

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE FÍSICA**

JÚLIO CÉSAR BRASIL DE ARAÚJO

**Extensões de cenários de Branas com
defeitos do tipo corda em seis dimensões**

FORTALEZA, CEARÁ

2012

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE FÍSICA**

JÚLIO CÉSAR BRASIL DE ARAÚJO

**Extensões de cenários de Branas com
defeitos do tipo corda em seis dimensões**

Dissertação submetida à coordenação do curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida

FORTALEZA, CEARÁ

2012

*Dedico este trabalho a minha tia, Verônica Brasil
de Araújo (in memoriam).*

Agradecimentos

Agradeço sobremaneira à minha mãe, Joana Lúcia Brasil de Araújo, que nesta jornada sempre esteve presente.

Ao meu orientador Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida, pela oportunidade oferecida, por acreditar no meu potencial e por seus constantes e inspiradores incentivos, além dos inestimáveis direcionamentos. Mas principalmente pelo que se estabelece para além disso, algo muito caro, a que se chama amizade.

A Tatiana Estevão Carneiro, minha namorada, por seu amor compartilhado, por sua amizade e dedicação. Você tem sido o meu porto seguro durante essa difícil, porém gratificante etapa.

À minha irmã, meu irmão, minha avó, minhas tias e meus tios, Ingrid, Bruno, Josefa Brasil, Gorete, Estela, Gilberto, Walter, Carlos Alberto, Roberto e Nando com quem sempre pude contar e conto para todo e qualquer obstáculo que a vida nos põe.

Aos meus amigos, José Euclides Gomes da Silva e Victor Pereira do Nascimento Santos, pelo imenso apoio, com os quais tive um exercício intelectual fundamental para a construção das bases científicas deste trabalho. Meus eternos agradecimentos a vocês dois.

Ao corpo docente do departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, especialmente aos professores doutores Ricardo Renan Landin de Carvalho, José Ramos Gonçalves e João Milton Pereira Junior.

Aos meus amigos da Pós-graduação em Física, Samuel B. Bastos, Ivan C. Jardim, Diego Frankin, Hudson Pacheco, Davi Monteiro, Victor Santos, José Euclides, Francisco Wagner, Luis José, Aristeu Rosendo, Diego Rabelo, Thiago M. Santiago, Abraão C. Torres Dias, Saulo D. Soares e Reis, Felipe, Hygor Piaget, Francisco Ancelmo, Bruno Mesquita, Rocicler Oliveira, Heitor Fernandes e Rilder. Partilho com todos vocês os méritos da minha pesquisa.

Ao Prof. Dr. Márcio André de Melo Gomes e Prof. Dr. Júlio Marny Hoff da Silva por terem aceito em participar da avaliação de defesa deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Wilami Teixeira da Cruz pelo suporte científico e a Profa. Dra. Luciana Angelica da Silva Nunes pela amizade e encorajamento.

Ao meu amigo, Prof. Dr. Carlos Alex Souza da Silva, pelo mini-curso de Relatividade Geral.

Ao meu grande amigo, Daniel Filipe Carvalho, que despertou em mim o gosto pela Filosofia.

Ao meu grande mestre e amigo, Professor Raimundo Vanderley Fidelis Sombra, pelas aulas motivadoras de Eletromagnetismo nos tempos de graduação no Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE).

À coordenação da pós-graduação do departamento de Física da Universidade Federal do Ceará (UFC), pelo total apoio aos estudantes.

À Universidade Federal do Ceará (UFC), por sua contribuição à formação social, humana e científica do nosso estado.

A CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), por ter me fornecido bolsa de estudos sem a qual esta pesquisa jamais teria se tornado possível.

“Quer as leis finais da natureza sejam descobertas, quer não, durante a nossa vida é para nós um grande orgulho continuarmos a tradição de investigação da Natureza, de perguntarmos vezes sem conta por que ela é como é.”

Steven Weinberg

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar uma extensão do cenário Gherghetta-Shaposhnikov (GS) através da introdução de um parâmetro adimensional em uma geometria não-fatorizável em seis dimensões, onde supomos que o nosso universo observável é representado por uma 3-brana minkowskiana e as outras duas são dimensões extras, com uma delas compacta.

Neste modelo, realizamos o processo de linearização das equações de Einstein fazendo uso de um método perturbativo, a fim de encontrarmos as equações de movimento para em seguida localizarmos o modo-zero gravitacional.

A partir desses procedimentos, novos resultados foram obtidos no tocante as propriedades físicas e geométricas desse novo cenário.

Com este novo modelo sistematizamos a localização de gravidade em uma geometria 6-dimensional, exibindo um exemplo onde ocorre localização de gravidade e obtendo esse resultado através de uma extensão do modelo GS.

PALAVRAS-CHAVE: branas, modelo Gherghetta-Shaposhnikov, geometria em seis dimensões.

Abstract

The purpose of this work is to show an expanse about Gherghetta-Shaposhnikov (GS) scenery through the introduction of a dimensionless parametric in the warped geometry in six dimensions, we suppose which our universe the way that we watch is stood for minkowsk's 3-brane and the two other are additional dimensions and one of them is compact.

In that new model, we are able to achieve the linear process about Einstein's equation. In order to achieve a perturbation in the metric, so that we are able to locate the equation of motion, consequently finding the massless gravity model.

Through these procedures, we have new results about the geometry and physics states in that new scenery.

In that new scenery we order the gravity location in a 6-dimensinal geometry, in order to showing an instant where we can find the gravity location, then we get this type of location through an expansion of the GS's model.

KEY WORDS: branes, Gherghetta-Shaposhnikov model, geometry in six dimensions.

Sumário

1	Introdução	p. 9
2	Modelo Randall-Sundrum	p. 20
2.1	A Hierarquia de Gauge	p. 20
2.2	O cenário de Arkani-Hamed-Dimopoulos-Dvali (ADD)	p. 21
2.3	O cenário Randall-Sundrum tipo-1 (RS-1)	p. 22
2.4	O cenário Randall-Sundrum tipo-2 (RS-2)	p. 26
3	Modelo Gherghetta-Shaposhnikov	p. 28
3.1	Equações de Einstein para o campo gravitacional em seis dimensões no modelo GS	p. 29
3.2	Localização de gravidade no modelo GS	p. 31
3.3	Componentes de tensão da corda em seis dimensões no modelo GS	p. 34
4	Defeitos do tipo corda em seis dimensões estendido	p. 36
4.1	Equações de Einstein para o campo gravitacional em seis dimensões no cenário de defeitos do tipo corda estendido	p. 37
4.2	Localização de gravidade em seis dimensões no cenário de defeitos do tipo corda estendido	p. 42
4.3	Componentes de tensão da corda em seis dimensões no cenário de defeitos do tipo corda estendido	p. 46
5	Conclusões e Perspectivas	p. 49
6	Referências	p. 51

1 Introdução

A possibilidade da existência de dimensões espaciais adicionais tem sido considerada na Física desde o começo do século XX. Apesar de não existir nenhuma evidência experimental de que tais dimensões existam, teorias de dimensões extras têm sido cada vez mais usadas para resolver problemas teóricos em física de altas energias [1]. Podemos citar alguns exemplos: a possibilidade de unificação da gravidade com o eletromagnetismo, a descrição puramente geométrica de todas as interações físicas [2], a origem da massa das partículas, a massa faltante para explicarmos a velocidade com que as estrelas orbitam o centro das galáxias (aparentemente essa falta de massa poderia estar oculta em dimensões espaciais extras) e a possível explicação de a interação gravitacional se mostrar tão fraca em nosso universo. Uma outra vertente de pesquisas considerando cenários de dimensões extras, encontra-se presente em algumas teorias que se propõe em unificar as quatro interações fundamentais da natureza em um único sistema teórico e autoconsistente. O mais forte candidato à unificação é a chamada teoria das supercordas. Sua principal característica é substituir a caracterização pontual das partículas elementares (elétrons, quarks, neutrinos, fótons etc.) por diminutas estruturas estendidas e unidimensionais denominadas de cordas. Nesse modelo cada modo de vibração das cordas representaria uma partícula elementar.

Porém, para que a teoria funcione, é necessária a existência, além do tempo, de seis dimensões espaciais extras que se somariam às três conhecidas. Quando acopladas, as supercordas seriam representadas por estruturas bidimensionais, as membranas.

Um dos grandes sucessos da física do século XX foi poder explicar a dinâmica dos fenômenos naturais através de somente quatro interações fundamentais: a interação eletromagnética, a interação gravitacional, a interação nuclear fraca e a interação nuclear forte. As interações eletromagnéticas e nucleares forte e fraca fazem parte de um esquema teórico denominado Teoria Quântica de Campos (TQC), pois, estas interações, podem ser tratadas de forma quântica e relativística. A interação gravitacional ainda encontra-se fora deste esquema teórico, uma vez que, em termos de TQC, ainda não foi possível quantizá-la.

Como foi dito a TQC constitui em uma teoria quântica e relativística para um sistema virtualmente infinito de partículas, ou seja, é a aplicação conjunta da mecânica quântica e da teoria da relatividade restrita aos campos, fornecendo uma estrutura teórica usada na física de partículas e na física da matéria condensada [3].

As principais razões que motivaram o desenvolvimento da TQC foram a necessidade de uma teoria que lidasse com a variação do número de partículas (criação e destruição de partículas), a conciliação de forma consistente entre a mecânica quântica e a teoria da relatividade restrita e a necessidade de lidar com estatísticas de sistemas de muitas partículas.

A TQC surgiu no final da década de 1920 como aplicação das regras de quantização de Heisenberg ao campo de radiação [3]. Um importante resultado desse processo é o aparecimento do fóton, o quantum do campo de radiação. Dessa forma, uma vez que há criação de partículas no processo de quantização de campos, podemos imaginar que são os campos, e não as partículas, as entidades fundamentais do mundo natural. Esse pensamento direcionou pesquisas para a construção de teorias de campos, nas quais as interações são descritas por produtos de campos no mesmo ponto (localidade). A imposição da localidade constitui a maneira mais simples de compatibilizar a estrutura das interações com a teoria da relatividade restrita. Porém, produtos de campos calculados no mesmo ponto não estão bem definidos. Nos métodos perturbativos da teoria manifestam o surgimento de integrais divergentes.

A solução para o problema dos infinitos nos cálculos perturbativos da teoria veio com a descoberta da renormalização. As cargas e as massas das partículas são, em geral, modificadas pela interação. Um elétron, por exemplo, está sempre rodeado por uma nuvem de fótons devido ao próprio campo eletromagnético que ele próprio produz. Dessa forma ele está constantemente interagindo, emitindo e absorvendo fótons, modificando dessa forma a sua auto-energia [3]. A massa do observável de um elétron deve necessariamente incorporar essa modificação. O fóton emitido pelo elétron consegue polarizar o vácuo, produzindo pares de partículas-antipartículas que blindam parcialmente o elétron, modificando a sua carga de forma efetiva. A carga do observável deve incorporar o efeito da polarização do vácuo. O grande problema que surge na teoria quântica de campos, é que, nestas situações, as correções para a carga e para a massa das partículas são infinitas.

Vamos agora falar um pouco sobre cada uma das interações fundamentais da natureza. Começaremos pela primeira teoria quântica de campos, a eletrodinâmica quântica (*QED-Quantum Electrodynamics*), que é, por excelência, a teoria mais bem testada da física. De acordo com essa teoria, as partículas carregadas interagem através da troca de fótons. Estes fótons não podem ser detectados; por esta razão, são conhecidos como fótons virtuais. A Eletrodinâmica Quântica

é uma teoria abeliana de calibre, dotada de um grupo de calibre $U(1)$. O campo de calibre que media a interação entre campos de spin $1/2$ é o campo eletromagnético A_μ . A descrição da interação se dá através da Lagrangiana para a interação entre elétrons e pósitrons, que é dada por:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1.1)$$

onde ψ e seu adjunto de Dirac $\bar{\psi}$ são os campos representando partículas eletricamente carregadas, especificamente, os campos do elétron e pósitron representados como espinores de Dirac, γ^μ as matrizes de Dirac, $F^{\mu\nu}$ o tensor campo eletromagnético e D_μ é a derivada covariante de gauge.

No final do século XIX, Maxwell percebeu que eletricidade e magnetismo, são manifestações aparentemente distintas da mesma coisa, a chamada interação eletromagnética. Os seus estudos mostraram que eletricidade e magnetismo completam-se mutuamente. Glashow, Salam e Weinberg descobriram o capítulo seguinte nessa história de unificação. A teoria da interação nuclear fraca, à qual estão sujeitas todas as partículas, foi formulada por analogia com a teoria da eletrodinâmica quântica. As partículas de calibre da teoria são os W' s e Z , que, ao contrário dos fótons, possui energia de repouso diferente de zero. O modelo foi tão bem sucedido que Glashow, Salam e Weinberg mostraram que a interação eletromagnética e a interação nuclear fraca são, na verdade, partes de uma mesma interação. Eles unificaram a descrição dessas duas interações que hoje é conhecido como interação eletrofraca. Essa teoria levou a previsões bem detalhadas com respeito às partículas de gauge da teoria. As previsões com respeito as suas massas foram as seguintes: as partículas W' s possuem massas da ordem de $80,6 GeV/c^2$ e a partícula Z da ordem de $91,2 GeV/c^2$. Matematicamente, a unificação é feita pelo grupo de gauge $SU(2) \otimes U(1)$. Por suas contribuições para unificação das interações nucleares fraca e eletromagnética, Glashow, Salam, e Weinberg foram laureados com o Prêmio Nobel de Física em 1979.

A teoria da interação nuclear forte, isto é, da interação que mantém os quarks unidos para formar os hádrons, é uma teoria física que descreve uma das interações fundamentais. As partículas de gauge da teoria são chamadas de glúons e, similarmente aos fótons, não possuem energia de repouso. A interação que age entre os quarks é chamada de interação de cor e a teoria associada, por analogia com a eletrodinâmica quântica (QED), recebeu o nome de cromodinâmica quântica (QCD-Quantum Chromodynamics). Ela é uma teoria quântica de campos que descreve a interação dos quarks e dos glúons. Proposta primeiramente nos anos 70 por Politzer, Wilczek e Gross, matematicamente, a QCD é uma teoria de calibre não abeliana, com base em um calibre (local) de grupo de simetria chamado $SU(3)$. Por seus trabalhos, Politzer, Wilczek,

e Gross foram agraciados com o prêmio Nobel de Física em 2004.

A interação gravitacional será o tipo de interação que iremos abordar nesse trabalho dissertativo. Ela é a mais fraca interação conhecida até o presente momento na natureza. Para termos ideia, entre duas partículas de mesma carga e mesma massa, a interação gravitacional é aproximadamente da ordem de 10^{-40} vezes mais fraca que a interação eletromagnética. Embora seja a mais fraca de todas as interações, a gravidade é universal, ou seja, tudo que existe no universo conhecido acopla-se com a gravidade e ela é somente atrativa. Não existe repulsão gravitacional. A melhor teoria que descreve a interação gravitacional é a teoria da Relatividade Geral de Einstein, que possui como postulado base, o chamado princípio de equivalência. De forma geral, este princípio nos diz que em um referencial no qual uma partícula é submetida um campo gravitacional é equivalente a um referencial no qual este esteja correspondentemente acelerado [1].

Consideraremos o caso em que uma partícula está presente em um campo gravitacional constante. A partir das leis de Newton, escrevemos

$$m_i \mathbf{a} = m_g \mathbf{g}. \quad (1.2)$$

Qualquer força externa atuando na partícula é igual ao produto da sua aceleração pela massa da própria partícula, denominada massa inercial m_i . Uma força gravitacional externa é proporcional à massa gravitacional m_g da partícula. Essas duas quantidades são, com altíssima precisão, iguais. Dessa forma, podemos escrever, $m_i = m_g = m$, o que nos conduz à seguinte equação

$$m \frac{d^2}{dt^2} \left[\mathbf{r}(t) - \frac{\mathbf{g}t^2}{2} \right] = 0. \quad (1.3)$$

Percebemos que o campo gravitacional externo pode ser produzido a partir de uma mudança de referencial.

$$\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - \frac{\mathbf{g}t^2}{2}. \quad (1.4)$$

Portanto, vista de um referencial em queda livre ($g = \text{constante}$), a partícula estaria livre de gravidade. Chegamos a esta conclusão tomando como base um campo gravitacional constante, mas geralmente sabemos que o campo gravitacional varia em todos os pontos do espaço. No entanto, de acordo com a teoria geral da relatividade, o campo gravitacional é tal que em todos os pontos do espaço-tempo existe um sistema de coordenadas no qual a gravidade parece não existir [4]. Portanto, dado um sistema de coordenadas privilegiado em um ponto do espaço-tempo, podemos relacioná-lo com um sistema de coordenadas arbitrário de modo que a física em termos desse sistema de coordenadas independa da escolha do sistema arbitrário (princípio de covariância geral). Além dessas questões, existe outra, de natureza dinâmica, que relaciona

a distribuição de matéria-energia à curvatura associada à geometria do espaço-tempo. Representando a curvatura pelo tensor de Riemann $R_{\mu\nu}$ e a matéria pelo seu tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ escreve-se

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}, \quad (1.5)$$

que é a equação de campo de Einstein para a gravitação.

Até o surgimento da teoria da relatividade de Einstein, parecia completamente fora de propósito que o Universo tivesse mais de três dimensões. Em nosso primeiro contato com a geometria euclidiana, plana ou espacial, temos a tendência natural de atribuir aos teoremas o status de fatos geométricos, como se eles tivessem uma existência real, como se fossem parte integrante do mundo físico, indo além da natureza puramente axiomática e abstrata da Matemática [3]. A física newtoniana é geometricamente euclidiana, uma vez que identifica a geometria euclidiana como a própria geometria do mundo físico.

A teoria da relatividade restrita, proposta por Einstein em 1905 e aprimorada por Minkowski, marcou o começo de uma nova física, diferindo da física newtoniana não só em termos de geometria como também na dimensionalidade do mundo. Na teoria da relatividade restrita, o espaço, antes pensado tridimensionalmente, tem agora que ser tratado quadridimensionalmente com três dimensões espaciais e uma dimensão temporal formando uma estrutura denominada de espaço-tempo 4-dimensional. A geometria desse espaço-tempo deixa de ser euclidiana passando a ser chamada de geometria minkowskiana. Nessa geometria o tempo passa a ser concebido como uma quarta dimensão, o que foi extremamente fundamental para a construção da nova teoria da gravitação, que é a teoria da relatividade geral. Na relatividade geral considerada por muitos como a maior realização intelectual humana, a geometria deixa de ser minkowskiana para ser riemanniana. Aonde a gravitação passou a ser pensada como uma consequência da deformação da geometria do espaço-tempo 4-dimensional e não mais como uma força física.

Einstein dedicou boa parte dos seus esforços nos últimos anos de vida, à procura de uma teoria do campo unificado. Para alcançar esse objetivo, precisava geometrizar o eletromagnetismo [5], obtendo, assim, uma teoria unificada das interações da física. Foi então que no início da década de vinte do século passado, Theodor Kaluza e Oscar Klein demonstraram que se o espaço-tempo postulado por Einstein e Minkowski for acrescido de uma quinta dimensão espacial, então, usando as equações de campo de Einstein da relatividade geral, mostra-se que a interação eletromagnética pode ser vista como tendo natureza geométrica [6]. Em outras palavras, o campo eletromagnético, à semelhança do campo gravitacional, também é geometrizável. Para tentar explicar o fato de que até agora não se observou nenhuma dimensão além das quatro do espaço-tempo, Kaluza e Klein revelaram que a dimensão espacial extra deveria ser

microscópica e circular de raio aproximadamente igual ao comprimento de Planck, ou seja, da ordem de $10^{-35} m$. Na terminologia matemática diz-se que essas dimensões são compactas. Em seguida o modelo de Kaluza-Klein (KK) foi estendido para D dimensões [7], onde a métrica D -dimensional tem a seguinte forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\mu)dx^\mu dx^\nu - \gamma_{ab}dx^a dx^b. \quad (1.6)$$

Aqui $g_{\mu\nu}$ é a métrica do mundo 4-dimensional e γ_{ab} é a métrica associada com $D-4$ dimensões extras compactas. A compactificação das dimensões extras não são observadas para energias $E < M$, onde M é a massa de Planck que é da ordem de $10^{19} GeV/c^2$. Para os estados 4-dimensionais de massa ($\sim M$) manifesta-se a existência de uma torre infinita de estados.

A finalidade última da física é descobrir uma “teoria final”, da qual todo o resto possa ser derivado. Os físicos estão a procura de uma teoria que inclua tanto a gravitação quanto a teoria dos campos quânticos, pois só assim poderíamos, chegar em uma teoria definitiva da natureza.

A teoria final estaria localizada na ponta do reducionismo científico, traria a explicação última de todos os conceitos físicos, em outras palavras, seria a mais fundamental das teorias sobre a natureza.

Alguns físicos construíram uma teoria no qual as partículas que considerávamos elementares eram na realidade filamentos unidimensionais vibrantes de energia, a que os físicos deram o nome de cordas. Ao vibrarem as cordas originariam as partículas elementares juntamente com as suas propriedades. Para cada partícula elementar do universo existe um padrão de vibração particular das cordas.

O interesse maior na teoria das cordas é dirigido pela enorme esperança que ela possa compatibilizar a teoria quântica de campos com a teoria da relatividade geral, formando uma “Teoria de Tudo”. Embora não esteja completamente consolidada, a teoria mostra sinais promissores de plausibilidade [3].

O movimento da corda cria uma superfície bidimensional chamada de folha mundo, em analogia com a linha de mundo de uma partícula relativística. Essa superfície possui uma métrica g_{ab} induzida pela métrica do espaço-tempo $\eta_{\mu\nu}$:

$$g_{ab} = \eta_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu, \quad (1.7)$$

onde $a, b = 0, 1$. Uma corda bosônica se propagando num espaço de Minkowski pode ser descrita pela ação de Nambu-Goto,

$$S = -T \int dA. \quad (1.8)$$

Como $dA = d\tau d\sigma$, temos

$$S = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-g}, \quad (1.9)$$

que nos fornece a área da folha mundo deixada pela corda. Temos que T é a tensão da corda e $g = \det g_{ab}$ é o determinante da métrica induzida.

Quantizando a ação de Nambu-Goto, podemos deduzir que cada corda pode vibrar em muitos modos diferentes, e que cada estado vibracional representa uma partícula diferente, onde suas propriedades são determinadas pela forma de vibração da corda.

Um aspecto bastante interessante da teoria das cordas é que ela prediz o número de dimensões que o universo deve possuir. A teoria permite calcular o número de dimensões espaço-temporais a partir dos seus princípios fundamentais. O problema é que quando esse cálculo é feito, o número de dimensões do universo deixa de ser apenas quatro, mas vinte e seis. Mais precisamente, a teoria das cordas bosônicas possui 26 dimensões, enquanto a teoria das supercordas envolve 10 ou 11 dimensões. Este problema é resolvido usando a compactificação das dimensões extras, as 6 ou 7 dimensões extras são tão pequenas que não são detectadas em experimentos. Essencialmente essas dimensões extras estão “compactadas” pelo seu enrolamento sobre elas mesmas.

Outra possibilidade é que nós estejamos presos em um subespaço com $(3 + 1)$ -dimensões de um universo com dimensões mais altas. Como isso envolve objetos chamados de branas, esta teoria é conhecida como **braneworld**. As branas são objetos estendidos que surgem na teoria das cordas. Dessa forma uma 1-brana é uma corda, uma 2-brana é uma membrana, uma 3-brana possui três dimensões estendidas e assim por diante. De maneira geral uma p -brana possui p dimensões estendidas. A possibilidade de que estejamos vivendo em uma 3-brana constitui um dos grandes resultados dado pela teoria das cordas.

Em alguns cenários de mundo brana todos os campos do modelo padrão são derivados de padrões vibratórios de cordas abertas, de modo que esses campos estão presos na 3-brana. Porém os grávitons derivam do padrão vibratório de cordas fechadas. Dessa forma os grávitons não estão confinados pelas branas, podendo deslocar-se pelas dimensões extras. Uma outra forma de pensarmos isso, é lembrarmos que de acordo com a teoria da relatividade geral, a gravidade é uma manifestação do próprio espaço-tempo, podendo assim “vazar” para fora da 3-brana. Com isso, poderíamos então, explicar o fato da interação gravitacional se mostrar tão fraca em nossa 3-brana. Mesmo com a gravidade vazando, não perceberíamos a existência de dimensões extras porque a gravidade poderia curvar o espaço tão fortemente de forma a ocultar as dimensões extras que, na prática, mesmo a gravidade se comportaria como se o mundo tivesse apenas 3 dimensões espaciais.

Quando tratamos de modelos de localização de campos em branas, podemos pensar em três cenários distintos com dimensões extras: um cenário de dimensões extras muito pequenas e compactas, um com dimensões extras de tamanho infinito e um outro cenário que possui tanto dimensões extras compactas quanto estendidas de tamanho infinito. Faremos agora um breve comentário dos modelos que servirão de base para o nosso trabalho. Para isso falaremos um pouco sobre cada capítulo, para em seguida comentarmos a principal motivação do nosso projeto de pesquisa.

No segundo capítulo desta dissertação, iniciaremos falando sobre o problema da hierarquia das interações fundamentais, que basicamente consiste em uma diferença quantitativa entre as escalas de massas eletrofraca e de Planck

$$\frac{m_{Planck}}{m_{eletrofraca}} \sim 10^{16} \quad (1.10)$$

baseadas nas medidas das constantes de acoplamento. Comentaremos também que a hierarquia entre estas duas escalas de massas deve ser exatamente esta por razões puramente experimentais para produzir efeitos físicos observáveis em baixas energias. Nos modelos baseados em física de dimensões extras, veremos que um de seus objetivos é gerar essa hierarquia de massas. Analisaremos modelos de mundo brana que tratam o nosso universo mergulhado em um espaço-tempo multidimensional.

Em 1998 Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali (ADD) propuseram um modelo multidimensional para dar uma solução para o problema da hierarquia [8]. A ideia de ADD como veremos com mais detalhes reside no fato de que não existe ainda uma comprovação experimental de que a gravidade é realmente efetiva somente em altas energias da ordem de $10^{15} GeV$, mas sim que poderíamos também verificar a unificação das interações fundamentais da natureza na escala de energia da ordem de TeV . Veremos com mais detalhes que um aspecto interessante desse cenário ADD é que a gravidade é controlada pela escala eletrofraca em vez da escala de Planck. Veremos também que esse cenário contém apenas uma brana que simula o nosso universo quadridimensional possibilitando a existência de dimensões extras microscópicas. Veremos também que esse modelo considera que a geometria do espaço é fatorizável. Logo em seguida, mostraremos um importante resultado desse cenário que é o acoplamento gravitacional 4-dimensional.

Em 1999, L. Randall e R. Sundrum [9] propuseram um cenário alternativo ao ADD [8]. O primeiro modelo conhecido como RS-1 [9] é construído com um bulk de curvatura constante em cinco dimensões em um espaço-tempo do tipo anti-deSitter, ou simplesmente AdS_5 . Este tipo de espaço foi introduzido originalmente em 1917 pelo físico W. de Sitter apresentando novas

soluções para as equações de Einstein pela adição da constante cosmológica Λ nas equações de campo no vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$). O modelo Randall-Sundrum é importante, pois muito dos seus conceitos serão explorados e desenvolvidos neste trabalho.

Veremos que o modelo de Randall-Sundrum tipo-1 (RS-1) apresenta uma solução bem mais simples em relação a teorias que modelam o nosso universo em uma brana mergulhada em dimensões mais altas, e podemos citar como aspectos mais importantes do modelo:

1. existência de apenas uma dimensão extra não microscópica compactificada, uma variedade de simetria Z_2 na qual pontos opostos com respeito a quinta dimensão podem ser identificados;
2. a existência de duas membranas localizadas em pontos diametralmente opostos dessa variedade;
3. a geometria do volume multidimensional não é mais considerada plana. Em vez disso adota-se uma geometria penta dimensional (4 + 1) anti-deSitter (AdS_5);
4. uma hierarquia exponencial gerada pela métrica determina a escala de massa eletrofraca a partir da escala de massa de Planck.

A métrica utilizada não é fatorizável e a parte quadridimensional é multiplicada por um fator de “warp”, que é função da dimensão adicional,

$$ds^2 = e^{-2\sigma(\phi)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2 \quad (1.11)$$

onde x^μ são as coordenadas em quatro dimensões e $-\pi \leq \phi \leq \pi$ é a coordenada para a quinta dimensão que é compacta. Mostraremos nessa seção, que partindo das equações de Einstein podemos encontrar uma solução métrica para o bulk e dessa forma resolver o problema da hierarquia nesse modelo.

Abordaremos em seguida o modelo RS-2 [10], necessário à cosmologia pois recupera a gravidade em quatro dimensões, sendo realizado através de mecanismos de localização do campo gravitacional sobre a 3-brana. Veremos que a configuração de duas branas no cenário RS-1 pode ser alterada introduzindo a ideia de uma dimensão extra de tamanho infinito. No cenário RS-2 o uso de uma métrica não-fatorizável com uma dimensão extra estendida foi o ponto chave utilizado como uma alternativa à compactificação. Partindo da métrica

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (1.12)$$

realizaremos uma perturbação a fim de encontrarmos as equações de movimento para o gráviton e a partir disso efetuaremos a localização do seu modo não massivo. Em seguida, iremos

encontrar uma correção para o potencial newtoniano entre duas partículas massivas com base nos modos massivos gravitacionais.

No capítulo seguinte analisaremos o modelo Gherghetta-Shaposhnikov GS [7] que constitui no modelo-base de nossa pesquisa. Esse capítulo irá nos servir para generalizarmos cenários de defeitos tipo corda em geometrias seis dimensionais. Esse modelo, ao contrário do cenário Randall-Sundrum (que possui uma dimensão extra e como topologia uma parede de domínio em um espaço plano), apresenta duas dimensões extras, possibilitando dessa forma um espaço curvo em torno do defeito tipo corda. O modelo GS trata de um estudo sistemático de localização da gravidade em uma geometria não-fatorizável em seis dimensões, onde o nosso universo observável é representado por uma brana 4-dimensional e as outras duas são dimensões extras, sendo uma delas compacta. A topologia do modelo GS e a nossa é do tipo corda. A origem dos defeitos topológicos é explicada de forma natural pela quebra espontânea de simetria descrita em vários modelos e teorias utilizadas na construção do modelo padrão das interações fundamentais (interações eletrofracas e interação nuclear forte) [11]. Em princípio existem três tipos de defeitos topológicos, que são as paredes de domínio (5D), as cordas (6D) e os monopólos magnéticos (7D), sendo que os dois primeiros são extensos podendo cruzar o universo. Contudo durante o processo de formação, os monopólos se aniquilaram com os anti-monopólos e as paredes de domínio teriam se dissipado na forma de radiação gravitacional. Desta forma apenas as cordas permaneceram estáveis até os dias de hoje influenciando na evolução do universo. O modelo GS apresenta uma métrica cilíndrica não-fatorizável 6-dimensional com duas dimensões extras sendo uma delas compacta. Nós resolveremos as equações de Einstein e em seguida, mostraremos que o referido modelo exibe uma constante cosmológica negativa. A fim de encontrarmos as equações de movimento para o gráviton, realizaremos primeiro uma perturbação na métrica de fundo e em seguida faremos uma separação de variáveis para obtermos uma equação que nos forneça o espectro de massa para efetuarmos a localização da gravidade. Por fim, estudaremos as correções para o potencial newtoniano devido a presença dos modos massivos gravitacionais e, em seguida, faremos uma análise das tensões da corda desse modelo.

No último capítulo do nosso trabalho dissertativo, apresentaremos uma extensão do modelo GS [7] através da introdução de um parâmetro adimensional na geometria não-fatorizável 6-dimensional. Neste novo cenário encontraremos as equações de Einstein linearizadas para a geometria de fundo, onde escreveremos as equações de movimento para as flutuações da métrica para encontrarmos as equações de movimento para o gráviton nesse novo cenário. Faremos uma separação de variáveis e encontraremos uma equação do tipo Sturm-Liouville para, em seguida, localizarmos do modo-zero gravitacional. Mostraremos também que tal equação de movimento se reduz ao caso do modelo GS quando fazemos esse parâmetro igual a 0. Verificaremos o que

muda nesse novo cenário com a introdução desse parâmetro de “extensão” na localização dos modos não massivos gravitacionais com respeito ao modelo GS. Retornaremos às equações de Einstein para analisarmos as novas propriedades geométricas e físicas da geometria escolhida, o sinal da constante cosmológica, o comportamento assintótico e analisaremos as componentes de tensão da corda, para verificarmos no que diferencia do modelo GS devido a introdução desse novo parâmetro. Com a introdução desse novo parâmetro pretendemos sistematizar um novo cenário de branas tipo corda em seis dimensões.

2 Modelo Randall-Sundrum

Introduziremos neste capítulo [9] muitos dos conceitos que serão explorados e desenvolvidos neste trabalho. Trataremos aqui do modelo de Randall-Sundrum [9-10], por se tratar de um modelo que serve de base para a construção de nossa proposta de trabalho. Antes de efetivamente discutirmos o modelo, comentaremos uma das principais motivações para discutirmos modelos de dimensões extras, que é a questão do problema da hierarquia de gauge.

2.1 A Hierarquia de Gauge

O modelo padrão da física das partículas elementares é atualmente o melhor modelo para se descrever a física das partículas e de suas interações. Contudo, o modelo padrão apresenta um número muito grande de parâmetros livres [12]. Estes parâmetros são quantidades impostas ao modelo de forma a termos uma concordância entre teoria e experimento. Um exemplo é um dos problemas que estamos interessados referente às massas dos bósons de Higgs em modelos de grande unificação. Sabemos que o modelo padrão necessita de mecanismos de quebra espontânea de simetria. Em tais modelos se faz necessário postular a existência de uma partícula, denominada de bóson de Higgs, que tem como objetivo gerar massa para as partículas do Modelo Padrão. Contudo, a própria massa da partícula de Higgs constitui um parâmetro livre (a massa do bóson de Higgs deve adequar o modelo a experiência). Nos modelos de grande unificação são necessários dois bósons de Higgs com suas respectivas massas. Um dos bósons deve possuir massa da ordem de $M_{\text{eletrofraca}} \sim 1 \text{ TeV}$ enquanto que o outro deve possuir uma massa da ordem de $M_{\text{Planck}} \sim 10^{16} \text{ TeV}$. A hierarquia entre estas duas escalas de massas deve ser exatamente esta por razões puramente experimentais para produzir efeitos físicos observáveis em baixas energias. Modelos baseados em física de dimensões extras, tem como um de seus objetivos, gerar essa hierarquia de massas. Em particular, analisaremos cenários que tratam o nosso universo contido em um espaço-tempo 4-dimensional mergulhado em espaços de dimensões mais altas. Discutiremos primeiramente o cenário de Arkani-Hamed-Dimopoulos-Dvali (ADD) [8] para em seguida analisarmos os dois cenários de Randall-Sundrum (RS) [9-10].

2.2 O cenário de Arkani-Hamed-Dimopoulos-Dvali (ADD)

O conceito de dimensões extras compactas de raio microscópico foi inicialmente confrontado pelas ideias de Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali [8] sobre a vantagem de considerar dimensões extras compactas de raio macroscópico. O modelo tem como principal propósito solucionar o problema de hierarquia. O modelo ADD considera $M_{\text{eletrofraca}}$ como a escala fundamental do modelo, de tal forma que a escala de massa de Planck M_{Planck} deve ser gerada a partir da escala de massa eletrofraca $M_{\text{eletrofraca}}$. Observamos que esse cenário contém apenas uma brana que simula o nosso universo 4-dimensional, admitindo-se a existência de d dimensões extras compactas. Vamos agora calcular a dependência de M_{Planck} em $D = 4$ com a geometria das dimensões extras. O modelo ADD considera que a geometria do espaço é fatorizável da seguinte forma:

$$ds_d^2 = ds_4^2 - ds_{d-4}^2. \quad (2.1)$$

A métrica desse espaço-tempo d -dimensional foi separada em duas partes, uma que constitui a métrica do universo 4-dimensional e a outra métrica um espaço de dimensões extras. Tomemos agora a ação de Einstein-Hilbert para o campo gravitacional em d dimensões:

$$S = \frac{c^3}{16\pi G_d} \int d^d x \sqrt{-g_d} R_d. \quad (2.2)$$

Na equação (2.2), c é a velocidade da luz, R_d é o escalar de Ricci em d dimensões, g_d é o determinante da métrica em d dimensões e G_d é a constante gravitacional de Newton em d dimensões. Como as dimensões extras são todas compactas podemos integrá-las na equação (2.2) para obtermos

$$S = \frac{c^3}{16\pi G_4} \int d^4 x \sqrt{-g_4} R_4, \quad (2.3)$$

onde $G_4 = \frac{G_d}{V_{d-4}}$ é a constante da gravitação de Newton em um espaço-tempo 4-dimensional e V_{d-4} é o volume do espaço-tempo em $(d-4)$ -dimensional. Um importante resultado do modelo ADD é do acoplamento gravitacional 4-dimensional dado por

$$M_{\text{Planck}}^2 = M_{\text{Planck}(4+n)}^{n+2} R^n. \quad (2.4)$$

Se fizermos $M_{\text{Planck}(4+n)}^{n+2} \sim M_{\text{eletrofraca}}$, onde $M_{\text{eletrofraca}} = 1 \text{ TeV}$ e sabendo que M_{Planck} é da ordem de 10^{16} TeV e se escolhermos um $n = 1$, encontraremos um valor de $R \sim 10^{13} \text{ cm}$, o que deve ser descartado para não haver nenhuma discordância entre teoria e o que é observado na gravitação newtoniana para essa distância. Contudo, se escolhermos um valor de $n = 2$, R assume um valor da ordem de milímetros, um resultado razoável do ponto de vista fenomenológico. A conclusão que podemos chegar é que o referido modelo consegue estabe-

lecer uma hierarquia entre M_{Planck} e a $M_{\text{eletrofraca}}$ usando a geometria do espaço-tempo. Neste cenário o campo gravitacional pode em princípio se propagar para as dimensões extras, contudo os campos do Modelo Padrão devem ficar presos (localizados) em uma variedade quadridimensional.

Apesar do modelo ADD solucionar o problema da hierarquia entre as escalas de Planck e eletrofraca, introduz uma nova hierarquia entre as escalas eletrofraca e de compactificação. A resposta para esse problema encontra-se em um outro cenário de dimensões extras: o cenário de Randall-Sundrum. Na literatura o cenário de Randall-Sundrum é apresentado em dois tipos. No cenário de Randall-Sundrum tipo-1 (RS-1) temos uma solução para o problema da hierarquia. O segundo tipo, denominado de cenário de Randall-Sundrum tipo-2 (RS-2) mostra como localizar campo gravitacional em uma das branas do modelo. Na próxima seção iremos apresentar o cenário RS-1 e na seção seguinte o cenário RS-2.

2.3 O cenário Randall-Sundrum tipo-1 (RS-1)

Embora haja uma série de trabalhos precursores em dimensões extras, o modelo de Randall-Sundrum tipo-1 (RS-1) [9] apresenta uma solução bem mais simples em relação a teorias que modelam o nosso universo em uma brana mergulhada em dimensões mais altas [13]. Isso se deve a alguns fatores, dentre os quais nos destacaremos os seguintes: 1. tal modelo apresenta uma característica típica na pesquisa em Física - a simplicidade; 2. a existência de apenas uma dimensão extra não microscópica compactificada; 3. uma variedade de simetria \mathbb{Z}_2 na qual pontos opostos da quinta dimensão são identificados; 4. duas membranas localizadas em pontos diametralmente opostos dessa variedade; 5. solução das equações de campo de Einstein em cinco dimensões em uma geometria não fatorizável; 6. a geometria do bulk não é mais considerada plana. Em vez disso adota-se uma geometria 5-dimensional anti-de Sitter; 7. apresenta uma possível solução para o problema da hierarquia (diz respeito ao gap de energia existente entre as intensidades relativas das interações fundamentais) que determina a escala eletrofraca a partir da escala de Planck. Iremos agora apresentar o modelo. A maneira comum de apresentação do modelo RS-1 é via a exposição de seu setup inicial consistindo de um ansatz métrico 5-dimensional, com duas 3-branas (branas 4-dimensionais em que uma é espelho da outra) em que uma delas modela o nosso universo. Identificamos uma periodicidade, digamos ϕ , da dimensão extra de simetria Z_2 , de tal forma que identificamos (x^μ, ϕ) com $(x^\mu, -\phi)$. Onde $x^\mu (\mu = 0, \dots, 3)$ representa as dimensões não-compactas e ϕ é a dimensão extra compacta. As 3-branas são tais que suportam os campos do modelo padrão da física das partículas elementares e se localizam nos pontos extremos da dimensão extra angular $\phi = -\pi$ e $\phi = \pi$. Se

G_{MN} ($M = 0, \dots, 4, \phi$) for a métrica para todo o bulk, poderemos escrever

$$g_{\mu\nu}^{\text{vis}} = G_{\mu\nu}(x^\mu, \phi = \pi), \quad (2.5)$$

$$g_{\mu\nu}^{\text{com}} = G_{\mu\nu}(x^\mu, \phi = 0), \quad (2.6)$$

onde o sobre-escrito *vis* indica a métrica da brana visível e o sub-escrito *com* indica a métrica da brana companheira. Nesse modelo nosso universo observável é representado por uma brana 4-dimensional (brana visível). Para o sistema em questão a ação clássica de Einstein-Hilbert é escrita da seguinte forma:

$$S = S_{\text{gravidade}} + S_{\text{vis}} + S_{\text{com}}, \quad (2.7)$$

onde a ação da gravidade é dada por

$$S_{\text{gravidade}} = \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{-G} [-\Lambda + 2M^3 R], \quad (2.8)$$

e a ação das branas visível e companheira são dadas respectivamente por

$$S_{\text{vis}} = \int d^4x \sqrt{-g_{\text{vis}}} [\mathcal{L}_{\text{vis}} + V_{\text{vis}}], \quad (2.9)$$

$$S_{\text{com}} = \int d^4x \sqrt{-g_{\text{com}}} [\mathcal{L}_{\text{com}} + V_{\text{com}}], \quad (2.10)$$

onde \mathcal{L} significa densidade de lagrangiana. Do princípio variacional encontramos as equações de campo de Einstein 5-dimensional:

$$\begin{aligned} \sqrt{-G} \left(R_{MN} - \frac{1}{2} G_{MN} R \right) = & -\frac{1}{4M^3} \left[\Lambda \sqrt{-G} G_{MN} + V_{\text{vis}} \sqrt{-g_{\text{vis}}} g_{\mu\nu}^{\text{vis}} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(\phi - \pi) \right] \\ & + V_{\text{com}} \sqrt{-g_{\text{com}}} g_{\mu\nu}^{\text{com}} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(\phi). \end{aligned} \quad (2.11)$$

O primeiro termo do lado direito refere-se a constante cosmológica do bulk. Este termo desempenha um papel fundamental na determinação do tipo de geometria do espaço-tempo. Os outros dois termos são advindos das próprias branas, onde a fonte gravitacional é proveniente da energia de vácuo constante das branas. A presença das funções delta de Dirac são importantes no estudo dos mecanismos de localização das branas.

A métrica de fundo utilizada no modelo RS-1 [9] é não-fatorizável, no qual a métrica de Minkowski é multiplicada por um fator de “warp”, que é um fator exponencial função apenas da dimensão extra. O ansatz métrico é dado por:

$$ds^2 = e^{-2\sigma(\phi)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2, \quad (2.12)$$

onde x^μ são as coordenadas em quatro dimensões e $-\pi \leq \phi \leq \pi$ é a coordenada da quinta

dimensão determinada pelo raio de compactificação r_c . O modelo RS1 assume que esse raio de compactificação, que dá a distância entre as branas, é constante. Entretanto tal modelo não leva em consideração a retroação da própria brana atuando como fonte.

Como foi dito a métrica proposta é um exemplo de geometria não-fatorizável, ou seja, devido ao fato do fator de “warp” depender apenas da coordenada extra, não é possível escrever a geometria desse espaço-tempo como $M^4 \times \mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2$ com M^4 representando o espaço de Minkowski.

Para resolvermos as equações de Einstein seguiremos a notação usual da Teoria da Relatividade Geral. Pode-se definir uma quantidade fundamental para deslocamentos paralelos em uma determinada variedade [4], a conexão afim

$$\Gamma^C_{MN} = \frac{1}{2}G^{CA}(\partial_N G_{MA} + \partial_M G_{AN} - \partial_A G_{MN}), \quad (2.13)$$

também conhecida como símbolos de Christoffel. Com base na conexão afim podemos construir o tensor de curvatura de Riemann R^C_{MDN} , um tensor de quatro índices que dá a curvatura de uma variedade [4]. Este tensor é calculado da seguinte forma:

$$R^C_{MDN} = \partial_N \Gamma^C_{MD} - \partial_M \Gamma^C_{DN} + \Gamma^E_{MD} \Gamma^C_{EN} - \Gamma^E_{ND} \Gamma^C_{EM}. \quad (2.14)$$

Este tensor dá origem a novos tensores que estão relacionados com a curvatura: o tensor de Ricci $R_{MN} = R^C_{MCN}$, obtido contraindo dois índices do tensor de Riemann, e o escalar de Ricci $R = g^{MN} R_{MN}$ [4]. Calculamos o tensor de Ricci mediante a seguinte expressão

$$R_{MN} = \partial_A \Gamma^A_{MN} - \partial_N \Gamma^A_{AM} + \Gamma^A_{MN} \Gamma^C_{AC} - \Gamma^C_{MA} \Gamma^A_{NC}, \quad (2.15)$$

onde as conexões são calculadas com o auxílio da expressão (2.13) e os índices latinos maiúsculos MN pertencem ao bulk e variam de 0 a 4.

Resolveremos agora as equações de Einstein percebendo que de acordo com (2.13), as únicas componentes não nulas são:

$$\Gamma^4_{00} = -\frac{\sigma'}{r_c^2} e^{-2\sigma}, \quad (2.16)$$

$$\Gamma^4_{11} = \Gamma^4_{22} = \Gamma^4_{33} = \frac{\sigma'}{r_c^2} e^{-2\sigma}, \quad (2.17)$$

$$\Gamma^0_{04} = \Gamma^1_{14} = \Gamma^2_{24} = \Gamma^3_{34} = -\sigma', \quad (2.18)$$

onde $\sigma' = \partial\sigma/\partial\phi$. De posse dessas conexões, as equações de Einstein (2.11) fornecem

$$6(\sigma')^2 = -\frac{\Lambda r_c^2}{4M^3}, \quad (2.19)$$

$$\frac{3\sigma''}{r_c^2} = \frac{V_{com}}{4M^3 r_c} \delta(\phi) + \frac{V_{vis}}{4M^3 r_c} \delta(\phi - \pi). \quad (2.20)$$

A solução da equação (2.19), consistente com a simetria \mathbb{Z}_2 , é

$$\sigma = r_c |\phi| \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}}. \quad (2.21)$$

Observe que o espaço-tempo entre as duas 3-branas deve satisfazer a condição $\Lambda < 0$, ou seja, a geometria do espaço-tempo deve ser anti-de Sitter em cinco dimensões (AdS_5). Esse resultado é fenomenologicamente interessante, visto que ele representa um universo em expansão. Além disso, uma das grandes utilidades em física dessa geometria é a chamada correspondência AdS - CFT [14] onde a teoria das cordas num background em AdS 5-dimensional é equivalente a uma teoria de gauge no espaço de Minkowski em 4 dimensões. Essa dualidade envolve a constante de acoplamento da teoria de gauge com a constante gravitacional. O espaço AdS é uma variedade Lorentziana maximalmente simétrica com curvatura escalar constante e negativa. A derivada primeira de (2.21), nos fornece

$$\sigma' = 2r_c \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}} [\delta(\phi) - \delta(\phi - \pi)]. \quad (2.22)$$

De posse desse resultado, percebemos que obtemos uma solução para a equação (2.20)

$$V_{com} = -V_{vis} = 24M^3 k, \quad (2.23)$$

$$\Lambda = -24M^3 k^2, \quad (2.24)$$

onde k é uma constante de proporcionalidade. A hierarquia será tomada em termos do produto kr_c . A solução métrica do bulk passa a ser dada por

$$ds^2 = e^{-2kr_c|\phi|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2. \quad (2.25)$$

Voltamos agora nossa atenção para o problema da hierarquia. A ação para o campo de Higgs fundamental na brana visível é dada por

$$S_{vis} \supset \int d^4x \sqrt{-g^{vis}} [g^{\mu\nu} D_\mu \phi^\dagger D_\nu \phi - \lambda(|\phi|^2 - v^2)^2], \quad (2.26)$$

onde λ é o parâmetro de auto-acoplamento para o campo de Higgs v o parâmetro de massa de

quebra espontânea de simetria. De posse da equação (2.5) a ação S_{vis} , torna-se

$$S_{vis} \supset \int d^4x e^{-4kr_c\pi} [\eta^{\mu\nu} e^{2kr_c\pi} D_\mu \phi^\dagger D_\nu \phi - \lambda(|\phi|^2 - v^2)^2], \quad (2.27)$$

após uma renormalização da função de onda, $\phi \rightarrow e^{kr_c\pi} \phi$, obtemos

$$S_{vis} \supset \int d^4x [\eta^{\mu\nu} D_\mu \phi^\dagger D_\nu \phi - \lambda(|\phi|^2 - e^{-2kr_c\pi} v^2)^2]. \quad (2.28)$$

Observamos que as escalas de massas físicas são dadas pela escala de quebra de simetria,

$$v \equiv e^{-kr_c\pi} v_0. \quad (2.29)$$

Qualquer parâmetro de massa m_0 medido sobre a 3-brana visível corresponde a uma massa física dada por

$$m \equiv e^{-kr_c\pi} m_0. \quad (2.30)$$

Iremos agora apresentar o outro cenário, RS-2 [10], obtido via aplicação do limite $r_c \rightarrow \infty$ resultando em uma única 3-brana com dimensão extra estendida.

2.4 O cenário Randall-Sundrum tipo-2 (RS-2)

A configuração de duas branas no cenário RS-1 [9] pode ser alterada introduzindo a ideia de uma dimensão extra de tamanho infinito. Para compreendermos melhor o cenário RS-2 [10] podemos relembrar o cenário ADD [8], onde, para evitarmos conflitos com a observação em cenários de dimensões extras, todos os campos do modelo padrão foram confinados em uma 3-brana. Vimos que essa ideia não se aplica a gravidade, que sendo identificada com a própria estrutura da geometria do espaço-tempo, pode propagar-se por todas as dimensões. De fato se não queremos ir de encontro com as observações devemos considerar apenas dimensões extras compactas e milimétricas. Contudo, no cenário RS-2 [10] o uso de uma métrica não-fatorizável com uma dimensão extra estendida foi o ponto chave utilizado como uma alternativa a essa compactificação. A métrica do modelo RS-2 é dada por

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2 \quad (2.31)$$

Para localizarmos a gravidade em nossa brana, devemos primeiramente efetuar uma perturbação na métrica de fundo de $h_{\mu\nu}(x, y)$ para em seguida separarmos as variáveis. A equação de

movimento que encontramos depois desse processo é a seguinte

$$\left[\frac{-m^2}{2} e^{2k|y|} - \frac{1}{2} \partial_y^2 - 2k\delta(y) + 2k^2 \right] \psi(y) = 0. \quad (2.32)$$

Com o uso dessa última equação verificamos que o modo não-massivo para o gráviton é localizado na 3-brana.

Outro ponto importante, é que, mesmo com $r_c \rightarrow \infty$ a relação entre as escalas de Planck na brana e no bulk é bem definida, tornando o modelo RS-2, útil na solução do problema da hierarquia.

Uma das principais constatações do modelo RS-2 surge na correção para o potencial gravitacional newtoniano entre duas partículas de massas m_1 e m_2 na brana

$$V(r) = G_N \frac{m_1 m_2}{r} \left(1 + \frac{1}{r^2 k^2} \right). \quad (2.33)$$

Como k é da ordem da escala de Plank, a correção $\frac{1}{r^2 k^2}$ é extremamente suprimida, dando lugar ao potencial gravitacional newtoniano conhecido.

3 Modelo Gherghetta-Shaposhnikov

Neste capítulo analisaremos o modelo Gherghetta-Shaposhnikov (GS) [7], que irá nos servir para generalizarmos cenários de defeitos tipo corda em geometrias seis dimensionais. Esse modelo, ao contrário do cenário Randall-Sundrum [9-10] (que possui uma dimensão extra e como topologia uma parede de domínio em um espaço plano), apresenta duas dimensões extras, possibilitando dessa forma um espaço curvo em torno do defeito tipo corda. O modelo GS trata de um estudo sistemático de localização da gravidade em uma geometria não-fatorizável em seis dimensões, onde o nosso universo observável é representado por uma brana 4-dimensional e as outras duas são dimensões extras, sendo uma delas compacta, exibindo um exemplo onde ocorre localização de gravidade. Desde então tem se argumentado que para observarmos o comportamento usual da gravidade em quatro dimensões, tais dimensões devam estar compactificadas e a localização da gravidade mostra-se como uma alternativa a essa compactificação. De forma similar ao modelo RS, no cenário GS encontra-se um modo-zero normalizável para o gráviton, e observamos uma violação da lei de Newton devido a presença de modos gravitacionais no bulk, contribuindo dessa forma, em uma correção da ordem de $1/r^3$ no potencial newtoniano [7]. A hierarquia entre a escala de Planck 4-dimensional e a escala de Plank 6-dimensional pode ser obtida de maneira semelhante ao modelo ADD. Partiremos da ação de Einstein-Hilbert para o campo gravitacional com constante cosmológica Λ . Em seguida, com a escolha de uma geometria de fundo não-fatorizável em $D = 6$ encontraremos as equações de campo de Einstein. Uma vez encontrada as equações de movimento para o campo gravitacional, escreveremos as equações de movimento para as flutuações da métrica. Por fim, faremos a localização do modo não-massivo do campo gravitacional, relacionaremos as escalas gravitacionais de massas, retornaremos às equações de Einstein para verificarmos o sinal da constante cosmológica, analisaremos os defeitos tipo corda e, em seguida, estudaremos a localização dos modos massivos para o gráviton, bem como a correção para o potencial newtoniano.

3.1 Equações de Einstein para o campo gravitacional em seis dimensões no modelo GS

No modelo GS estudaremos localização de gravidade em uma 3-brana com estrutura específica (defeito do tipo corda local) em um espaço-tempo seis dimensional com constante cosmológica negativa. Inicialmente tomemos a ação de Einstein-Hilbert para o campo gravitacional com constante cosmológica Λ :

$$S = \frac{1}{K_6^2} \int_{\mathcal{M}_6} d^6x \sqrt{-G} (R - 2\Lambda), \quad (3.1)$$

onde $K_6^2 = \frac{8\pi}{M_6^4}$, M_6^4 é a massa de Planck no bulk, G é o determinante da métrica em todo o espaço-tempo e R é o escalar de Ricci. O modelo GS apresenta o seguinte ansatz para a métrica de fundo:

$$ds_6^2 = \sigma(r) g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dr^2 - \gamma(r) d\theta^2, \quad (3.2)$$

onde r e θ pertencem respectivamente aos seguintes intervalos $[0, \infty)$ e $[0, 2\pi]$. Essa métrica nos mostra que as dimensões extras possuem simetria cilíndrica ou axisimétrica em relação a brana e por isso ela é chamada tipo corda. Em [15] é exibida uma solução métrica estática simetricamente cilíndrica em um modelo Higgs abeliano. Como veremos, o fator métrico γ irá introduzir um déficit angular resultando em uma solução globalmente cônica. Aplicando o princípio variacional na ação (3.1) encontramos as equações de campo de Einstein em $D = 6$:

$$R_{AB} - \frac{R}{2} g_{AB} = \frac{1}{M_6^4} (\Lambda g_{AB} + T_{AB}). \quad (3.3)$$

Calculando os símbolos de Christoffel e em seguida o tensor de curvatura de Ricci, encontramos o escalar de curvatura dado por

$$R = \frac{1}{\sigma} \tilde{R} + \frac{4\sigma''}{\sigma} - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 + \frac{2\sigma' \gamma'}{\sigma \gamma} + \frac{\gamma''}{\gamma} + \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2, \quad (3.4)$$

onde \tilde{R} é o escalar de curvatura na brana. O modelo GS assume que as componentes não nulas do tensor momento-energia são dadas por: $T_\nu^\mu = f_0(r) \delta_\nu^\mu$, $T_r^r = f_r(r)$ e $T_\theta^\theta = f_\theta(r)$, onde as funções de fonte f_0 , f_r e f_θ , dependem unicamente da coordenada radial r . Assumiremos também que as soluções são invariantes de Poincaré em $D = 4$. Usando o ansatz métrico de simetria cilíndrica (3.2) e o tensor momento-energia T_{AB} , encontramos o seguinte sistema de

equações diferenciais:

$$\frac{3}{2} \frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{3}{4} \frac{\sigma' \gamma'}{\sigma \gamma} - \frac{1}{4} \frac{\gamma'^2}{\gamma^2} + \frac{1}{2} \frac{\gamma''}{\gamma} = -\frac{1}{M_6^4} [\Lambda + f_0(r)] + \frac{1}{M_p^2} \frac{\Lambda_{\text{phys}}}{\sigma}, \quad (3.5)$$

$$\frac{3}{2} \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} + \frac{\sigma' \gamma'}{\sigma \gamma} = -\frac{1}{M_6^4} [\Lambda + f_r(r)] + \frac{1}{M_p^2} \frac{2\Lambda_{\text{phys}}}{\sigma}, \quad (3.6)$$

$$2 \frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} = -\frac{1}{M_6^4} [\Lambda + f_\theta(r)] + \frac{1}{M_p^2} \frac{2\Lambda_{\text{phys}}}{\sigma}, \quad (3.7)$$

onde $\sigma' = \partial\sigma/\partial r$, $\gamma' = \partial\gamma/\partial r$ e Λ_{phys} representa a constante cosmológica física 4-dimensional. A equação de Einstein na brana é dada por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{1}{M_p^2} (\Lambda_{\text{phys}} g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}). \quad (3.8)$$

No modelo GS temos os seguintes fatores de “warp”:

$$\sigma(r) = e^{-cr}, \quad (3.9)$$

$$\gamma(r) = R_0^2 \sigma(r); \quad (3.10)$$

portanto, a métrica do espaço-tempo poderá ser escrita da seguinte forma:

$$ds_6^2 = e^{-cr} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dr^2 - R_0^2 e^{-cr} d\theta^2, \quad (3.11)$$

e o escalar de Ricci fica sendo dado por:

$$R = \tilde{R} e^{cr} + \frac{15c^2}{2} \quad (3.12)$$

sendo R_0 uma escala de comprimento arbitrária. Considerando soluções de vácuo, temos que $\tilde{R} = 0$, ou seja, a nossa brana é minkowskiana o que implica que o escalar de curvatura no bulk é constante e igual a $15/2 c^2$ o que os leva a afirmar que

$$T_\nu^\mu = f_0(r) \delta_\nu^\mu = 0, \quad (3.13)$$

o que implica $R = 0$, portanto $\Lambda_{\text{phys}} = 0$. Substituindo as equações (3.9) e (3.10) em (3.5), (3.6) e (3.7), encontramos um sistema de três equações algébricas:

$$\frac{5}{2}c^2 = -\frac{1}{M_6^4}[\Lambda + f_0(r)] + \frac{1}{M_p^2}\Lambda_{\text{phys}}e^{cr}, \quad (3.14)$$

$$\frac{5}{2}c^2 = -\frac{1}{M_6^4}[\Lambda + f_r(r)] + \frac{1}{M_p^2}2\Lambda_{\text{phys}}e^{cr}, \quad (3.15)$$

$$\frac{5}{2}c^2 = -\frac{1}{M_6^4}[\Lambda + f_\theta(r)] + \frac{1}{M_p^2}2\Lambda_{\text{phys}}e^{cr}. \quad (3.16)$$

Considerando soluções de vácuo $T_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu f_0(r) = 0$, notamos que as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$T_r^r = f_r(r) = 0, \quad (3.17)$$

$$T_\theta^\theta = f_\theta(r) = 0, \quad (3.18)$$

o que nos leva ao seguinte resultado:

$$c = \sqrt{\frac{2(-\Lambda)}{5M_6^4}}. \quad (3.19)$$

Claramente, a solução com exponencial negativa requer uma constante cosmológica negativa, o que nos leva a concluir, que a geometria do espaço-tempo do modelo GS, é do tipo AdS_6 , uma vez que, nesse cenário, o escalar de curvatura é constante.

3.2 Localização de gravidade no modelo GS

Iremos agora estudar localização de gravidade em uma 3-brana considerando uma geometria 6-dimensional. Em [16], encontramos também um exemplo de localização de gravidade em uma geometria 6-dimensional. Partiremos agora das equações de movimento para as flutuações da métrica linearizadas. Nos concentraremos unicamente na localização dos modos de spin-2 e não consideraremos os modos escalares, os quais são necessários ao estudo do encurvamento da brana. Para as flutuações da forma

$$h_{\mu\nu}(x, z) = \Phi(z)h_{\mu\nu}(x), \quad (3.20)$$

onde $z = (r, \theta)$ e $\partial^2 h_{\mu\nu}(x) = m_0^2 h_{\mu\nu}(x)$, nós podemos separar as variáveis usando a seguinte definição:

$$\Phi(z) = \sum_{lm} \phi_m(r)e^{il\theta}. \quad (3.21)$$

Os modos radiais satisfazem a seguinte equação:

$$-\frac{e^{3r/2}}{R_0} \partial_r [\sigma^2 \sqrt{\gamma} \partial_r \phi_m] = m^2 \phi_m, \quad (3.22)$$

onde $m_0^2 = m^2 + l^2/R_0^2$ dizem respeito às contribuições do momento angular orbital l . São impostas as seguintes condições de contorno para a função ϕ_m (espera-se que no contorno do espaço o campo tenha a mesma simetria que na origem):

$$\phi'_m(0) = \phi'_m(\infty) = 0, \quad (3.23)$$

onde os modos ϕ_m satisfazem a condição de ortonormalidade

$$\int_0^\infty dr e^{-cr} R_0 e^{-cr/2} \phi_m^* \phi_n = \delta_{mn}. \quad (3.24)$$

Usando a solução específica (3.9) e (3.10) na equação (3.22) e separando as variáveis, encontramos a seguinte equação diferencial

$$\phi_m'' - \frac{5}{2} c \phi_m' + m^2 e^{cr} \phi_m = 0, \quad (3.25)$$

com $\phi_m' = d\phi_m/dr$. Quando $m = 0$ nós verificamos claramente que $\phi_0(r) = \text{constante}$ é uma solução. O modo-zero satisfaz a seguinte condição de ortonormalização

$$R_0 \int_0^\infty dr e^{-3/2cr} \phi_m^* \phi_n = \delta_{mn}. \quad (3.26)$$

A função de onda no espaço plano pode ser definida da seguinte forma

$$\psi_m = e^{-3/4cr} \phi_m. \quad (3.27)$$

Para o modo zero, a função de onda é então obtida através da equação abaixo

$$\psi_0(r) = \sqrt{\frac{3c}{2R_0}} e^{-3/4cr}, \quad (3.28)$$

o que mostra que o modo-zero gravitacional é localizado próximo a origem $r = 0$ e normalizável. A figura (3.1) nos mostra a localização do modo não massivo do gráviton. A expressão geral da massa de Planck na brana M_p expressa em termos da massa de Planck no bulk M_6 , é

$$M_p^2 = 2\pi M_6^4 R_0 \int_0^\infty dr e^{-3/2cr}. \quad (3.29)$$

Como a integral (3.29) converge, isso implica, que o volume do espaço transversal é finito. Analisaremos agora como os modos massivos do gráviton modificam o potencial gravitacional newtoniano na 3-brana. Para calcularmos essa contribuição temos que necessariamente obter a

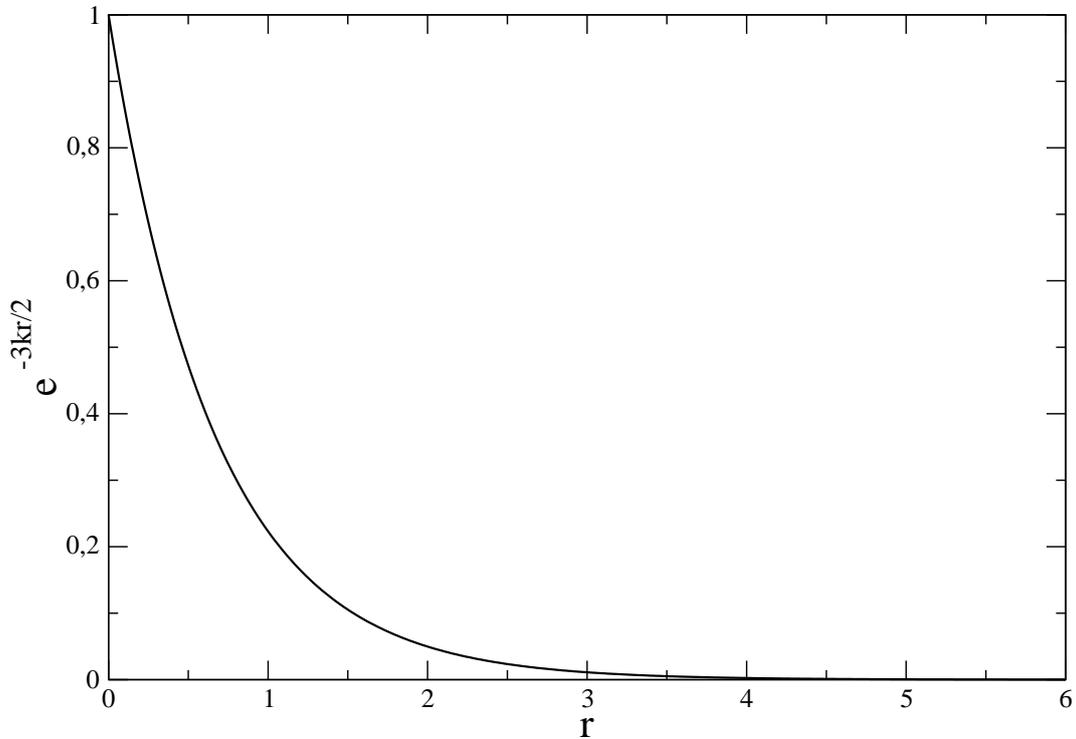


Figura 3.1: Localização do modo-zero gravitacional no modelo GS

função de onda para os modos massivos na origem. Os autovalores dos modos massivos podem ser obtidos impondo as condições de contorno (3.23) sobre as soluções da equação diferencial (3.25). As soluções de (3.25) para os modos massivos são dadas por

$$\phi_m(r) = e^{(5/4)cr} \left[C_1 J_{5/2} \left(\frac{2m}{c} e^{c/2r} \right) + C_2 Y_{5/2} \left(\frac{2m}{c} e^{c/2r} \right) \right], \quad (3.30)$$

onde C_1 e C_2 são constantes e $J_{5/2}$ e $Y_{5/2}$ são as funções de Bessel que podem ser expressas em termos das funções elementares. No limite em que $r \rightarrow \infty$, as soluções para os modos massivos crescem exponencialmente. Uma forma de controlar este tipo de comportamento é o de introduzir uma distância radial finita de corte r_{max} . Impondo as condições de contorno (3.23) para $r = r_{max}$ encontraremos um espectro discreto de massa, onde para um inteiro n suficientemente grande encontraremos

$$m_n \simeq c \left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} e^{-(c/2)r_{max}}. \quad (3.31)$$

Sobre uma 3-brana o potencial gravitacional entre duas massas pontuais m_1 e m_2 devido a

contribuição dos modos discretos massivos é dado por

$$\Delta V(r) \simeq G_N \frac{m_1 m_2}{r} \sum_n e^{-m_n r} \frac{8}{3c^2} m_n^2 e^{-(c/2)r_{max}}, \quad (3.32)$$

onde G_N é a constante de Newton. No limite em que $r_{max} \rightarrow \infty$, o espectro discreto se converte para uma integral. A contribuição para o potencial gravitacional newtoniano será dado por

$$\Delta V(r) \simeq \frac{16G_N}{3\pi c^3} \frac{m_1 m_2}{r} \int_0^\infty dm m^2 e^{-mr} = \frac{32G_N}{3\pi c^3} \frac{m_1 m_2}{r^4}. \quad (3.33)$$

Percebemos que a correção no potencial newtoniano para o conjunto de estados contínuos no bulk decrescem com $1/r^3$.

3.3 Componentes de tensão da corda em seis dimensões no modelo GS

Iremos agora obter uma expressão para o déficit angular da corda [16-17]. Na origem, em $r = 0$, da 3-brana desse modelo, localiza-se um defeito topológico tipo corda local 4-dimensional dentro de um espaço-tempo 6-dimensional, com um tensor momento-energia T_B^A . As funções de fonte descrevem uma distribuição contínua de matéria no núcleo com raio ϵ , sendo nula para $r > \epsilon$. A solução na origem deve satisfazer as seguintes condições de contorno.

$$\sigma' |_{r=0} = 0, \quad (3.34)$$

$$\sigma |_{r=0} = 1, \quad (3.35)$$

$$(\sqrt{\gamma})' |_{r=0} = 1 \quad (3.36)$$

e

$$\gamma |_{r=0} = 0. \quad (3.37)$$

Podemos integrar sobre um disco de raio pequeno ϵ [7] contido em uma 3-brana, definindo dessa forma as componentes de tensão da corda por unidade de comprimento

$$\mu_i = \int_0^\epsilon dr \sigma^2 \sqrt{\gamma} f_i(r) \quad (3.38)$$

onde $i = 0, r$ e θ . Usando as equações (3.5), (3.6) e (3.7), obtemos as seguintes condições de contorno:

$$\sigma \sigma' \sqrt{\gamma} |_0^\epsilon = -\frac{1}{2M_6^4} (\mu_r + \mu_\theta) \quad (3.39)$$

e

$$\sigma^2(\sqrt{\gamma})' \Big|_0^\epsilon = -\frac{1}{M_6^4} \left(\mu_0 + \frac{1}{4}\mu_r - \frac{3}{4}\mu_\theta \right), \quad (3.40)$$

por analogia com os defeitos tipo corda em 4-dimensões, podemos definir $\mu_r + \mu_\theta$ como sendo a massa de Tolman por unidade de comprimento [15][18]. A equação (3.40) nos permite calcular o déficit angular da corda. As componentes da tensão da corda satisfazem a seguinte equação

$$\mu_0 = \mu_\theta + M_6^4, \quad (3.41)$$

escolhendo $\mu_r = 0$, encontramos

$$\mu_\theta = 2R_0 M_6^4 c. \quad (3.42)$$

A escala de Planck 4-dimensional é então calculada com o uso da seguinte expressão

$$M_p^2 = 2\pi R_0 M_6^4 \int_0^\infty dr \sigma^{3/2} = \frac{5\pi}{3} \frac{\mu_\theta}{-\Lambda} M_6^4. \quad (3.43)$$

Verificamos que o volume do espaço transversal é finito. A desigualdade $M_6 \ll M_p$ é possível ajustando a tensão da corda ou a constante cosmológica do bulk. Para finalizarmos, vale a pena comentar que existem outros cenários de branas em seis dimensões. Podemos citar: o caso de branas paralelas com fonte [19], e o caso de defeitos tipo corda global [18] e [20-21]. Contudo uma classe de soluções radialmente simétricas podem ser vistas em [22-23].

4 Defeitos do tipo corda em seis dimensões estendido

Para que a teoria das cordas tenha consistência é necessária a existência de dimensões extras. Apesar de não existir nenhuma evidência experimental de que o nosso universo possui mais do que quatro dimensões, teorias de dimensões extras têm sido cada vez mais usadas para resolver problemas em física de altas energias. Vimos que no modelo de dimensões extras de Kaluza-Klein (KK) foi adotada a idéia de considerar um espaço plano com cinco dimensões, sendo quatro espaciais e uma temporal. O modelo KK considera a idéia de dimensões extras compactas sendo representadas por uma esfera S^1 de raio microscópico. Vimos que o conceito de dimensões extras microscópicas foi inicialmente superado com o advento do cenário ADD [8] sobre a vantagem de considerar dimensões de raio macroscópico. Neste capítulo apresentaremos uma extensão do modelo GS [7] através da introdução de um parâmetro na geometria não-fatorizável 6-dimensional, onde o nosso universo observável é representado por uma brana 4-dimensional e as outras duas são dimensões extras, sendo uma delas compacta. Neste novo cenário encontraremos as equações de Einstein linearizadas para a geometria de fundo, onde escreveremos as equações de movimento para as flutuações da métrica e em seguida faremos a localização do modo-zero gravitacional. Por fim, retornaremos às equações de Einstein para analisarmos as propriedades geométricas e físicas da geometria escolhida, o sinal da constante cosmológica, o comportamento assintótico, e comparamos com os resultados dos defeitos do tipo corda, onde assumimos que a nossa estrutura quadridimensional local é uma topologia tipo corda dentro de um espaço-tempo 6-dimensional. Neste capítulo sistematizamos a localização da gravidade em uma geometria com duas dimensões extras, onde apenas uma é compacta, exibindo um exemplo onde ocorre localização de gravidade e obtendo esse tipo de localização através de uma extensão do modelo GS.

4.1 Equações de Einstein para o campo gravitacional em seis dimensões no cenário de defeitos do tipo corda estendido

Encontraremos um modo-zero localizado para um campo gravitacional em cenários de branas estendidas com geometria não-fatorizável 6-dimensional. Partiremos da ação de Einstein-Hilbert para o campo gravitacional com constante cosmológica Λ :

$$S = \frac{1}{K_6^2} \int_{\mathcal{M}_6} d^6x \sqrt{-G} (R - 2\Lambda), \quad (4.1)$$

onde $K_6^2 = \frac{8\pi}{M_6^4}$, M_6^4 é a escala de Planck no bulk, G é o determinante da métrica em todo o espaço-tempo e R é o escalar de Ricci. Escolhemos o seguinte ansatz para a métrica de fundo:

$$ds_6^2 = \alpha(r) \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dr^2 + \gamma(r, a) d\theta^2, \quad (4.2)$$

onde r e θ pertencem respectivamente aos intervalos $[0, \infty)$ e $[0, 2\pi]$, a é um parâmetro adimensional de extensão e denotaremos as quantidades geométricas sobre a brana por (\sim) . A métrica (4.2) representa uma família de geometrias tipo corda e a exemplo do modelo GS é uma métrica que mostra que as dimensões extras possuem simetria cilíndrica ou axisimétrica em relação a brana e por isso ela é também denominada tipo corda. Aplicando o princípio variacional na ação de Einstein-Hilbert acima encontramos novamente as equações de campo de Einstein em seis dimensões:

$$R_{AB} - \frac{R}{2} g_{AB} = \frac{1}{M_6^4} (\Lambda g_{AB} + T_{AB}), \quad (4.3)$$

onde T_{AB} é o tensor momento-energia. Assumiremos que as componentes não nulas do tensor momento-energia serão dadas por: $T_\nu^\mu = t_0(r) \delta_\nu^\mu$, $T_r^r = t_r(r)$ e $T_\theta^\theta = t_\theta(r)$, onde as funções de fonte t_0 , t_r e t_θ , dependem unicamente da coordenada radial r . Em um sistema de coordenadas local os símbolos de Christoffel são calculados da seguinte forma:

$$\Gamma^C_{MN} = \frac{1}{2} G^{CA} (\partial_N G_{MA} + \partial_M G_{AN} - \partial_A G_{MN}). \quad (4.4)$$

As únicas conexões não nulas são dadas por:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}, \quad (4.5)$$

$$\Gamma^\lambda_{r\nu} = \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{\alpha} \delta_\nu^\lambda, \quad (4.6)$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{2} \frac{\gamma'}{\gamma}, \quad (4.7)$$

$$\Gamma^r_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \alpha' \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (4.8)$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{1}{2} \gamma', \quad (4.9)$$

onde as derivadas das funções são com respeito a coordenada radial e denotado por (\prime).

As componentes do tensor de Ricci são calculadas usando a seguinte equação:

$$R_{AB} = \partial_N \Gamma^N_{AB} - \partial_A \Gamma^N_{NB} + \Gamma^M_{AB} \Gamma^N_{MN} - \Gamma^M_{NB} \Gamma^N_{MA}, \quad (4.10)$$

onde os índices latinos maiúsculos AB variam de 0 a 5. Com base nos símbolos de Christoffel obtida anteriormente, a componente do tensor de curvatura de Ricci na brana é

$$R_{\alpha\beta} = \tilde{R}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} M(r) \tilde{g}_{\alpha\beta}, \quad (4.11)$$

onde

$$M(r) = -\alpha - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\gamma'}{\gamma} \right) + \frac{(\alpha')^2}{\alpha}. \quad (4.12)$$

As componentes do tensor de curvatura de Ricci são dadas por

$$R_{rr} = \frac{D+1}{2} \left[\left(\frac{\alpha'}{\alpha} \right)^2 - \frac{\alpha''}{\alpha} \right] + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 - \frac{\gamma''}{\gamma} \right] - \frac{D+1}{4} \left(\frac{\alpha'}{\alpha} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2, \quad (4.13)$$

$$R_{\theta\theta} = -\frac{\gamma''}{2} - \frac{\gamma'}{4} \left(\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\gamma'}{\gamma} \right) + \frac{(\gamma')^2}{2\gamma} \quad (4.14)$$

onde D representa o número de dimensões espaciais. O escalar de curvatura é escrito como

$$R = g^{AB} R_{AB} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{rr} R_{rr} + g^{\theta\theta} R_{\theta\theta}, \quad (4.15)$$

portanto

$$R = \frac{1}{\alpha} \tilde{R} + \frac{4\alpha''}{\alpha} - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 + \frac{2\alpha'}{\alpha} \frac{\gamma'}{\gamma} + \frac{\gamma''}{\gamma} + \left(\frac{\alpha'}{\alpha} \right)^2. \quad (4.16)$$

De posse do tensor de Ricci R_{AB} , do escalar de Ricci R e do tensor momento-energia T_{AB}

encontramos um conjunto de equações diferenciais acopladas

$$\frac{3}{2} \frac{\alpha''}{\alpha} + \frac{3}{4} \frac{\alpha' \gamma'}{\alpha \gamma} - \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\gamma''}{\gamma} = -\frac{1}{M_6^4} [\Lambda + t_0(r)] + \frac{1}{M_p^2} \frac{\Lambda_{phys}}{\alpha}, \quad (4.17)$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\alpha'}{\alpha} \right)^2 + \frac{\alpha' \gamma'}{\alpha \gamma} = -\frac{1}{M_6^4} [\Lambda + t_r(r)] + \frac{1}{M_p^2} \frac{2\Lambda_{phys}}{\alpha}, \quad (4.18)$$

$$2 \frac{\alpha''}{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} = -\frac{1}{M_6^4} [\Lambda + t_\theta(r)] + \frac{1}{M_p^2} \frac{2\Lambda_{phys}}{\alpha}, \quad (4.19)$$

onde Λ_{phys} é a constante cosmológica 4-dimensional. Mais adiante restringiremos nossa análise para o caso em que a constante cosmológica 4-dimensional $\Lambda_{phys} = 0$. Então estudaremos soluções da forma

$$\alpha(r) = e^{-2kr} \quad (4.20)$$

e

$$\gamma(r, a) = R_0^2 \left(\frac{r}{l} \right)^{2a} e^{-2kr} \quad (4.21)$$

onde k é uma constante, R_0 é uma escala de comprimento arbitrária e a é um parâmetro de extensão. Portanto o nosso ansatz métrico fica da seguinte forma:

$$ds_6^2 = e^{-2kr} \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dr^2 + R_0^2 \left(\frac{r}{l} \right)^{2a} e^{-2kr} d\theta^2. \quad (4.22)$$

Substituindo as equações (4.20) e (4.21) na equação (4.16) ficamos com seguinte expressão para o escalar de Ricci

$$R = \tilde{R} e^{2kr} + \frac{2a(a-1)}{r^2} - \frac{8ka}{r} + 26k^2, \quad (4.23)$$

se fizermos $a = 0$, a equação acima se reduz a:

$$R = \tilde{R} e^{2kr} + 26k^2, \quad (4.24)$$

semelhante a equação (3.12) do modelo GS. Consideraremos que a 4-brana seja Minkowskiana ($\tilde{R} = 0$), portanto a equação (4.23) se reduz a:

$$R = \frac{2a(a-1)}{r^2} - \frac{8ka}{r} + 26k^2. \quad (4.25)$$

A figura (4.1) mostra uma representação gráfica da equação (4.25). Podemos observar que para o intervalo $0 < a < 1$ o escalar de curvatura é negativo próximo a origem e depois converge para um valor constante, recuperando dessa forma o modelo GS. Porém para $a = 5$ temos um exemplo em que o escalar de curvatura é positivo [24].

Para obtermos um sistema de equações algébricas precisamos da derivada primeira e da

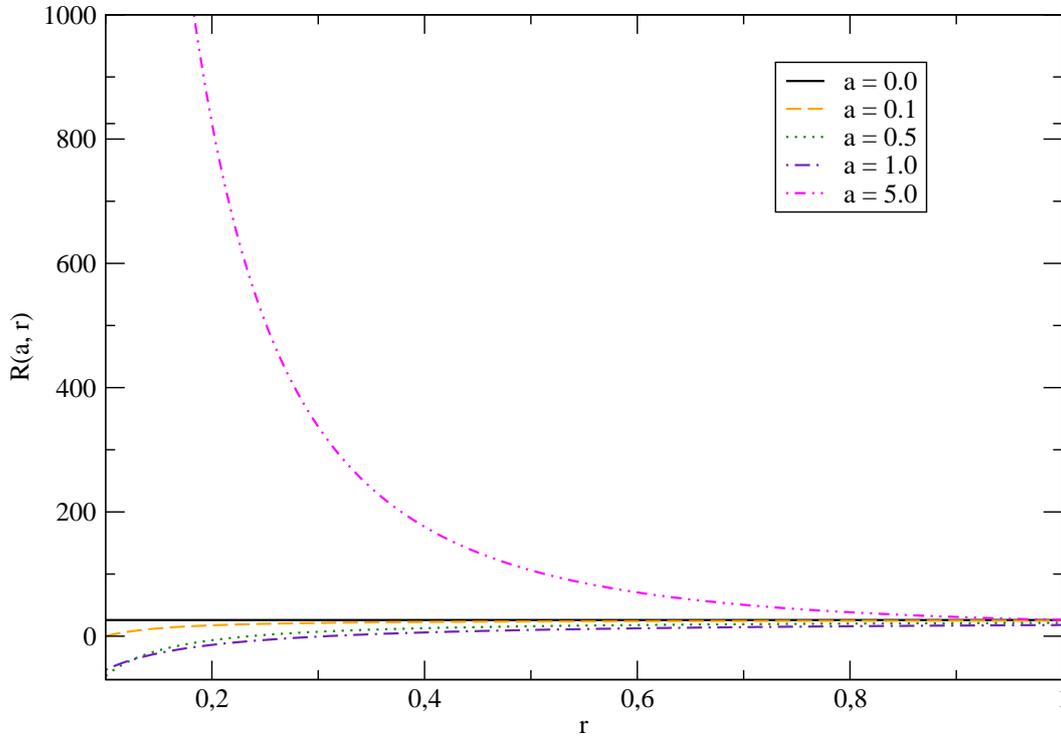


Figura 4.1: Escalar de curvatura $R(r, a)$ no modelo GS estendido.

derivada segunda com respeito a coordenada r de $\alpha(r)$ e $\gamma(r, a)$:

$$\alpha(r) = e^{-2kr} \Rightarrow \alpha'(r) = -2ke^{-2kr}. \quad (4.26)$$

Portanto

$$\alpha''(r) = 4k^2e^{-2kr}. \quad (4.27)$$

Para $\gamma(r, a)$, temos:

$$\gamma(r, a) = R_0^2 \left(\frac{r}{l}\right)^{2a} e^{-2kr} \Rightarrow \gamma'(r, a) = \left(\frac{R_0}{l^a}\right)^2 [2ar^{2a-1}e^{-2kr} - 2kr^{2a}e^{-2kr}], \quad (4.28)$$

portanto

$$\gamma''(r, a) = \left(\frac{R_0}{l^a}\right)^2 [2a(2a-1)r^{2a-2}e^{-2kr} - 4akr^{2a-1}e^{-2kr} + 4k^2r^{2a}e^{-2kr}]. \quad (4.29)$$

Finalmente, retornamos para o sistema de equações diferenciais acopladas e verificamos que

estas equações se reduzem a um sistema de equações algébricas

$$10k^2 - \frac{11ka}{r} - \frac{a^2}{r^2} + \frac{a(2a-1)}{r^2} = -\frac{1}{M_6^4}[\Lambda + t_0(r)] + \frac{1}{M_p^2}\Lambda_{phys}e^{2kr}, \quad (4.30)$$

$$10k^2 - \frac{4ka}{r} = -\frac{1}{M_6^4}[\Lambda + t_r(r)] + \frac{1}{M_p^2}2\Lambda_{phys}e^{2kr}, \quad (4.31)$$

$$10k^2 = -\frac{1}{M_6^4}[\Lambda + t_\theta(r)] + \frac{1}{M_p^2}2\Lambda_{phys}e^{2kr}, \quad (4.32)$$

percebemos que para $a = 0$, as equações (4.30), (4.31) e (4.32) tornam-se

$$10k^2 = -\frac{1}{M_6^4}[\Lambda + t_0(r)] + \frac{1}{M_p^2}\Lambda_{phys}e^{2kr}, \quad (4.33)$$

$$10k^2 = -\frac{1}{M_6^4}[\Lambda + t_r(r)] + \frac{1}{M_p^2}2\Lambda_{phys}e^{2kr}, \quad (4.34)$$

$$10k^2 = -\frac{1}{M_6^4}[\Lambda + t_\theta(r)] + \frac{1}{M_p^2}2\Lambda_{phys}e^{2kr}, \quad (4.35)$$

semelhante as equações encontradas no modelo GS. Notamos que o tensor momento-energia das equações de Einstein (4.30), (4.31) e (4.32) dependem de k , que por sua vez está relacionado com a constante cosmológica e com o parâmetro “ a ”. A fonte só satisfaz as condições para $0 < a < 1$. Verificaremos agora o sinal da constante cosmológica. Para fazermos isto, precisaremos da equação (3.8). Considerando soluções de vácuo, temos:

$$T_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu t_0(r) = 0 \quad (4.36)$$

o que implica em $R = 0$, portanto $\Lambda_{phys} = 0$. Considerando a equação (4.32), notamos que no vácuo a seguinte condição deve ser satisfeita

$$T_\theta^\theta = t_\theta(r) = 0 \quad (4.37)$$

o que nos conduz ao seguinte resultado

$$k^2 = -\frac{1}{10M_6^4}\Lambda \quad (4.38)$$

como k e M_6^4 são positivos, implica que a constante cosmológica Λ deve ser negativa.

4.2 Localização de gravidade em seis dimensões no cenário de defeitos do tipo corda estendido

Para encontrarmos as equações de movimento para o gráviton, primeiro devemos efetuar uma perturbação na métrica. Vamos supor uma solução exata ${}^0g_{ab}$ que satisfaz a equação de Einstein

$${}^0R_{ab} - \frac{1}{2}{}^0R{}^0g_{ab} = K{}^0T_{ab}. \quad (4.39)$$

Estudaremos situações onde o erro em ${}^0g_{ab}$ é pequeno. Pequenos valores para λ correspondem a pequenos erros de ${}^0g_{ab}$. Consideraremos agora uma perturbação γ_{ab} , que é calculada pela nova métrica

$$g_{ab}(\lambda) = {}^0g_{ab} + \lambda\gamma_{ab}. \quad (4.40)$$

Temos que ${}^\lambda\nabla_a$ corresponde ao operador derivada associada com a métrica $g_{ab}(\lambda)$, e ${}^0\nabla_a$ o operador derivada correspondente a métrica ${}^0g_{ab}$. A diferença entre essas duas derivadas é determinada pela conexão

$$C^c{}_{ab}(\lambda) = \frac{1}{2}g^{cd}({}^0\nabla_a g_{bd} + {}^0\nabla_b g_{ad} - {}^0\nabla_d g_{ab}). \quad (4.41)$$

O operador derivada operando sobre um vetor dual ω_c pode ser escrito como:

$${}^\lambda\nabla_b\omega_c = {}^0\nabla_b\omega_c - C^d{}_{bc}(\lambda)\omega_d. \quad (4.42)$$

O tensor de Ricci $R^d{}_{abc}(\lambda)$ correspondente à métrica $g_{ab}(\lambda)$ é definido da seguinte forma:

$$R^d{}_{abc}(\lambda)\omega_d = ({}^\lambda\nabla_a {}^\lambda\nabla_b\omega_c - {}^\lambda\nabla_b {}^\lambda\nabla_a\omega_c). \quad (4.43)$$

Usando a equação (4.42) na definição acima, encontramos

$$R^d{}_{abc}\omega_d = {}^\lambda\nabla_a({}^0\nabla_b\omega_c - C^d{}_{bc}(\lambda)\omega_d) - {}^\lambda\nabla_b({}^0\nabla_a\omega_c - C^d{}_{ac}(\lambda)\omega_d) \quad (4.44)$$

com

$${}^\lambda\nabla_a\omega_c = {}^0\nabla_a\omega_c - C^d{}_{ac}(\lambda)\omega_d. \quad (4.45)$$

Portanto, chegamos ao seguinte resultado:

$$R^d{}_{abc}\omega_d = ({}^0R^d{}_{abc} - 2{}^0\nabla_{[a}C^d{}_{b]c} + 2C^e{}_{c[a}C^d{}_{b]e})\omega_d \quad (4.46)$$

com

$${}^0R^d{}_{abc}\omega_d = ({}^0\nabla_a{}^0\nabla_b - {}^0\nabla_b{}^0\nabla_a)\omega_c, \quad (4.47)$$

onde respectivamente introduzimos a seguinte notação tensorial para tensores simétricos e anti-simétricos

$$T_{(ab)} = \frac{1}{2}(T_{ab} + T_{ba}), \quad (4.48)$$

$$T_{[ab]} = \frac{1}{2}(T_{ab} - T_{ba}). \quad (4.49)$$

Partindo do tensor de Riemann $R^d{}_{abc}$ podemos achar o tensor de Ricci R_{ab}

$$R_{ab} = R^b{}_{abc}. \quad (4.50)$$

Portanto o tensor de Ricci fica sendo dado pela seguinte expressão:

$$R_{ac} = {}^0R_{ac} - 2{}^0\nabla_{[a}C^b{}_{b]c} + 2C^e{}_{c[a}C^b{}_{b]e}. \quad (4.51)$$

O escalar de Ricci é então calculado, mediante a seguinte equação:

$$R = g^{ac}({}^0R_{ac}) - 2g^{ac}({}^0\nabla_{[a}C^b{}_{b]c}) + 2g^{ac}(C^e{}_{c[a}C^b{}_{b]e}). \quad (4.52)$$

De posse do tensor de Ricci e do escalar de Ricci podemos escrever o tensor de Einstein

$$G_{ab}(\lambda) = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} \quad (4.53)$$

onde derivaremos o tensor de Einstein com respeito a λ (faremos $\lambda = 0$), a fim de obter as equações linearizadas de Einstein do vácuo

$$\begin{aligned} \dot{G}_{ab} = & -\frac{1}{2}{}^0\Delta\gamma_{ab} - \frac{1}{2}{}^0\nabla_a{}^0\nabla_b\gamma + {}^0\nabla^{d0}\nabla_{(a}\gamma_{b)d} - \frac{1}{2}{}^0g_{ab}({}^0\nabla^{c0}\nabla^d\gamma_{cd} - {}^0\Delta\gamma) \\ & - \frac{1}{2}{}^0R\gamma_{ab} + \frac{1}{2}{}^0g_{ab}\gamma^{cd}{}^0R_{cd}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Agora, vamos obter uma forma simplificada para \dot{G}_{ab} com a escolha conveniente de um gauge

$$h_{ab} = \gamma_{ab} - \frac{1}{2}{}^0g_{ab}\gamma, \quad (4.55)$$

o que nos leva ao seguinte resultado

$$2\dot{G}_{ab} = 2{}^0\nabla^{d0}\nabla_{(a}h_{b)d} - {}^0\Delta h_{ab} - {}^0g_{ab}{}^0\nabla^{c0}\nabla^d h_{cd} - {}^0R h_{ab} + {}^0g_{ab}h^{cd}({}^0R_{cd}). \quad (4.56)$$

A equação linearizada de Einstein é dada por $\dot{G}_{ab} = K\dot{T}_{ab}$. Derivando o tensor momento-energia com respeito a λ (para $\lambda = 0$), encontramos a seguinte equação

$$\begin{aligned} {}^0\Delta h_{ab} - 2{}^0R^{dc}{}_{ab}h_{cd} - 2{}^0\nabla_{(a}{}^0\nabla^d h_{b)d} + {}^0g_{ab}{}^0\nabla^{c0}\nabla^d h_{cd} \\ + {}^0R h_{ab} - {}^0g_{ab}h^{cd}({}^0R_{cd}) = -2K\dot{T}_{ab}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Impondo o gauge de traço nulo transverso $\nabla^a h_{ab} = 0$, ficamos com:

$${}^0\Delta h_{ab} - 2{}^0R^{dc}{}_{ab}h_{cd} + {}^0R h_{ab} - {}^0g_{ab}h^{cd}({}^0R_{cd}) = -2K\dot{T}_{ab}. \quad (4.58)$$

No vácuo, ${}^0R_{ab} = 0$, portanto a equação linearizada de Einstein se torna

$${}^0\Delta h_{ab} - 2{}^0R^{dc}{}_{ab}h_{cd} = 0, \quad (4.59)$$

que se reduz a seguinte forma

$${}^0\Delta h_{ab} = 0, \quad (4.60)$$

que é simplesmente uma equação de Klein-Gordon sem o termo de massa, onde ${}^0\Delta$ é o operador laplaciano sobre a variedade \mathcal{M} . Em um sistema de coordenadas cilíndricas e fazendo uso das equações (4.20) e (4.21), a equação (4.60) pode ser escrita como

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{R_0}{l^a} r^a e^{-5kr} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \left(\frac{R_0}{l^a} r^a e^{-3kr} \right) \tilde{\Delta} + \left(\frac{l^a}{R_0} r^{-a} e^{-3kr} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] h_{ab} = 0. \quad (4.61)$$

Aqui, $\tilde{\Delta}$ é o operador laplaciano sobre a brana. Podemos separar as variáveis usando a seguinte equação:

$$h_{ab}(x^M) = h(x^\mu)\phi(r)\Theta(\theta), \quad (4.62)$$

para que possamos encontrar as equações de movimento. Temos para a coordenada angular θ a expressão

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Theta(\theta) = -\frac{l^2}{L^2}, \quad (4.63)$$

onde $l \in \mathbb{Z}$ e θ pode ser compactificada em um círculo de raio L . As soluções de $h(x^\mu)$ são obtidas através da equação de Klein-Gordon [25]

$$\tilde{\Delta} h(x^\mu) = -m^2 h(x^\mu), \quad (4.64)$$

onde o número real m são os autovalores da equação radial, que possui a forma de uma equação diferencial de Sturm-Liouville [26]

$$-\frac{d}{dr} \left[p(r) \frac{d}{dr} \phi(r) \right] + \frac{l^2}{L^2} q(r) \phi(r) = -m^2 \omega(r) \phi(r), \quad (4.65)$$

onde $p(r)$, $q(r)$ e $\omega(r)$ são as chamadas funções principais. Pesquisaremos soluções para $l = 0$, que são soluções de onda do tipo s . A equação diferencial de Sturm-Liouville resulta em

$$-\frac{d}{dr} \left[p(r) \frac{d}{dr} \phi(r) \right] = -m^2 \omega(r) \phi(r). \quad (4.66)$$

As funções principais $p(r)$ e $\omega(r)$ são dadas por:

$$p(r) = \frac{R_0}{l^a} r^a e^{-5kr} \quad (4.67)$$

e

$$\omega(r) = \frac{R_0}{l^a} r^a e^{-3kr}, \quad (4.68)$$

aplicando o operador $\frac{d}{dr}$ nos termos entre colchetes da equação (4.66) e substituindo as funções principais pelas expressões dadas por (4.67) e (4.68), obtemos

$$\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) + 5k \left(\frac{a}{5kr} - 1 \right) \frac{d}{dr} \phi(r) - m^2 e^{2kr} \phi(r) = 0, \quad (4.69)$$

observamos que para $a = 0$, a equação (4.69) se reduz a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) - 5k \frac{d}{dr} \phi(r) - m^2 e^{2kr} \phi(r) = 0, \quad (4.70)$$

que é uma equação semelhante a encontrada no modelo GS.

As soluções da equação (4.69) nos fornecem os modos massivos de Kaluza-klein (KK) [2]. Em particular para $m^2 = 0$ (o modo-zero), a equação (4.69) possui $\phi(r) = \phi_0 = \text{constante}$ como uma solução. Voltamos novamente nossa atenção para a ação (4.1). O determinante da métrica 6-dimensional $\sqrt{-G}$ supondo que ela seja diagonal é dado por:

$$\sqrt{-G} = R_0 \frac{r^a}{l^a} e^{-5kr}. \quad (4.71)$$

Separando as componentes da brana das componentes das dimensões extras e de posse do resultado $\phi(r) = \phi_0$, ficamos:

$$S = \frac{\pi R_0}{K_6^2 l^a} \int_0^\infty dr r^a e^{-3kr} \phi_0^2 \int d^4 x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda). \quad (4.72)$$

Neste caso a ação efetiva (4.72) é finita e diz-se que existe um modo não massivo de um campo gravitacional localizado na brana. A figura (4.2) mostra o gráfico da localização do modo-zero gravitacional para o modelo GS estendido. Observamos que para o intervalo $0 < a < 1$, a medida que o valor de “a” tende para 1, menor é a amplitude do modo-zero. Observação: A figura (4.2) é uma representação gráfica da função $\phi(r, a) = r^a e^{-3kr}$.

A relação entre a massa de Planck na brana M_p e a massa de Planck no bulk M_6 [7] é determinada pela seguinte equação:

$$M_p^2 = \frac{2\pi M_6^4 R_0}{l^a} \int_0^\infty dr r^a e^{-3kr}. \quad (4.73)$$

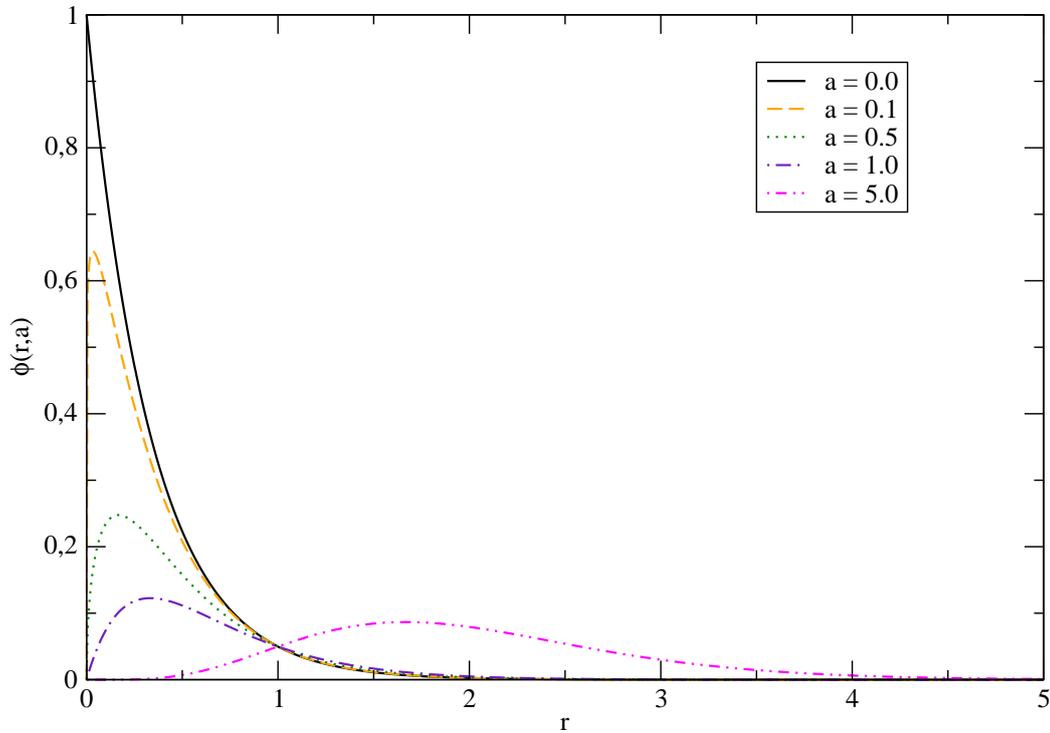


Figura 4.2: localização do modo-zero gravitacional no cenário GS estendido.

A integral (4.73) converge, isso implica, que o volume do espaço transversal nesse novo cenário a exemplo do modelo GS, também é finito. Se fizermos novamente $a = 0$ verificamos que recuperaremos a equação (3.29).

4.3 Componentes de tensão da corda em seis dimensões no cenário de defeitos do tipo corda estendido

Analisaremos agora as componentes de tensão da corda neste novo cenário. Assumiremos também que na origem, em $r = 0$, da nossa 3-brana, localiza-se um defeito topológico tipo corda mergulhado em um espaço-tempo 6-dimensional, com um tensor momento-energia T_B^A . As funções de fonte do tensor, a exemplo do modelo GS também descrevem uma distribuição contínua de matéria no núcleo com raio ϵ , porém nula para $r > \epsilon$. Na origem a solução satisfaz

as seguintes condições de contorno.

$$\alpha(r)'|_{r=0} = 0, \quad (4.74)$$

$$\alpha(r)|_{r=0} = 1, \quad (4.75)$$

$$\left[\sqrt{\gamma(r, a)} \right]'|_{r=0} = 1 \quad (4.76)$$

e

$$\gamma(r, a)|_{r=0} = 0. \quad (4.77)$$

Integrando sobre um pequeno disco de raio ϵ , encontramos as componentes de tensão da corda por unidade de comprimento

$$\mu_i = \int_0^\epsilon dr \alpha(r)^2 \sqrt{\gamma(r, a)} t_i(r), \quad (4.78)$$

onde $i = 0, r$ e θ . Usando as equações (4.30), (4.31) e (4.32), obtemos as seguintes condições contorno:

$$\alpha(r)\alpha(r)' \sqrt{\gamma(r, a)}|_0^\epsilon = \frac{1}{2M_6^4} (\mu_r + \mu_\theta) \quad (4.79)$$

e

$$\alpha(r)^2 \left[\sqrt{\gamma(r, a)} \right]'|_0^\epsilon = \frac{1}{M_6^4} \left(\mu_0 + \frac{1}{4}\mu_r - \frac{3}{4}\mu_\theta \right), \quad (4.80)$$

Com o auxílio da equação (4.80) podemos calcular o deficit angular da corda [17]. As componentes da tensão da corda satisfazem a seguinte equação

$$\mu_0 = \mu_\theta + M_6^4, \quad (4.81)$$

escolhendo $\mu_r = 0$, encontramos

$$\mu_\theta = \frac{4kR_0M_6^4}{l^a} \quad (4.82)$$

A relação entre as duas escalas de massas é obtida através da seguinte expressão

$$M_p^2 = \frac{2\pi R_0 M_6^4}{l^a} \int_\epsilon^\infty dr r^a e^{-3kr}. \quad (4.83)$$

Se voltarmos nossa atenção para a equação (4.38), podemos tirar a seguinte relação:

$$k = \left[\frac{-\Lambda}{10M_6^4} \right]^{1/2}. \quad (4.84)$$

Substituindo a expressão acima na equação (4.83) e de posse do resultado (4.82), encontramos

$$M_p^2 = \mu_\theta \frac{\pi}{2k} \int_\epsilon^\infty dr r^a e^{[(3\Lambda/10M_6^4)^{1/2}]r} \quad (4.85)$$

Verificamos mais uma vez que o volume do espaço transverso é finito. A desigualdade $M_6 \ll M_p$ é novamente possível ajustando a componente angular da tensão da corda ou a constante cosmológica do bulk ou o parâmetro adimensional “a”. A equação (4.83) nos fornece, portanto, uma relação entre as escalas de massas de Planck na Brana e no Bulk.

5 Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho, mostramos uma extensão do modelo GS, através da introdução de um parâmetro adimensional na geometria não-fatorizável em seis dimensões, com duas dimensões extras, sendo uma delas compacta. Representamos o nosso universo observável por um espaço-tempo 4-dimensional e consideramos que ele é minkowskiano fora do defeito. Vimos que o nosso ansatz métrico escolhido representa uma família de geometrias tipo corda, na qual, as dimensões extras possuem simetria cilíndrica ou axisimétrica e cônica em relação a brana. Com isso afirmamos que o nosso ansatz métrico representa soluções clássicas tipo corda exteriores ao defeito. Concluimos também, que o parâmetro adimensional escolhido, representa uma família de geometrias do espaço transversal à brana cuja variação implica mudanças nas propriedades da brana como, por exemplo as componentes de tensão da corda dependem do parâmetro de extensão, o que indica que a variação da geometria através do parâmetro está relacionado com uma variação das propriedades físicas da brana.

Partimos da ação de Einstein-Hilbert e achamos as equações de Einstein em seis dimensões para o cenário. De posse dessas equações, percebemos que podemos recuperar as mesmas equações do modelo GS fazendo o nosso parâmetro adimensional ir a zero. Encontramos o nosso escalar de curvatura e percebemos que ele é negativo próximo a origem e depois converge assintoticamente para um valor constante. Diante desse resultado podemos acompanhar a evolução do escalar de curvatura a partir dos valores que atribuímos ao nosso parâmetro adimensional. Mostramos também que a constante cosmológica encontrada é negativa, porém, só podemos garantir que o bulk é apenas assintoticamente AdS_6 .

Em seguida, efetuamos uma perturbação na métrica de fundo afim de encontrarmos as equações de movimento para o gráviton. Vimos que a equação radial encontrada era do tipo Sturm-Liouville e que podíamos encontrar uma equação semelhante do modelo GS, fazendo novamente o nosso parâmetro de extensão ir a zero. De posse dessa equação radial e da construção de uma ação efetiva, conseguimos efetuar a localização do modo não massivo gravitacional na brana. Observamos também, que na medida que o nosso parâmetro tende para 1, menor é a amplitude do modo-zero. Uma grande vantagem desse modelo estendido é que podemos

estudar como o modo-zero evolui com o nosso parâmetro adimensional.

Verificamos também, que nesse novo cenário o volume do espaço transversal também é finito, e que as escalas de massas de Planck e no bulk podem ser obtidas ajustando a constante cosmológica ou a componente angular de tensão da corda ou o parâmetro adimensional.

Como perspectivas de estudos imediatos a serem feitos com base nos conhecimentos expostos nesse trabalho, podemos exemplificar:

1. Analisar os modos massivos e efetuar com base nesses modos, uma correção para o potencial gravitacional newtoniano e comparar o nosso resultado com os modelos GS e RS;
2. Localizar outros campos (escalar, fermiônico, de gauge, ...);
3. Procurar soluções cosmológicas através do modelo GS estendido.

6 Referências

- [1] Cruz, Wilami Teixeira da. Localização de campos em membranas deformadas. 2009. 110p. Tese de doutorado (Tese em Física) - Departamento de Pós-Graduação em Física, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.
- [2] Modern Kaluza-Klein Theories, edited by T. Appelquist, A. Chodos, and P.G. Freund (Addison-Wesley, Reading, MA, 1987).
- [3] Nunes, Luciana Angelica da Silva. Visão Supersimétrica de Modelos Topológicos e Branas em $D = 4$ e $D = 5$. 2008. 138p. Tese de doutorado (Tese em Física) - Departamento de Pós-Graduação em Física, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.
- [4] Weinberg, Steven. Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity. John Wiley e Sons, Inc. New York-London-Sydney-Toronto, 1972.
- [5] Mak, M.K. and Harko, T., Cosmological particle production in five-dimensional Kaluza-Klein theory, *Class. Quant. Grav.* 16, 4085-4099 (1999).
- [6] Duff, M.J., Kaluza-Klein theory in perspective, hep-th/9410046, arXiv, NI-94-015, CTP-TAMU-22-94, C94-09-19.6 (1994).
- [7] Gherghetta, Tony and Shaposhnikov, Mikhail, Localizing Gravity on a Stringlike Defect in Six Dimensions, *PhysRevLett.* 85.240 (2000).
- [8] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter, *Phys. Lett. B* 429, pp. 263-272 (1998).
- [9] Randall, Lisa and Sundrum, Raman, Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension, *PhysRevLett.* 83, pp. 3370-3373 (1999).
- [10] Randall, Lisa and Sundrum, Raman, An Alternative to Compactification, *PhysRevLett.* 83, pp. 4690-4693 (1999).
- [11] A. Gomes, Defeitos Topológicos em Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação, Universidade de Brasília - Instituto de Física (IF/UnB), Mestrado em Física (2006).

- [12] Tahim, M. O., Aspectos Clássicos de Gravitação Topológica e Dimensões Extras, Universidade Federal do Ceará - Departamento de Física (DF/UFC), Doutorado em Física (2008).
- [13] J. M. Hoff, Compactificação alternativa de dimensões extras em gravitação de Brans-Dicke, Instituto de Física Teórica - Universidade Estadual Paulista (IFT/UNESP), Doutorado em Física (2009).
- [14] J. M. Maldacena *Adv. Theor. Math. Phys.* 2, 231 (1998).
- [15] Christensen, M. and Larsen, A. L. and Verbin, Y., Complete classification of the string-like solutions of the gravitating Abelian Higgs model, *PhysRevD*.60.125012, (1999).
- [16] Ichiro and Oda, Localization of matters on a string-like defect, *Physics Letters B*, pp. 113 - 121, (2000).
- [17] Frolov, Valeri P. and Israel, W. and Unruh, W.G., Gravitational Fields of Straight and Circular Cosmic Strings: Relational Between Gravitational Mass, Angular Deficit, and Internal Structure, 10.1103/PhysRevD.39.1084, (1989).
- [18] I. Olasagasti and A. Vilenkin, hep-th/0003300.
- [19] A. Chodos and Poppitz, *Phys. Lett. B* 471, 119 (1999).
- [20] A. G. Cohen and D.B. Kaplan, *Phys. Lett. B* 470, 52 (1999).
- [21] Gregory, Ruth, Nonsingular Global String Compactifications, *Phys. Rev. Lett.*, 84, 2564 (2000).
- [22] C. Csaki, J. Erlich, T.J. Hollowood, and Y. Shirman, hep-th/ 0001033.
- [23] J. Chen, M. A. Luty, and E. Ponton, hep-th/0003067.
- [24] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, *Phys. Lett.* 125B, 139 (1983).
- [25] Ryder, Lewis H. *Quantum field theory*. Published by the Press Syndicate of the University of Cambridge (1985).
- [26] Arfken, George B. (George Brown), 1922. *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física/ George Arfken e Hans Weber*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.