

JORGE BRANDÃO

Cálculo diferencial e integral

métodos e técnicas
adequadas para pessoas
com deficiência



u
Imprensa
Universitária
UFC

COLEÇÃO
DE ESTUDOS DA
PÓS-GRADUAÇÃO

Cálculo diferencial e integral

**métodos e técnicas adequadas
para pessoas com deficiência**



Presidente da República

Luiz Inácio Lula da Silva

Ministro da Educação

Camilo Sobreira de Santana



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ – UFC

Reitor

Prof. Custódio Luís Silva de Almeida

Vice-Reitora

Prof.^a Diana Cristina Silva de Azevedo

Pró-Reitor de Planejamento e Administração

Prof. João Guilherme Nogueira Matias

Pró-Reitora de Pesquisa e Pós-Graduação

Prof.^a Regina Célia Monteiro de Paula



IMPRENSA UNIVERSITÁRIA DA UFC

Diretor

Francisco Charles Rocha e Silva Ribeiro

**COMISSÃO TÉCNICO-EDITORIAL DA
COLEÇÃO DE ESTUDOS DA PÓS-GRADUAÇÃO – UFC
Edição 2024-2026**

Coordenadora de Planejamento Estratégico e Avaliação

Lidiany Karla Azevedo Rodrigues Gerage

Biblioteca Universitária

Felipe Ferreira da Silva

Departamento de Enfermagem/FFOE

Joselany Áfio Caetano

Biblioteca Universitária

Juliana Soares Lima

Jorge Brandão

Cálculo diferencial e integral

**métodos e técnicas adequadas
para pessoas com deficiência**



Fortaleza
2026

Cálculo diferencial e integral: métodos e técnicas adequadas para pessoas com deficiência

Copyright © 2026 by Jorge Brandão

Todos os direitos reservados

PUBLICADO NO BRASIL / PUBLISHED IN BRAZIL

Imprensa Universitária – Universidade Federal do Ceará

Av. da Universidade, 2932 – Benfica, Fortaleza-Ceará, Brasil

Coordenação editorial

Ivanaldo Maciel de Lima

Revisão de texto

Leidyanne Viana

Normalização bibliográfica

Marilzete Melo Nascimento

Layout gráfico-visual

Sandro Vasconcellos

Diagramação

Frank Bezerra

Capa

Heron Cruz

Editora filiada à

Associação Brasileira
das Editoras Universitárias

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Imprensa Universitária – Universidade Federal do Ceará

B817c Brandão, Jorge.

Cálculo diferencial e integral [livro eletrônico]: métodos e técnicas adequadas para pessoas com deficiência / Jorge Brandão. - Fortaleza: Imprensa Universitária, 2026.
3.902 kb : il. ; PDF. (Coleção de Estudos da Pós-Graduação)

ISBN: 978-85-7485-687-2

1. Cálculo diferencial e integral. 2. Educação inclusiva. 3. Matemática – método de ensino. I. Título.

CDD 515.33

Elaborada por: Marilzete Melo Nascimento – CRB 3/1135

Apresentação

Caríssimo leitor e prezada leitora, ler pode ser perigoso! Com efeito, quando se lê um livro, uma revista, ou outros meios escritos, na verdade, repetem-se os processos mentais de quem escreveu. Assim sendo, quando é que a leitura passa a ser algo construtivo para o(a) leitor(a)?

Isso ocorre quando aquilo que se lê não é ponto de chegada e sim ponto de partida para o ato de pensar, haja vista a leitura dos pensamentos dos outros servir de base para o(a) leitor(a) conseguir ter os próprios pensamentos, conforme Costa, Cascino e Saviani (2000 *apud* Lira; Brandão, 2013). A leitura feita com os olhos permite apreciar e associar gravuras ao texto, o que nem sempre ocorre com aqueles que leem com o tato.

Este livro é uma organização de atividades desenvolvidas e adaptadas (sendo simples, sem ser simplório, isto é, adaptado, mas respeitando o rigor matemático) na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, com uma variável contemplando discentes com deficiência visual, transtorno do espectro autista (TEA) ou com discalculia.

Qual a importância desta obra no contexto do RENOEN¹ polo UFC? Reside no quantitativo de pessoas com deficiência na UFC:

¹ Rede Nordeste de Ensino (RENOEN) é um programa de pós-graduação *stricto sensu* voltado para a formação de doutores para atuar na pesquisa e na produção de novos conhecimentos na área de ensino (Ver em: <https://ppgrenoen.ufc.br/pt/apresentacao/>).

em 2022, eram 418 discentes com deficiência regularmente matriculados, sendo 114 com deficiência visual e 21 com transtorno do espectro autista (TEA).² Trabalhamos, nos últimos cinco anos, com cinco discentes com deficiência visual e dois com TEA. Desse trabalho, resultaram uma dissertação e uma tese (ambas em 2020), e estão em andamento duas teses sob nossa orientação.³ Ou seja, esta obra é fruto e semente de pesquisas científicas.

Retomando as adaptações, para leitores que não trabalham em escolas especiais, vale ressaltar que, em relação à postura pedagógica do(a) professor(a), não é necessário que ele(a) saiba Braille para ter uma comunicação ativa com um discente cego (ou Libras, para se comunicar com um estudante surdo). É preciso “apenas” que a pessoa que irá ministrar uma aula em salas regulares, onde estão incluídos alunos com algumas necessidades especiais, tenha domínio de seu conteúdo.

Com efeito, de que modo é possível adaptar um material concreto para compreender soma de frações, tirando o m.m.c., se, enquanto docente, não sei o que significa m.m.c.? – e você, caríssimo(a) leitor(a), lembra o significado do m.m.c.? Outro exemplo: de que forma um(a) professor(a) pode querer fazer uma experiência na área de ciências da natureza, contemplando cegos e videntes, se não conhece os princípios envolvidos no dito experimento?

Ainda em relação à postura pedagógica, não obstante o domínio do conteúdo, espera-se que o(a) docente seja uma pessoa que consiga transmitir os conhecimentos de forma compreensível. Independentemente de estratégias utilizadas, a maneira como o(a) professor(a) se expressa cria no estudante uma sensação de confiança naquilo que é comunicado.

² Disponível em: <https://acessibilidade.ufc.br/pt/censo/censo-2022/>. Acesso em: 21 ago. 2024.

³ Optamos por escrever na primeira pessoa do plural em virtude das vivências e convivências com cada discente, investigando seus potenciais a partir de suas particularidades/especificidades, que, de alguma forma, contribuem para o meu enriquecimento como docente – tanto em procurar novas formas de ensinar quanto em respeitar seus limites, valorizando suas potencialidades.

Assim sendo, falar com linguagem isenta de erros e vícios, utilizar linguagem clara, objetiva e de fácil compreensão e variar a intensidade de voz durante as explicações são algumas atitudes positivas. São atitudes que facilitam a aprendizagem, independentemente do tipo de aprendiz (com ou sem deficiência visual). Por fim, e não menos importante, a comunicação do(a) professor(a) com os alunos deve respeitar os limites dos discentes, valorizando e estimulando suas potencialidades.

Também é interessante, se ocorrer uma conversa entre dois ou mais estudantes, verificar se o motivo do diálogo é, ou não, o conteúdo abordado. Muitas vezes, os alunos compreendem (melhor) determinado assunto transmitido pelo(a) professor(a) por meio da linguagem de seus pares (colegas).

Em relação ao cálculo diferencial e integral, abordaremos o pré-cálculo e concluiremos com noções de integrais (como antiderivadas). Desejo um bom “apetite” e que “saboreie” cada parte desta obra. Críticas também podem ser feitas. O *e-mail* adaptacoes@gmail.com está sempre à disposição para esclarecimentos. Por meio desse *e-mail*, podemos apresentar estratégias exclusivas para pessoas cegas. Com efeito, temos poucas páginas para descrever várias ações.

Sumário

O que é o cálculo diferencial e integral com uma variável?	9
Estudos atrelando CDI a pessoas com deficiência visual ou TEA.....	11
Pré-cálculo e alguns “passatempos” para não passar o tempo do raciocínio matemático	16
Dobrando uma folha de papel e suas “consequências” matemáticas!.....	18
Jogando com palitos (Relato de experimento com discentes cegos).....	19
O jogo dos quatro quatros.....	22
Trabalhando com papéis	23
Introdução ao cálculo	29
O que é um limite?	29
Método dos trapézios	35
Recordar que é indeterminação a expressão $0/0$	37
Limites infinitos e no infinito	39
Limite fundamental da trigonometria	41
Derivada de x^n (nos casos $n = 2$ e $n = 3$).....	46
Adequações para compreensão de somas de Riemann	50
Referências.....	52
Sobre o autor	54

O que é o cálculo diferencial e integral com uma variável?

A invenção do cálculo ocorreu próximo ao final do século XVII por Isaac Newton e Gottfried Leibniz. Essa foi a realização matemática mais notável do período. “Com essa invenção a matemática criativa passou a um plano superior e a história da matemática elementar essencialmente terminou” (Eves, 2011, p. 417).

Por certo, o cálculo diferencial e integral (CDI), atualmente, está presente no currículo de diversos cursos de graduação em várias áreas do conhecimento, especialmente nas engenharias. Entre os assuntos abordados em CDI, estão: limites, derivadas e integrais, temas com abrangentes aplicações nas tecnologias.

É comum que, no estudo de CDI, o primeiro assunto explorado seja limite; em seguida, derivada; e, por último, integral. No entanto, Eves (2011, p. 417) expõe que a integração veio antes da derivação. Segundo o autor, “a ideia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos”. Bem mais tarde é que foi criada a diferenciação, resultante “de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos” (Eves, 2011, p. 417).

Algum tempo depois, verificou-se que existia uma relação entre a integração e a diferenciação, sendo uma a operação inversa

da outra. Em seu livro *História et Origo Calculi Differentialis*, Leibniz afirma que sua primeira inspiração para a invenção do cálculo foi tirada do Tratado dos Senos do Quarto de Círculo, de Pascal, conforme Eves (2011). O método exposto nesta obra é usado pelo autor para demonstrar um resultado sobre quadraturas, mas Leibniz extrai dele o triângulo característico, uma ideia bem mais geral, que será usada muitas vezes em seus trabalhos.

Muitos foram os estudos desenvolvidos até se obter o CDI, hoje utilizado como elemento fundamental para a compreensão e realização dos avanços tecnológicos da contemporaneidade. Conforme Simmons (1987, p. 1), o CDI:

[...] é um instrumento indispensável de pensamento em quase todos os campos da ciência pura e aplicada – em Física, Química, Biologia, Astronomia, Geologia, Engenharias e até mesmo em algumas das Ciências Sociais.

Para Thomas (2011, p. XV), “o cálculo é a matemática dos movimentos e das variações.” E acrescenta:

O cálculo diferencial lidou com o problema de calcular taxas de variação. Ele permitiu que as pessoas definissem os coeficientes angulares de curvas, calculassem a velocidade e a aceleração de corpos em movimento e determinassem os ângulos a que seus canhões deveriam ser disparados para obter o maior alcance, além de prever quando os planetas estariam mais próximos ou mais distantes entre si. O cálculo integral lidou com o problema de determinar uma função a partir de informações a respeito de sua taxa de variação. Permitiu que as pessoas calculassem a posição futura de um corpo a partir de sua posição atual e do conhecimento das forças que atuam sobre ele, determinassem as áreas de regiões irregulares no plano, medissem o comprimento de curvas e determinassem o volume e a massa de sólidos arbitrários.

Essas afirmações de Thomas justificam a grande importância do estudo do CDI nas mais diversas áreas do conhecimento. Ainda conforme Thomas (2011, p. XV), utilizam-se no cálculo técnicas e habilidades de calcular com números, simplificar expressões algébricas,

calcular variáveis e lidar com pontos e figuras no plano, além de outras de mais precisão e em nível mais profundo.

Nesse contexto, as funções são um dos principais objetos de estudo do cálculo. Por definição, uma função é uma relação entre duas variáveis, na qual uma variável depende da outra. Simmons (1987, p. 1) explicita que “essa definição proporciona uma perspectiva de compreensão e correlação de fenômenos naturais por meio de instrumentos matemáticos de enorme e místico poder”.

Pelo exposto neste tópico, percebe-se que o CDI é importante para o desenvolvimento das ciências e das tecnologias. Contudo, o que fez despertar o interesse para a execução desta investigação foi a forma como o CDI é ensinado e a dificuldade dos estudantes em compreendê-lo. Nos tópicos a seguir, será feita uma exploração dessa temática, associando-a aos recentes estudos envolvendo pessoas com deficiência visual ou com TEA.

Estudos atrelando CDI a pessoas com deficiência visual ou TEA

Diante da inclusão de discentes com deficiência visual em instituições federais de ensino superior, uma preocupação frequente de docentes que fazem uso de figuras para ensinar conteúdos matemáticos é: como adequar/adaptar figuras e imagens para pessoas sem acuidade visual, sem que se percam informações relevantes para a formação do conceito?

No caso particular da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral com uma variável, CDI, raros são os trabalhos que contemplam adequações da referida disciplina para pessoas com deficiência visual. No banco de dissertações e teses da Capes, a partir de 2015, encontramos apenas uma tese que trata do ensino de volumes – no Cálculo Integral.

Consultando revistas internacionais, a partir dos termos de busca “blind” e “differential and integral calculus”, também não encontramos obras que pudessem contribuir para a temática que

pretendemos aqui abordar. Assim, diante da existência de poucas pesquisas atreladas ao ensino de cálculo diferencial e integral para pessoas com deficiência visual, justifica-se a necessidade de um (pequeno) livro que contemple estratégias para uma aprendizagem com significados nesse campo do saber.

Destacamos que são quase 25 anos lecionando CDI na UFC, sendo cerca de 20 anos voltados a discentes com alguma especificidade, como deficiência visual, deficiência auditiva, deficiência intelectual ou TEA. Como a maior parte das vivências envolveu discentes com TEA e deficiência visual, que geraram dissertações e teses na UFC, apresentamos, nos próximos tópicos, uma breve caracterização dessas duas condições.

A deficiência visual

Para o Conselho Internacional de Oftalmologia (2015), a deficiência visual consiste na diminuição da visão decorrente de uma perda de funções (como a acuidade visual, o campo visual ou outras) no nível do órgão, podendo ser mensurada pelo especialista da área. A partir dessas mensurações na função visual, o oftalmologista terá condições de passar uma receita médica descrevendo os “auxílios ópticos adequados e indicar modificações ambientais e de materiais que promoverão a melhor resolução visual e a melhora do desempenho nas atividades diárias” (Haddad, 2006, p. 45).

Pode-se dizer que essa mensuração ajuda os professores a compreender melhor as limitações no campo visual do aluno, contribuindo, também, para intervenções no ambiente escolar. Nesse contexto, a deficiência visual não se confunde com os termos “cegueira” ou “baixa visão”, pois cada um possui seus conceitos e classificações desenvolvidas. No caso da pessoa com deficiência visual, existe uma classificação que pode variar da cegueira à baixa visão (ou visão subnormal), com o nível de perda total ou parcial de um ou de ambos os olhos, podendo ser congênita ou adquirida ao longo da vida.

Além disso, o Conselho Brasileiro de Oftalmologia (2018, p. 19) destaca que a condição da pessoa com deficiência visual depende de vários fatores, como:

Valor de acuidade visual (a deficiência possui diversos graus, podendo ser leve, moderada, severa e cegueira), alterações funcionais (no campo visual, na sensibilidade ao contraste, na visão de cores e na velocidade de leitura), doenças congênitas ou adquiridas (Exemplo: toxoplasmose congênita e retinopatia diabética).

Gil (2000) esclarece que a baixa visão, também denominada de visão subnormal, caracteriza-se pela mudança funcional no olho resultante de fatores como: redução relevante da acuidade visual, diminuição expressiva do campo visual, queda na sensibilidade aos contrastes e, por fim, limitação de outras capacidades. Por isso, é importante orientar a escola e o professor no sentido de conhecer esses fatores a fim de propiciar a inclusão do aluno cego em sala de aula. Um aspecto que contribui para melhorar a sua capacidade visual em sala é o uso de materiais escolares adaptativos, como canetas do tipo pincel atômico e papel com pautas em negrito.

Como ministrar aulas para pessoas com deficiência visual? Sabe-se que uma das tarefas de qualquer professor é trabalhar com os educandos a rigorosidade metódica com que devem se “aproximar” dos objetos cognoscíveis. E essa rigorosidade metódica exige tanto do educador quanto do alunado uma postura de investigação, de criação e de humildade, conforme Freire (2005).

Assim, o fato de um discente ter deficiência visual (ou qualquer outra) não implica que deva ser tratado como um sujeito à parte na sala de aula de escolas regulares ou de instituições de ensino superior. Esse discente tem dificuldades, mas também tem potencialidades. Desse modo, antes de esses sujeitos adentrarem as escolas regulares, é importante ter uma boa preparação nas escolas especializadas (quando for o caso), destacam Lira e Brandão (2013).

O transtorno do espectro autista (TEA)

O transtorno do espectro autista reúne pessoas que, em graus diferenciados, apresentam comprometimento na comunicação, no comportamento e na socialização. As características principais delas são: tendência ao isolamento; dificuldade em manter uma conversa coerente, olhando no olho do outro; preferência por falar sobre assuntos de seus interesses específicos; dificuldade em expressar seus sentimentos e compreender os sentimentos e respostas sociais dos outros; resistência a mudanças no ambiente e na rotina; boa memória e aparência de ingenuidade; perfeccionismo etc. Não obrigatoriamente apresentam deficiência cognitiva/intelectual.

Conforme a American Psychiatric Association (APA, 2014), o TEA pertence ao grupo do transtorno do neurodesenvolvimento, que engloba o transtorno autista (autismo), o transtorno de Asperger, o transtorno desintegrativo da infância, o transtorno de Rett e o transtorno global do desenvolvimento, sem outra especificação. Ele é caracterizado por déficits em dois domínios centrais:

- déficits na comunicação social e interação social;
- padrões repetitivos e restritos de comportamento, interesses e atividades.

De acordo com a APA (2014, p. 31), esses transtornos do neurodesenvolvimento

[...] tipicamente se manifestam cedo no desenvolvimento, em geral antes de a criança ingressar na escola, sendo caracterizados por déficits no desenvolvimento que acarretam prejuízos no funcionamento pessoal, social, acadêmico ou profissional.

O transtorno do espectro autista somente é “diagnosticado quando os déficits característicos de comunicação social são acompanhados por comportamentos excessivamente repetitivos, interesses restritos e insistência nas mesmas coisas” (APA, 2014, p. 31).

Desse modo, o transtorno pode se apresentar em diferentes níveis, a saber:

- **Nível 1** (leve): requer pouco suporte. Pode gerar dificuldades para se comunicar, porém isso não limita as interações sociais. A independência é impedida por problemas de organização e planejamento;
- **Nível 2** (moderado): requer suporte. Suas características são semelhantes às do nível 3, todavia com menos intensidade no que se refere aos transtornos de comunicação e deficiência de linguagem;
- **Nível 3** (severo): demanda maior suporte/apoio. As pessoas desse grupo apresentam um déficit considerado grave nas habilidades de comunicação verbal e não verbal. Elas necessitam de suporte para se comunicar e apresentam dificuldade nas interações sociais, além da cognição reduzida. Possuem perfil inflexível no comportamento, têm dificuldade de lidar com mudanças e, quando não estimuladas, tendem ao isolamento social (APA, 2014).

Em síntese, o TEA caracteriza-se por déficits persistentes na comunicação social e na interação social em múltiplos contextos, incluindo déficits na reciprocidade social, em comportamentos não verbais de comunicação usados para interação social e em habilidades para desenvolver, manter e compreender relacionamentos. Além dos déficits na comunicação social, o diagnóstico do transtorno do espectro autista requer a presença de padrões restritos e repetitivos de comportamento, interesses ou atividades (APA, 2014).

Quando se trata do aspecto educacional, esses déficits de desenvolvimento podem causar desde “limitações muito específicas na aprendizagem ou no controle de funções executivas até prejuízos globais em habilidades sociais ou inteligência” (APA, 2014, p. 31). Como, por conseguinte, ensinar/adaptar CDI para sujeitos com TEA?

Pré-cálculo e alguns “passatempos” para não passar o tempo do raciocínio matemático

O objetivo desta parte da obra é recordar alguns conceitos prévios que, em teoria, discentes que cursam a disciplina de Cálculo deveriam conhecer, como funções, trigonometria, logaritmos etc. Procuramos dinamizar atividades usando, sempre que possível, material concreto manipulável.

Entende-se por “pré-cálculo” uma revisão das principais funções vistas pelos discentes nos ensinos fundamental e médio, que serão utilizadas na disciplina de Cálculo I. Todavia, ao longo destes mais de 25 anos de magistério no ensino superior, tenho observado que há várias dificuldades em operações numéricas básicas.

Exemplificando: no Cálculo II, há a técnica de integração conhecida como “integração por frações parciais”. O principal problema percebido na maioria dos discentes não está em integrar, tampouco no contexto da palavra “parciais”. Sobra, então, “frações”. Isso mesmo, operação com frações.

O problema não ocorre só com essas operações, mas também com a radiciação. Por exemplo, erroneamente, alguns estudantes usam $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ e similares... $(x+y)^2 = x^2 + y^2$.

Pense em exemplos numéricos (a interrogação abaixo da igualdade deve ser entendida como um questionamento: será que é verdade?):

$$\begin{aligned}\sqrt{16+9} &\stackrel{?}{=} \sqrt{16} + \sqrt{9} \\ \sqrt{25} &\stackrel{?}{=} 4 + 3 \\ 5 &\neq 7\end{aligned}$$

Logo, $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

Cuidado! Outro erro muito frequente:

$$\frac{a+b}{b} = a$$

Ou seja, o discente “simplifica b”. Tal operação só é possível no produto (desde que o denominador seja...). Vide uma falha por meio de números:

$$\begin{aligned}\frac{10+20}{20} &\stackrel{?}{=} 10 \\ \frac{10+20}{20} &= \frac{30}{20} = 1,5 \neq 10\end{aligned}$$

Repetindo: esta parte do livro visa a apresentar algumas atividades estimulantes, úteis para discentes com e sem deficiência visual, ou com TEA, entre outros que precisam do Cálculo, mas que sentem dificuldades nesse campo do saber. Abrangemos desde dificuldades na compreensão de dado conceito até a operacionalização de limites ou derivadas ou integrais.

Dobrando uma folha de papel e suas “consequências” matemáticas!

Considere uma folha (em geral A4, mas pode ser qualquer outra folha em formato retangular). Siga, por favor, as seguintes ideias – não farei uso de figuras no momento! Motivo: “seguir os comandos!”.

- a. Se você não realizar nenhuma dobra, quantos retângulos você tem? Resposta: um retângulo.
- b. Se você realizar uma dobra ao meio na folha, ou no sentido da base ou no sentido da altura, **MAS NÃO DOBRE NA DIAGONAL**, quantos **PEQUENOS RETÂNGULOS** você terá? Resposta: dois pequenos retângulos.
- c. Estando a folha dobrada ao meio, se você realizar uma outra dobra ao meio na folha, ou no sentido da base ou no sentido da altura, **MAS NÃO DOBRE NA DIAGONAL**, quantos **PEQUENOS RETÂNGULOS** você terá? Resposta: quatro pequenos retângulos.
- d. Estando a folha dobrada em quatro partes, se você realizar uma outra dobra ao meio na folha, ou no sentido da base ou no sentido da altura, **MAS NÃO DOBRE NA DIAGONAL**, quantos **PEQUENOS RETÂNGULOS** você terá? Resposta: oito pequenos retângulos.

Para reflexão:

- » Se você estiver usando uma folha A4, vamos aproximar as dimensões para 20 cm por 30 cm, qual a área? E o perímetro?
- » Agora, encontre a área e o perímetro de cada pequeno retângulo obtido com: uma dobra, duas dobras e três dobras. O que observou?

Perceba, **em relação à área**, que:

- » Nenhuma dobra implica 1 retângulo (de área $A = 600 \text{ cm}^2$).
- » Uma dobra implica dois pequenos retângulos, cada um com área de 300 cm^2 (que corresponde a $A/2$).

- » Duas dobras implicam quatro pequenos retângulos, cada um com área de 150 cm^2 (que corresponde a $A/4$).
- » Três dobras implicam oito pequenos retângulos, cada um com área de 75 cm^2 (que corresponde a $A/8$).
- » ...
- » Conclusão?

1. *Quais as medidas de uma folha de papel A3? Qual sua área? Qual seu perímetro?*
2. *Dobrando uma folha de papel A3 em quatro partes (conforme ilustrado/argumentado anteriormente), em relação à área inicial, qual o valor de cada pequeno retângulo formado?*
3. *Prepare uma folha no formato de um quadrado. Após quantas dobras (conforme ilustrado/argumentado anteriormente), cada pequeno retângulo terá área $1/16$ da área inicial?*

Jogando com palitos (Relato de experimento com discentes cegos)⁴

Utilizamos varetas do material dourado e uma mesa com bordas grossas, de modo que facilitasse o uso das peças (estaremos inserindo funções).

Formar quadrados com palitos

Inicialmente, confeccionamos alguns quadrados e fomos fazendo observações:

- Com um palito em cada lado, são necessários quatro palitos para formar um quadrado;
- Com dois palitos em cada lado, são necessários oito palitos para formar um quadrado;

⁴ Recorte de diálogos da minha tese: *Matemática e deficiência visual* (2010).

- Foi solicitado que o aluno fizesse quadrados com lados três palitos e, depois, com lados de medida quatro palitos. O aluno observou que:
 - » Com três palitos em cada lado, são necessários doze palitos para formar um quadrado;
 - » Com quatro palitos em cada lado, são necessários dezesseis palitos para formar um quadrado.

Com base no que ele (sujeito cego) estava formando, solicitamos que dissesse quantos palitos seriam necessários para confeccionar um quadrado com lado cinco; ele respondeu, rapidamente, que seriam necessários vinte palitos. Em seguida, mesma pergunta anterior, caso os lados tivessem como medida seis palitos. Rapidamente, respondeu vinte e quatro.

Evitando uma sequência aditiva, perguntamos: caso o quadrado tivesse lado oito palitos, quantos palitos seriam necessários? Em cerca de dez segundos, ele respondeu quarenta. Indagamos como estava realizando tais contas, ao que ele respondeu: “como o quadrado tem os quatro lados iguais, então multiplico por quatro a quantidade de palitos que eu quero colocar nos lados”.

Formar triângulos equiláteros com palitos

Assim como na atividade de confecção de quadrados, fizemos as duas primeiras construções, com lado um e depois com lado dois palitos. Todavia, desta vez, não fizemos observações iniciais. Foi solicitada a construção de um triângulo equilátero de lado três palitos, depois de lado quatro palitos. Em seguida, fazendo apenas contas de cabeça, triângulos do mesmo tipo com lados cinco, sete e dez palitos.

O discente respondeu: “Como o triângulo equilátero tem os três lados iguais, então multiplico por três a quantidade de palitos que eu quero colocar nos lados”. E você, nobre leitor(a), sem a apresentação das figuras, está compreendendo o que foi realizado (construído) até aqui?

Formar fileira de quadrados com palitos

Fizemos um quadrado com um palito de lado (medida do lado igual ao comprimento de um palito). Em seguida, acrescentamos mais três palitos para formar um segundo quadrado. Solicitamos que o aluno X fizesse o mesmo.

Pedimos que ele dissesse quantos palitos foram utilizados para compor a fileira com três quadrados, depois com quatro e depois com cinco. Ele contou e respondeu, respectivamente, 10, 13 e 16 palitos.

Solicitamos que fornecesse a quantidade de palitos para formar seis, sete e dez quadrados. Para os dois primeiros, não demorou a responder: 19 e 22. Mas, para dez quadrados enfileirados, não soube responder. Indagamos como havia encontrado os valores 19 e 22. Segundo ele, “basta somar três palitos, pois estou colocando três palitos”.

Solicitamos que desconstruísse a figura e refizesse observando outra maneira de formar a figura. Desta vez, ele conseguiu responder a quantidade de palitos para formar dez quadrados enfileirados; para tanto, foi fazendo contas com os dedos e dizendo em voz baixa com quantos quadrados ele estava:

- Com cinco quadrados, eu tenho 16 palitos;
- Com seis quadrados, tenho 16 mais três, que dá 19;
- Para sete quadrados... 19 mais três dá 22;
- Para ter oito quadrados... 22 mais três, que dá 25;
- 25 mais três dá 28, e eu fico com nove quadrados;
- 31 palitos é a resposta, pois é 28 mais três.

Fizemos uma intervenção: segurando nas mãos dele, separamos o primeiro quadrado como sendo um palito mais três palitos. Para o segundo quadrado, colocamos mais três palitos; assim, para formar o segundo quadrado, nós precisávamos de um palito mais dois grupos de três palitos.

Para o terceiro quadrado, seriam necessários três grupos de três palitos e um palito que se encontrava no canto da mesa. Perguntamos se ele estava entendendo o que estávamos fazendo. Ele respondeu que sim. Por sua vez, quando solicitado a dizer como seria a construção para o próximo quadrado, ele ficou calado.

Nesse exemplo, a ideia prática é escrever o número de palitos, y , como sendo a expressão $y = 1 + 3n$, onde n é o número de quadrados.

- » **O que caracteriza uma função polinomial do 1º grau? Como é seu gráfico? Recordar situações envolvendo-as! Oportunamente, aprofundaremos o referido conteúdo!**

O jogo dos quatro quatros...

Podemos⁵ escrever de 0 a 9 usando quatro números 4 e os sinais:

- Da adição: +
- Da subtração: -
- Da multiplicação: *
- Da divisão: /
- Parênteses: ()

- » **Motivo deste conteúdo no livro: discentes entenderem a importância da ordem dos sinais, bem como do uso de parênteses como prioritário em relação às outras operações.**⁶

Por exemplo, $0 = 4 + 4 - 4 - 4$ ou $(4 - 4)/(4 + 4)$, ou também $(4 - 4)*4/4$. Perceba que há mais de uma maneira de escrever um número inteiro dado (entre zero e nove, incluindo extremos). A importância desse jogo – reforçamos – está no uso coerente dos parênteses e das operações. Por exemplo, $4 + 4/4$ não é o mesmo que $(4 + 4)/4$.

⁵ Adaptado do livro *O homem que calculava*, de Malba Tahan.

⁶ Podemos fazer até 99, usando operações envolvendo potenciação!

No primeiro caso, inicialmente calculamos a divisão de 4 por 4, e o resultado é acrescentado de 4; perceba o uso dos parênteses ($4 + 4/4 = 4 + 1 = 5$). Equivale a:

$$4 + 4/4 = 4 + \frac{4}{4} \neq \frac{4 + 4}{4} = (4 + 4)/4$$

No segundo caso, resolvemos primeiro os parênteses, $4 + 4 = 8$. O resultado é dividido por 4. Neste caso, a resposta é dois.

Nobre leitor(a), antes de olhar uma resposta dada, quebre um pouco a cabeça para gerar de 1 até 9 usando os quatro quattros.

$$1 = (4 + 4)/(4 + 4)$$

$$2 = 4*4/(4 + 4)$$

$$3 = (4 + 4 + 4)/4$$

$$4 = 4 + (4 - 4)/4$$

$$5 = (4*4 + 4)/4$$

$$6 = (4 + 4)/4 + 4$$

$$7 = 4 + 4 - 4/4$$

$$8 = 4*4/4 + 4$$

$$9 = 4 + 4 + 4/4$$

Caríssimo leitor e prezada leitora, vocês podem fornecer de outra maneira os valores indicados?

Trabalhando com papéis

Com auxílio de papéis, queremos argumentar:

- $a/b + c/d = (ad + bc)/cd$;
- $a^2 + b^2 = c^2$.

Material necessário:

- 2 folhas de papel A4 ou ofício, limpo ou rabiscado;
- 1 régua;
- 1 lápis ou 1 caneta.

Faremos uso de uma linguagem mais popular. Pegando uma folha de papel, que tem o formato de um retângulo, vamos transformá-la em um quadrado.

Vamos seguir as seguintes instruções:

- a) Sejam A, B, C e D os quatro vértices, sendo AB e CD os lados menores, e BC e AD os lados maiores.
- b) Pegar o vértice D e levar para o lado BC, de modo que o lado DC fique sobre o lado BC.
- c) Seja E em BC, tal que $CE = CD$.
- d) Pegar o vértice C e levar para o lado AD, de modo que o lado DC fique sobre o lado AD.
- e) Seja F em AD, tal que $DF = CD$.
- f) Com a régua alinhada passando pelos pontos E e F, cortar o papel.
- g) FECD é um quadrado (por quê?).

Agora, vamos “pegar” o retângulo ABEF e vamos dividi-lo ao meio em relação ao lado BE. Repare que os dois retângulos são idênticos.

Compreender soma de frações:

$$a/b + c/d = (ad + bc)/bd$$

Vamos tentar assimilar tal resultado via exemplos:

Exemplo 1: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

Pegar duas tiras idênticas e:

- a. Pegar a primeira tira e dobrá-la ao meio (em relação ao maior lado).
- b. Pegar a outra tira e dobrá-la em três partes iguais (em relação ao maior lado).
- c. Note que as tiras estão com tamanhos diferentes.
- d. Abrindo a primeira tira, vamos hachurar⁷ uma das duas partes para caracterizar 1 de 2, isto é, identificar $\frac{1}{2}$.

⁷ No caso de alunos cegos, podem-se usar fitas adesivas ou indicar com pontos em Braille.

- e. Abrindo a outra tira, vamos hachurar uma das três partes para caracterizar 1 de 3, isto é, identificar $1/3$.
- f. Voltar ambas as tiras para as dobras iniciais, isto é, dobrar a primeira ao meio e a segunda em três partes iguais.
- g. Para que elas voltem a ficar do mesmo tamanho, aquela que foi dobrada ao meio será dobrada em três partes iguais, e a que foi dobrada em três partes iguais será dobrada ao meio (sempre em relação ao maior lado).
- h. Note que estão com o mesmo tamanho. Abrindo ambas, percebemos que em cada uma existem 6 dobras e que:
 - i. onde tínhamos $1/2$, agora temos 3 de 6, isto é, $3/6$;
 - j. onde tínhamos $1/3$, agora temos 2 de 6, isto é, $2/6$;
 - k. colocando as tiras de costas uma para a outra, reparamos que, em um lado, temos 3 partes marcadas e, no outro, temos 2 partes marcadas; assim, temos 5 retângulos marcados de 6. Conclusão: $1/2 + 1/3 = 5/6$.

Exemplo 2: $3/4 + 1/5$

Pegar duas tiras idênticas e:

- a. Pegar a primeira tira e dobrá-la em quatro partes iguais (em relação ao maior lado).
- b. Pegar a outra tira e dobrá-la em cinco partes iguais (em relação ao maior lado).
- c. Note que as tiras estão com tamanhos diferentes.
- d. Abrindo a primeira tira, vamos hachurar três das quatro partes para caracterizar 3 de 4, isto é, identificar $3/4$.
- e. Abrindo a outra tira, vamos hachurar uma das cinco partes para caracterizar 1 de 5, isto é, identificar $1/5$.
- f. Voltar ambas as tiras para as dobras iniciais, isto é, dobrar a primeira em quatro partes e a segunda em cinco partes iguais.
- g. Para que elas voltem a ter o mesmo tamanho, aquela que foi dobrada em quatro partes será dobrada em cinco partes iguais, e a que foi dobrada em cinco partes iguais será

dobrada em quatro partes iguais (sempre em relação ao maior lado).

- h. Note que estão com o mesmo tamanho. Abrindo ambas, percebemos que em cada uma existem 20 dobras e que:
 - i. onde tínhamos $\frac{3}{4}$, agora temos 15 de 20, isto é, $\frac{15}{20}$;
 - j. onde tínhamos $\frac{1}{5}$, agora temos 4 de 20, isto é, $\frac{4}{20}$;
 - k. colocando as tiras de costas uma para a outra, observamos que, em um lado, há 15 partes marcadas e, no outro, temos 4 partes marcadas; assim, temos 19 retângulos marcados de 20. Conclusão: $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$.

Quais conclusões podem ser tiradas de tais procedimentos? Coincidem ou não com a soma de frações? (Deixar que os alunos cheguem às suas respectivas conclusões!).⁸

Uma compreensão de: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Com o auxílio de papel no formato de um quadrado, medir três dedos (ou dois) de cima para baixo (ou de baixo para cima, que é a mesma coisa!) – e a mesma medida da esquerda para a direita (ou da direita para a esquerda). Marcando essas medidas e cortando o papel, ficamos com quatro pedaços de papel: um pequeno quadrado, um quadrado grande e dois retângulos idênticos.

Se considerarmos “a” como a medida dos dedos e “b” como a medida que sobrou, reparamos que o quadrado, antes de ser cortado, tem lados de medida $a + b$ e a área, a qual é o produto da base pela altura (não custa lembrar!), é $(a + b)^2$. Ora, como ela é a junção dos quatro pedaços de áreas:

- Quadrado pequeno de lado a: área a^2 ;
- Quadrado grande de lado b: área b^2 ; e
- Retângulos de lados a e b: área ab , daí, $2ab$ (pois são dois).

Assim, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

⁸ Dobrar é o mesmo que multiplicar.

Um procedimento para justificar resultado de: $a^2 - b^2$

Façamos a leitura seguinte: quadrado de lado “a” menos quadrado de lado “b” (diferença entre os quadrados de a e de b). Desenhe um quadrado de lado “a”. Dentro deste, desenhe um quadrado de lado “b” (é claro que $a > b$). Recorte o quadrado de lado “b”. Temos algo parecido com um “L”. Dobre e recorte. Tente imaginar a figura!

Temos, então, um retângulo. Um dos lados tem medida $a - b$. O outro, por ser uma junção – e juntar é igual a somar –, tem medida $a + b$. Lembrando que há outras maneiras de se apresentar o resultado. Assim, a área do retângulo é dada por $(a - b)(a + b)$. Por conseguinte, temos $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Um exemplo numérico do uso da expressão: **calcular o produto de 58 por 62**. Ora, $58 = 60 - 2$ e $62 = 60 + 2$, daí $58 \times 62 = (60 - 2)(60 + 2) = 60^2 - 2^2 = 3600 - 4 = 3596$.

Fixando conceitos:

1. Usando tiras de papéis, conforme estratégia anteriormente descrita, calcular a soma $1/5 + 1/4$.
2. Usando os quatro quatros e mais operações de potenciação e radiciação, encontre uma escrita para (a) 16 e (b) 68.

Spoiler: você pode mexer um pouco na escrita fornecida!

Exemplo: $4^4/(4+4)$.

$$\frac{4^4}{4+4} = \frac{256}{8} = 32$$

Desafio: (Os 83 caprinos) Dois irmãos viajavam pelo sertão cearense quando, ao chegarem em dada localidade, notaram que havia três homens discutindo em alta voz. Procurando saber o que estava ocorrendo, perguntaram para alguns idosos que observavam a discussão.

- Ficaram sabendo que eram três irmãos que discutiam pela herança do pai. O pai dos homens possuía uma criação de cabras e tinha determinado que: o filho mais velho deveria receber $\frac{1}{2}$ da quantidade de cabras; o segundo filho, $\frac{1}{3}$; o terceiro filho, $\frac{1}{7}$ (cada fração correspondendo à parcela da vida em que seus filhos o ajudaram).
- Todavia, no momento da divisão dos caprinos, havendo 83 cabras, nenhum dos irmãos aceitava “abrir mão” de sua fração da cabra. Ou seja, o mais velho passou metade de sua vida ajudando o pai; o mais novo, um sétimo. O filho mais velho deveria receber $\frac{1}{2}$ de 83, o que dá 41,5 cabras. Mas o que seria 0,5 cabra? Seria a metade superior? Inferior? Direita?
- O mesmo ocorre com os demais: o segundo deveria receber $\frac{1}{3}$ de 83, que equivale a 27,66; e o mais novo deveria receber $\frac{1}{7}$ de 83, que equivale, aproximadamente, a 11,85. Ou seja, 0,666 e 0,85 de uma cabra valeriam qual parte da cabra?

Um dos dois irmãos, fã da matemática, sugeriu: se eu juntar a nossa cabra com a de vocês, o total será 84. Confere? Assim:

- 1º filho: $\frac{1}{2}$ de 84 = 42
- 2º filho: $\frac{1}{3}$ de 84 = 28
- 3º filho: $\frac{1}{7}$ de 84 = 12

Mas somando $42 + 28 + 12 = 82$. Como explicar esse fato?

Introdução ao cálculo

Recordemos que, em geral, a disciplina **Cálculo I** tem a seguinte ementa:

- **Ementa**: Limites; derivadas; taxas relacionadas; funções transcendentais; máximos e mínimos; gráficos de funções; problemas de otimização; método de Newton; primitivas; integrais indefinidas; integração por substituição.

Reforçamos que esta obra não deve ser lida como um livro de Cálculo adaptado. É o contrário! Diante de determinados conteúdos, apresentamos algumas estratégias que incluem comunicação ativa – isto é, formas de abordagem que visem a estimular a criatividade dos discentes – e alguns materiais concretos manipuláveis que podem ser utilizados.⁹

O que é um limite?

- Limite experimental não surge da matemática (aliás, a matemática não depende da experimentação). Ele é fruto do pesquisador de ciências exatas. É um número, com ou sem

⁹ Nobre leitor(a), caso tenha interesse em aprofundar metodologias, recomendamos que acessem no repositório da UFC a dissertação de Rosângela Albuquerque e a tese de Miguel Silva!

unidade, para o qual tende o valor de uma propriedade física que está sendo objeto de estudo.

- Limite matemático é o que resulta da definição de limite (que será apresentada mais adiante). Eis alguns exemplos de limites:

Ex.1: Na cinemática, se x é o espaço percorrido por um móvel em um certo tempo t , definimos a velocidade instantânea do móvel (v) e sua aceleração instantânea (a) por:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Ex.2: A potência média é definida pela relação entre o trabalho realizado (ΔW) em um intervalo de tempo (Δt). A potência instantânea é, por definição:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

Ex.3: Densidade de carga elétrica. Seja Δq a variação de uma carga. Assim:

$$\text{Dens. linear} \quad \lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}$$

$$\text{Dens. superficial} \quad \sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}$$

$$\text{Dens. volumétrica} \quad \rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$$

Vários outros exemplos poderiam ser indicados. O importante é: o que é limite matemático? Como resolver? Aliás, sempre terá resposta?

Antes, porém, recordemos algumas das funções que serão muito usadas na disciplina de Cálculo I. Iniciemos pela função polinomial do 1º grau: $\mathbf{F(x) = kx + b}$, sendo $k \neq 0$. Com efeito, se $k = 0$, temos a função constante $f(x) = b$ (como fica seu gráfico?)

Lembrar que, se $k > 0$, a função é crescente e, se $k < 0$, a função é decrescente (lembrem como é o gráfico em cada caso?). Vamos apresentar duas situações com uso da função (polinomial) do 1º grau.

Exemplo I – Como relacionar escalas em graus Celsius e graus Fahrenheit?

- O que precisamos saber?
- Como interagir com as informações?
- Fazer uma imagem ou figura da situação (sempre que possível).

Iniciando a solução:

Escala Celsius: A água é o elemento mais importante para a vida na Terra. A escala Celsius possui o ponto zero na temperatura em que a água congela e o ponto 100 na temperatura em que a água ferve. As medidas, então, são feitas em graus Celsius (°C).

Escala Fahrenheit: Fahrenheit escolheu como ponto zero a temperatura de congelamento de uma mistura de água e sal e, como ponto máximo (96), a temperatura de um homem sadio. Dessa forma, o congelamento da água pura ocorre a 32 °F e a ebulição a 212 °F.

» Tente usar papéis para entender proporção. Então:

$$\frac{T_C - 0}{100 - 0} = \frac{T_F - 32}{212 - 32} \therefore T_C = \frac{5}{9} (T_F - 32)$$

- » Fazer gráfico!!!
- » 59 °F equivale a qual temperatura em Celsius?
- » **Pesquisar outras funções (polinomiais) do 1º grau em seu curso!**

Funções polinomiais do 2º grau. São funções do tipo $y = kx^2 + bx + c$, com $k \neq 0$. Várias situações estão associadas a esse tipo de função. Por exemplo (identificar cada termo):

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

Há aplicações, entretanto, em que a função vem implícita. Por exemplo: **dentre todos os retângulos de perímetro 20 cm, qual o de maior área?** Para resolver esse problema, torna-se interessante recordar:

- » O que é um retângulo?
- » O que se entende por perímetro?
- » Como calcular sua área?
- » E onde “entra” a maior área?

SOLUÇÃO

Sejam x e y as medidas dos lados do retângulo. Assim, perímetro 20 implica $2x + 2y = 20$. Claro, com $x > 0$ e $y > 0$ (por qual motivo?). Simplificando: $x + y = 10$.

Área = xy . Como ainda estamos aprendendo cálculo com uma variável, torna-se interessante encontrar uma relação (vínculo) entre x e y de tal modo que a função de duas variáveis vire função com uma única variável.

De $x + y = 10$, segue-se que $y = 10 - x$. E, por conseguinte, área = xy . Substituindo y por $10 - x$ na expressão, a área passa a ser função de x : $g(x) = x(10 - x)$, desde que $0 < x < 10$ (como assim?).

Lembre-se que $y > 0$. Dado que: $y = 10 - x$, então $10 - x > 0$ e $10 > x$.

Então, $f(x) = -x^2 + 10x$, $0 < x < 10$. E como usar a maior?

...

- » Recorde que o gráfico de $g(x) = kx^2 + bx + c$ será uma parábola com a concavidade voltada para baixo $\cap$ e, se $k > 0$, a concavidade é voltada para cima $\cup$. No vértice, por conseguinte, há o maior (se $k < 0$) ou o menor (se $k > 0$) valor da função.

Não esquecer (verificar de onde vem cada expressão!):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2k} \quad \text{e} \quad x_v = -\frac{b}{2k}$$

...

De volta ao problema, $g(x) = -1x^2 + 10x + 0$. Comparando com $y = kx^2 + bx + c$, segue-se que os valores de k , b e c serão, respectivamente, -1 , 10 e 0 .

Logo, no vértice, $x = -10/(-2) = 5$. E $y = 5$. Por conseguinte, o retângulo de perímetro 20 cm de maior área é um quadrado de lado 5 cm.

Já que abordamos o tópico área, **eis algumas aplicações atreladas ao cálculo de áreas**. Considere a função $v = v_0 + at$ (o que representa esta função?).

Assim, de um instante t_1 até um instante t_2 , a área abaixo da reta e acima do eixo dos tempos (nobre leitor(a), consegue imaginar tal situação, dado que esse conteúdo foi apresentado no ensino médio, bem como cobrado no Enem? Procure figuras...) representa a função deslocamento.

Outra situação: quando a força aplicada não permanece constante ao longo do tempo, a intensidade do impulso (pesquise para saber mais sobre o impulso) pode ser calculada por meio da área do gráfico do módulo da força pelo tempo. Já em um gráfico força $\times$ distância (ou deslocamento), a área representa o trabalho realizado.

- » Como calcular a área de uma região (plana) não tradicionalmente calculada no ensino médio?

Por exemplo: **encontrar a área abaixo da curva $y = x^2$, acima do eixo x , limitada lateralmente entre as retas $x = 1$ e $x = 3$.**

Faça um esboço da figura. Como parece um trapézio, faremos aproximações.

Uma aproximação direta por meio de um segmento de reta unindo os pontos (1, 1) e (3, 9):

- Você lembra a fórmula da área de um trapézio retângulo? Seja B a medida da base maior, b a medida da base menor e h a altura do trapézio. Assim, $\frac{(B + b)}{2}h$.
- No caso, não esquecer de “girar” a figura. Portanto, $B = f(3) = 3^2 = 9$; $b = f(1) = 1^2 = 1$ e $h = 3 - 1 = 2$. Logo: a área aproximada é 10 (unidades de área!).
- Todavia, o segmento de reta passou por cima da curva. Logo, a área é um valor em excesso.
- Como refinar? Vamos verificar se, com dois trapézios **de mesma base (por razões didáticas)**, conseguimos melhorar esse valor.

2ª aproximação: podemos gerar dois trapézios. Fazer $[1, 2] \cup [2, 3]$:

- 1º trapézio tem base maior $f(2) = 2^2 = 4$ e base menor $f(1) = 1^2 = 1$.
- Sua altura será $2 - 1 = 1$. Logo, sua área será (verificar) igual a 2,5 u.a.
- 2º trapézio tem base maior $f(3) = 3^2 = 9$ e base menor $f(2) = 2^2 = 4$.
- Sua altura será $3 - 2 = 1$. Logo, sua área será (verificar) igual a 6,5 u.a.
- Logo, juntando as áreas, temos 9 u.a.

3ª aproximação: podemos gerar três trapézios.

Fazer $\left[1, \frac{5}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right] \cup \left[\frac{7}{3}, 3\right]$

- Você entende como chegamos a tais intervalos? Consideramos o tamanho (no caso em questão, $3 - 1 = 2$) e o dividimos por 3 (quantidade de intervalos desejados).
- 1º intervalo vai de 1 até $1 + 2/3 = 5/3$.
- 2º intervalo, de $5/3$ até $5/3 + 2/3 = 7/3$.
- Por fim, 3º intervalo irá de $7/3$ até $7/3 + 2/3 = 9/3 = 3$.
- Como já sabemos – por razões didáticas –, a altura de cada trapézio será o tamanho de cada intervalo, no caso, $2/3$.
- Área do 1º trapézio: $\frac{f(\frac{5}{3}) + f(1)}{2}h$ – depois calculamos!
- Área do 2º trapézio: $\frac{f(\frac{7}{3}) + f(\frac{5}{3})}{2}h$ – depois calculamos!
- Área do 3º trapézio: $\frac{f(3) + f(\frac{7}{3})}{2}h$ – depois calculamos!
- Notaram que podemos colocar em “evidência” $h/2$?
- Perceberam que, à exceção dos extremos, no caso $f(1)$ e $f(3)$, os intermediários foram somados duas vezes?

Método dos trapézios

A regra do trapézio é uma aproximação um pouco grosseira para o valor da integral (área), o que pode ser verificado tanto graficamente quanto pela expressão do erro. Contudo, se aplicarmos dentro de um certo intervalo $[a, b]$ a regra do trapézio repetidas vezes, a aproximação será melhor, conforme podemos observar. Favor, fazer uma figura. O método consiste em:

$$A = \frac{h}{2} \{f(x_0) + 2[f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})] + f(x_n)\}$$

Conclua as contas!

Passemos agora para uma função que será muito utilizada em aplicações. Vamos defini-la por meio de uma área! Será a área abaixo da curva $y = 1/x$, acima do eixo x e limitada lateralmente por $x = 1$ e $x = b$ (com $b > 1$).

Mas por qual motivo a função $1/x$? Bem, mais adiante veremos que, sob dadas condições, funções como $\text{sen}x$, $\text{cos}x$ etc. podem ser transformadas em polinômios. *Spoiler*:

$$\text{sen}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\text{cos}x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Considere, desde que $x \neq 0$,

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_0 = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right)$$

Percebe que há $1/x$?

Pois bem, definiremos a função $\ln x$ como: logaritmo de “ x ” na base “ e ” – número de Euler, que será definido mais adiante.

Por exemplo, quanto vale $\ln 2$?

Usaremos o método dos trapézios com $n = 4$. Claro, quanto maior o valor de n , melhor será a aproximação.

- O tamanho de cada intervalo será o maior valor do intervalo menos o menor valor do intervalo, dividido por 4 – no caso, a escolha da quantidade de intervalos de mesmo tamanho! $\Delta x = h = (2 - 1)/4 = 1/4 = 0,25$.
- Siga a receita! Precisamos de $f(x_i)$, com i variando de 1 até 4. Logo, inicialmente, obter cada x_i .
- Já sabemos que $x_0 = 1$.
- Assim, $x_1 = x_0 + \Delta x = 1 + 0,25 = 1,25 = 5/4$.
- Adiante, $x_2 = x_1 + \Delta x = 1,25 + 0,25 = 1,50 = 3/2$.

- Daí, $x_3 = x_2 + \Delta x = 1,50 + 0,25 = 1,75 = 7/4$.
- Por fim, como já esperado, $x_4 = x_3 + \Delta x = 1,75 + 0,25 = 2$.
- $f(x_0) = f(1) = 1/1 = 1$
- $f(x_1) = f(5/4) = \dots = 4/5$
- $f(x_2) = f(3/2) = \dots = 2/3$
- $f(x_3) = f(7/4) = \dots = 4/7$
- $f(x_4) = f(2) = \dots = 1/2$

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)] \\ &= \frac{0,25}{2} \left[1 + 2 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{7}{4} + \frac{1}{2} \right] \end{aligned}$$

Concluir!

Definimos $\ln k = -\ln k$, se $0 < k < 1$.

Recordar que é indeterminação a expressão 0/0

Com efeito, verifique quanto vale cada um dos quocientes (note que são valores, individualmente, próximos a zero):

$$\frac{0,00001}{0,000000003}; \frac{0,000000000088}{0,000045}; \frac{0,000000065}{0,000000013}$$

Recordando o que são formas indeterminadas: são expressões que podem assumir quaisquer valores. Por exemplo, sabemos que 12 dividido por quatro é igual a três ($12 / 4 = 3$), porque $12 = 4 \times 3$. Bem, se $0/0 = n$, segue-se que o zero do numerador será o produto do zero do denominador pelo n . Assim, $0 = 0 \cdot n$. Todavia, qualquer número multiplicado por zero dá zero!

Definição:

Seja uma função f definida em um intervalo aberto que contém o ponto “a”, exceto possivelmente no próprio ponto “a”, e seja “L” um número real. Então: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ significa:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Interpretação:

Ao indicar $|u| < v$, isto significa que $-v < u < v$. Ou seja, $|x - a| < d$ implica $-d < x - a < d$. Somando “a” em cada membro da desigualdade, $a - d < x < a + d$. Isto é, temos uma variação no intervalo: $]a - d, a + d[$.

Traduzindo: dada a existência de um intervalo no eixo x, em torno de “a”, há um intervalo no eixo y em torno de “L”.¹⁰

Na prática, estamos tão próximos do valor indicado que, se substituirmos a variável pelo valor indicado, o erro entre o valor aproximado e o valor real praticamente é zero. Logo, basta substituir a variável pelo valor indicado.

Ex.:

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{2x^2 + x - 105}$$

Substituindo x por 7, encontraremos 0/0. Desse modo, como ambos os polinômios são divisíveis por “x - 7” (por quê? **Porque a expressão zerou!**), então:

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{2x^2 + x - 105} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x - 7)(x + 7)}{(x - 7)(2x + 15)}$$

Se $x \rightarrow 7$, então $x - 7 \neq 0$. Dessa forma, pode-se “simplificar” e gerar:

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x - 7)(x + 7)}{(x - 7)(2x + 15)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x + 7)}{(2x + 15)} = \frac{14}{29}$$

¹⁰ Em sala de aula, fazemos algumas demonstrações de limites. Não é só o “falar”. Se quiser ter acesso à forma de argumentação para cegos, favor contatar adaptacoes@gmail.com.

Limites infinitos e no infinito

Uma motivação: como encontrar a área de uma circunferência? Iniciar com polígonos regulares com n lados, $n = 6, 10$ etc.

Sendo polígonos regulares, uma estratégia é calcular áreas de triângulos e, em seguida, multiplicar por “ n ”, caso esse valor seja muito grande. A base do triângulo é o apótema “ a ” e sua altura é “ h ”. Sendo um polígono inscrito com “ n ” lados, segue-se que

$$A = n \cdot \frac{a \cdot h}{2}.$$

Lembrando: “ n ” muito grande, aproxima-se de R o valor de “ h ”, dado que “ a ” se aproxima de zero. Por sua vez, o produto “ n ” por “ a ” tende a ser o perímetro. No caso, perímetro é o comprimento $2\pi r$. Logo, $A = \pi r^2$.

O que é “infinito”?

Ao “pé da letra”, é algo sem fim. Mas, dentro de aplicações, pode ser aquilo que não se atinge. Por exemplo: supor o infinito como sendo um poço de petróleo com mais de 8.000 metros de profundidade. Se não atingir 8.000, atinge $8.000 + 10$? Ou 8.000 vezes 10 ou 8.000 elevado a 10?

Outro exemplo, compare com a seguinte ideia: se alguém não vive (física e biologicamente) 130 anos, viverá $130 + 10$? 130×10 ? 130^{10} ?

$$\infty = \begin{cases} \infty + n \\ n \cdot \infty \\ \infty^n \end{cases}$$

Sendo, *a priori*, “ n ” real maior que zero.

Formalizando: considere a função $y = 1/x$, com x diferente de zero. Ela tem grande importância porque qualquer polinômio pode ser reescrito em termos dessa função (lembra?).

O número de Euler:

Definimos $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, sendo n um número natural.

Esse resultado pode ser estendido para qualquer número real x .

Uma das utilidades do número “e” é a relação com a Matemática Financeira. Isto é, $M = C(1 + i)^n$ representa o montante M após n períodos de um capital C , investido a uma taxa i , relativa a esse período n (se o período é mensal, a taxa é mensal; se o período é diário, a taxa é diária etc.).

Quando a capitalização é contínua, temos $M = C.e^{in}$. Para chegar a esse valor, procede-se da seguinte maneira, sendo n anual e i a taxa anual.

- Se n for mensal, o novo período é multiplicado por 12, e a taxa correspondente é dividida por 12.
- Passando a considerar n diário, o novo n será $n \times 12 \times 30$, e a taxa, que está dividida por 12, $i/12$, fica dividida por 30, ou seja, $i/(12 \times 30)$.
- Passando a considerar valores a cada minuto, a cada segundo etc., temos:

$$M = C(1 + i/k)^{nk}$$

Calcule o limite quando k tende para o infinito da função M e verifique que $M = C.e^{in}$.

Sugestão: uma forma “genérica” do número “e” é obtida mudando de variável. Seja $y = 1/x$. Assim, $x \rightarrow \pm\infty$ implica que $y \rightarrow 0$.

Por conseguinte,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{1/y}$$

Logo, em $C(1 + i/k)^{nk}$, sendo que $k \rightarrow \infty$, seja $y = i/k$.

Daí,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{nk} \stackrel{(1)}{=} C \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{nk} \stackrel{(2)}{=} C \cdot \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{n \frac{i}{y}} \stackrel{(3)}{=} \\ C \cdot \left[\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{1/y} \right]^{in} \stackrel{(4)}{=} C e^{in}$$

Entendendo cada passagem – que deve ser argumentada por cada docente de modo a ficar significativa para cada discente.

- (1) Usamos o fato de que o limite de uma constante que multiplica uma função é a constante que multiplica o limite da função;
- (2) Fizemos a mudança $y = 1/k$, bem como o fato de que $k \rightarrow \infty$ implicar $y \rightarrow 0$;
- (3) Propriedades das potências: $(a^b)^p = a^{bp}$;
- (4) A forma “alternativa” de escrever o número de Euler.

$$\text{Para fixar... } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n = \left[\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{1/y} \right]^b = e^b.$$

Com efeito, sendo $u = k/x$, temos $x = k/u$ e $x \rightarrow \infty$ implica $u \rightarrow 0$. Demonstrar!

Limite fundamental da trigonometria

Por qual motivo tem esse nome? Porque todos os limites que envolvem funções trigonométricas e que têm a indeterminação 0/0 direta ou indiretamente passam por ele. Exemplificando: modelagem de marés, eletrocardiogramas, MHS, entre outros, estão associados, em sua modelagem, a funções deslocamento do tipo $y = A + B \cdot \cos(Cx + D)$, sendo constantes A, B, C e D (para cálculo inicial da função velocidade!) e x o tempo.

$$\nu_{inst}(k) := \lim_{x \rightarrow k} \frac{f(x) - f(k)}{x - k} = \lim_{x \rightarrow k} \frac{A + B \cdot \cos(Cx + D) - A - B \cdot \cos(Ck + D)}{x - k}$$

Há estratégias... Pensemos no caso mais simples! Sabemos que $\sin 0 = 0$ e $\cos 0 = 1$. Assim, façamos uma mudança de variável. Seja $w = x - k$ (pense da seguinte maneira: em ano, qual a idade de cada um de nós no ano em que nascemos? Mas não temos a mesma idade. Com efeito, nascemos em anos distintos! Como calcular, hoje, a idade de cada um de nós?).

Sendo $w = x - k$, segue-se que $x \rightarrow k$ implica $w \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow k} \frac{B \cdot \cos(Cx + D) - B \cdot \cos(Ck + D)}{x - k} = B \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\cos(Cw + Ck + D) - \cos(Ck + D)}{w}$$

Ser simples sem ser simplório! Isto é, em vez de fazer suposições, tais como $B = C = 1$ e $D = 0$, para facilitar nossas contas iniciais, notamos que podemos fazer mudanças de acordo com as necessidades. Consideremos (tais suposições podem ser feitas após indagar aos discentes o que eles observam na escrita do limite!) $R = Ck + D$ (que é constante!), para facilitar tanto a visualização quanto a argumentação.

$$B \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\cos(Cw + R) - \cos(R)}{w}$$

Notamos que a escrita ficou “enxuta”! Agora, vamos desenvolver o $\cos(Cw + R) - \cos(R)$ – nesse momento, é interessante recordar de onde vieram tais fórmulas para seno da soma, cosseno da diferença etc.¹¹

¹¹ Nobres leitores, anualmente, nosso grupo de pesquisa, junto com o G-Terco, oferece cursos de capacitação na área de matemática e deficiência visual, em que usamos material concreto para demonstrar as expressões acima argumentadas, bem como outras que são pré-requisitos para o Cálculo!

$$B \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\cos(Cw) \cdot \cos(R) - \text{sen}(Cw) \cdot \text{sen}(R) - \cos(R)}{w}$$

Procuremos deixar a escrita mais “atraente”! Vamos “simplificar” ainda mais a escrita. Considere $z = Cw$. Daí, $w \rightarrow 0$ implica $z \rightarrow 0$.

$$B \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos(z) \cdot \cos(R) - \text{sen}(z) \cdot \text{sen}(R) - \cos(R)}{z/C}$$

Ou seja,

$$BC \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos(z) \cdot \cos(R) - \text{sen}(z) \cdot \text{sen}(R) - \cos(R)}{z}$$

Notemos que $\cos(R)$ se repete. Podemos, por conseguinte, reorganizar a escrita!

$$BC \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{\cos(z) - 1}{z} \cos(R) - \frac{\text{sen}(z)}{z} \text{sen}(R) \right]$$

Uma dica: construir tabelas para averiguar que $(\text{senz})/z \rightarrow 1$ à medida que $z \rightarrow 0$. Mas tabelas são trabalhosas (sem argumentar que não são formais – no sentido matemático!). Assim, segue uma argumentação para a “construção” de uma demonstração do limite fundamental da trigonometria:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{senz}}{z} = 1$$

1. Delimitado ao primeiro quadrante.
2. Supor raio unitário. No eixo das abscissas, eixo dos “x”, considere o ponto A o ponto de interseção entre a circunferência e o eixo x.
3. Seja “O” o centro da circunferência e considere “z” o ângulo $\widehat{AOB}$, sendo B o ponto de interseção entre a circunferência e a semirreta com origem em O e que está gerando o referido ângulo.
4. Seja “r” uma (ou seria “a”) reta paralela ao eixo y passando por B. Considere C a interseção da reta r com o eixo x.
5. Com base no triângulo COB, sendo $\overline{OB} = 1$ (porque...), segue-se que $\text{senz} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}}$, ou seja, $\overline{BC} = \text{senz}$.
6. Sabemos que z é ângulo central (não esquecendo raio unitário), logo o arco de extremidades A e B corresponde ao referido ângulo.
7. Percebemos que o segmento de extremidades C e B é menor (ou igual) ao arco de extremidades A e B (em qual condição terá igualdade?).
8. Ou seja, $\text{senz} \leq z$ (como estamos no primeiro quadrante, $0 \leq (\text{senz})/z \leq 1$).
9. E agora? Vamos “prender” a expressão. Seja “t” a reta tangente à circunferência em A (ou seja, t reta paralela ao eixo dos “y” passando por A). Considere D a interseção entre as retas r e t.
10. Do triângulo AOD, $\overline{AD} = \text{tgz}$ (por qual motivo não estabelecer outras relações?).
11. Percebe-se que $z \leq \text{tgz}$, ou seja, o arco de extremidades A e B é menor (ou igual – em qual condição?) ao segmento de extremidades A e D.
12. Assim, $z \leq \frac{\text{senz}}{\cos z}$. Organizando, $\cos z \leq \frac{\text{senz}}{z}$.

13. Por conseguinte, $\cos z \leq \frac{\text{sen} z}{z} \leq 1$ e, pelo Teorema do

Confronto, quando z se aproxima de 0 (pela direita ou pela esquerda?), segue-se o resultado.

Já para encontrar o outro limite, usaremos produtos notáveis: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Por qual motivo? A relação fundamental da trigonometria indica que $\text{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$. Dado que precisamos de “ $\cos z - 1$ ”, relacionando-o com “ $\text{sen} z$ ”, então façamos: $\text{sen}^2 z = 1 - \cos^2 z$. Por sua vez, comparando $a = 1$ e $b = \cos z$, segue-se: $\text{sen}^2 z = (1 - \cos z)(1 + \cos z)$.

Assim sendo, se multiplicarmos por 1 a expressão, ela não será alterada, e $1 = k/k$, isto é, é a divisão de qualquer expressão não nula por ela mesma!

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z - 1}{z} \cdot \frac{\cos z + 1}{\cos z + 1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\text{sen}^2 z}{z(1 + \cos z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{sen} z}{z} \cdot \frac{-\text{sen} z}{1 + \cos z} = 0$$

Definição: se existir, a **derivada** em $x = a$ é definida como o seguinte limite:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Vide outras notações nos livros-textos, como dy/dx .

Onde usamos derivação? Se você recordar o tópico sobre limites, notará que uma velocidade instantânea é a derivada da função deslocamento em relação ao tempo, a aceleração instantânea é a derivada da velocidade em relação ao tempo etc.

Derivada de x^n (nos casos $n = 2$ e $n = 3$)

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

1. O numerador, $f(x) - f(a)$, no caso $n = 2$, corresponde a $x^2 - a^2$ (como se lê?).
2. Geometricamente, pensar no procedimento apresentado em tópico anterior: $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$.
3. Por conseguinte, $(x^2 - a^2)/(x - a) = x + a \dots$
4. Seja o caso $n = 3$. Desse modo, o numerador corresponde a $x^3 - a^3$ (como se lê?). Geometricamente, pensar no cubo da diferença.
5. Dica: material dourado ou caixas de creme dental (desde que contemplem as medidas). Retirando o cubo de lados (arestas) iguais a “a”, sobram quatros paralelepípedos: um com lados “x”, “x” e “x - a” (logo, volume dado por $x^2(x - a)$); outros dois com lados “a”, “a” e “x - a” (por conseguinte, volume $a^2(x - a)$ cada um); e o quarto com arestas medindo “x - a”, “x - a” e “a”, sendo seu volume dado por $a(x - a)^2$.
6. Juntando-os: $x^2(x - a) + 2(x - a)a^2 + a(x - a)^2$, e recorrendo distributividade, tem-se: $(x - a)(x^2 + 2a^2 + ax - a^2) = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$.
7. Por conseguinte, $(x^3 - a^3)/(x - a) = x^2 + ax + a^2 \dots$

Para $n > 3$, não há possibilidades geométricas (no sentido...). Desta feita, intuir.

Derivada de $f(x) = x^n$ é $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, para qualquer n real

Começaremos com n inteiro e positivo. Faremos a dedução para um certo k , um valor qualquer do domínio e, em seguida, substituiremos k por x .

$$f'(k) = \lim_{x \rightarrow k} \frac{f(x) - f(k)}{x - k} = \lim_{x \rightarrow k} \frac{x^n - k^n}{x - k}$$

Dos produtos notáveis:

$$\lim_{x \rightarrow k} \frac{(x - k)(x^{n-1} \cdot k^0 + x^{n-2} \cdot k^1 + \dots + x^0 \cdot k^{n-1})}{x - k}$$

Simplificando e aplicando o limite, segue-se o resultado.

Agora, seja n inteiro e negativo:

$$f'(k) = \lim_{x \rightarrow k} \frac{f(x) - f(k)}{x - k} = \lim_{x \rightarrow k} \frac{x^{-n} - k^{-n}}{x - k} = \lim_{x \rightarrow k} \frac{\frac{1}{x^n} - \frac{1}{k^n}}{x - k}$$

Dáí,

$$\lim_{x \rightarrow k} \frac{\frac{k^n - x^n}{x^n \cdot k^n}}{x - k} = \lim_{x \rightarrow k} \frac{-(x^n - k^n)}{x - k} \cdot \frac{1}{x^n \cdot k^n} = \lim_{x \rightarrow k} \frac{(-1)(x^{n-1} \cdot k^0 + \dots + x^0 \cdot k^{n-1})}{x^n \cdot k^n}$$

Aplicando o limite,

$$-\frac{nk^{n-1}}{k^{2n}} = -nk^{-n-1}$$

Justificando a derivada de x^n , sendo n racional, isto é, do tipo p/q , sendo p e q inteiros (e q diferente de zero).

$$g(x) = x^{p/q} \therefore [g(x)]^q = x^p$$

No caso, o z funciona (ou é o apelido) de $g(x)$.

$$z^q = x^p = \underbrace{qz^{q-1}}_{(1)} \cdot z' = px^{p-1}$$

1. Significa que derivamos ambos os membros da igualdade em relação à variável x . E por qual motivo não apareceu x' ? Porque $x' = 1$. Com efeito $(x)' = (x^1)' = 1$.

$$qz^{q-1} \cdot z' = px^{p-1} \therefore z' = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}}$$

Basta lembrar que z é o apelido de $g(x)$ e que $g(x)$, por hipótese, é $x^{p/q}$.

$$z' = \left(x^{p/q}\right)' = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{p-\frac{p}{q}}} = \frac{p}{q} x^{p-1-\left(p-\frac{p}{q}\right)} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$$

Assim, por exemplo,

$$\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} x^{1/2}$$

Derivada de senx

Apresentaremos uma demonstração, a outra é parecida. Favor, fazer!

$$f'(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h} \stackrel{(1)}{=}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)\cos(h) + \text{sen}(h)\cos(x) - \text{sen}(x)}{h} \stackrel{(2)}{=}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\text{sen}x \frac{\cosh - 1}{h} + \cos x \frac{\text{sen}h}{h} \right) \stackrel{(3)}{=} \text{sen}x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

Entendendo as etapas:

1. Desenvolvemos $\sin(x+h) = \sin(x) \cdot \cos(h) - \sin(h) \cdot \cos(x)$.
2. Organizamos, para usar resultados sobre limites trigonométricos.
3. Aplicação dos resultados.

Derivada de $f(x) = \ln(x)$

$$f'(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} \stackrel{(1)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) \stackrel{(2)}{=} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \stackrel{(3)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}h\right)^{1/h} \stackrel{(4)}{=} \ln e^{1/x} = 1/x$$

Entendendo as etapas:

1. Substituímos $f(x+h)$ e $f(x)$ pelas respectivas expressões.
2. Usamos o resultado $\ln A - \ln B = \ln(A/B)$.
3. Organizamos, para usar resultados sobre limites atrelados à função logarítmica.
4. O número de Euler.

Derivada do produto: $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

$$f'(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x+u) - f(x)}{u} \stackrel{(1)}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g(x+u) \cdot h(x+u) - g(x) \cdot h(x)}{u} \stackrel{(2)}{=} \\ \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g(x+u) \cdot h(x+u) - g(x) \cdot h(x+u) + g(x) \cdot h(x+u) - g(x) \cdot h(x)}{u} \stackrel{(3)}{=} \\ \lim_{u \rightarrow 0} \left[\frac{g(x+u) \cdot h(x+u) - g(x) \cdot h(x+u)}{u} + \frac{g(x) \cdot h(x+u) - g(x) \cdot h(x)}{u} \right] \stackrel{(4)}{=} \\ \lim_{u \rightarrow 0} \left[\frac{g(x+u) - g(x)}{u} h(x+u) + \frac{h(x+u) - h(x)}{u} g(x) \right] \stackrel{(5)}{=} g'(x) \cdot h(x) + g(x) h'(x)$$

Entendendo as “passagens” ou “etapas”:

1. Substituindo $f(x + u)$ e $f(x)$, respectivamente, por $g(x + u) \cdot h(x + u)$ e $g(x) \cdot h(x)$. Ilustrando: se $f(x) = \sin x \cdot e^x$, então $f(x + u) = \sin(x + u) \cdot e^{x+u}$. Boa ideia! Vamos, após demonstração da regra, encontrar a derivada dessa função $f(x)$.
2. Focar no que queremos alcançar. Isto é, a demonstração só será concluída quando aparecer $g'(x)$ e $h'(x)$. Assim sendo, dado que a expressão $g(x + u)$ está multiplicada por $h(x + u)$, então precisamos que $h(x + u)$ multiplique $g(x)$ para, ao colocar tal expressão em evidência, fiquemos com a escrita do limite – que está atrelada à derivada. Tente escrever separadamente $g'(x)$ e $h'(x)$.
3. Somando zero a qualquer expressão, esta não se altera. E, não esquecer, que $0 = k - k$. Logo, seja $k = g(x) \cdot h(x + u)$.
4. Organizamos a escrita, focando $g'(x)$ e $h'(x)$.
5. Aplicamos o limite.

Adequações para compreensão de somas de Riemann

O cálculo de áreas é muito importante nas ciências exatas. Com efeito, no sistema de coordenadas cartesianas, se o eixo dos “x” representar o tempo e o eixo dos “y” indicar a função velocidade, então a área da região abaixo da curva $y = f(x)$, acima do eixo x e limitada lateralmente entre as retas $x = a$ e $x = b$ representa o deslocamento. Caso o eixo y corresponda à força e x seja o deslocamento, a área é o trabalho, e assim sucessivamente.

Mas, por qual motivo considerar uma região como a descrita anteriormente (acima do eixo dos “x”, abaixo da curva $y = f(x)$ e limitada lateralmente entre as retas $x = a$ e $x = b$)? Sem esquecer, função sendo contínua!

Considere a seguinte situação: desenhar uma figura em uma folha de papel (*a priori*, sem complicar, isto é, fazer uma figura simples sem nada em seu interior!). Agora, vamos dividir a figura em quatro partes, não necessariamente iguais, dobrando a folha ao meio, no sentido da horizontal, e dobrando de novo no sentido da vertical

(ou vice-versa). Recortando as folhas, em geral, você terá uma região formada por três segmentos de reta (sendo dois paralelos entre si e perpendiculares ao terceiro) e uma parte curva.

Podemos, por conseguinte, considerar o segmento, que é perpendicular aos dois segmentos paralelos entre si, estando sob o eixo dos “x”, e os segmentos paralelos como se fossem as retas verticais $x = a$ e $x = b$. Eis uma ideia que foge das tradicionais figuras que já são apresentadas nos livros-textos.

Como adaptar? Uma estratégia é você dobrar a figura ao meio, em relação “ao eixo x”. Repetir tal procedimento quatro ou cinco vezes – vai depender do tamanho do papel! O que observamos? Notamos que, quanto mais dobras tivermos, mais pequenas figuras são formadas, que estão se aproximando cada vez mais do formato de um retângulo.

E como calcular a área de um retângulo? Repetindo: esta é uma ideia informal que inicialmente tem o objetivo de apresentar noções das somas de Riemann. Dessa forma, notamos que, se forem realizadas n dobras, então a base, denotada por Δx (já que estamos dobrando em partes iguais – em relação à base) será $(b - a)/n$, e $f(x_i)$ pode ser considerada a altura do i -ésimo retângulo formado!

Por fim, a área será o somatório de “ i ” variando de “1” até “ n ” do produto de $f(x_i)$ por Δx . Nesse momento, podemos ilustrar $f(x)$ como x^2 ou $x^2 + 10$ ou $6x - x^2$ etc. Todavia, demonstrar (para preparar o caminho para o Teorema Fundamental do Cálculo):

$$\sum_{i=1}^n c = cn \quad \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

Referências

ALBUQUERQUE, R. M. *O ensino de cálculo diferencial e integral adaptado para discente com transtorno do espectro autista e discalculia: um estudo de caso com base em Vigotski*. 2020. 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2020.

AMERICAN PSYCHIATRIC ASSOCIATION (APA). *DSM V*: manual diagnóstico e estatístico de transtornos mentais. 5. ed. Porto Alegre: Artmed, 2014.

CONSELHO BRASILEIRO DE OFTALMOLOGIA. Veja bem. *CBO em Revista*, São Paulo, v. 6, n. 16, p. 17-19, 2018. Disponível em: http://cbo.net.br/novo/publicacoes/revista_vejabem_16_online.pdf. Acesso em: 20 ago. 2024.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. 5. ed. Campinas: Unicamp, 2011.

GIL, M. (org.). *Deficiência visual*. Brasília: MEC, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/deficienciavisual.pdf>. Acesso em: 20 ago. 2024.

FREIRE, P. *Pedagogia do oprimido*. 40 ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2005.

HADDAD, M. A. O. *Habilitação e reabilitação visual de escolares com baixa visão: aspectos médico-sociais*. 2006. 183 f. Tese (Doutorado em Ciências) – Faculdade de Medicina, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/5/5149/tde-23112006-133322/publico/MariaAOnukiHaddad.pdf>. Acesso em: 20 ago. 2024.

LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica*. New York: Harper & Row Publ., 1986. v. 1.

LIRA, A. K.; BRANDÃO, J. *Matemática e deficiência visual*. Fortaleza: Editora da UFC, 2013.

SILVA, M. A. da. *Cálculo integral e deficiência visual: investigando os conceitos de volumes de cilindro e cone por meio da metodologia aprendizagem baseada em problemas (ABP)*. 2021. 198 f. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2021.

SIMMONS, G. F. *Precalculus mathematics in a nutshell: geometry, algebra, trigonometry*. St. Paul: West Publishing Company, 1987.

STEWART, J. *Cálculo*. São Paulo: Pioneira, 2009. v. 1.

THOMAS, G. B. *Cálculo*. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2011. v. 1.

Site

<https://acessibilidade.ufc.br/pt/censo/censo-2022/>. Acesso em: 21 ago. 2024.

Sobre o autor

Doutor em Educação pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Possui graduação em Matemática pela UFC (1996), mestrado em Engenharia Civil (Recursos Hídricos) pela UFC (2001). Atualmente é professor associado de Matemática para Engenharias do Centro de Tecnologia (CT) da UFC. Tem experiência na área de matemática, com ênfase em matemática inclusiva, atuando principalmente nos seguintes temas: (1) matemática adaptada para pessoas com dificuldades de aprendizagem e/ou deficiência visual; (2) análise de erros; e (3) modelos matemáticos aplicados às ciências da saúde. Professor dos programas de pós-graduação da Rede Nordeste de Ensino (RENOEN) e da Faculdade de Educação (PPGE) da UFC.

Visite nosso site:
www.imprensa.ufc.br



Av. da Universidade, 2932 – Benfica
CEP.: 60020-181 – Fortaleza – Ceará, Brasil
Fone: (85) 3366.7485 / 7486
imprensa@proplad.ufc.br

No contexto das comemorações dos 70 anos da Universidade Federal do Ceará, a Coleção de Estudos da Pós-Graduação da UFC, em sua edição 2024-2025, celebra a maturidade de uma instituição que forma, pesquisa e transforma. Composta por 30 títulos selecionados em edital público, a coleção reforça o compromisso da UFC com a qualificação da formação discente e a valorização da sua produção intelectual. Os livros refletem a vitalidade da produção acadêmica que nasce no rigor da ciência, mas dialoga com os desafios regionais e globais. Fruto de seleção pública, esta edição testemunha o papel da pós-graduação na formação de excelência e no avanço do conhecimento, reafirmando o compromisso da UFC com o futuro, além de destacar a centralidade da pós-graduação na construção de uma universidade pública de referência.

ISBN 978-85-7485-687-2

