UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FRANCISCO PEREIRA CHAVES

TEMPO MÉDIO DE SAÍDA E DESIGUALDADES ISOPERIMÉTRICAS PARA SUBVARIEDADES MÍNIMAS DE $N \times \mathbb{R}$

FORTALEZA-CE
2011

FRANCISCO PEREIRA CHAVES

TEMPO MÉDIO DE SAÍDA E DESIGUALDADES ISOPERIMÉTRICAS PARA SUBVARIEDADES MÍNIMAS DE $N \times \mathbb{R}$

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa

FORTALEZA-CE
2011

Aos meus Pais

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por toda ajuda nos momentos difíceis e pelo reconhecimento dos meus esforços.

A meus pais, por todo carinho, amor e dedicação, pelos ensinamentos e pela força que sempre me dedicaram, tornando-me capaz de alcançar meus objetivos.

A meus irmãos, por todo apoio, incentivo e confiança em mim depositados.

Aos demais familiares, avós, tios, primos e sobrinhos, pela presença em todos os momentos necessários.

Aos amigos de minha querida cidade Missão Velha, pelo incentivo.

A cada um dos meus professores, pela contribuição na minha formação pessoal e profissional, tornando capaz a realização deste trabalho.

Ao professor Gregório Pacelli Feitosa Bessa, pela orientação, pelas palavras de incentivo e confiança e por toda ajuda oferecida.

Aos professores José Fábio Bezerra Montenegro e Juscelino Pereira Silva, pela participação na banca examinadora de minha dissertação.

A todos os colegas da Pós-Graduação em Matemática da UFC, por todo apoio e sugestões recebidos e pela contribuição na realização deste trabalho.

Agradecimentos especiais aos amigos João Vítor e Tiarlos, por todo conhecimento compartilhado.

À bibliotecária Rocilda Maria Cavalcante Sales, da biblioteca do curso de Matemática, pela correção das referências bibliográficas.

À secretária Andréa, pelo auxílio indispensável em todos os momentos que precisei.

À CAPES e à FUNCAP, pelo apoio financeiro.

Resumo

Estabelece desigualdades isoperimétricas e estimativas do tempo médio de saída para subvariedades mínimas de $N \times \mathbb{R}$, onde N é uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional não-positiva. Prova desigualdades isoperimétricas para subvariedades com segunda forma fundamental dominada em espaços de Hadamard com curvatura seccional limitada.
Palavras chave: Variedades Riemannianas. Desigualdades isoperimétricas. Tempo médio de saída.

Abstract

It establishes isoperimetric inequalities and exit mean time estimates for minimal submanifolds of $N \times \mathbb{R}$, where N is a complete Riemannian manifold with sectional curvature non-positive. It proves isoperimetric inequalities for submanifolds with tamed second fundamental form in Hadamard spaces with bounded sectional curvature.
Key words: Riemannian manifolds. Isoperimetric inequalities. Exit mean time.

Sumário

Introdução

Ao longo dos últimos anos foram obtidos vários resultados [15, 16, 24, 25] relacionados com as superfícies mínimas em espaços produto $N \times \mathbb{R}$, onde N é uma superfície completa. O estudo dessas superfícies começaram com Rosemberg [30] e tem mostrado ser uma rica e interessante teoria, conduzindo ao estudo de superfícies com curvatura média constante em espaços produto [1, 3, 7, 14, 17, 26, 27].

Nosso objetivo neste trabalho é demonstrar desigualdades isoperimétricas para subvariedades mínimas de $N\times\mathbb{R}$, onde N é uma n-variedade Riemanniana completa com curvatura seccional $K_N \leq \kappa$. Em [23] e [28], Markvorsen e Palmer provaram desigualdades isoperimétricas para bolas geodésicas extrínsecas de subvariedades mínimas próprias de variedades Riemannianas completas com curvatura seccional limitada superiormente. Para ser preciso, seja $\varphi : M \hookrightarrow W$ uma imersão própria de uma variedade m-dimensional M em uma n-variedade Riemanniana completa W, e seja $B_W(R)$ uma bola geodésica em W centrada em um ponto $p = \varphi(q)$ com raio $R \leq \min\{\mathrm{inj}_W(p), \pi/2\sqrt{\kappa}\}$, onde $\pi/2\sqrt{\kappa} = \infty$ se $\kappa \leq 0$ e $\mathrm{inj}_W(p)$ é o raio de injetividade em p. A *bola geodésica extrínseca* de raio R centrada em p, denotada por $D(R)$, é definida como sendo a componente conexa suave de $\varphi(M)\cap B_W(R) = \{q \in \varphi(M);\ \mathrm{dist}(p, q) \leq R\}$ contendo p. Observe que $D(R)$ é um domínio compacto e conexo em $\varphi(M)$. Markvorsen e Palmer provaram as seguintes desigualdades isoperimétricas.

Teorema 0.1 (Markvorsen e Palmer [23] e Palmer [28]) *Suponha que $\varphi : M \hookrightarrow W$ é uma imersão mínima própria de uma variedade m-dimensional M em uma n-variedade Riemanniana completa W com curvatura seccional $K_W \leq b$, e seja $D(R)$ uma bola geodésica extrínseca em W.*

(i) *Se $b \leq 0$, então*

$$\frac{\mathrm{vol}_{m-1}(\partial D(R))}{\mathrm{vol}_m(D(R))} \geq \frac{\mathrm{vol}_{m-1}(\partial B_{\mathbb{N}^m(b)}(R))}{\mathrm{vol}_m(B_{\mathbb{N}^m(b)}(R))}. \tag{1}$$

(ii) *Se $b > 0$, então*

$$\frac{\mathrm{vol}_{m-1}(\partial D(R))}{\mathrm{vol}_m(D(R))} \geq m \cdot \frac{C_b}{S_b}(R), \tag{2}$$

onde $(C_b/S_b)(R)$ é a curvatura média constante da esfera geodésica $\partial B_{\mathbb{N}^m(b)}(R)$ de raio R na forma espacial $\mathbb{N}^m(b)$ e as funções S_b e C_b são definidas em (2.2)*. Ademais, quando $b < 0$, igualdade no item* (i) *implica que $D(R)$ é um cone mínimo em W.*

Considere uma imersão mínima $\varphi : M \hookrightarrow N \times \mathbb{R}$ de uma variedade m-dimensional M no espaço produto $N \times \mathbb{R}$, onde N é uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional $K_N \leq b \leq 0$. Seja $K \subset \varphi(M)$ um conjunto compacto conexo (todos os conjuntos compactos considerados neste trabalho têm bordo suave por partes) e seja $r_K = \mathrm{raio}(\pi_1(K))$ o raio do conjunto $\pi_1(K)$, isto é, o raio da menor bola métrica de N contendo $\pi_1(K)$, onde $\pi_1 : N \times \mathbb{R} \to N$ é a projeção sobre o primeiro fator. Denote por $p_K \in N$ o centro radial, isto é, o centro da menor bola métrica contendo $\pi_1(K)$, e suponha que $r_K < \mathrm{inj}_N(p_K)$. Neste trabalho provaremos as seguintes desigualdades isoperimétricas obtidas por Bessa e Montenegro em [6].

Teorema 0.2 *Considerando o ambiente descrito acima, temos*

$$\frac{\mathrm{vol}_{m-1}(\partial K)}{\mathrm{vol}_m(K)} \geq \frac{\mathrm{vol}_{m-2}(\partial B_{\mathbb{N}^{m-1}(b)}(r_K))}{\mathrm{vol}_{m-1}(B_{\mathbb{N}^{m-1}(b)}(r_K))}, \tag{3}$$

onde $\mathbb{N}^{m-1}(b)$ é a forma espacial $(m-1)$-dimensional de curvatura seccional constante igual a b.

Capítulo 1

Preliminares

Seja M^m uma m-variedade Riemanniana suave com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e conexão de Levi-Civita ∇. Em todo o texto suave significa de classe C^∞. Usaremos $\mathcal{F}(M)$ para denotar o anel das funções reais suaves em M. T_pM denotará o espaço tangente a M no ponto $p \in M$. Denotaremos por TM o fibrado tangente a M e por $\mathcal{X}(M)$ o espaço dos campos vetoriais suaves em M.

1.1 O Gradiente, a Divergência, o Laplaciano e o Hessiano

Definição 1.1 *Seja $f : M^m \to \mathbb{R}$ uma função suave. O* gradiente *de f é o campo vetorial suave* grad f*, definido em M por*

$$\langle \text{grad } f, X \rangle = X(f), \tag{1.1}$$

para todo $X \in \mathcal{X}(M)$.

Decorre da definição que se $f, g \in \mathcal{F}(M)$, então:

(i) $\text{grad } (f + g) = \text{grad } f + \text{grad } g$.

(ii) $\text{grad } (fg) = g(\text{grad } f) + f(\text{grad } g)$.

Observação 1.1 Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão m e seja p um ponto de M. Então existe uma vizinhança $U \subset M$ de p e m campos de vetores $E_1, ..., E_m \in \mathcal{X}(M)$, ortonormais em cada ponto de U. Uma tal família $\{E_1, ..., E_m\}$ de campos de vetores é chamada um *referencial ortonormal móvel.* Ademais, os campos E_i podem ser tomados de tal forma que, em

p, $(\nabla_{E_i} E_j)(p) = 0, \forall i, j = 1, ..., m$. Neste caso dizemos que o referencial é *geodésico* em p.

Proposição 1.1 *Seja M uma variedade Riemanniana m-dimensional e $f \in \mathcal{F}(M)$. Seja $E_1, ..., E_m$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $U \subset M$. Então, em U, temos*

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^{m} E_i(f) E_i. \tag{1.2}$$

Ademais, o segundo membro da igualdade acima independe do referencial escolhido.

Demonstração: Para a primeira parte basta ver que sendo $X = \sum_{i=1}^{m} a_i E_i$ em U, temos

$$X(f) = \sum_{i=1}^{m} a_i E_i(f) = \left\langle \sum_{i=1}^{m} a_i E_i, \sum_{j=1}^{m} E_j(f) E_j \right\rangle = \left\langle X, \sum_{j=1}^{m} E_j(f) E_j \right\rangle.$$

Por outro lado, se $\{\tilde{E}_1, ..., \tilde{E}_m\}$ for outro referencial ortonormal em U, com $\tilde{E}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} E_i$ em U, então a matriz $(a_{ij}(p))_{m \times m}$ é ortogonal em todo $p \in U$, e daí,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} \tilde{E}_j(f) \tilde{E}_j &= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} E_k \right) (f) \left(\sum_{l=1}^{m} a_{lj} E_l \right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{m} a_{kj} a_{lj} E_k(f) E_l \\ &= \sum_{k,l=1}^{m} \delta_{kl} E_k(f) E_l = \sum_{k=1}^{m} E_k(f) E_k. \end{aligned}$$

□

Proposição 1.2 *Seja $f : M^m \to \mathbb{R}$ uma função suave. Dados $p \in M$ e $v \in T_p M$, seja $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ uma curva suave tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Então*

$$\langle \text{grad } f, v \rangle_p = \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t)|_{t=0}. \tag{1.3}$$

Em particular, se p é um ponto de máximo ou mínimo local para f, então grad $f(p) = 0$.

Demonstração: Para a primeira parte basta observar que, sendo X uma extensão local de γ', temos

$$\langle \text{grad } f, v \rangle_p = (X(f))(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)|_{t=0}.$$

Suponha agora que p é ponto de máximo local para f (o outro caso é análogo). Então existe $U \subset M$ vizinhança aberta de p tal que $f(p) \geq f(q)$ para todo $q \in U$. Se $v \in T_pM$ e $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ é como no enunciado, então $f \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ tem um máximo local em 0, donde

$$\langle \text{grad } f, v \rangle_p = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)|_{t=0} = 0.$$

Como a relação acima é válida para todo $v \in T_pM$, segue que grad $f(p) = 0$.

□

Corolário 1.1 *Se $f : M^m \to \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções suaves, então*

$$\text{grad } (\varphi \circ f) = \varphi'(f)\text{grad } f. \tag{1.4}$$

Demonstração: Se $p \in M$, $v \in T_pM$ e $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é uma curva suave tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, então segue da proposição anterior que

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } (\varphi \circ f), v \rangle &= \frac{d}{dt}(\varphi \circ f \circ \gamma)(t)|_{t=0} \\ &= \varphi'(f(p))\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)|_{t=0} \\ &= \varphi'(f)\langle \text{grad } f, v \rangle_p. \end{aligned}$$

□

Proposição 1.3 *Se $f : M^m \to \mathbb{R}$ é uma função suave e $U \subset M$ é uma vizinhança coordenada, com campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^m}$, então o gradiente de f é dado em U por*

$$\text{grad } f = \sum_{k,l=1}^{m} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{1.5}$$

Em particular,

$$\|\text{grad } f\|^2 = \sum_{k,l=1}^{m} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial f}{\partial x^l}. \tag{1.6}$$

Demonstração: Se grad $f = \sum_{k=1}^m a_k \frac{\partial}{\partial x^k}$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x^l} = \left\langle \text{grad } f, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^m a_j \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle = \sum_{j=1}^m a_j \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle = \sum_{j=1}^m a_j g_{jl},$$

de modo que

$$g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^l} = \sum_{j=1}^m a_j g^{kl} g_{jl} = \sum_{j=1}^m a_j \delta_{kj} = a_k.$$

Para o que falta, temos

$$\begin{aligned} \|\text{grad } f\|^2 &= \left\langle \sum_{k,l=1}^m g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^k}, \sum_{i,j=1}^m g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle = \sum_{i,j,k,l} g^{kl} g^{ij} g_{ki} \frac{\partial f}{\partial x^l} \frac{\partial f}{\partial x^j} \\ &= \sum_{j,k,l} g^{kl} \delta_{jk} \frac{\partial f}{\partial x^l} \frac{\partial f}{\partial x^j} = \sum_{k,l} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^l} \frac{\partial f}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

□

Definição 1.2 *Seja X um campo vetorial suave em M. A* divergência *de X é a função suave* div $X : M \to \mathbb{R}$, *dada para $p \in M$ por*

$$(\text{div } X)(p) = \text{tr}\left\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\right\}, \tag{1.7}$$

onde $v \in T_pM$ e tr *denota o traço do operador linear entre chaves.*

Decorre da definição que se $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e $f \in \mathcal{F}(M)$, então

(i) div $(X + Y) = \text{div } X + \text{div } Y$.

(ii) div $(fX) = f\text{div } X + \langle \text{grad } f, X \rangle$.

Proposição 1.4 *Seja X um campo vetorial suave em M^m e $\{E_1, ..., E_m\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $U \subset M$. Se $X = \sum_{i=1}^m a_i E_i$ em U, então*

$$\text{div } X = \sum_{i=1}^m \left[E_i(a_i) - \langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle\right]. \tag{1.8}$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$, então temos em p que

$$\text{div } X(p) = \sum_{i=1}^m E_i(a_i)(p). \tag{1.9}$$

Demonstração: Pela definição de divergência de um campo vetorial, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} [E_i \langle X, Ei \rangle - \langle X, \nabla_{E_i} Ei \rangle] \\
&= \sum_{i=1}^{m} [E_i(a_i) - \langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle].
\end{aligned}$$

A segunda parte segue-se imediatamente da definição de referencial geodésico.

□

Lema 1.1 *Seja* X *um campo vetorial em* M^m *e* $U \subset M$ *uma vizinhança coordenada com campos coordenados* $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^m}$. *Se* X *for dado em* U *por* $X = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, *então a divergência de* X *é dada em* U *por*

$$\operatorname{div} X = \sum_{i,j=1}^{m} \left[\frac{\partial a_i}{\partial x^i} + a_i \Gamma_{ij}^{j} \right], \tag{1.10}$$

onde os Γ_{ij}^k *são os símbolos de Christoffel da métrica de* M *em* U.

Demonstração: Note primeiro que

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\sum_{k=1}^{m} a_k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{\partial a_k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} + a_k \nabla_{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} \right] \\
&= \sum_{j,k=1}^{m} \left[\frac{\partial a_k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} + a_k \Gamma_{ik}^{j} \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = \sum_{j,k=1}^{m} \left[\frac{\partial a_k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} + a_j \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial}{\partial x^k} \right] \\
&= \sum_{j,k=1}^{m} \left(\frac{\partial a_k}{\partial x^i} + a_j \Gamma_{ij}^{k} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.
\end{aligned}$$

Portanto, como o traço de um operador linear é o traço da matriz que o representa em qualquer base, segue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^{m} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{m} \left[\frac{\partial a_i}{\partial x^i} + a_j \Gamma_{ij}^{i} \right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \left[\frac{\partial a_i}{\partial x^i} + a_i \Gamma_{ji}^{j} \right] = \sum_{i,j=1}^{m} \left[\frac{\partial a_i}{\partial x^i} + a_i \sum_{j=1}^{m} \Gamma_{ij}^{j} \right].
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.5 *Seja X um campo vetorial suave em M^m e $U \subset M$ uma vizinhança coordenada com campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^m}$. Se X for dado em U por $X = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, então a divergência de X é dada em U por*

$$\text{div } X = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^i}(a_i \sqrt{G}), \tag{1.11}$$

onde $G = \det(g_{ij})$.

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^j &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^k} g_{ij} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} g^{kj} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} g^{kj} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} g^{kj} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} g^{kj} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} g^{jk} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} g^{kj} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} g^{kj}.
\end{aligned}$$

Afirmamos agora que

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} g^{jk} = \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial x^i}.$$

Para provar a relação acima, seja $(g^k)_i$ a matriz obtida de (g_{ij}) derivando as entradas de sua k-ésima coluna na direção de $\frac{\partial}{\partial x^i}$, i.e.,

$$(g^k)_i = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & \frac{\partial g_{1k}}{\partial x^i} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & \cdots & \frac{\partial g_{2k}}{\partial x^i} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & \frac{\partial g_{nk}}{\partial x^i} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}.$$

Desde que $G = \det(g_{ij})$ é uma função linear de cada uma de suas colunas, tem-se

$$\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial x^i} = \det(g_{ij})^{-1} \det((g^k)_i) = \det(g^{-1}(g^k)_i).$$

Segue agora de ser $g^{-1}g = Id$ que

$$g^{-1}(g^k)_i = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & A_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & A_{(k-1)k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{(k+1)k} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{nk} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

onde $A_{lk} = g^{lj}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}$. Portanto,

$$\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial x^i} = \det(g^{-1}(g^k)_i) = A_{kk} = g^{kj}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i},$$

como queríamos provar. Segue então daí e do lema anterior que

$$\begin{aligned} \text{div } X &= \sum_{i,j=1}^{m}\left[\frac{\partial a_i}{\partial x^i} + a_i\Gamma_{ij}^{j}\right] = \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial a_i}{\partial x^i} + \frac{a_i}{2G}\frac{\partial G}{\partial x^i}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial a_i}{\partial x^i} + \frac{a_i}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x^i}\right] = \frac{1}{\sqrt{G}}\sum_{i=1}^{m}\left[\sqrt{G}\frac{\partial a_i}{\partial x^i} + a_i\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x^i}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x^i}(a_i\sqrt{G}). \end{aligned}$$

□

Definição 1.3 *Seja $f : M^m \to \mathbb{R}$ uma função suave. O* Laplaciano *de f é a função suave $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = \text{div grad } f. \tag{1.12}$$

Usando as propriedades do gradiente e da divergência, temos, para quaisquer $f, g \in \mathcal{F}(M)$, que

(i) $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$.

(ii) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \text{grad } f, \text{grad } g\rangle$.

Proposição 1.6 *Sejam $f : M^m \to \mathbb{R}$ uma função suave e $\{E_1, ..., E_m\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $U \subset M$. Então o Laplaciano de f é dado em U por*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{m}\left[E_i(E_i(f)) - (\nabla_{E_i}E_i)\, f\right]. \tag{1.13}$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$, então temos em p que

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{m} E_i(E_i(f)). \tag{1.14}$$

Demonstração: Note primeiro que grad $f = \sum_{i=1}^{m} E_i(f)E_i$ em U. Usando a definição de Laplaciano e (1.8), temos

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{m} \left[E_i(E_i(f)) - \langle \nabla_{E_i} E_i, \text{grad } f\rangle\right] = \sum_{i=1}^{m} \left[E_i(E_i(f)) - \left(\nabla_{E_i} E_i\right) f\right].$$

O resto é imediato.

$\square$

Proposição 1.7 *Se $f : M^m \to \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções suaves, então*

$$\Delta(\varphi \circ f) = \varphi''(f)\|\text{grad } f\|^2 + \varphi'(f)\Delta f. \tag{1.15}$$

Demonstração: Usando a definição de Laplaciano, as propriedades da divergência e o Corolário 1.1, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta(\varphi \circ f) &= \text{div } (\text{grad } (\varphi \circ f)) = \text{div } (\varphi'(f)\text{grad } f) \\
&= \langle \text{grad } \varphi'(f), \text{grad } f\rangle + \varphi'(f)\text{div } (\text{grad } f) \\
&= \langle \varphi''(f)\text{grad } f, \text{grad } f\rangle + \varphi'(f)\Delta f,
\end{aligned}$$

como desejado.

$\square$

Proposição 1.8 *Se $f : M^m \to \mathbb{R}$ é uma função suave e $U \subset M$ é uma vizinhança coordenada com campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^m}$, então o Laplaciano de f é dado em U por*

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ij}\sqrt{G}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) \tag{1.16}$$

onde $G = \det(g_{ij})$.

Demonstração: Seja grad $f = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, com $a_i = \sum_{j=1}^{m} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}$. Segue-se de (1.11) que

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^i}(a_i\sqrt{G}) = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ij}\sqrt{G}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right).$$

$\square$

Definição 1.4 *Seja $f : M^m \to \mathbb{R}$ uma função suave. O* Hessiano *de f em $p \in M$ é o operador linear* Hess $f : T_pM \to T_pM$, *definido por*

$$(\text{Hess } f)v = \nabla_v \text{grad } f, \quad v \in T_pM. \tag{1.17}$$

Podemos considerar Hess f como um tensor de ordem 2 em M tal que para cada par de campos $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, tem-se

$$\text{Hess } f(X,Y) = \langle (\text{Hess } f)X, Y\rangle = \langle \nabla_X \text{grad } f, Y\rangle. \tag{1.18}$$

Proposição 1.9 *Se $f : M^m \to \mathbb{R}$ é uma função suave e $p \in M$, então* Hess $f : T_pM \to T_pM$ *é um operador linear auto-adjunto.*

Demonstração: De fato, se $v, w \in T_pM$ e V e W denotam, respectivamente, extensões de v e w a campos definidos em uma vizinhança de p em M, então

$$\begin{aligned}
\langle (\text{Hess } f)_p(v), w\rangle &= \langle \nabla_V \text{grad } f, W\rangle_p \\
&= (V\langle \text{grad } f, W\rangle)(p) - \langle \text{grad } f, \nabla_V W\rangle_p \\
&= (V(Wf))(p) - \langle \text{grad } f, \nabla_W V + [V,W]\rangle_p \\
&= (W(Vf))(p) + ([V,W]f)(p) - \langle \text{grad } f, \nabla_W V + [V,W]\rangle_p \\
&= (W(Vf))(p) - \langle \text{grad } f, \nabla_W V\rangle_p = \langle (\text{Hess } f)_p(w), v\rangle.
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.10 *Se $f : M^m \to \mathbb{R}$ é uma função suave, então*

$$\Delta f = \text{tr}\{\text{Hess } f\}. \tag{1.19}$$

Demonstração: Seja $p \in M$ e seja $U \subset M$ uma vizinhança de p onde esteja definido um referencial móvel $E_1, ..., E_m$. Então

$$\begin{aligned}
\text{tr}\{\text{Hess } f\}_p &= \sum_{i=1}^m \langle (\text{Hess } f)_p(E_i), E_i\rangle = \sum_{i=1}^m \langle \nabla_{E_i} \text{grad } f, E_i\rangle_p \\
&= \text{div } (\text{grad } f)(p) = \Delta f(p).
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.11 *Se $f : M^m \to \mathbb{R}$ é uma função suave e $U \subset M$ é uma vizinhança coordenada com campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^m}$, então temos em U que*

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^m g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right). \tag{1.20}$$

Demonstração: Se Hess $f(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \sum_{l=1}^m a_{li}\frac{\partial}{\partial x^l}$, então $\Delta f = \sum_{i=1}^m a_{ii}$ e $\sum_{i,j=1}^m \left\langle \text{Hess } f(\frac{\partial}{\partial x^i}), \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle = \sum_{i,j,l=1}^m a_{li}g_{lj}$, de modo que

$$\sum_{i,j=1}^m \left\langle \text{Hess } f\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle g^{ji} = \sum_{i,j,l=1}^m a_{li}g_{lj}g^{ji} = \sum_{i,l=1}^m a_{li}\delta_{li} = \sum_{i=1}^m a_{ii}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^m \left\langle \text{Hess } f\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle &= \sum_{i,j=1}^m \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \text{grad } f, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x^i}\left\langle \text{grad } f, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle - \sum_{i,j=1}^m \left\langle \text{grad } f, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \left\langle \text{grad } f, \frac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}\right),
\end{aligned}$$

de maneira que

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \sum_{i=1}^m a_{ii} = \sum_{i,j=1}^m \left\langle \text{Hess } f\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle g^{ji} \\
&= \sum_{i,j=1}^m g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}\right).
\end{aligned}$$

□

1.2 A segunda forma fundamental

Seja (N, g) uma n-variedade Riemanniana e seja $\varphi : M \hookrightarrow N$ uma m-subvariedade de N. Considere a métrica induzida $h = \varphi^* g$ em M. Para $p \in M$ identificamos T_pM com o subespaço $d\varphi_p(T_pM)$ de T_pN e tomamos seu complemento ortogonal $T_pM^\perp$. Então obtemos a decomposição $T_pN = T_pM \oplus T_pM^\perp$. Para $u \in T_pN$ denotamos por $u^\top$ e $u^\perp$ a T_pM-componente e a $T_pM^\perp$-componente de u, respectivamente. Seja ∇^N a conexão de Levi-Civita de (N, g). Então, para $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, lembremos que $(\nabla_X^N Y)(p)$, $p \in M$, é determinado por valores de Y em uma curva em M tangente a X_p, e decompomos ela em duas componentes como um vetor de $T_pN = T_pM \oplus T_pM^\perp$.

Podemos checar que $p \mapsto (\nabla_X^N Y)^\top(p)$ satisfaz todas as condições da conexão de Levi-Civita ∇^M de (M, h). A saber, obtemos

$$\nabla_X^M Y = (\nabla_X^N Y)^\top. \tag{1.21}$$

Agora, pomos $\alpha(X,Y) := (\nabla^N_X Y)^\perp$, que é um campo de tensores simétrico de ordem 2 em M tomando valores em $TM^\perp$. De fato, podemos checar por cálculos diretos que α é $\mathcal{F}(M)$-linear com respeito a X, Y. Note que

$$\alpha(X,Y) - \alpha(Y,X) = (\nabla^N_X Y - \nabla^N_Y X)^\perp = [X,Y]^\perp = 0. \tag{1.22}$$

Definição 1.5 *O campo de tensores simétrico α obtido acima é chamado a* segunda forma fundamental *de M.*

Para $\xi \in T_pM^\perp (p \in M)$, seja $A_\xi : T_pM \to T_pM$ o operador definido por

$$\langle A_\xi x, y\rangle := -\langle \alpha(x,y), \xi\rangle. \tag{1.23}$$

Então A_ξ é um operador linear simétrico denominado o *operador forma*. Os autovalores de A_ξ são chamados as *curvaturas principais* de M na direção normal ξ.

Observação 1.2 O operador forma A_ξ pode ser dado no seguinte caminho: Extendendo ξ a um campo vetorial normal suave em uma vizinhança de p em M, tomamos a decomposição ortogonal $\nabla^N_x \xi = (\nabla^N_x \xi)^\top + (\nabla^N_x \xi)^\perp$ para $x \in T_pM$. Então temos

$$A_\xi x = (\nabla^N_x \xi)^\top. \tag{1.24}$$

De fato, para qualquer $y \in T_pM$, obtemos

$$\langle A_\xi x, y\rangle = -\langle \alpha(x,y), \xi\rangle = -\left\langle \nabla^N_x Y, \xi\right\rangle = \left\langle y, \nabla^N_x \xi\right\rangle = \left\langle (\nabla^N_x \xi)^\top, y\right\rangle,$$

onde X, Y são campos vetoriais com $X_p = x$, $Y_p = y$, respectivamente.

Definição 1.6 *Uma subvariedade M de (N,g) é dita* totalmente geodésica *em um ponto $p \in M$ quando a segunda forma fundamental α de M é nula em p. M é chamada uma* subvariedade totalmente geodésica *quando ela é totalmente geodésica em todos os seus pontos.*

Observação 1.3 Se M é uma subvariedade de (N,g) totalmente geodésica, então toda geodésica γ de M com a direção inicial $u \in T_pM$ é também uma geodésica de N, pois $\nabla^N \gamma'(t) = \nabla^M \gamma'(t) = 0$. A saber, se M é totalmente geodésica, então qualquer geodésica γ de N com a direção inicial $u \in TM$ está contida em M. Inversamente, uma subvariedade M com esta propriedade é totalmente geodésica, pois $\alpha(u,u) = (\nabla^N_u \gamma')^\perp = 0$ vale para qualquer $u \in TM$.

Definição 1.7 *O* vetor curvatura média $\vec{H}$ *de* M *em* $p \in M$ *é definido por*

$$\vec{H} = \frac{1}{m}\mathrm{tr}\{\alpha\} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \alpha(p)(e_i, e_i), \tag{1.25}$$

onde $\{e_i\}_{i=1}^m$ *é uma base ortonormal de* T_pM. *Uma subvariedade* M *com* $\vec{H} \equiv 0$ *é chamada uma* subvariedade mínima *de* N.

1.3 Medida Riemanniana

Seja (M, g) uma m-variedade Riemanniana. Seja $C_0(M)$ o espaço vetorial das funções reais contínuas em M com suporte compacto, e defina a norma de $f \in C_0(M)$ por $\|f\| := \sup\{|f(p)|; p \in M\}$.

Definição 1.8 *Uma aplicação linear* $\mu : C_0(M) \to \mathbb{R}$ *é chamada uma* medida de Radon *em* M *quando para qualquer subconjunto compacto* $K \subset M$ *existir um número positivo* a_K *tal que*

$$|\mu(f)| \leq a_K\|f\|, \quad f \in C_0(M), \quad \mathrm{supp}\ f \subset K. \tag{1.26}$$

Uma medida de Radon μ *é dita ser* positiva *se* $\mu(f) \geq 0$ *sempre que* $f(p) \geq 0$ *para todo* $p \in M$.

Seja $\mathcal{A} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha, x_\alpha^i)\}_{\alpha \in A}$ um atlas em M e considere uma partição da unidade $\{\rho_\alpha\}$ subordinada a $\{U_\alpha\}$. Definimos uma aplicação linear $\nu_g : C_0(M) \to \mathbb{R}$ por

$$\nu_g(f) := \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (\rho_\alpha \cdot f \cdot \sqrt{G^{(\alpha)}}) \circ \varphi_\alpha^{-1}\ dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^m,$$

onde $G^{(\alpha)}$ denota o determinante da matriz $(g_{ij}^{(\alpha)})$ das componentes de g com respeito às coordenadas locais (x_α^i). Também denotamos $\nu_g(f)$ por $\int_M f\ d\nu_g$.

Observação 1.4 As integrais do lado direito são integrais (de Lebesgue) de funções contínuas com suporte compacto definidas em subconjuntos abertos $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$, e a soma é de fato uma soma finita pois supp f é compacto.

Proposição 1.12 *A aplicação* ν_g *definida acima independe da escolha do atlas e da partição da unidade. Ademais,* ν_g *é uma medida de Radon em* M.

Demonstração: Seja $\mathcal{B} = \{(V_\beta, \psi_\beta, x^i_\beta)\}_{\beta \in B}$ outro atlas e $\{\tau_\beta\}$ uma partição da unidade subordinada a $\{V_\beta\}$. Note que $G^{(\alpha)}$ e $G^{(\beta)}$ satisfazem a seguinte fórmula de transformação:

$$\sqrt{G^{(\beta)}(p)} = |\det d(\varphi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})(\psi_\beta(p))| \sqrt{G^{(\alpha)}(p)}, \quad p \in U_\alpha \cap V_\beta.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
&\sum_\beta \int_{\psi_\beta(V_\beta)} (\tau_\beta \cdot f \cdot \sqrt{G^{(\beta)}}) \circ \psi_\beta^{-1}\, dx^1_\beta \cdots dx^m_\beta \\
&\quad = \sum_{\alpha,\beta} \int_{\psi_\beta(V_\beta \cap U_\alpha)} (\tau_\beta \cdot \rho_\alpha \cdot f \cdot \sqrt{G^{(\beta)}}) \circ \psi_\beta^{-1}\, dx^1_\beta \cdots dx^m_\beta \\
&\quad = \sum_{\alpha,\beta} \int_{\psi_\beta(V_\beta \cap U_\alpha)} (\tau_\beta \cdot \rho_\alpha \cdot f \cdot \sqrt{G^{(\alpha)}}) \circ \psi_\beta^{-1} \cdot |\det\ d(\varphi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})| dx^1_\beta \cdots dx^m_\beta \\
&\quad = \sum_{\alpha,\beta} \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta)} (\tau_\beta \cdot \rho_\alpha \cdot f \cdot \sqrt{G^{(\alpha)}}) \circ \varphi_\alpha^{-1}\, dx^1_\alpha \cdots dx^m_\alpha \\
&\quad = \sum_{\alpha} \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (\rho_\alpha \cdot f \cdot \sqrt{G^{(\alpha)}}) \circ \varphi_\alpha^{-1}\, dx^1_\alpha \cdots dx^m_\alpha.
\end{aligned}$$

Agora vemos facilmente que ν_g satisfaz (1.26) e dá uma medida de Radon positiva em M.

$\square$

Observação 1.5 Mais geralmente, suponha que para qualquer carta (U, φ) de uma variedade suave M, uma função contínua μ_U definida em U é dada de modo que $\{\mu_U\}$ satisfaz a seguinte transformação de coordenadas das cartas (U, φ), (V, ψ):

$$\mu_V(p) = |\det d(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(p))| \mu_U(p), \quad p \in U \cap V. \tag{1.27}$$

Então chamamos $\{\mu_U\}$ uma *densidade* em M. Uma densidade em M define uma medida de Radon em M da mesma maneira como acima.

Observação 1.6 Lembremos que para uma variedade orientada M podemos considerar a integral $\int_M \omega$ de uma m-forma diferencial ω. De uma métrica Riemanniana g em M podemos definir uma m-forma diferencial dM, que é chamada o *elemento de volume*, como segue: para uma base ortonormal positivamente orientada $\{e_i\}_{i=1}^m$ definimos $dM(e_1, ..., e_m) = 1$. Então, para uma carta positivamente orientada $(U_\alpha, \varphi_\alpha, x^j_\alpha)$ temos $dM = \sqrt{G^{(\alpha)}} dx^1_\alpha \wedge \cdots \wedge dx^m_\alpha$. Portanto, para uma variedade Riemanniana orientada (M, g) podemos também escrever $\nu_g(f) = \int_M f\ dM$ para $f \in C_0(M)$.

Para uma função $h \geq 0$ semicontínua inferiormente (isto é, se $p_n \to p$, então $\liminf h(p_n) \geq h(p)$), definimos

$$\nu_g^*(h) := \sup\{\nu_g(f); f \in C_0(M) \text{ satisfaz } f \leq h\},$$

e para qualquer função $f \geq 0$, definimos

$$\nu_g^*(f) := \inf\{\nu_g^*(h); h \geq f \text{ é semicontínua inferiormente}\}.$$

Definição 1.9 *Uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é dita* integrável *quando existe uma sequência $\{f_n\} \subset C_0(M)$ tal que $\nu_g^*(|f - f_n|) \to 0$.*

Observação 1.7 Se f é integrável, então $\{\nu_g(f_n)\}$ é uma sequência convergente, e seu limite não depende da escolha de $\{f_n\}$. Denotamos esse limite por $\int_M f \, d\nu_g$, o qual chamaremos a *integral* de f. Em particular, $f \in C_0(M)$ é integrável e sua integral coincide com $\nu_g(f)$.

Definição 1.10 *Um subconjunto $A \subset M$ é dito* integrável *se sua função característica χ_A, definida em M por*

$$\chi_A(p) = \begin{cases} 1 & se\ p \in A, \\ 0 & se\ p \notin A, \end{cases}$$

é intagrável. Chamamos $\int_M \chi_A \, d\nu_g$ a *medida* (ou o *volume* m-dimensional) de A. Às vezes, $\int_M \chi_A \, d\nu_g$ será denotado também por vol A ou $\mathrm{vol}_m A$.

Definição 1.11 *Um subconjunto $A \subset M$ é dito* mensurável *se $K \cap A$ é um conjunto integrável para qualquer conjunto compacto K de M.*

Observação 1.8 Qualquer subconjunto compacto $A \subset M$ é integrável, com $\mathrm{vol}_m A < +\infty$. Ademais, a família de todos os subconjuntos mensuráveis de M é uma σ-álgebra, i.e., é fechada com relação à operação de tomar o complementar e a de tomar uniões (interseções) enumeráveis.

Definição 1.12 *Uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é chamada uma* função mensurável *se a imagem inversa de qualquer subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ é um subconjunto mensurável de M.*

Observação 1.9 Tomando um atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{\infty}$ de M consistindo de enumeráveis cartas com fechos compactos $\bar{U}_i$. Podemos escolher subconjuntos abertos W_i com $\bar{W}_i \subset U_i$ de modo que $\{W_i\}$ forma uma cobertura aberta de M. Então um subconjunto $A \subset M$ é mensurável com respeito à medida Riemanniana ν_g se, e somente se, todos $A \cap W_i$ são mensuráveis. Agora $A \cap W_i$ é mensurável se, e somente se, $\varphi(A \cap W_i)$ é mensurável com respeito à medida de Lebesgue do $\mathbb{R}^m$. Portanto, a propriedade que $A \subset M$ é mensurável não depende da escolha da métrica Riemanniana. Por exemplo, subvariedades de dimensão n $(n < m)$ têm medida 0, e para uma aplicação suave $\Phi : N \to M$ o conjunto $\{p = \Phi(q) \in M; \text{posto}(d\varphi(q)) < m\}$ dos valores críticos de Φ tem medida 0, pelo Teorema de Sard(ver [12]).

Sejam $\Phi : M \to (N, h)$ um difeomorfismo e considere a medida de Radon ν_h em N.

Definição 1.13 *O* pull-back *de ν_h é a medida de Radon $\Phi^*\nu_h$ em M, dada por*

$$\Phi^*\nu_h(f) := \nu_h(f \circ \Phi^{-1}), \quad f \in C_0(M).$$

A seguinte proposição mostra que o pull-back é, de fato, uma medida de Radon em M.

Proposição 1.13 *Seja $\Phi : M \to (N, h)$ um difeomorfismo. Então o pull-back $\Phi^*\nu_h$ de ν_h satisfaz*

$$\Phi^*\nu_h = \nu_{\Phi^*h},$$

onde Φ^*h denota a métrica em M induzida pela métrica h de N. A saber, temos a seguinte fórmula de mudança de variáveis:

$$\int_M f \; d\nu_{\Phi^*h} = \int_N f \circ \Phi^{-1} \; d\nu_h. \tag{1.28}$$

Demonstração: Sejam $(U, \varphi), (V, \psi)$ cartas de M, N, respectivamente. Denotemos por G_U, H_V os determinantes das matrizes obtidas das componentes de $g = \Phi^*h$ e h, respectivamente. Então

$$\sqrt{G_U} = |\det D(\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi| \cdot \sqrt{H_V} \circ \Phi.$$

Aplicando a fórmula de mudança de variável usual obtemos o resultado.

$\square$

Observação 1.10 Para uma subvariedade N de uma m-variedade Riemanniana M, o volume m-dimensional de N é igual a 0 se $n := \dim N < \dim M$, como visto na Observação 1.9. Neste caso é natural considerar o volume n-dimensional $\mathrm{vol}_n N$ de N, que é definido como a medida (isto é, o volume n-dimensional) de N com respeito à medida Riemanniana $\nu_{\Phi^* g}$ da métrica Riemanniana induzida via o mergulho $\Phi : N \to M$. Note que $\mathrm{vol}_n N$ é finito se N é compacta. Geralmente, para uma aplicação suave $\Phi : N \to M$ de uma variedade N em uma variedade Riemanniana (M, g) pomos $h := \Phi^* g$, e para cada carta (U, φ, x^i) de N pomos $h_U := \sqrt{\det h(\partial_i, \partial_j)}$. Então $\{h_U\}$ dá uma densidade ν_h em N, e definimos o volume $\mathrm{vol}\, \Phi$ como $\int_N d\nu_h$.

Agora vamos enunciar uma importante fórmula integral, que é conhecida como o Teorema da Divergência ou o Teorema de Green. Primeiro relembramos a noção de variedade com bordo. Seja $\mathbb{R}^m_+ := \{(x^1, ..., x^m); x^m \geq 0\}$ o semi-espaço superior de $\mathbb{R}^m$. Então o bordo de $\mathbb{R}^m_+$ é dado pelo hiperplano $\mathbb{R}^{m-1}$ definido por $x^m = 0$.

Definição 1.14 *Uma função real $f : U_+ \to \mathbb{R}$ (resp., uma aplicação $\varphi : U_+ \to \mathbb{R}^n$), onde U_+ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^m_+$, é dita* suave *se f (resp., φ) é a restrição de uma função suave (resp.,uma aplicação suave) de um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ contendo U_+ a $\mathbb{R}$ (resp., a $\mathbb{R}^n$).*

Definição 1.15 *Um espaço topológico de Hausdorff (conexo) de base enumerável M é chamado uma* variedade m-dimensional com bordo *se M admite um atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) *$\{U_\alpha\}$ é uma cobertura aberta de M.*

(ii) *$\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^m_+$ é um homeomorfismo sobre um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m_+$.*

(iii) *Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então a mudança de coordenadas*

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é de classe C^∞.

Observação 1.11 Como para $p \in M$ a propriedade que $\varphi_\alpha(p) \in \mathrm{int}\ \mathbb{R}^m_+$ (resp., $\mathbb{R}^{m-1}$) não depende da escolha de φ_α, chamamos p um *ponto interior* (resp., *ponto do bordo*) de M. Então o conjunto M° dos pontos interiores é uma variedade m-dimensional normal e o bordo ∂M de M, que consiste dos pontos do bordo, é uma variedade $(m-1)$-dimensional a menos que $\partial M = \emptyset$. Se M é compacta (resp., orientével), então assim é ∂M. Contudo, ∂M não necessariamente é conexo mesmo quando M é conexa. Ademais, ∂M carrega a métrica Riemanniana induzida como uma subvariedade.

Definição 1.16 *M é chamada uma* variedade Riemanniana suave m-dimensional compacta com bordo *se as seguintes condições são satisfeitas:*

(1) *M é uma variedade suave m-dimensional com bordo.*

(2) *M é um subconjunto compacto de uma variedade Riemanniana m-dimensional N.*

Teorema 1.1 (Teorema da Divergência, Teorema de Green) **(1)** *Seja X um campo vetorial C^1 com suporte compacto em uma variedade Riemanniana M. Então*

$$\int_M \mathrm{div}\ X\ d\nu_g = 0.$$

(2) *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta com bordo, e denote por dA o elemento de volume Riemanniano em ∂M com respeito à métrica induzida. Seja ν o campo vetorial normal unitário exterior a M ao longo de ∂M (isto significa que $\exp^{\perp}(-t\nu)$ pertence a M° para $t > 0$ suficientemente pequeno). Então, para um campo vetorial X de classe C^1 em M, temos*

$$\int_M \mathrm{div}\ X\ d\nu_g = \int_{\partial M} \langle X, \nu\rangle\ dA.$$

Para uma demonstração, ver Sakai [32].

1.4 O Teorema de Comparação do Hessiano

Nesta seção estimamos valores para o Hessiano da função distância a um ponto em uma variedade Riemanniana cuja curvatura seccional é limitada inferior e superiormente. Antes vamos enunciar alguns resultados que nos serão últeis.

Definição 1.17 *Seja M uma variedade Riemanniana completa conexa e seja p um ponto de M. Se $t(u) := \sup\{t > 0; \gamma_u|_{[0,t]}$ é mínima$\} < +\infty$, onde*

$\gamma_u : [0, +\infty) \to M$ é a geodésica partindo de p com a direção inicial $u \in T_pM$, $\|u\| = 1$, então o conjunto $C_p := \exp_p \tilde{C}_p$ é chamado o cut locus *de p, onde $\tilde{C}_p := \{t(u)u; u \in T_pM, \|u\| = 1, t(u) < +\infty\}$.*

Lema 1.2 *Seja W uma variedade Riemanniana e denote por ρ_W a função distância em W a um ponto $p \in W$. Sejam $q \in W \setminus \{C_p \cup \{p\}\}$ e $u \in T_qW$. Seja $\gamma : [0, \rho_W(q)] \to W$ uma geodésica normal mínima ligando p a q. Seja $X(t)$ um campo de Jacobi ao longo de γ satisfazendo a condição $X(\rho_W(q)) = u$, $X(0) = 0$, e seja $X^\perp(t) := X(t) - \langle X(t), \gamma'(t)\rangle\gamma'(t)$ o campo de Jacobi que é a componente vertical de $X(t)$ com respeito a γ'. Então*

$$\text{Hess } \rho_W(q)(u, u) = \langle \nabla X^\perp(\rho_W(q)), X^\perp(\rho_W(q))\rangle. \tag{1.29}$$

Para uma demostração, ver Sakai [32].

Observação 1.12 Lembramos que para campos de Jacobi X, Y ao longo de γ que se anulam em $t = 0$, temos $\langle \nabla X(t), Y(t)\rangle = \langle X(t), \nabla Y(t)\rangle$. Portanto, quando $u, v \in T_qW$, denotando por X, Y os campos de Jacobi ao longo de γ com $X(0) = Y(0) = 0$, $X(\rho_W(q)) = u, Y(\rho_W(q)) = v$, obtemos

$$\text{Hess } \rho_W(q)(u, u) = \langle \nabla X^\perp(\rho_W(q)), Y^\perp(\rho_W(q))\rangle. \tag{1.30}$$

Teorema 1.2 *Seja W uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional K_W.*

(1) Suponha que $K_W \leq b$. Seja γ uma geodésica normal partindo de $p \in W$ com a direção inicial $u \in T_pW$, $\|u\| = 1$, e Y um campo de Jacobi ao longo de γ e perpendicular a γ. Ponha $y_b(t) := \|Y(t)\|C_b(t) + \|Y\|'(0)S_b(t)$. Seja t_0 o menor valor positivo de t tal que $y_b(t) = 0$. Então, para $0 \leq t \leq t_0$, temos

$$\langle Y(t), \nabla Y(t)\rangle y_b(t) \geq \langle Y(t), Y(t)\rangle y_b'(t), \quad \|Y(t)\| \geq y_b(t). \tag{1.31}$$

(2) Suponha que $K_W \geq c$. Sejam γ uma geodésica normal partindo de $p \in W$ com a direção inicial $u \in T_pW$, $\|u\| = 1$, e Y um campo de Jacobi ao longo de γ e perpendicular a γ. Suponha que $Y(0)$ e $\nabla Y(0)$ são linearmente dependentes. Denote por t_0 o primeiro valor conjugado $t_0(p)$ a p ao longo de γ se $Y(0) = 0$. Se $Y(0) \neq 0$, t_0 denota o primeiro valor focal $t_0(N)$ ao longo de γ de uma hipersuperfície N em p tal que u é um vetor unitário normal a N em p e

seu operador forma A_u *é dado por* $A_u = (\|Y\|'(0)/\|Y\|(0))\mathrm{id}$. *Então, para* $0 \leq t \leq t_0$ *e* $y_c(t) := \|Y(0)\|C_c(t) + \|Y\|'(0)S_c(t)$, *temos*

$$\langle Y(t), Y(t)\rangle y_c'(t) \geq \langle Y(t), \nabla Y(t)\rangle y_c(t), \quad \|Y(t)\| \leq y_c(t). \tag{1.32}$$

Para uma demonstração, ver Sakai [32].

Agora aplicaremos o teorema acima para estimar o Hessiano Hess ρ_W da função distância ρ_W em W a um ponto $p \in W$ em termos dos limites superior e inferior da curvatura seccional.

Teorema 1.3 (Teorema de Comparação do Hessiano) *Seja* W *uma variedade Riemanniana completa cuja curvatura seccional satisfaz* $c \leq K_W \leq b$. *Suponha que* $0 < r < \min\{\mathrm{inj}_W(p), \pi/2\sqrt{b}\}$. *Então para* $q \in B_r(p)$ *e* $u \in T_qW$, *com* $u \perp \mathrm{grad}\ \rho_W(q)$, *obtemos*

$$\frac{C_c}{S_c}(\rho_W(q)) \cdot \|u\|^2 \geq \mathrm{Hess}\ \rho_W(q)(u,u) \geq \frac{C_b}{S_b}(\rho_W(q)) \cdot \|u\|^2. \tag{1.33}$$

Demonstração: Dados $u, v \in T_qW$, existem campos de Jacobi X, Y ao longo de uma única geodésica normal $\gamma : [0, l] \to W$ $(l = \rho_W(q))$ ligando p a q tal que $X(0) = 0, Y(0) = 0, X(l) = u, Y(l) = v$. Agora pondo $u = \mathrm{grad}\ \rho_W(q)$ e usando (1.30), obtemos que Hess $\rho_W(q)(u, v) = 0$ para qualquer $v \in T_qW$; a saber, grad $\rho_W(q)$ pertence ao espaço nulo de Hess $\rho_W(q)$. Agora, se $u \perp \mathrm{grad}\ \rho_W(q)$, então o campo de Jacobi acima X é perpendicular a γ e, usando (1.29), obtemos

$$\mathrm{Hess}\ \rho_W(q)(X,X) = \langle \nabla X(l), X(l)\rangle .$$

Aplicamos agora o Teorema 1.2. Neste caso temos $y_b(t) = \|X\|'(0)S_b(t)$, $y_c(t) = \|X\|'(0)S_c(t)$, e assim

$$\frac{C_c}{S_c}(l) \cdot \|u\|^2 \geq \langle \nabla X(l), X(l)\rangle \geq \frac{C_b}{S_b}(l) \cdot \|u\|^2.$$

Note que o lado esquerdo é positivo se $l < \pi/2\sqrt{b}$ e $u \neq 0$.

□

1.5 Fórmulas básicas

Seja $\varphi : M \hookrightarrow W$ uma imersão isométrica, onde M e W são variedades Riemannianas. Considere uma função suave $g : W \to \mathbb{R}$ e a composição

$f = g \circ \varphi : M \to \mathbb{R}$. Identificando X com $d\varphi_q(X)$, temos em $q \in M$ e para todo $X \in T_qM$ que

$$\langle \text{grad } f, X \rangle = X(f) = X(g \circ \varphi) = X(g) = \langle \text{grad } g, X \rangle. \tag{1.34}$$

Então escrevemos

$$\text{grad } g = \text{grad } f + (\text{grad } g)^{\perp}, \tag{1.35}$$

onde $(\text{grad } g)^{\perp}$ é perpendicular a T_qM. Sejam ∇^M e ∇^W as conexões Riemannianas de M e W, respectivamente, e sejam $\alpha(q)(X,Y)$ e Hess $f(q)(X,Y)$, respectivamente, a segunda forma fundamental da imersão φ e o Hessiano de f em $q \in M$, com $X, Y \in T_qM$. Então, temos em $q \in M$ e para quaisquer $X, Y \in T_qM$ que

$$\begin{aligned}
&\text{Hess}_M \ f(q)(X,Y) = \left\langle \nabla^M_X \text{grad } f, Y \right\rangle_q \\
&= \left\langle \left(\nabla^W_X (\text{grad } g - (\text{grad } g)^{\perp})\right)^{\top}, Y \right\rangle_{\varphi(q)} \\
&= \left\langle \left(\nabla^W_X \text{grad } g\right)^{\top}, Y \right\rangle_{\varphi(q)} - \left\langle \left(\nabla^W_X (\text{grad } g)^{\perp}\right)^{\top}, Y \right\rangle_{\varphi(q)} \\
&= \left\langle \left(\nabla^W_X \text{grad } g\right)^{\top}, Y \right\rangle_{\varphi(q)} \\
&= X\langle \text{grad } g, Y \rangle_{\varphi(q)} - \left\langle \text{grad } g, \left(\nabla^W_X Y\right)^{\top} \right\rangle_{\varphi(q)} \\
&= X\langle \text{grad } g, Y \rangle_{\varphi(q)} - \left\langle \text{grad } g, \nabla^W_X Y - \left(\nabla^W_X Y\right)^{\perp} \right\rangle_{\varphi(q)} \\
&= X\langle \text{grad } g, Y \rangle_{\varphi(q)} - \left\langle \text{grad } g, \nabla^W_X Y \right\rangle_{\varphi(q)} + \left\langle \text{grad } g, \left(\nabla^W_X Y\right)^{\perp} \right\rangle_{\varphi(q)} \\
&= \left\langle \nabla^W_X \text{grad } g, Y \right\rangle_{\varphi(q)} + \left\langle \text{grad } g, \left(\nabla^W_X Y\right)^{\perp} \right\rangle_{\varphi(q)} \\
&= \text{Hess}_N \ g(\varphi(q))(X,Y) + \langle \text{grad } g, \alpha(X,Y) \rangle_{\varphi(q)}.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Tomando o traço em (1.36), com respeito a uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_m\}$ de T_qM, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta f(q) &= \sum_{i=1}^{m} \text{Hess } f(q)(e_i, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \text{Hess } g(\varphi(q))(e_i, e_i) + \langle \text{grad } g, \sum_{i=1}^{m} \alpha(e_i, e_i) \rangle,
\end{aligned} \tag{1.37}$$

onde o vetor curvatura média $\vec{H} = 1/m \sum_{i=1}^{m} \alpha(e_i, e_i)$. As fórmulas (1.36) e (1.37) são bem conhecidas na literatura (ver [18]).

Capítulo 2

Segunda Forma Fundamental Dominada em Variedades de Hadamard

Lembremos que uma variedade de Hadamard é uma variedade Riemanniana simplesmente conexa completa de curvatura seccional não-positiva. Um tipo especial de subvariedades de Hadamard são as subvariedades completas com segunda forma fundamental dominada (Cf. Definição 2.1). Tais subvariedades são próprias e têm topologia finita (ver [4, 10]), onde topologia finita significa que a variedade é C^∞-difeomorfa a uma variedade suave com bordo.

2.1 Subvariedades com segunda forma fundamental dominada

Seja $\varphi : M \hookrightarrow N$ uma imersão isométrica de uma m-variedade Riemanniana completa M em uma n-variedade de Hadamard N com curvatura seccional limitada superiormente: $K_N \leq b \leq 0$. Fixe um ponto $x_0 \in M$ e seja $\rho_M(x) = \mathrm{dist}_M(x_0, x)$ a função distância a x_0 em M. Seja $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma sequência de exaustão de M por conjuntos compactos com $x_0 \in C_1$, e defina uma sequência não-decrescente $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$ por

$$a_i = \sup\left\{\frac{S_b(\rho_M(x))}{C_b(\rho_M(x))} \cdot \|\alpha(x)\|;\ x \in M \setminus C_i\right\}, \tag{2.1}$$

onde

$$S_b(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-b}}\text{senh}(\sqrt{-b}t) & \text{se } b < 0, \\ t & \text{se } b = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{b}}\text{sen}(\sqrt{b}t) & \text{se } b > 0 \text{ e } t < \pi/2\sqrt{b}, \end{cases} \tag{2.2}$$

$C_b(t) = S_b'(t)$ e $\|\alpha(x)\|$ é a norma da segunda forma fundamental em $\varphi(x)$. Observe que o limite

$$a(M) = \lim_{i\to\infty} a_i \in [0, \infty] \tag{2.3}$$

não depende da sequência de exaustão $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ nem do ponto básico x_0.

Definição 2.1 *Uma imersão $\varphi : M \hookrightarrow N$ de uma m-variedade Riemanniana completa M em uma n-variedade de Hadamard N com curvatura seccional $K_N \leq b \leq 0$ tem* segunda forma fundamental dominada *se $a(M) < 1$.*

Seja $\varphi : M \hookrightarrow N$ uma m-subvariedade completa com segunda forma fundamental dominada imersa em uma n-variedade de Hadamard com curvatura seccional $K_N \leq b \leq 0$. Dado $c \in (a(M), 1)$, existe um $r_0 > 0$ tal que

$$\|\alpha(x)\| \leq c \cdot \frac{C_b}{S_b}(\rho_N(\varphi(x))) \tag{2.4}$$

para todo $x \in M \setminus B_M(r_0)$, onde ρ_N é a função distância intrínseca em N a um ponto $p = \varphi(q)$. Pelo Teorema de Sard (ver [12]), r_0 pode ser escolhido de modo que $\Gamma = \varphi(M) \cap \partial B_N(r_0) \neq \emptyset$ é uma subvariedade de N, com $\dim \Gamma = m - 1$. Para cada $y \in \Gamma$, denotemos por $T_y\Gamma \subset T_y\varphi(M)$ os espaços tangentes a Γ e $\varphi(M)$, respectivamente, em y. Pondo $\Lambda = \varphi^{-1}(\Gamma)$, como $\dim \Gamma = m - 1$ e $\dim \varphi(M) = m$, podemos definir um campo de vetores suave ν em uma vizinhança aberta V de Λ, de modo que para todo $x \in \Lambda$ com $y = \varphi(x)$, temos que

$$T_y\varphi(M) = T_y\Gamma \oplus [[d\varphi_x \cdot \nu(x)]], \tag{2.5}$$

com $\langle d\varphi_x \cdot \nu(x), \text{grad } \rho_N\rangle > 0$. Aqui, $[[d\varphi_x \cdot \nu(x)]]$ denota o espaço vetorial gerado por $d\varphi_x \cdot \nu(x)$. Por simplicidade de notação, vamos identificar $d\varphi_x \cdot \nu(x) = \nu(y)$. Definimos a função $\psi(x) := \langle \nu(y), \text{grad } \rho_N(y)\rangle$, para $x \in \Lambda$. Como Λ é compacto e $\psi(x) > 0$, existe um mínimo positivo ψ_0. Consideremos o seguinte problema de Cauchy em M:

$$\begin{cases} \xi_t(t, x) &= \frac{1}{\psi}\nu(\xi(t, x)), \\ \xi(0, x) &= x. \end{cases} \tag{2.6}$$

Foi mostrado em [10] que ψ satisfaz a seguinte equação diferencial ao longo das curvas integrais $t \mapsto \xi(t,x)$:

$$-(\sqrt{1-\psi^2})_t = \sqrt{1-\psi^2}\mathrm{Hess}_N\ \rho_N(\omega,\omega) + \langle \nu^*, \alpha(\nu,\nu)\rangle, \tag{2.7}$$

onde ν^* é um campo vetorial unitário normal a ν, e ω é um vetor unitário normal a TM e a grad ρ_N. Como uma consequência do Teorema de Comparação do Hessiano, obtemos a seguinte desigualdade:

$$-(\sqrt{1-\psi^2})_t \geq \sqrt{1-\psi^2}\frac{C_b}{S_b}(\rho_N(\xi(t,x))) + \langle \nu^*, \alpha(\nu,\nu)\rangle. \tag{2.8}$$

Ainda em [10], foi mostrado que $\rho_N(\xi(t,x)) = t + r_0$, donde podemos escrever $S_b(\rho_N(\xi(t,x))) = S_b(t+r_0)$. Assim, a desigualdade (2.8) é equivalente a

$$\left[S_b(t+r_0)\sqrt{1-\psi^2}\right]_t \leq -S_b(t+r_0)\langle \nu^*, \alpha(\nu,\nu)\rangle. \tag{2.9}$$

Integrando (2.9) de 0 a t, obtemos

$$\begin{aligned} &S_b(t+r_0)\sqrt{1-\psi^2(t)} - S_b(r_0)\sqrt{1-\psi^2(r_0)} \\ &= \int_0^t [S_b(s+r_0)\sqrt{1-\psi^2(s)}]_s ds \leq -\int_0^t S_b(s+r_0)\langle \nu^*, \alpha(\nu,\nu)\rangle ds \end{aligned}$$

donde segue-se que

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\psi^2(t)} &\leq \frac{S_b(r_0)}{S_b(t+r_0)}\sqrt{1-\psi^2(0)} \\ &\quad - \frac{1}{S_b(t+r_0)}\int_0^t S_b(s+r_0)\langle \nu^*, \alpha(\nu,\nu)\rangle ds \end{aligned} \tag{2.10}$$

Contudo,

$$-\langle \nu^*, \alpha(\nu,\nu)\rangle(\xi(s,x)) \leq \|\alpha(\xi(s,x))\| \leq c\cdot(C_b/S_b)(s+r_0).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\psi^2(t)} &\leq \frac{S_b(r_0)}{S_b(t+r_0)}\sqrt{1-\psi^2(0)} \\ &\quad + \frac{1}{S_b(t+r_0)}\int_0^t S_b(s+r_0)(-\langle \nu^*, \alpha(\nu,\nu)\rangle) ds \\ &\leq \frac{S_b(r_0)}{S_b(t+r_0)}\sqrt{1-\psi^2(0)} \\ &\quad + \frac{1}{S_b(t+r_0)}\int_0^t S_b(s+r_0)\cdot c\cdot\frac{C_b(s+r_0)}{S_b(s+r_0)} ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{S_b(r_0)}{S_b(t+r_0)}\sqrt{1-\psi^2(0)} \\
&\quad + \frac{1}{S_b(t+r_0)}\left(c\cdot S_b(t+r_0) - c\cdot S(r_0)\right) \\
&= \frac{S_b(r_0)}{S_b(t+r_0)}\left(\sqrt{1-\psi^2(0)} - c\right) + c \\
&\leq \frac{S_b(r_0)}{S_b(t+r_0)}\left(\sqrt{1-\psi_0^2} - c\right) + c < 1, \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

onde $\psi_0 = \inf_\Lambda \psi > 0$. Assim, para todo $x \in \Lambda$, temos que a função ψ satisfaz a desigualdade (2.11) ao longo da curva integral $\xi(t,x)$ (que está definida para todo t).

Lema 2.1 *Seja $f = \rho_N \circ \varphi : M \to \mathbb{R}$. Ponha*

$$
B(b,c,r_0) = \sup_{t,x} \frac{S_b(r_0)}{S_b(t+r_0)}\left[\sqrt{1-\psi_0^2} - c\right] + c < 1. \qquad (2.12)
$$

Então $\|\text{grad } f(x)\| \geq \sqrt{1-B^2(b,c,r_0)}$, para $x \in M \setminus \varphi^{-1}(B_N(r_0))$.

Demonstração: Por (2.11), temos que

$$
\sqrt{1-\psi^2(t)} \leq \frac{S_b(r_0)}{S_b(t+r_0)}\left(\sqrt{1-\psi_0^2} - c\right) + c
$$

donde

$$
\psi(t) \geq \sqrt{1-B^2(b,c,r_0)} > 0.
$$

Logo,

$$
\inf_{M\setminus\varphi^{-1}(B_N(r_0))} \psi \geq \sqrt{1-B^2(b,c,r_0)} > 0.
$$

Também, grad $f = \langle \text{grad } \rho_N, \nu\rangle\nu = \psi\cdot\nu$. Portanto,
$\|\text{grad } f(x)\| \geq \sqrt{1-B^2(b,c,r_0)}$, para todo $x \in M \setminus \varphi^{-1}(B_N(r_0))$.

□

2.2 Bolas geodésicas extrínsecas

Nesta seção provaremos um teorema que fornece limites superiores para quocientes isoperimétricos de bolas geodésicas extrínsecas em variedades de Hadamard (ver [6]).

Teorema 2.1 *Seja $\varphi : M \hookrightarrow N$ uma imersão de uma m-variedade Riemanniana completa M com segunda forma fundamental dominada em uma variedade de Hadamard n-dimensional N com curvatura seccional limitada $b_1 \leq K_N \leq b_2 \leq 0$. Para um dado c tal que $a(M) < c < 1$, existem constantes positivas $r_0 = r_0(b_2, c)$ e $B = B(b_2, c) < 1$ tais que, para bolas geodésicas extrínsecas $D(R)$ com raio $R \geq r_0$, temos*

$$\frac{\mathrm{vol}_{m-1}(\partial D(R))}{\mathrm{vol}_m(D(R))} \leq \frac{1 + \sqrt{-b_1} \cdot m \cdot R \cdot \coth(\sqrt{-b_1} \cdot R) + \Lambda}{R \cdot \sqrt{1 - B^2}}, \qquad (2.13)$$

onde Λ é uma constante que depende de c, r_0, R, b_2 e $\sup_{B_N(r_0)} \|\vec{H}\|$.

Demonstração: Como mencionamos antes, φ é própria. Fixemos um ponto $p = \varphi(q) \in N$ e $c \in (a(M), 1)$, seja $D(R)$ a bola geodésica extrínseca com centro em p e raio $R \geq r_0 = r_0(c) > 0$. Considere $f : M \to \mathbb{R}$ dada por $f = \rho_N^2 \circ \varphi$. Queremos estimar $\sup_{D(R)} \Delta f$. Procedemos como segue: Tomamos uma base ortonormal $\{\partial/\partial\rho_N, \partial/\partial\theta_1, \cdots, \partial/\partial\theta_{n-1}\}$ para T_pN de coordenadas polares e fazemos $X_i = \alpha_i \frac{\partial}{\partial\rho_N} + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_j^i \frac{\partial}{\partial\theta_j}$, com $\alpha_i^2 + \sum_{j=1}^{n-1} (\gamma_j^i)^2 = 1$.

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \Delta(\rho_N^2 \circ \varphi) \\
&= 2(\rho_N \circ \varphi)\Delta(\rho_N \circ \varphi) + 2\langle \text{grad } (\rho_N \circ \varphi), \text{grad } (\rho_N \circ \varphi)\rangle \\
&= 2\rho_N(\varphi)\left[\sum_{i=1}^{m} \text{Hess } \rho_N(\varphi)(X_i, X_i) + \left\langle \text{grad } \rho_N(\varphi), \sum_{i=1}^{m} \alpha(X_i, X_i)\right\rangle\right] \\
&\quad +2\left\langle \sum_{i=1}^{m}(X_i(\rho_N(\varphi))X_i, \sum_{j=1}^{m}(X_j(\rho_N(\varphi))X_j\right\rangle \\
&= 2\rho_N(\varphi)\sum_{i=1}^{m} \text{Hess } \rho_N(\varphi)(X_i, X_i) + 2\rho_N(\varphi)\langle \text{grad } \rho_N(\varphi), m\vec{H}\rangle \\
&\quad +2\left\langle \sum_{i=1}^{m}\langle \text{grad } \rho_N(\varphi), X_i\rangle X_i, \sum_{j=1}^{m}\langle \text{ grad } \rho_N(\varphi), X_j\rangle X_j\right\rangle \\
&= 2\rho_N(\varphi)\sum_{i=1}^{m} \text{Hess } \rho_N(\varphi)(X_i, X_i) + 2\rho_N(\varphi)\langle \text{grad } \rho_N(\varphi), m\vec{H}\rangle \\
&\quad +2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\langle \text{grad } \rho_N(\varphi), X_i\rangle\langle \text{grad } \rho_N(\varphi), X_j\rangle\langle X_i, X_j\rangle \\
&= 2\rho_N(\varphi)\sum_{i=1}^{m} \text{Hess } \rho_N(\varphi)(X_i, X_i) + 2\rho_N(\varphi)\langle \text{grad } \rho_N(\varphi), m\vec{H}\rangle \\
&\quad +2\sum_{i=1}^{m}\langle \text{grad } \rho_N(\varphi), X_i\rangle\langle \text{grad } \rho_N(\varphi), X_i\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sum_{i=1}^{m}\left[\langle X_i, \text{grad } \rho_N(\varphi)\rangle^2 + \rho_N(\varphi)\text{Hess } \rho_N(\varphi)(X_i, X_i)\right] \\
&\quad +2\rho_N(\varphi)\langle \text{grad } \rho_N(\varphi), m\vec{H}\rangle \\
&= 2\sum_{i=1}^{m}\left[\langle X_i, \text{grad } \rho_N(\varphi)\rangle^2 + \rho_N(\varphi)\sum_{j=1}^{n-1}(\gamma_j^i)^2\text{Hess}_N\ \rho_N\left(\frac{\partial}{\partial\theta_j}, \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right)\right] \\
&\quad +2\rho_N(\varphi)\langle \text{grad } \rho_N(\varphi), m\vec{H}\rangle \\
&\leq 2\sum_{i=1}^{m}\left[\langle X_i, \text{grad } \rho_N(\varphi)\rangle^2 + \rho_N(\varphi)\sum_{j=1}^{n-1}(\gamma_j^i)^2\frac{C_{b_1}}{S_{b_1}}(\rho_N(\varphi))\left\|\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right\|\right] \\
&\quad +2\rho_N(\varphi)\langle \text{grad } \rho_N(\varphi), m\vec{H}\rangle \\
&= 2\sum_{i=1}^{m}\left[(X_i\rho_N(\varphi))^2 + \rho_N(\varphi)(1-\alpha_i^2)\frac{C_{b_1}}{S_{b_1}}(\rho_N(\varphi))\right] \\
&\quad +2\rho_N(\varphi)\langle \text{grad } \rho_N(\varphi), m\vec{H}\rangle \\
&\leq 2\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2 + \sum_{i=1}^{m}\rho_N(\varphi)\frac{C_{b_1}}{S_{b_1}}(\rho_N(\varphi))\right] + 2m\rho_N(\varphi)\|\text{grad } \rho_N(\varphi)\|\|\vec{H}\| \\
&\leq 2\left[1 + m\cdot \sup_{\rho_N\in[0,R]}\rho_N(\varphi)\frac{C_{b_1}}{S_{b_1}}(\rho_N(\varphi))\right] + 2m\rho_N(\varphi)\|\text{grad } \rho_N(\varphi)\|\|\vec{H}\|
\end{aligned}
$$

Se $x \in \varphi^{-1}(B_N(r_0))$, então

$$
2m\rho_N(\varphi)\|\text{grad } \rho_N(\varphi)\|\|\vec{H}\| \leq 2mr_0 \sup_{B_N(r_0)}\|\vec{H}\|.
$$

Se $x \in M \setminus \varphi^{-1}(B_N(r_0))$, então

$$
2m\rho_N(\varphi)\|\text{grad } \rho_N(\varphi)\|\|\vec{H}\| \leq 2Rc\left(\frac{C_{b_2}}{S_{b_2}}\right)(\rho_N(\varphi)).
$$

Logo, obtemos

$$
\Delta f \ \leq\ 2\left[1 + m\sup_{\rho_N\in[0,R]}\rho_N(\varphi)\frac{C_{b_1}}{S_{b_1}}(\rho_N(\varphi))\right] + \Lambda(\sup_{B_N(r_0)}\|\vec{H}\|, c, r_0, R, b_2),
$$

onde

$$
\Lambda(\sup_{B_N(r_0)}\|\vec{H}\|, c, r_0, R, b_2) = \max\left\{2mr_0\sup_{B_N(r_0)}\|\vec{H}\|, 2cR\left(\frac{C_{b_2}}{S_{b_2}}\right)(R)\right\}.
$$

Por outro lado, grad $f = 2\rho_N\psi\nu$. Assim,

$$
\inf_{\partial D(R)}\|\text{grad } f\| \geq 2R\sqrt{1 - B^2(b_2, c, r_0)} > 0.
$$

Usando o Teorema de Green, obtemos

$$
\begin{aligned}
\sup_{D(R)} \Delta f \cdot \mathrm{vol}_m(D(R)) &= \sup_{D(R)} \Delta f \cdot \int_{D(R)} dD(R) \\
&= \int_{D(R)} \sup_{D(R)} \Delta f \; dD(R) \geq \int_{D(R)} \Delta f \; dD(R) \\
&= \int_{D(R)} \mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ f \; dD(R) = \int_{\partial D(R)} \langle \mathrm{grad}\ f, \nu \rangle \; d(\partial D(R)) \\
&\geq \int_{\partial D(R)} \|\mathrm{grad}\ f\| \; d(\partial D(R)) \geq \int_{\partial D(R)} \left(\inf_{\partial D(R)} \|\mathrm{grad}\ f\| \right) d(\partial D(R)) \\
&= \inf_{\partial D(R)} \|\mathrm{grad}\ f\| \cdot \mathrm{vol}_{m-1}(\partial D(R)).
\end{aligned}
$$

Assim, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{vol}_{m-1}(\partial D(R))}{\mathrm{vol}_m(D(R))} &\leq \frac{\sup_{D(R)} \Delta f}{\inf_{\partial D(R)} \|\mathrm{grad}\ f\|} \\
&\leq \frac{2\left[1 + m \sup_{\rho_N \in [0,R]} \rho_N(\varphi) \frac{C_{b_1}}{S_{b_1}}(\rho_N(\varphi))\right] + \Lambda(\sup_{B_N(r_0)} \|\vec{H}\|, c, r_0, R, b_2)}{2R\sqrt{1 - B^2(b_2, c, r_0)}} \\
&\leq \frac{2\left[1 + m \sup_{\rho_N \in [0,R]} \frac{C_{b_1}}{S_{b_1}}(\rho_N(\varphi))\right] + 2\Lambda(\sup_{B_N(r_0)} \|\vec{H}\|, c, r_0, R, b_2)}{2R\sqrt{1 - B^2(b_2, c, r_0)}} \\
&= \frac{\left[1 + m \sup_{\rho_N \in [0,R]} \rho_N(\varphi) \frac{C_{b_1}}{S_{b_1}}(\rho_N(\varphi))\right] + \Lambda(\sup_{B_N(r_0)} \|\vec{H}\|, c, r_0, R, b_2)}{R\sqrt{1 - B^2(b_2, c, r_0)}} \\
&= \frac{\left[1 + m \sup_{\rho_N \in [0,R]} \rho_N(\varphi)\sqrt{-b_1} \coth(\sqrt{-b_1}\rho_N(\varphi))\right]}{R\sqrt{1 - B^2(b_2, c, r_0)}} \\
&\quad + \frac{\Lambda(\sup_{B_N(r_0)} \|\vec{H}\|, c, r_0, R, b_2)}{R\sqrt{1 - B^2(b_2, c, r_0)}} \\
&\leq \frac{1 + \sqrt{-b_1} m R \coth(\sqrt{-b_1}R) + \Lambda(\sup_{B_N(r_0)} \|\vec{H}\|, c, r_0, R, b_2)}{R\sqrt{1 - B^2(b_2, c, r_0)}}.
\end{aligned}
$$

Isto termina a demonstração.

□

Observação 2.1 No Teorema 2.1, se a imersão é mínima, então $\Lambda = 0$. Assim, usando (1) e (2.13), obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{vol}_{m-1}(\partial B_{\mathbb{N}^m(b_2)}(R))}{\mathrm{vol}_m(B_{\mathbb{N}^m(b_2)}(R))} &\leq \frac{\mathrm{vol}_{m-1}(\partial D(R))}{\mathrm{vol}_m(D(R))} \\
&\leq \frac{1 + \sqrt{-b_1} \cdot m \cdot R \cdot \coth(\sqrt{-b_1} \cdot R)}{R \cdot \sqrt{1 - B^2(b_2, c, r_0)}}.
\end{aligned}
$$

Capítulo 3

Resultado Principal

Neste capítulo iremos provar o resultado principal deste trabalho. Dada uma variedade compacta M, existe uma única função suave E em M que satisfaz $\Delta E = -1$ em M e $E|_{\partial M} = 0$ (ver [13]). Chamamos essa função E de *tempo médio de saída* de M.

3.1 Tempo médio de saída em subvariedades esfericamente simétricas

Uma *variedade esfericamente simétrica* é um espaço quociente $W = ([0, R) \times \mathbb{S}^{n-1})/\sim$, com $R \in (0, \infty]$, onde

$$(t, \theta) \sim (s, \alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} t = s \quad \text{e} \quad \theta = \alpha \\ \text{ou} \\ s = t = 0, \end{cases}$$

dotado com uma métrica Riemanniana da forma $dt^2 + f^2(t)d\theta^2$, onde $f \in C^2([0, R])$ com $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $f(t) > 0$ para todo $t \in (0, R]$. A classe das variedades esfericamente simétricas inclui as formas espaciais canônicas $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n(1)$ e $\mathbb{H}^n(-1)$.

Seja $B_W(r) \subset W$ uma bola geodésica com raio r e centro $0 = (0 \times \mathbb{S}^{n-1})/\sim$ de uma variedade esfericamente simétrica $(W, dt^2 + f^2(t)d\theta^2)$. O tempo médio de saída E de $B_W(r)$ é dado por

$$E(x) = E(|x|) = \int_{|x|}^{r} \frac{1}{f^{n-1}(\sigma)} \int_0^{\sigma} f^{n-1}(s)\,ds\,d\sigma, \tag{3.1}$$

onde $|x| = \mathrm{dist}_W(0,x)$. De fato, para todo $x \in \partial B_W(r)$, temos $|x| = r$, logo

$$E(|x|) = \int_{|x|}^{r} \frac{1}{f^{n-1}(\sigma)} \int_0^{\sigma} f^{n-1}(s) ds d\sigma = 0, \forall x \in \partial B_W(r).$$

Ademais,

$$E'(|x|) = -\frac{1}{f^{n-1}(|x|)} \int_0^{|x|} f^{n-1}(s)\ ds$$

e

$$E''(|x|) = (n-1)\frac{f'(|x|)}{f(|x|)} \frac{1}{f^{n-1}(|x|)} \int_0^{|x|} f^{n-1}(s) ds - 1.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\Delta_W E(|x|) &= E''(|x|) + (n-1)\frac{f'(|x|)}{f(|x|)} E'(|x|) + \frac{1}{f^2(|x|)} \Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} \\
&= (n-1)\frac{f'(|x|)}{f(|x|)} \frac{1}{f^{n-1}(|x|)} \int_0^{|x|} f^{n-1}(s) ds - 1 \\
&\quad +(n-1)\frac{f'(|x|)}{f(|x|)} \left(-\frac{1}{f^{n-1}(|x|)} \int_0^{|x|} f^{n-1}(s) ds \right) \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Observe que

$$E'(r) = -\frac{\int_0^r f^{n-1}(s)\ ds}{f^{n-1}(r)} = -\frac{\mathrm{vol}_n(B_W(r))}{\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_W(r))}. \tag{3.2}$$

Considere o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_W u + \lambda_1(B_W(r)) u = 0 & \text{em } B_W(r), \\ u = 0 & \text{em } \partial B_W(r). \end{cases}$$

Em [5], Bessa e Montenegro mostraram que o primeiro autovalor $\lambda_1(B_W(r))$ é limitado inferiormente por

$$\lambda_1(B_W(r)) \geq \frac{[\inf_{B_W(r)} \mathrm{div}\ X]^2}{4 \sup_{B_W(r)} \|X\|^2}, \tag{3.3}$$

onde X é um campo de vetores em $B_W(r)$ com $\inf \mathrm{div}\ X > 0$ e $\sup \|X\| < \infty$. Tomando $X = -\mathrm{grad}_W\ E$, temos que $\mathrm{div}\ X = 1$ e $\|X\| = |E'|$. Aplicando (3.3) e usando (3.2), obtemos o seguinte teorema.

Teorema 3.1 *Seja $B_W(r)$ uma bola geodésica centrada em $0 = (0 \times \mathbb{S}^{n-1})/\sim$ com raio r em uma n-variedade Riemanniana esfericamente simétrica $(W, dt^2 + f^2(t)d\theta^2)$. Sejam $V(t)$ e $S(t)$, respectivamente, o n-volume e o $(n-1)$-volume de $B_W(t)$ e $\partial B_W(t)$. Então*

$$\lambda_1(B_W(r)) \geq \inf_{0 \leq t \leq r} \frac{1}{4} \left[\frac{S(t)}{V(t)} \right]^2. \tag{3.4}$$

Corolário 3.1 *Seja W uma variedade esfericamente simétrica não-compacta completa. Suponha que o bordo de $B_W(t)$ tem crescimento de volume $c_1e^{c_3t} \leq S(t) \leq c_2e^{c_3t}$, onde $c_1 < c_2$ e c_3 são constantes positivas. Então*

$$\lambda^*(W) = \lim_{r\to\infty} \lambda_1(B_W(r)) \geq \left(\frac{c_1c_3}{c_2}\right)^2. \tag{3.5}$$

3.2 Tempo médio de saída em subvariedades mínimas de $N \times \mathbb{R}$

Seja $\varphi : M \hookrightarrow W$ uma m-subvariedade mínima completa propriamente imersa de uma variedade Riemanniana completa W com curvatura seccional $K_W \leq \kappa$. Sejam $D(R)$ uma bola geodésica extrínseca centrada em $p = \varphi(q)$ com raio R e $\rho_W(y) = \text{dist}_W(p, y)$. Seja $E(y)$ o tempo médio de saída de $D(R)$, e denote por $E_b^m(\tilde{y})$ o tempo médio de saída da bola geodésica $B_{\mathbb{N}^m(b)}(R)$ na forma espacial $\mathbb{N}^m(b)$. Sabemos que E_b^m é uma função radial $E_b^m(\tilde{y}) = E_b^m(|\tilde{y}|)$, onde $|\tilde{y}| = \text{dist}_{\mathbb{N}^{m-1}(b)}(0, \tilde{y})$. Markvorsen provou o seguinte teorema de comparação do tempo médio de saída.

Teorema 3.2 (Markvorsen [22]) (i) *Se a curvatura seccional de W satisfaz $K_W \leq b \leq 0$, então $E(y) \leq E_b^m(\rho_W(y))$.*

(ii) *Se a curvatura seccional de W satisfaz $K_W \geq b \geq 0$, então $E(y) \geq E_b^m(\rho_W(y))$.*

O próximo resultado, obtido por Bessa e Montenegro (ver [6]), é uma versão do teorema de comparação do tempo médio de saída de Markvorsen para conjuntos compactos de subvariedades mínimas de $N \times \mathbb{R}$.

Seja $K \subset \varphi(M)$ um conjunto compacto em uma m-subvariedade mínima de $N\times\mathbb{R}$, onde N é uma variedade Riemanniana com curvatura seccional $K_N \leq \kappa$. Sejam r_K e p_K, respectivamente, o raio e o centro radial de $\pi_1(K)$. Suponha que $r_K < \min\{\text{inj}_N(p_K), \pi/2\sqrt{\kappa}\}$. Denotemos por $E(y)$ e $E_b(\tilde{y}) = E_b^{m-1}(\tilde{y})$, respectivamente, o tempo médio de saída de K e $B_{\mathbb{N}^{m-1}(b)}(r_K)$.

Teorema 3.3 *Seja $\rho_N(\pi_1(y)) = \text{dist}_N(p_K, \pi_1(y))$.*

(i) *Se $K_N \leq b \leq 0$, então $E(y) \leq E_b(\rho_N(\pi_1(y)))$.*

(ii) *Se $K_N \geq b > 0$, a imersão φ é própria e $K = \varphi(M) \cap (B_N(R) \times \mathbb{R})$ é um conjunto compacto, então $E(y) \geq E_b(\rho_N(\pi_1(y)))$.*

Demonstração: Primeiro notemos que E e E_b satisfazem

$$\begin{cases} \Delta_K E = -1 \quad \text{em } K, \\ E = 0 \quad \text{em } \partial K \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \Delta_{\mathbb{N}^{m-1}(b)} E_b = -1 \quad \text{em } B_{\mathbb{N}^{m-1}(b)}(r_K), \\ E_b = 0 \quad \text{em } \partial B_{\mathbb{N}^{m-1}(b)}(r_K). \end{cases} \tag{3.6}$$

Sabemos que E_b é uma função radial $E_b(\tilde{y}) = E_b(|\tilde{y}|)$. Seja $\bar{E}_b$ o transporte de E_b para $B_N(r_K) \times \mathbb{R}$ definido por $\bar{E}_b(y) = E_b \circ \rho_N \circ \pi_1(y)$, onde $\pi_1 : N \times \mathbb{R} \to N$ é a projeção sobre o primeiro fator. Temos que $\bar{E}_b|_K = \bar{E}_b \circ \varphi$. Definimos $F_b : [0, \infty) \to [0, \infty)$ por

$$F_b(t) = \begin{cases} \frac{1}{b}(1 - \cos(\sqrt{b} \cdot t)) & \text{se } b > 0, \\ \frac{t^2}{2} & \text{se } b = 0, \\ \frac{1}{b}(1 - \cosh(\sqrt{-b} \cdot t)) & \text{se } b < 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Observe que F_b satisfaz $F_b''(t) - \frac{C_b}{S_b}(t) F_b'(t) = 0$ para todo $t \geq 0$.

Seja $s = F_b(\rho_N \circ \pi_1)$ e defina $\bar{\mathbf{E}}_b(s)$ por $\bar{\mathbf{E}}_b(s(y)) = \bar{E}_b(y)$. Calculando $\Delta_K \bar{E}_b \circ \varphi$ em qualquer ponto $x \in \varphi^{-1}(K)$, obtemos (ver (1.37))

$$\begin{aligned}
\Delta_K \bar{E}_b \circ \varphi(x) &= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Hess}_{(N \times \mathbb{R})}\ \bar{E}_b(y)(X_i, X_i) + \left\langle \mathrm{grad}\ \bar{E}_b, \sum_{i=1}^{m} \alpha(X_i, X_i) \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Hess}_{(N \times \mathbb{R})}\ (E_b \circ \rho_N \circ \pi_1)(y)(X_i, X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Hess}_N\ (E_b \circ \rho_N \circ \pi_1)(y)(X_i, X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Hess}_N\ \bar{E}_b(y)(X_i, X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Hess}_N\ \bar{\mathbf{E}}_b(s(y))(X_i, X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left[X_i X_i \bar{\mathbf{E}}_b(s(y)) - (\nabla_{X_i} X_i)\, \bar{\mathbf{E}}_b(s(y)) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left[\bar{\mathbf{E}}_b''(s(y)) X_i s(y) X_i s(y) + \bar{\mathbf{E}}_b'(s(y)) X_i X_i s(y) \right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m} (\nabla_{X_i} X_i)\, \bar{\mathbf{E}}_b(s(y))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m} \Big[\bar{\mathbf{E}}_b''(s(y)) \langle \text{grad } s(y), X_i \rangle^2 + \bar{\mathbf{E}}_b'(s(y)) X_i X_i s(y) \Big] \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m} \bar{\mathbf{E}}_b'(s(y)) \left(\nabla_{X_i} X_i \right) s(y) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \Big[\bar{\mathbf{E}}_b''(s(y)) \langle \text{grad } s(y), X_i \rangle^2 \bar{\mathbf{E}}_b'(s(y)) \left(X_i X_i s(y) - \left(\nabla_{X_i} X_i \right) s(y) \right) \Big] \\
&= \sum_{i=1}^{m} \Big[\bar{\mathbf{E}}_b''(s(y)) \langle \text{grad } s(y), X_i \rangle^2 + \bar{\mathbf{E}}_b'(s(y)) \text{Hess}_N \ s(y)(X_i, X_i) \Big], \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

onde $\{X_i\}$ é uma base ortonormal para $T_y\varphi(M)$, com $y = \varphi(x)$. Seja $\{\partial/\partial\rho_N, \partial/\partial\theta_1, ..., \partial/\partial\theta_{n-1}\}$ uma base ortonormal para $T_{\pi_1(y)}N$ de coordenadas polares, e seja $\partial/\partial t$ o vetor unitário tangente ao fator $\mathbb{R}$. Escolhemos X_i da seguinte maneira:

$$
X_i = \alpha_i \frac{\partial}{\partial \rho_N} + \beta_i \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_j^i \frac{\partial}{\partial \theta_j}, \qquad (3.9)
$$

$$
\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (\gamma_j^i)^2 = 1. \qquad (3.10)
$$

Aplicando o Teorema de Comparação do Hessiano e levando em conta o fato que $F_b''(t) - F_b'(t)\frac{C_b}{S_b}(t) = 0$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \text{Hess}_N \ s(X_i, X_i) &= \sum_{i=1}^{m} \text{Hess}_N \ F_b(\rho_N)(X_i, X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left[X_i X_i F_b(\rho_N) - \left(\nabla_{X_i} X_i \right) F_b(\rho_N) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left[F_b''(\rho_N) X_i \rho_N X_i \rho_N + F_b'(\rho_N) X_i X_i \rho_N - F_b'(\rho_N) \left(\nabla_{X_i} X_i \right) \rho_N \right] \\
&= F_b''(\rho_N) \sum_{i=1}^{m} (X_i \rho_N)^2 + F_b'(\rho_N) \sum_{i=1}^{m} \left(X_i X_i \rho_N - \left(\nabla_{X_i} X_i \right) \rho_N \right) \\
&= F_b''(\rho_N) \sum_{i=1}^{m} \langle \text{grad } \rho_N, X_i \rangle^2 + F_b'(\rho_N) \sum_{i=1}^{m} \text{Hess}_N \ \rho_N(X_i, X_i) \\
&= F_b''(\rho_N) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 + F_b'(\rho_N) \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-1} (\gamma_j^i)^2 \text{Hess}_N \ \rho_N \left(\frac{\partial}{\partial \theta_j}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) \\
&\geq F_b''(\rho_N) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 + F_b'(\rho_N) \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-1} (\gamma_j^i)^2 \frac{C_b}{S_b}(\rho_N) \left\| \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\|^2 \\
&= F_b''(\rho_N) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 + F_b'(\rho_N) \frac{C_b}{S_b}(\rho_N) \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-1} (\gamma_j^i)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= F_b''(\rho_N)\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 + F_b'(\rho_N)\frac{C_b}{S_b}(\rho_N)\sum_{i=1}^m (1-\alpha_i^2-\beta_i^2)\\
&= \left(F_b''(\rho_N) - F_b'(\rho_N)\frac{C_b}{S_b}(\rho_N)\right)\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 + F_b'(\rho_N)\frac{C_b}{S_b}(\rho_N)\left(m - \sum_{i=1}^m \beta_i^2\right)\\
&\geq (m-1)\cdot F_b'(\rho_N)\frac{C_b}{S_b}(\rho_N).
\end{aligned}
$$

Logo, obtemos

$$
\sum_{i=1}^m \mathrm{Hess}_N\ s(X_i,X_i) \geq (m-1)\cdot F_b'(\rho_N)\frac{C_b}{S_b}(\rho_N). \tag{3.11}
$$

Lembremos que o Laplaciano da métrica canônica $dt^2 + S_b^2(t)d\theta^2$ da forma espacial $\mathbb{N}^{m-1}(b)$ é dado por

$$
\Delta_{\mathbb{N}^{m-1}(b)} = \partial^2/\partial t^2 + (m-2)(C_b/S_b)\partial/\partial t + (1/S_b^2(t))\Delta_{\mathbb{S}^{m-2}}. \tag{3.12}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\mathbb{N}^{m-1}(b)} s &= F_b''(\rho_N) + (m-2)\frac{C_b}{S_b}(\rho_N)F_b'(\rho_N) + \frac{1}{S_b^2(\rho_N)}\Delta_{\mathbb{S}^{m-2}}F(\rho_N)\\
&= F_b''(\rho_N) + (m-2)\frac{C_b}{S_b}(\rho_N)F_b'(\rho_N)\\
&= F_b'(\rho_N)\frac{C_b}{S_b}(\rho_N) + (m-2)\frac{C_b}{S_b}(\rho_N)F_b'(\rho_N)\\
&= (m-1)\frac{C_b}{S_b}(\rho_N)F_b'(\rho_N).
\end{aligned}
$$

Em [22], Markvorsen provou que

$$
\mathbf{E}_b'(s) < 0 \quad \text{para todo } b \quad \text{e} \quad
\begin{cases}
\mathbf{E}_b''(s) > 0 & \text{se } b < 0,\\
\mathbf{E}_b''(s) = 0 & \text{se } b = 0,\\
\mathbf{E}_b''(s) < 0 & \text{se } b > 0.
\end{cases}
$$

Assim, de (3.8), temos

$$
\begin{aligned}
\Delta_K \bar{E}_b\circ\varphi(x) &= \sum_{i=1}^m \Big[\bar{\mathbf{E}}_b''(s)\langle \mathrm{grad}\ s, X_i\rangle^2 + \bar{\mathbf{E}}_b'(s)\mathrm{Hess}_N\ s(X_i,X_i)\Big]\\
&= \bar{\mathbf{E}}_b''(s)\sum_{i=1}^m \langle \mathrm{grad}\ s, X_i\rangle^2 + \bar{\mathbf{E}}_b'(s)\sum_{i=1}^m \mathrm{Hess}_N\ s(X_i,X_i)\\
&\leq \bar{\mathbf{E}}_b''(s)\|\mathrm{grad}_N\ s\|^2 + \bar{\mathbf{E}}_b'(s)\cdot(m-1)\cdot F_b'(\rho_N)\frac{C_b}{S_b}(\rho_N)\\
&= \bar{\mathbf{E}}_b''(s)\|\mathrm{grad}_{\mathbb{N}^{m-1}(b)}\ s\|^2 + \bar{\mathbf{E}}_b'(s)\Delta_{\mathbb{N}^{m-1}(b)} s\\
&= \Delta_{\mathbb{N}^{m-1}(b)}\bar{\mathbf{E}}_b = -1 = \Delta_K E.
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

Logo,

$$\Delta_K(\bar{E}_b - E) = \Delta_K \bar{E}_b - \Delta_K E \leq 0. \tag{3.14}$$

Note que $\bar{E}_b \circ \varphi > 0$ em $B_{N\times\mathbb{R}}(r_K)$ e $\bar{E}_b \circ \varphi = 0$ em $\partial B_{N\times\mathbb{R}}(r_K)$. Ademais, $K \subset B_{N\times\mathbb{R}}(r_K)$. Logo, $(\bar{E}_b - E)|_{\partial K} = \bar{E}_b|_{\partial K} \geq 0$. Assim, $\bar{E}_b \geq E$ em K. Portanto, $E(y) \leq E_b(\rho_N(\pi_1(y)))$, e o item (i) está provado.

(ii) Se $K_N \geq b > 0$, então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Hess}_N\ s(X_i, X_i) &= F_b''(\rho_N) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 \\
&\quad + F_b'(\rho_N) \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-1} (\gamma_j^i)^2 \mathrm{Hess}_N\ \rho_N \left(\frac{\partial}{\partial \theta_j}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) \\
&\leq F_b''(\rho_N) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 + F_b'(\rho_N) \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-1} (\gamma_j^i)^2 \frac{C_b}{S_b}(\rho_N) \left\| \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\|^2 \\
&= \left(F_b''(\rho_N) - F_b'(\rho_N) \frac{C_b}{S_b}(\rho_N) \right) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 \\
&\quad + F_b'(\rho_N) \frac{C_b}{S_b}(\rho_N) \left(m - \sum_{i=1}^{m} \beta_i^2 \right) \\
&\leq m \cdot F_b'(\rho_N) \frac{C_b}{S_b}(\rho_N)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

e $E_b''(s) < 0$. Ademais, temos

$$\Delta_{\mathbb{N}^m(b)} = \partial^2/\partial t^2 + (m-1)(C_b/S_b)\partial/\partial t + (1/S_b^2(t))\Delta_{\mathbb{S}^{m-1}}. \tag{3.16}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathbb{N}^m(b)} s &= \Delta_{\mathbb{N}^m(b)} F_b(\rho_N) \\
&= F_b''(\rho_N) + (m-1)\frac{C_b}{S_b}(\rho_N) F_b'(\rho_N) + \frac{1}{S_b^2(\rho_N)} \Delta_{\mathbb{S}^{m-1}} F(\rho_N) \\
&= F_b''(\rho_N) + (m-1)\frac{C_b}{S_b}(\rho_N) F_b'(\rho_N) \\
&= F_b'(\rho_N)\frac{C_b}{S_b}(\rho_N) + (m-1)\frac{C_b}{S_b}(\rho_N) F_b'(\rho_N) \\
&= m \cdot \frac{C_b}{S_b}(\rho_N) F_b'(\rho_N).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Consequentemente,

$$\Delta_K \bar{E}_b \circ \varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} \left[\bar{\mathbf{E}}_b''(s) \langle \mathrm{grad}\ s, X_i \rangle^2 + \bar{\mathbf{E}}_b'(s) \mathrm{Hess}_N\ s(X_i, X_i) \right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \bar{\mathbf{E}}_b''(s)\sum_{i=1}^{m}\langle \text{grad } s, X_i\rangle^2 + \bar{\mathbf{E}}_b'(s)\sum_{i=1}^{m}\text{Hess}_N\ s(X_i,X_i)\\
&\geq \bar{\mathbf{E}}_b''(s)\|\text{grad}_N\ s\|^2 + \bar{\mathbf{E}}_b'(s)\cdot m\cdot F_b'(\rho_N)\frac{C_b}{S_b}(\rho_N)\\
&= \bar{\mathbf{E}}_b''(s)\|\text{grad}_{\mathbb{N}^m(b)}\ s\|^2 + \bar{\mathbf{E}}_b'(s)\Delta_{\mathbb{N}^m(b)}s\\
&= \Delta_{\mathbb{N}^m(b)}\bar{\mathbf{E}}_b = -1 = \Delta_K E. \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

Assim, obtemos que $\Delta_K(\bar{E}_b - E) \geq 0$, e isto é válido para qualquer compacto K. Contudo, como estamos considerando $K = \varphi(M)\cap(B_N(R)\times\mathbb{R})$ e estamos supondo que a imersão φ é própria, temos que $\partial K \subset \partial B_N(R)\times\mathbb{R}$ e assim $(\bar{E}_b - E)|_{\partial K} = 0$. Logo, $\bar{E}_b \leq E$ em K e portanto $E(y) \geq E_b(\rho_N(\pi_1(y)))$.

□

3.3 Desigualdades isoperimétricas para subvariedades mínimas de $N\times\mathbb{R}$

Começaremos esta seção enunciando um importante lema devido a Palmer, o qual será útil na demonstração do próximo teorema.

Lema 3.1 (Palmer [28]) *Seja E_b o tempo médio de saída da bola $B_{\mathbb{N}^{m-1}(b)}(R)$. Então*

$$E_b'(R) = -\frac{\text{vol}_{m-1}(B_{\mathbb{N}^{m-1}(b)}(R))}{\text{vol}_{m-2}(\partial B_{\mathbb{N}^{m-1}(b)}(R))}. \qquad (3.19)$$

Agora estamos em condições de provar o resultado principal deste trabalho.

Teorema 3.4 *Seja $\varphi : M \hookrightarrow N\times\mathbb{R}$ uma imersão mínima de uma variedade m-dimensional M no espaço produto $N\times\mathbb{R}$, onde N é uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional K_N. Seja $K\subset\varphi(M)$ um conjunto compacto conexo e sejam $r_K = \text{raio}(\pi_1(K))$ e $p_K\in N$, respectivamente, o raio e o centro radial do conjunto $\pi_1(K)$. Suponha que $r_K < \text{inj}_N(p_K)$. Então*

$$\frac{\text{vol}_{m-1}(\partial K)}{\text{vol}_m(K)} \geq \frac{\text{vol}_{m-2}(\partial B_{\mathbb{N}^{m-1}(b)}(r_K))}{\text{vol}_{m-1}(B_{\mathbb{N}^{m-1}(b)}(r_K))}. \qquad (3.20)$$

Demonstração: Denotemos por $\bar{E}_b$ o transporte do tempo médio de saída E_b^{m-1} de $B_{\mathbb{N}^{m-1}(b)}(r_K)$ para $B_N(r_K)\times\mathbb{R}$ definido por $\bar{E}_b(x) = E_b\circ\rho_N\circ\pi_1(y)$.

Por (3.13), temos que $\Delta_K \bar{E}_b \circ \varphi \leq -1$ em K. Denotando por dK e dA, respectivamente, os elementos de volume Riemanniano em K e ∂K, e integrando sobre K, obtemos

$$\begin{aligned}
-\mathrm{vol}_m(K) = -\int_K dK &\geq \int_K \Delta_K \bar{E}_b \circ \varphi \, dK \\
&= \int_K \mathrm{div}\ (\mathrm{grad}\ \bar{E}_b \circ \varphi)\ dK = \int_{\partial K} \langle \mathrm{grad}\ \bar{E}_b \circ \varphi, \nu \rangle \ dA \\
&= \int_{\partial K} \langle \mathrm{grad}\ (E_b \circ \rho_N \circ \pi_1) \circ \varphi, \nu \rangle \ dA \\
&= \int_{\partial K} \nu(E_b \circ \rho_N \circ \pi_1 \circ \varphi)\ dA = \int_{\partial K} E_b' \cdot \nu(\rho_N \circ \pi_1 \circ \varphi)\ dA \\
&\geq -\int_{\partial K} |E_b'| \cdot \|\nu(\rho_N \circ \pi_1 \circ \varphi)\|\ dA \\
&= -\int_{\partial K} |E_b'|\ dA \geq -\int_{\partial K} \left(\sup_{\partial K} |E_b'| \right) dA \\
&= -\sup_{\partial K} |E_b'| \cdot \int_{\partial K} dA = -\sup_{\partial K} |E_b'| \cdot \mathrm{vol}_{m-1}(\partial K).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{vol}_{m-1}(\partial K)}{\mathrm{vol}_m(K)} &\geq \frac{1}{\sup_{\partial K} |E_b'|} = |E_b'(r_K)|^{-1} \\
&= \left| -\frac{\mathrm{vol}_{m-1}(B_{\mathbb{N}^{m-1}(b)}(r_K))}{\mathrm{vol}_{m-2}(\partial B_{\mathbb{N}^{m-1}(b)}(r_K))} \right|^{-1} \\
&= \frac{\mathrm{vol}_{m-2}(\partial B_{\mathbb{N}^{m-1}(b)}(r_K))}{\mathrm{vol}_{m-1}(B_{\mathbb{N}^{m-1}(b)}(r_K))}. \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração.

□

Bibliografia

[1] ABRESCH, U.; ROSENBERG, H. A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $S^2 \times \mathbb{R}$ and $H^2 \times \mathbb{R}$. *Acta Math.*, v. 193, p. 141-174, 2004.

[2] BARROSO, C. S.; BESSA, G. P. Lower bounds for the first Laplacian eingenvalue of geodesic balls of spherically symmetric manifolds. *Int. J. Appl. Math. Stat.*, v. 6, p. 82-86, 2006.

[3] BESSA, G. P.; COSTA, S. On cylindrically bounded H-hypersurfaces of $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. *Differential Geom. Appl.*, v. 26, p. 323-326, 2008.

[4] BESSA, G. P.; JORGE, L.; MONTENEGRO, J. F. Complete submanifolds of $\mathbb{R}^n$ with finite topology. *Comm. Anal. Geom.*, v. 15, p. 725-732, 2007.

[5] BESSA, G. P.; MONTENEGRO, J. F. Eigenvalue estimates for submanifolds with locally bounded mean curvature. *Ann. Global Anal. Geom.*, v. 24, p. 279-290, 2003.

[6] ——————. Mean time exit and isoperimetric inequalities for minimal submanifolds of $N \times \mathbb{R}$. *Bull. London Math. Soc.*, v. 41, p. 242-252, 2009.

[7] ——————. On compact H-hypersurfaces of $N \times \mathbb{R}$. *Geom. Dedicata*, v. 127, p. 1-5, 2007.

[8] CAMINHA, A. *Tópicos de geometria diferencial.* Preprint.

[9] CHAVEL, I. *Eigenvalues in Riemannian geometry.* New York: Academic Press, 1984.

[10] COSTA, M. S. *Sobre subvariedades com segunda forma fundamental dominada em espaços de Hadamard.* 44 f. Tese (Doutorado em Matemática)

- Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2007.

[11] CARMO, M. P. do. *Geometria Riemanniana.* Rio de Janeiro: IMPA, 2008. (Projeto Euclides)

[12] DUBROVIN, B. A.; FOMENKO, A. T.; NOVIKOV, S. P. *Modern geometry*: methods and applications: Part II. The geometry and topology of manifolds (Graduate texts in mathematics, v. 104), New York: Springer-Verlag, 1985.

[13] DYNKIN, E. B. *Markov process.* New York: Academic Press, 1965. (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 121 e 122).

[14] EARP, R.; NELLI, B.; SANTOS, W.; TOUBIANA, E. Uniqueness of H-surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $|H| \leq 1/2$, with boundary one or two parallel horizontal circles. *Ann. Global Anal. Geom.*, v. 33, p. 307-321, 2007.

[15] HAUSWIRTH, L. Minimal surfaces of Riemann type in three-dimensional product manifolds. *Pacific J. Math.*, v. 224, p. 91-117, 2006.

[16] HAUSWIRTH, L.; ROSENBERG, H. Minimal surfaces of finite total curvature in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Mat. Contemp.*, v. 31, p. 65-80, 2006.

[17] HOFFMAN, D.; LIRA, J. H. de; ROSENBERG, H. Constant mean curvature surfaces in $M^2 \times \mathbb{R}$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 358, p. 491-507, 2006.

[18] JORGE, L.; KOUTROUFIOTIS, D. An estimate for the curvature of bounded submanifolds. *Amer. J. Math.*, v. 103, p. 711-725, 1981.

[19] LEE, J. M. *Introduction to smooth manifolds.* New York: Springer-Verlag, 2003.

[20] ——————. *Riemannian manifolds*: an introduction to curvature. New York: Springer-Verlag, 1997.

[21] LIMA, E. L. *Curso de análise.* Rio de Janeiro: IMPA, 2009. v. 2 (Projeto Euclides).

[22] MARKVORSEN, S. On the mean exit time from a minimal submanifolds. *J. Differential Geom.*, v. 29, p. 1-8, 1989.

[23] MARKVORSEN, S.; PALMER, V. Generalized isoperimetric inequalities for extrinsic balls in minimal submanifolds. *J. Reine Angew. Math.*, v. 551, p. 101-121, 2002.

[24] MEEKS, W.; ROSENBERG, H. The theory of minimal surfaces in $M^2 \times \mathbb{R}$. *Comment. Math. Helv.*, v. 80, p. 811-858, 2002.

[25] NELLI, B.; ROSENBERG, H. Minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Bull. Braz. Math. Soc.*, v. 33, p. 263-292, 2002.

[26] ——————. Simply connected constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Michigan Math. J.*, v. 54, p. 537-543, 2006.

[27] ——————. Global properties of constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Pacific J. Math.*, v. 226, p. 137-152, 2006.

[28] PALMER, V. Isoperimetric inequalities for extrinsic balls in minimal submanifolds and their applications. *J. London. Math. Soc.*, v. 60, p. 607-616, 1999.

[29] PETERSEN, P. *Riemannian geometry.* New York: Springer-Verlag, 1998.

[30] ROSENBERG, H. Minimal surfaces in $M^2 \times \mathbb{R}$. *Illinois J. Math.*, v. 46, p. 1177-1195, 2002.

[31] ——————. *Some recent developments in the theory of minimal surfaces in 3-manifolds*. Rio de Janeiro: IMPA, 2003. (Colóquio Brasileiro de Matemática, 24)

[32] SAKAI, T. Riemannian geometry. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1995.

[33] SCHOEN, R.; YAU, S. T. *Lectures on differential geometry.* Cambridge: International Press, 1994. (Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, v. 1)