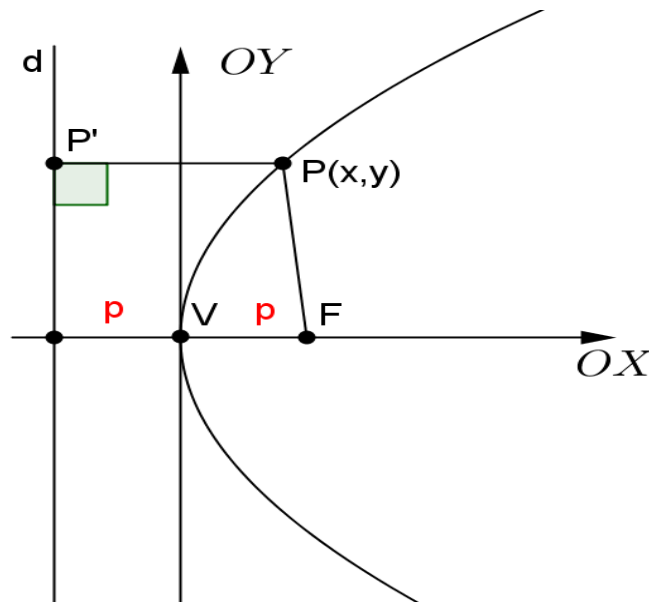
reta $VF \rightarrow$ eixo de simetria

Relação notável: $d(V, F) = p$

3.3.1 Forma canônica da parábola

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal com origem no vértice da parábola e eixo das abscissas passando pelo foco. É evidente que o foco é $F(p, 0)$ e a diretriz d tem equação $x = -p$.

Gráfico 14 – Parábola $y^2 = 4px$



Nessas condições, chama-se equação da parábola na forma canônica a equação que $P(x, y)$, ponto genérico da curva, verifica.

A dedução é imediata:

$\mathcal{P} \in \text{parábola} \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, P')$, então:

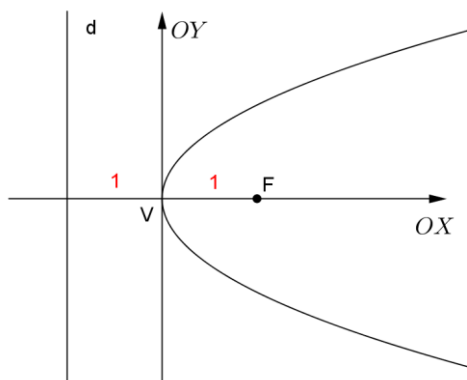
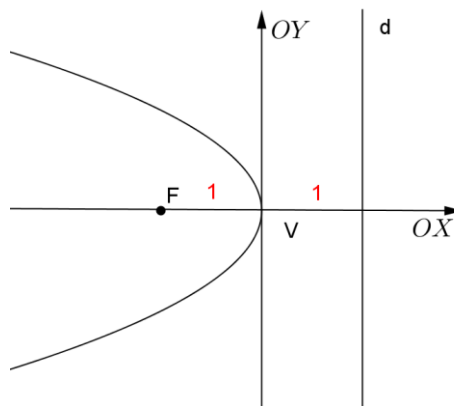
$$\sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x + p)^2 + (y - y)^2}$$

$$(x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$y^2 = 4px \quad (13)$$

Assim, por exemplo, uma parábola com parâmetro $2p = 2$, vértice na origem e foco no eixo OX , tem equação:

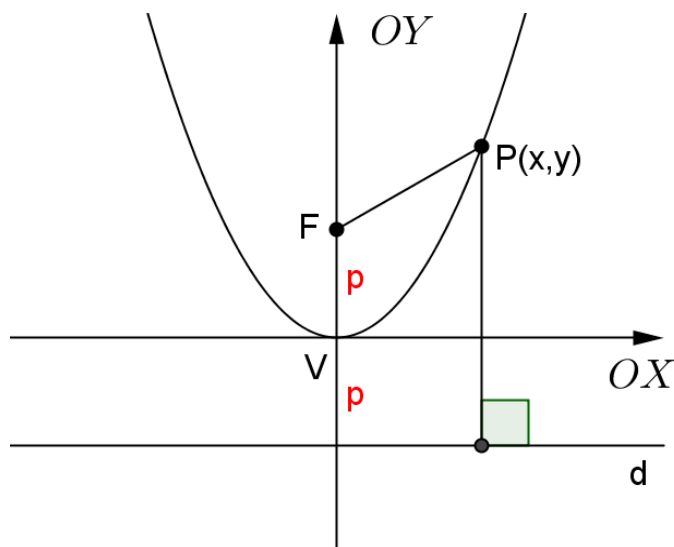
Gráfico 15 – Parábola $y^2 = 4x$ **Gráfico 16 – Parábola $y^2 = -4x$** 

$y^2 = 4x$, se F à direita de V ou $y^2 = -4x$, se F à esquerda de V

Analogamente ao que vimos acima, se a parábola apresenta vértice na origem e foco no eixo OY , temos:

$$d(P, F) = d(P, P')$$

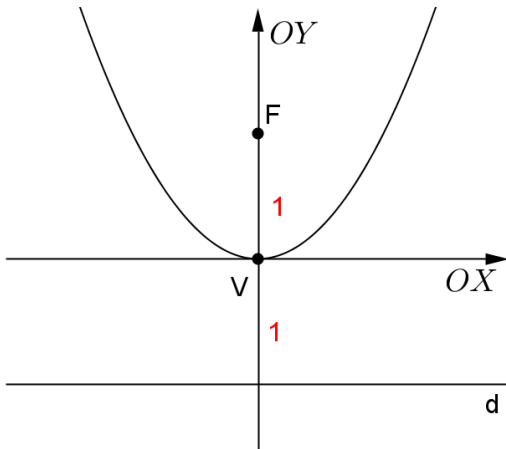
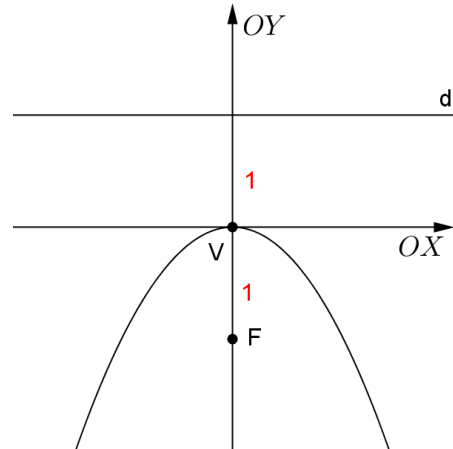
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2}$$

Gráfico 17 – Parábola $x^2 = 4py$ 

E, daí, decorre a equação da parábola:

$$x^2 = 4py \quad (14)$$

Assim, por exemplo, uma parábola com parâmetro $2p = 2$, vértice na origem e foco no eixo das ordenadas, tem equação:

Gráfico 18 – Parábola $x^2 = 4y$ **Gráfico 19 – Parábola $x^2 = -4y$** 

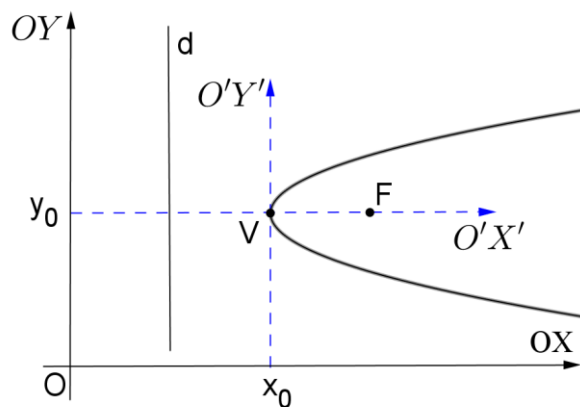
$x^2 = 4y$, se F acima de V ou $x^2 = -4y$, se F abaixo de V

Se uma parábola tem vértice no ponto $V(x_0, y_0)$ e $VF \parallel x$, sua equação em relação ao sistema auxiliar $VX'Y'$ é:

$$(y')^2 = 4px'$$

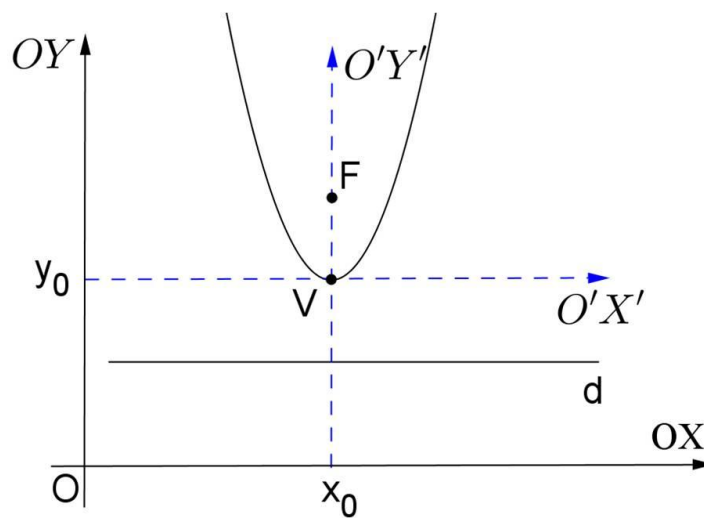
portanto, sua equação relativamente ao sistema OXY é:

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0) \quad (15)$$

Gráfico 20 – Parábola $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$ 

Analogamente, se uma parábola tem vértice no ponto $V(x_0, y_0)$ e $VF \parallel y$, sua equação relativamente ao sistema OXY é:

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0) \quad (16)$$

Gráfico 21 – Parábola $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$ 

Assim, por exemplo, uma parábola de vértice $V(7,8)$ e parâmetro 3 apresenta equação:

$(y - 8)^2 = 6(x - 7)$ se $VF \parallel x$ e F à direita de V ou $(x - 7)^2 = 6(y - 8)$ se $VF \parallel y$ e F acima de V

Notemos ainda que uma parábola de vértice $V(7,8)$ e parâmetro 3 apresenta equação:

$(y - 8)^2 = -6(x - 7)$ se $VF \parallel x$ e F à esquerda de V ou $(x - 7)^2 = -6(y - 8)$ se $VF \parallel y$ e F abaixo de V .

3.3.2 A Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC = 0$

Consideremos a equação canônica da parábola de vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX :

$$(y - y_0)^2 = \pm 4p(x - x_0).$$

Desenvolvendo e agrupando os termos dessa equação, obtemos:

$$y^2 \mp 4px - 2y_0y + y_0^2 \pm 4px_0 = 0.$$

Esta equação é da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, onde $A = 0$, $B = 0$, $C = 1$, $D = \mp 4p$, $E = 2y_0$ e $F = y_0^2 \pm 4px_0$.

Analogamente, desenvolvendo a equação da parábola de vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OY

$$(x - x_0)^2 = \pm 4p(y - y_0),$$

obtemos a equação

$$x^2 - 2x_0x \mp 4py + x_0^2 \pm 4py_0 = 0$$

Que é da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, onde $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = -2x_0$, $E = \mp 4p$ e $F = x_0^2 \pm 4py_0$.

No primeiro caso, $A = 0$, $B = 0$ e $C \neq 0$ e, no segundo caso, $A \neq 0$, $B = 0$, $C = 0$. Portanto, em qualquer caso, $B = 0$ e $AC = 0$.

Reciprocamente, temos a seguinte proposição:

Proposição 3: Seja a equação do segundo grau com $B = 0$:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (17)$$

Se $A = 0$ e $C \neq 0$, esta equação representa um dos seguintes conjuntos:

- **uma parábola** cuja reta focal é paralela ao eixo OX , se $D \neq 0$;
- **um par de retas paralelas** ao eixo OX , se $D = 0$ e $E^2 - 4CF > 0$;
- **uma reta paralela** ao eixo OX , se $D = 0$ e $E^2 - 4CF = 0$;
- **conjunto vazio**, se $D = 0$ e $E^2 - 4CF < 0$.

O mesmo vale para o caso em que $C = 0$ e $A \neq 0$, trocando “paralelo ao eixo OX ” por “paralelo ao eixo OY ”.

Demonstração

Se $A = 0$, $C \neq 0$ e $D \neq 0$, então a equação (17) se escreve na forma:

$$y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{D}{C}x + \frac{F}{C} = 0.$$

Completando o quadrado, obtemos:

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 + \frac{D}{C}x + \frac{F}{C} - \frac{E^2}{4C^2} = 0.$$

Como $D \neq 0$, podemos escrever a equação na forma

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C}\left(x + \frac{C}{D}\left(\frac{F}{C} - \frac{E^2}{4C^2}\right)\right),$$

que é a equação de uma parábola com reta focal paralela ao eixo OX e vértice

$$V = \left(-\frac{4C^2F - CE^2}{4C^2D}, -\frac{E}{2C}\right).$$

- Duas retas paralelas ao eixo OX ,

$$y = \frac{-E + \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C} \text{ e } y = \frac{-E - \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C}$$

se $E^2 - 4CF > 0$;

- uma reta paralela ao eixo OX ,

$$y = -\frac{E}{2C},$$

se $E^2 - 4CF = 0$;

- o conjunto vazio, se $E^2 - 4CF < 0$.

Os casos em que a equação do segundo grau $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com $AC = 0$, representa duas retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio são chamados **casos degenerados da parábola**.

Exemplo

Verifique se a equação $x^2 - 8y = 0$ representam uma parábola ou uma parábola degenerada. Caso seja uma parábola, determine seus elementos principais.

Solução. Como $x^2 = 8y$, a equação representa uma parábola com:

- vértice: $V = (0,0)$;
- reta focal = eixo OY : $x = 0$;
- parâmetro: $4p = 8 (\rightarrow p = 2)$;
- foco: $F = (0,2)$, acima da diretriz;
- diretriz: $l: y = -2$.

As cores de preenchimento das células seguem a mesma legenda das questões resolvidas acima. E abaixo, a planilha com as fórmulas:

Planilha 12 – Visualização das fórmulas (parábola com eixo focal paralelo a OX)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	1. Identificação dos elementos da parábola a partir de sua equação na forma canônica															
2																
3		(	y	-	1	)	²	=	8	(	x	-	2	)		
4																
5																
6	Vértice:	=L3	=E3		semi parâmetro (p):	=H3/4		Foco:	=L3+G6	=E3						
7																
8																
9	reta focal:	y=	=E3		diretriz:	x=	=L3-G6									
10																
11	equação do 2º grau:															
12	0	x²	+	1	y²	+	=-4*G6	x	+	=-2*E3	y	+	=E3²+4*G6*L3	=	0	
13																
14																
15																
16																

São análogos, os casos: parábola cuja reta focal é paralela ao eixo OX , com concavidade voltada para esquerda; parábola cuja reta focal é paralela ao eixo OY , com concavidade voltada para cima; e parábola cuja reta focal é paralela ao eixo OY , com concavidade voltada para baixo.

2- Na planilha resposta abaixo, os casos parábola com concavidade voltada para direita (célula G3 > 0) e para esquerda (célula G3 < 0), são contemplados.

Planilha 13 – Planilha programada (equação do 2º grau com $AC = 0$)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Transformando a equação do segundo grau sem o termo xy e com $AC = 0$ na equação da parábola na forma canônica														
2															
3															
4	0	x²	+	3	y²	+	0	x	+	7	y	+	-6	=	0
5															
6															
7	(	y	-	-1,16667	)	²	=	0	(	x	-	#DIV/0!	)		
8															
9															
10															
11															

A tabela abaixo contém as fórmulas das células de cor amarela:

Tabela 3 – Fórmulas das células (equação do 2º grau com $AC = 0$)

Célula	Fórmula
D7	$=-J4/(2*D4)$
G7	$=-G4/D4$
K7	$=-(D4/G4)*(M4/D4-J4^2/(4*D4^2))$

Se $G3 = 0$, teremos uma parábola degenerada.

3.4 Equação geral do segundo grau em $\mathbb{R}^2$

Equações do tipo $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ que são linhas de nível de funções quadráticas de duas variáveis, ou seja, de uma função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$, onde $A \neq 0$, $B \neq 0$ ou $C \neq 0$, são as cônicas ou as cônicas degeneradas. Essas equações podem ser transformadas, a partir de uma rotação positiva do sistema OXY , em equações do tipo $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \bar{D}x + \bar{E}y + \bar{F} = 0$ e consequentemente, facilitar na identificação do lugar geométrico que essa representa.

No caso particular em que $D = E = F = 0$, a função quadrática $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ é um polinômio homogêneo de segundo grau (todos os termos tem grau 2). Estes polinômios são chamados de **formas quadráticas** de duas variáveis.

Precisamos inicialmente, introduzir o conceito de autovalores e autovetores.

3.4.1 Autovalores e autovetores

Sejam $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ uma matriz real do tipo 2×2 e $\vec{u} = (x, y)$ um vetor em $\mathbb{R}^2$.

Definimos $\mathcal{A}\vec{u}$ como sendo o vetor $(a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y)$, ou seja,

$$\mathcal{A}\vec{u} = (a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y).$$

Um número real λ é um *autovalor da matriz* $\mathcal{A}$ se existir um vetor não nulo tal que $\mathcal{A}\vec{u} = \lambda\vec{u}$.

Seja λ um autovalor de $\mathcal{A}$. Um vetor $\vec{u} = (x, y)$ é um autovetor de $\mathcal{A}$ relativo ao autovalor λ se $\mathcal{A}\vec{u} = \lambda\vec{u}$, ou seja,

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = \lambda x \\ a_{21}x + a_{22}y = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda - a_{11})x - a_{12}y = 0 \\ -a_{21}x + (\lambda - a_{22})y = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Observação 1: O vetor nulo é um autovetor relativo a qualquer autovalor, mas um número real só é um autovalor se ele possuir um autovetor não nulo.

Observação 2: Se $\vec{u}$ é um autovetor relativo ao autovalor λ da matriz $\mathcal{A}$, então $\mu\vec{u}$ é um autovetor relativo ao autovalor λ , para todo $\mu \in \mathbb{R}$. E se $\vec{v}$ é outro autovetor relativo ao autovalor λ , então $\vec{u} + \vec{v}$ é um autovetor relativo ao autovalor λ . (não demonstrado)

Então, um número real λ é um autovalor da matriz $\mathcal{A}$ se, e somente se, o sistema (18), tem solução não trivial $(x, y) ((x, y) \neq (0, 0))$. Mas o sistema possui solução não trivial se, e só se,

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{bmatrix} = 0.$$

O polinômio $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{bmatrix} = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21},$$

é denominado *polinômio característico da matriz* $\mathcal{A}$.

Obtemos, assim, o seguinte resultado.

Proposição 4: Os autovalores de uma matriz $\mathcal{A}$, são as raízes reais do polinômio característico da matriz $\mathcal{A}$. (não demonstrado)

Exemplo: Determine, caso existam, os autovalores e os autovetores correspondente

da matriz $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Solução.

Seja $p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -5 \\ -2 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4) - 10 = \lambda^2 - 5\lambda - 6$ o polinômio característico da matriz $\mathcal{A}$. Sendo

$$\lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{25 + 24}}{2} = 6 \text{ e } \lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{25 + 24}}{2} = -1$$

as raízes (reais) da equação $p(\lambda) = 0$, temos que $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -1$ são os autovalores da matriz $\mathcal{A}$.

Os autovetores $\vec{u}_1 = (x, y)$ relativos ao autovalor $\lambda_1 = 6$ são as soluções do sistema

$$\begin{cases} (\lambda_1 - 1)x - 5y = 0 \\ -2x + (\lambda_1 - 4)y = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 5x - 5y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \leftrightarrow x = y.$$

Logo, todo autovetor relativo ao autovalor $\lambda_1 = 6$ é da forma $\vec{u}_1 = y(1, 1)$, $y \in \mathbb{R}$.

Assim, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ são os autovetores unitários relativos ao autovalor $\lambda_1 = 6$.

E os autovetores $\vec{u}_2 = (x, y)$ relativos ao autovalor $\lambda_2 = -1$ são as soluções do sistema

$$\begin{cases} (\lambda_2 - 1)x - 5y = 0 \\ -2x + (\lambda_2 - 4)y = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -2x - 5y = 0 \\ -2x - 5y = 0 \end{cases} \leftrightarrow x = -\frac{5}{2}y$$

.

Logo, todo autovetor relativo ao autovalor $\lambda_2 = -1$ é da forma $\vec{u}_2 = y(-\frac{5}{2}, 1)$, $y \in \mathbb{R}$.

Assim, $(-\frac{5\sqrt{29}}{29}, \frac{2\sqrt{29}}{29})$ e $(\frac{5\sqrt{29}}{29}, -\frac{2\sqrt{29}}{29})$ são os autovetores unitários relativos ao autovalor $\lambda_2 = -1$.

3.4.2 Rotação dos eixos coordenados

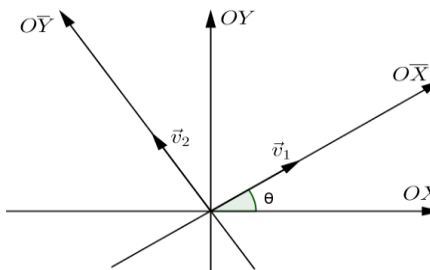
Seja OXY um sistema de eixos ortogonais. Dado $\theta \in [0, 2\pi)$, seja $O\bar{X}\bar{Y}$ o sentido obtido girando os eixos OX e OY do ângulo θ no sentido positivo (que vai de OX para $O\bar{X}$). Então,

$$\vec{v}_1 = (\cos \theta, \sin \theta) \text{ e } \vec{v}_2 = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

são os vetores unitários na direção e no sentido dos eixos $O\bar{X}$ e $O\bar{Y}$, respectivamente.

Considere um ponto $P = (x, y)$ no sistema OXY . Para encontrarmos as coordenadas de P no sistema $O\bar{X}\bar{Y}$, $(\bar{x}, \bar{y})$, basta substituir x e y na expressão:

Gráfico 22 – Rotação dos eixos coordenados OX e OY por um ângulo θ



$$\begin{cases} \bar{x} = x \cos \theta + y \sin \theta \\ \bar{y} = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad (19)$$

E para obter (x, y) em função de $(\bar{x}, \bar{y})$, utilizamos a expressão:

$$\begin{cases} x = \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta \\ y = \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta \end{cases} \quad (20)$$

Estas duas passagens de coordenadas, do sistema $O\bar{X}\bar{Y}$ para o OXY e vice-versa, são obtidas levando em consideração um ponto P e o vetor $\overrightarrow{OP}$, e utilizando as propriedades de produto interno.

Exemplo

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais e $O\bar{X}\bar{Y}$ o sistema de eixos ortogonais obtido pela rotação positiva de ângulo θ dos eixos OX e OY , onde $\cos \theta = 4/5$ e $\sin \theta = 3/5$.

Uma parábola, nas coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$, tem foco no ponto $F = (12/5, 16/5)$ e vértice no ponto $V = (12/5, -9/5)$.

- Determine a equação da parábola nas coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ e nas coordenadas x e y .
- Obtenha o foco, o vértice, a reta focal e a diretriz da parábola nas coordenadas x e y .
- Faça um esboço da curva no sistema OXY , indicando seus elementos.

Solução:

a) Nas coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$, a reta focal m é $\bar{x} = 12/5$, pois o foco $F = (12/5, 16/5)$ e vértice $V = (12/5, -9/5)$ pertencem à reta $\bar{x} = 12/5$, o parâmetro é $p = d(V, F) = 5$ e como foco está acima do vértice, temos que a equação da parábola é da forma

$(\bar{x} - \bar{x}_v)^2 = 4p(\bar{y} - \bar{y}_v)$. Então,

$$\left(\bar{x} - \frac{12}{5}\right)^2 = 20\left(\bar{y} + \frac{9}{5}\right).$$

é a equação da parábola nas coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$.

Usando as relações de mudança de coordenadas (ver (19)),

$$\begin{cases} \bar{x} = x \cdot \frac{4}{5} + y \cdot \frac{3}{5} = \frac{4x+3y}{5} \\ \bar{y} = -x \cdot \frac{3}{5} + y \cdot \frac{4}{5} = \frac{-3x+4y}{5} \end{cases} \quad (21)$$

obtemos que a equação da parábola nas coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ é:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{4x+3y}{5} - \frac{12}{5}\right)^2 &= 20\left(\frac{-3x+4y}{5} + \frac{9}{5}\right) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{25}(16x^2 + 24xy + 9y^2 - 96x - 72y + 144) &= \frac{20}{5}(-3x + 4y + 9) \\
\Leftrightarrow 16x^2 + 24xy + 9y^2 - 96x - 72y + 144 &= 100(-3x + 4y + 9) \\
\Leftrightarrow 16x^2 + 24xy + 9y^2 - 204x - 472y - 756 &= 0
\end{aligned}$$

b) Nas coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$, a reta focal m é $\bar{x} = 12/5$, o foco $F = (12/5, 16/5)$ e vértice $V = (12/5, -9/5)$ e a diretriz $d: \bar{y} = -34/5$.

Por (20) obtemos que $d: -3x + 4y = -34$, $m: 4x + 3y = 12$, $r: -3x + 4y = 0$, e $s: 4x + 3y = 0$ são a diretriz, reta focal, eixo $O\bar{X}$ e eixo $O\bar{Y}$, respectivamente, nas coordenadas x e y .

E, pelas relações de mudanças de coordenadas (ver (19)),

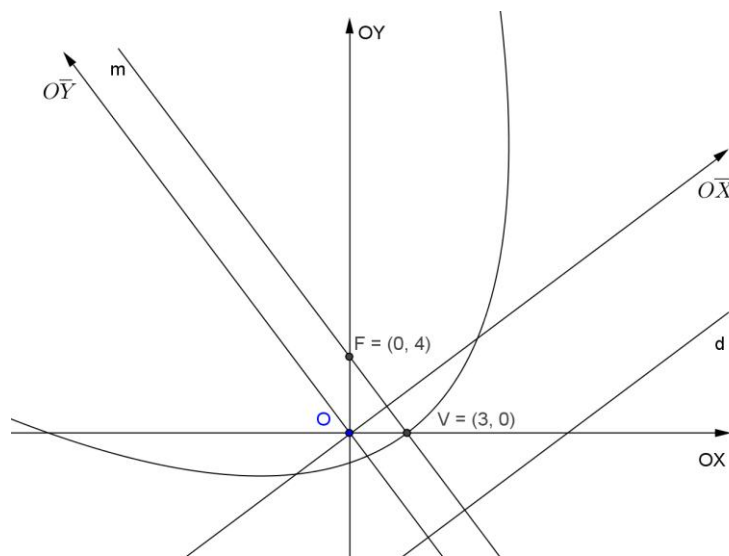
$$\begin{cases} x = \bar{x} \cdot \frac{4}{5} - \bar{y} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4\bar{x} - 3\bar{y}}{5} \\ y = \bar{x} \cdot \frac{3}{5} + \bar{y} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3\bar{x} + 4\bar{y}}{5} \end{cases}$$

Obtemos que $(0,4)$ é o foco

$(3,0)$ é o vértice da parábola nas coordenadas x e y .

c) Na figura abaixo mostramos o esboço da parábola.

Gráfico 23 – Parábola de equação $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 204x - 472y - 756 = 0$



3.4.3 Formas quadráticas

Dada uma forma quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, a real do tipo 2×2 ,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}$$

é a **matriz de f** .

Uma matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ real do tipo 2×2 é **simétrica** se $a_{12} = a_{21}$. Note que a matriz de qualquer forma quadrática é simétrica.

Assim, para quaisquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \langle \mathcal{A}(x, y), (x, y) \rangle \quad (22)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(x, y), (x, y) \rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix} (x, y), (x, y) \right\rangle \\ &= \langle (Ax + (B/2)y, (B/2)x + Cy), (x, y) \rangle \\ &= Ax^2 + (B/2)xy + (B/2)xy + Cy^2 \\ &= Ax^2 + Bxy + Cy^2 = f(x, y) \end{aligned}$$

Proposição 5: Sejam $\mathcal{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ uma matriz real 2×2 e $\mathcal{B}^t = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}$ sua matriz transposta. Então,

$$\langle \mathcal{B}\vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \mathcal{B}^t \vec{v} \rangle,$$

para quaisquer vetores $\vec{u} = (x, y)$ e $\vec{v} = (z, w)$ em $\mathbb{R}^2$.

Demonstração:

De fato,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}\vec{u}, \vec{v} \rangle &= \langle (b_{11}x + b_{12}y, b_{21}x + b_{22}y), (z, w) \rangle \\ &= b_{11}xz + b_{12}yz + b_{21}xw + b_{22}yw \\ &= x(b_{11}z + b_{21}w) + y(b_{12}z + b_{22}w) \\ &= (x, y)(b_{11}z + b_{21}w, b_{12}z + b_{22}w) \\ &= \langle \vec{u}, \mathcal{B}^t \vec{v} \rangle \end{aligned}$$

Teorema 1: Seja $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}$ uma matriz simétrica real do tipo 2×2 .

a) As raízes λ_1 e λ_2 do polinômio característico de $\mathcal{A}$ são reais. Isto é, a matriz $\mathcal{A}$ tem dois autovalores λ_1 e λ_2 , que tem **multiplicidade um se** $\lambda_1 \neq \lambda_2$, e **multiplicidade dois se** $\lambda_1 = \lambda_2$.

b) Existe um par $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ de autovetores **ortonormais** relativos aos autovalores λ_1 e λ_2 , respectivamente.

c) Se $\mathcal{B} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ é a matriz do tipo 2×2 cuja primeira coluna é formada pelas coordenadas do vetor $\vec{u}_1 = (a_1, b_1)$ e a segunda, pelas coordenadas do vetor $\vec{u}_2 = (a_2, b_2)$, então

$$\mathcal{B}^t \mathcal{A} \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Demonstração:

a) O polinômio característico da matriz $\mathcal{A}$ é

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} \lambda - A & -B/2 \\ -B/2 & \lambda - C \end{bmatrix} = (\lambda - A)(\lambda - C) - \frac{B^2}{4} \\ &= \lambda^2 - (A + C)\lambda + AC - \frac{B^2}{4} \end{aligned}$$

Como o discriminante da equação $p(\lambda) = 0$,

$$\begin{aligned} \Delta &= (A + C)^2 - 4\left(AC - \frac{B^2}{4}\right) \\ &= A^2 + 2AC + C^2 - 4AC + B^2 \\ &= (A - C)^2 + B^2 \end{aligned}$$

é não negativo, as suas raízes λ_1 e λ_2 são reais.

b) se $\Delta = 0$, temos que $A = C$ e $B = 0$ e, portanto, $\lambda = A = C$ é a única raiz de $p(\lambda) = 0$. Neste caso, $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ e $\vec{u}_1 = (1, 0)$ e $\vec{u}_2 = (0, 1)$, são autovetores ortonormais relativos ao autovalor λ de multiplicidade dois. Obs.: note que os vetores ortonormais $\vec{u}_1 = (a, b)$ e $\vec{u}_2 = (-b, a)$, são autovetores de $\mathcal{A}$. De fato, $\vec{u} = (c, d)$ é solução do sistema:

$$\begin{cases} (\lambda - A)x + 0y = 0 \\ 0x + (\lambda - C)y = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

pois $\lambda = A = C$. Em particular, $\vec{u}_1 = (a, b)$ e $\vec{u}_2 = (-b, a)$ são autovetores de $\mathcal{A}$.

Se $\Delta > 0$, a equação $p(\lambda) = 0$ tem duas raízes reais λ_1 e λ_2 distintas.

Sejam $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ vetores não nulos tais que $\mathcal{A}\vec{u}_1 = \lambda_1\vec{u}_1$ e $\mathcal{A}\vec{u}_2 = \lambda_2\vec{u}_2$, isto é, $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ são autovetores não nulos associados aos autovalores λ_1 e λ_2 , respectivamente. Podemos supor, pela observação 2, que $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ são unitários (isto é, $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 1$).

O vetor $\vec{u}_1$ é ortogonal ao vetor $\vec{u}_2$. De fato, pela proposição 4,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}\vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle &= \langle \vec{u}_1, \mathcal{A}\vec{u}_2 \rangle \\ \rightarrow \langle \lambda_1\vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle &= \langle \vec{u}_1, \lambda_2\vec{u}_2 \rangle \\ \rightarrow \lambda_1 \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle &= \lambda_2 \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle \\ \rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle &= 0 \\ \rightarrow \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle &= 0 \end{aligned}$$

c) Como $\mathcal{A}\vec{u}_1 = (Aa_1 + (B/2)b_1, (B/2)a_1 + Cb_1) = (\lambda_1 a_1, \lambda_1 b_1)$ e $\mathcal{A}\vec{u}_2 = (Aa_2 + (B/2)b_2, (B/2)a_2 + Cb_2) = (\lambda_2 a_2, \lambda_2 b_2)$ segue que

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 a_1 & \lambda_2 a_2 \\ \lambda_1 b_1 & \lambda_2 b_2 \end{bmatrix}.$$

Além disso, sendo $\|\vec{u}_1\| = a_1^2 + b_1^2 = 1$, $\|\vec{u}_2\| = a_2^2 + b_2^2 = 1$ e $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$, obtemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^t \mathcal{A}\mathcal{B} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 a_1 & \lambda_2 a_2 \\ \lambda_1 b_1 & \lambda_2 b_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1(a_1^2 + b_1^2) & \lambda_2(a_1 a_2 + b_1 b_2) \\ \lambda_1(a_1 a_2 + b_1 b_2) & \lambda_2(a_2^2 + b_2^2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

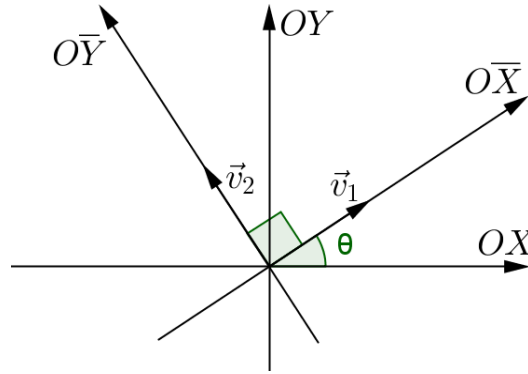
Seja $\theta \in [0, 2\pi)$ o ângulo que o vetor $\vec{u}_1$ faz com o eixo OX no sentido positivo, isto é, $\vec{u}_1 = (\cos \theta, \sin \theta)$. Tomemos $\vec{u}_2 = (-\sin \theta, \cos \theta)$, obtido de $\vec{u}_1$ por uma rotação de $\frac{\pi}{2}$.

Seja $O\bar{X}\bar{Y}$ o sistema cujos eixos $O\bar{X}$ e $O\bar{Y}$ tem a mesma direção e o mesmo sentido dos vetores $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$, respectivamente.

Assim, por (23), a forma quadrática $f(x, y) = \langle \mathcal{A}(x, y), (x, y) \rangle$, nas coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do sistema $O\bar{X}\bar{Y}$, é dado por:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \langle \mathcal{AB}(\bar{x}, \bar{y}), \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{y}) \rangle.$$

Gráfico 24 – Rotação dos eixos coordenados OX e OY



Daí, sabendo que

$\mathcal{AB}(x, y) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x, y))$ e $\mathcal{B}^t \mathcal{AB}(x, y) = \mathcal{B}^t (\mathcal{AB}(x, y)) = \mathcal{B}^t (\mathcal{A}(\mathcal{B}(x, y)))$,
concluimos, pela **Proposição 4** e pelo **Teorema 1**, que

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, \bar{y}) &= \langle \mathcal{B}^t (\mathcal{A}(\mathcal{B}(\bar{x}, \bar{y}))), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle \\ &= \langle (\mathcal{B}^t \mathcal{AB})(\bar{x}, \bar{y}), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle \\ &= \langle (\lambda_1 \bar{x}, \lambda_2 \bar{y}), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle \\ &= \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 \end{aligned} \quad (24)$$

Exemplo

Seja a forma quadrática $f(x, y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2$, com $A = 4$, $B = -12$ e $C = 9$.

Então $A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$ é a matriz da forma quadrática e

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 6 \\ 6 & \lambda - 9 \end{bmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 9) - 36 = \lambda^2 - 13\lambda = 0$$

é a sua equação característica, cujas raízes são $\lambda_1 = 13$ e $\lambda_2 = 0$. Isto é, $\lambda_1 = 13$ e $\lambda_2 = 0$ são os autovalores da matriz $\mathcal{A}$.

Os autovetores (x, y) relativos ao autovalor $\lambda_1 = 13$ são as soluções do sistema

$$\begin{cases} (\lambda_1 - 4)x + 6y = 0 \\ 6x + (\lambda_1 - 9)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 6y = 0 \\ 6x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}y$$

Portanto, $\vec{u}_1 = \left(\frac{-3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$ é um autovetor unitário relativo ao autovalor $\lambda_1 = 13$. Como o autovetor $\vec{u}_2$ relativo ao autovalor $\lambda_2 = 0$ é ortogonal ao autovetor $\vec{u}_1$, basta tomar $\vec{u}_2 = \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$. Obs.: o ângulo θ que $\vec{u}_1$ faz com o eixo OX vale, aproximadamente, $146,31^\circ$ ($\cos^{-1}\left(\frac{-3\sqrt{13}}{13}\right)$).

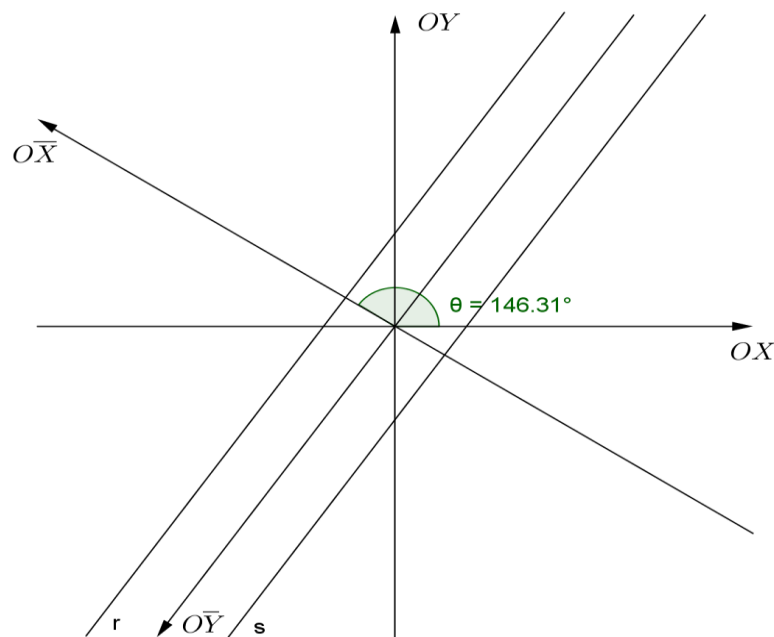
Seja $O\bar{X}\bar{Y}$ o sistema de eixos ortogonais obtido girando os eixos OX e OY , no sentido positivo, do ângulo $\theta \cong 146,31^\circ$. Nas coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ deste sistema de eixos, a forma quadrática é dada por

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 = 13\bar{x}^2.$$

Portanto, a linha de nível m de f é o conjunto vazio, se $m < 0$; a reta $\bar{x} = 0$, se $m = 0$, e duas retas paralelas, $\bar{x} = \pm\sqrt{\frac{13}{m}}$, se $m > 0$.

No sistema de eixos $O\bar{X}\bar{Y}$ as equações das retas paralelas são $r: \bar{x} = \sqrt{\frac{13}{m}}$ e $s: \bar{x} = -\sqrt{\frac{13}{m}}$.

Gráfico 25 – Par de retas paralelas



Pela mudança de coordenadas (ver (19) e (20)),

$$(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{3\sqrt{13}}{13} & -\frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{2\sqrt{13}}{13} & -\frac{3\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix} (\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{e} \quad (\bar{x}, \bar{y}) = \begin{bmatrix} -\frac{3\sqrt{13}}{13} & \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ -\frac{2\sqrt{13}}{13} & -\frac{3\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix} (x, y),$$

obtemos que as equações das retas paralelas são $r: -\frac{3\sqrt{13}}{13}x + \frac{2\sqrt{13}}{13}y = \sqrt{\frac{13}{m}}$ e

$s: -\frac{3\sqrt{13}}{13}x + \frac{2\sqrt{13}}{13}y = -\sqrt{\frac{13}{m}}$ nas coordenadas x e y .

Já a reta $\bar{x} = 0$, quando $m = 0$, coincide com o eixo $O\bar{Y}$. E pela mudança de coordenadas obtemos sua equação nas coordenadas x e y : $-\frac{3\sqrt{13}}{13}x + \frac{2\sqrt{13}}{13}y = 0$.

3.4.4 Equação geral do segundo grau em $\mathbb{R}^2$

Consideremos a equação geral do 2º grau nas variáveis x e y :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (25)$$

Esta equação é a linha de nível zero da função quadrática

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F.$$

Seja, o sistema $O\bar{X}\bar{Y}$ de eixos ortogonais cujos eixos $O\bar{X}$ e $O\bar{Y}$ tem a mesma direção e o mesmo sentido dos autovetores $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$, relativos aos autovalores λ_1 e λ_2 ,

respectivamente, da matriz $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}$.

Então, por (24), a **função quadrática** f , nas coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$, assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, \bar{y}) &= \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \langle (D, E), (\mathcal{B}(x, y)) \rangle + F \\ \rightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) &= \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \langle B^t(D, E), (x, y) \rangle + F \\ \rightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) &= \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + F \end{aligned}$$

onde $\bar{D} = \langle (D, E), \vec{u}_1 \rangle$ e $\bar{E} = \langle (D, E), \vec{u}_2 \rangle$.

Observe que a equação

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + F \quad (26)$$

Que é a equação (25) nas coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$, representa uma elipse ou uma elipse degenerada se $\lambda_1\lambda_2 > 0$, uma hipérbole ou uma hipérbole degenerada se $\lambda_1\lambda_2 < 0$, e uma parábola ou uma parábola degenerada se $\lambda_1\lambda_2 = 0$ ($\lambda_1 \neq 0$ ou $\lambda_2 \neq 0$).

Os eixos $O\bar{X}$ e $O\bar{Y}$ são os **eixos principais** da cônica C representada pela equação (26). Estes eixos são paralelos às retas focal e não focal da cônica, nos casos em que C é uma elipse ou uma hipérbole, e são paralelas à reta focal e à diretriz quando C é uma parábola.

O número real $I = B^2 - 4AC$, chamado **indicador** da equação (25), estabelece se a equação representa uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola, degenerada ou não, antes de reduzirmos a equação a sua forma canônica (26).

De fato, como $\det \mathcal{A} = \det \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix} = AC - B^2/4$, então $I = -4\det \mathcal{A}$.

Além disso, como $B = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ e $B^t = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, segue que $\det B = \det B^t = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

Logo, $I = -4\lambda_1\lambda_2$, pois, pelo **teorema 1**,

$$\begin{aligned} \det \mathcal{A} &= (\det B^t)(\det \mathcal{A})(\det B) = \det(B^t \mathcal{A} B) \\ \rightarrow \det \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \lambda_1\lambda_2. \end{aligned}$$

Para provar que $I = -4\lambda_1\lambda_2$, usamos que o determinante do produto de duas matrizes é o produto dos determinantes dessas matrizes.

Assim, a equação geral do segundo grau 25 representa:

- Uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio se $I < 0$.
- Uma hipérbole ou um par de retas concorrentes se $I > 0$.
- Uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio se $I = 0$.

Exemplo

Considere a função quadrática $f(x, y) = 7x^2 - 48xy - 7y^2 - 30x - 40y + 75$, com $A = 7$, $B = -48$, $C = -7$, $D = -30$, $E = -40$ e $F = 75$.

Seja $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{bmatrix}$ a matriz da função quadrática. Então, a equação característica da matriz $\mathcal{A}$ é

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 7 & 24 \\ 24 & \lambda + 7 \end{bmatrix} = (\lambda - 7)(\lambda + 7) - 576 = \lambda^2 - 625 = 0$$

cujas raízes são $\lambda_1 = 25$ e $\lambda_2 = -25$, isto é, $\lambda_1 = 25$ e $\lambda_2 = -25$ são os autovalores de $\mathcal{A}$.

Os autovetores (x, y) relativos ao auto vetor $\lambda_1 = 25$ são as soluções do sistema

$$\begin{cases} (\lambda_1 - 7)x + 24y = 0 \\ 24x + (\lambda_1 + 7)y = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 18x + 24y = 0 \\ 24x + 32y = 0 \end{cases} \leftrightarrow x = -\frac{4}{3}y$$

Tomemos $\vec{u}_1 = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$, que é o autovetor unitário relativo ao autovalor $\lambda_1 = 25$.

Como os autovetores relativos ao autovalor $\lambda_2 = -25$, são ortogonais ao autovetor $\vec{u}_1$, basta tomar $\vec{u}_2 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Seja $O\bar{X}\bar{Y}$ o sistema de eixos ortogonais tal que $O\bar{X}$ tem a mesma direção e sentido do vetor $\vec{u}_1$, e $O\bar{Y}$ tem a mesma direção e sentido do vetor $\vec{u}_2$. Ou seja, o sistema $O\bar{X}\bar{Y}$ é obtido girando os eixos OX e OY , no sentido positivo, do ângulo $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, tal que $\cos \theta = \frac{3}{5}$ e $\sin \theta = \frac{4}{5}$, equivale a um ângulo θ de aproximadamente $53,13^\circ$.

No sistema $O\bar{X}\bar{Y}$, a função f se escreve como

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, \bar{y}) &= 25\bar{x}^2 - 25\bar{y}^2 + \left\langle \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} (-30, -40), (\bar{x}, \bar{y}) \right\rangle + 75 \\ \Leftrightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) &= 25\bar{x}^2 - 25\bar{y}^2 + (-24 + 24)\bar{x} + (-18 - 32)\bar{y} + 75 \\ \Leftrightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) &= 25\bar{x}^2 - 25\bar{y}^2 - 50\bar{y} + 75 \\ \Leftrightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) &= 25\bar{x}^2 - 25(\bar{y} + 1)^2 + 100 \end{aligned}$$

Portanto a curva de nível 100 da função f é dada pela equação

$$\begin{aligned} 25\bar{x}^2 - 25(\bar{y} + 1)^2 + 100 &= 100 \quad \Leftrightarrow \quad 25\bar{x}^2 - 25(\bar{y} + 1)^2 = 0 \\ \bar{y} + 1 &= \bar{x} \text{ ou } \bar{y} + 1 = -\bar{x} \end{aligned}$$

que representa duas retas concorrentes no ponto $(0,1)$, nas coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$.

Como

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} (x, y) = \left(\frac{4x-3y}{5}, \frac{3x+4y}{5} \right),$$

temos que as retas nas coordenadas x e y , são:

- $-\bar{x} + \bar{y} = -1 \leftrightarrow -(4x - 3y) + (3x + 4y) = -5 \leftrightarrow -x + 7y = -5;$
- $\bar{x} + \bar{y} = -1 \leftrightarrow (4x - 3y) + (3x + 4y) = -5 \leftrightarrow 7x + y = -5.$

Estas retas se cortam no ponto

$$P = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} (0, -1) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right).$$

Para $m \neq 100$, a linha de nível m da função f é a hipérbole

$$25\bar{x}^2 - 25(\bar{y} + 1)^2 = m - 100 \leftrightarrow \frac{\bar{x}^2}{\frac{m-100}{25}} - \frac{(\bar{y}+1)^2}{\frac{m-100}{25}} = 1.$$

Se $m > 100$, a reta focal da hipérbole é a reta $\bar{y} = -1$, paralela ao eixo - $O\bar{X}$, e se

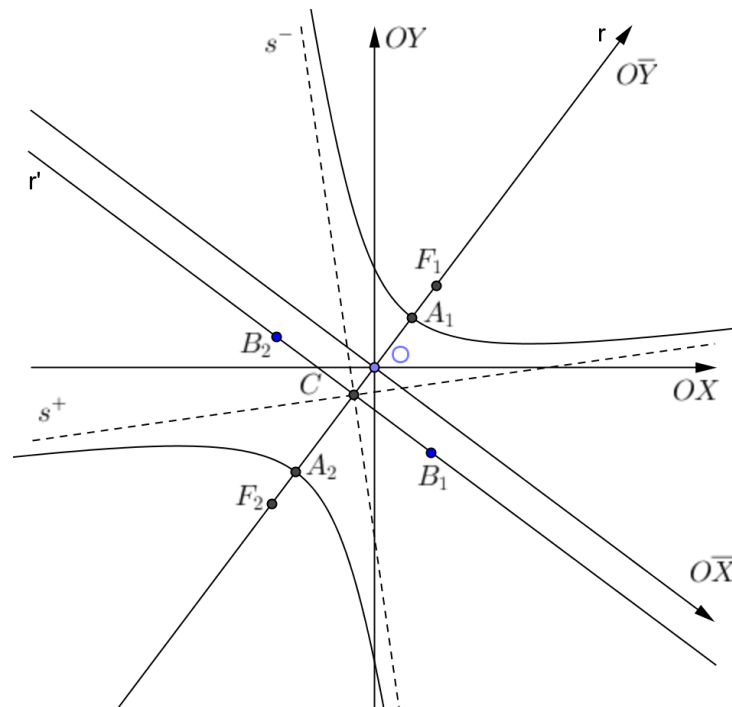
$m < 100$, a reta focal é o eixo - $O\bar{Y}$.

Para $m = -100$, a hipérbole é dada pela equação

$$-\frac{\bar{x}^2}{8} + \frac{(\bar{y}+1)^2}{8} = 1.$$

Nas coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$, $(0, -1)$ é o centro, $a = b = \sqrt{8}$, $c = 4$, $\bar{x} = 0$ é a reta focal, $\bar{y} = -1$ é a reta não focal, $(0, \sqrt{8} - 1)$ e $(0, -\sqrt{8} - 1)$ são os vértices, $(\sqrt{8}, -1)$ e $(-\sqrt{8}, -1)$ são os vértices imaginários, $(0, 3)$ e $(0, 5)$ são os focos e $\bar{x} = \pm(\bar{y} + 1)$ são as assíntotas da hipérbole.

Gráfico 26 – Gráfico da hipérbole $f(x, y) = 7x^2 - 48xy - 7y^2 - 30x - 40y + 75$



Pela mudança de coordenadas,

$$(x, y) = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{4\bar{x}+3\bar{y}}{5}, \frac{-3\bar{x}+4\bar{y}}{5} \right),$$

obtemos que $C = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ é o centro, $A_1 = \left(\frac{3\sqrt{8}-3}{5}, \frac{4\sqrt{8}-4}{5}\right)$ e $A_2 = \left(\frac{-3\sqrt{8}-3}{5}, \frac{-4\sqrt{8}-4}{5}\right)$ são os vértices, $B_1 = \left(\frac{4\sqrt{8}-3}{5}, \frac{-3\sqrt{8}-4}{5}\right)$ e $B_2 = \left(\frac{-4\sqrt{8}-3}{5}, \frac{3\sqrt{8}-4}{5}\right)$ são os vértices imaginários, $F_1 = \left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ e $F_2 = (-3, -4)$ são os focos da hipérbole nas coordenadas x e y .

E pela mudança de coordenadas,

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} (x, y) = \left(\frac{4x-3y}{5}, \frac{3x+4y}{5} \right),$$

segue que $r: 4x - 3y = 0$ é a reta focal, $r': 3x + 4y = -5$ é a reta não focal, e s^+ : $x - 7y = 5$ e $s^-: 7x + y = -5$ são as assíntotas da hipérbole nas coordenadas x e y .

3.4.5 Proposta de atividade

Objetivos: conscientizar sobre a importância da escrita matematicamente correta; fixar fórmulas e conceitos; estimular o uso do computador para a resolução de situações problemas; adquirir conhecimentos úteis ao mundo do trabalho.

Duração: 3 h/a.

Sugestão: utilizar as fórmulas expostas na parte teórica do texto.

3.4.5.1 Atividade

1- Programar uma planilha eletrônica para determinar o indicador (verifica se a cônica é uma elipse, hipérbole ou parábola), a matriz da forma quadrática, o polinômio característico, os autovalores, os autovetores e a equação do segundo grau no novo sistema.

Solução

1- Abaixo, temos a planilha programada:

Planilha 14 – Planilha programada (equação geral do 2º grau)

A6		Indicador:																	
1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
2	Equação geral do 2º grau																		
3	A	x²	+	B	xy	+	C	y²	+	D	x	+	E	y	+	F	=	0	
4	7	x²	+	-48	xy	+	-7	y²	+	-30	x	+	-40	y	+	75	=	0	
5																			
6	Indicador:		2500																
7																			
8	Matriz A	7	-24	Polinômio característico															
9		-24	-7	1	λ²	+	0	λ	+	-625	=	0							
10																			
11	Autovalores				λ₁=	25	Autovetores:				u₁=	0,80	-0,60						
12					λ₂=	-25					u₂=	0,60	0,80						
13																			
14	Equação da cônica no sistema cartesiano após a rotação dos eixos																		
15																			
16	λ₁	x²	+	λ₂	y²	+	D	x	+	E	y	+	F	=	0				
17	25	x²	+	-25	y²	+	0	x	+	-50	y	+	75	=	0				
18																			
19																			
20	Ordenadas do sistema OXY em função das coordenadas no sistema rotacion:																		

A legenda de cores é mesma que vem sendo utilizada nas questões resolvidas acima. Abaixo temos a planilha de fórmulas:

Planilha 15 – Planilha de fórmulas (equação geral do 2º grau)

E9	f_x 1												
1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	
2	Equação geral do 2º grau												
3	A	x²	+	B	xy	+	C	y²	+	D	x	+	
4	7	x²	+	-48	xy	+	-7	y²	+	-30	x	+	
5													
6	Indicador:		=D4^2-4*A4*G4										
7													
8	Matriz A		=A4	=D4/2	Polinômio característico								
9		=D4/2	=G4	1	λ²	+	=-(A4+G4)	λ	+	=A4*G4-(D4^2)/4	=		
10													
11	Autovalores				λ₁=	=(-H9+RAIZ((H9^2-4*E9*K9)))/2*E9				Autovetores:		u₁=	=1/(RAIZ(((D4^2+4*(A4-G11)
12					λ₂=	=(-H9-RAIZ((H9^2-4*E9*K9)))/2*E9						u₂=	=-M11
13													
14	Equação da cônica no sistema cartesiano após a rotação dos eixos												
15													
16	λ₁	x²	+	λ₂	y²	+	D	x	+	E	y	+	
17	=G11	x²	+	=G12	y²	+	=L11*J4+M11*M4	x	+	=L12*J4+M12*M4	y	+	
18													
19													
20	Coordenadas do sitema OXY em função das coordenadas no sistema rotacionado												

Planilha 16 – Planilha de fórmulas (equação geral do 2º grau) (continuação)

	K	L	M	N	O	P	Q	R
1								
2								
3	x	+	E	y	+	F	=	0
4	x	+	-40	y	+	75	=	0
5								
6								
7								
8								
9	=A4*G4-(D4^2)/4		=	0				
10								
11	$u_1=$	=1/(RAIZ((D4^2+4*(A4-G11)^2)/D4^2))		=L11*(((A4+G11)^2)/D4)				
12	$u_2=$	=-M11		=L11				
13								
14								
15								
16	y	+	F	=	0			
17	y	+	=P4	=	0			
18								
19								
20								

A segunda figura é a continuação da primeira. Se fosse possível, estaria à direita da primeira.

Ao utilizar a planilha programada, o interlocutor terá que interpretar a partir do indicador e/ou da equação geral do segundo grau no novo sistema, se a equação de entrada, ou seja, com o termo xy , é uma elipse, hipérbole ou parábola.

4 CONCLUSÃO

As atividades propostas, apesar de simples, são instigadoras e abre bastante espaço para perguntas a respeito das funções e praticidade das planilhas eletrônicas. É necessário que o professor faça indagações sobre o potencial desse aplicativo, com o objetivo de estimular a curiosidade e que realize todas atividades antes de trabalhar com as turmas de 3º ano do ensino médio. Sugiro também que o professor tente entender as planilhas e funções utilizadas nas planilhas citadas no apêndice 1.

Ao realizar as atividades, eles (alunos) terão a certeza que a matemática é bastante útil no cotidiano, visto que para utilizar uma planilha é necessário conhecimento técnico em matemática e que devemos estudar para estarmos preparados para enfrentar as situações problemas que surgem.

REFERÊNCIAS

G1. Brasil evolui, mas segue nas últimas posições em ranking de educação. <<http://g1.globo.com/educacao/noticia/2013/12/brasil-evolui-mas-segue-nas-ultimas-posicoes-em-ranking-de-educacao.html>>. 03/12/2013. Acessado em 25/03/14.

G1. Prova de matemática do Enem revela abismo entre rede pública e privada. <http://g1.globo.com/educacao/noticia/2011/09/prova-de-matematica-do-enem-revela-abismo-entre-rede-publica-e-privada.html>>. Acessado em 25/03/14.

G1. Para educadores, ranking do Enem não avalia qualidade da escola. <<http://g1.globo.com/educacao/noticia/2011/09/para-educadores-ranking-do-enem-nao-avalia-qualidade-da-escola.html>>. 12/09/2011. Acessado em 25/03/14.

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Pisa. <<http://portal.inep.gov.br/pisa-programa-internacional-de-avaliacao-de-alunos>>. Acessado em 25/03/14.

Ministério da Educação (MEC). **Parâmetros Curriculares Nacionais**.

Biblioteca Universitária / Universidade Federal do Ceará. **Guia de Normatização de Trabalhos Acadêmicos da Universidade Federal do Brasil**. 2013.

Lima, Elon Lages. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Coleção Matemática Universitária. 2ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

Iezzi, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar, 7: Geometria Analítica**. 5. Ed. São Paulo: Editora Atual, 2005.

Gómez, Jorge Joaquim Delgado; Frensel, Kátia Rosenvald; Crissaff, Lhaylla dos Santos. **Geometria Analítica**. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Coleção PROFMAT.

Boyer, Carl B. **História da Matemática**. Prefácio de Isaac Asimov; revista por Uta C. Merzbach; tradução de Elza F. Gomide. 3ª edição. São Paulo: Blucher, 2010.

APÊNDICE A – PLANILHAS MAIS SOFISTICADAS PARA SE DETERMINAR OS PRINCIPAIS ELEMENTOS DAS CÔNICAS

Elaboramos algumas planilhas mais sofisticadas, utilizando as funções SE, OU, E, ABS (módulo), ARRED (arredondamento) e ACOS ($\cos^{-1}$). Elas (planilhas) possuem fórmulas extensas e a primeira vista, complicadas, mas o resultado é magnífico.

Essas planilhas podem ser visualizadas e baixadas utilizando os seguintes links:

Elipse:

<https://drive.google.com/file/d/0BxfjsCs3OJL7RFFSUGFURWZMaWs/edit?usp=sharing>

Hipérbole:

<https://drive.google.com/file/d/0BxfjsCs3OJL7Ulo0QmV1enh4TUK/edit?usp=sharing>

Parábola:

<https://drive.google.com/file/d/0BxfjsCs3OJL7OVetUUE4ZEhGa1E/edit?usp=sharing>

Equação geral do segundo grau:

<https://drive.google.com/file/d/0BxfjsCs3OJL7R2JpMFhOWTExSWM/edit?usp=sharing>

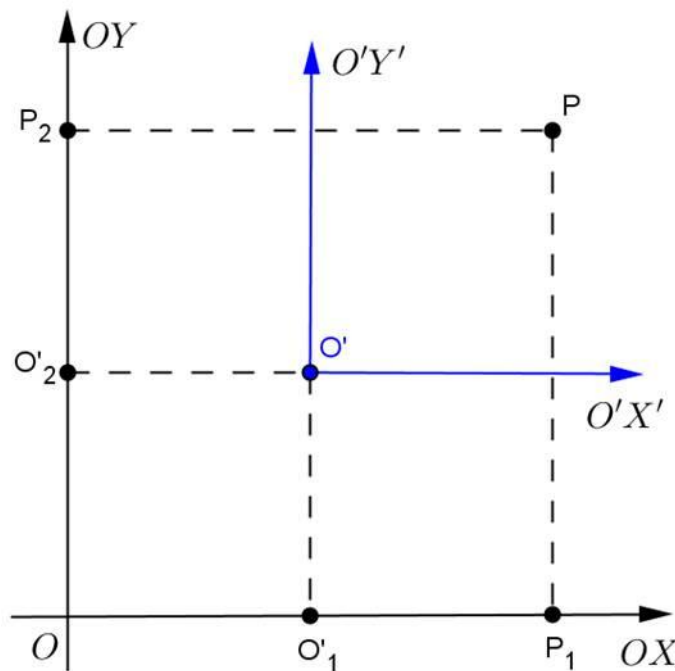
APÊNDICE B – TRANSLAÇÃO DE SISTEMA

Sejam $P(x, y)$ e $O'(x_0, y_0)$ dois pontos referidos a um sistema cartesiano OXY .

Se $O'X'Y'$ é um sistema tal que $OX \parallel O'X'$, $OY \parallel O'Y'$ e $O'X'$, $O'Y'$ tem respectivamente o mesmo sentido positivo de OX , OY dizemos que $O'X'Y'$ foi obtido por uma translação de OXY .

Nosso problema é estabelecer uma relação entre as coordenadas de P no “novo” sistema $O'X'Y'$ e no “antigo” OXY .

Gráfico 27 – Translação de Sistema



No eixo dos x , temos:

$$\overline{OP_1} = \overline{OO'_1} + \overline{O'_1P_1} \rightarrow x = x_0 + x'$$

No eixo dos y , temos:

$$\overline{OP_2} = \overline{OO'_2} + \overline{O'_2P_2} \rightarrow y = y_0 + y'$$