UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JÚNIO MOREIRA DE ALENCAR

GRUPOS COBERTOS POR SEIS SUBGRUPOS MAXIMAIS

FORTALEZA

2011

JÚNIO MOREIRA DE ALENCAR

GRUPOS COBERTOS POR SEIS SUBGRUPOS MAXIMAIS

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Orientador: Prof. Dr. José Robério Rogério

FORTALEZA

2011

Alencar, Júnio Moreira de

A353g Grupos cobertos por seis subgrupos maximais / Júnio Moreira de Alencar - Fortaleza, 2011.

93 f.

Orientador: Prof. Dr. José Robério Rogério

Dissertação(Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Depto de Matemática, Fortaleza, 2011.

1 - Álgebra. I. Rogério, José Robério (Orient.)

CDD 512.

A Jesus Cristo meu melhor amigo.

Agradecimentos

Agradeço acima de tudo a Deus por ser a minha força, a minha vitória e minha razão de viver. Foi Ele que colocou as pessoas certas nos momentos oportunos para tornar possível a conclusão desse trabalho. A tais pessoas devo também meus agradecimentos, a saber

A Aline, minha esposa, pelo seu amor, compreensão e companheirismo dedicado desde a época da minha graduação.

A meus pais Cicero e Marli, por me educarem com muito amor e paciência. Pelos incentivos e apoio nos meus estudos.

A Johnny, Kácia e Raianny, meus irmãos que são meus amigos e por acreditarem em meu sucesso estudantil.

A Alex e Amanda que foram decisivos na minha monografia e pela certeza de que posso sempre contar com a ajuda deles.

A Carlos Régio e Ana que me deram assistência desde o processo de seleção para o mestrado. Vocês representam muito para mim. Tenho vocês como meus pais.

A todos os meus colegas de mestrado pela solidariedade, incentivo no decorrer do curso, pelas contribuições nas listas de exercícios e muitas dúvidas tiradas durante cada semestre letivo.

Ao professor Robério pelo seu exemplo de humildade, por ser um excelente professor orientador e está sempre a disposição para tirar minhas dúvidas e me apoiar no decorrer da dissertação.

Aos professores Othon e Alberto pelas excelentes aulas de álgebra que contribuíram bastante nesse trabalho.

Ao pessoal do doutorado, em especial a João Francisco, Cícero Aquino e Michel pelas muitas explicações oferecidas mesmo estando ocupados.

Ao professor Juscelino meu orientador na graduação e que me incentivou a fazer o mestrado. Sem a sua contribuição talvez eu nem tentaria o verão para ingressar no mestrado.

Aos funcionários Junior e Sr. Erivan da biblioteca pela prestatividade e educação no atendimento. Assim como a secretária Andréa, pelo exemplo de dedicação ao trabalho, paciência e excelência no atendimento.

Aos meus irmãos da Igreja Cristã Maranata do João XXIII e do Juazeiro do Norte, pelas orações e incentivos durante todo o mestrado.

Aos professores Trajano e Alberto por aceitarem o convite para fazerem parte da banca examinadora desse trabalho.

Ao professor Alexander Hulpke da instituição Colorado State University por responder todas minhas dúvidas, via e-mail, sobre comandos do GAP-groups.

Ao professor Alireza Abdollahi autor do artigo base para esta dissertação, pela humildade e gentileza em confirmar uma pequena precipitação no Lema 4.1 desse artigo.

Aos professores Afonso e Luquésio pelas várias sugestões na compreenção de teoremas e resolução de listas de exercícios.

A Capes pelo apoio financeiro.

Finalmente, a todos quantos contribuíram para esse momento especial de conclusão do mestrado, meus sinceros agradecimentos.

"Tendo por certo isto mesmo, que aquele que em vós começou a boa obra a aperfeiçoará até o dia de Cristo Jesus."
Filipenses 1 : 6

Resumo

Esta dissertação é baseada no artigo "Groups with a maximal irredundant 6-cover" de A. Abdollahi, M. J. Ataei, S. M. Jafarian Amiri, e A. Mohammadi Hassanabadi, onde caracterizam os grupos que admitem uma cobertura irredundante por seis subgrupos maximais com interseção livre de núcleo. Como uma aplicação deste resultado caracterizamos os grupos que admitem uma cobertura por seis subgrupos próprios e não admite cobertura com uma quantidade de membros menor que seis. Mostraremos também que o maior índice $|G : D|$ sobre todos os grupos G tendo uma cobertura irredundante por seis subgrupo próprios com interseção D é 36.

Palavras-chave: Teoria dos grupos. Cobertura de grupos por subgrupos. Isomorfismos.

Abstract

This dissertation is based on the article "Groups with a maximal irredundant 6-cover"of A. Abdollahi, MJ Ataei, SM Jafarian Amiri and A. Mohammadi Hassanabadi, which characterize groups with a maximal irredundante cover for six subgroups with core-free intersection. As an application of this result we characterize groups that admit a cover for six subgroups own and does not allow coverage an amount of less than six members. We will also show that the largest index $|G : D|$ over all groups G having an irredundant cover for six subgroup with intersection D is 36.

Keywords: Group theory. Covering groups by subgroups. Isomorphism.

Sumário

Introdução e Resultados

Uma cobertura para um grupo G é uma coleção de subgrupos próprios de G cuja união é igual a G. Usamos o termo n-cobertura para uma cobertura com n membros. A n-cobertura é irredundante se nenhuma subcoleção é ainda cobertura, ou seja, $G = H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_n$ ser uma n-cobertura irredundante significa que $H_i \nsubseteq H_1 \cup ... \cup H_{i-1} \cup H_{i+1} ... \cup H_n$. Quando todos os membros da cobertura são subgrupos maximais, dizemos que a cobertura é maximal. Uma cobertura é dita ter interseção livre de núcleo quando o núcleo normal da interseção dos membros da cobertura é trival.

Sabemos que a união de dois subgrupos é um subgrupo se, e somente se, um deles contém o outro. Dessa forma, não existe grupo G que admita uma 2-cobertura irredundante. Desse simples resultado podem surgir algumas perguntas, tais como: Para $n \geq 3$, em que condições um grupo G pode ser escrito como n-cobertura irredundante? Será possível caracterizar todos os grupos G que possui uma n-cobertura irredundante?

Scorza (1926) [18] determinou a estrutura de todos os grupos tendo uma 3-cobertura irredundante com interseção livre de núcleo.

Proposição*(Scorza , 1926 [18])* Seja $\{H_i; 1 \leq i \leq 3\}$ uma cobertura irredundante com interseção D livre de núcleo para um grupo G. Então $D = 1$ e $G \cong C_2 \times C_2$.

Greco (1956)[11] caracterizou todos os grupos tendo uma 4-cobertura irredundante com interseção livre de núcleo.

Proposição*(Greco , 1956 [11])* Seja $\{H_i; 1 \leq i \leq 4\}$ uma cobertura irredundante com interseção D livre de núcleo para um grupo G. Se a cobertura é maximal, então ou

1. $D = 1$ e $G \cong C_3 \times C_3$ ou $G \cong S_3$; ou

2. $|D| = 2$, $G = 18$ e G imerso em $S_3 \times S_3$.

Se a cobertura não é maximal, então ou

1. $D = 1$ e $G \cong D_8$, ou $G \cong C_4 \times C_2$ ou $G \cong C_2 \times C_2 \times C_2$; ou

2. $|D| = 2$ e $G \cong D_8 \times C_2$ onde D_8 é o grupo diedral de ordem 8.

Neumann (1954)[15] provou que se G tem uma n-cobertura irredundante então o índice da interseção da cobertura em G pode ser limitado por uma função de n e Tomkinson (1987) [19] melhorou esta limitação. Denotaremos por $f(n)$ o maior índice $|G : D|$ tomado sobre todos os grupos G tendo uma n-cobertura irredundante com interseção D.

Bryce et al. (1997) [5] caracterizou os grupos com 5-cobertura maximal irredundante com interseção livre de núcleo. Como um resultado ele mostrou que $f(5) = 16$.

Se G é um grupo tendo uma n-cobertura porém não admitindo uma m-cobertura para todo $m < n$, então escrevemos $\sigma(G) = n$. Dessa forma quando escrevermos $\sigma(G) = n$ significa que n é o menor inteiro tal que G é a união de n subgrupos próprios.

Cohn (Teorema 5, (1994)[7]) caracterizou todos os grupos G com $\sigma(G) = 3, 4$, ou 5. Também encontramos em Cohn (Teorema 6, (1994)) uma caracterização de todos os grupos G que não admitem grupo quociente com 6-cobertura, porém $\sigma(G) = 6$.

Esta dissertação, baseada no artigo [1] "Groups with a maximal irredundante 6-cover"de A. Abdollahi, M. J. Ataei, S. M. Jafarian Amiri, e A. Mohammadi Hassanabadi, dá continuidade, em um certo sentido, aos trabalhos de Bryce et al. (1997)[5] e Cohn (1994)[7] . Para ser mais explícito, vamos caracterizar todos os grupos G que admitem uma 6-cobertura maximal irredundante com interseção D livre de núcleo. Como aplicação desse resultado obteremos uma condição necessária e suficiente para todos os grupos G com $\sigma(G) = 6$. Tomkinson(1987) [19] mostrou que $f(3) = 4$, $f(4) = 9$, $16 \leq f(5) \leq 54$, $36 \leq f(6) \leq 384$ e $81 \leq f(7) \leq 3000$. Enquanto Bryce et al. (1997) [5] mostrou que $f(5) = 16$. Neste trabalho, mostraremos que o valor exato para $f(6)$ é 36.

Nossos principais resultados são os seguites:

Teorema A. Um grupo G tendo uma 6-cobertura maximal irredundante com interseção livre de núcleo é nilpotente se, e somente se, $G \cong C_5 \times C_5$ ou $G \cong C_3 \times C_3 \times C_3$.

Teorema B. Um grupo semisimples não tem uma 6-cobertura maximal irredundante com interseção livre de núcleo

Teorema C. Seja G um grupo. Então G tem uma 6-cobertura maximal irredundante com interseção D livre de núcleo se, e somente se, G satisfaz uma das seguintes propriedades:

(1). $|D| = 1$ e $G \cong C_5 \times C_5$;

(2). $|D| = 1$ e $G \cong C_3 \times C_3 \times C_3$;

(3). $|D| = 1$ e $G \cong (C_3 \times C_3) \rtimes C_2$ com $Z(G) = 1$;

(4). $|D| = 2$ e $G \cong (C_3 \times C_3 \times C_3) \rtimes C_2$ com $Z(G) = 1$;

(5). $|D| = 1$ e $G \cong C_2 \times C_2 \times S_3$ ou $G \cong C_2 \times G_0$ onde $G_0 \cong (C_3 \times C_3) \rtimes C_2$ com $Z(G_0) = 1$;

(6). $|D| = 1$ e $G \cong C_5 \rtimes C_2$ ou $G \cong C_5 \rtimes C_4$ e $Z(G) = 1$;

(7). $|D| = 2$ e $G \cong (C_5 \times C_5) \rtimes C_2$ com $Z(G) = 1$;

(8). $|D| = 4$ e $G \cong (C_5 \times C_5) \rtimes C_4$ com $Z(G) = 1$.

Teoram D. O maior índice $|G : D|$ sobre todos os grupos G tendo uma 6-cobertura irredundante com interseção D é 36.

Teorema E. Seja G um grupo finito com $\sigma(G) > 5$. Então $\sigma(G) = 6$ se, e somente se, G tem um grupo quociente isomorfo a um dos seguintes grupos:

(1). $C_5 \times C_5$;

(2). D_{10}, o grupo diedral de ordem 10;

(3). $H := \langle a, b; a^5 = 1 = b^4, ab = a^2b \rangle$.

Neste trabalho, $\mathfrak{G}_6$ representa a classe de todos os grupos G tendo uma 6-cobertura maximal irredundante com intersseção D livre de núcleo. Para um grupo G em $\mathfrak{G}_6$, assumimos que $\Gamma = \{M_i : 1 \leq i \leq 6\}$ é uma 6-cobertura maximal irredundante para G, com interseção D livre de núcleo, ou seja, $|D_G| = |\bigcap_{i=1}^{6}(M_i)_G| = 1$.

Também, usaremos as notações usuais; por exemplo, C_n denota o grupo cíclico de ordem n, $(C_n)^j$ representa o produto direto de j-cópias de C_n; o núcleo normal de um subgrupo H de um grupo G é representado por H_G, escremos $H \hookrightarrow G$ para dizer que H está imerso em G.

No capíutulo 1, faremos uma exposição prelimilar de definições e resultados clássicos da teoria dos grupos que são pré-requisitos para uma leitura compreensiva deste trabalho. No capítulo 2, caracterizamos os grupos nilpotentes que têm a propriedade $\mathfrak{G}_6$. No capítulo 3, temos como objetivo principal, mostrar que um grupo G semisimples, ou seja, um grupo que não tem subgrupo normal abeliano não-trivial, não pode ter a propriedade $\mathfrak{G}_6$. No capítulo 4, apresentamos uma condição necessária e suficiente para que um grupo G esteja em $\mathfrak{G}_6$. No capítulo 5, mostraremos que o valor exato para $f(6)$ é 36 e como aplicação da caracterização dos $\mathfrak{G}_6$-grupos, também caracterizaremos os grupos G com $\sigma(G) = 6$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo reunimos uma série de definições e resultados, bem conhecidos na teoria dos grupos, na intenção de consolidar a notação que será utilizada ao longo deste trabalho e facilitar a compreensão dos lemas, proposições e teoremas abordados nos capítulos subsequentes. Admitimos que o leitor tenha um conhecimento básico em teoria dos grupos e assim boa parte das demontrações deste capítulo serão omitidas.

1.1 Grupos, Subgrupos, Classes Laterais

Seja G um grupo multiplicativo. Usaremos o símbolo 1 para indicar tanto o elemento identidade de G como o subgrupo de G que contém apenas a identidade, tal subgrupo é chamado subgrupo trivial de G. Acreditamos que de acordo com o contexto o siginificado do símbolo 1 será claro.

A ordem de um grupo G será denotada por $|G|$. Se $x \in G$, $|x|$ denota a ordem de x. Lembre que $|x|$ é o menor inteiro positivo tal que $x^{|x|} = 1$.

Seja G um grupo e $x \in G$, o subgrupo H de G, tal que $H = \{x^n; n \in \mathbb{Z}\}$, é chamado subgrupo cíclico gerado por x. Tal subgrupo é denotado por $H = \langle x \rangle$. O simbolo C_n representa um grupo cíclico de ordem n. Como $|x| = |\langle x \rangle|$, para $|x| = n$ podemos escrever $C_n = \langle x \rangle$.

O índice de H em G, denotado por $|G : H|$, é a cardinalidade do conjunto das classes laterais H em G. Além disso, $G : H$ denotará o conjunto das classes laterais de H em G.

Teorema 1.1 ***(Teorema do Índice)*** *Sejam $H \leq K \leq G$. Então:*

$$|G : H| = |G : K|.|K : H|$$

Demonstração: *Ver [12], pág. 39.*

Corolário 1.1 ***(Teorema de Lagrange)*** *Se $H \leq G$, então*

$$|G| = |G : H|.|H|$$

Proposição 1.1 *Se $H, K \leq G$, então*

$$|G : H \cap K| \leq |G : H|.|G : K|$$

Demonstração: *Ver [16], pág. 14.*

Corolário 1.2 ***(Poincaré)*** *Sejam $H_1, H_2, ..., H_n$ subgrupos de G de índice finito, então $\bigcap_{i=1}^{n} H_i$ tem índice finito em G, ou seja,*

$$|G : \bigcap_{i=1}^{n} H_i| \leq \prod_{i=1}^{n} |G : H_i| \leq \infty$$

Corolário 1.3 *Se $|G : H|$ e $|G : K|$ são coprimos, então*

$$|G : H \cap K| = |G : H||G : K|$$

Se $N \leq G$, um subgrupo conjugado a N é dado por $N^x = x^{-1}Nx = \{x^{-1}nx \ ; \ n \in N\}$ para algum $x \in G$.

Proposição 1.2 *Se $N \leq G$, são equivalentes:*

(i) $xN = Nx$, $\forall x \in G$;

(ii) $xNx^{-1} = N$, $\forall x \in G$;

(iii) $xNx^{-1} \leq N$, $\forall x \in G$;

(iv) $(xN)(yN) = xyN$, $\forall x, y \in G$.

Demonstração: *Ver [2], pág. 91 e 92.*

Se $N \leq G$ satisfaz um dos itens da proposição acima, dizemos que N é um subgrupo normal de G e denotamos isso por $N \trianglelefteq G$.

Observação 1.1 *:*

(a). *Se $N \leq G$ tem índice dois, então $N \trianglelefteq G$.*

De fato, $1 \neq g \in G \Rightarrow G = N \cup Ng = N \cup gN \Rightarrow gN = Ng$.

(b). *Se $N \trianglelefteq G$, então o conjunto $\dfrac{G}{N} = \{xN; x \in G\}$, munido da operação induzida $(xN)(yN) = xyN$, é um grupo chamado grupo quociente.*

Se $H \leq G$, o normalizador de H em G é o subgrupo $N_G(H) = \{g \in G; H^g = H\}$. Note que $H \trianglelefteq N_G(H) \leq G$ e, $N_G(H)$ é o maior subgrupo de G no qual H é normal.

Se $x, g \in G$ o conjugado de x por g será $x^g = g^{-1}xg$. E o subconjunto $x^G = \{x^g; g \in G\}$ é chamado a classe de conjugação de x em G.

Se $x \in G$, o centralizador de x em G é o subgrupo formado pelos elementos em G que comutam com x, indicado por: $C_G(x) = \{g \in G : x^g = x\}$. Se $H \subseteq G$, o centralizador de H em G é o subgrupo:

$$C_G(H) = \{g \in G : h^g = h, \forall h \in H\} = \bigcap_{h \in H} C_G(h)$$

O centro do grupo G, denotado por $Z(G)$, é o subgrupo formado pelos elementos de G que comuta com todos os outros, note que $Z(G) = C_G(G) \trianglelefteq G$

$G = N \times H = \{(n, h);\ n \in N,\ h \in H\}$ com operação $(n, h)(n_1, h_1) = (nn_1, hh_1)$, é um grupo, chamado o produto direto dos grupos N e H. É claro que identificando $H = \{(1, h)\ ;\ h \in H\}$ e $N = \{(n, 1)\ ;\ n \in N\}$ temos $G = NH$, $N \trianglelefteq G$, $H \trianglelefteq G$ e $N \cap H = 1$.

Observação 1.2 *Se $G = N \times H$, então $hn = nh\ \ \forall\ h \in H,\ n \in N$*

De fato, $hnh^{-1}n^{-1} \in N \cap H$, pois $N, H \trianglelefteq G$. Como $N \cap H = 1$, segue que $hn = nh$.

O produto semidireto de dois grupos N e H, é representado por $G = N \rtimes H$, e significa que $G = NH$, $N \trianglelefteq G$, $H \leq G$, e $N \cap H = 1$.

Seja G um grupo e $H \leq G$. $H_G = \bigcap_{g \in G} H^g$ é o núcleo normal do subgrupo H em G. Note que H_G é o maior subgrupo normal de G contido em H, ou seja, $\forall N \trianglelefteq G, N \leq H \Rightarrow N \leq H_G$

Lema 1.1 *Seja* $G = N \rtimes H$*.*

(a). *Se* $n \in N$*, então* $H \cap H^n = C_H(n)$

(b). $H_G = C_H(N)$

Demonstração: *Ver [8], pág. 58.*

Teorema 1.2 ***(Teorema Fundamental dos Grupos Abelianos Finitamente Gerados)*** *Seja* G *um grupo abeliano finitamente gerado. Então* G *pode ser decomposto como produto direto de um número finito de grupos cíclicos* H_i*. Mais precisamente,* $G = H_1 \times H_2 \times ... \times H_k$*, tal que ou* $H_1, ..., H_k$ *são todos infinitos, ou para algum* $j \leq k$*,* $H_1, ..., H_j$ *são de ordem* $m_1, ..., m_j$*, respectivamente, com* $m_1 \mid m_2 \mid ... \mid m_j$*, e* $H_{j+1}, ..., H_k$ *são todos cíclicos infinitos.*

Demonstração: *Ver [2], pág. 141.*

Seja X um conjunto qualquer, S_X é o conjunto de todas permutações f: $X \rightarrow X$, que munido com a operação composição de funções é um grupo. Em particular, $S_n = \{f$: $\{1, 2, ..., n\} \rightarrow \{1, 2, ..., n\}; f$ é bijeção $\}$ é chamado o grupo simétrico.

Dizemos que $f \in S_n$ é um r-ciclo e escrevemos $f = (i_1\ i_2\ ...\ i_r)$, se $f(i_k) = i_{k+1}$, para $i = 1, 2, ..., r-1$, $f(i_r) = i_1$ e $f(i) = i\ \ \forall i \notin \{1, 2, ..., r\}$. Se $f \in S_n$ é produto de uma quantidade par (ou impar) de 2-ciclos, então f é dito ser par (ou ímpar).

Proposição 1.3 *:*

(a). *Seja* $A_n = \{\theta \in S_n;\ \ \theta$ *é par* $\}$*. Então:* $A_n \leq S_n$ *e* $|S_n : A_n| = 2$*.*

(A_n *é chamado o subgrupo alternado);*

(b). *Se* $n \geq 5$*, então* A_n *é simples, ou seja, seus únicos subgrupos normais são 1 e* A_n*. Ademais,* A_n *é o único normal próprio não trivial de* S_n *para todo* $n \geq 5$*.*

Demonstração: *Ver [2], pág. 133 e 135.*

Seja G um grupo e $X \subset G$. O subgrupo gerado por X será denotado por $\langle X \rangle = \{x_1^{e_1} x_2^{e_2} ... x_n^{e_n}; \ \ x_i \in X, \ \ e_i = \pm 1\}$.

Se $x, y \in G$, definimos o comutador de x e y como sendo: $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. $G' = \langle [x, y] : x, y \in G \rangle$ é o derivado de G. É claro que, G é abeliano $\Leftrightarrow G' = 1$.

Proposição 1.4 *Seja G um subgrupo e G' o derivado de G. Então:*

(a). $G' \trianglelefteq G$;

(b). $\dfrac{G}{G'}$ *é abeliano;*

(c). *Se $N \trianglelefteq G$, então $\dfrac{G}{N}$ é abeliano $\Leftrightarrow G' \leq N$.*

Demonstração: *Ver [2], pág. 93 e 94.*

A função $\Psi : G \to H$ é dita ser homomorfismo se, $\Psi(xy) = \Psi(x)\Psi(y) \ \forall x, y \in G$, onde G e H são grupos.

O conjunto $Nuc(\Psi) = \{x \in G; \ \Psi(x) = 1\}$ é chamado o núcleo do homomorfismo Ψ.

Um homomorfismo bijetor é chamado isomorfismo. Se Ψ é um isomorfismo de G em G, Ψ é dito ser um automorfismo.

O conjunto $Aut(G) = \{\Psi\colon G \to G; \ \Psi \text{ é isomorfismo}\}$ é o grupo dos automorfismos de G.

Proposição 1.5 *Seja $\Psi\colon G \to G_1$ homomorfismo de grupos. Então:*

1. ***(1º Teorema dos Isomorfismos)***

$$\frac{G}{Nuc(\Psi)} \cong Im(\Psi)$$

2. ***(2º Teorama dos Isomorfismos)*** *Se $N \trianglelefteq G$ e $H \leq G$, então*

$$\frac{HN}{N} \cong \frac{H}{N \cap H}$$

3. ***(3º Teroema dos Isomorfismos)*** *Se $H, K \trianglelefteq G$, $H \leq K$, então*

$$\frac{\frac{G}{H}}{\frac{K}{H}} \cong \frac{G}{K}$$

4. ***(Teorema da Correspondência)*** *Se $N \trianglelefteq G$, então existe uma correspondência biunívoca entre os subgrupos de G que contém N e os subgrupos de $\frac{G}{N}$.*

Demonstração: *Ver [2], pág. 97 - 101.*

Nas demonstrações dos resultados nos próximos capítulos usaremos os

Exemplo 1.1

(a). Sejam $H_1, H_2, ..., H_n \trianglelefteq G$. A função ψ: $G \to \frac{G}{H_1} \times ... \times \frac{G}{H_n}$ dada por $\psi(g) = (gH_1, ..., gH_n)$ é um homomorfismo, com $Nuc(\psi) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} H_i\right)_G$.

Pelo 1º Teorema dos Isomorfismos:

$$\frac{G}{\left(\bigcap_{i=1}^{n} H_i\right)_G} \cong Im(\psi) \leq \frac{G}{H_1} \times ... \times \frac{G}{H_n}$$

Em particular, se a interseção D dos H_is for livre de núcleo, podemos admitir que

$$G \hookrightarrow \frac{G}{H_1} \times ... \times \frac{G}{H_n}$$

(b). Se $1 \neq x \in G$ é um p-elemento (p primo), $N \trianglelefteq G$ tal que $|G : N| = n$, onde $p \nmid n$. Então $x \in N$.

De fato, suponha que $x \notin N$, sendo $N \lhd G$, pelo 2º Teorema dos Isomorfismos $|\langle x\rangle N : N| = |\langle x\rangle : \langle x\rangle \cap N|$. Absurdo, pois p não divide n.

Lema 1.2 ***(NC-Lema)*** *Se $H \leq G$, então*

$$\frac{N_G(H)}{C_G(H)} \lesssim Aut(H)$$

Demonstração: *Ver [16], pág. 38.*

Lema 1.3 *Se $H \leq G$, então*

$$|\{H^g;\;\; g \in G\}| = |G : N_G(H)|$$

Demonstração: *Ver [17], pág. 83.*

Um subgrupo H de K é dito ser característico, e denotamos isso por $H \overset{\lhd}{\texttt{car}}$ G, se $\Psi(H) = H \ \ \forall \Psi \in Aut(G)$

Observação 1.3 *:*

(a). *Sejam G um grupo e $H \leq G$. Então: $H \overset{\lhd}{\texttt{car}} G \Rightarrow H \trianglelefteq G$.*

De fato, $H \overset{\lhd}{\texttt{car}}$ G significa que: $\Psi(H) = H, \quad \forall \Psi \in Aut(G)$. Em particular, para o automorfismo interno $I_g \colon G \to G$ definido por $I_g(x) = gxg^{-1}$, vale que $I_g(H) = H$. Logo, $H^g = H \ \ \forall g \in G$, ou seja, $H \trianglelefteq G$.

(b). *Se $H \overset{\lhd}{\texttt{car}} N \trianglelefteq G$, então $H \trianglelefteq G$.*

1.1.1 Subgrupo Frattini

Dado um grupo G, dizemos que um subgrupo M de G é maximal, denotamos isso por $M \lessdot G$, quando:

- $M < G$ e,
- Dado $H \leq G$ com $M \leq H \leq G$, então $H = M$ ou $H = G$.

O subgrupo $\Phi(G) = \displaystyle\bigcap_{M \lessdot G} M$ é chamado o subgrupo Frattini de G. Se G não possui subgrupos maximais, $\Phi(G) = G$.

A identidade a seguir é às vezes usadas em provas envolvendo o subgrupo Frattini.

Proposição 1.6 ***(Lei de Dedekind)*** *Sejam H, K, L subgrupos de G com $K \leq L$, então: $(HK) \cap L = (H \cap L)K$.*

Demonstração: *Ver [17], pág. 122.*

Dizemos que $g \in G$ é um não gerador de G se para todo $X \subseteq G$ e $G = \langle X, g \rangle$, então $G = \langle X \rangle$.

Proposição 1.7 *Seja G um grupo finito. Então:*

1. *$\Phi(G) \overset{\lhd}{\texttt{car}} G$;*
2. *$\Phi(G)$ é o conjunto de não geradores de G;*
3. *Se $N \trianglelefteq G$, então $N \leq \Phi(G) \Leftrightarrow \nexists H < G$ tal que $NH = G$;*

4. *Se $N \trianglelefteq G$, $H \leq G$ e $N \leq \Phi(H)$, então $N \leq \Phi(G)$;*

5. *Se $N \trianglelefteq G$, então $\Phi(N) \leq \Phi(G)$.*

Demonstração:

1. *Note que: se $\alpha \in Aut(G), M \lessdot G \Leftrightarrow \alpha(M) \lessdot G$. Daí, dado $\alpha \in Aut(G)$, temos que:*

$$\alpha(\Phi(G)) = \alpha(\bigcap_{M \lessdot G} M) = \bigcap_{M \lessdot G} \alpha(M) = \bigcap_{\alpha(M) \lessdot G} \alpha(M) = \Phi(G)$$

2. *Seja $g \in G$ um não gerador de G. Suponha que $g \notin \Phi(G)$. Então $g \notin M$ para algum $M \lessdot G$. Logo $\langle M, g \rangle = G$ e $\langle M \rangle = M = G$, absurdo. Portanto, $g \in \Phi(G)$. Reciprocamente, seja $g \in \Phi(G)$ e seja $X \subseteq G$ tal que $\langle X, g \rangle = G$. Se $\langle X \rangle \neq G$, então $\langle X \rangle \leq M \lessdot G$. Logo, $\langle X, g \rangle \leq M$ pois $g \in \Phi(G) \leq M$. Daí, $G = \langle X, g \rangle \leq M$, absurdo. Portanto, $\langle X \rangle = G$ e g é um não gerador.*

3. *Se $N \leq \Phi(G)$ e $H < G$, então $H \leq M \lessdot G$, e $N \leq \Phi(G) \leq M$. Logo, $NH \leq M \neq G$. Reciprocamente, se $N \nleq \Phi(G)$, então $N \nleq M$, para algum $M \lessdot G$. Logo, $NM = G$.*

4. *Suponha que $N \nleq \Phi(G)$. Então $N \nleq M$ para algum $M \lessdot G$. Logo, $G = MN$ e $H = H \cap G = H \cap NM = N(H \cap M)$. Daí $H = H \cap M$, pois $N \leq \Phi(H)$. Portanto, $H \leq M$, implicando $N \leq M$. O que é uma contradição.*

5. *Como $\Phi(N) \overset{\triangleleft}{\mathtt{car}} N \trianglelefteq G$ e, pelo item anterior, $\Phi(N) \leq \Phi(G)$.*

$\square$

Dizemos que um grupo G finito é um p-grupo (p primo), quando $|G| = p^n$. Também, $x \in G$ é um p-elemento, se $|x|$ é potência de p. De agora em diante, a menos se mencionado o contrário, p é um número primo.

Dizemos que um grupo abeliano $G \neq 1$ é abeliano elementar se existe p tal que $g^p = 1$, para todo $g \in G$.

Proposição 1.8 *Seja G um p-grupo finito. Então:*

1. *$\Phi(G) = 1$ se, e somente se, G é abeliano elementar;*

2. *$\Phi(G) = G'G^p$, onde $G^p = \langle a^p;\ \ a \in G\rangle$.*

Demonstração:

1. *Ver [17], pág. 270.*

2. *Ver [16] pág. 135.*

1.1.2 Ação de grupos, Teoremas de Sylow

Definição 1.1 *Uma ação (ou representação de permutações) de um grupo G sobre um conjunto X é um homomorfismo φ: $G \to S_X$.*

A imagem do elemento $g \in G$ será denotada por $\varphi(g)$ ou φ_g.

A relação em X, descrita abaixo, é de equivalência:

$$x \sim y \Leftrightarrow y = \varphi(g)(x),\ \exists g \in G$$

A classe de equivalência do elemento x é o conjunto: $Gx = \{\varphi(g)(x); g \in G\}$, chamado a órbita de x.

Se $x \in X$, o estabilizador de x é o subconjunto $G_x = \{g \in G; \varphi(g)(x) = x\}$.

Se $x \in X$, o conjunto dos pontos fixos de $\varphi(g)$ será denotado por X_g, ou seja, $X_g = \{x \in X; \varphi(g)(x) = x\}$.

Exemplo 1.2

(a). Seja $H \leq G$ com $|G : H| = n$ e $X = \{xH; x \in G\}$. Considere φ: $G \to S_X$ tal que $\varphi(g)(xH) = gxH$. Então φ é uma ação, com $Nuc(\varphi) = H_G$ e, $\dfrac{G}{H_G} \cong Im(\varphi) \leq S_n$.

(b). Seja G um grupo, ξ: $G \to S_G$ tal que $\xi(g)(x) = gxg^{-1}$ é uma ação, onde:

$$Gx = \{gxg^{-1};\ g \in G\} = \{x^{g^{-1}};\ g \in G\} = x^G$$

$$G_x = \{g \in G;\ gxg^{-1} = x,\ \ \forall x \in G\} = C_G(x)$$

Seja G um grupo finito de ordem $|G| = p^m r$ com $p \nmid r$. Um subgrupo de G de ordem p^m é dito ser um p-subgrupo de Sylow de G. O símbolo $Syl_p(G)$ denota o conjunto de todos os p-subgrupos de Sylow de G e $n_p = |Syl_p(G)|$.

Teorema 1.3 ***(Teoremas de Sylow)*** *Seja G um grupo com $|G| = p^m r$ onde $p \nmid r$. Então:*

1. *Existe $H \leq G$ tal que $|H| = p^m$.*

2. *Se $H \leq G$ com $|H| = p^m$ e J é um p-subgrupo de G, então $J \leq H^g$ para algum $g \in G$. Em particular, dois p-subgrupos de Sylow de G são conjugados.*

3. *$n_p = |G : N_G(H)|$ onde $H \in Syl_p(G)$ e $n_p \equiv 1 (mod\, p)$.*

Demonstração: *Ver [16] pág. 39 e 40.*

Corolário 1.4 ***(Teorema de Cauchy)*** *Se p divide $|G|$, então existe $x \in G$ tal que $|x| = p$.*

Corolário 1.5 *Se G é um grupo finito, então $P \in Syl_p(G)$ é único se, e somente se, $P \trianglelefteq G$.*

1.2 Grupos: Solúveis, Supersolúveis e Nilpotentes

1.2.1 Grupos Solúveis

Lembrando que o subgrupo $G' = \langle \{[x, y]; x, y \in G\} \rangle$ é chamado o derivado de G. Para um inteiro positivo n, definimos o n-ésimo derivado de G, denotado por $G^{(n)}$, como segue:

$$G^{(0)} = G, \;\; G^{(1)} = G', \;\; G^{(n)} = (G^{(n-1)})' \quad \forall n > 1$$

Definição 1.2 *Um grupo G é solúvel, quando $G^{(k)} = 1$ para algum inteiro positivo k.*

Segue imediatamente da definição que todo grupo abeliano é solúvel.

Proposição 1.9 *Seja G um grupo solúvel, então todo subrupo e toda imagem homomórfica de G são solúveis. Reciprocamente, se $N \trianglelefteq G$ e $\dfrac{G}{N}$ são solúveis então G é solúvel.*

Demonstração: *Suponha que G é um grupo solúvel. Então existe k inteiro positivo tal que $G^{(k)} = 1$. Se $H \leq G$, então $H^{(k)} \leq G^{(k)} = 1$, ou seja, $H^{(k)} = 1$. Logo, H é solúvel.*

Agora, seja $\phi\colon G \to H$ um homomorfismo sobrejetivo. Dados $a, b \in G$, $\phi(aba^{-1}b^{-1}) = \phi(a)\phi(b)\phi(a)^{-1}\phi(b)^{-1}$. Daí, $H' = \phi(G')$, e, por indução, $H^{(n)} = \phi(G^{(n)})$. Portanto, $H^{(k)} = \phi(G^{(k)}) = \phi(1) = 1$. Isto prova que toda imagem homomórfica de G é solúvel.

Reciprocamente, seja $N \trianglelefteq G$ tal que N e G/N são solúveis. Então existem $k, l \in \mathbb{Z}$ tais que $N^{(k)} = 1$ e $(G/N)^{(l)} = \bar{1}$. Como G/N é a imagem homomórfica de G, pelo homomorfismo natural $G \to G/N$, segue que $(G/N)^{(n)} = G^{(n)}N/N$ para todo inteiro positivo n. Daí, $G^{(l)} \leq N$. Portanto, $G^{(l+k)} \leq N^{(k)} = 1$ e G é solúvel. □

Corolário 1.6 *Sejam H e K grupos, então $H \times K$ é solúvel se, e somente se, H e K são solúveis.*

Demonstração: Se $H \times K$ é solúvel, então $H \cong H \times 1$ e $K \cong 1 \times K$ são subgrupos normais. Logo, H e K são solúveis. Reciprocamente, suponha H e K são solúveis. Então $H \trianglelefteq H \times K$ e $\dfrac{H \times K}{H} \cong K$ são solúveis, portanto $H \times K$ é solúvel. □

Proposição 1.10 *Um grupo G é solúvel se, e somente se, existe uma série*

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_n = G$$

onde $G_i \trianglelefteq G_{i+1}$ e todos os grupos quocientes $\dfrac{G_{i+1}}{G_i}$ são abelianos.

Demonstração: *Se G é solúvel então a série :*

$$1 = G^{(n)} \trianglelefteq G^{(n-1)} \trianglelefteq ... \trianglelefteq G' \trianglelefteq G$$

é tal que $\dfrac{G^{(i)}}{G^{(i+1)}}$ é abeliano. Reciprocamente, se existe uma série:

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_n = G$$

onde $G_i \trianglelefteq G_{i+1}$ e todos os grupos quocientes $\dfrac{G_{i+1}}{G_i}$ são abelianos. Afirmamos que $G^{(i)} \leq G_{n-i}$ $\forall\, 0 \leq i \leq n$. De fato, faremos indução sobre i:

- *Para* $i = 0$, $G^{(0)} = G = G_n$;

- *Suponha que* $G^{(i)} \leq G_{n-i}$. *Então* $\dfrac{G_{n-i}}{G_{n-(i+1)}}$ *abeliano, nos fornece* $(G_{n-i})' \leq G_{n-(i+1)}$. *Assim,* $(G^{(i)})' \leq (G_{n-i})' \leq G_{n-(i+1)}$. *Portanto,* $G^{i+1} \leq G_{n-(i+1)}$ $\forall\ 0 \leq i \leq n$.

  Daí, $G^{(n)} \leq G_0 = 1$, *ou seja,* G *é solúvel.*

$\square$

Teorema 1.4 ***(Teorema de Burnside)*** *Se* G *é um grupo com* $|G| = p^m q^n$, p *e* q *números primos,* $m, n \in \mathbb{N}$, *então* G *é solúvel. Em particular,* S_3 *e* S_4 *são grupos solúveis.*

Demonstração: *Ver [16] pág. 240.*

$N \leq G$ é dito ser um subgrupo normal minimal de G, se $1 \neq N \trianglelefteq G$ e não existe $1 \neq K \trianglelefteq G$ tal que $K < N$. Denotamos isso por $N \cdot\!\trianglelefteq G$.

Proposição 1.11 *Se* G *é um grupo solúvel finito, então todo normal minimal de* G *é* p*-abeliano elementar.*

Demonstração: *Seja* $N \cdot\!\trianglelefteq G$. *Então*

$$N' \overset{\triangleleft}{\text{car}}\ N \trianglelefteq G \Rightarrow N' \trianglelefteq G \Rightarrow N' = 1 \text{ ou } N' = N.$$

Se $N' = N$, *então* $N = N' = N^{(2)} = ... = N^{(n)} = ...$ *Absurdo, pois* N *é solúvel, uma vez que* G *é solúvel. Logo,* $N' = 1$, *ou seja,* N *é abeliano. Agora, considere o grupo* $N(p) = \{n \in N;\ n^p = 1\}$, *onde* p *divide* $|N|$. *Então existe* $n \in N$ *tal que* $|n| = p$. *Portanto,* $N(p) \neq 1$ *e* $1 \neq H \trianglelefteq G$ *uma vez que o conjugado de um* p*-elemento é um* p*-elemento. Como* $N \cdot\!\trianglelefteq G$, *segue que* $N(p) = N$, *ou seja,* N *é* p*-abeliano elementar.* $\square$

Proposição 1.12 *Sejam* G *um grupo finito e* N *um subgrupo abeliano normal minimal de* G. *Se* $G = N \rtimes H$, *então* $C_G(N) = H_G \times N$.

Demonstração: *Suponha* N *um subgrupo abeliano normal minimal de* G. *Então, pelo Lema* 1.1 *e a Lei de Dedekind, temos que*

$$NH_G = NC_H(N) = N(H \cap C_G(N)) = NH \cap C_G(N) = C_G(N)$$

Como $N \cap H_G \leq N \cap H = 1$, *então* $C_G(N) = N \times H_G$. $\square$

1.2.2 Grupos Supersolúveis

Definição 1.3 *Um grupo G é supersolúvel, se existe uma série*

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_n = G$$

onde $G_i \trianglelefteq G$ e todos os grupos quocientes $\dfrac{G_{i+1}}{G_i}$ são cíclicos.

Note que todo grupo supersolúvel é solúvel, mas nem todo grupo solúvel é supersolúvel. Por exemplo, o grupo $G = A_4$ é solúvel, pois $1 \triangleleft V \triangleleft A_4$, onde V é o grupo de Klein. Uma vez que $\dfrac{V}{1} \cong V \cong C_2 \times C_2$ que é abeliano e não é cíclico e, $|\dfrac{A_4}{V}| = 3$.

Também não é verdade que $N \trianglelefteq G$ e $\dfrac{G}{N}$ serem supersolúveis, implica que G é supersolúvel. Por exemplo, A_4 não é supersolúvel, porém de V e $\dfrac{A_4}{V}$ são supersolúveis, onde V é o grupo de Klein.

Proposição 1.13 *Sejam G, H, e, K grupos.*

1. *Se G é supersolúvel, então todo subgrupo e todo quociente de G é supersolúvel;*
2. *Se H e K são supersolúveis, então $H \times K$ é supersolúvel;*
3. *Se G é supersolúvel finito e N é normal minimal em G, então $|N| = p$;*
4. *Se G é supersolúvel finito e $M \lessdot G$, então $|G : M| = p$.*

Demonstração: *Ver [16] pág. 145.*

1.2.3 Grupos Nilpotentes

Definição 1.4 *Um grupo G é nilpotente, se existe uma série*

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_n = G$$

onde $G_i \trianglelefteq G$ e $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$.

A série central superior é definida recursivamente por: $Z_0(G) = 1, Z_1(G) = Z(G)$ e $Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = Z(G/Z_i(G))$, para $i \geq 1$.

Seja $H \leq G$, diz-se que H é subgrupo subnormal de G se existe $H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq H_n = G$

Observação 1.4 *Se G é um grupo nilpotente finito, então G é supersolúvel.*

Proposição 1.14 *Se G é um grupo com $|G| = p^n$, então G é nilpotente e $Z(G) \neq 1$.*

Demonstração: *Ver [2] pág. 113 e 126.*

Teorema 1.5 ***(Caracterização dos Grupos Nilpotentes Finitos)*** *Seja G um grupo finito. Então são equivalentes:*

1. *G é nilpotente;*
2. *Todo subgrupo de G é subnormal em G;*
3. *Se $H < G$, então $H < N_G(H)$;*
4. *Se $M \lessdot G$, então $M \trianglelefteq G$;*
5. *$G' \leq \Phi(G)$;*
6. *Se $P \in Syl_p(G)$, então $P \trianglelefteq G$;*
7. *$G = P_1 \times ... \times P_r$, onde P_i é um p_i-subgrupo de Sylow de G.*

Demonstração: *Ver [16] pág. 126.*

Capítulo 2

$\mathfrak{G}_6$-Grupos Nilpotentes

Neste capítulo damos uma caracterização dos grupos nilpotentes que tem a propriedade $\mathfrak{G}_6$. Antes disso, falaremos um pouco sobre cobertura de grupos e demonstraremos alguns lemas essenciais para essa caracterização.

2.1 Cobertura de Grupos

Uma cobertura para um grupo G é uma coleção de subgrupos próprios de G cuja união é igual a G. Usamos o termo n-cobertura para uma cobertura com n membros. A n-cobertura é irredundante se nenhuma subcoleção é ainda cobertura, ou seja, $G = H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_n$ ser uma n-cobertura irredundante significa que $H_i \nsubseteq H_1 \cup ... \cup H_{i-1} \cup H_{i+1} ... \cup H_n$. Quando todos os membros da cobertura são subgrupos maximais, dizemos que a cobertura é maximal. Uma cobertura é dita ter interseção livre de núcleo quando o núcleo normal da interseção dos membros da cobertura é trival.

Exemplo 2.1

(a). Considere o grupo simétrico $S_3 = \{1, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$.

$$S_3 = \langle(1\ 2)\rangle \cup \langle(1\ 3)\rangle \cup \langle(2\ 3)\rangle \cup \langle(1\ 2\ 3)\rangle \cup \langle(1\ 3\ 2)\rangle$$

é uma 5-cobertura para S_3. Porém, tal cobertura não irredundante uma vez que $\langle(1\ 2\ 3)\rangle = \langle(1\ 3\ 2)\rangle$. Agora, é claro que a cobertura:

$$S_3 = \langle(1\ 2)\rangle \cup \langle(1\ 3)\rangle \cup \langle(2\ 3)\rangle \cup \langle(1\ 2\ 3)\rangle$$

é uma 4-cobertura maximal irredundante com interseção livre de núcleo.

(b). O grupo $C_5 \times C_5 = \langle a, b \ ; \quad a^5 = 1 = b^5, \quad ab = ba \rangle$. Se considerarmos $H_i = \langle ab^i \rangle$ para $0 \leq i \leq 4$ e $H_5 = \langle b \rangle$, temos que:

$$C_5 \times C_5 = H_0 \cup H_1 \cup ... \cup H_5$$

é uma 6-cobertura maximal irredundante com interseção livre de núcleo.

(c). Dado o grupo dos quatérnios

$$Q_8 = \langle a, b; \ a^4 = 1, a^2 = b^2, a^b = a^{-1} \rangle.$$

Seus subgrupos próprios são: $\langle a^2 \rangle$, $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$ e $\langle ab \rangle$. Além disso, $\langle a^2 \rangle$ esta contido em todos os outros subgrupos próprios. Logo,

$$Q_8 = \langle a \rangle \cup \langle b \rangle \cup \langle ab \rangle \text{ e } D = D_{Q_8} = \langle a^2 \rangle$$

é uma 3-cobertura maximal cuja interseção não é livre de núcleo.

Toda vez que dizemos que G é um $\mathfrak{G}_6$-Grupo, assumimos que:

$$G = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5 \cup M_6$$

é uma cobertura maximal irredundante com interseção D livre de núcleo.

O belo resultado a seguir é devido a

(Neuman [14]): Seja G um grupo tal que

$$G = H_1 g_1 \cup H_2 g_2 \cup ... \cup H_n g_n$$

é uma n-cobertura irredundante por classes laterais à direita. Então

$$|G : H_1 g_1 \cap H_2 g_2 \cap ... \cap H_n g_n|$$

é finito.

Devido a tal resultado, podemos fazer a seguinte

Observação 2.1 *Se G é um $\mathfrak{G}_6$-Grupo, então G é finito.*

De fato, sendo $\{M_i \ ; \ 1 \leq i \leq 6\}$ uma cobertura maximal para G com interseção D tal que $D_G = 1$. Temos, pelo resultado acima, que $|G : D| < \infty$. Como o número de conjugados de D é dado por $|G : N_G(D)| < \infty$. Concluímos que $|G| = |G : D_G| < \infty$.

Desde que exista um grupo G que tenha uma n-cobertura ($n > 2$) irredundante com interseção livre de núcleo, repetindo o argumento da observação acima, obtemos que $|G| < \infty$.

Agora vamos provar dois lemas e uma proposição que antecedem nosso principal resultado nesta seção.

Muitos dos resultados a serem provados neste trabalho usará o

Lema 2.1 *Seja $\Gamma = \{H_i\ ;\ 1 \leq i \leq m\}$ uma cobertura irredundante de um grupo G cuja interseção dos membros é D.*

(a) *se p é um primo, x um p-elemento de G e $|\{i\ ;\ x \in H_i\}| = n$, então $x \in D$ ou $p \leq m - n$.*

(b) $\bigcap_{j \neq i} H_j = D$ *para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$.*

(c) *se $\bigcap_{i \in S} H_i = D$ e $|S| = n$, então $|\bigcap_{i \in T} H_i : D| \leq m - n + 1$ sempre que $|T| = n - 1$.*

(d) *se Γ é maximal e U é um subgrupo abeliano normal minimal de G. Então, se $|\{i\ ;\ U \subseteq H_i\}| = n$, $U \subseteq D$ ou $|U| \leq m - n$.*

Demonstração: *Suponha que $G = H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_m$ é irredundante. Seja S um subconjunto próprio, não-vazio, do conjunto $Z = \{1, 2, ..., m\}$ dos m primeiros inteiros positivos. Escreva*

$$H_S = \bigcap_{i \in S} H_i$$

e para $i \in Z$ escrevemos H_i em vez de $H_{\{i\}}$.

Afirmação: *Existe um subconjunto $T \neq \emptyset$ do complementar de S em Z tal que para algum $g_t \in G$ ($t \in T$), obtemos*

$$H_S = \bigcup_{t \in T} g_t H_{S \cup \{t\}} \qquad (*)$$

De fato, seja $u \in Z \setminus S$. Se $H_S = H_{S \cup \{u\}}$, então a afirmação é imediata: simplesmente escolha $T = \{u\}$ e $g_u = 1$. Se não, pela irredundancia da cobertura, existe $a \in H_u$ tal que $a \notin H_i$ para $i \neq u$. Agora, para cada $b \in H_S \setminus H_{S \cup \{u\}}$ existe $t \in Z \setminus S \cup \{u\}$ para o qual $a^{-1}b \in H_t$, pois se

$a^{-1}b \in H_u$, então $b = a(a^{-1}b) \in H_u$, o que não é verdade. Analogamente, $a^{-1}b \notin H_S$. Assim, temos que $a^{-1}b \in H_t$ para $t \notin S \cup \{u\}$ e portanto $b \in aH_t$ para $t \notin S \cup \{u\}$, ou seja,

$$H_S \setminus H_{S\cup\{u\}} \subseteq \bigcup_{t\notin S\cup\{u\}} aH_t \qquad (**)$$

Agora, note que

$$aH_t \cap H_S \neq \emptyset \text{ implica } aH_t \cap H_S = g_tH_{S\cup\{t\}},\ \exists g_t \in H_S \qquad (***)$$

com efeito, seja $x \in aH_t \cap H_S$, então $x \in aH_t$ e $x \in H_S$. Daí, $aH_t = xH_t$ e $xH_S = H_S$. Logo, $aH_t \cap H_S = (xH_t) \cap (xH_S) = x(H_t \cap H_S) = xH_{S\cup\{t\}}$. Dessa forma, tome $x = g_t$ e $(***)$ fica justificado.

Segue também que

$$H_S \setminus H_{S\cup\{u\}} \subseteq \bigcup_{t\in T_1} g_tH_{S\cup\{t\}}$$

Agora, podemos concluir a verificação de $(*)$, veja:

$g_tH_{S\cup\{t\}} = g_t(H_S \cap H_t) \subseteq g_tH_S = H_S$, pois $g_t \in H_S$, donde

$$\bigcup_{t\in T_1\cup\{u\}} g_tH_{S\cap\{t\}} \subseteq H_S$$

Por outro lado,

$$H_S = (H_S \setminus H_{S\cup\{u\}}) \cup H_{S\cup\{u\}} \subseteq \Big(\bigcup_{t\in T_1} g_tH_{S\cup\{t\}}\Big) \cup H_{S\cup\{u\}} = \bigcup_{t\in T_1\cup\{u\}} g_tH_{S\cup\{t\}}$$

onde $g_u = 1$.

Portanto,

$$H_S = \textstyle\bigcup_{t\in T} g_tH_{S\cup\{t\}},\ \text{onde } T = T_1 \cup \{u\}$$

Isso prova a nossa afirmação inicial.

Com a afirmação acima provada, vamos demonstrar os itens propostos pelo lema.

(a). *Seja $S = \{i\ ;\ x \in H_i\}$, x um p-elemento de G e suponha que $x \notin D$ com $p > m-n$. Note que pelo menos uma das classes $g_tH_{S\cup\{t\}}$ é um subgrupo, a saber: aquela que contém o 1. Se tivermos algum $1 \leq i \leq p-1$ tal* *que* $x^i \in H_{S\cup\{t\}}$, *então* $x \in H_{S\cup\{t\}}$. *Com efeito,* $(i, |x|) = 1$ *implica que existem* $r, k \in \mathbb{Z}$ *tais que* $ri + k|x| = 1$. *Logo,*

$$x = x^{ri+k|x|} = x^{ri} = (x^i)^r \in H_{S\cup\{t\}}$$

pois $H_{S\cup\{t\}}$ *é subgrupo e* $x^i \in H_{S\cup\{t\}}$. *Assim,*

$$x \in H_{S\cup\{t\}} = H_S \cap H_t \subseteq H_t$$

o que não pode, uma vez que $t \notin S$. *Portanto, para* $1 \leq i \leq p-1$, x^i *pertence, no máximo, à união de* $m-n-1$ *classes* $g_t H_{S\cup\{t\}}$. *Dessa forma, para* $1 \leq j < i \leq p-1$, *existem* x^i *e* x^j *numa mesma classe* $g_t H_{S\cup\{t\}}$. *Daí,* $x^i H_{S\cup\{t\}} = x^j H_{S\cup\{t\}} \Rightarrow x^{i-j} \in H_{S\cup\{t\}}$, *recaindo na contradição acima. Logo, concluímos que* $x \in D$ *ou* $p \leq m-n$.

(b). *É claro que* $\bigcap\limits_{j\neq i} H_j \supseteq D$ *para todo* $i \in \{1, 2, ..., m\}$. *Assim, temos de verificar a inclusão contrária. Para isso, suponha que existe* $i \in \{1, 2, ..., m\}$ *tal que* $\bigcap\limits_{j\neq i} H_j \nsubseteq H_i$. *Isso nos fornece a existência de um* $a_j \in \bigcap\limits_{j\neq i} H_j \setminus D$. *Além disso, como a cobertura é irredundante, existe* $a_i \in H_i \setminus H_j$. *Portanto,* $a_i a_j \in G$ *implica* $a_i a_j \in H_i$ *ou* H_j. *Se* $a_i a_j \in H_i$, *então* $a_j = a_i^{-1}(a_i a_j) \in H_i$, *o que não é verdade. Analogamente,* $a_i a_j \notin H_j$. *Logo,* $\bigcap\limits_{j\neq i} H_j \subseteq D$ *para todo* $i \in \{1, 2, ..., m\}$.

(c). *Seja* $Z = \{1, 2, ..., m\}$. *Para* $\bigcap\limits_{i\in S} H_i = D$ *e* $|S| = n$, *mostraremos que*

$$|\bigcap_{i\in T} H_i : D| \leq m-n+1 \text{ sempre que } |T| = n-1$$

Com efeito, $\bigcap\limits_{i\in S} H_i = D \subset \bigcap\limits_{i\in T} H_i \Rightarrow T \subset S$, *como* $|T| = n-1 = |S|-1$, *segue que* $T = S \setminus \{s\}$ *para algum* $s \in S$. *Pela igualdade (*) de nossa afirmação, temos que existe*

$$\emptyset \neq L \subset Z \setminus T \ ; \ H_T = \bigcup_{l\in L} g_l H_{T\cup\{l\}}$$

Agora $|L| \leq |Z \setminus T| = m-(n-1) = m-n+1$ *e como* $H_{T\cup\{s\}} = H_S = D$, *temos que*

$$H_T = \bigcup_{l\in L} g_l D$$

consequentemente

$$|\bigcap_{i\in T} H_i : D| = |H_T : D| \leq |L| \leq m - n + 1$$

(d). *Seja $S = \{i;\, U \subseteq H_i\}$. Suponha que $U \nsubseteq D$ e $|U| > m - n$. De $U \nsubseteq D$ temos que existe $t \in Z \setminus S$ tal que $U \nsubseteq H_t$, onde $Z = \{1, 2, ..., m\}$. Pela igualdade $(*)$ de nossa afirmação, existe*

$$\emptyset \neq T \subset Z \setminus S\ ;\ H_S = \bigcup_{t\in T} g_t H_{S\cup\{t\}}$$

Como $U \subset H_S$ e H_S é a união de, no máximo, $m - n$ classes $g_t H_{S\cup\{t\}}$, segue que existem dois elementos $x \neq y$ em U tais que $x, y \in g_t H_{S\cup\{t\}}$, uma vez que $|U| > m - n$. Daí, $xH_{S\cup\{t\}} = yH_{S\cup\{t\}}$, donde $y^{-1}x \in H_{S\cup\{t\}} = H_S \cap H_t \subset H_t$ e sendo $U \leq G$ temos que $y^{-1}x \in U$. É claro que $G = UH_t$, pois $U \nsubseteq H_t \lessdot G$. Também, $U \cap H_t$ é um subgrupo normal de $UH_t = G$ e está contido em U, logo $U \cap H_t = U$ ou 1, como $U \nsubseteq H_t$, segue que $U \cap H_t = 1$. Mas, como $y^{-1}x \in U \cap H_t$, temos que $y = x$, absurdo. Logo, $U \subseteq D$ ou $|U| \leq m - n$.

$\square$

Observação 2.2 *Seja G um grupo.*

(a). *Se G tiver uma 3-cobertura com interseção D livre de núcleo, então G é um 2-grupo.*

De fato, pelo Lema 2.1(a) um $1 \neq x$ 3-elemento de G deve estar em D, pois do contrário $3 \leq 3 - n \leq 3 - 1 = 2$, uma vez que pelo menos um dos membros da cobertura contém x. Agora, se 3 divide $|G|$, então existe $g \in G$ tal que $|g| = 3$. Dessa forma, o subgrupo $X = \langle x\ ; |x| = 3^r\rangle \neq 1$, pois $g \in X$. Por outro lado, $X \trianglelefteq G$ e então $X \leq D$. Logo $X \leq D_G = 1 \Rightarrow X = 1$, absurdo. Portanto, 3 não divide $|G|$. Analogamente, nenhum primo p divide $|G|$ para $p \geq 5$. Portanto, G é um 2-grupo.

(b). *Se G tiver uma 4-cobertura (ou 5-cobertura) com interseção D livre de núcleo, então $|G| = 2^r 3^s$ com $r > 0$ ou $s > 0$.*

(c). *Se G tiver uma 6-cobertura com interseção D livre de núcleo, então $|G| = 2^r 3^s 5^t$ com $r > 0$, ou $s > 0$, ou $r > 0$.*

Lema 2.2 *Seja G um $\mathfrak{G}_6$-Grupo. Então*

1. *G não é um 2-grupo.*

2. *Se G é um 3-grupo, então $G \cong C_3 \times C_3 \times C_3$. Além disso $(C_3)^3$ é um $\mathfrak{G}_6$-Grupo.*

Demonstração:

1. *Suponha que $G = M_1 \cup ... \cup M_6$ é uma 6-cobertura maximal irredundante com interseção D livre de núcleo. Se G é um 2-grupo, então $\Phi(G) = G'G^2 \leq D$. Daí, $\frac{D}{G'} \leq \frac{G}{G'}$ abeliano, segue que $D \lhd G$. Portanto, $D = D_G = 1$. Logo, $D = 1$ e G é 2-abeliano elementar. Pelas partes (b) e (c) do Lema 2.1, temos que $|M_i \cap M_j \cap M_k \cap M_t| \leq 2$ para i, j, k, t distintos em $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ainda pelo fato de G ser 2-grupo e $M_i \lessdot G$, temos que $|G : M_i| = 2$, $|G| = |G : D| = |G : \bigcap_{i=1}^{5} M_i| \leq \prod_{i=1}^{5} |G : M_i| = 32$. Também, $|G| \geq 8$, pois do contrário, G não teria 6 subgrupos maximais. Portanto, $|G| = 8, 16,$ ou 32.*

   Se $|G| = 8$, $|M_i| = \frac{|G|}{2} = 4$ e para $i \neq j$ obtemos que $|G| = |M_i M_j| = \frac{|M_i||M_j|}{|M_i \cap M_j|} \Rightarrow |M_i \cap M_j| = \frac{16}{8} = 2$. Mas, $|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2| = 6$. Sendo a cobertura irredundante, existem $x_i \in M_i$ tal que $x_i \notin M_j$, $\forall\ j \neq i$. Dessa forma, $G = \bigcup_{i=1}^{6} M_i \supset (M_1 \cup M_2) \dot\cup \langle x_3 \rangle \dot\cup \langle x_4 \rangle \dot\cup \langle x_5 \rangle$. Logo, $8 = |G| > |M_1 \cup M_2| + |x_3| + |x_4| + |x_5| \geq 9$, o que não é verdade.

   Se $|G| = 16$, então $|M_i| = 8$ e $|M_i \cap M_j| = 4$. Como $|M_i \cap M_j \cap M_k|$ divide $|M_i \cap M_j| = 4$, segue que $|M_i \cap M_j \cap M_k| = 1,\ 2,$ ou, 4. Se $|M_i \cap M_j \cap M_k| = 2$, então $|M_i \cup M_j \cup M_k| = 14$ e pela irredundância, $16 = |G| \geq |\bigcup_{i=1}^{3} M_i| + |\dot\bigcup_{i=1}^{3} \langle x_i \rangle| \geq 17$, absurdo. Por maior razão, $|M_i \cap M_j \cap M_k| \neq 4$. Logo, a interseção de três M_is distintos é também trivial, que contraria o princípio da inclusão-exclusão aplicado a $|G| = |\bigcup_{i=1}^{6} M_i|$.

   Por fim, se $|G| = 32$, então $|M_i| = 16$, $|M_i \cap M_j| = 8$. Portanto, como $|G : M_i \cap M_j \cap M_k| \leq |G : M_i||G : M_j||G : M_k|$, segue que $|M_i \cap M_j \cap M_k| \geq 4$. Logo, $|M_i \cap M_j \cap M_k| = 4,\ 8,$ ou, 16. Se $|M_i \cap M_j \cap M_k| = 8$, *então* $|M_i \cup M_j \cup M_k| = 32$ *contrariando a irredundância da cobertura. Por motivo análogo,* $|M_i \cap M_j \cap M_k| = 16$ *não é possível. Portanto,* $|M_i \cap M_j \cap M_k| = 4$*. Lembrando que,* $|M_i \cap M_j \cap M_k \cap M_t| \leq 2$*, e portanto* $|M_i \cap M_j \cap M_k \cap M_t| = 1$ *ou* 2*. Se for* $|M_i \cap M_j \cap M_k \cap M_t| = 1$*, então, pelo princípio da inclusão-exclusão, obtemos que* $|M_i \cup M_j \cup M_k \cup M_t| = 31$ *e, pela irredundâcia da cobertura, teríamos que* $32 = |G| \geq |M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4| + |x_5| + |x_6| \geq 33$*, o que não pode. Se, porém,* $|M_i \cap M_j \cap M_k \cap M_t| = 2$*, aplicando o princípio da inclusão-exclusão a* $|G| = |\bigcup_{i=1}^{6} M_i|$*, obtemos que* $32 = |G| = 6 \times 16 - 15 \times 8 + 20 \times 4 - 15 \times 2 + 6 - 1 = 31$*, que é a contradição final.*

2. *Suponha que* G *seja um* 3*-grupo. Usando um argumento similar feito em (1) obtemos que* $D = 1$*,* G *é um* 3*-grupo abeliano elementar e* $|M_i \cap M_j \cap M_k \cap M_t| = 1$ *ou* 2*. Mas, como* G *é um* 3*-grupo segue que* $|M_i \cap M_j \cap M_k \cap M_t| = 1$*. Também,* $|G| = |G : \bigcap_{i=1}^{4} M_i| \leq \prod_{i=1}^{4} |G : M_i| = 81$*, pois* $|G : M_i| = 3$*. Note que* $|G| \geq 27$*, pois do contrário,* G *não teria seis subgrupos maximais. Assim,* $|G| = 27$*, ou* 81*.*

   Se $|G| = 81$*, então* $|M_i| = 27$ *e* $|M_i \cap M_j| = 9$*. Se tivéssemos* $|M_i \cap M_j \cap M_k| = 9$ *para algum trio* i*,* j*,* k *distintos, para* 1*,* 2 *e* 3 *digamos. Então* $M_1 \cap M_2 \cap M_3 = M_1 \cap M_2 \Rightarrow 1 = M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4 = M_1 \cap M_2 \cap M_4 \Rightarrow 81 = |G| = |G : M_1 \cap M_2 \cap M_4| \leq |G : M_1||G : M_2||G : M_4| = 27$*, absurdo. Então, a interseção de três* M_i*s distintos não pode ser de ordem* 9 *e, por motivo análogo, não é trivial. Portanto,* $|M_i \cap M_j \cap M_k| = 3$ *para todo trio* i*,* j*,* k *distintos em* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*. Isso nos conduziria a uma contradição, pois pelo princípio da inclusão-exclusão teríamos que* $|G| = 6 \times 27 - 15 \times 9 + 20 \times 3 - 15 \times 1 + 6 - 1 = 77$*.*

   Se, porém, $|G| = 27$*,* $G \cong C_3 \times C_3 \times C_3$*, pois* G *é* 3*-grupo abeliano elementar. Agora, usando o GAP* (2002)*, se* $G = \langle a, b, c \rangle$*, então*

$$G = \langle c, a^{-1}b \rangle \cup \langle a^{-1}c, b \rangle \cup \langle a^{-1}c, ab \rangle \cup \langle b^{-1}c, a \rangle \cup \langle ac, ab \rangle \cup \langle a^{-1}c, a^{-1}b \rangle$$

   é uma 6*-cobertura maximal irredundante com interseção livre de núcleo.*

□

Proposição 2.1 *Seja G um $\mathfrak{G}_6$-Grupo. Então G é um p-grupo se, e somente se, $G \cong C_5 \times C_5$ ou $G \cong (C_3)^3$.*

Demonstração: *Seja G um p-grupo tendo a propriedade $\mathfrak{G}_6$. Como $\Phi(G) = G'G^p \leq D$, segue que $D \lhd G$ e portanto $D = 1$ e G é um p-grupo abeliano elementar. Pelo Lema 2.1(a) $p = 2, 3,$ ou 5. Pelo Lema 2.2, G não pode ser 2-grupo e se G for 3-grupo então $G \cong C_3 \times C_3 \times C_3$. Logo, restanos analisar o caso em que $p = 5$. Ora, para $p = 5$, pelo Lema 2.1(a), todo $1 \neq x$ 5-elemento de G está somente em um M_i. Dessa forma $M_i \cap M_j = 1$ para $i \neq j$. Como $|G : M_i| = 5$, o 2^o Teorema dos Isomorfismos nos fornece $|G| = 25$. Portanto $G \cong C_5 \times C_5$, pois G é abeliano elementar. O Exemplo 2.1(b) completa a prova.* □

Agora vamos enunciar e provar nosso principal resultado deste capítulo, a saber:

Teorema 2.1 ***(Teorema A)*** *Um grupo G tendo uma 6-cobertura maximal irredundante com interseção livre de núcleo é nilpotente se, e somente se, $G \cong C_5 \times C_5$ ou $G \cong C_3 \times C_3 \times C_3$.*

Demonstração: *Suponha que G é um $\mathfrak{G}_6$-grupo nilpotente. Então $M_i \lhd G, \ \forall i = 1, 2, .., 6$ e assim:*

$$1 = D_G = \left(\bigcap_{i=1}^{6} M_i\right)_G = \bigcap_{i=1}^{6} M_{i_G} = \bigcap_{i=1}^{6} M_i = D$$

Sendo G nilpotente, é o produto direto dos seus subgrupos de Sylow. Como todo $P \in Syl_p(G)$ é subgrupo normal, temos que $\Phi(P) \leq \Phi(G) \leq D = 1$, ou seja, todo $P \in Syl_p(G)$ é abeliano elementar. Portanto, $G \cong (C_2)^i \times (C_3)^j \times (C_5)^k$, pois $|G| = 2^i.3^j.5^k$, pela Observação 2.2(c). Agora, em vista do Lema 1.3(a), cada 5-elemento não trivial de G pertence a um único M_i, pois $D = 1$. Assuma que 5 divide $|G|$, então existe $x \in G$ tal que $|x| = 5$. Pelo Exemplo 1.1(b) se existir um M_i de índice 2 ou 3 este contém x. Pelo Lema 2.1(a) e pela irredundancia da cobertura, existe no máximo um M_i tal que $|G : M_i| = 2$ ou 3. Daí, existe no mínimo cinco M_i de índice 5. Portanto, pelo Exemplo 1.1(a) $G \hookrightarrow (C_5)^5$. Logo, G é um 5-grupo e pela proposição anterior $G \cong C_5 \times C_5$.

Dessa maneira, podemos admitir que $G \cong (C_2)^i \times (C_3)^j$ com $i > 0$ e $j > 0$. Daí, por um raciocínio análogo ao feito no parágrafo anterior, temos *que todo* 2*-elemento de* G *está em* M_i *sempre que* $|G : M_i| = 3$. *Logo, pelo Lema* 2.1(a), *existem no máximo quatro* M_i*s de índice três. Então, existem no mínimo dois* M_i*s de índice* 2. *Se fosse exatamente dois* M_i*s de índice* 2, M_1 *e* M_2 *digamos. Teríamos que* $4 = |G : M_1 \cap M_2|$ *divide* $|G|$. *Por outro lado, aplicando o Exemplo* 1.1(a) *a* $M_2, ..., M_6$, *obtemos que* $|G|$ *divide* 2.3^j *uma vez que* $D_G = 1 = D = \bigcap_{i=2}^{6} M_i$. *Nos conduzindo ao absurdo de* 4 *dividir* 2.3^j. *Assim, existem no mínimo três* M_i*s de índice* 2. *Se existem exatamente quatro* M_i *de índice* 2, M_1, M_2, M_3, M_4 *digamos. Então pelas partes* (b) *e* (c) *do Lema* 2.1, *temos que* $|M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4| \leq 2$ *e, pelo Exemplo* 1.1(a) *aplicado a* M_1, M_2, M_3, M_4, *obtemos que* $|G : M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4|$ *divide* 2^4, *portanto* $|G|$ *divide* 2^k, *contrariando o fato de que* $|G : M_5| = 3$. *Se fossem cinco ou seis os* M_i*s de índice* 2, *o Exemplo* 1.1(a) *nos forneceria que* G *seria um* 2*-grupo, contrariando a primeira parte do Lema* 2.2. *Assim, deve existir exatamente três* M_i*s de índice 2,* M_1, M_2, M_3 *digamos. Pelo Lema* 2.1(a) *todo* 3*-elemento de* G *está no máximo em três* M_i*s, porém, pelo Exemplo* 1.1(b), *devemos ter que todo* 3*-elemento de* G *está em* $M_1 \cap M_2 \cap M_3$. *Portanto, se* $1 \neq x$ *é um* 3*-elemento em* G, *então* $x \notin M_4 \cup M_5 \cup M_6$. *Agora,* $M_j \in Syl_2(G)$ *para* $j = 4, 5, 6$ *e, sendo* G *abeliano* $M_4 = M_5 = M_6$. *Absurdo, pois a cobertura é irredundante.*

Portanto, podemos admitir que $G \cong (C_3)^j$ *e a proposição anterior completa a prova do teorema.* □

Capítulo 3

Grupos Semisimples

Neste capítulo, temos como principal objetivo, provar que um grupo G semisimples não tem a propriedade $\mathfrak{G}_6$. Dessa forma, nosso objetivo aqui é justificar que para caracterizarmos os grupos com a propriedade $\mathfrak{G}_6$, podemos sempre supor que esses grupos têm um subgrupo normal minimal abeliano.

Lembremos que um grupo G é dito ser semisimples, se seus únicos subgrupos normais abelianos são 1 e o próprio G.

Segue da definição acima que se G é solúvel e semisimpes, então $G \cong C_p$. De fato, todo $U \cdot \trianglelefteq G$ é p-abeliano elementar, pois G é solúvel. Sendo G semisimples, segue que $U = G$ e portanto $|G| = p$.

Vamos neste capítulo adotar as seguintes convenções:

- G é um grupo semisimples;
- $\{M_i;\ 1 \leq i \leq 6\}$ é uma 6-cobertura maximal irredundante com interseção D livre de núcleo para G;
- Para cada $1 \leq i \leq 6$ temos que $\alpha_i = |G : M_i|$, com $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4 \leq \alpha_5 \leq \alpha_6$.

Feitas essas considerações, vamos demonstrar o Teorema B. Antes disso, provaremos alguns lemas necessários.

Lema 3.1 *Sejam H um grupo finito, $Q < H$ e $H_1, H_2, ..., H_k$ subgrupos de H com $|H : H_i| = \beta_i$ onde $\beta_1 \leq \beta_2 \leq ... \leq \beta_k$. Se $H = Q \cup H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_k$, então $\beta_1 \leq k$.*

Além disso, se $\beta_1 = k$, então $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = ... = \beta_k$ e $H_i \cap H_j \leq Q$, $\forall i \neq j$.

Demonstração: *O conjunto $H - Q$ pode ser expresso como a união:*

$$H - Q = (H_1 - Q) \cup (H_2 - Q) \cup ... \cup (H_k - Q) \qquad (*)$$

Seja $|H : Q| = \mu$. Teremos então $|Q| = \frac{1}{\mu}|H|$, e daí

$$|H - Q| = |H|\Big(1 - \frac{1}{\mu}\Big) \qquad (**)$$

Além disso, perceba que $|H_i : H_i \cap Q| \leq \mu$. Veja, se $x, y \in H_i$ são tais que $x(H_i \cap Q)$ e $y(H_i \cap Q)$ são classes distintas, teremos $y^{-1}x \notin Q$ e então xQ e yQ são distintas em $H : Q$ donde concluímos que não pode haver mais que μ classes em $H_i : H_i \cap Q$. Deste último fato, concluímos que $|H_i \cap Q| \geq \frac{1}{\mu}|H_i|$, o que implica

$$|H_i - Q| = |H_i| - |H_i \cap Q| \leq |H_i|\Big(1 - \frac{1}{\mu}\Big) = |H|\Big(1 - \frac{1}{\mu}\Big)\frac{1}{\beta_i} \quad (***)$$

Aplicando as equações $(***)$ e $(**)$ à expressão $(*)$ teremos:

$$\begin{gathered}
|H - Q| \leq |H_1 - Q| + |H_2 - Q| + ... + |H_k - Q| \\
\Rightarrow |H|\Big(1 - \frac{1}{\mu}\Big) \leq |H|\Big(1 - \frac{1}{\mu}\Big)\Big(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + ... + \frac{1}{\beta_k}\Big) \\
\Rightarrow 1 \leq \Big(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + ... + \frac{1}{\beta_k}\Big) \leq \frac{k}{\beta_1} \\
\Rightarrow \beta_1 \leq k
\end{gathered}$$

Isso prova a primeira parte do lema. Caso $\beta_1 = k$, as desigualdades propostas acima devem se tornar igualdades. Para isso devemos ter $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_k = k$, e os conjuntos $H_i - M$ devem ser dois a dois disjuntos, ou seja:

$$\emptyset = (H_i - Q) \cap (H_j - Q) = (H_i \cap H_j) - Q$$

donde concluímos que $H_i \cap H_j \leq Q$. □

Lema 3.2 *Sejam $i \neq j$ pertencentes a $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ então $M_i \cap M_j \leq M_1$ e $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 5$*

Demonstração: *Suponha que $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 4$. Então, pelo Exemplo 1.2(a)*

$$\frac{G}{(M_1)_G}, \frac{G}{(M_2)_G} \lesssim S_4 \Rightarrow \frac{G}{(M_1)_G} \times \frac{G}{(M_2)_G} \lesssim S_4 \times S_4$$

Por outro lado, o homomorfismo $\varphi\colon G \to \dfrac{G}{(M_1)_G} \times \dfrac{G}{(M_2)_G}$ *dado por* $\varphi(g) = (g(M_1)_G, g(M_2)_G)$, *nos fornece que*

$$\frac{G}{(M_1)_G \cap (M_2)_G} \cong Im(\varphi) \leq \frac{G}{(M_1)_G} \times \frac{G}{(M_2)_G}$$

Daí, podemos considerar

$$\frac{G}{(M_1)_G \cap (M_2)_G} \hookrightarrow S_4 \times S_4$$

Se $(M_1)_G \cap (M_2)_G = 1$, *então* G *seria grupo solúvel, contrariando a semisimplicidade de* G.

Se $(M_1)_G \cap (M_2)_G \neq 1$, *pelo Exemplo* 1.1(*b*), *todo* $1 \neq x \in G$ 5-*elemento está em* $(M_1)_G \cap (M_2)_G$. *Pelo Lema* 1.3(*a*) $x \in D$, *pois do contrário, apenas um* M_i *conteria* x *e daí* $M_1 = M_2$. *Dessa forma,* $|G| = 2^a.3^b$. *De fato, pela Observação* 2.2(*c*) $|G| = 2^a.3^b.5^c$. *Se* $c > 0$, *então* 5 *divide* $|G|$. *Logo, existe* $g \in G$ *tal que* $|g| = 5$, *donde* $X = \langle x \in G;\ |x| = 5^j \rangle \neq 1$, *por outro lado* $X \trianglelefteq G$ *uma vez que o conjugado de um* 5-*elemento é um* 5-*elemento. Como* $X \leq D$, *segue que* $X \leq D_G = 1$, *absurdo. Logo,* $c = 0$ *e portanto* $|G| = 2^a.3^b$. *Pelo Teorema de Burnside* G *é solúvel, contrariando a semisimplicidade de* G.

Portanto, podemos assumir que $\alpha_2 \geq 5$ *e pelo Lema* 3.1 $\alpha_2 \leq 5$. *Assim* $\alpha_2 = 5$ *e, novamente pelo Lema* 3.1:

$$M_i \cap M_j \leq M_1 \text{ sempre que } i, j \geq 2 \text{ e } i \neq j, \text{ e } \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 5$$

Finalizando nossa demonstração. □

Lema 3.3 $D = M_2 \cap M_3 \cap M_4$.

Demonstração: *Aplicando o Lema* 2.1(*b*) *e o Lema* 3.2, *obtemos*

$$D = \bigcap_{i=1}^{6} M_i = \bigcap_{i=1}^{5} M_i = \bigcap_{i=2}^{5} M_i \qquad (I)$$

e pelo Lema 2.1(*c*), $|M_1 \cap M_2 \cap M_3 : D| \leq 6 - 4 + 1 = 3$ *e pelo Lema* 3.2

$$|M_2 \cap M_3 : D| \leq 3 \qquad (II)$$

Por outro lado, o Lema 2.1(*c*) *implica que* $|\bigcap_{i=1}^{4} M_i : D| \leq 2$ *e , pelo Lema* 3.2, $|M_2 \cap M_3 \cap M_4 : D| \leq 2$, *ou seja,* $|M_2 \cap M_3 \cap M_4 : D| = 1$ *ou* 2.

Se $|M_2 \cap M_3 \cap M_4 : D| = 2$, *como* $|M_2 \cap M_3 \cap M_4 : D|$ *divide* $|M_2 \cap M_3 : D|$, *segue por* (II) *que* $|M_2 \cap M_3 : D| = 2$. *Assim,* $M_2 \cap M_3 \cap M_4 = M_2 \cap M_3$. *Ora, esta última igualdade poderia ser obtida, de forma análoga, trocando* M_4 *por* M_5 *ou* M_6. *Diante dessas informações e de* (I) *podemos deduzir que*

$$D = \bigcap_{i=1}^{6} M_i = \bigcap_{i=1}^{5} M_i = \bigcap_{i=2}^{5} M_i = M_2 \cap M_3 \cap M_5 = M_2 \cap M_3$$

que é absurdo, pois $|M_2 \cap M_3 : D| = 2$.

Logo, $|M_2 \cap M_3 \cap M_4 : D| = 1$ *finalizando nossa demonstração.* $\square$

Por conveniência deixamos para apresentar neste capítulo o seguinte resultado

Proposição 3.1 *Sejam* N, M *subgrupos de* H. *Se* $N \trianglelefteq H$ *e* $N \leq M$, *então*

$$\left(\frac{M}{N}\right)_{\left(\frac{H}{N}\right)} = \frac{M_H N}{N}$$

Demonstração: *Dado* $h \in H$, *temos*

$$\left(\frac{M}{N}\right)^{hN} = h^{-1}N(M/N)hN = \{h^{-1}N(mN)hN;\ m \in M\} = \{(h^{-1}mh)N;\ m \in M\} = \frac{M^h N}{N}$$

Logo,

$$\left(\frac{M}{N}\right)_{\frac{H}{N}} = \bigcap_{h \in H} \left(\frac{M}{N}\right)^{hN} = \bigcap_{h \in H} \left(\frac{M^h N}{N}\right) = \frac{\bigcap_{h \in H} M^h N}{N} = \frac{M_H N}{N}$$

$\square$

Definição 3.1 *Dizemos que um grupo finito* H *é primitivo, quando existe um* $M \lessdot H$ *tal que* $M_H = 1$.

Corolário 3.1 *Seja* H *um grupo finito. Então* $\dfrac{H}{M_H}$ *é primitivo, para todo* $M \lessdot H$.

Demonstração: *De fato, temos que* $M_H \lhd H$ *e* $M_H \leq M$, *pela proposição acima*

$$\left(\frac{M}{M_H}\right)_{\left(\frac{H}{N}\right)} = \frac{M_H M_H}{M_H} = \overline{1}$$

É claro que

$$\frac{M}{M_H} \lessdot \frac{H}{M_H}, \textit{ sempre que } M \lessdot H$$

Assim, $\dfrac{H}{M_H}$ *é primitivo pois contém um subgrupo maximal cujo núcleo normal é trivial.*

$\square$

Antes de enunciarmos a próxima proposição, considere $O_p(G)$ como sendo o maior p-subgrupo normal do grupo G. Por exemplo, para $G = A_4$ temos que $O_2(A_4) = V$, onde V é o subgrupo Klein e $O_3(A_4) = 1$. Fixada a notação, vamos provar a nossa

Proposição 3.2 ***(Ore-Baer)***: *Seja G um grupo finito com $O_p(G) \neq 1$ para algum p primo. Se existe $M \lessdot G$ tal que $M_G = 1$, fazendo $L = O_p(G), |L| = p^n$, obtemos:*

(a) *L é p-abeliano elementar.*

(b) *M é complemento de L, ou seja, $G = ML$ e $M \cap L = 1$.*

(c) *L é normal minimal de G.*

(d) *$C_G(L) = L$ e L é o único normal minimal de G.*

Demonstração:

(a) ***L é p-abeliano elementar.***

Sendo $M \lessdot G$, segue que $\Phi(G) \leq M$. Como $\Phi(G) \trianglelefteq G$, então:

$$\Phi(G) \leq M^g,\ \forall g \in G \Rightarrow \Phi(G) \leq M_G = 1$$

Agora, $L \trianglelefteq G$ implica $\Phi(L) \leq \Phi(G) = 1$. Ou seja, L é p-abeliano elementar.

(b) ***M é complemento de L, ou seja, $G = ML$ e $M \cap L = 1$.***

Note que $L \nleq M$, pois do contrário teríamos $L \leq M_G = 1$ o que não é verdade. Portanto $G = ML$, pois $M \lessdot G$. Agora, sendo $L \trianglelefteq G$ temos que $M \cap L \lhd M$ e sendo L abeliano temos que $M \cap L \trianglelefteq L$. Logo, $M \cap L \lhd ML = G$. Lembrando que M_G é o maior normal de G contido em M, devemos ter $M \cap L \leq M_G = 1$.

(c) ***L é normal minimal de G.***

Seja $K \trianglelefteq G$ com $K \leq L$. Então $KM = M$ ou $KM = G$. Se $KM = M$ então $K \leq M \cap L = 1$, ou seja, $K = 1$. Se $KM = G$, usando a Lei de Dedekind:

$$L = G \cap L = KM \cap L = K(M \cap L) = K1 = K$$

Conclusão: L é normal minimal de G.

(d) $C_G(L) = L$ ***e*** L ***é o único normal minimal de*** G**.**

Como L é abeliano, segue que $L \leq C_G(L)$. Além disso, $L \trianglelefteq G$ implica $C_G(L) \trianglelefteq G$. Assim, $M \cap C_G(L) \trianglelefteq M$ e $L \subseteq N_G(M \cap C_G(L))$. Daí, $M \cap C_G(L) \trianglelefteq ML = G$ e como $M_G = 1$ é o maior normal de G contido em M, segue que $M \cap C_G(L) = 1$. Pela Lei de Dedekind obtemos:

$$C_G(L) = G \cap C_G(L) = ML \cap C_G(L) = L(M \cap C_G(L)) = L1 = L$$

Seja agora $N \cdot\!\trianglelefteq G$ com $N \neq L$. Então $N \cap L = 1$ e $[N, L] \leq N \cap L = 1$, onde $[N, L] = \langle [n, l];\ n \in N,\ l \in L \rangle$. Portanto, $N \leq C_G(L) = L$, o que não é verdade.

□

Proposição 3.3 *Não existe subgrupo de S_5 com ordem 15, 30 e 40.*

Demonstração: *Vamos dividir a demonstração nas três afirmações em destaque abaixo:*

Não existe subgrupo de ordem 15 *:*

Como, a menos de isomorfismos, C_{15} é o único subgrupo de ordem 15 e S_5 não possui elemento de ordem 15, segue que não existe subgrupo de S_5 de ordem 15.

Não existe subgrupo de ordem 30 *:*

Se existisse $H < S_5$ com ordem 30, então $HA_5 = S_5$ pois A_5 é simples. Logo, pelo 2^o Teorema dos Isomorfismos

$$\frac{S_5}{A_5} \cong \frac{H}{H \cap A_5}$$

o que nos a contradição de que $|H \cap A_5| = 15$.

Não existe subgrupo de ordem 40 *:*

Suponha que exista $H < S_5$ com ordem 40. Então $|S_5 : H| = 3$ e a ação $\varphi : S_5 \to S_{S_5:H}$ tal que $\varphi(g)(xH) = gxH$, nos fornece pelo 1^o Teorema dos Isomorfismos:

$$\frac{S_5}{H_G} \cong Im(\varphi) \leq S_3 \qquad (*)$$

Agora, por um lado H_G é um subgrupo normal de S_5. Então H_G só pode ser 1, A_5 e S_5, pois esses são os únicos subgrupos normais de S_5. Por outro lado, H_G é um subgrupo de H. Logo, $H_G = 1$ e por $(*)$ teríamos que $S_5 \leq S_3$, absurdo.

□

Proposição 3.4 *Os únicos subgrupos primitivos de S_5 com ordem divisível por 5 são C_5, $C_5 \rtimes C_2$, $C_5 \rtimes C_4$, A_5 e S_5.*

Demonstração: *Seja H um subgrupo primitivo de S_5 com ordem divísivel por 5. Analisemos dois casos:*

Caso 1 $H \leq A_5$

Como $|A_5| = 2^2.3.5$, então $|H| \in \{5, 10, 15, 20, 30, 60\}$. Pela Proposição anterior $|H|$ não pode ser 15 nem 30. Se $|H| = 5$, então $H \cong C_5$ e nesse caso $1 \lessdot H$. Se $|H| = 10$, então $H \cong C_5 \times C_2$ ou $H \cong C_5 \rtimes C_2$. Mas $H \cong C_5 \times C_2$ significaria que H seria abeliano. Pelo Teorema de Cauchy, existem $x, y \in H$ tais que $|x| = 5$ e $|y| = 2$ e como esses elementos comutam teríamos que $xy \in S_5$ com $|xy| = 10$ o que não é possível. Portanto, $|H| = 10$ implica $H \cong C_5 \rtimes C_2$. Note que nesse caso $C_2 \lessdot H$ e não sendo C_2 normal em H temos que $(C_2)_H = 1$. Agora, $|H| \neq 20$ tendo em vista que A_5 não tem subgrupo de ordem 20 e uma verificação disso pode ser feita de forma inteiramente análoga a prova da terceira afirmação da proposição anterior. Se $|H| = 60$, então $H \cong A_5$ e nesse caso $M_H = 1$ para todo $M \lessdot A_5$ uma vez que A_5 é um grupo simples.

Caso 2 $H \nleq A_5$

Note que $A_5 \cap H \neq 1$, pois do contrário, o 2^o Teorema dos Isomorfismos nos forneceria que:

$$\frac{S_5}{A_5} \cong \frac{H}{A_5 \cap H} \ ou \ |H : A_5 \cap H| = 2$$

e daí, $|H| = 2$ o que contraria a hipótese de $|H|$ ser múltiplo de 5. Portanto, $P \in Syl_5 H$ está contido em $A_5 \cap H$. Se for $P = A_5 \cap H$ então $|H| = 10$, donde $H \cong C_5 \rtimes C_2$. Se, porém, $P \subsetneq A_5 \cap H$, devemos analisar os possíveis valores para $|A_5 \cap H : P|$.

Se $|A_5 \cap H : P| = 2$, então

$$|H| = |H : A_5 \cap H||A_5 \cap H| = 2|A_5 \cap H : P||P| = 20$$

donde afirmamos que $H \cong C_5 \rtimes C_4$. De fato, temos que o único 5-subgrupo de Sylow de H é $P = O_5(H) \cong C_5$ e sendo H primitivo existe $M \lessdot H$ tal que $M_H = 1$. Daí, a Proposição 3.2 nos fornece que $C_H(P) = P$ e pelo NC-Lema temos que:

$$\frac{H}{P} = \frac{N_H(P)}{C_H(P)} \lesssim Aut(P) \cong C_4$$

como $|P| = 5$, segue que $|H : P| = 4$ e portanto $H \cong C_5 \rtimes C_4$, pois se $C_4 \lhd H$, então $H \cong C_5 \times C_4$ deveria ter um elemento de ordem 10, o que não pode ocorrer.

Se $|A_5 \cap P : P| = 3$, então $|H| = 30$ e a proposição anterior nos diz que essa possibilidade não pode ocorrer.

Se $|A_5 \cap P : P| = 6$, então $|H| = 60$. Absurdo, pois $A_5 \neq G$.

Se $|A_5 \cap P : P| = 12$, então $|H| = 120$. Logo, $H \cong S_5$ concluindo assim a nossa demonstração.

□

Lema 3.4 *Para todo $i \geq 2$, $(M_i)_G \neq 1$.*

Demonstração: *Suponha que $(M_i)_G = 1$ para algum $i \geq 2$. Então $G = \frac{G}{(M_i)_G}$ é, pelo Exemplo 1.2(a) e Corolário 3.1, um subgrupo primitivo de S_5 com ordem divisível por 5, uma vez que $|G : M_i| = 5$ para todo $i \geq 2$, pelo Lema 3.2. Portanto, pela Observação 3.1, temos os dois casos:*

Caso 1: *$G \cong C_5$, $G \cong C_5 \rtimes C_2$, ou $G \cong C_5 \rtimes C_4$;*

Neste caso, G seria solúvel em vista do Teorema de Burnside. Absurdo, pois G é semisimples.

Caso 2: *$G \cong A_5$, ou $G \cong S_5$.*

Este caso também não é possível, pois pelo Lema 7 de Cohn [7], $\sigma(A_5) = 10$ e $\sigma(S_5) = 16$. Uma vez que sendo G um $\mathfrak{G}_6$-grupo deveria ser $\sigma(G) \leq 6$.

$\square$

Lema 3.5 *Existe um $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ tal que $\dfrac{G}{(M_i)_G} \cong A_5$ ou S_5.*

Demonstração: *Suponha que para todo $i \neq 1$,*

$$\frac{G}{(M_i)_G} \ncong A_5 \text{ e } \frac{G}{(M_i)_G} \ncong S_5.$$

Pelo Lema 3.1, $|G : M_i| = 5$ sempre que $i \geq 2$. Além disso, pelo Corolário 3.1 e Exemplo 1.2(a) temos que

$$\frac{G}{(M_i)_G} \text{ é um subgrupo primitivo de } S_5 \text{ divisível por } |G : M_i| = 5.$$

Daí, segue da Proposição 3.3 que

$$\frac{G}{(M_i)_G} \cong C_5,\ C_5 \rtimes C_2, \text{ ou } C_5 \rtimes C_4 \qquad (*)$$

Por $(*)$ e pelo Teorema de Burnside, $\dfrac{G}{(M_i)_G}$ é solúvel.

Agora, o Lema 3.3 nos fornece que

$$(M_2)_G \cap (M_3)_G \cap (M_4)_G = D_G = 1.$$

Aplicando o Exemplo 1.1(a) aos subgrupos $(M_2)_G, (M_3)_G, (M_4)_G$, obtemos

$$G \hookrightarrow \frac{G}{(M_2)_G} \times \frac{G}{(M_3)_G} \times \frac{G}{(M_4)_G}$$

Portanto, G é solúvel, contrariando sua semisimplicidade. $\square$

Lema 3.6 *Se U é um subgrupo normal minimal de G, então $U \cong A_5$.*

Demonstração: *Admita que U é um subgrupo normal minimal de G. Note que $U \nleq D$, pois do contrário $U \leq D_G = 1$. O Lema 2.1(b), nos diz que podemos ver D como a interseção a seguir*

$$D = M_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap M_5 \cap M_6$$

daí, podemos supor que $U \nleq M_2$. Sendo $U \cap (M_2)_G$ subgrupo normal de G contido em U, segue que

$$U \cap (M_2)_G = 1 \quad ou \quad U \cap (M_2)_G = U$$

pois U é normal minimal. Como $U \nleq M_2$, devemos ter $U \cap (M_2)_G = 1$. Pelo Lema 3.2, $|G : M_2| = 5$. Agora, tendo em vista o Exemplo 1.2(a) e o Corolário 3.1, observamos que

$\dfrac{G}{(M_2)_G}$ *é um subgrupo primitivo de S_5 com ordem divisível por $|G : M_2| = 5$.*

Portanto, a Proposição 3.4 nos diz que

$$\overline{G} := \frac{G}{(M_2)_G} \cong C_5,\ C_5 \rtimes C_2,\ C_5 \rtimes C_4,\ A_5,\ ou,\ S_5$$

Afirmação: $\overline{U} := \dfrac{U(M_2)_G}{(M_2)_G} \cong U$ *é normal minimal em $\overline{G}$.*

De fato, suponha que

$$\frac{N}{(M_2)_G} \trianglelefteq \overline{G} \text{ é tal que } \overline{1} \leq \frac{N}{(M_2)_G} \leq \frac{U(M_2)_G}{(M_2)_G}$$

donde $N \trianglelefteq G$ e $N \leq U(M_2)_G$ nos fornecendo

$$N = N \cap U(M_2)_G = (N \cap U)(M_2)_G \qquad (\#)$$

Mas, sendo $N \cap U$ normal em G contido em U, então $N \cap U = 1$ ou $N \cap U = U$ pois U é normal minimal. Se $N \cap U = 1$, por (#) temos que

$$N = (M_2)_G, \text{ e portanto } \frac{N}{(M_2)_G} = \overline{1}.$$

Se, porém, $N \cap U = U$, por (#) teremos

$$N = U(M_2)_G, \text{ e portanto } \frac{N}{(M_2)_G} = \frac{U(M_2)_G}{(M_2)_G}.$$

Agora, pelo 2^o Teorema dos Isomorfismos

$$\frac{U}{(M_2)_G} \cong \frac{U}{U \cap (M_2)_G} = U$$

pois $U \cap (M_2)_G = 1$. Concluindo a prova da nossa afirmação.

Sendo assim, devemos analisar os cinco casos a seguir:

Caso 1 $\overline{G} \cong C_5$.

Neste caso, $U \cong \overline{U} \cong C_5$.

Caso 2 $\overline{G} \cong C_5 \rtimes C_2$.

Neste caso, $U \cong \overline{U} \cong C_5$, *pois do contrário existiria* $\overline{N} \cdot\trianglelefteq \overline{G}$ *tal que* $\overline{N} = \langle x \rangle$, $|x| = 2$. *Logo, para* $1 \neq y \in \overline{U}$, *temos que* $C_5 = \langle y \rangle \trianglelefteq \overline{G}$. *Portanto,* $xy \in \overline{G}$ *com* $|xy| = 10$. *Absurdo, pois* $\overline{G} \leq S_5$.

Caso 3 $\overline{G} \cong C_5 \rtimes C_4$.

Por um argumento análogo ao caso anterior, obtemos $U \cong \overline{U} \cong C_5$.

Caso 4 $\overline{G} \cong A_5$.

Neste caso, $U \cong \overline{U} \cong A_5$, *pois* A_5 *é simples.*

Caso 5 $\overline{G} \cong S_5$.

Neste caso, $U \cong \overline{U} \cong A_5$, *pois* A_5 *é o único subgrupo normal próprio, não trivial, de* S_5.

De acordo com os cinco casos acima, temos que $U \cong C_5$ *ou* $U \cong A_5$. *Mas,* G *é semisimples, portanto* $U \cong A_5$. □

Agora estamos em condições de provar nosso principal resultado deste capítulo que é o

Teorema 3.1 ***(Teorema B)*** *Um grupo* G *semisimples não tem uma* 6*-cobertura maximal irredundante com interseção* D *livre de núcleo.*

Demonstração: *Suponha* G *com a propriedade* $\mathfrak{G}_6$ *e analisemos os dois casos a seguir:*

Caso 1 *Suponha que existem dois subgrupos maximais, digamos* M_2, M_3 *tal que* $(M_2)_G \cap (M_3)_G \neq 1$.

Existe $N \cdot\trianglelefteq G$ *contido em* $(M_2)_G \cap (M_3)_G$, *pois este é um subgrupo normal, não trival, de* G. *Agora, pelo Lema* 2.1(*a*) *todo* 5*-elemento de* N *pertence a* D, *pois do contrário,* $M_2 = M_3$ *o que não pode, por causa da irredundancia da cobertura. Daí, se* 5 *divide* $|N|$, *então existe* $x \in N$ *tal que* $|x| = 5$. *Logo, o subgrupo* $X = \langle x \in N;\ |x| = 5^n \rangle \neq 1$ *e é normal em* G. *Também,* $X \leq D$ *e portanto* $X \leq D_G = 1$, *absurdo. Logo,* $5 \nmid |N|$ *e por motivo análogo,* $p \nmid |N|$ *para todo* $p > 5$. *Assim,* $|N| = 2^a.3^b$, *pelo Teorema de Burnside,* N *é solúvel, contrariando a semisimplicidade de* G. *Logo, este caso não é possível.*

Caso 2 *Para cada i, $j \geq 2$, $i \neq j$, temos que* $(M_i)_G \cap (M_j)_G = 1$.

Pelo Lema 3.4*, cada* $(M_i)_G \neq 1$ *sempre que* $i \geq 2$*, contém um subgrupo* $N_i \cdot \trianglelefteq G$. *Como* $(M_i)_G \cap (M_j)_G = 1$*, segue que os* $N_i s$ *são dois a dois distintos. Portanto,* $N_i \cap N_j = 1$ *e,* $|N_2 N_3| = |N_2||N_3|$. *Também,* $N_2 N_3 \cap N_4 = 1$ *e,* $|N_2 N_3 N_4| = |N_2||N_3||N_4|$. *Prosseguindo o raciocínio e usando o Lema* 3.6*, obtemos que* $|G| \geq |N_2 N_3 N_4 N_5 N_6| = |N_2||N_3||N_4||N_5||N_6| = 60^5$.

Por outro lado, o Lema 3.2 *nos fornece que* $|G : M_2| = 5 = |G : M_3|$. *Pelo Exemplo* 1.2*(a),*

$$\frac{G}{(M_2)_G} \times \frac{G}{(M_3)_G} \lesssim S_5 \times S_5 \qquad (*)$$

Como $(M_2)_G \cap (M_3)_G = 1$*, pelo Exemplo* 1.1*(a) e de* $(*)$*, obtemos que*

$$G \hookrightarrow S_5 \times S_5 \Rightarrow |G| \leq 5!5! = 60^2.4$$

Portanto, chegamos ao seguinte absurdo

$$60^5 \leq |G| \leq 60^2.4$$

Logo, este caso não é possível.

Conclusão: não existe subgrupo semisimples com a propriedade $\mathfrak{G}_6$. □

Capítulo 4

Caracterização dos $\mathfrak{G}_6$-grupo

Vimos no capítulo anterior que para caracterizar os grupos com a propriedade $\mathfrak{G}_6$, é suficiente analisarmos os grupos não-semisimples e este é o nosso objetivo neste capítulo.

Nosso principal resultado, o Teorema C, consiste de vários casos, e em cada um deles devemos considerar alguns subgrupos de $S_3 \times S_3 \times S_3$, $S_4 \times S_4$ e $S_5 \times S_5$.

Definição 4.1 *Um grupo G é um produto subdireto de uma família de grupos $\{G_i;\ i \in I\}$, quando existe uma família de subgrupos normais $\{N_i;\ i \in I\}$ de G tais que $\bigcap_{i \in I} N_i = 1$ e $\dfrac{G}{N_i} \cong G_i$ para todo $i \in I$.*

Faremos uso do programa GAP-groups para provarmos o

Lema 4.1 *:*

1. *Não são $\mathfrak{G}_6$-grupos:*

   (a). $S_3 \times S_3 \times S_3$ *e* $C_2 \times C_3 \times S_3$*;*

   (b). *Todos os subgrupos de* $S_3 \times S_3 \times S_3$ *de ordem* 72 *ou* 108*;*

   (c). *Todos os subgrupos de* $S_4 \times S_4$ *de ordem* 48 *ou* 96*.*

2. *São $\mathfrak{G}_6$-grupos:*

   (d). $G \cong (C_5 \times C_5) \rtimes C_2$ *com* $Z(G) = 1$*. Neste caso, uma cobertura maximal irredundante com interseção D livre de núcleo para G é tal que* $|D| = 2$ *;*

(e). $G \cong (C_5 \times C_5) \rtimes C_4$ *com* $Z(G) = 1$. *Neste caso, uma cobertura maximal irredundante com interseção* D *livre de de núcleo para* G *é tal que* $|D| = 4$.

3. *Um produto subdireto* G *de três grupos simétricos* S_3 *é um* $\mathfrak{G}_6$*-grupo se, e somente se,* G *é isomorfo a um dos seguintes grupos:* $(C_3 \times C_3) \rtimes C_2$, $(C_3)^3 \rtimes C_2$, *onde a ordem da interseção* D*, livre de núcleo, de uma* 6*-cobertura maximal irredundante tem ordem, respectivamente, igual a* 1 *e* 2.

Demonstração: No programa GAP-groups [9], podemos escrever uma função h cuja entrada é um grupo G qualquer e a saída $h(G)$ é a exibição de todas as 6-coberturas maximais irredundante com interseção livre de núcleo. Se o grupo G não tiver a propriedade $\mathfrak{G}_6$ então $h(G)$ exibirá uma lista vazia. O algoritmo da função h está redigido abaixo:

$h :=$ function(G) local

S, M, n, C, i, T, Q, R;

$n :=$ Size(G); $M :=$ MaximalSubgroups(G); $C :=$ Combinations($M, 6$);

$S := [\ ]$; for i in $[1..Size(C)]$ do if

Size($Union(C[i])$) $= n$ then Add($S, C[i]$); fi;

od; $T := [\ ]$; for i in

$[1..Size(S)]$ do if Size($Core(G, Intersection(S[i]))$) $= 1$ then

Add($T, S[i]$); fi;

od; $R := [\ ]$; for i in $[1..Size(T)]$ do

$Q :=$ Combinations($T[i], 5$); if

(n in List($Q, i- > Size(Union(i))$)) = false then Add($R, T[i]$); fi; od;

return R; end;

Para verificar o item 1.(a)., usando a função h descrita acima, no ambiente do GAP-groups siga os seguintes passos:

Passo 1 Defina uma variável que identificará o grupo S_3

Uma maneira de fazer isso no ambiente GAP é

$$s3 := Group((1,2),(1,2,3));$$

lembre que todo elemento de S_3 pode ser expresso como produto do dois ciclo $(1,2)$ com o 3-ciclo $(1,2,3)$) - Quando pressionarmos enter observaremos abaixo de $s3 := Group((1,2),(1,2,3));$ a seguinte expressão

$$Group([(1,2),(1,2,3)])$$

significando que o grupo S_3 é gerado, pelo 2-ciclo $(1,2)$ juntamente com o 3-ciclo $(1,2,3)$, ou seja, $S_3 = \langle (1,2),(1,2,3) \rangle$.

Pronto, a variável $s3$ identificará o grupo S_3.

Passo 2 Defina uma variável que identificará o produto direto $S_3 \times S_3 \times S_3$

Uma maneira de fazer isso no ambiente GAP é

$$G := DirectProduct(s3, s3, s3);$$

significando que a variável G está identificando o produto direto $S_3 \times S_3 \times S_3$. Ao pressionarmos enter, abaixo de $G := DirectProduct(s3, s3, s3);$, aparecerá

$$Group([(1,2),(1,2,3),(4,5),(4,5,6),(7,8),(7,8,9)])$$

nos dizendo que

$$S_3 \times S_3 \times S_3 = \langle (1,2),(1,2,3),(4,5),(4,5,6),(7,8),(7,8,9) \rangle$$

Pronto, a variável G identificará o grupo $S_3 \times S_3 \times S_3$.

Passo 3 Verificar a saída $h(G)$

Primeiro redija o algoritmo da função h no ambiente GAP e depois pressione enter. Ao fazer isso aparecerá

$$function(G)...end$$

Agora, digite $h(G);$ e pressione enter. Ao fazer isso aparecerá, abaixo de $h(G);$, a lista vazia [ ]. Significando que o grupo $S_3 \times S_3 \times S_3$ identificado pela variável G não possui a propriedade $\mathfrak{G}_6$.

De forma análoga, prova-se que o grupo $C_2 \times C_3 \times S_3$ não possui a propriedade $\mathfrak{G}_6$. No entanto, podemos fazer uma prova disso, de uma forma mais objetiva. Consiste de "carregar a função h"no ambiente GAP e depois digitar $h(DirectProduct(CyclicGroup(IsPermGroup,2),CyclicGroup(IsPermGroup,3),SymmetricGroup(3)));$ pressione enter e teremos como resultado a lista vazia [ ].

Vamos agora provar as partes (b) e (c) do item 1 usando a função h. Isso será feito em três passos. Veja:

Passo 1 Identificar o grupo S_3 e produto direto $S_3 \times S_3 \times S_3$

Basta seguir os passos 1 e 2 na prova do item 1.(a).

Passo 2 Listar todas as classes conjugadas dos subgrupos de $S_3 \times S_3 \times S_3$ de ordem 72

Uma maneira de fazer isso no ambiente GAP é

$$Filtered(ConjugacyClassesSubgroups(G), c{-}{>}\ Order(c[1]) = 72);$$

ao pressionarmos enter abaixo do comando acima aparecerá

$$[Group([(7,8,9),(1,2,3),(8,9),(5,6),(2,3)])\hat{\ }G,$$

$$Group([(1,2,3),(4,6,5),(8,9),(5,6),(2,3)])\hat{\ }G,$$

$$Group([(7,8,9),(4,6,5),(8,9),(5,6),(2,3)])\hat{\ }G\ ]$$

que é a lista requerida neste passo.

Passo 3 Verificar a saída da função h aplicada aos três representantes das classes acima

Redija o algorítmo da função h no ambiente GAP e pressione enter. Agora é só digitar:

$$\text{h}([Group([(7,8,9),(1,2,3),(8,9),(5,6),(2,3)]));\qquad (*)$$

Feito isso pressione enter e abaixo de $(*)$ aparecerá [ ]. O mesmo ocorrerá com os representantes das outras classes. Isso nos diz que:

Subgrupos de $S_3 \times S_3 \times S_3$ de ordem 72 não são $\mathfrak{G}_6$-grupo

De forma análoga prova-se o restante da parte (b) do item 1 e a parte (c) do mesmo item.

Provaremos agora o item 2 partes (d) e (e). Faremos a prova apenas da parte (d) desse item uma vez que a outra parte é análoga. Vamos fazer isso em três passos:

Passo 1 Listar todos os grupos de ordem 50

Uma maneira de fazer isso é consultando a biblioteca do GAP através do comando:

$$AllGroups(50);$$

que lista todos os grupos de ordem 50. Ao pressionarmos enter aparecerá:

<pc group of size 50 with 3 generators>,

<pc group of size 50 with 3 generators>,

<pc group of size 50 with 3 generators>,

<pc group of size 50 with 3 generators>,

<pc group of size 50 with 3 generators>

significando que existem cinco grupos de ordem 50.

Passo 2 Selecionar os grupos de ordem 50 que tem centro trivial e ver a estrutura deles.

Para isso, indentificamos o comando $AllGroups(50)$ uma variálvel, como abaixo:

$$l := AllGroups(50)$$

Depois seliconamos os grupos desejados através do comando a seguir:

$$l := Filtered(l, x-> Size(Center(x)) = 1);$$

ao pressionarmos enter aparecerá:

<pc group of size 50 with 3 generators>,

<pc group of size 50 with 3 generators>

significando que dos cinco grupos de ordem 50, apenas dois tem centro trivial.

Para verificarmos a estrutura desses grupos identificamos eles, respectivamente, da seguinte forma

$$a := l[1]; \text{ e } b := l[2];$$

feito disso, usamos o seguinte comando:

$$StructureDescription(a);$$

$$StructureDescription(b);$$

ao pressionar enter, aparecerá, respectivamente, abaixo de cada um deles:

"D50" e "(C5 x C5) : C2"

significando que a estrutura do grupo identificado pela variável a é D_{50} o grupo diedral de ordem 50 e que o grupo identificado pela variálvel b é $(C_5 \times C_5) \rtimes C_2$.

Passo 3 Verificar que $(C_5 \times C_5) \rtimes C_2$ é um $\mathfrak{G}_6$-grupo e que a interseção D de uma 6-cobertura que satisfaz a propriedade $\mathfrak{G}_6$ tem ordem 2

Primeiro "carregamos" a função h e depois fazemos o comando $Size(h(b))$; ao pressionarmos enter aparecerá, abaixo de $Size(h(b))$;, o número 25. Isso significa que para o grupo $(C_5 \times C_5) \rtimes C_2$, identificado pela variável b no passo anterior, existem vinte e cinco 6-cobertura que satisfazem a propriedade $\mathfrak{G}_6$. Agora, para verificarmos que a interseção D de qualquer uma das vinte e cinco 6-cobertura tem ordem 2 fazemos a identificação $list := h(b);$; e depois executamos o comando abaixo:

$$Size(Filtered(list, sub{-}{>}\ Size(Intersection(sub)) = 2));$$

pressionamos enter e aparecerá o número 25 que era o esperado.

Dessa forma, temos uma prova para o item 2.

Resta-nos provar o item 3. Para isso devemos calcular o produto subdireto de três grupos simétricos S_3. Isso pode ser feito no ambiente GAP usando o comando

$$SubdirectProducts(G1, G2);$$

que é o produto subdireto dos grupos $G1$ e $G2$. No nosso caso, identificamos o grupo S_3 pela variável $s3$ como no Passo 1 na prova do item 1.(a). Depois fazemos a seguinte identificação:

$$l := SubdirectProducts(s3, s3);$$

que é o produto subdireto de S_3 com S_3. Ao pressionarmos enter aparecerá:

$$Group([(1,2)(4,5),(1,2,3)(4,5,6)]),$$

$$Group([(1,2),(2,3),(4,5),(5,6)]),$$

$$Group([(1,2,3),(4,5,6),(2,3)(5,6)])$$

Os grupos acima representam os possíveis produtos direto de S_3 com S_3. Podemos identificá-los, respectivamente, da seguinte forma:

$$H1 := l[1]; \quad H2 := l[2]; \quad H3 := l[3];$$

Agora, para determinarmos o produto subdireto desejado devemos fazer o comando:

$$SubdirectProducts(Hi, s3);$$

para cada $i = 1, 2, 3$. Quando fazemos o comando:

$$L := SubdirectProducts(H1, s3);$$

ao pressionarmos enter aparecerá:

$$Group([(1,2)(4,5)(7,8),(1,2,3)(4,5,6)(7,8,9)]),$$

$$Group([(2,3)(5,6),(1,3)(4,6),(7,8),(8,9)]),$$

$$Group([(1,2,3)(4,5,6),(7,8,9),(2,3)(5,6)(8,9)])$$

Vamos identificar os grupos acima, respectivamente, como segue:

$$L1 := L[1]; \quad L2 := L[2]; \quad L3 := L[3];$$

Quando fazemos o comando:

$$b := SubdirectProducts(H2, s3);$$

ao pressionarmos enter aparecerá:

$$Group([(5,6),(4,6),(2,3)(8,9),(1,2,3)(7,9,8)]),$$

$$Group([(5,6),(4,6),(2,3),(1,2)(4,5),(7,8),(8,9)]),$$

$$Group([(5,6),(4,6),(1,2,3),(7,8,9),(2,3)(8,9)]),$$

$$Group([(4,5,6),(2,3),(1,2),(7,8,9),(5,6)(8,9)]),$$

$$Group([(4,5,6),(2,3)(5,6),(1,2)(4,5),(7,8,9),(5,6)(8,9)]),$$

$$Group([(2,3),(1,3),(5,6)(8,9),(4,5,6)(7,9,8)])$$

podemos identificar os grupos acima, respectivamente, como segue:

$$L4 := b[1];\ L5 := b[2];\ L6 := b[3];\ L7 := b[4];\ L8 := b[5];\ L9 := b[6];$$

Quando fazemos o comando:

$$d := SubdirectProducts(H3, s3);$$

ao pressionarmos enter aparecerá:

$$Group([(4,5,6),(2,3)(5,6)(8,9),(1,2,3)(7,9,8)]),$$

$$Group([(4,5,6),(2,3)(5,6),(1,2)(4,6),(7,8),(8,9)]),$$

$$Group([(4,5,6),(1,2,3),(7,8,9),(2,3)(5,6)(8,9)]),$$

$$Group([(1,2,3),(2,3)(5,6)(8,9),(4,5,6)(7,9,8)]),$$

$$Group([(1,2,3)(4,5,6),(2,3)(5,6)(8,9),(4,6,5)(7,9,8)])$$

identifiquemos os grupos acima, respectivamente, como segue:

$$L10 := d[1];\ L11 := d[2];\ L12 := d[3];\ L13 := d[4];\ L14 := d[5];$$

Dessa forma, temos que todos os produtos semidireto de três grupos simétricos S_3 pode ser entendido como o conjunto $S = \{Li; 1 \leq i \leq 14\}$.

Agora, carregamos a função h e verificamos quais dos Lis em S tem a propriedade $\mathfrak{G}_6$. Fazendo o comando $Size(h(Li))$; para cada $i \in \{1, 2, ..., 14\}$ observamos que:

$$\text{"}Size(h(Li)) = 0\text{" para } i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,11\}$$

significando que nenhum dos grupos Li com $i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,11\}$ é um $\mathfrak{G}_6$-grupo. Porém,

$$\text{"}Size(h(Li)) = 234\text{" para } i \in \{3,10,13,14\} \text{ e "}Size(h(L12)) = 6318\text{"}$$

significando que os grupos Li para $i \in \{3,10,13,14\}$ é um $\mathfrak{G}_6$-grupo com 234 6-cobertura com a propriedade $\mathfrak{G}_6$ assim como $L12$ é um $\mathfrak{G}_6$-grupo com 6318 6-cobertura com tal propriedade. Podemos ver a estrutura dos grupos Lis que são $\mathfrak{G}_6$-grupo através do comando

$$StructureDescription(Li);$$

Com esse comando verificamos que:

$$\text{"}StructureDescription(Li) = (C_3 \times C_3) \rtimes C2\text{" para } i \in \{3,10,13,14\}$$

$$\text{"}StructureDescription(L12) = (C_3 \times C_3 \times C_3) \rtimes C2\text{"}$$

Finalmente, ao fazermos o comandos:

$listj := f(Lj);$; e $Size(Filtered(listj, sub- > Size(Intersection(sub)) = 1));$

para cada $j \in \{3,10,13,14\}$ ao pressionarmos enter aparecerá o número 234. Isso significa que a interseção D de uma cobertura qualquer dos Ljs é trivial. Analogamente, vemos que a interseção D de qualquer uma das 6318 6-cobertura com a propriedade $\mathfrak{G}_6$ para o grupo $L12$ tem ordem igual a 2. A recíproca é feita identificando os grupos

$$(C_3 \times C_3) \rtimes C_2 \text{ e } (C_3 \times C_3 \times C_3) \rtimes C_2 \qquad (*)$$

que tenham a propriedade $\mathfrak{G}_6$ e isso pode ser feito de maneira análoga ao procedimento da prova do item 2. E para saber se tal grupo é subgrupo do produto subdireto de três grupos simétricos S_3 basta usar o comando

$$IsSubgroup(G, H);$$

que ao pressionado enter tem como saída true se $H \leq G$ e false se $H \nleq G$. Onde para nós o H seria os grupos em $(*)$ e o G seria o produto semidireto de três grupos simétricos S_3.

$\square$

Lema 4.2 *Seja N um subgrupo normal próprio de um grupo finito G. Sejam $U_1, ..., U_h$ subgrupos próprios de G contendo N e $V_1, ..., V_k$ subgrupos tais que $V_iN = G$ com $|G : V_i| = \beta_i$ e $\beta_1 \leq ... \leq \beta_k$. Se $G = U_1 \cup ... \cup U_h \cup V_1 \cup ... \cup V_k$, então $\beta_1 \leq k$.*

Ademais, se $\beta_1 = k$, então $\beta_1 = ... = \beta_k = k$ e $V_i \cap V_j \leq U_1 \cup ... \cup U_h$, $\forall i \neq j$.

Demonstração: *Como $U_i < G$ para cada $i = 1, 2, ..., h$, então:*

$$|U_i| = \frac{|G|}{|G : U_i|} = \alpha_i |G|$$

Analogamente, temos:

$$\begin{array}{rcccl}
|U_i \cap U_j| & = & \dfrac{|G|}{|G : U_i \cap U_j|} & = & \alpha_{ij}|G| \\
|U_i \cap U_j \cap U_k| & = & \dfrac{|G|}{|G : U_i \cap U_j \cap U_k|} & = & \alpha_{ijk}|G| \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
|U_1 \cap ... \cap U_h| & = & \dfrac{|G|}{|G : U_i \cap ... \cap U_h|} & = & \alpha_{12...h}|G|
\end{array}$$

onde $\alpha_i = \dfrac{1}{|G : U_i \cap U_j|}$, $\alpha_{ij} = \dfrac{1}{|G : U_i \cap U_j|}$, ..., $\alpha_{12...h} = \dfrac{1}{|G : U_i \cap ... \cap U_h|}$.
Daí, pelo princícpio da inclusão-exclusão, obtemos que:

$$\begin{aligned}
|U_1 \cup ... \cup U_h| &= \sum_{i=1}^{h} |U_i| + \sum_{i<j=1}^{h} |U_i \cap U_j| + ... + (-1)^h |U_1 \cap ... \cap U_h| \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{h} \alpha_i + \sum_{i<j=1}^{h} \alpha_{ij} + ... + (-1)^h \alpha_{12...h}\Big)|G| \\
&= \gamma|G|
\end{aligned}$$

onde $\gamma = \sum_{i=1}^{h} \alpha_i + \sum_{i<j=1}^{h} \alpha_{ij} + ... + (-1)^h \alpha_{12...h}$.

Agora, como $NV_j = G$ $j = 1, 2, ..., k$ e $N \subset U_i$ $i = 1, 2, ..., h$. Então, para cada j fixado, temos:

$$|G| = |NV_j| = |V_j(U_1 \cup ... \cup U_h)| = \frac{|V_j||U_1 \cup ... \cup U_h|}{|V_j \cap (U_1 \cup ... \cup U_h)|}$$

Ou seja,

$$|V_j \cap (U_1 \cup ... \cup U_h)| = \frac{|V_j|}{|G|}|U_1 \cup ... \cup U_h| = \frac{1}{\beta_j}\gamma|G| = \frac{\gamma}{\beta_j}|G|$$

Logo,

$$|V_j \cap (U_1 \cup ... \cup U_h)| = \frac{\gamma}{\beta_i}|G|.$$

Note ainda que

$$\begin{aligned}
|V_j - (U_1 \cap ... \cap U_h)| &= |V_j - V_j \cap (U_1 \cap ... \cap U_h)| \\
&= |V_j| - |V_j \cap (U_1 \cap ... \cap U_h)| \\
&= \frac{|G|}{\beta_j} - \frac{\gamma}{\beta_j}|G| \\
&= \frac{1-\gamma}{\beta_j}|G|
\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
|V_1 \cup ... \cup V_k - U_1 \cup ... \cup U_h| &= |V_1 \cup ... \cup V_k \cup U_1 \cup ... \cup U_h - U_1 \cup ... \cup U_h| \\
&= |G - U_1 \cup ... \cup U_h| \\
&= |G| - |U_1 \cup ... \cup U_h| \\
&= |G| - \gamma|G| \\
&= (1-\gamma)|G|
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
(1-\gamma)|G| &= |V_1 \cup ... \cup V_k - U_1 \cup ... \cup U_h| \\
&= |(V_1 - U_1 \cup ... \cup U_h) \cup ... \cup (V_k - U_1 \cup ... \cup U_h)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{h} |V_i - U_1 \cup ... \cup U_h| \\
&= \sum_{i=1}^{h} \Big(\frac{1-\gamma}{\beta_i}\Big)|G| \\
&= (1-\gamma)|G|\Big(\frac{1}{\beta_1} + ... + \frac{1}{\beta_k}\Big)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$1 \leq \frac{1}{\beta_1} + ... + \frac{1}{\beta_k} \leq \frac{k}{\beta_1} \Rightarrow \beta_1 \leq k.$$

Se $\beta_1 = k$, as desigualdades acima viram igualdades, então $\beta_1 = ... = \beta_k = k$ e os conjuntos $V_i - U_1 \cup ... \cup U_h$ são dois a dois disjuntos, donde

$$\emptyset = (V_i - U_1 \cup ...U_h) \cap (V_j - U_1 \cup ... \cup U_h)$$

$$\emptyset = (V_i \cap V_j) - (U_1 \cup ... \cup U_h)$$

$$\Rightarrow V_i \cap V_j \subset U_1 \cup ... \cup U_h$$

$\square$

Observação 4.1 *Sejam G um grupo, $M \lessdot G$ e U um subgrupo abeliano normal minimal. Então, ou $U \leq M$ ou $U \cap M = 1$. Em particular, se G é um $\mathfrak{G}_6$-grupo, então pelo menos um dos M_is contém U.*

De fato, se $U \nleq M$, então $G = UM$. Mas, $U \cap M \trianglelefteq UM = G$ e está contido em U. Logo, $U \cap M = U$ ou 1. Como $U \nleq M$, então $U \cap M = 1$.

Em particular, suponha G tem a proprieda de $\mathfrak{G}_6$. Então, dado $1 \neq u \in U$, existe $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tal que $u \in M_i$. Dessa forma, $U \cap M_i \neq 1$, consequentemente $U \subseteq M_i$.

Proposição 4.1 *Se G é um $\mathfrak{G}_6$-grupo e G tem um subgrupo normal minimal de ordem 2, então $D = 1$ e $G \cong C_2 \times G_0$, onde $G_0 = (C_3 \times C_3) \rtimes C_2$ com $Z(G_0) = 1$ ou $G \cong C_2 \times C_2 \times S_3$.*

Demonstração: *Suponha que U é um subgrupo normal minimal de G com ordem 2. Então $U \nleq D$, pois se $U \leq D$, teríamos que $U \leq D_G = 1$. Pelo Lema 2.1(d), $2 = |U| \leq 6 - n \Rightarrow n \leq 4$, ou seja, existem no mínimo dois M_is que não contém U, digamos que seja $U \nleq M_5, M_6$. Como $U \cap M_i$ para $i = 5, 6$ é normal em $UM_i = G$ e está contido em U, temos que $U \cap M_i = 1$, pois $U \nleq M_i$, donde $|G : M_i| = 2 = |U|$ e $M_i \lhd G$. Pelo Exemplo 1.1(b), todo 5-elemento de G está em $M_5 \cap M_6$, mas então, pelo Lema 2.1(a), todo 5-elemento de G está em D, porque do contrário deveríamos ter $M_5 = M_6$, o que não é. Logo, $|G| = 2^a.3^b$ pois $D_G = 1$ e pelo Teorema de Burnside G é solúvel.*

Portanto, podemos admitir que existe $V \cdot\!\trianglelefteq G$, contido em $M_5 \cap M_6$. Logo, pelo Lema 2.1(d), temos que $|V| \leq 6 - 2 = 4$.

- *Se $|V| = 2$, então pelo Lema 2.1(d), $n \leq 6 - |V| = 4$, ou seja, pelo menos dois M_is não contêm V, digamos que seja $V \nleq M_3, M_4$. Portanto, $|G : M_3| = 2 = |G : M_4|$ e pelo Exemplo 1.1(b), todo 3-elemento de G está em $\bigcap_{i=3}^{6} M_i$, e portanto, em vista do Lema 2.1(a), está em D. Daí, não pode existir 3-elemento em G, donde G é um 2-grupo, contrariando o Lema 2.2(1).*

- *Se $|V| = 3$, então podemos supor que $V \nleq M_i$ para $i = 2, 3, 4$, portanto $G = VM_i$ e $|G : M_i| = 3$. Sendo $V \trianglelefteq G$, pelo NC-Lema,*
$$\frac{G}{C_G(V)} = \frac{N_G(V)}{C_G(V)} \lesssim Aut(V) \cong C_2$$

Portanto, $G = C_G(V)$ ou $|G : C_G(V)| = 2$. Se $G = C_G(V)$, então V é central. Note que

$$M_i \lhd G \text{ para } i = 2, 3, 4$$

com efeito, $\forall g \in G = VM_i$, existem $v \in V$ e $m \in M_i$ tais que $g = vm$. Portanto $M_i^g = M_i^{vm} = M_i^m = M_i$.

Agora, do Lema 2.1(b), deduzimos que

$$D = \bigcap_{i=2}^{6} M_i = \Big(\bigcap_{i=2}^{6} M_i\Big)_G = D_G = 1$$

pois $M_i \trianglelefteq G$ para $i = 2, 3, 4, 5, 6$. E do Exemplo 1.1(a), temos que

$$G \hookrightarrow \frac{G}{M_2} \times \frac{G}{M_3} \times \frac{G}{M_4} \times \frac{G}{M_5} \times \frac{G}{M_6} \cong C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_3 \times C_3$$

Daí, G é abeliano e então nilpotente. Pelo Teorema A, $G \cong (C_3)^3$ ou $G \cong C_5 \times C_5$. Absurdo, pois $2 = |G : M_6|$ divide $|G|$. Dessa maneira, $|G : C_G(V)| = 2$.

Afirmação *V e U estão contidos em M_1.*

Se $V \nsubseteq M_1$, então para $i = 1, 2, 3, 4$, temos que $G = V \rtimes M_i$. Pela Proposição 1.2, $C_G(V) = V(M_i)_G$. Segue do Exemplo 1.1(b) que todo 2-elemento de $C_G(V)$ está em $\bigcap_{i=1}^{4}(M_i)_G$, pois $|C_G(V) : (M_i)_G| = |V| = 3$. Agora, se $1 \neq v \in V$ e x é um 2-elemento de $C_G(V)$, então $vx \notin \bigcup_{i=1}^{4} M_i$, pois caso contrário, $vx \in M_i$ para algum $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, que implicaria em $v = (vx)x^{-1} \in M_i$, donde deveríamos ter $V \leq M_i$ o que não ocorre. Portanto, $vx \in M_5 \cup M_6$ e como $V \leq M_5 \cap M_6$, segue que $x \in M_5 \cup M_6$. Dessa forma x está em cinco M_is, pelo Lema 2.1(b), $x \in D$. Como $D_G = 1$, temos que $C_G(V)$ é um 3-grupo. Note ainda que $C_G(V) \trianglelefteq G$ implica $\Phi(C_G(V)) \leq \Phi(G) \leq D_G = 1$. Logo, $C_G(V)$ é um 3-grupo abeliano elementar. Mas, por um lado U sendo central deveríamos ter $U \leq C_G(V)$. Por outro, U não poderia ser subgrupo de $C_G(V)$, uma vez que $|U| = 2 \nmid 3^a$. Logo, $V \leq M_1$.

Se $U \nleq M_1$, então $G = UM_1$ e $|G : M_1| = |U| = 2$. Pelo Exemplo 1.1(b), todo 3-elemento de G esta em $M_1 \cap M_5 \cap M_6$. Por um argumento *similar ao do parágrafo anterior deduzimos que G deveria ser um 2-grupo, contrariando o Lema* 2.1(1). *Logo,* $U \leq M_1$. *Isso encerra a prova da nossa afirmação.*

Agora, tendo em vista que $|G : M_i| = 3$ *para* $i = 2, 3, 4$ *e* $|G : M_i| = 2$ *para* $i = 5, 6$, *pelos Exemplos* 1.1(a) *e* 1.2(a),

$$G \hookrightarrow C_2 \times C_2 \times S_3 \times S_3 \times S_3$$

logo, G é supersolúvel. Sendo $M_1 \lessdot G$, $|G : M_1| = 2$ *ou* 3. *Dessa forma, vamos analisar dois casos:*

Caso 1 $|G : M_1| = 2$.

Então $N := M_1 \cap M_5 \cap M_6 \cap (M_2)_G = 1$, *caso contrário, existiria* $H \cdot\!\trianglelefteq G$ *tal que* $H \leq N$, *pelo Lema* 2.1*(d)*, $|H| \leq 2$. *Logo* $|H| = 2$, *mas como* $|G : M_3| = 3$, *segue que* $H \leq M_3$, *donde* $H \leq N \cap M_3 = D \therefore N \leq D_G = 1$ *que contraria o fato de N ser normal minimal. Assim, pelos Exemplos* 1.1(a) *e* 1.2(a)

$$G \hookrightarrow C_2 \times C_2 \times C_2 \times S_3$$

Se $K := M_5 \cap M_6 \cap (M_2)_G \neq 1$ *sendo subgrupo normal, contém um subgrupo* $W \cdot\!\trianglelefteq G$. *Agora, como* $K \cap M_3 \cap M_4 \leq D$, $W \nsubseteq M_3 \cap M_4$. *Pelo Lema* 2.1($d$), $|W| \leq 3$, *como* $|W| = 2$ *implica em* $W \subseteq M_3 \cap M_4$, *segue que* $|W| = 3$ *e portanto,* $W \subseteq M_1$ *que é uma contradição devido ao Lema* 2.1(d). *Assim,* $K = 1$ *e*

$$G \hookrightarrow C_2 \times C_2 \times S_3 \qquad (*)$$

Pelo Teorema A, G não é nilpotente. Dessa forma, note que

$$\frac{G}{(M_i)_G} \cong S_3 \text{ para } i = 2, 3, 4$$

De fato, se fosse

$$\frac{G}{(M_i)_G} \lesssim H < S_3$$

como $|G : M_i| = 3$ *então* $|G : (M_i)_G| = 3$. *Tendo em vista que* $K_i = 1$, *seguiria que* $G \hookrightarrow C_2 \times C_2 \times C_3$ *o que não é verdade, pois G não é nilpotente.*

Agora, como $|G : (M_2)_G| = 6$, *então*

$$|G| = |G : (M_2)_G||(M_2)_G| = 6.|(M_2)_G| \qquad (**)$$

Daí, por $(*)$ $|(M_2)_G| = 2$ *ou* 4. *Se* $|(M_2)_G| = 2$*, segue por* $(**)$ *que* $|G| = 12$ *e como* G *não é nilpotente, segue de* $(*)$ *que* $G \cong C_2 \times S_3$. *Mas note que esse grupo não tem a propriedade* $\mathfrak{G}_6$ *e uma maneira de ver isso é aplicando* $C_2 \times S_3$ *na função* h *construída na demonstração do Lema* 4.1 *através do GAP [9]. Para isso, basta redigirmos o algoritmo da função* h *no ambiente GAP e pressionarmos enter. Feito isso, podemos digitar*

h(DirectProduct(SymmetricGroup(3),CyclicGroup(IsPermGroup,2)));

e pressionar enter. Veremos como saída [ ] *que é a lista vazia. Isso significa que* $C_2 \times S_3$ *não tem a propriedade* $\mathfrak{G}_6$. *Esta contradição nos leva a concluir que* $|(M_2)_G| \neq 2$. *Agora, se* $|(M_2)_G| = 4$ *então* $|G| = 24$. *Daí em vista de* $(*)$ *deduzimos que*

$$G \cong C_2 \times C_2 \times S_3.$$

Caso 2 $|G : M_1| = 3$

Então $(M_1)_G \cap (M_2)_G \cap M_5 = 1$*, caso contrário, existiria* $W \cdot\!\trianglelefteq G$ *nesta interseção. Pelo Lema* 2.1(*d*), $|W| \leq 3$. *Se* $|W| = 2$*, então* $W \subseteq M_3 \cap M_4$*, pois ambos têm índice* 3*, contrariando o próprio Lema* 2.1*(d). Analogamente, não pode ser* $|W| = 3$. *Portanto,*

$$G \hookrightarrow C_2 \times S_3 \times S_3 \ \text{ e } \ |G| \leq 72. \qquad (\#)$$

Para finalizar a análise da possibilidade de termos $|V| = 3$*, suponha que* $M_1 \lhd G$. *Então*

$$M_1 \cap (M_2)_G \cap M_5 = 1 \ \text{ e } G \hookrightarrow C_2 \times C_3 \times S_3.$$

Como $|G : M_2| = 3 = |G : M_1|$*, segue que* $|G : M_1 \cap M_2| = 9$ *e* $|G|$ *é múltiplo de* 9. *Além disso note que* $|G : M_5 \cap M_6| = 4$ *divide* $|G|$. *Logo* $|G| = 36$ *e portanto* $G = C_2 \times C_3 \times S_3$. *Desde que* $H := 1 \times C_3 \times 1$ *é um subgrupo central de* G *de ordem* 3*, temos pelo Lema* 2.1*(d) que* $|H| = 3 \leq 6 - n \Rightarrow n \leq 3$*, ou seja, existem três* M_is *com* $i \notin \{5, 6\}$*, tais que* $H \nleq M_i$*, daí* G *tem dois* M_is *normais de índice* 2 *e pelo menos três* M_is *normais de índice* 3. *Assim, seguiria do Exemplo* 1.1*(d) e de* $D_G = 1$*, que*

$$G \hookrightarrow C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_3 \times C_3$$

Absurdo, pois G seria abeliano, que não é verdade.

Assim, M_1 não é normal em G e $|G|$ é múltiplo de 36. *Se* $|G| = 72$, *então $G = C_2 \times S_3 \times S_3$ que não é possível, pois pelo Lema* $4.1(b)$ *esse grupo não tem a propriedade $\mathfrak{G}_6$. Daí, sendo G um $\mathfrak{G}_6$-grupo de ordem* 36 *e por* $(\#)$ *isomorfo a um subgrupo de $C_2 \times S_3 \times S_3$. Podemos afirmar que $G \cong C_2 \times G_0$, onde $G_0 = (C_3 \times C_3) \rtimes C_2$ com $Z(G_0) = 1$. Com efeito, vamos fazer isso usando o GAP-groups, tal verificação pode ser feita seguindo os seis passos abaixo:*

Passo 1 *Identificar o grupo $C_2 \times S_3 \times S_3$*

Identificando C_2 e S_3 respectivamente por

$$c2 := CyclicGroup(IsPermGroup, 2);$$

$$s3 := SymmetricGroup(3);$$

Podemos indentificar $C_2 \times S_3 \times S_3$ por

$$g := DirectProduct(c2, s3, s3);$$

Passo 2 *Listar todas as classes conjugadas dos subgrupos de $C_2 \times S_3 \times S_3$ com ordem* 36

Uma maneira de fazer isso é através do comando:

*Filtered(ConjugacyClassesSubgroups(g),c– >Order(c[1])=*36*);*

que quando pressionado enter exibirá

$$Group([(3,5,4),(6,8,7),(3,4),(1,2)])\,\hat{}G,$$

$$Group([(3,5,4),(6,8,7),(3,4),(1,2)(6,7)])\,\hat{}G,$$

$$Group([(3,5,4),(6,8,7),(6,7),(1,2)(3,4)])\,\hat{}G,$$

$$Group([(3,5,4),(6,8,7),(6,7),(3,4)])\,\hat{}G,$$

$$Group([(3,5,4),(6,8,7),(6,7),(1,2)])\,\hat{}G,$$

$$Group([(3,5,4),(6,8,7),(3,4)(6,7),(1,2)(6,7)])\,\hat{}G,$$

$$Group([(3,5,4),(6,8,7),(3,4)(6,7),(1,2)])\,\hat{}G$$

que é a lista requerida nesse passo.

Passo 3 *Verificar a saída da função h aplicada aos sete representantes das classes acima*

Basta redigirmos a função h escrita na prova do Lema 4.1 *e pressionarmos enter. Feito isso verifica-se que só existe uma única classe, a saber a classe do subgrupo:*

$$Group([(3,5,4),(6,8,7),(3,4)(6,7),(1,2)])$$

em que a saída não é a lista vazia $[\ ]$ *quando aplicado a função* h *aos subgrupos que constitui essa classe. Isso significa que os subgrupos de* $C_2 \times S_3 \times S_3$ *com ordem* 36 *que possui a propriedade* $\mathfrak{G}_6$ *são isomorfos ao grupo*

$$Group([(3,5,4),(6,8,7),(3,4)(6,7),(1,2)]) \qquad (*)$$

Esse grupo possui setenta e duas 6*-cobertura maximal irredundante com interseção livre de núcleo. E isso pode visto através do comando:*

$$Size(h(x));$$

onde x *é a variável que identifica o grupo da seguinte forma:*

$$x := Group([(3,5,4),(6,8,7),(3,4)(6,7),(1,2)]);$$

Passo 4 *Verificar que todas as setenta e duas* 6*-cobertura, mencionadas acima, têm interseção trivial*

Uma maneira de verificar isso é identificando as setenta e duas cobertura com a variável list, como segue:

list := h(x);;

Feito isso, redija o seguinte comando:

Size(Filtered(list,sub−>Size(Intersection(sub))=1));

pressione enter e aprecerá 72*. Isso significa que da lista das sententa e duas coberturas existem* 72 *coberturas com interseção trivial concluindo esse passo.*

Passo 5 *Ver a estrutura do grupo em* $(*)$*.*

Esse grupo já foi identificado no Passo 3 *acima pela variável* x*. Dessa maneira, façamos o seguinte comando:*

$$StructureDescription(x);$$

ao pressionarmos enter aperecerá:

$$"C2 \times ((C3 \times C3) : C2)"$$

significando que o grupo em $(*)$ *é*

$$G = C_2 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes C_2)$$

a menos de isomorfismo. Fazendo $G_0 = (C_3 \times C_3) \rtimes C_2$ *temos que* $G = C_2 \times G_0$*.*

Passo 6 *Verificar que $G = C_2 \times G_0$ é tal que $Z(G_0) = 1$.*

De maneira análoga ao Passo 2 vemos que

$$Group([(3,4,5),(6,7,8),(1,2)])\,\hat{}G,$$

$$Group([(3,4,5),(6,7,8),(3,4)(6,7)])\,\hat{}G,$$

$$Group([(3,4,5),(6,7,8),(1,2)(3,4)(6,7)])\,\hat{}G$$

é a lista de todas as classes conjugadas dos subgrupos de F que tem ordem 18. De maneira análoga ao Passo 4 vemos que a estrurura, de cada representante das classes acima, são respectivamente:

$$C_6 \times C_3$$

$$(C_3 \times C_3) \rtimes C_2$$

$$(C_3 \times C_3) \rtimes C_2$$

Só nos resta mostrar que o centro dos grupos representantes das segunda e terceira classe acima, contando de cima para baixo, é trivial. Para isso usaremos o comando Center. Digitemos

Center(Group([(3,4,5), (6,7,8), (3,4)(6,7)]));

ao presinonarmos enter aparecerá $Group(())$. Isso significa que o grupo acima tem centro trivial. O mesmo ocorrerá para o grupo $Group([(3,4,5),(6,7,8),(1,2)(3,4)(6,7)])$. Portanto:

$$G = C_2 \times G_0 \text{ é tal que } Z(G_0) = 1.$$

- *Se $|V| = 4$, novamente pelo Lema 2.1(d), $V \nsubseteq M_i$ para $i = 1,2,3,4$ e $|G : M_i| = 4$. Agora, aplicando o Lema 4.2, obtemos*

$$M_i \cap M_j \leq M_5 \cup M_6 \text{ para } i \text{ e } j \text{ distintos em } \{1,2,3,4\} \quad (\#\#)$$

Desde que $|G : M_i| = 4$ para $i = 1,2,3,4$, então $U \leq M_i$, caso contrário $4 = |G : M_i| = |U| = 2$. De (##) temos que $U \leq M_5 \cup M_6$, segue que $U \subseteq M_5$ ou $U \subseteq M_6$ pois $|U| = 2$. Mas então, U está contido em cinco M_is, portanto está contido em D devido ao Lema 2.1(b). Isso contraria a escolha de U, uma vez que $D_G = 1$.

□

Lema 4.3 *Seja G um $\mathfrak{G}_6$-grupo. Suponha que G tem um subgrupo normal de ordem 3 e nenhum de ordem 2. Então $G \cong (C_3 \times C_3) \rtimes C_2, (C_3)^3$ ou*

$(C_3)^3 \rtimes C_2$, *onde a ordem da interseção D livre de núcleo de uma* 6*-cobertura maximal irredundante é* 1*,* 1*, e,* 2*, respectivamente.*

Demonstração: *Suponha que U é um subgrupo normal de G com ordem* 3*. Então, pelo Lema* 2.1(*d*)*, temos que U esta contido no máximo em três M_is. Consequentemente, U não está contido em pelo menos três M_is. Dessa forma, podemos supor que U não está contido em M_i para $i = 4, 5, 6$.Portanto,*

$$G = UM_i \text{ e } |G : M_i| = 3 \text{ para } i = 4, 5, 6.$$

Agora, fazemos a seguinte

Afirmação $T = \bigcap_{i=1}^{3} (M_i)_G = 1$ *ou* $K = \bigcap_{i=4}^{6} (M_i)_G = 1$.

Suponha que $K := \bigcap_{i=4}^{6} (M_i)_G \neq 1$. *Então existe $V \cdot\!\trianglelefteq G$ contido em K. Pelo Lema* 2.1(*d*) $|V| \leq 3$*, como G não tem subgrupo normal de ordem* 2*, segue que* $|V| = 3$*. Dessa forma, $V \nsubseteq M_i$ para $i = 1, 2, 3$ e portanto*

$$G = VM_i \text{ e } |G : M_i| = 3 \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

Pelo Lema 4.2 *obtemos que*

$$M_i \cap M_j \subseteq M_4 \cup M_5 \cup M_6 \text{ para } i \neq j \in \{1, 2, 3\} \qquad (*)$$

Se fosse $T \neq 1$, então todo 3*-elemento x de T, pertenceria a pelo menos quatro M_is tendo em vista a inclusão em* $(*)$*. Pelo Lema*2.1(*a*) $x \in D$ *e como* $D_G = 1$*, segue que T é um* 2*-grupo. Agora, pelo Lema* 2.1(*d*)*, um subgrupo W normal minimal de G contido em T tem ordem igual a* 2 *ou* 3*. Sendo T um* 2*-grupo, concluiríamos que $|W| = 2$ contrariando a hipótese do lema. Logo, $T = 1$ e a nossa afirmação esta provada.*

Suponha que $K = 1$. Se $M_i \lhd G$ para algum $i \in \{4, 5, 6\}$, então $G = M_i \times U$ e pela Observação 1.2*,* $[U, M_i] = 1$ *para $i = 4, 5, 6$. Além disso, U é abeliano, pois tem ordem* 3*. Sendo assim*

$$g\bar{u} = \bar{u}g \text{ para todo } g \in G \text{ e } \bar{u} \in U.$$

Com efeito, dado $g \in G = UM_i$, existem $u \in U$ e $m \in M_i$ tais que $g = um$. Daí, para todo $\bar{u} \in U$, temos que

$$g\bar{u} = (um)\bar{u} = u(m\bar{u}) = u(\bar{u}m) = (u\bar{u})m = (\bar{u}u)m = \bar{u}(um) = \bar{u}g.$$

Isso nos diz que U central donde

$$M_i \lhd G \text{ para } i = 4, 5, 6.$$

De fato, dado $g = um \in G$ temos que

$$M_i^g = M_i^{um} = M_i^m = M_i.$$

Daí, pelo Exemplo 1.1(a)

$$G \hookrightarrow \frac{G}{M_4} \times \frac{G}{M_5} \times \frac{G}{M_6} \cong C_3 \times C_3 \times C_3$$

Logo, G é um 3-grupo e pelo Lema 2.2(2), $G \cong C_3 \times C_3 \times C_3$. Dessa forma, podemos supor que

$$M_i \text{ não é normal em } G \text{ para } i = 4, 5, 6.$$

Daí, $M_i \neq (M_i)_G$ para $i = 4, 5, 6$. Portanto,

$$|G : (M_i)_G| = |G : M_i||M_i : (M_i)_G| = 3.|M_i : (M_i)_G| > 3$$

Mas, pelo Exemplo 1.2(a)

$$\frac{G}{(M_i)_G} \lesssim S_3$$

Assim, $|G : (M_i)_G| > 3$ é um divisor de 6, ou seja, $|G : (M_i)_G| = 6$. Então, concluímos que

$$\frac{G}{(M_i)_G} \cong S_3 \quad com \quad \bigcap_{i=4}^{6} (M_i)_G = 1$$

Ou seja, G é o produto subdireto de três grupos simétricos S_3 que satisfaz a propriedade $\mathfrak{G}_6$. Daí, o Lema 4.1(3) completa esta parte da prova. Se $K \neq 1$, então $T = 1$ devido a nossa afirmação. Nesse caso, a prova do lema se concluirá por um raciocínio análogo ao caso em que $K = 1$. □

Lema 4.4 *Se G é um $\mathfrak{G}_6$-grupo e G tem um subgrupo normal minimal de ordem 4, então G é um subgrupo de $S_4 \times S_4$.*

Demonstração: *Suponha que U é um subgrupo normal minimal de G de ordem 4. Pelo Lema 2.1(d), U não esta contido em pelo menos quatro M_is, $U \not\leq M_3, M_4, M_5, M_6$, digamos. Logo, $G = UM_i$ e $|G : M_i| = 4$ para $i = 3, 4, 5, 6$.*

Afirmação *G não possui subgrupo normal de ordem igual a 2 ou 3.*

Se G tem um subgrupo normal de ordem 2, pela Proposição 4.1, devemos analisar duas possibilidades:

(a). $G \cong C_2 \times G_0$, *onde* $G_0 = (C_3 \times C_3) \rtimes C_2$

Como $U \cdot\!\trianglelefteq G$ *e* $G_0 \trianglelefteq G$, *segue que* $U \cap G_0 = 1$ *ou* U. *Se* $U \cap G_0 = 1$, *então* $2 = |G : G_0| = |U| = 4$, *absurdo. Se* $U \cap G_0 = U$, *então* $U \leq G_0$ *e* $4 = |U|$ *divide* $|G_0|$, *absurdo.*

(b). $G \cong C_2 \times C_2 \times S_3$.

Então G seria supersolúvel e portanto todo subgrupo normal minimal seu deveria ser de ordem prima, absurdo.

Assim, G não tem subgrupo normal de ordem 2.

Se G tem um subgrupo normal de ordem 3, *então o Lema* 4.3 *nos remete ao seguinte caso:*

(c). $G \cong (C_3 \times C_3) \rtimes C_2, (C_3)^3,$ *ou* $(C_3)^3 \rtimes C_2$.

Isto não é possível porque $|U| = 4$ *divide* $|G|$.

Isso prova a nossa afirmação.

Agora, se $K := (M_3)_G \cap (M_4)_G \neq 1$, *então existe* $W \cdot\!\trianglelefteq G$ *contido em* K. *Pelo Lema* 2.1(*d*) $|W| \leq 4$ *e pela afirmação acima,* $|W| = 4$. *Novamente pelo Lema* 2.1(*d*), *devemos ter* $W \nleq M_1, M_2, M_5, M_6$. *Então, para* $i \in \{1, 2, 5, 6\}$ *temos que* $G = WM_i$ *e* $|G : M_i| = 4$. *Daí, aplicando o Lema* 4.2, *obtemos*

$$M_i \cap M_j \subseteq M_3 \cup M_4 \text{ para } i \neq j \in \{1, 2, 5, 6\} \qquad (\#)$$

Note que $N := (M_i)_G \cap (M_5)_G \cap (M_6)_G = 1$ *para* $i = 3, 4$, *pois do contrário existiria* $J \cdot\!\trianglelefteq G$ *contido em* N. *Pelo Lema* 2.1(*d*), $|J| \leq 3$ *contrariando a escolha de J devido a nossa afirmação. Portanto,* $(M_5)_G \cap (M_6)_G = 1$, *porque se assim não fosse, deveria existir* $Q \cdot\!\trianglelefteq G$ *contido nesta interseção com* $|Q| = 4$. *Daí, teríamos de* (#) *que* $Q \subseteq M_3 \cup M_4$, *pela Observação* 4.1 $Q \subseteq M_3$ *ou* $Q \subseteq M_4$. *Portanto* $Q \subseteq N$ *o que não é verdade, pois* $N = 1$

Ora, $(M_5)_G \cap (M_6)_G = 1$ *nos dá, pelos Exemplos* 1.1(*a*) *e* 1.2(*a*) *que*

$$G \hookrightarrow S_4 \times S_4$$

Como queríamos mostrar. □

Proposição 4.2 *Não existe $\mathfrak{G}_6$-grupo que contenha um subgrupo normal minimal de ordem 4.*

Demonstração: *Suponha que G é um $\mathfrak{G}_6$-grupo tendo um subgrupo U normal minimal com $|U| = 4$. Pelo Lema 2.1(d), podemos supor que $U \nleq M_3, M_4, M_5, M_6$. Então*

$$G = UM_i \text{ e } |G : M_i| = 4 \text{ para } i = 3, 4, 5, 6.$$

Segue da Proposição 1.12 que $C_G(U) = U \times (M_i)_G$. Como $|C_G : M_i| = |U| = 4$ segue que todo 3-elemento de $C_G(U)$ esta em $\bigcap_{i=3}^{6}(M_i)_G$ e, portanto está em D, tendo em vista o Lema 2.1(a). Sendo $D_G = 1$, $C_G(U)$ é um 2-grupo abeliano elementar, uma vez que $C_G(U) \trianglelefteq G \Rightarrow \Phi(C_G(U)) \leq \Phi(G) \leq D_G = 1$. Note que para $i = 3, 4, 5, 6$, temos que $M_i \ntrianglelefteq G$, caso contrário $G = C_G(U)$, ou seja, G seria um 2-grupo o que não é possível devido ao Lema 2.2(1). Ademais $|(M_i)_G| = |C_G(U) : U| = 2^m$ e pelo Exemplo 1.2(a),

$$|G : (M_i)_G| \text{ divide } |S_4| = 2^3.3$$

como $|G : (M_i)_G| = |G : M_i||M_i : (M_i)_G| = 4.|M_i : (M_i)_G|$, segue que

$$|M_i : (M_i)_G| = 3 \text{ ou } 6,$$

pois do contrário teríamos que $|M_i : (M_i)_G| = 2$ e portanto

$$|G| = |G : (M_i)_G||(M_i)_G| = 2^n$$

e isso não é possível devido ao Lema 2.2(1). Sendo assim,

$$|G| = 2^m.3, \text{ para algum } m \geq 2.$$

Pelo Lema 4.4, $G \hookrightarrow S_4 \times S_4$. Além disso, S_4 não é tem a propriedade $\mathfrak{G}_6$. Com efeito, no ambiente GAP [9]), carregue a função h e teremos "$h(S_4) = [\ \ ]$". Dessa forma, temos que

$$G \nsubseteq S_4 \text{ e } G \subseteq S_4 \times S_4.$$

Afirmação: *Existe pelo menos dois subgrupos normais minimais de ordem 4 em G.*

Com efeito, fazendo $S_4 \times S_4 = LK$ com $L = S_4 \times 1 \cong S_4$, $K = 1 \times S_4 \cong S_4$. Então $G \cap L \neq 1$, pois se fosse $G \cap L = 1$, teríamos

$$|GL| = |G||L| = 2^m.3.2^3.3 = 2^{m+2}.3^2 \text{ onde } m \geq 2.$$

Como $L \trianglelefteq G$ *segue que* $GL \leq S_4 \times S_4$, *então* $m = 2$ *ou* $m = 3$. *Se* $m = 2$, *então* $|G| = 2^2.3 = 12$ *o que não pode, pois neste caso* G *não teria a propriedade* $\mathfrak{G}_6$. *Se, porém,* $m = 3$, *então* $GL = LK$ *e* $G \cong K \cong S_4$ *o que não é verdade, pois* $G \not\cong S_4$. *Logo,* $G \cap L \neq 1$ *e de maneira análoga temos que* $G \cap K \neq 1$. *Daí, existem dois subgrupos normais minimais* $N_1 \leq G \cap L$ *e* $N_2 \leq G \cap K$ *de ordem* 4 *o que prova a nossa afirmação.*

Pela prova do Lema 4.4, $(M_5)_G \cap (M_6)_G = 1$. *Como* $C_G(U) = U(M_i)_G$ *para* $i = 5, 6$, *fazendo* $X = (M_5)_G(M_6)_G$ *temos que*

$$X \leq C_G(U) \text{ e } (M_5)_G \leq G$$

Daí

$$X = C_G(U) \text{ ou } |C_G(U) : X| = 2$$

Se $|C_G(U) : X| = 2$, *então* $U \cap X \trianglelefteq G$ *com* $U \cap X \neq 1$ *o que não é verdade, pois* $U \cdot\!\trianglelefteq G$. *Se, porém,* $C_G(U) = (M_5)_G(M_6)_G$, *então*

$$(M_5)_G(M_6)_G = C_G(U) = U(M_i)_G$$

como $(M_5)_G \cap (M_6)_G = 1$ *teríamos que* $|(M_5)_G| = |U| = 4 = |(M_6)_G|$ *e por conseguinte* $|C_G(U)| = 16$. *Finalmente, pelo NC-Lema, temos que:*

$$\frac{G}{C_G(U)} \lesssim Aut(U) \cong S_3$$

Logo

$$|G : C_G(U)| = 3 \text{ ou } |G : C_G(U)| = 6$$

Como

$$|G| = |G : C_G(U)||C_G(U)| = |G : C_G(U)|.16$$

segue que $|G| = 48$ *ou* $|G| = 96$. *Em qualquer caso teremos uma contradição devido ao item* 1.(*c*) *do Lema* 4.1.

□

Estamos agora em condições de caracterizarmos todos os grupos que são $\mathfrak{G}_6$-grupo. Tal caracterização esta sob a forma do

Teorema 4.1 ***(Teorema C)*** *Seja G um grupo. Então G tem uma 6-cobertura maximal irredundante com interseção D livre de núcleo se, e somente se, G satisfaz uma das seguintes propriedades:*

(1). $|D| = 1$ *e* $G \cong C_5 \times C_5$;

(2). $|D| = 1$ *e* $G \cong C_3 \times C_3 \times C_3$;

(3). $|D| = 1$ *e* $G \cong (C_3 \times C_3) \rtimes C_2$ *com* $Z(G) = 1$;

(4). $|D| = 2$ *e* $G \cong (C_3 \times C_3 \times C_3) \rtimes C_2$ *com* $Z(G) = 1$;

(5). $|D| = 1$ *e* $G \cong C_2 \times C_2 \times S_3$ *ou* $G \cong C_2 \times G_0$ *onde* $G_0 \cong (C_3 \times C_3) \rtimes C_2$ *com* $Z(G_0) = 1$;

(6). $|D| = 1$ *e* $G \cong C_5 \rtimes C_2$ *ou* $G \cong C_5 \rtimes C_4$ *e* $Z(G) = 1$;

(7). $|D| = 2$ *e* $G \cong (C_5 \times C_5) \rtimes C_2$ *com* $Z(G) = 1$;

(8). $|D| = 4$ *e* $G \cong (C_5 \times C_5) \rtimes C_4$ *com* $Z(G) = 1$.

Demonstração: *Suponha que G seja um $\mathfrak{G}_6$-grupo. Pelo Teorema B, podemos assumir que G é não-semisimples. Então G tem um subgrupo U abeliano normal minimal. Pelo Lema* 2.1(*d*), $|U| \leq 5$ *e da Proposição* 4.2, *temos que* $|U| \neq 4$.

Se $|U| = 2$, *então a Proposição* 4.1 *nos diz que*

$$D = 1 \text{ e } G \cong C_2 \times G_0, \text{ onde } G_0 = (C_3)^2 \rtimes C_2 \text{ com } Z(G_0) = 1$$

ou

$$G \cong C_2 \times C_2 \times S_3$$

e neste caso o grupo G se enquadra no item (6).

Dessa forma, podemos assumir que G não tem subgrupo normal de ordem 2. *Se* $|U| = 3$, *então o Lema* 4.3 *nos diz que*

$$|D| = 1 \text{ e } G \cong C_3 \times C_3 \times C_3$$

ou

$$|D| = 1 \text{ e } G \cong (C_3 \times C_3) \rtimes C_2 \text{ com } Z(G) = 1$$

ou

$$|D| = 2 \text{ e } G \cong (C_3 \times C_3 \times C_3) \rtimes C_2 \text{ com } Z(G) = 1$$

e neste caso o grupo G se enquadra, respectivamente, nos itens 2, 3, 4 *ou* 5.

Se $|U| = 5$, podemos, devido ao Lema 2.1(d), supor que $U \nleq M_i$ para $i = 2, 3, 4, 5, 6$. Sendo assim

$$G = UM_i,\ U \cap M_i = 1 \text{ e } |G : M_i| = 5$$

pela Proposição 1.12 segue que

$$C_G(U) = U \times (M_i)_G \text{ para } i \geq 2.$$

Por um lado, temos que

$$\Phi(C_G(U)) \leq \Phi(G) \leq D_G = 1. \qquad (*)$$

Por outro lado, se $x \in C_G(U)$ é um 2-elemento ou um 3-elemento segue que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{6} (M_i)_G = D_G = 1 \qquad (**)$$

pois $|C_G(U) : (M_i)_G| = |U| = 5$. Como a cobertura é livre de núcleo, e tendo em vista $(*)$ e $(**)$ segue que $C_G(U)$ é um 5-grupo abeliano elementar e pelo NC-Lema

$$\frac{G}{C_G(U)} = \frac{N_G(U)}{C_G(U)} \lesssim Aut(U) \cong C_4 \qquad (***)$$

Observemos que se o centro de G não for trivial, podemos escolher U tal que $U \leq Z(G)$, o que implica em

$$G = U \times M_i \text{ para } i \geq 2.$$

Se $C_G(U) = U$, então $U = U(M_i)_G$. Portanto $(M_i)_G = 1$, uma vez que $U \nleq M_i$. Dessa forma, G é um subgrupo primitivo de S_5 e sua ordem divisível por $|G : M_i| = 5$. Pela Proposição 3.4, o grupo G deve ser isomorfo a um dos grupos a seguir:

$$C_5,\ C_5 \rtimes C_2,\ C_5 \rtimes C_4,\ A_5 \text{ ou } S_5.$$

Mas $G \not\cong C_5$*, pois* C_5 *possui apenas um subgrupo maximal. Também, pelo Lema* 5.4*,* $G \not\cong A_5$ *e* $G \not\cong S_5$*. Logo,*

$$G \cong C_5 \rtimes C_2$$

ou

$$G \cong C_5 \rtimes C_4 \text{ com } Z(G) = 1$$

pois se $Z(G) \neq 1$ *então, pelo que observamos acima, teríamos que* $G = U \times M_i = U \times (M_i)_G = U \times 1 \cong U \cong C_5$ *o que não é verdade. Dessa maneira, mostramos que se* $C_G(U) = U$ *então o grupo* G *se enquadra no item* 7*.*

Agora, suponhamos que $C_G(U) \neq U$*. Se* $T := (M_i)_G \cap (M_j)_G \neq 1$ *para* $i > j \geq 2$*, existiria* $W \cdot\trianglelefteq G$ *contido em* T*. Pelo Lema* 2.1*, deveríamos ter* $|W| \leq 4$*. Neste caso, dado* $1 \neq x \in W$*, como* $|C_G(U) : (M_i)_G| = 5$ *para* $i = 2, 3, 4, 5, 6$*,* $x \in \bigcap_{i=2}^{6} (M_i)_G$*. Daí, teríamos que*

$$W \leq \bigcap_{i=2}^{6} (M_i)_G = D_G = 1$$

o que não é verdade. Logo,

$$C_G(U) \cong C_5 \times C_5.$$

Se $Z(G) \neq 1$*, como observamos acima,* $M_i = (M_i)_G$ *e portanto:*

$$G = U \times M_i = U \times (M_i)_G = C_G(U) \cong C_5 \times C_5$$

e neste caso o grupo G *se enquadraria no item* 1*. Assim, podemos supor que* $Z(G) = 1$*. Logo, em vista de* $(***)$*, temos que*

$$G \cong (C_5 \times C_5) \rtimes C_2$$

ou

$$G \cong (C_5 \times C_5) \rtimes C_4$$

e assim G *se enquadraria, respectivamente, no item* 8 *ou* 9*. Isso completa a primeira implicação do teorema. Reciprocamente, se um grupo* G *satizfaz um dos itens acima, segue do Lema* 4.1 *e do Teorema A que o grupo* G *tem a propriedade* $\mathfrak{G}_6$*, ou seja, admite* 6*-cobertura maximal irredundante com intersecão* D *livre de núcleo.* $\square$

Capítulo 5

O valor exato de $f(6)$ e Grupos G com $\sigma(G) = 6$

Este último capítulo está dividido em duas partes que são os nossos principais objetivos. Na primeira parte mostraremos que o valor exato de $f(6)$ é 36. Na segunda parte, obteremos da caracterização dos $\mathfrak{G}_6$-grupos uma classificação dos grupos G com $\sigma(G) = 6$.

5.1 O valor exato de $f(6)$

Lembremos que $f(n)$ é o maior índice $|G : D|$ tomado sobre todos os grupos G tendo uma n-cobertura irredundante com interseção D.

Já sabemos que:

- $f(3) = 4$ e $f(4) = 9$, por Tomkinson [19];
- $f(5) = 16$, por Bryce et al. [5];
- $36 \leq f(6) \leq 384$, por Tomkinson [19]

Nos propomos aqui mostrar que $f(6) = 36$. Antes disso, provaremos alguns resultados, que juntamente com os itens acima admitidos, servirão de ferramenta para a prova do Teorema D.

Proposição 5.1 ***(Scorza** [**18**]**)*** *Seja $G = A \cup B \cup C$ uma cobertura irredundante com interseção D livre de núcleo para um grupo G. Então $D = 1$ e $G \cong C_2 \times C_2$.*

Demonstração: *Pelo Lema* 2.1*(b),*

$$D = A \cap B \cap C = A \cap B = A \cap B = B \cap C$$

Considere os seguintes conjuntos:

$$A_1 = A - (B \cup C), B_1 = B - (A \cup C) \text{ e } C_1 = C - (A \cup B)$$

que são não vazios pela irredundancia da cobertura.

Assim, podemos expressar G *como a união disjunta abaixo:*

$$G = A_1 \dot{\cup} B_1 \dot{\cup} C_1 \dot{\cup} D \qquad (*)$$

Agora, note que:

(a). *Se* $x \in A_1$ *(respectivamente* B_1, C_1*), então* $x^{-1} \in A_1$ *(respectivamente* B_1, C_1*).*

De fato, $x \in A_1 \Rightarrow x \in A \Rightarrow x^{-1} \in A \Rightarrow x^{-1} \in D$ *ou* $x^{-1} \in A_1$*. Se* $x^{-1} \in D$*, então* $x \in D$*. Absurdo, pois* $A_1 \cap D = \emptyset$*. Logo,* $x^{-1} \in A_1$*.*

(b). $A_1B_1 \subseteq C_1$, $A_1C_1 \subseteq B_1$, $B_1C_1 \subseteq A_1$, $B_1A_1 \subseteq C_1$, $C_1A_1 \subseteq B_1$ *e* $C_1B_1 \subseteq A_1$

Mostraremos que $A_1B_1 \subseteq C_1$*, pois os outros casos são análogos. Dado* $x \in A_1$ *e* $y \in B_1$*, então* $xy \in A_1$*,* B_1*, ou* C_1*. Se* $xy \in A_1$*, então* $y = x^{-1}(xy) \in A$*. Absurdo, pois* $B_1 \cap A = \emptyset$*. Analogamente* $xy \notin B_1$*. Portanto* $xy \in C_1$*.*

(c). $A_1^2 \subseteq D$, $B_1^2 \subseteq D$ *e* $C_1^2 \subseteq D$*.*

Vamos mostrar que $A_1^2 \subseteq D$*, os outros casos são análogos. Aqui* $A_1^2 = A_1A_1 = \{xy; x, y \in A_1\}$*. Assim, sejam* $x, y \in A_1$*,* $b \in B_1$ *e* $c \in C_1$*. Note que:*

- $xy \in A$*, pois* $A_1 \subseteq A$*;*
- $xy = (xb)(b^{-1}y) \in C$*, pois* $xb \in C_1$ *por (b) e,* $(b^{-1}y) \in C_1$*, por (a) e (b);*

Logo, $xy \in A \cap C = D$*.*

(d). $A_1D \subseteq A_1$, $B_1D \subseteq B_1$ *e* $C_1D \subseteq C_1$*.*

Mostraremos que $A_1D \subseteq A_1$, os outros casos são análogos. Dados $x \in A_1$ e $d \in D$ temos que $xd \in A_1$, B_1, ou C_1. Se $xd \in B_1$, então $x = (xd)d^{-1} \in B$. Absurdo, pois $A_1 \cap B = \emptyset$. Analogamente, $xd \notin C_1$. Portanto, $xd \in A_1$.

(e). $D \lhd G$.

Dado $g \in G$ e $d \in D$, temos que $g \in D$, ou $g \notin D$. Se $g \in D$, então $g^{-1}dg \in D$. Se, porém, $g \notin D$, então $g \in A_1 \dot\cup B_1 \dot\cup C_1$, digamos que seja $g \in A_1$. Por (a): $g^{-1} \in A_1$, por (d): $gd \in A_1$ e por (c): $g^{-1}dg = g^{-1}(dg) \in D$. Logo, $D^g \subseteq D$ para todo $g \in G$. Daí, $D \lhd G$.

(f). $D = 1$

Por hipótese $D_G = 1$ e por (e): $D \lhd G$, então $D = D_G = 1$.

(g). *A_1, B_1 e C_1 são conjuntos unitários.*

Sejam $a, x \in A_1$. Por (a): $a^{-1} \in A_1$, por (c): $a^{-1}x \in D$, por (f): $a^{-1}x = 1 \Rightarrow x = a$. Os outros casos são análogos.

(h). $G \cong C_2 \times C_2$

Segue de (*), (f) e (g) que $G = \{1, a, b, c, \}$. Por (c): $a^2 = b^2 = c^2 = 1$, por (b): $ab = ba = c$, $ac = ca = b$ e $bc = cb = a$. Logo, $G \cong C_2 \times C_2$.

□

Também precisaremos do seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [11]

Proposição 5.2 ***(Greco** [**11**])* *Seja $\{H_i; 1 \leq i \leq 4\}$ uma cobertura irredundante com interseção D livre de núcleo para um grupo G. Se a cobertura é maximal, então ou*

1. *$D = 1$ e $G \cong C_3 \times C_3$; ou*

2. *$|D| = 2$, $G = 18$ e G imerso em $S_3 \times S_3$.*

Se a cobertura não é maximal, então ou

1. *$D = 1$ e $D \cong C_4 \times C_2$ ou $G \cong C_2 \times C_2$; ou*

2. $|D| = 2$ *e* $G \cong D_8 \times C_2$ *onde* D_8 *é o grupo diedral de ordem 8.*

Proposição 5.3 *Suponha que* G *seja um grupo com uma* 6*-cobertura* $\{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6\}$ *irredundante de interseção* D*. Então:*

$$\frac{G}{D_G} = \frac{H_1}{D_G} \cup \frac{H_2}{D_G} \cup \frac{H_3}{D_G} \cup \frac{H_4}{D_G} \cup \frac{H_5}{D_G} \cup \frac{H_6}{D_G}$$

é uma 6*-cobertura irredundante com interseção* $\dfrac{D}{D_G}$ *livre de núcleo.*

Demonstração: *Separamos a nossa prova em duas partes:*

Irredundancia *:*

Para todo H_i*, existe* $h_i \in H_i$ *tal que* $h_i \notin H_j$ *para todo* $j \neq i$*. Daí,* $h_i D_G \notin \dfrac{H_j}{D_G}$*, pois do contrário, existiria* $h_j \in H_j$ *tal que* $h_i D_G = h_j D_G$*. Logo,* $h_j^{-1} h_i \in D_G \leq H_j$ *e* $h_i = h_j(h_j^{-1} h_i) \in H_j$*, o que não é verdade. Daí, para cada* $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ *existe* $x_i D_G \in \dfrac{H_i}{D_G}$ *tal que* $x_i D_G \notin \dfrac{H_j}{D_G}$*.*

Livre de núcleo *:*

$$\left(\frac{D}{D_G}\right)_{\frac{G}{D_G}} = \left(\bigcap_{i=1}^{6} \frac{H_i}{D_G}\right)_{\frac{G}{D_G}} = \frac{D_G D_G}{D_G} = \overline{1}$$

$\square$

Por conveniência, deixamos para este capítulo a seguinte

Observação 5.1 *Seja* G *um grupo. Se* $H, K \leq G$ *e* $x \in G$*, então* $H \cap Kx$ *ou é vazio ou é uma classe lateral.*

De fato, suponha que exista $y \in H \cap Kx$*. Então* $y \in H$ *e* $y \in Kx$*. Vamos mostrar que*

$$H \cap Kx = (H \cap K)y.$$

Para isso, tome $z \in H \cap Kx$*. Então* $z = k_1 x$*, para algum* $k_1 \in K$*. Escreva* $z = (zy^{-1})y$*. Como* $y, z \in H$ *segue que* $zy^{-1} \in H$*. Note ainda que:*

$$zy^{-1} = k_1 x x^{-1} k = k_1 k \in K.$$

Logo, $z \in (H \cap K)y$*. Isto nos diz que* $H \cap Kx \subseteq (H \cap K)y$*. E, de maneira análoga,* $(H \cap K)y \subseteq H \cap Kx$*.*

Lema 5.1 *Seja G um grupo e*

$$G = H_1g_1 \cup H_2g_2 \cup ... \cup H_ng_n$$

uma cobertura irredundante de G por n classes laterais e seja $D = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$. Então para qualquer $0 \leq r \leq n-1$, e qualquer permutação ρ de $\{1, 2, 3, ..., n\}$ temos:

$$|H_{\rho(1)} \cap H_{\rho(2)} \cap ... \cap H_{\rho(n-r)} : D| \leq r!$$

Demonstração: *Por indução sobre r. O caso inicial $r = 0$ é válido. Suponha agora que $r \geq 1$, e que a interseção de quaisquer $n-(r-1)$ subgrupos H_i contenha D como subgrupo de índice no máximo $(r-1)!$. Como a cobertura é irredundante, existe um elemento x tal que:*

$$x \in G - (H_{\rho(1)}g_{\rho(1)} \cup H_{\rho(2)}g_{\rho(2)} \cup ... \cup H_{\rho(n-r)}g_{\rho(n-r)})$$

Note agora que para cada $j = 1, 2, ..., n-r$:

$$(H_{\rho(1)} \cap H_{\rho(2)} \cap ... \cap H_{\rho(n-r)})x \bigcap H_{\rho(j)}g_{\rho(j)} = \emptyset$$

pois caso existisse $y \in H_{\rho(1)} \cap H_{\rho(2)} \cap ... \cap H_{\rho(n-r)}$ tal que:

$$yx = y_{\rho(j)}g_{\rho(j)} \text{ com } y_{\rho(j)} \in H_{\rho(j)}$$

isso implicaria que:

$$x = y^{-1}y_{\rho(j)}g_{\rho(j)} \text{ e } x \in H_{\rho(j)}g_{\rho(j)}$$

o que não ocorre. Sendo assim, podemos então concluir que:

$$\begin{aligned}
(H_{\rho(1)} \cap H_{\rho(2)} \cap ... \cap H_{\rho(n-r)})x &\subseteq \bigcup_{k=n-r+1}^{n} H_{\rho(k)}g_{\rho(k)} \\
\Rightarrow (H_{\rho(1)} \cap H_{\rho(2)} \cap ... \cap H_{\rho(n-r)}) &\subseteq \left(\bigcup_{k=n-r+1}^{n} H_{\rho(k)}g_{\rho(k)}\right)x^{-1} \\
&= \bigcup_{k=n-r+1}^{n} H_{\rho(k)}g_{\rho(k)}x^{-1}
\end{aligned}$$

Daí, podemos afirmar que $H_{\rho(1)} \cap H_{\rho(2)} \cap ... \cap H_{\rho(n-r)}$ é igual a:

$$\bigcup_{k=n-r+1}^{n} (H_{\rho(1)} \cap H_{\rho(2)} \cap ... \cap H_{\rho(n-r)} \cap H_{\rho(k)}g_{\rho(k)}x^{-1})$$

Pela Observação 5.1*, temos para cada k:*

$$H_{\rho(1)} \cap H_{\rho(2)} \cap ... \cap H_{\rho(n-r)} \cap H_{\rho(k)} g_{\rho(k)} x^{-1} = \emptyset$$

ou

$$H_{\rho(1)} \cap H_{\rho(2)} \cap ... \cap H_{\rho(n-r)} \cap H_{\rho(k)} g_{\rho(k)} x^{-1} = (H_{\rho(1)} \cap H_{\rho(2)} \cap ... \cap H_{\rho(n-r)} \cap H_{\rho(k)}) y_k$$

Assim, $H_{\rho(1)} \cap H_{\rho(2)} \cap ... \cap H_{\rho(n-r)}$ *é a união de no máximo r classes laterais, cada uma das quais, por hipótese de indução, é a união de no máximo* $(r-1)!$ *classes laterais de D. Veja:*

$$\begin{aligned} H_{\rho(1)} \cap H_{\rho(2)} \cap ... \cap H_{\rho(n-r)} &= \bigcup_{k=n-r+1}^{n} (H_{\rho(1)} \cap H_{\rho(2)} \cap ... \cap H_{\rho(n-r)} \cap H_{\rho(k)}) y_k \\ &= \bigcup_{\substack{j \leq (r-1)! \\ k}} (D y_{k1} \cup ... \cup D y_{kj}) y_k \\ &= \bigcup_{\substack{j \leq (r-1)! \\ k}} D y_{k1} y_k \cup ... \cup D y_{kj} y_k \end{aligned}$$

Logo, $H_{\rho(1)} \cap H_{\rho(2)} \cap ... \cap H_{\rho(n-r)}$ *será coberto por no máximo* $r!$ *classes laterais de D, donde concluímos que:*

$$|H_{\rho(1)} \cap H_{\rho(2)} \cap ... \cap H_{\rho(n-r)} : D| \leq r!$$

o que completa a nossa indução. □

Estamos agora preparados para demonstrar o nosso principal resultado desta seção que é o

Teorema 5.1 ***(Teorema D)*** *O maior índice* $|G : D|$ *sobre todos os grupos G tendo uma 6-cobertura irredundante com interseção D é 36.*

Demonstração: *Já sabemos que* $f(6) \geq 36$*, por Tomkinson [19]. Suponha que G é um grupo com uma* 6*-cobertura* $\mathfrak{S} = \{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6\}$ *irredundante com interseção D tal que* $|G : D| > 36$*. Pela Proposição* 5.3*, podemos supor que* $D_G = 1$ *uma vez que*

$$|\frac{G}{D_G} : \frac{D}{D_G}| = |G : D| \ e \ |\frac{G}{D_G} : \frac{H_i}{D_G}| = |G : H_i|.$$

Agora, pelo Teorema C, podemos supor que $\mathfrak{S}$ *não é maximal. Daí, suponha que* $\mathfrak{S}$ *foi escolhida dentre todas as* 6*-cobertura para G, como aquela que possui a maior quantidade de membros maximais. Portanto, pelo menos um dos*

H_is é não maximal, H_1 digamos. Sejam $\mathfrak{S}^* = \{H_1^*, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6\}$ onde $H_1 < H_1^* \lessdot G$ e D^* sua interseção. É claro que $\mathfrak{S}^*$ é uma 6-cobertura para G, pois $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}^*$ e todos os membros de $\mathfrak{S}^*$ são subgrupos de G. No entanto, $\mathfrak{S}^*$ é redundante, pois do contrário, pelo Lema 2.1(b)

$$D = \bigcap_{i=2}^{6} H_i = D^* \Rightarrow D_G = 1 = D_G^*.$$

Absurdo, pois $\mathfrak{S}^*$ tem mais maximais do que $\mathfrak{S}$.

Se G é a união irredundante de cinco membros de $\mathfrak{S}^*$, então podemos supor que

$$G = H_1^* \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 \cup H_5$$

uma vez que H_1^* precisa aparecer nessa 5-cobertura. Se $D_1 = H_1^* \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4 \cap H_5$, então $|G : D_1| \leq f(5) = 16$. O Lema 2.1 nos fornece que

$$D = \bigcap_{i=2}^{6} H_i \text{ e } D_1 = \bigcap_{i=2}^{5} H_i \quad \textit{pela parte } (b)$$

e pela parte (c), $|D_1 : D| \leq 2$. Daí,

$$|G : D| = |G : D_1||D_1 : D| \leq 16 \times 2 = 32 \Rightarrow 32 = |G : D| > 36$$

o que não é verdade. Assim, G é uma união irredundante de quatro membros de $\mathfrak{S}^*$. Digamos que seja

$$G = H_1^* \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 \qquad (\#)$$

Considere $D_1 := H_1^* \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$. Pela Proposição 5.3,

$$\frac{G}{(D_1)_G} \text{ tem uma 4-cobertura irredundante com interseção } \frac{D_1}{(D_1)_G} \text{ livre de núcleo.}$$

Pela Proposição 5.2,

$$|G : D_1| = |\frac{G}{(D_1)_G} : \frac{D_1}{(D_1)_G}| = 6, 8, \textit{ou}, 9.$$

Agora, $|G : D_1| = 9$ implica que $D_1 = H_1^* \cap H_i$ com $i = 2, 3, 4$. Pois, pelas partes (b) e (c) do Lema 2.1,

$$|H_1^* \cap H_i : D_1| = |\frac{H_1^* \cap H_i}{(D_1)_G} : \frac{D_1}{(D_1)_G}| \leq 4 - 3 + 1 = 2$$

tem que dividir $9 = |G : D_1| = |\frac{G}{(D_1)_G} : \frac{D_1}{(D_1)_G}|$. *Logo* $|H_1^* \cap H_i : D_1| = 1$.

Se $|G : D_1| = 9$, *então* $D_1 = H_1^* \cap H_i$. *Afirmamos que:*

$$H_1^* = H_1 \cup D_1 \cup (H_1^* \cap H_5) \cup (H_1^* \cap H_6) \qquad (\#\#)$$

De fato, pois cada um dos subgrupos da parte direita da igualdade (##) *sendo subconjunto de* H_1^*, *sua união tem que está contida em* H_1^*. *Por outro lado, dado* $h \in H_1^* = (H_1^* - H_1)\dot{\cup} H_1$, *então ou* $h \in (H_1^* - H_1)$ *ou* $h \in H_1$. *Se* $h \in H_1$ *nada a fazer. Se, porém,* $h \in (H_1^* - H_1)$, *então existe* $i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ *tal que* $h \in H_i$, *para algum* H_i *em* $\mathfrak{S}$. *Daí,* $h \in H_1^* \cap H_i \subseteq D_1 \cup (H_1^* \cap H_5) \cup (H_1^* \cap H_6)$.

Note que a interseção da cobertura em (##) *e de* $\mathfrak{S}$ *são iguais, pois*

$$D \leq H_1 \cap D_1 \cap (H_1^* \cap H_5) \cap (H_1^* \cap H_6) \leq D$$

uma vez que $D_1 = H_1^* \cap H_i$ *para* $i = 2, 3, 4$.

Agora, suponha que a cobertura em (##) *é irredundante. Tendo em vista a Proposição* 5.2,

$$|H_1^* : D| \leq 9 \ \ e \ \ |G : H_1^*| = |\frac{G}{(D_1)_G} : \frac{H_1^*}{(D_1)_G}| \leq 3$$

uma vez que $\frac{G}{(D_1)_G}$ *é supersolúvel e* $\frac{H_1^*}{(D_1)_G} \lessdot \frac{G}{(D_1)_G}$. *Portanto,*

$$36 < |G : D| = |G : H_1^*||H_1^* : D| \leq 3 \times 9 = 27$$

que é uma contradição. Assim, desde que a cobertura em (##) *é redundante, vamos distinguir os três casos a seguir:*

Caso 1 *Se* $H_1^* = D_1 \cup (H_1^* \cap H_5) \cup (H_1^* \cap H_6)$ *é irredundante, então pelo Lema* 2.1*(b)*

$$D \leq D_1 \cap (H_1^* \cap H_5) \cap (H_1^* \cap H_6) \leq \bigcap_{i=2}^{6} H_i = D$$

uma vez que $D_1 = H_1^* \cap H_i$ *para* $i = 2, 3, 4$. *Daí, pela Proposição* 5.1, $|H_1^* : D| = 4$. *Pela Proposição* 5.2,

$$|G : H_1^*| = |\frac{G}{(D_1)_G} : \frac{H_1^*}{(D_1)_G}| \leq 3.$$

Segue que $36 < |G : D| = |G : H_1^*||H_1^* : D| \leq 3 \times 4 = 12$, *absurdo.*

Caso 2 *Se* $H_1^* = H_1 \cup (H_1^* \cap H_5) \cup (H_1^* \cap H_6)$ *é irredundante e* $D_2 := H_1 \cap H_5 \cap H_6$, *então a Proposição* 5.1 *fornece que* $|H_1^* : D_2| = 4$. *Por outro lado*

$$|H_1^*:D_1| \text{ divide } |G:D_1|=9, \text{ donde } |H_1^*:D_1|=1,\ 3 \text{ ou } 9.$$

Se $|H_1^*:D_1|=1$, *então* $H_1^*=D_1=H_1^*\cap H_i$, *donde* $H_1<H_1^*\leq H_i$ *para* $i=2,3,4$. *Absurdo, pois* $\mathfrak{S}$ *é irredundante. Se* $|H_1^*:D_1|=9$, *então* $H_1^*=G$. *Contradição, pois* $H_1^*\lessdot G$. *Logo,* $|H_1^*:D_1|=3$ *e* $|G:H_1^*|=3$, *pois* $|G:D_1|=9$. *Além disso, note que:*

$$|H_1^*:D|=|H_1^*:D_1\cap D_2|=|H_1^*:D_1||H_1^*:D_2|=3\times 4=12.$$

Portanto,

$$36<|G:D|=|G:H_1^*||H_1^*:D|=3\times 12=36$$

que é uma contradição.

Caso 3 *Se* $H_1^*=H_1\cup D_1\cup(H_1^*\cap H_5)$ *é irredundante. Como*

$$H_1\cap D_1\cap(H_1^*\cap H_5)=\bigcap_{i=1}^{5}H_i=D$$

pela Proposição 5.1, $|H_1^*:D|=4$. *Logo,*

$$36<|G:D|=|G:H_1^*||H_1^*:D|\leq 3\times 4=12$$

que é impossível.

Suponha que $|G:D_1|=8$. *Pela Proposição* 5.2, *a cobertura em* (#) *não é maximal e então, existe* $i\in\{2,3,4\}$ *tal que* H_i *não é maximal. Logo,*

$$|G:H_i|=|\frac{G}{(D_1)_G}:\frac{H_i}{(D_1)_G}|\geq 4$$

uma vez que $|G:H_i|=2$ *implicaria* $H_i\lessdot G$. *Por outro lado, a parte* (2) *da Proposição* 5.2, *nos diz que* $\dfrac{G}{(D_1)_G}$ *é nilpotente, donde*

$$|G:H_1^*|=|\frac{G}{(D_1)_G}:\frac{H_1^*}{(D_1)_G}|=2.$$

Como

$$4\leq|G:H_1^*\cap H_i|=|\frac{G}{(D_1)_G}:\frac{H_1^*\cap H_i}{(D_1)_G}| \text{ divide } |\frac{G}{(D_1)_G}:\frac{D_1}{(D_1)_G}|=8$$

segue que $|G:H_1^*\cap H_i|=4$ *ou* 8. *Se* $|G:H_1^*\cap H_i|=4$, *então*

$$4\leq|G:H_i|\leq|G:H_1^*\cap H_i|=4\Rightarrow|G:H_i|=4\Rightarrow H_1^*\cap H_i=H_i\Rightarrow H_i\leq H_1^*$$

que contraria a irredundância da cobertura em (#). *Daí,* $|G:H_1^*\cap H_i|=8$. *Desde que* $H_1^*\cap H_2\cap H_3\cap H_4=D_1\leq H_1^*\cap H_i$ *e* $|G:D_1|=8$, *temos que*

$$D_1 = H_1^* \cap H_i \text{ para algum } i \in \{2,3,4\}.$$

Agora, o Lema 2.1(c) *implica que*

$$|H_1^* : D_1| \leq 4 - 2 + 1 = 3.$$

Como $H_1^* \neq D_1$ *e* $|G : D_1| = 8$, *segue que* $|H_1^* : D_1| = 2$. *Logo,*

$$8 = |G : D_1| = |G : H_1^*||H_1^* : D_1| = 2 \times 2 = 4$$

que é uma contradição.

Sendo assim, suponha que $|G : D_1| = 6$. *Como a cobertura em* (#) *irredundante, segue do Lema* 2.1(b)

$$D_1 = H_2 \cap H_3 \cap H_4$$

Daí, pelo Lema 5.1,

$$|D_1 : D| = |H_2 \cap H_3 \cap H_4 : D| \leq 3! = 6$$

Portanto

$$36 < |G : D| = |G : D_1||D_1 : D| \leq 6 \times 6 = 36$$

o que é uma contradição. Logo, a cobertura em (#) *é redundante.*

Agora, podemos assumir que G *é a união irredundante de três subgrupos em* $\mathfrak{S}^*$. *Sem perda de generalidade admita que:*

$$G = H_1^* \cup H_2 \cup H_3$$

Pela Proposição 5.1,

$$|G : H_1^*| = 2 \text{ e } |G : D_1| = 4,$$

onde $D_1 := H_1^* \cap H_2 \cap H_3$. *Pelo Lema* 2.1*(b),*

$$D_1 = H_1^* \cap H_2 \cap H_3 = H_1^* \cap H_2 = H_1^* \cap H_3 = H_2 \cap H_3$$

Daí, podemos escrever:

$$H_1^* = H_1 \cup D_1 \cup (H_1^* \cap H_4) \cup (H_1^* \cap H_5) \cup (H_1^* \cap H_6) \qquad (\#\#\#)$$

Note ainda que a interseção da cobertura em (###) é igual a D, uma vez que $D_1 = H_2 \cap H_3$. Daí, se a cobertura em (###) é irredundante, então $|H_1^* : D| \leq f(5) = 16$. Logo,

$$36 < |G : D| = |G : H_1^*||H_1^* : D| \leq 2 \times 16 = 32.$$

Para evitar este absurdo, a cobertura em (###) tem que ser redundante e novamente temos três casos:

Caso 1 $H_1^* = D_1 \cup (H_1^* \cap H_4) \cup (H_1^* \cap H_5) \cup (H_1^* \cap H_6)$ *é irredundante.*

Pelo Lema 2.1(b), a interseção desta cobertura é:

$$\bigcap_{i=2}^{6} H_i = D$$

uma vez que $D_1 = H_2 \cap H_3$. Pela Proposição 5.2, $|H_1^* : D| \leq 9$. Portanto,

$$36 < |G : D| = |G : H_1^*||H_1^* : D| \leq 2 \times 9 = 18$$

uma contradição.

Caso 2 $H_1^* = H_1 \cup (H_1^* \cap H_4) \cup (H_1^* \cap H_5) \cup (H_1^* \cap H_6)$ *é irredundante.*

A interseção desta cobertura é

$$F := H_1 \cap H_4 \cap H_5 \cap H_6.$$

Pelas partes (b) e (c) do Lema 2.1, temos que:

$$|F : D| \leq 6 - 5 + 1 = 2.$$

Pela Proposição 5.2,

$$|H_1^* : F| \leq 9.$$

Portanto,

$$36 < |G : D| = |G : H_1^*||H_1^* : F||F : D| \leq 2 \times 9 \times 2 = 36$$

o que não é verdade.

Caso 3 $H_1^* = H_1 \cup D_1 \cup (H_1^* \cap H_4) \cup (H_1^* \cap H_5)$ *é irredundante.*

Pelo Lema 2.1(b), a interseção desta cobertura é:

$$\bigcap_{i=1}^{5} H_i = D$$

uma vez que $D_1 = H_2 \cap H_3$. *Pela Proposição* 5.2, $|H_1^* : D| \leq 9$. *Portanto,*

$$36 < |G : D| = |G : H_1^*||H_1^* : D| \leq 2 \times 9 = 18$$

que não é verdade.

Finalmente, H_1^* *não admite uma* 3*-cobertura irredundante, pois do contrário teríamos por exemplo*

$$H_1^* = (H_1^* \cap H_4) \cup (H_1^* \cap H_5) \cup (H_1^* \cap H_6) = H_1^* \cap (H_4 \cup H_5 \cup H_6)$$

Daí,

$$H_1 \leq H_1^* \subseteq H_4 \cup H_5 \cup H_6$$

contrariando a irredundância de $\mathfrak{S}$. *E todas as possibilidades de três cobertura para* H_1^* *nos conduz a mesma contradição através de um raciocínio análogo feito acima.*

Conclusão*: O valor exato para* $f(6)$ *é* 36*.*

□

5.2 Grupos G com $\sigma(G) = 6$

Lembremos que para um grupo G, $\sigma(G) = n$ é o menor inteiro positivo tal que G admite uma n-cobertura $G = H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_n$. É claro que essa n-cobertura é irredundante.

Observação 5.2 *Para um grupo* G *qualquer,* $\sigma(G) \geq 3$.

De fato, suponhamos que $\sigma(G) = 2$. *Então, existem dois subgrupos* H *e* K *de* G *tais que* $G = H \cup K$. *Essa* 2*-cobertura tem que ser irredundante, então existem* $h \in H \setminus K$ *e* $k \in K \setminus H$. *Daí,* hk *como elemento de* G *deve pertencer a* H *ou* K. *Se* $hk \in H$, *então* $k = h^{-1}(hk) \in H$, *o que não é. Se, porém,* $hk \in K$, *então* $h = (hk)k^{-1} \in K$, *também é absurdo. Logo,* $\sigma(G) \geq 3$.

Exemplo 5.1

(a). Dado o grupo dos quatérnios

$$Q_8 = \langle a, b;\ a^4 = 1, a^2 = b^2, a^b = a^{-1} \rangle.$$

Seus subgrupos próprios são: $\langle a^2 \rangle$, $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$ e $\langle ab \rangle$. Além disso, $\langle a^2 \rangle$ está contido em todos os outros subgrupos próprios. Logo,

$$Q_8 = \langle a \rangle \cup \langle b \rangle \cup \langle ab \rangle$$

consequentemente $\sigma(Q_8) = 3$.

(b). Considere o grupo simétrico

$$S_3 = \{1, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

Note que:

$$S_3 = \langle (1\ 2) \rangle \cup \langle (1\ 3) \rangle \cup \langle (2\ 3) \rangle \cup \langle (1\ 2\ 3) \rangle$$

Como qualquer subgrupo próprio de S_3, que contenha um 2-ciclo, só pode conter este e como um subgrupo que contenha um 3-ciclo e um 2-ciclo, não pode ser próprio; concluímos que a cobertura acima é mínima, isto é, $\sigma(S_3) = 4$.

Observação 5.3 *Se G é um grupo finito com $\sigma(G) = n$, então existem $M_1, M_2, ..., M_n$ subgrupos maximais tais que*

$$G = M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_n$$

é uma cobertura maximal irredundante.

Com efeito, suponha que $\sigma(G) = n$. Então n é o menor inteiro positivo tal que G admite uma n-cobertura

$$G = H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_n \qquad (*)$$

que é irredundante. Se $H_1 \lessdot G$, tome $M_1 = H_1$. Caso contrário, existe $H_1 < M_1 \lessdot G$. Note que $H_i \nsubseteq M_1$ para todo $i \in \{2, 3, ..., n\}$, pois do contrário, G admitiria uma m-cobertura com $m < n$. Agora, se $H_2 \lessdot G$, tome $M_2 = H_2$. Caso contrário, existe $H_2 < M_2 \lessdot G$ tal que $M_2 \neq M_1$ pois se $M_2 = M_1$, então $H_1, H_2 \subseteq M_2$ contrariando a minimalidade de n. Ainda por causa da minimalidade de n, $H_i \nsubseteq M_2$ para todo $i \in \{1, 3, 4, ..., n\}$. Prosseguindo agora com um raciocío análogo, para cada $i \in \{3, 4, ..., n\}$, obteremos que

$$G = M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_n$$

é uma cobertura maximal irredundante.

Antes de finalizarmos nosso trabalho com a caracterização dos grupos G com $\sigma(G) = 6$. Vamos enunciar alguns resultados, devido a Cohn[7], que antecederão o último teorema de nossa dissertação. Nesses resultados fica subentendido que para uma n-cobertura

$$G = H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_n$$

tem-se $\alpha_i = |G : H_i|$ com $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_n$.

Lema 5.2 *Seja G um grupo finito. Se $\sigma(G) = n$, então $\alpha_2 \leq n - 1$.*

Lema 5.3 *Seja G um grupo finito. Se $N \trianglelefteq G$, então $\sigma(G) \leq \sigma\left(\dfrac{G}{N}\right)$.*

Teorema 5.2 ***(Grupos G com** $\sigma(G) = 3, 4,$ ou 5**):***

(a). *G é um grupo com $\sigma(G) = 3$ se, e somente se, possui pelo menos dois subgrupos de índice 2;*

(b). *G é um grupo com $\sigma(G) = 4$ se, e somente se, possui pelo menos dois subgrupos de índice 3 e $\sigma(G) \neq 3$;*

(c). *G é um grupo com $\sigma(G) = 5$ se, e somente se, possui um subgrupo maximal de índice 4 e $\sigma(G) \neq 3$ ou 4;*

Com esses resultados é possível exibir o

Exemplo 5.2:

(a). $\sigma(C_p \times C_p) = p + 1$.

De fato, qualquer subgrupo próprio de $C_p \times C_p$ tem índice p. Pelo Lema 5.2, $\sigma(C_p \times C_p) \geq p + 1$. Por outro lado,

$$C_p \times C_p = \{a^i b^j; 0 \leq i, j \leq p - 1\}$$

onde $a^p = 1 = b^p$ com $ab = ba$. Faça $H_j = \langle ab^j \rangle$ para $j = 0, 1, 2, ..., p - 1$ e $H_p = b$. Daí,

$$C_p \times C_p = H_0 \cup H_1 \cup ... \cup H_p \Rightarrow \sigma(C_p \times C_p) \leq p + 1.$$

Logo,

$$p + 1 \leq \sigma(C_p \times C_p) \leq p + 1 \Rightarrow \sigma(C_p \times C_p) = p + 1$$

(b). $\sigma(C_5 \rtimes C_2) = 6$.

De fato, primeiro note que $C_5 \rtimes C_2 \cong D_{10}$, onde D_{10} é o grupo diedral de ordem 10. Veja:

$$C_5 \rtimes C_2 = \langle x, y;\ x^5 = 1 = y^2,\ x^y = x^i, \rangle$$

onde $i = 1, 2$, ou 3. Daí,

$$\langle x \rangle \in Syl_5(G),\ \langle x \rangle \trianglelefteq G \text{ e } x^y = x^i, \text{ para } i = 2, 3, \text{ ou } 4.$$

Portanto,

$$x = x^{y^2} = (x^y)^y = (x^i)^y = (x^y)^i = (x^i)^i = x^{i^2}$$

Isso implica que

$$x^{i^2-1} = 1 \Rightarrow 5 \mid i^2 - 1 = (i-1)(i+1) \Rightarrow 5 \mid (i-1) \; ou \; 5 \mid (i+1)$$

Se $5 \mid (i-1)$, então $i = 1$, o que é um absurdo. Logo, $5 \mid (i+1) \Rightarrow i = 4$. Dessa forma,

$$C_5 \rtimes C_2 = \langle x, y;\ x^5 = 1 = y^2,\ x^y = x^4 \rangle = D_{10}$$

Agora, temos que

$$D_{10} = \langle x \rangle \cup \langle y \rangle \cup \langle xy \rangle \cup \langle x^2 y \rangle \cup \langle x^3 y \rangle \cup \langle x^4 y \rangle$$

isso implica que $\sigma(D_{10}) \leq 6$. Por outro lado, $\langle a \rangle$ é o único subgrupo de D_5 de índice 2 e D_{10} não possui nenhum subgrupo de índice 3 ou 4. Pelo Teorema 5.2, concluímos que $\sigma(C_5 \rtimes C_2) = \sigma(D_{10}) = 6$.

(c). $\sigma(H) = 6$, onde:

$$H = \langle a, b; a^5 = 1 = b^4, ba = a^2 b \rangle \; com \; |H| = 20.$$

Temos que:

$$H = \langle a \rangle \cup \langle b \rangle \cup \langle ab \rangle \cup \langle a^2 b \rangle \cup \langle a^3 b \rangle \cup \langle a^4 b \rangle \Rightarrow \sigma(H) \leq 6.$$

Sendo $\langle a, b^2 \rangle$ o único subgrupo de H de índice 2, segue do Teorema 5.2 que $\sigma(H) \neq 3$. Como $3 \nmid |H| = 20$, não existe nenhum subgrupo de índice 3. Pelo Teorema 5.2, $\sigma(H) \neq 4$. Além disso, $\langle a \rangle$ é o único subgrupo de H de índice 4. Note que $\langle a \rangle$ não é um subgrupo maximal de H, pois $\langle a \rangle < \langle a, b^2 \rangle \neq H$. Pelo Teorema 5.2, $\sigma(H) \neq 5$. Desse modo, concluímos que $\sigma(H) = 6$. Note que $H = C_5 \rtimes C_4$.

Também é devido a Cohn [7] os seguintes resultados:

Lema 5.4 *$\sigma(A_5) = 10$ e $\sigma(S_5) = 16$.*

Teorema 5.3 *Se G é isomorfo a um dos seguintes grupos:*

$$C_5 \times C_5,\ H = C_5 \rtimes C_4,\ \textit{ou}\ D_{10} = C_5 \rtimes C_2$$

Então:

$$\sigma(G) = 6 \textit{ e não existe } N \lhd G \textit{ tal que } \sigma\left(\frac{G}{N}\right) = \sigma(G).$$

Estamos agora em condições de provarmos o nosso principal resultado desta seção que é o

Teorema 5.4 ***(Teorema E)*** *Seja G um grupo finito com $\sigma(G) > 5$. Então $\sigma(G) = 6$ se, e somente se, G tem um grupo quociente isomorfo a um dos seguintes grupos:*

(1). *$C_5 \times C_5$;*

(2). *D_{10}, o grupo diedral de ordem 10;*

(3). *$H = \langle a, b; a^5 = 1 = b^4, ba = a^2 b\rangle$.*

Demonstração: *Suponha que $\sigma(G) = 6$. Pela Observação 5.3, podemos considerar que $G = \bigcup_{i=1}^{6} M_i$ é uma cobertura maximal irredundante com interseção $D = \bigcap_{i=1}^{6} M_i$. Pela Proposição 5.3, $\frac{G}{D_G}$ tem uma 6-cobertura maximal irredundante com interseção $\frac{D}{D_G}$ livre de núcleo. Pelo Teorema C, $\frac{G}{D_G}$ é isomorfo a um dos seguintes grupos:*

(1) *$C_3 \times C_3 \times C_3$;*

(2) *$C_5 \times C_5$;*

(3) *$C_2 \times C_2 \times S_3$;*

(4) *$C_2 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes C_2)$ cujo centro de $(C_3 \times C_3) \rtimes C_2$ é trivial;*

(5) $(C_3 \times C_3) \rtimes C_2$ *cujo centro é trivial;*

(6) $(C_3)^3 \rtimes C_2$ *cujo centro é trivial;*

(7) $D_{10} = C_5 \rtimes C_2$*;*

(8) $H = C_5 \rtimes C_4$ *cujo centro é trivial;*

(9) $(C_5 \times C_5) \rtimes C_2$ *cujo centro é trivial;*

(10) $(C_5 \times C_5) \rtimes C_4$ *cujo centro é trivial.*

Com o programa GAP [9] podemos escrever a função orderFrequencyS abaixo:

$orderFrequencyS := function(g)$

$local\ h, w;$

$w := [\ ];$

$w := h{-}{>}\ Collected(List(AllSubgroups(h), Order));$

$return\ w(g);$

$end;$

A função orderFrequencyS funciona da seguinte maneira: Dado um grupo G identificado pela variável G ao redigirmos o comando

$$\textit{orderFrequencyS(G);} \qquad (*)$$

e pressionarmos enter, aparecerá a frequência com que um subgrupo $H \leq G$ *com ordem* $|H| = n$ *ocorre.*

Assim, se identificarmos o grupo $C_2 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes C_2)$ *em* (4) *pela variável G e redigirmos o comando em* $(*)$ *ao pressionarmos enter aparecerá:*

$$[[1, 1], [2, 19], [3, 4], [4, 9], [6, 28], [9, 1], [12, 12], [18, 3], [36, 1]]$$

significando que o grupo $C_2 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes C_2)$ *em* (4) *possui:*

- *Um subgrupo com ordem* 1*;*
- *Dezenove subgrupos com ordem* 2*;*
- *Quatro subgrupos com ordem* 3*;*

- *Nove subgrupos com ordem* 4*;*

- *Vinte e oito subgrupos com ordem* 6*;*

- *Um subgrupo com ordem* 9*;*

- *Doze subgrupos com ordem* 12*;*

- *Três subgrupos com ordem* 18*;*

- *Um subgrupo com ordem* 36*.*

Dessa forma, o grupo $C_2 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes C_2)$ *em* (4) *possui três subgrupos de índice* 2*. De maneira análoga verifica-se que os grupos em* (3) *possui sete subgrupos de índice* 2*. Logo, pelo Teorema* 5.2 *temos que:*

$$\sigma(C_2 \times C_2 \times S_3) = \sigma(C_2 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes C_2)) = 3$$

Se G *é o grupo* $C_3 \times C_3 \times C_3$ *que não possui subgrupos de índice* 2 *então, pelo Teorema* 5.2*(a), temos que* $\sigma(G) \neq 3$*. É claro que* G *possui pelo menos dois subgrupos de índice* 3*. Daí, o Teorema* 5.2*(b) nos diz que* $\sigma(G) = 4$*.*

Se G *é o grupo* $(C_3 \times C_3) \rtimes C_2$ *em* (6)*, usando a função orderFrequencyS temos que:*

- G *tem apenas um subgrupo de índice* 2*, como era de se esperar. Portanto* $\sigma(G) \neq 3$*, devido ao Teorema* 5.2*(a).*

- G *tem doze subgrupos de índice* 3*. Como* $\sigma(G) \neq 3$*, o Teorema* 5.2*(b) nos diz que* $\sigma(G) = 4$*.*

Se G *é o grupo* $(C_3)^3 \rtimes C_2$ *em* (7)*, então, procedendo de forma análoga ao parágrafo anterior, obtemos que* $\sigma(G) = 4$*.*

Pela prova do Teorema C, os grupos em (9) *e* (10) *quocentados pelo grupo* U *é isomorfo aos grupos* D_{10} *e* H *respectivamente. Isto completa a primeira implicação do teorema.*

Reciprocamente, suponha que G *tem um grupo quociente isomorfo a um dos três grupos listados na afirmação do teorema. O Teorema* 5.3 *e o Lema* 5.3 *nos fornece que* $\sigma(G) \leq 6$*. Como por hipótese* $\sigma(G) > 5$*, segue que* $\sigma(G) = 6$*.*
$\square$

Bibliografia

[1] ABDOLLAHI, A. et al. Groups with a maximal irredundant 6-cover. *Comm. Algebra*, v. 33, p. 3225-3238, 2005.

[2] BATTACHARIA, P. B. *Basic abstract algebra.* 2nd ed. Cambridge : Cambridge Uni- versity, 1994.

[3] BRYCE, R. A. ; SERENA, L. A note on minimal coverings of groups by subgroups. *J. Austral. Math. Soc.*, v. 71, p. 159-168, 2001.

[4] BRYCE, R. A. ; FEDRI, V. ; SERENA, L. A Hughes-like property for finite groups. *Proc. of the Edinburgh Math. Soc.*, v. 38, p. 533-541, 1995.

[5] __________ . Covering group with subgroups. *Bull. Austral. Math. Soc.*, v. 55, p. 469-476, 1997.

[6] __________ . Subgroup coverings of some linear groups. *Bull. Austral. Math. Soc.*, v. 60, p. 227-238, 1999.

[7] COHN, J. H. E. On n-sum groups. Math Scand., v. 75, p. 44-58, 1994.

[8] DOERK, K. ; HAWKES, T. Finite soluble groups. Berlin, New York : Walter de Gruyter, 1992.

[9] *GAP-groups, algorithms, and programming.* Version 4.3, 2002. Disponível em : $< http : //www.gap - system.org >$

[10] GRECO, D. Su alcuni gruppi finiti che sono somma di cinque sottagruppi. *Mat. Univ. Padova*, v. 22, p. 313-333, 1953.

[11] __________ . Sui gruppi che sono somma di quattro o cinque sottagruppi. *Rend. Accad. Sci. Fis. Math. Napoli*, v. 23, p. 49-59, 1956.

[12] HUNGERFORD, T. W. *Álgebra.* New York : Springer-Verlag, 1974.

[13] JUNGNICKEL, D. ; STORME, L. Packing and covering groups with subgroups. *J. Algebra,* v. 239, p. 191-214, 2001.

[14] NEUMANN, B. H. Groups covered by permutable subsets. *J. London Math. Soc.,* v. 29, p. 236-248, 1954.

[15] __________ . Groups covered by finitely many cosets. *Publ. Math. Debrecen,* v. 3, p. 227-242, 1954.

[16] ROBINSON, D. J. S. *A course in the theory of groups.* New York : Springer-Verlag, 1982.

[17] ROSE, J. S. *A course on group theory.* 2^{nd} ed. Cambridge : Cambridge University, 1978.

[18] SCORZA, G. I gruppi che possono pensarsi come soma di tre loro sottogruppi. *Boll. Un.. Mat. Ital.*, v. 5, p. 216-218, 1926.

[19] TOMKINSON, M. J. Groups covered by finitely many cosets or subgroups. *Comm. Algebra,* v. 15, p. 845-859, 1987.

[20] __________ . Groups as the union of proper subgroups. Math. Scand., v. 81, p. 189-198, 1997.