



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS RUSSAS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

FRANCISCO MARQUES DOS SANTOS JUNIOR

**ESTUDO COMPARATIVO DE DESLOCAMENTOS EM LAJES DE CONCRETO
ARMADO: TEORIA DE KIRCHHOFF E MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.**

RUSSAS

2026

FRANCISCO MARQUES DOS SANTOS JUNIOR

ESTUDO COMPARATIVO DE DESLOCAMENTOS EM LAJES DE CONCRETO
ARMADO: TEORIA DE KIRCHHOFF E MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Graduação em Engenharia Civil
do Campus Russas da Universidade Federal do
Ceará, como requisito parcial à obtenção do
grau de bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Iago Freitas de Al-
meida

RUSSAS

2026

FRANCISCO MARQUES DOS SANTOS JUNIOR

ESTUDO COMPARATIVO DE DESLOCAMENTOS EM LAJES DE CONCRETO
ARMADO: TEORIA DE KIRCHHOFF E MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Graduação em Engenharia Civil
do Campus Russas da Universidade Federal do
Ceará, como requisito parcial à obtenção do
grau de bacharel em Engenharia Civil.

Aprovada em: 16/01/2026

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Iago Freitas de Almeida (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jerfson Moura Lima
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Eng. Francisco Lucas de Oliveira Freire
Universidade Federal do Ceará (UFC)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço aos meus pais, Francisco Marques dos Santos e Jacy Brito dos Santos, pela capacidade inesgotável de acreditar em mim e investir no meu futuro. Mãe, seu cuidado e dedicação foram, em muitos momentos, a esperança que me fez seguir adiante. Pai, sua presença sempre significou segurança e a certeza de que eu nunca estive sozinho nessa caminhada.

Agradeço ao professor Dr. Iago Freitas de Almeida por me orientar neste processo de aprendizado por meio do projeto de conclusão de curso. Seu entusiasmo pela área tornou ainda mais prazerosa a realização deste trabalho.

Também agradeço ao professor Dr. Jerfson Lima, por ministrar aulas sempre ricas em conteúdo e por me introduzir com excelência ao campo das estruturas e do cálculo estrutural. O senhor mostrou que a engenharia não é apenas pragmática, mas pode ser conduzida de forma formal e sistemática, através da física.

Aos professores da área de matemática Dr. José Gleyson Carneiro da Silva, Dr. Gastão Alves Silves e Dr. Luiz Antonio Caetano Monte por sempre me motivarem e por despertarem em mim o prazer de aprender coisas novas, e conseguir amadurecer e ser focado, e entender tudo muito bem, que se tornou fundamental em minha vida pra aprender qualquer coisa nova.

À querida professora Dra. Daniela Lima Machado, que mostrou-me as diferentes vertentes dentro da engenharia, e que sempre encorajou a seguir alguma área numérica. E a professora Dra. Laís Costa que trouxe ensinamentos fundamentais para um engenheiro civil, e por sempre abrir portas e oferecer oportunidades.

Aos meus colegas e amigos: Elidiel Peixinho de Almeida, por estar sempre presente, sendo um amigo de inteligência admirável e que tanto me ajudou com sua praticidade; as amigas Vitória Rebeca Pinheiro e Magna Bocage, cuja dedicação, visão sensata e objetividade foram essenciais ao longo da faculdade e na condução de diversas tarefas.

Ao meu falecido amigo Rhuan Cavalcante, uma pessoa muito especial, um verdadeiro companheiro que deixou saudades e lembranças inesquecíveis, e que sempre fez parecer que o dia tinha mais do que 24 horas. E ao meu grande amigo Johnny Alves, forte mentalmente e excelente companhia, que tornava os dias de estudo mais leves com o seu café sempre impecável.

“É tão tolo reclamar que as pessoas são egoístas e traiçoeiras quanto reclamar que o campo magnético não aumenta a menos que o campo elétrico tenha um rotacional. Ambas são leis da natureza.”

(John von Neumann)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo comparar os deslocamentos máximos em lajes de concreto armado por meio de duas abordagens distintas: a teoria clássica de placas de Kirchhoff-Love e a modelagem numérica pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). Foram analisadas lajes retangulares submetidas a carregamento uniformemente distribuído, considerando diferentes condições de contorno, razões geométricas entre os lados e variações na espessura, com o intuito de avaliar a validade da hipótese de placa. As soluções analíticas baseadas na teoria de Kirchhoff-Love foram obtidas por meio de expressões clássicas em séries, enquanto as análises numéricas foram realizadas utilizando o software COMSOL Multiphysics, adotando-se um modelo elástico linear. Os resultados evidenciaram excelente concordância entre as soluções analíticas e numéricas para lajes com elevada razão entre o vão e a espessura, confirmando a adequação da teoria de placas nesse regime. À medida que a espessura da laje aumenta, observam-se discrepâncias progressivas entre os resultados analíticos e os obtidos via MEF, atribuídas principalmente à influência dos efeitos de cisalhamento transversal e à formulação do elemento finito utilizado. Conclui-se que a teoria de Kirchhoff-Love é apropriada para a estimativa de deslocamentos em lajes, enquanto o Método dos Elementos Finitos se mostra mais versátil para análises em que as hipóteses clássicas deixam de ser válidas.

Palavras-chave: lajes de concreto armado; teoria de placas; kirchhoff-Love; método dos elementos finitos; deslocamentos

ABSTRACT

This study aims to compare the maximum displacements of reinforced concrete slabs using two distinct approaches: the classical Kirchhoff-Love plate theory and numerical modeling based on the Finite Element Method (FEM). Rectangular slabs subjected to uniformly distributed loads were analyzed under different boundary conditions, geometric aspect ratios, and varying thicknesses, in order to assess the validity of the plate assumption. Analytical solutions derived from Kirchhoff-Love theory were obtained through classical series formulations, while numerical analyses were carried out using the COMSOL Multiphysics software under a linear elastic framework. The results demonstrated excellent agreement between analytical and numerical solutions for slabs with high span-to-thickness ratios, confirming the applicability of plate theory within this regime. As slab thickness increases, progressive discrepancies between the analytical results and FEM predictions were observed, mainly due to the influence of transverse shear effects and the formulation of the finite element employed. It is concluded that Kirchhoff-Love theory is suitable for displacement estimation in slabs, whereas the Finite Element Method provides greater flexibility and accuracy when classical assumptions are no longer valid.

Keywords: reinforced concrete slabs; plate theory; kirchhoff-love; finite element method; displacements

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 1 – Hipóteses cinemáticas da teoria de Kirchhoff para placas. | 15 |
| Figura 2 – Caso simplesmente apoiado | 17 |
| Figura 3 – Caso biengastado e biapoiado | 18 |
| Figura 4 – Caso com um engaste e três apoios simples | 20 |
| Figura 5 – Caso com todas bordas engastadas | 21 |
| Figura 6 – Placa retangular com um apoio engastado e os demais simplesmente apoiados | 27 |
| Figura 7 – Interface inicial de definição da análise no COMSOL. | 29 |
| Figura 8 – Seleção do módulo <i>Solid Mechanics</i> | 30 |
| Figura 9 – Definição do estudo estacionário. | 30 |
| Figura 10 – Atribuição das propriedades dos materiais. | 31 |
| Figura 11 – Aplicação das condições de contorno. | 32 |
| Figura 12 – Aplicação da carga distribuída. | 32 |
| Figura 13 – Geração e refinamento da malha. | 33 |
| Figura 14 – Resultado da deflexão fornecido pelo COMSOL. | 33 |
| Figura 15 – Gráfico de convergência com a deflexão máxima em função do refinamento da malha. | 34 |
| Figura 16 – Deflexão máxima em função da espessura da placa Caso 1. | 36 |
| Figura 17 – Erro relativo entre a solução de Kirchhoff e o MEF em função da razão h/a | 36 |
| Figura 18 – Flecha normalizada para diferentes razões $\lambda = b/a$ Caso simplesmente apoiado. | 37 |
| Figura 19 – Flecha normalizada para diferentes razões $\lambda = b/a$ Caso biengastado e biapoiado. | 38 |
| Figura 20 – Flecha normalizada para diferentes razões $\lambda = b/a$ Caso um bordo engastado e três apoiados. | 39 |
| Figura 21 – Flecha normalizada para diferentes razões $\lambda = b/a$ Caso totalmente engastado. | 41 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tabela 1 – Comparação entre a solução de Kirchhoff e o MEF Caso 1. | 35 |
| Tabela 2 – Erro relativo da solução de Kirchhoff em relação ao MEF Caso simplesmente apoiado. | 38 |
| Tabela 3 – Fonte: Elaborado pelo autor, com base em Kirchhoff-Love | 39 |
| Tabela 4 – Erro relativo da solução de Kirchhoff em relação ao MEF Caso com um bordo engastado e três bordos apoiados. | 40 |
| Tabela 5 – Erro relativo da solução de Kirchhoff em relação ao MEF Caso totalmente engastado. | 41 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|--|---|
| E | Módulo de Elasticidade |
| h | Altura da laje |
| ν | Coefficiente de Poisson |
| D | Módulo de rigidez a flexão da placa |
| w | Deslocamento na direção vertical |
| q | Carga uniformemente distribuída |
| $\frac{\partial(\square)}{\partial x}$ | Derivada parcial de \square com relação a x |
| σ_{ij} | Tensor de tensões |
| ε_{ij} | Tensor de deformações |
| C_{ijkl} | Matriz constitutiva |
| $\sigma_{ij,j}$ | Derivada parcial de σ_{ij} com relação a j . |
| u_i | Vetor deslocamento |
| ε_{kk} | Deformação volumétrica |
| δ_{ij} | Delta de Kronecker |
| l_x | Menor lado da laje |
| l_y | Maior lado da laje |
| h | Espessura da laje. |

SUMÁRIO

| | | |
|--------------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 11 |
| 1.1 | Considerações iniciais | 13 |
| <i>1.1.1</i> | <i>Objetivo Geral</i> | <i>13</i> |
| <i>1.1.2</i> | <i>Objetivo Específico</i> | <i>13</i> |
| <i>1.1.3</i> | <i>Justificativa</i> | <i>13</i> |
| <i>1.1.4</i> | <i>Organização do trabalho</i> | <i>14</i> |
| 2 | REVISÃO DE LITERATURA | 15 |
| 2.1 | Soluções para a equação da placa | 16 |
| <i>2.1.1</i> | <i>Caso simplesmente apoiado</i> | <i>16</i> |
| <i>2.1.2</i> | <i>Caso biengastado e biapoiado</i> | <i>18</i> |
| <i>2.1.3</i> | <i>Caso com três apoios simples e um engaste</i> | <i>19</i> |
| <i>2.1.4</i> | <i>Caso com todas as bordas engastadas</i> | <i>21</i> |
| 2.2 | Teoria da Elasticidade para placas | 23 |
| <i>2.2.1</i> | <i>Método dos Elementos Finitos</i> | <i>24</i> |
| 3 | METODOLOGIA | 27 |
| 3.1 | Abordagem analítica | 27 |
| 3.2 | Abordagem numérica | 28 |
| 4 | DESENVOLVIMENTO DO MODELO NUMÉRICO | 29 |
| 4.1 | Análise de convergência da malha | 34 |
| 5 | RESULTADOS | 35 |
| 5.1 | Influência da espessura | 35 |
| 5.2 | Resultados por condição de contorno | 36 |
| <i>5.2.1</i> | <i>Caso simplesmente apoiado</i> | <i>37</i> |
| <i>5.2.2</i> | <i>Caso biengastado e biapoiado</i> | <i>38</i> |
| <i>5.2.3</i> | <i>Caso com um bordo engastado e três bordos apoiados</i> | <i>39</i> |
| <i>5.2.4</i> | <i>Caso totalmente engastado</i> | <i>40</i> |
| 6 | CONCLUSÃO | 42 |
| 6.1 | Sugestão para trabalhos futuros | 43 |
| | REFERÊNCIAS | 44 |

1 INTRODUÇÃO

A previsão matemática de fenômenos físicos desempenha um papel fundamental na engenharia civil, especialmente no que se refere à estimativa do comportamento estrutural e à avaliação da segurança e da estabilidade das estruturas. Entre os diversos elementos estruturais, as lajes de concreto armado ocupam posição de destaque, sendo amplamente utilizadas em edifícios residenciais, comerciais e industriais. A compreensão do comportamento mecânico dessas lajes sob diferentes tipos de carregamentos e condições de contorno é essencial para análises estruturais eficientes e confiáveis.

Historicamente, o estudo das lajes evoluiu de forma paralela ao desenvolvimento das teorias da elasticidade e da resistência dos materiais. A teoria clássica das placas finas de Kirchhoff-Love, desenvolvida no século XIX, constitui um marco importante na análise estrutural de lajes, ao descrever o comportamento à flexão desconsiderando os efeitos do cisalhamento transversal. Posteriormente, a teoria de placas de Mindlin passou a incorporar esses efeitos, tornando-se mais adequada para a análise de lajes espessas. Segundo Haukaas (2019), a escolha entre essas abordagens depende diretamente da espessura da laje e do nível de precisão exigido na análise.

Com o avanço da tecnologia computacional, métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos (MEF) tornaram-se amplamente empregados para simular o comportamento estrutural de lajes, permitindo análises detalhadas mesmo em geometrias complexas ou sob condições variadas de carregamento. Esses métodos possibilitam a obtenção de campos de deslocamentos e tensões com elevado nível de detalhamento, contribuindo para a compreensão dos limites e da aplicabilidade das teorias clássicas de placas.

Neste contexto, o presente trabalho concentra-se na análise comparativa de lajes de concreto armado submetidas a diferentes condições de contorno. As lajes são modeladas como placas finas com base na teoria clássica de Kirchhoff-Love e analisadas numericamente por meio do Método dos Elementos Finitos, com o objetivo de avaliar os deslocamentos e os esforços resultantes em cada abordagem, bem como investigar a influência das hipóteses adotadas na resposta estrutural.

Nos últimos anos, o comportamento estrutural de lajes de concreto armado tem sido amplamente investigado em diferentes contextos, com ênfase em análises numéricas e experimentais que complementam e aprofundam as formulações clássicas. Estudos recentes empregaram o Método dos Elementos Finitos para analisar o efeito da torção em lajes reforça-

das com fibras de aço, demonstrando que a inclusão dessas fibras pode aumentar significativamente o momento último de torção e a rigidez torsional em diferentes estágios de carregamento, ressaltando a importância da consideração desses efeitos em análises bidimensionais de lajes (Werdina, 2024).

Outras pesquisas focaram análises numéricas de lajes reforçadas com materiais compósitos, como polímeros reforçados com fibras (FRP), avaliando o desempenho flexural e a resistência à deformação de lajes bidirecionais submetidas a carregamentos estáticos, evidenciando avanços na modelagem de reforços externos e na melhoria do comportamento estrutural dessas estruturas (Qsymah; Ayasrah, 2024).

Além disso, trabalhos experimentais e numéricos investigaram o comportamento de lajes lisas submetidas à ação de punção e impacto, destacando mecanismos de ruptura e a concentração de tensões em regiões próximas a pilares ou cargas localizadas, o que reforça a necessidade de modelos capazes de representar adequadamente a distribuição de esforços nessas situações (Anonymous, 2025).

Essas investigações contribuem para uma compreensão mais aprofundada dos mecanismos que influenciam o desempenho de lajes de concreto armado, especialmente em situações que extrapolam as hipóteses simplificadoras da teoria clássica, fornecendo subsídios para a avaliação crítica de modelos teóricos e numéricos aplicados à análise estrutural de lajes.

1.1 Considerações iniciais

1.1.1 Objetivo Geral

Comparar os deslocamentos máximos de lajes modeladas como placas elásticas, utilizando a teoria clássica de placas de Kirchhoff-Love e a modelagem numérica por meio do Método dos Elementos Finitos, avaliando a validade das hipóteses da teoria clássica em função das características geométricas e das condições de contorno das lajes.

1.1.2 Objetivo Específico

Com o intuito de atingir o objetivo geral deste trabalho, estabelecem-se os seguintes objetivos específicos:

- Analisar o comportamento dos deslocamentos máximos em lajes submetidas a carregamento uniformemente distribuído, considerando diferentes condições de contorno;
- Investigar a teoria de Kirchhoff-Love aplicado em placas, avaliando sua adequação em função da razão entre o vão e a espessura da laje;
- Comparar os deslocamentos obtidos por meio da teoria clássica de placas e do Método dos Elementos Finitos, identificando convergências e discrepâncias entre as abordagens;
- Analisar criticamente as vantagens, limitações e campos de aplicação da teoria de Kirchhoff-Love e do Método dos Elementos Finitos na análise estrutural de lajes.

1.1.3 Justificativa

A escolha do tema deste trabalho justifica-se pela ampla utilização de lajes maciças em estruturas de concreto armado e pela necessidade de uma avaliação consistente de seu comportamento estrutural frente aos carregamentos atuantes. A correta compreensão dos deslocamentos e dos esforços internos em lajes é fundamental para análises estruturais confiáveis, especialmente quando se consideram diferentes condições de contorno e relações geométricas entre espessura e vão.

As teorias clássicas de placas, fundamentadas na Teoria da Elasticidade, fornecem modelos analíticos consolidados que permitem descrever o comportamento à flexão de lajes sob hipóteses bem definidas. Essas soluções constituem importantes referências para a avaliação da aplicabilidade e das limitações das formulações simplificadas, além de servirem como base para

a validação de métodos numéricos mais gerais, como o Método dos Elementos Finitos.

Nesse contexto, a comparação entre soluções analíticas clássicas e resultados obtidos por meio de modelagens numéricas contribui para uma compreensão mais aprofundada dos mecanismos que governam o comportamento estrutural das lajes. Tal abordagem permite identificar a influência dos principais parâmetros geométricos e mecânicos na resposta estrutural, bem como avaliar a adequação das hipóteses adotadas em cada modelo.

Dessa forma, o desenvolvimento deste estudo busca fortalecer o embasamento teórico associado à análise de lajes, ao mesmo tempo em que promove uma visão crítica sobre o uso de ferramentas numéricas na engenharia estrutural, contribuindo para a formação técnica e analítica do engenheiro civil.

1.1.4 Organização do trabalho

Este trabalho está organizado em cinco capítulos, além das referências bibliográficas e apêndices, conforme descrito a seguir.

O Capítulo 1 apresenta a introdução do estudo, contextualizando a importância da análise estrutural de lajes de concreto armado, os fundamentos teóricos envolvidos, a justificativa da escolha do tema e os objetivos que orientam o desenvolvimento do trabalho.

No Capítulo 2 é realizada a revisão de literatura, abordando os principais conceitos teóricos relacionados à teoria clássica das placas, à Teoria da Elasticidade e às soluções analíticas para diferentes condições de contorno.

O Capítulo 3 descreve a metodologia adotada, incluindo a definição das geometrias analisadas, as hipóteses de modelagem, os parâmetros mecânicos considerados e a implementação dos modelos numéricos por meio do Método dos Elementos Finitos, além dos critérios utilizados para comparação entre as diferentes abordagens.

No Capítulo 4 apresenta de maneira sistemática o processo de modelagem numérica da laje de concreto armado feita no Software de MEF até o resultado gerado pela modelagem.

O Capítulo 5 investiga a validação do modelo numérico e da coerência do elemento finito utilizado. Basicamente ele a convergência dos valores numéricos, e que a malha utilizada é adequada.

No Capítulo 6 são apresentados e discutidos os resultados obtidos, contemplando a comparação entre as soluções analíticas e numéricas em termos de deslocamentos, bem como a análise das influências das condições de contorno e das relações geométricas das lajes.

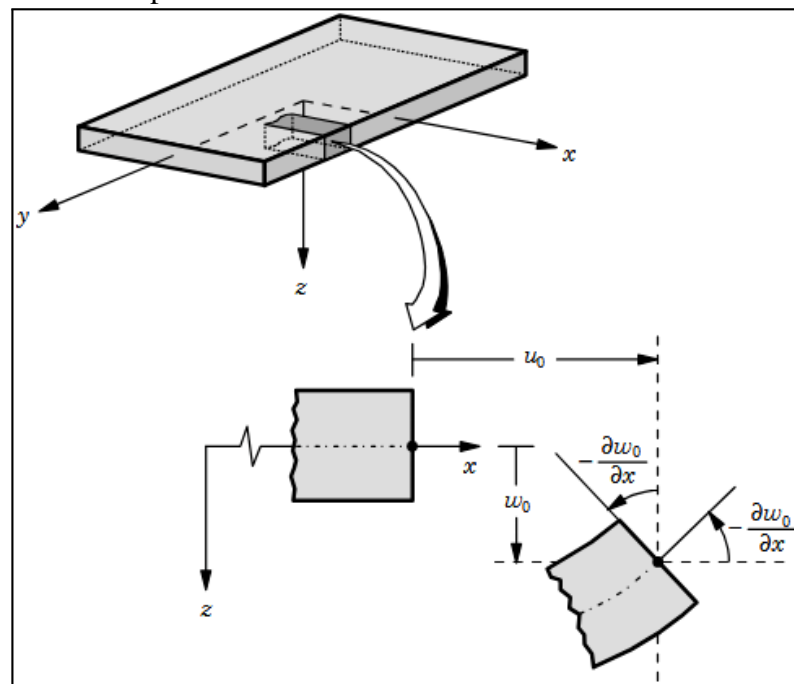
2 REVISÃO DE LITERATURA

O estudo do comportamento de placas finas isotrópicas, também conhecida como teoria de Kirchhoff-Love, tem sido objeto de pesquisa desde o século XIX, que estabeleceram as bases da teoria clássica de placas. Tal teoria, assume que as deformações são pequenas, o material é linear-elástico e que a espessura da placa é pequena em relação às suas dimensões no plano.

No século seguinte, diversos autores, como Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), forneceram formulações mais completas e compilações de soluções analíticas para diferentes condições de contorno e carregamentos. Mais recentemente, estudos como os de Szilard (2004) e Reddy (2006) aprofundaram a formulação teórica e a aplicabilidade em problemas práticos, comparando soluções exatas com métodos numéricos, tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF).

A Figura 1 mostra a referência dos eixos e do deslocamento utilizado para modelagem da equação diferencial. Considerando pequenas deformações e material homogêneo e isotrópico, a equação diferencial que governa o comportamento elástico de uma placa fina pode ser expressa pela equação (2.1).

Figura 1 – Hipóteses cinemáticas da teoria de Kirchhoff para placas.



Fonte: Reddy (2006, p. 96).

$$\Delta\Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x,y)}{D} \quad (2.1)$$

onde $w(x,y)$ é o deslocamento transversal da placa, $\Delta\Delta$ representa o operador bi-harmônico, x e y são as coordenadas no plano médio da placa, $q(x,y)$ é o carregamento distribuído transversalmente e $D = Eh^3/(12 - 12\nu^2)$ é a rigidez à flexão da placa. Embora a formulação apresentada tenha sido desenvolvida para materiais isotrópicos em regime linear-elástico, ela também é aplicável ao estudo de lajes de concreto armado quando se considera o comportamento na fase inicial de carregamento, antes do surgimento significativo de fissuras. Nesse regime, o concreto pode ser tratado como homogêneo e linear-elástico, o que permite empregar a teoria clássica de placas para estimar deslocamentos e esforços fletores com boa aproximação.

2.1 Soluções para a equação da placa

A solução da equação das placas requer a imposição de condições de contorno adequadas. Segundo Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), duas condições de contorno em cada borda são necessárias para obter uma solução bem definida. Diferentes configurações como bordas engastadas, simplesmente apoiadas ou livres influenciam significativamente a distribuição de momentos fletores e deslocamentos.

2.1.1 Caso simplesmente apoiado

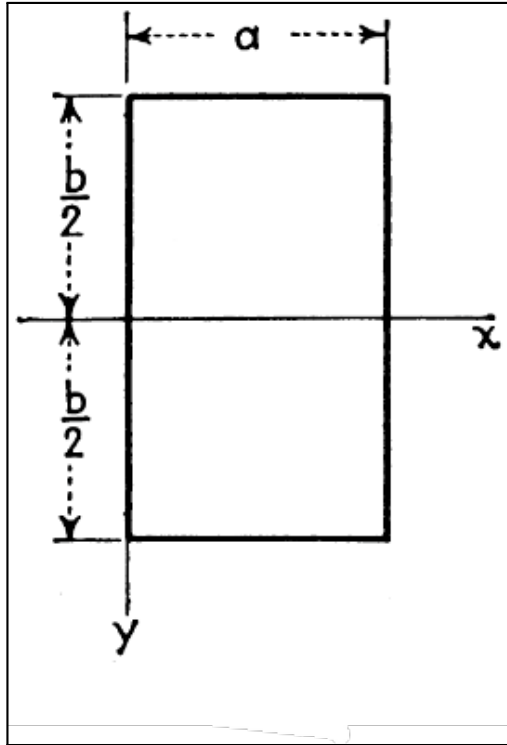
Para o caso de placas simplesmente apoiadas com as coordenadas indicadas na Figura 2, com as bordas simplesmente apoiadas, isto é, a solução da equação diferencial deve satisfazer $w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ em $x = 0$ e $x = a$, bem como $w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ para $y = \pm b/2$. Foi amplamente utilizado o método de Levy para obtenção de soluções, descrita como uma série trigonométrica conforme Equação (2.2).

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.2)$$

Onde Y_m é função apenas de y . A formulação proposta baseia-se na técnica de separação de variáveis aplicada à equação diferencial, em que a componente senoidal (depen-

dente de x) é separada da função Y_m (dependente de y). A partir das condições de contorno, determinam-se as constantes envolvidas na solução.

Figura 2 – Caso simplesmente apoiado



Fonte: Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959, p. 114).

A solução obtida é dada por Equação (2.3), com $\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$. Ressalta-se que a série é de rápida convergência, assim isso torna o processo de computação gráfica de diferentes valores mais rápido, pois exige um número reduzido de termos na soma para obter um valor satisfatório final.

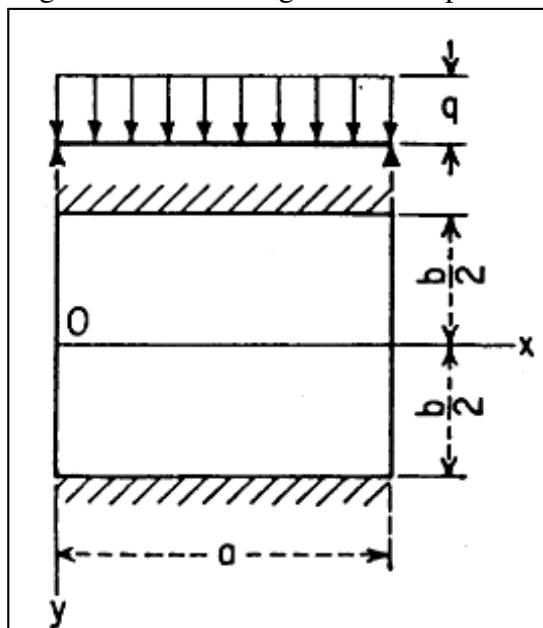
$$w_{max} = \frac{5}{384} \frac{qa^4}{D} - \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2} \alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{m^5 \cdot 2 \cosh \alpha_m} \quad (2.3)$$

Este caso é de grande relevância, pois sua solução será utilizada na formulação dos demais casos, valendo-se do princípio da superposição. Assim, ao se determinar a solução para o caso com engaste, pode-se somá-la à solução do caso simplesmente apoiado para obter o resultado final.

2.1.2 Caso biengastado e biapoiado

Para esta configuração e para os casos subsequentes a deflexão total é obtida pela soma da deflexão correspondente ao caso simplesmente apoiado com a deflexão adicional provocada pelos cantos engastados. Como o engaste impede a rotação, surge uma reação de momento que reduz a magnitude da deflexão.

Figura 3 – Caso biengastado e biapoiado



Fonte: Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959, p. 185).

Conforme ilustrado na Fig. 3, as bordas em $x = 0$ e $x = a$ estão simplesmente apoiadas, enquanto as bordas $y = \pm b/2$ encontram-se engastadas. O momento nas bordas engastadas produz uma deflexão adicional w_1 , expressa por:

$$(w_1)_{\max} = \frac{2qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m}{\cosh \alpha_m} \frac{\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)} \quad (2.4)$$

Observa-se que a deflexão w_1 é negativa e de magnitude significativamente inferior àquela do caso simplesmente apoiado. Assim, a solução para o caso biengastado e biapoiado é

obtida pela soma da Equação (2.4) com a Equação (2.3), resultando em:

$$w = \frac{5qa^4}{384D} - \frac{2qa^4}{\pi^5 D} \left\{ \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{(m-1)/2} \alpha_m \tanh \alpha_m}{m^5 \cosh \alpha_m} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(1 - \frac{\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)} \right) + \frac{2(-1)^{(m-1)/2}}{m^5 \cosh \alpha_m} \right] \right\} \quad (2.5)$$

O engaste nas bordas horizontais impede a rotação da placa nesses limites, o que gera momentos fletores internos significativos nas proximidades e no centro da placa. Esses momentos, denotados por M_x e M_y , correspondem respectivamente aos momentos atuando em planos perpendiculares aos eixos x e y .

Matematicamente, os valores desses momentos no centro da placa são dados por:

$$M_x = \frac{2qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^3 \cosh \alpha_m} \times \frac{\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)} [2\nu + (1 - \nu) \alpha_m \tanh \alpha_m] \quad (2.6)$$

$$M_y = \frac{2qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^3 \cosh \alpha_m} \times \frac{\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)} [2 - (1 - \nu) \alpha_m \tanh \alpha_m] \quad (2.7)$$

Fisicamente, o momento M_x está associado à flexão na direção longitudinal da placa (eixo x), enquanto M_y corresponde à flexão transversal (eixo y). O engaste nas bordas horizontais aumenta a rigidez à rotação, resultando em momentos negativos próximos ao engaste e positivos em outras regiões, equilibrando a deformação.

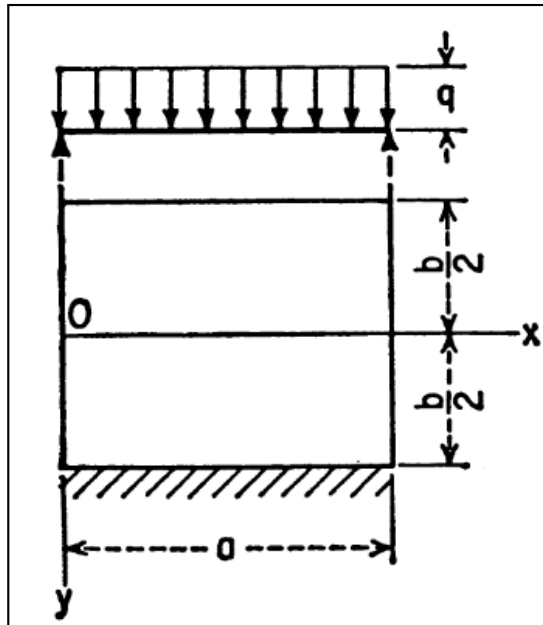
2.1.3 Caso com três apoios simples e um engaste

Considera-se agora a configuração em que a borda $y = b/2$ é engastada, enquanto as demais bordas estão simplesmente apoiadas Figura 4. A solução para a deflexão dessa placa é obtida por superposição: parte-se da solução para a placa com todos os lados simplesmente apoiados e acrescenta-se a deflexão adicional causada pelo momento de engaste na borda $y = b/2$.

Essa contribuição adicional é expressa por:

$$(w_1)_{\max} = \frac{a^2}{4\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^2} \frac{E_m \alpha_m \tanh \alpha_m}{\cosh \alpha_m} \quad (2.8)$$

Figura 4 – Caso com um engaste e três apoios simples



Fonte: Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959, p. 192).

O coeficiente E_m é determinado a partir da condição de compatibilidade de inclinações ao longo da borda $y = b/2$, que impõe que a rotação causada pelo carregamento e a rotação causada pelos momentos fletores sejam iguais em magnitude e opostas em sinal. Isso leva à seguinte expressão:

$$E_m = -\frac{8qa^2}{\pi^3 m^3} \frac{\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{\alpha_m \tanh^2 \alpha_m - \tanh \alpha_m + \alpha_m \coth^2 \alpha_m - \coth \alpha_m - 2\alpha_m} \quad (2.9)$$

A partir desse valor de E_m , obtêm-se os momentos fletores ao longo da borda engastada ($y = b/2$):

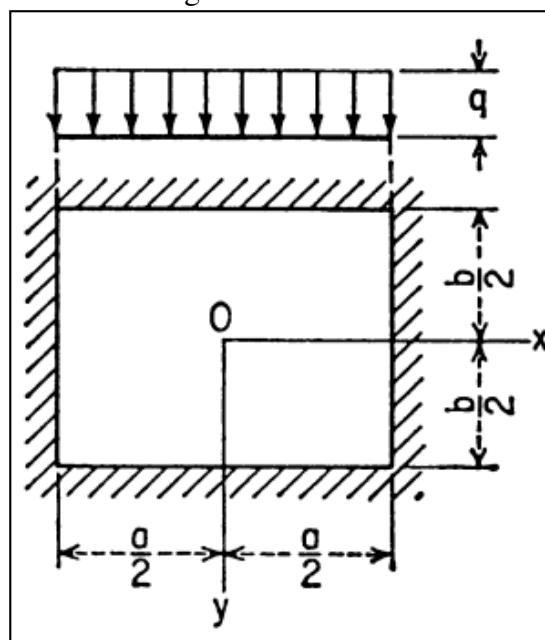
$$(M_y)_{y=b/2} = \frac{8qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \sin \frac{m\pi x}{a} \frac{\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{2\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1) - \coth \alpha_m (\alpha_m \coth \alpha_m - 1)} \quad (2.10)$$

O valor máximo obtido para M_y nesse caso é, em módulo, superior ao correspondente ao caso de dois lados opostos engastados, o que evidencia a forte restrição à deformação imposta pelo engaste único. Essa configuração concentra maior rigidez e absorve momentos mais elevados ao longo da borda engastada, enquanto as demais bordas continuam permitindo deslocamentos verticais, resultando em um campo de deflexão assimétrico e mais localizado.

2.1.4 Caso com todas as bordas engastadas

Considera-se agora a placa retangular com todas as bordas rigidamente engastadas (Figura 5). Nesta condição de contorno, tanto as translações verticais quanto as rotações ao longo de todas as arestas são nulas. Em comparação com os casos anteriores (apoios simples ou apoios mistos), o engaste total aumenta consideravelmente a rigidez da placa, reduzindo as deflexões e alterando a distribuição dos momentos fletores internos.

Figura 5 – Caso com todas bordas engastadas



Fonte: Fig 91, pag 197 Timoshenko et al.

A solução pode ser obtida pelo mesmo procedimento geral: representar a superfície de deflexão e as rotações por séries adequadas (funções senoidais e hiperbólicas) e impor as condições de contorno de compatibilidade e equilíbrio para determinar os coeficientes das séries. Em particular, os momentos fletores no centro da placa, para a carga uniformemente distribuída q , podem ser escritos nas formas:

$$M_x = \frac{2qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^3 \cosh \alpha_m} \frac{\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)} [2\nu + (1 - \nu) \alpha_m \tanh \alpha_m] \quad (2.11)$$

$$M_y = \frac{2qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^3 \cosh \alpha_m} \frac{\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)} [2 - (1 - \nu) \alpha_m \tanh \alpha_m] \quad (2.12)$$

Fisicamente, M_x e M_y representam os momentos fletores nos planos normais aos eixos x e y , respectivamente. Para a placa totalmente engastada, os momentos no meio da placa são mais intensos (em módulo) do que nos casos com apoios simples, devido à maior restrição das rotações nas bordas. Essa maior intensidade dos momentos traduz-se, por sua vez, em menores deflexões máximas.

Para a deflexão total $w(x, y)$ da placa engastada, foi utilizado o trabalho de (Mrak; Gerdemeli, 2007). A deflexão centro é computada conforme a Equação 2.13

$$w(0,0) = \frac{qa^4}{24D} \left[1 + \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{E_m}{\cosh \alpha_m} - \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{H_m \tanh \beta_m}{\cosh \beta_m} \right] \quad (2.13)$$

onde $w(0,0)$ é a deflexão no centro da placa retangular engastada, q é o carregamento uniformemente distribuído, a é o semicomprimento característico da placa, e D é a rigidez à flexão do elemento.

O índice m assume apenas valores ímpares e identifica os termos da série trigonométrica utilizada na solução exata da equação bi-harmônica. Os parâmetros adimensionais α_m e β_m dependem da razão geométrica da placa e estão associados, respectivamente, aos efeitos de flexão e de momento induzidos pelas condições de contorno.

O coeficiente E_m representa a contribuição da solução homogênea associada à correção da deflexão transversal imposta pelas bordas engastadas, sendo determinado a partir da imposição de inclinação nula ao longo das bordas da placa. Este coeficiente está relacionado à redistribuição da deflexão devido à restrição de rotação.

O coeficiente H_m está associado aos efeitos dos momentos fletores de engaste nas bordas, representando a parcela da solução responsável por satisfazer as condições de momento nas extremidades fixas. Sua contribuição aparece multiplicada por funções hiperbólicas, refletindo a influência do engaste na rigidez global da placa.

2.2 Teoria da Elasticidade para placas

Em contraste com a teoria clássica de placas finas, que adota hipóteses simplificadas para reduzir a ordem do problema, as lajes podem ser modeladas de forma mais abrangente por meio da Teoria da Elasticidade. Nessa formulação tridimensional, o comportamento do sólido é descrito por um conjunto de três equações fundamentais:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (\text{Equilíbrio}) \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{Compatibilidade cinemática}) \quad (2.15)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{Relações constitutivas}) \quad (2.16)$$

Na Equação 2.14, σ_{ij} representa os componentes do tensor de tensões e F_i os componentes das forças de corpo por unidade de volume, sendo a expressão responsável por garantir o equilíbrio estático local do meio contínuo. O operador de divergência aplicado ao tensor de tensões assegura que as tensões internas equilibrem as ações volumétricas aplicadas.

A Equação 2.15 expressa as relações cinemáticas do problema, definindo o tensor de deformações infinitesimais ε_{ij} em função dos gradientes dos deslocamentos u_i . Essa relação garante a compatibilidade geométrica das deformações, sendo válida no regime de pequenas deformações.

Por sua vez, a Equação 2.16 estabelece as relações constitutivas do material, relacionando tensões e deformações por meio do tensor de elasticidade de quarta ordem C_{ijkl} . Esse tensor incorpora as propriedades mecânicas do material e descreve o seu comportamento elástico linear, permitindo o fechamento do sistema de equações governantes do problema tridimensional da elasticidade.

Considerando que, neste trabalho, as lajes são modeladas como materiais homogêneos e isotrópicos, o tensor constitutivo de quarta ordem pode ser reduzido a combinações de tensores de segunda ordem, simplificando a Equação 2.16. Segundo Chandrasekhara (1994), a forma generalizada da Lei de Hooke para um sólido linear elástico e isotrópico é dada por:

$$\sigma_{ij} = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e_{kk} \delta_{ij} + \frac{E}{1 + \nu} e_{ij} \quad (2.17)$$

Apesar da aparente simplicidade geométrica das lajes, a resolução analítica do sistema de equações diferenciais parciais da Teoria da Elasticidade é complexa, especialmente

para condições de contorno não triviais. Por esse motivo, é comum a utilização de métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), para a obtenção de soluções aproximadas em problemas estruturais. De acordo com Reddy (2006), essa aproximação apresenta boa precisão quando a menor dimensão no plano da laje é pelo menos 30 vezes maior que sua espessura.

Observa-se a continuidade do uso da Teoria da Elasticidade como base para o estudo do comportamento de placas e lajes, sobretudo como referência para validação de teorias simplificadas e modelos numéricos.

Nguyen e Pham (2021) utilizaram a formulação tridimensional da elasticidade para analisar placas espessas submetidas a carregamentos transversais, demonstrando que as teorias clássicas subestimam tensões normais e de cisalhamento quando a relação entre espessura e vão não é suficientemente pequena. Resultados semelhantes foram obtidos por Meiche et al. (2020), que compararam soluções exatas da elasticidade 3D com teorias refinadas de placas, evidenciando maior precisão da abordagem tridimensional na avaliação dos campos de tensão.

Em trabalhos mais recentes, Thai e Kim (2022) empregaram modelos baseados na elasticidade tridimensional para o estudo de placas funcionais com propriedades graduadas, mostrando que os efeitos de cisalhamento e tensões transversais desempenham papel relevante mesmo em análises estáticas. Já Mantari e Soares (2023) aplicaram uma formulação quasi-3D derivada diretamente da teoria da elasticidade para investigar o comportamento flexional e vibratório de placas sob diferentes condições de contorno, obtendo excelente concordância com soluções de referência.

Adicionalmente, Zhou et al. (2024) utilizaram modelos tridimensionais baseados na teoria da elasticidade em conjunto com o Método dos Elementos Finitos para analisar lajes de concreto submetidas a carregamentos distribuídos e concentrados, destacando a importância da elasticidade completa na validação de modelos normativos e bidimensionais.

2.2.1 Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) consiste em uma formulação numérica para a solução aproximada de problemas governados por equações diferenciais parciais, sendo amplamente empregado na análise estrutural de lajes quando soluções analíticas tornam-se impraticáveis. No MEF, o domínio contínuo da estrutura é discretizado em um conjunto finito de subdomínios denominados elementos, interligados por nós, nos quais o campo de desloca-

mentos é aproximado por funções interpoladoras contínuas, conhecidas como funções de forma (Zienkiewicz; Taylor, 2005; Hughes, 2012).

Partindo das equações de equilíbrio da Teoria da Elasticidade, a formulação do MEF baseia-se na obtenção da forma fraca do problema, a qual é derivada a partir do princípio do trabalho virtual ou, de forma equivalente, do método dos resíduos ponderados. Para um corpo elástico linear, essa formulação é amplamente descrita na literatura clássica do MEF e constitui a base dos códigos comerciais de análise estrutural, como o COMSOL Multiphysics. A forma fraca pode ser expressa como:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}^T \mathbf{f} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}^T \mathbf{t} \, d\Gamma \quad (2.18)$$

onde Ω representa o domínio da estrutura, Γ_t a porção do contorno onde são aplicadas forças de superfície, \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos, $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}$ o campo de deslocamentos virtuais admissíveis, $\boldsymbol{\varepsilon}$ o tensor de deformações, $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor de tensões, \mathbf{f} as forças de corpo e \mathbf{t} as forças de superfície aplicadas (Hughes, 2012).

No contexto do Método dos Elementos Finitos, o campo de deslocamentos do meio contínuo é aproximado por meio de uma interpolação nodal, sendo expresso pela relação $\mathbf{u} \approx \mathbf{N}\mathbf{d}$, em que \mathbf{N} representa a matriz das funções de forma associadas ao elemento e \mathbf{d} é o vetor dos deslocamentos nodais. Essa aproximação permite descrever o comportamento do campo de deslocamentos no interior de cada elemento a partir dos valores discretos definidos nos nós da malha, conforme apresentado por Zienkiewicz e Taylor .

A partir dessa aproximação, as deformações são obtidas por meio da relação cinemática $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d}$, na qual \mathbf{B} corresponde à matriz das derivadas espaciais das funções de forma. Essa matriz estabelece a ligação direta entre os deslocamentos nodais e o tensor de deformações infinitesimais, garantindo a compatibilidade geométrica do campo de deformações no domínio discretizado (Bathe, 1996).

Admitindo-se comportamento linear elástico do material, as tensões são relacionadas às deformações por meio da lei constitutiva $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$, em que \mathbf{D} é a matriz constitutiva do material. Essa matriz é definida a partir das propriedades mecânicas do material, especialmente o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, e caracteriza o comportamento elástico isotrópico adotado na análise (Hughes, 2012).

A substituição dessas aproximações - deslocamentos, deformações e relações cons-

titutivas - na forma fraca do problema conduz a um sistema algébrico global da forma $\mathbf{Kd} = \mathbf{F}$, no qual \mathbf{K} é a matriz global de rigidez do sistema, obtida pela soma das contribuições elementares, e \mathbf{F} é o vetor global de forças nodais equivalentes, que incorpora os efeitos das forças de corpo e das forças de superfície aplicadas. Essa formulação constitui a base dos algoritmos de solução empregados em pacotes comerciais de elementos finitos, como o COMSOL Multiphysics (Comsol, 2023).

Nos últimos anos, diversas pesquisas têm empregado o Método dos Elementos Finitos (MEF) para analisar o comportamento estrutural de lajes de concreto armado em diferentes contextos. Qsymah e Ayasrah (2024) desenvolveram um modelo de elementos finitos para lajes bidirecionais reforçadas com polímeros reforçados com fibras (FRP), validado a partir de dados experimentais, apresentando boa previsão da resistência e da deformabilidade à flexão. Shara-faldeen e Abdelatif (2024) implementaram uma modelagem tridimensional não linear de lajes bidirecionais reforçadas com sobreposição de concreto, capturando de forma precisa o comportamento à flexão e à fissuração. Estudos recentes também têm utilizado o MEF para investigar lajes com reforços híbridos e modelos paramétricos que influenciam o desempenho estrutural (Keintjem et al., 2025), bem como para realizar comparações entre o MEF e outros métodos aproximados, avaliando a confiabilidade dos resultados em diferentes sistemas estruturais de lajes (Fava; Neves, 2025).

Esses trabalhos demonstram a versatilidade do MEF como ferramenta de modelagem numérica para lajes de concreto armado, especialmente quando se busca a representação fiel de fenômenos físicos complexos que não são contemplados por métodos simplificados ou formulações clássicas de placas.

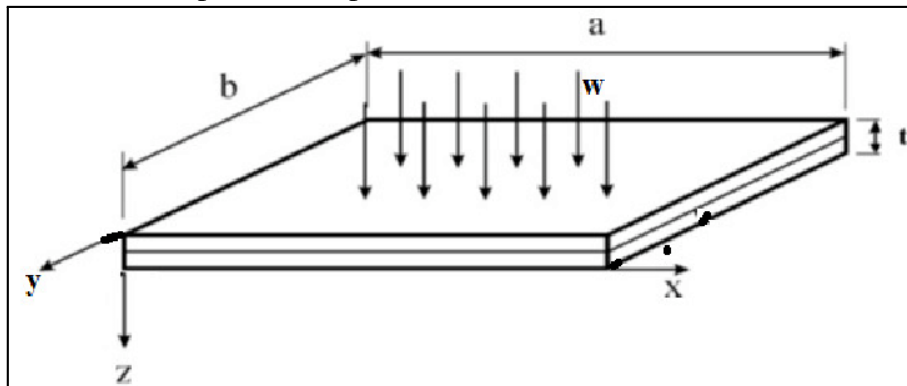
3 METODOLOGIA

A pesquisa adota o método comparativo, cuja finalidade é identificar similitudes e explicar divergências entre diferentes abordagens de análise estrutural. Segundo Lakatos (2008), esse método possibilita a análise sistemática de dados concretos, permitindo a identificação de elementos constantes e gerais, com rigor metodológico e elevado grau de generalização.

Inicialmente, foi realizado um levantamento bibliográfico sobre a temática, contemplando artigos científicos, livros técnicos e publicações especializadas, com o objetivo de reunir fundamentos teóricos e metodológicos relevantes ao estudo das lajes de concreto armado.

A análise foi conduzida considerando placas retangulares submetidas a carregamento transversal uniforme, conforme ilustrado na Figura 6. Define-se a como o menor lado da placa, b como o maior lado e t ou h como a espessura. Em todas as análises, adotou-se comportamento elástico linear do material, com coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$ e módulo de elasticidade $E = 25\,000$ MPa, valores representativos do concreto em regime de serviço.

Figura 6 – Placa retangular com um apoio engastado e os demais simplesmente apoiados



Fonte: Onyeka e Arinze (2020).

A metodologia foi estruturada em duas etapas principais: (i) implementação computacional de soluções clássicas para lajes com diferentes condições de contorno; e (ii) modelagem numérica por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), visando à comparação dos resultados obtidos.

3.1 Abordagem analítica

Na primeira etapa, foram selecionadas condições de contorno típicas de lajes, tais como bordas simplesmente apoiadas, engastadas ou combinações entre essas condições, para as

quais existem soluções analíticas clássicas baseadas na teoria de placas finas de Kirchhoff-Love. As expressões analíticas correspondentes, previamente apresentadas neste trabalho, foram utilizadas como referência para a avaliação dos deslocamentos e dos esforços internos.

As lajes analisadas neste trabalho foram modeladas como placas finas, assumindo-se comportamento linear-elástico e pequenas deformações. Segundo Szilard (2004), a teoria clássica de placas de Kirchhoff-Love é aplicável quando a menor dimensão lateral da placa é pelo menos dez vezes maior que sua espessura, isto é, $\frac{a}{h} \geq 10$.

Em todos os casos estudados, adotou-se um vão característico fixo de $a = 1,00$ m e espessura constante $h = 0,08$ m, resultando em $\frac{a}{h} = 12,5$, o que garante a validade da hipótese de placa fina.

As equações analíticas foram implementadas computacionalmente na linguagem Python, escolhida devido à sua flexibilidade, facilidade de programação e ampla disponibilidade de bibliotecas voltadas a cálculos numéricos e científicos.

3.2 Abordagem numérica

Na etapa seguinte, procedeu-se à modelagem numérica das lajes por meio do software COMSOL Multiphysics, considerando comportamento linear-elástico dos materiais. As geometrias, propriedades mecânicas e condições de contorno adotadas nos modelos numéricos foram definidas de modo a reproduzir, tanto quanto possível, os casos analisados analiticamente.

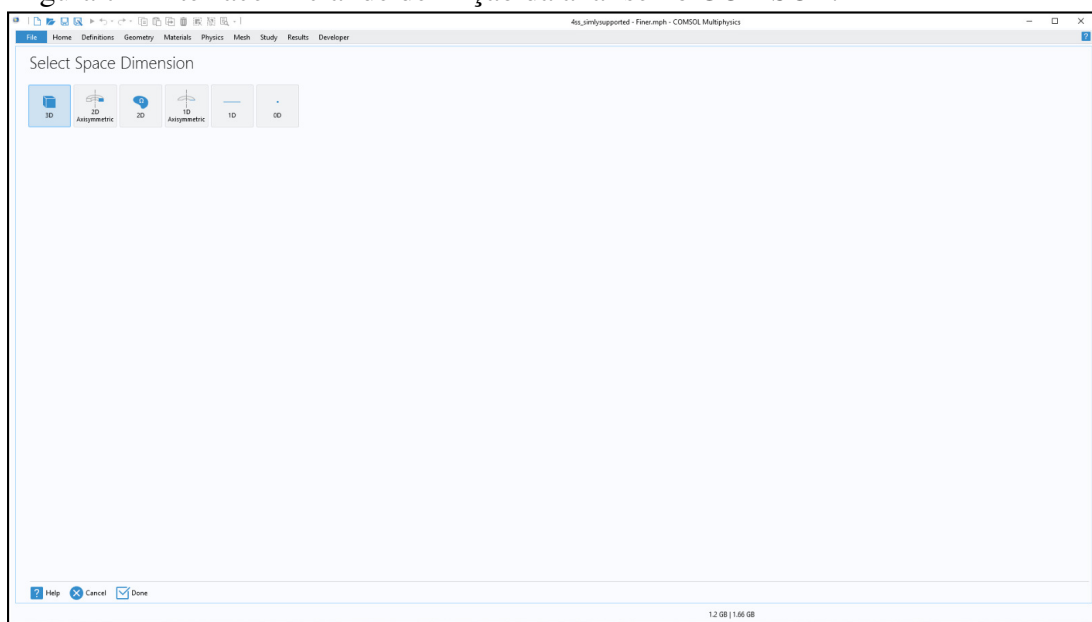
Foram analisadas lajes retangulares com razão entre os lados definida por $\lambda = b/a$, variando de 1 a 2, de modo a investigar a influência da geometria na resposta estrutural. Em todos os modelos, foi aplicada uma carga distribuída uniformemente, adotada com valor suficientemente elevado para evidenciar possíveis diferenças entre as abordagens analítica e numérica.

As dimensões das lajes consideraram um lado fixo de 1 m, enquanto o outro variou de 1 m a 2 m. Adotou-se uma espessura fixa de 8 cm, valor comumente utilizado em estudos preliminares de lajes maciças, para realizar todos ensaios de flexa, com as diferentes condições de contorno. Adicionalmente, foram realizadas simulações com espessuras de 5, 6, 8, 10, 12 e 14 cm, mantendo-se as dimensões em planta constantes, com o objetivo de avaliar a influência da espessura e dos efeitos de cisalhamento transversal na resposta estrutural. Em todos os ensaios, adotou-se uma carga distribuída uniformemente de 1 MPa ou 10 kN/cm², com elemento finito tetraédrico.

4 DESENVOLVIMENTO DO MODELO NUMÉRICO

Para a modelagem numérica das lajes, utilizou-se o software COMSOL Multiphysics[®], baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF), devido à sua capacidade de representar estados de tensão, deformação e fenômenos estruturais com elevada precisão, conforme descrito em seu manual de referência (COMSOL AB, 2023b). Primeiramente, selecionou-se uma análise tridimensional, de modo a contemplar explicitamente a espessura da laje, necessária para os estudos comparativos apresentados neste trabalho.

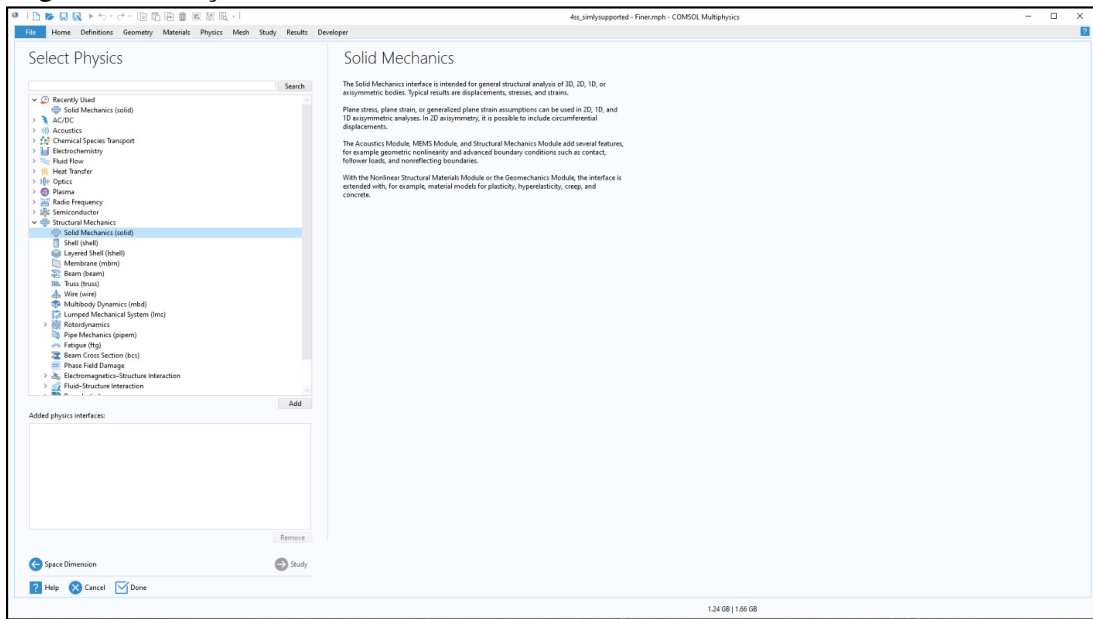
Figura 7 – Interface inicial de definição da análise no COMSOL.



Fonte: COMSOL Multiphysics (2023).

Em seguida, foi selecionado o módulo *Solid Mechanics*. Este módulo é responsável por modelar o comportamento mecânico de sólidos deformáveis em regime linear ou não linear, permitindo a determinação de tensões, deformações, deslocamentos e demais grandezas associadas ao equilíbrio estático ou dinâmico da estrutura. De acordo com a documentação do COMSOL (COMSOL AB, 2023e), o módulo utiliza formulações clássicas da teoria da elasticidade e elementos finitos adequados para análise de placas, cascas e volumes sólidos, o que o torna apropriado para a simulação de lajes de concreto.

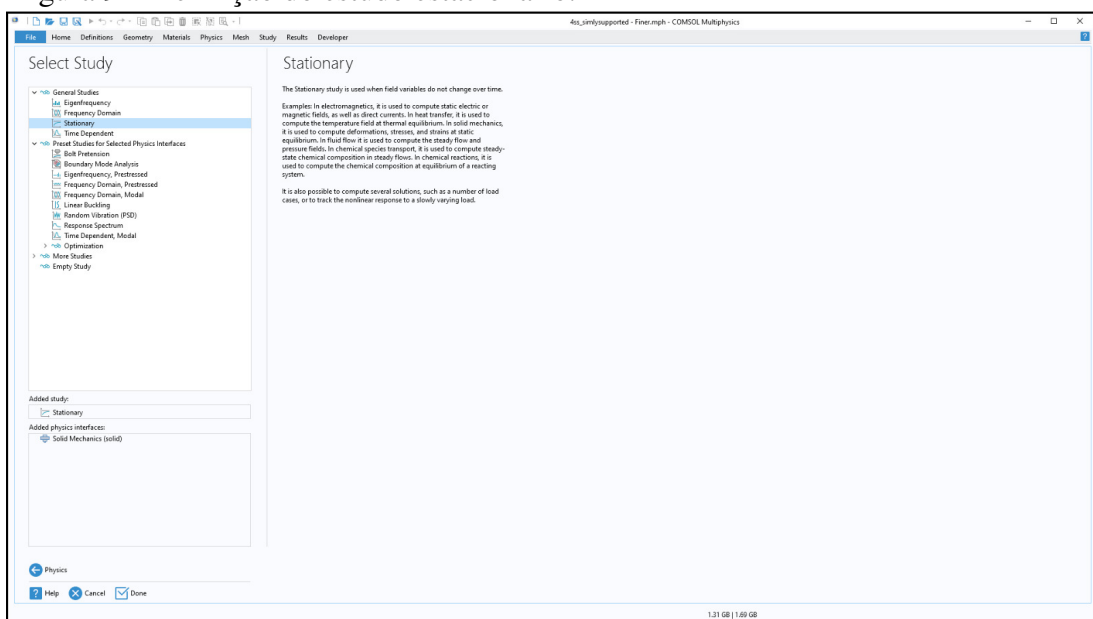
Figura 8 – Seleção do módulo *Solid Mechanics*.



Fonte: COMSOL Multiphysics (2023).

Para a análise estrutural considerada neste estudo, definiu-se o tipo de estudo como *Stationary*. Esse tipo de estudo é recomendado quando se busca o estado de equilíbrio estático da estrutura, sem efeitos dependentes do tempo, conforme orientado no guia de estudos estacionários do COMSOL (COMSOL AB, 2023c). Uma vez que o objetivo consiste em avaliar os deslocamentos máximos sob carregamentos estáticos, a análise transiente (*time-dependent*) não se faz necessária.

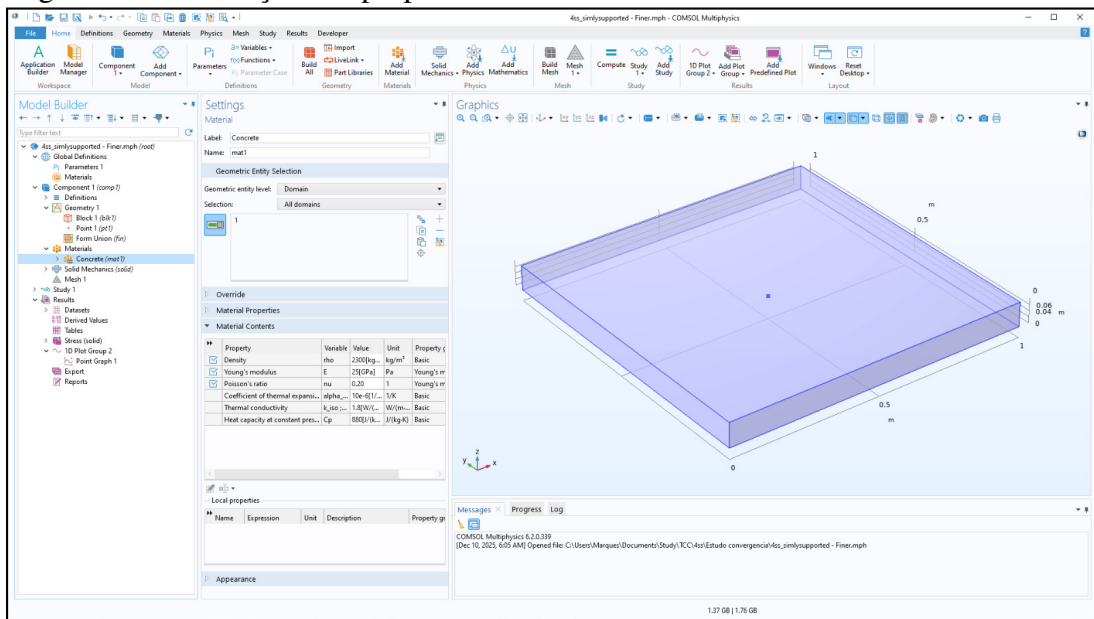
Figura 9 – Definição do estudo estacionário.



Fonte: COMSOL Multiphysics (2023).

Não foram consideradas armaduras, seguindo a simplificação adotada em abordagens analíticas para o regime elástico inicial. Nesse modelo, também não se consideram fissuração, plastificação ou outros efeitos não lineares, em conformidade com a formulação de elasticidade linear empregada no software (COMSOL AB, 2023a).

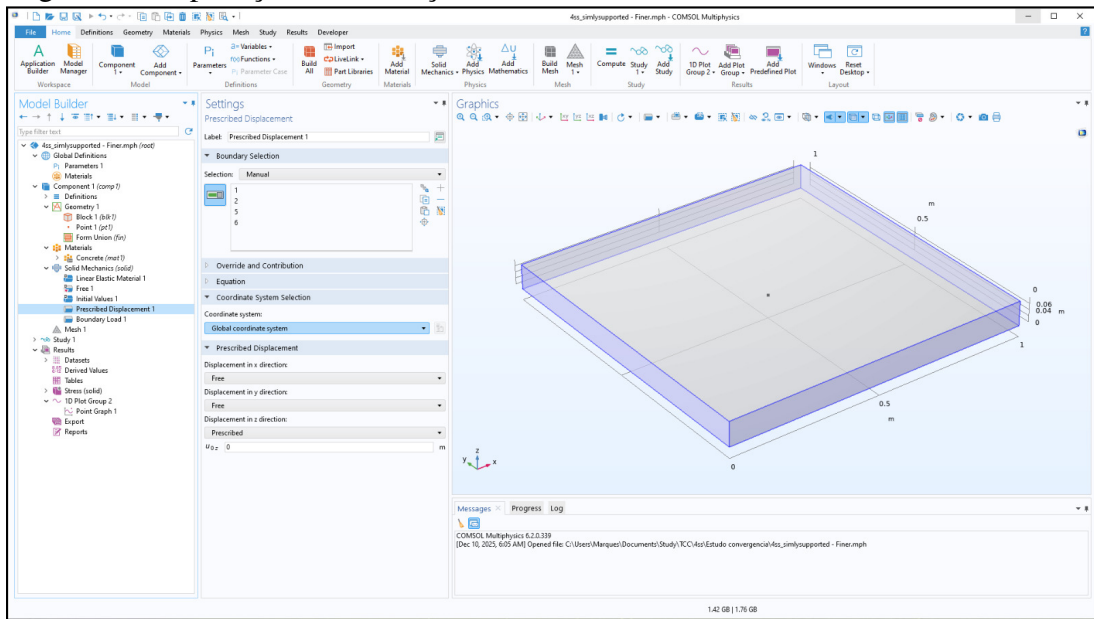
Figura 10 – Atribuição das propriedades dos materiais.



Fonte: COMSOL Multiphysics (2023).

Posteriormente, foram impostas as condições de contorno correspondentes a cada caso estudado: bordas simplesmente apoiadas, engastadas ou combinações entre ambas. Tais condições foram implementadas conforme as ferramentas de restrição mecânica do módulo *Solid Mechanics*. O carregamento aplicado consistiu em uma pressão uniformemente distribuída sobre a superfície superior da laje, coerente com a análise de esforços e deslocamentos provocados por ações estáticas.

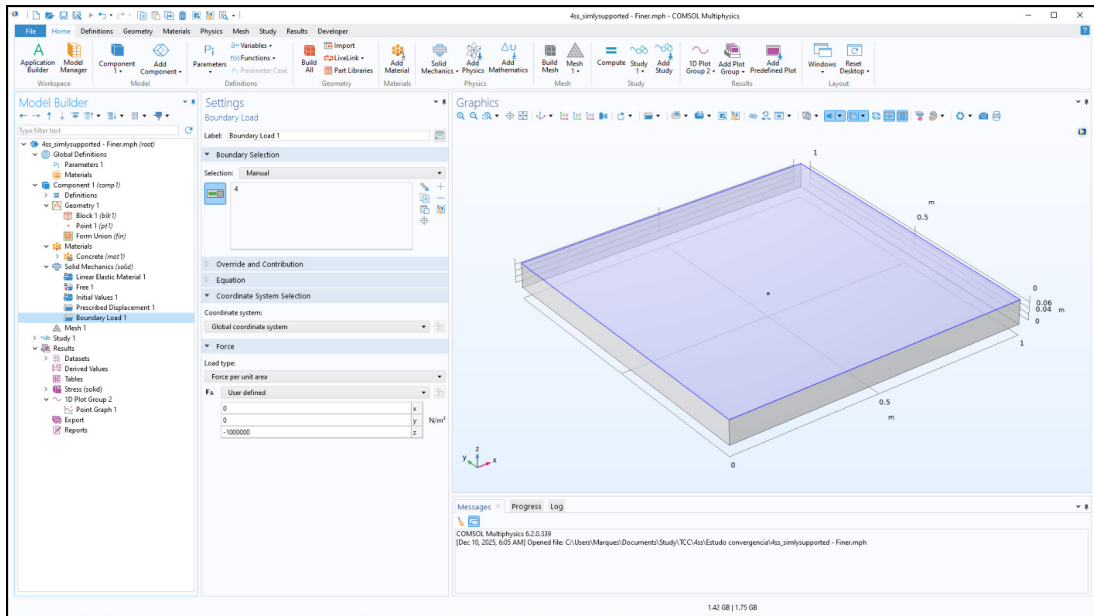
Figura 11 – Aplicação das condições de contorno.



Fonte: COMSOL Multiphysics (2023).

Especificamente, aplicou-se uma força distribuída de intensidade 1 MPa, equivalente a uma pressão constante sobre toda a área da laje analisada.

Figura 12 – Aplicação da carga distribuída.

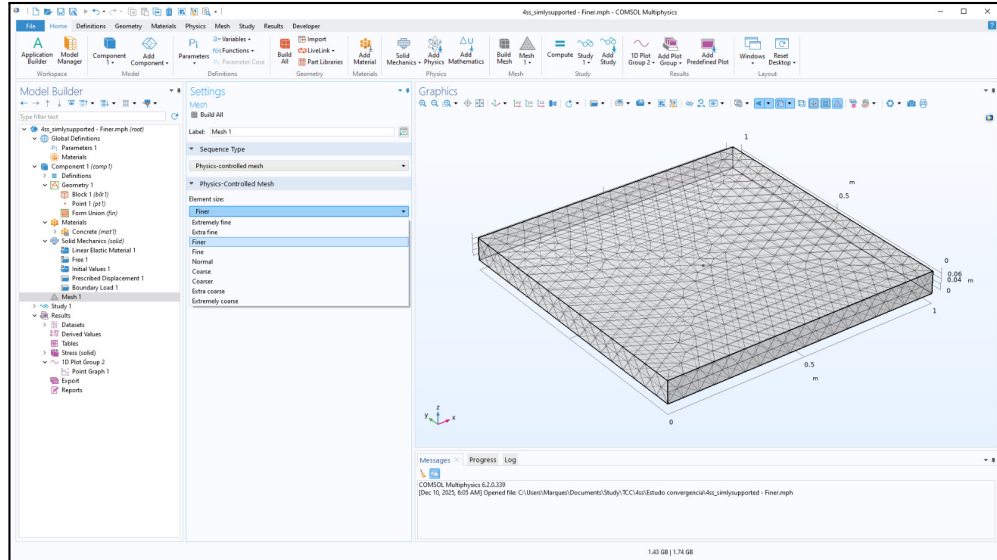


Fonte: COMSOL Multiphysics (2023).

A discretização do domínio foi realizada por meio do Método dos Elementos Finitos, utilizando elementos do tipo compatível com a análise de placas. O refinamento da malha seguiu uma análise de convergência, refinando-se progressivamente até que as variações nos deslocamentos máximos fossem numericamente insignificantes. Esse procedimento é consis-

tente com as diretrizes de boas práticas de modelagem numérica apresentadas na documentação do COMSOL (COMSOL AB, 2023d).

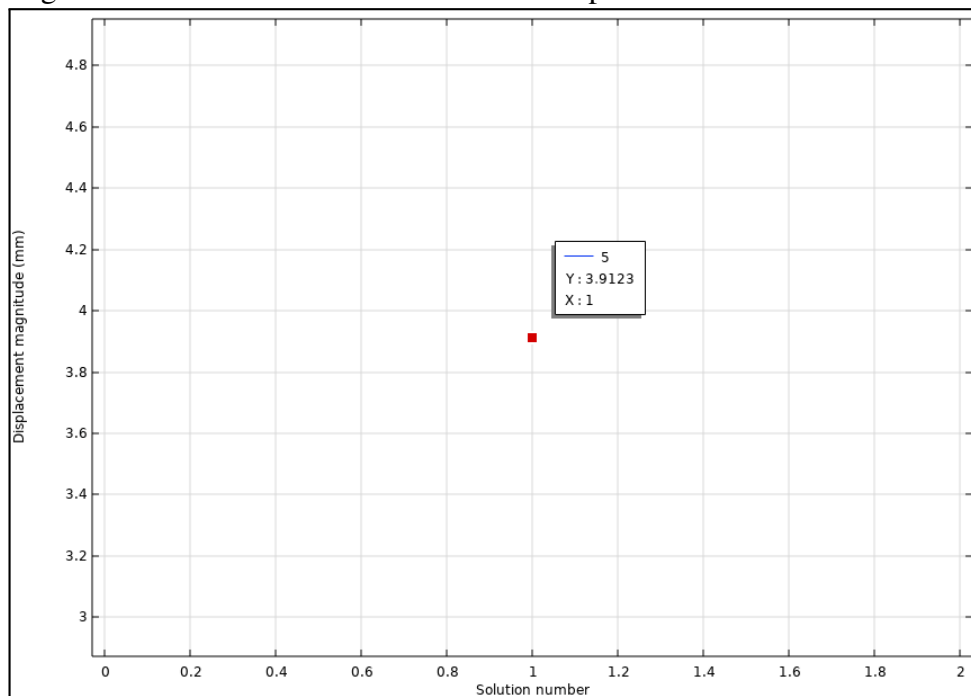
Figura 13 – Geração e refinamento da malha.



Fonte: COMSOL Multiphysics (2023).

Por fim, os resultados obtidos foram extraídos, organizados e comparados com aqueles provenientes das equações analíticas, permitindo avaliar a coerência e a precisão das metodologias teórica e numérica.

Figura 14 – Resultado da deflexão fornecido pelo COMSOL.

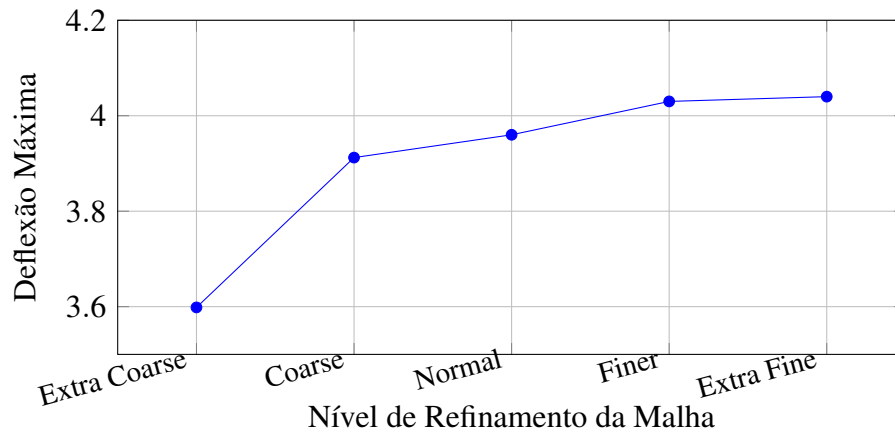


Fonte: COMSOL Multiphysics (2023).

4.1 Análise de convergência da malha

O presente estudo investiga a convergência numérica da deflexão máxima em uma placa fina analisada via método dos elementos finitos. Foram utilizados cinco níveis de refinamento de malha, variando desde "Extra Coarse" até "Extra Fine". A análise do gráfico de deflexão máxima em função do refinamento da malha revela um comportamento claramente convergente. Observa-se uma tendência monotônica crescente dos valores de deflexão à medida que a malha é refinada, com os resultados se estabilizando progressivamente.

Figura 15 – Gráfico de convergência com a deflexão máxima em função do refinamento da malha.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Este padrão demonstra que a solução numérica está convergindo para um valor assintótico próximo a 4,04. A pequena diferença de 0,25% entre as duas malhas mais refinadas indica que o resultado pode ser considerado convergido, estando dentro de uma margem de erro aceitável para aplicações práticas.

5 RESULTADOS

Este capítulo apresenta os resultados obtidos para as diferentes condições de contorno analisadas, comparando as soluções fornecidas pela teoria clássica de Kirchhoff para placas e pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). Os deslocamentos máximos foram normalizados conforme expressões consagradas da literatura, permitindo uma comparação direta entre a solução analítica e a solução numérica.

A análise foi conduzida com base em quatro configurações de apoio:

- Simplesmente apoiada (CASO 1);
- Dois engastes e dois apoios (CASO 2);
- Três engastes e um apoio (CASO 3);
- Totalmente engastada (CASO 4).

5.1 Influência da espessura

O aumento da espessura da placa conduz a um crescimento progressivo da discrepância entre a solução analítica baseada na teoria clássica de Kirchhoff e os resultados obtidos via MEF. Esse comportamento está associado à redução da razão entre a menor dimensão lateral da placa e sua espessura, tornando os efeitos de cisalhamento transversal cada vez mais relevantes, os quais não são contemplados na formulação clássica de placas.

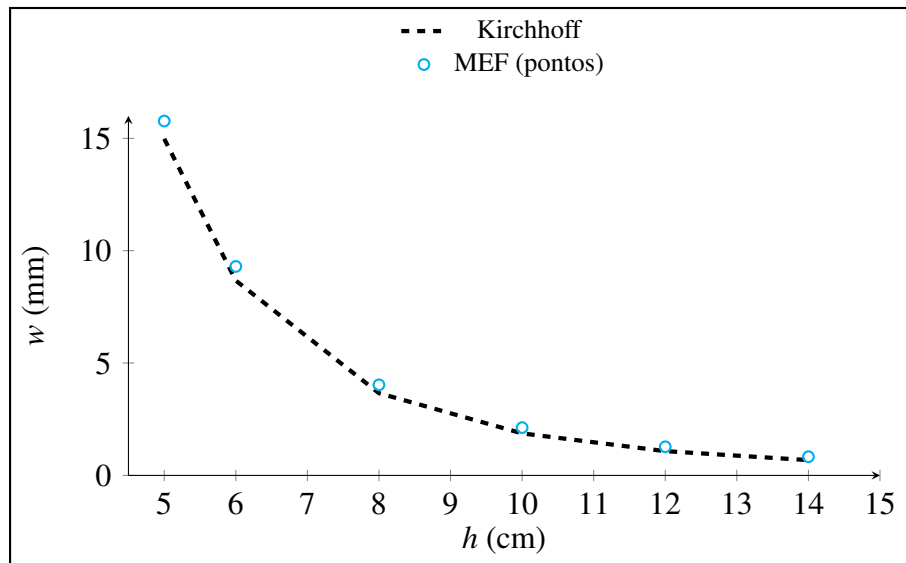
A análise foi realizada considerando o CASO 1 (placa simplesmente apoiada), uma vez que as tendências observadas nesse caso são representativas do comportamento geral das demais condições de contorno. A Tabela 1 apresenta os valores de deflexão máxima obtidos pelos dois métodos, bem como o erro relativo da solução analítica em relação ao MEF, adotado como referência numérica.

Tabela 1 – Comparação entre a solução de Kirchhoff e o MEF
Caso 1.

| h (cm) | Kirchhoff (mm) | MEF (mm) | Erro relativo (%) |
|----------|----------------|----------|-------------------|
| 5 | 14.98 | 15.77 | 5.27 |
| 6 | 8.67 | 9.2988 | 7.25 |
| 8 | 3.66 | 4.0307 | 10.13 |
| 10 | 1.87 | 2.127 | 13.74 |
| 12 | 1.08 | 1.2738 | 17.94 |
| 14 | 0.68 | 0.8317 | 22.31 |

Fonte: Elaborado pelo autor, com base em Kirchhoff-Love.

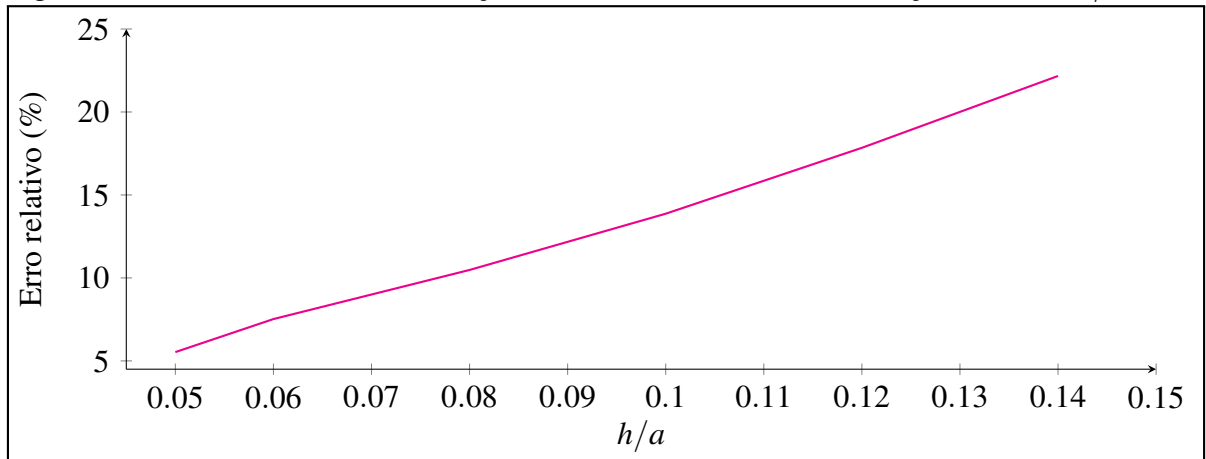
Figura 16 – Deflexão máxima em função da espessura da placa
Caso 1.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 16 evidencia a tendência de subestimação dos deslocamentos pela teoria clássica de Kirchhoff à medida que a espessura da placa aumenta.

Figura 17 – Erro relativo entre a solução de Kirchhoff e o MEF em função da razão h/a .



Fonte: Elaborado pelo autor.

5.2 Resultados por condição de contorno

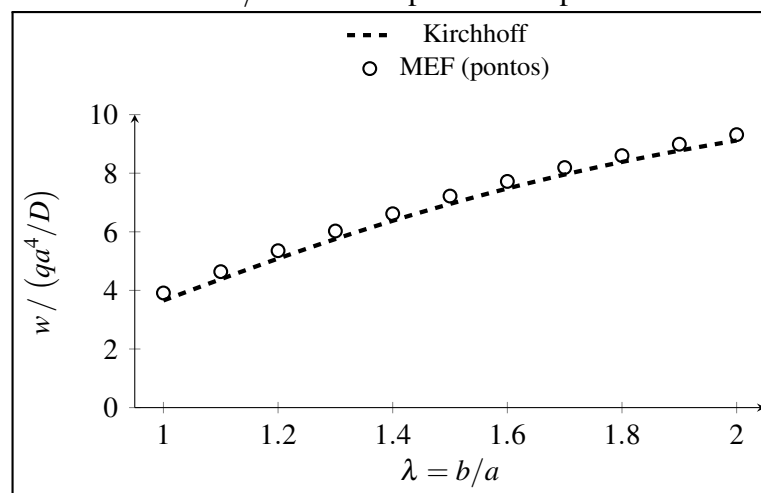
A comparação entre os métodos revela comportamento consistente para todas as condições de contorno analisadas. A teoria clássica de Kirchhoff apresenta excelente concordância com os resultados obtidos via MEF, sobretudo para placas finas e configurações estruturalmente mais rígidas.

O MEF tende a fornecer valores de deslocamento ligeiramente superiores, especialmente em situações de maior flexibilidade estrutural. Esse desvio diminui progressivamente com o aumento da rigidez global da placa, seja pela introdução de engastes, seja pelo aumento da razão geométrica $\lambda = b/a$.

5.2.1 Caso simplesmente apoiado

No caso da placa simplesmente apoiada, observa-se que a solução analítica baseada na teoria clássica de Kirchhoff fornece valores de deflexão sistematicamente inferiores aos obtidos por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), caracterizando uma subestimação moderada dos deslocamentos máximos. Figura 18 apresenta a comparação entre os valores normalizados de deflexão máxima em função da razão geométrica $\lambda = b/a$.

Figura 18 – Flecha normalizada para diferentes razões $\lambda = b/a$ Caso simplesmente apoiado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 2 quantifica o erro relativo da solução de Kirchhoff em relação ao MEF, adotado como referência. Observa-se que o erro relativo decresce de aproximadamente 7,2% para $\lambda = 1,0$ até cerca de 2,1% para $\lambda = 2,0$.

Tabela 2 – Erro relativo da solução de Kirchhoff em relação ao MEF Caso simplesmente apoiado.

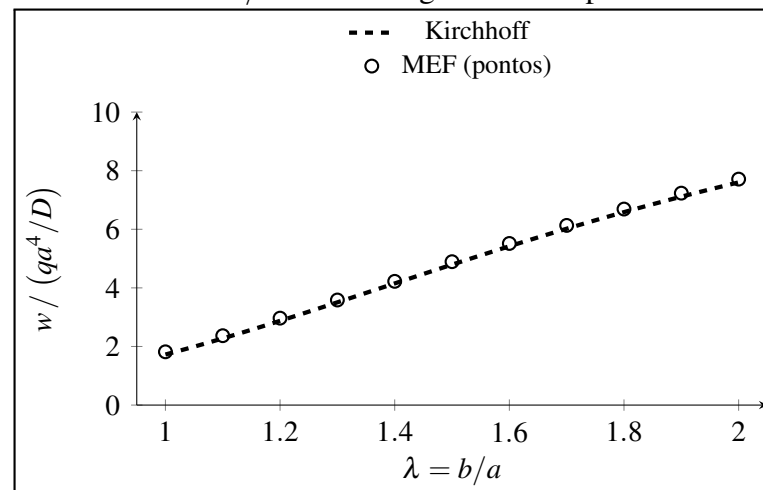
| λ | Kirchhoff | MEF (ref.) | Erro relativo (%) |
|-----------|-----------|------------|-------------------|
| 1.00 | 3.65612 | 3.9123 | 7.23 |
| 1.10 | 4.38206 | 4.64 | 5.30 |
| 1.20 | 5.08548 | 5.3551 | 5.13 |
| 1.30 | 5.75299 | 6.0273 | 4.82 |
| 1.40 | 6.37642 | 6.6166 | 4.04 |
| 1.50 | 6.95162 | 7.22 | 4.19 |
| 1.60 | 7.47730 | 7.72 | 3.58 |
| 1.70 | 7.95420 | 8.1927 | 3.32 |
| 1.80 | 8.38432 | 8.6 | 2.78 |
| 1.90 | 8.77045 | 8.99 | 2.65 |
| 2.00 | 9.11580 | 9.3162 | 2.10 |

Fonte: Elaborado pelo autor, com base em Kirchhoff-Love.

5.2.2 Caso biengastado e biapoiado

No caso biengastado e biapoiado, a presença de dois engastes aumenta a rigidez global da laje, resultando em menores valores de deflexão quando comparados ao caso simplesmente apoiado. A solução analítica de Kirchhoff apresenta valores sistematicamente inferiores aos obtidos pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), indicando leve subestimação dos deslocamentos máximos.

Figura 19 – Flecha normalizada para diferentes razões $\lambda = b/a$ Caso biengastado e biapoiado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 3 apresenta o erro relativo da solução de Kirchhoff em relação ao MEF. O erro máximo ocorre para $\lambda = 1,0$, com valor aproximado de 5,3%, reduzindo-se para valores

inferiores a 2% à medida que λ aumenta.

Tabela 3 – Fonte: Elaborado pelo autor, com base em Kirchhoff-Love

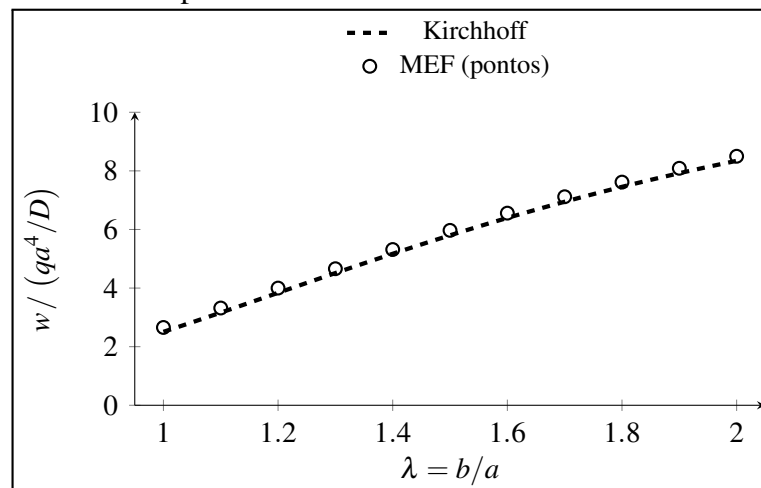
| λ | Kirchhoff | MEF (ref.) | Erro relativo (%) |
|-----------|-----------|------------|-------------------|
| 1.00 | 1.72542 | 1.818 | 5.29 |
| 1.10 | 2.27502 | 2.368 | 3.80 |
| 1.20 | 2.87492 | 2.967 | 3.48 |
| 1.30 | 3.50650 | 3.586 | 2.46 |
| 1.40 | 4.15155 | 4.223 | 1.80 |
| 1.50 | 4.79380 | 4.894 | 2.02 |
| 1.60 | 5.41984 | 5.516 | 1.88 |
| 1.70 | 6.01943 | 6.132 | 1.93 |
| 1.80 | 6.58536 | 6.690 | 1.57 |
| 1.90 | 7.11314 | 7.233 | 1.96 |
| 2.00 | 7.60050 | 7.712 | 1.55 |

Fonte: Elaborado pelo autor, com base em Kirchhoff-Love.

5.2.3 Caso com um bordo engastado e três bordos apoiados

A solução analítica baseada na teoria clássica de Kirchhoff apresenta excelente concordância com os resultados obtidos pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), embora, de forma sistemática, forneça valores ligeiramente inferiores para a deflexão máxima. Essa tendência indica uma leve subestimação dos deslocamentos pela teoria clássica, comportamento coerente com os casos anteriormente analisados.

Figura 20 – Flecha normalizada para diferentes razões $\lambda = b/a$ Caso um bordo engastado e três apoiados.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 4 apresenta o erro relativo da solução de Kirchhoff em relação ao MEF, adotado como referência. Observa-se que o erro máximo ocorre para $\lambda = 1,0$, com valor da ordem de 6,2%, reduzindo-se progressivamente à medida que a razão geométrica aumenta, atingindo valores inferiores a 2% para $\lambda = 2,0$.

Tabela 4 – Erro relativo da solução de Kirchhoff em relação ao MEF Caso com um bordo engastado e três bordos apoiados.

| λ | Kirchhoff | MEF (ref.) | Erro relativo (%) |
|-----------|-----------|------------|-------------------|
| 1.00 | 2.50694 | 2.6557 | 6.23 |
| 1.10 | 3.16253 | 3.3190 | 5.16 |
| 1.20 | 3.83771 | 3.9997 | 4.27 |
| 1.30 | 4.51245 | 4.6604 | 3.39 |
| 1.40 | 5.17071 | 5.3160 | 2.78 |
| 1.50 | 5.80062 | 5.9697 | 3.12 |
| 1.60 | 6.39416 | 6.5574 | 2.73 |
| 1.70 | 6.94654 | 7.1170 | 2.70 |
| 1.80 | 7.45552 | 7.6167 | 2.41 |
| 1.90 | 7.92074 | 8.0885 | 2.41 |
| 2.00 | 8.34320 | 8.4990 | 1.86 |

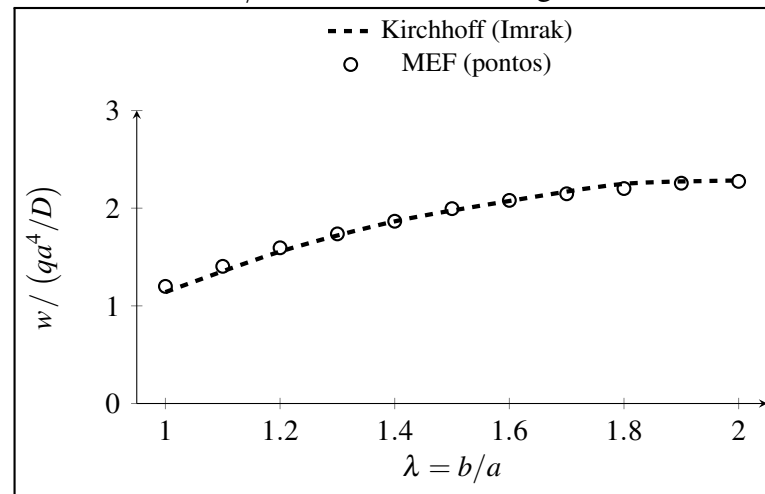
Fonte: Elaborado pelo autor, com base em Kirchhoff-Love.

5.2.4 Caso totalmente engastado

No caso da placa totalmente engastada, as condições de contorno impõem restrições completas aos deslocamentos e rotações ao longo de todos os bordos, resultando no maior nível de rigidez estrutural entre os casos analisados. Como consequência direta, as deflexões máximas apresentam valores significativamente inferiores aos observados nos demais arranjos de apoio.

Devido à elevada complexidade das soluções clássicas para placas totalmente engastadas, que envolvem séries trigonométricas e hiperbólicas extensas para a satisfação rigorosa das condições de contorno, adotou-se neste trabalho a solução analítica apresentada por (IMRAK; GERDEMELI, 2007). Essa formulação fornece uma solução exata dentro da teoria clássica de placas, sendo, portanto, adequada como referência analítica para este caso.

Figura 21 – Flecha normalizada para diferentes razões
 $\lambda = b/a$ Caso totalmente engastado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 5 apresenta o erro relativo da solução analítica de Kirchhoff em relação ao MEF, adotado como referência numérica. Observa-se que os erros permanecem baixos ao longo de toda a faixa analisada, com valores máximos inferiores a aproximadamente 6% para $\lambda = 1,0$, reduzindo-se progressivamente à medida que a razão geométrica aumenta. Esses resultados evidenciam a elevada precisão da solução analítica para placas totalmente engastadas e confirmam a robustez do modelo numérico empregado.

Tabela 5 – Erro relativo da solução de Kirchhoff em relação ao MEF Caso totalmente engastado.

| λ | Kirchhoff | MEF (ref.) | Erro relativo (%) |
|-----------|-----------|------------|-------------------|
| 1.00 | 1.14052 | 1.1994 | 5.15 |
| 1.10 | — | 1.4046 | — |
| 1.20 | 1.55550 | 1.5943 | 3.06 |
| 1.30 | — | 1.7368 | — |
| 1.40 | 1.86495 | 1.8663 | 0.79 |
| 1.50 | — | 1.9953 | — |
| 1.60 | 2.07359 | 2.0798 | 1.22 |
| 1.70 | — | 2.1475 | — |
| 1.80 | 2.24901 | 2.2011 | 2.18 |
| 1.90 | — | 2.2559 | — |
| 2.00 | 2.28262 | 2.2745 | 0.36 |

Fonte: Elaborado pelo autor, com base em Kirchhoff-Love.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma análise comparativa do comportamento estrutural de lajes maciças submetidas a carregamento transversal, com base na Teoria Clássica das Placas de Kirchhoff-Love e no Método dos Elementos Finitos (MEF). O estudo concentrou-se na avaliação de deslocamentos máximos, considerando diferentes condições de contorno, razões geométricas $\lambda = b/a$ e variações de espessura, de modo a investigar a consistência e as limitações das formulações analíticas clássicas frente a modelos numéricos mais gerais.

As soluções analíticas foram implementadas computacionalmente, permitindo a obtenção sistemática das deflexões máximas normalizadas para placas sob diferentes vínculos. Os resultados mostraram que, em todos os casos analisados, a teoria de Kirchhoff fornece valores de deflexão inferiores aos obtidos pelo MEF. Essa diferença é mais pronunciada em configurações com menor grau de engastamento e para placas mais espessas, evidenciando a influência das hipóteses cinemáticas da teoria clássica, especialmente a negligência da deformação por cisalhamento transversal.

Os resultados indicaram boa proximidade entre os métodos. No caso de lajes simplesmente apoiadas, os erros relativos entre Kirchhoff e MEF permaneceram tipicamente abaixo de 10% para $h = 8$ cm e $a = 1$ m, aumentando progressivamente à medida que a espessura cresce. Para $h = 14$ cm, o erro relativo atingiu valores superiores a 20%, confirmando a perda de precisão da teoria clássica fora de seu domínio de validade.

A análise das diferentes condições de contorno evidenciou que o aumento do grau de engastamento reduz significativamente os deslocamentos máximos e melhora a concordância entre os métodos. No caso biengastado e biapoiado, o erro relativo entre Kirchhoff e MEF variou de aproximadamente 5,3% para $\lambda = 1,0$ a valores inferiores a 2% para $\lambda \geq 1,4$. Resultados semelhantes foram observados nos casos com um bordo engastado e três apoiados, bem como no caso totalmente engastado, nos quais as discrepâncias permaneceram sistematicamente reduzidas ao longo do intervalo analisado.

Assim, conclui-se que o uso combinado de soluções analíticas clássicas e modelos numéricos constitui uma abordagem eficiente para a análise de lajes, permitindo tanto a compreensão física do problema quanto a obtenção de resultados mais precisos em situações fora do regime estritamente delgado.

6.1 Sugestão para trabalhos futuros

A partir das análises realizadas e das limitações inerentes às hipóteses assumidas, identificam-se diversas possibilidades de aprofundamento e continuidade da pesquisa, de modo a ampliar a compreensão do comportamento estrutural das lajes de concreto armado. Como sugestões para trabalhos futuros, destacam-se:

- Realizar uma análise comparativa dos momentos fletores atuantes em placas finas, confrontando os resultados fornecidos pela teoria de Kirchhoff-Love e pelo Método dos Elementos Finitos, avaliando não apenas deslocamentos, mas também a distribuição e magnitude dos esforços internos.
- Investigar o comportamento de lajes por meio de uma análise de confiabilidade estrutural, incorporando incertezas associadas às propriedades dos materiais, carregamentos e dimensões geométricas, de modo a avaliar a probabilidade de falha dos modelos clássicos e normativos frente a modelos numéricos mais refinados.
- Estender o estudo para a análise não linear de lajes de concreto armado, considerando efeitos de fissuração, plastificação do concreto e do aço, bem como a influência da redistribuição de esforços nos deslocamentos e momentos fletores.
- Avaliar a aplicação de teorias de placas de ordem superior, como a teoria de Mindlin-Reissner ou modelos quasi-3D, comparando seus resultados com a teoria clássica de Kirchhoff e com modelos tridimensionais baseados na teoria da elasticidade.
- Investigar a influência de condições de contorno mais realistas, como apoios elásticos ou semirrígidos, simulando de forma mais fiel a interação entre lajes e elementos estruturais adjacentes, como vigas e pilares.
- Analisar o efeito de geometrias não retangulares, aberturas e descontinuidades em lajes, avaliando a aplicabilidade das formulações normativas e das soluções analíticas clássicas frente a modelos numéricos.

REFERÊNCIAS

- ANONYMOUS. Experimental and numerical study on reinforced concrete slab subjected to impact loading. **Elsevier**, 2025. Publicado online.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6118: projeto de estruturas de concreto**. Rio de Janeiro: ABNT, 2023.
- BATHE, K.-J. **Finite Element Procedures**. New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- CHANDRASEKHARAIHAH, L. D. D. S. **CONTINUUM MECHANICS**. [Boston]: ACADEMIC PRESS, 1994.
- COMSOL AB. **COMSOL Multiphysics® Material Library**. 6.2. ed. Stockholm, Sweden, 2023.
- COMSOL AB. **COMSOL Multiphysics® Reference Manual**. 6.2. ed. Stockholm, Sweden, 2023.
- COMSOL AB. **COMSOL Multiphysics® Solver and Study Guide**. 6.2. ed. Stockholm, Sweden, 2023.
- COMSOL AB. **Introduction to the Mesh Module**. 6.2. ed. Stockholm, Sweden, 2023.
- COMSOL AB. **Structural Mechanics Module User's Guide**. 6.2. ed. Stockholm, Sweden, 2023.
- COMSOL, M. Structural mechanics module users guide. **COMSOL Multiphysics® v. 6.2. COMSOL AB, Stockholm, Sweden**, p. 2118, 2023.
- FAVA, G. C.; NEVES, L. R. **Análise numérica comparativa entre o método dos elementos finitos e o método das grelhas na análise estrutural do elemento laje: estudo de caso**. [S.l.], 2025.
- HAUKAAS, T. **Kirchhoff and Mindlin Plates**. 2019. The University of British Columbia. Disponível em: <https://terje.civil.ubc.ca/>. Acesso em: 10 abr. 2026.
- HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. New York: Dover Publications, 2012.
- IMRAK, C. E.; GERDEMELI, I. Deflection analysis of rectangular plates with all edges clamped. **Applied Mathematical Sciences**, v. 1, n. 41–44, p. 2061–2068, 2007.
- KEINTJEM, M.; SUWONDO, R.; SUANGGA, M. Finite element based optimization of two-way concrete slabs: A comparative study on embodied carbon and cost efficiency. **Engineering, Technology & Applied Science Research**, v. 15, n. 4, p. 25251–25256, 2025.
- LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. d. A. **Fundamentos de metodologia científica**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008. ISBN 978-85-224-5142-0.
- MANTARI, J. L.; SOARES, C. G. Quasi-3d elasticity theory for bending and vibration analysis of plates. **Thin-Walled Structures**, v. 186, p. 110683, 2023.
- MEICHE, N. E.; TOUNSI, A.; MECHAB, I. Comparison between three-dimensional elasticity solutions and refined plate theories. **Composite Structures**, v. 236, p. 111837, 2020.

- NGUYEN, T. K.; PHAM, D. T. Three-dimensional elasticity solutions for thick plates under transverse loading. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 196, p. 106284, 2021.
- ONYEKA, F.; ARINZE, E. Original research article application of a new refined shear deformation theory for the analysis of thick rectangular plates article information abstract. p. 2020–901, 12 2020.
- QSYMAH, A.; AYASRAH, M. Finite element analysis of two-way reinforced concrete slabs strengthened with frp under flexural loading. **Buildings**, v. 14, n. 11, 2024.
- SHARAFALDEEN, M.; ABDELATIF, A. O. 3d non-linear finite element modeling of one-way rc slab strengthened with concrete overlay. **Journal of Engineering and Applied Science**, v. 71, p. 83, 2024.
- SZILARD, R. **Theories and Applications of Plate Analysis. Classical, Numerical and Engineering Methods**. [Boca Raton]: New Jersey, 2004.
- THAI, H.-T.; KIM, S.-E. Three-dimensional elasticity analysis of functionally graded plates. **Engineering Structures**, v. 252, p. 113655, 2022.
- TIMOSHENKO, S. W. S. **Theory of plates and shells**. [New York]: McGraw-Hill, 1959.
- WERDINA, G. M. Finite element analysis of fiber reinforced concrete slabs under torsion. **The Open Civil Engineering Journal**, v. 18, 2024.
- ZHOU, Y.; LI, X.; WANG, J. Three-dimensional elasticity-based finite element analysis of reinforced concrete slabs. **Engineering Structures**, v. 296, p. 116904, 2024.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals**. 6th. ed. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
- MRAK, C.; GERDEMELI, . An exact solution for the deflection of a clamped rectangular plate under uniform load. **Applied Mathematical Sciences**, v. 1, 2007.