



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA APLICADA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM E MÉTODOS**  
**QUANTITATIVOS**  
**MESTRADO ACADÊMICO EM MODELAGEM E MÉTODOS QUANTITATIVOS**

**JOSÉ ROBÉRIO DE CASTRO FERREIRA**

**DECISÃO MULTICRITÉRIO ORIENTADA POR ÊNFASES DO DECISOR: UMA**  
**ABORDAGEM ESTATÍSTICA PARA DECISÕES ALINHADAS A DIRETRIZES**  
**ORGANIZACIONAIS**

**FORTALEZA**

**2026**

JOSÉ ROBÉRIO DE CASTRO FERREIRA

DECISÃO MULTICRITÉRIO ORIENTADA POR ÊNFASES DO DECISOR: UMA  
ABORDAGEM ESTATÍSTICA PARA DECISÕES ALINHADAS A DIRETRIZES  
ORGANIZACIONAIS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Modelagem e Métodos Quantitativos do Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Modelagem e Métodos Quantitativos. Área de Concentração: Ciência de Dados

Orientador: Prof. Dr. Leandro Chaves Rêgo

FORTALEZA

2026

JOSÉ ROBÉRIO DE CASTRO FERREIRA

DECISÃO MULTICRITÉRIO ORIENTADA POR ÊNFASES DO DECISOR: UMA  
ABORDAGEM ESTATÍSTICA PARA DECISÕES ALINHADAS A DIRETRIZES  
ORGANIZACIONAIS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Modelagem e Métodos Quantitativos do Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Modelagem e Métodos Quantitativos. Área de Concentração: Ciência de Dados

Aprovada em: 26-01-2026

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Leandro Chaves Rêgo (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Anselmo Ramalho Pitombeira Neto  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dra. Maísa Mendonça Silva  
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

A Deus, toda honra e toda glória. Aos meus pais, Anita de Castro e Roseno Ferreira, a quem dedico minha eterna gratidão. Ao meu professor orientador, Leandro Rêgo, por ser uma fonte de inspiração profissional.

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, Pai Celeste, por me conceder a existência da vida e por me conduzir, ao longo dessa jornada, por decisões que me levaram a um caminho no qual me sinto realizado e feliz.

Aos meus pais, Anita Castro e Roseno Ferreira, expresso minha profunda gratidão por toda a criação, pelo cuidado, pela educação e pelo apoio incondicional em todos os aspectos da minha vida, que contribuíram para a formação do meu caráter e para que eu me tornasse a pessoa que sou hoje.

Ao Professor Leandro Chaves Rêgo, agradeço pela orientação ao longo de todo o projeto de pesquisa, pela constante prestatividade, pelos ensinamentos, pelas valiosas orientações e colaborações, que contribuíram de forma decisiva para o meu crescimento acadêmico e profissional, bem como pelo estímulo ao desenvolvimento do pensamento crítico e pela confiança depositada em meu potencial ao longo dessa trajetória.

Agradeço a todo o corpo docente do Departamento de Matemática e Estatística Aplicada (DEMA) que constitui o Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos da Universidade Federal do Ceará, pelo conhecimento transmitido ao longo do mestrado, pelas discussões acadêmicas e pela formação proporcionada, que ampliaram minha visão científica, conferiram maior visibilidade à minha trajetória acadêmica e serviram como importante fonte de motivação para a continuidade da minha formação.

Aos meus amigos de mestrado, Marcelo Fossile e Henrique Innecco, agradeço pela parceria ao longo das disciplinas cursadas, pelos diálogos motivacionais e pelo apoio mútuo, tanto no âmbito acadêmico quanto no profissional.

Agradeço a toda a equipe do *Insight Data Science Lab*, em especial aos professores José Antônio Macêdo, Rossana Castro, Lívia Almada, Anselmo Pitombeira e Manuel Campêlo, pelas contribuições acadêmicas, pelo ambiente colaborativo e pelo suporte ao desenvolvimento desta pesquisa.

Aos professores membros da banca examinadora deste trabalho, agradeço pela disponibilidade e pelas contribuições que venham a sugerir, o que encorajará o seu aperfeiçoamento e, conseqüentemente, resultará no desfecho desta etapa da minha trajetória acadêmica.

Por fim, e não menos importante, agradeço ao Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) pelo investimento e apoio ao projeto, que tornaram possível o desenvolvimento desta pesquisa.

“...Ainda que a figueira não floresça e não haja fruto na vide, ainda que o produto da oliveira minta e os campos não produzam mantimento, ainda que o rebanho seja exterminado da malhada e nos currais não haja gado, todavia, eu me alegrarei no Senhor...”

(Habacuque 3:17–18)

## RESUMO

Diversos problemas de decisão envolvem a análise de múltiplos critérios que frequentemente são conflitantes entre si. Neste contexto, os cenários que surgem são complexos, o que demanda métodos sistemáticos para encontrar soluções que contemplem adequadamente todos os critérios envolvidos. Os chamados métodos de apoio à decisão multicritério podem ser utilizados com o intuito de dar suporte à resolução desta problemática. Vários são os métodos aplicáveis para tal objetivo, destacando-se o AHP (*Analytic Hierarchy Process*) e o TOPSIS (*Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution*), amplamente utilizados na literatura, assim como diversos trabalhos que propõem variações e aprimoramentos desses métodos para ampliar sua aplicabilidade em diferentes contextos decisórios. Este trabalho propõe três novas abordagens metodológicas em decisões multicritério com foco na ênfase de critérios preferíveis, denominadas métodos AHP-Equitativo, AHP-MEDAC e TOPSIS-MEDAC Hierárquico. Esses métodos visam aumentar os pesos dos critérios preferíveis por meio da aplicação de métricas estatísticas do desempenho das alternativas nos critérios, especificamente utiliza-se a assimetria e a variabilidade. O AHP-Equitativo, inspirado no método AHP-Gaussiano, foi o primeiro método proposto nesta pesquisa, e alguns de seus problemas estatísticos herdados do AHP-Gaussiano são tratados no método AHP-MEDAC. Para validar os métodos propostos neste trabalho (AHP-Equitativo, AHP-MEDAC e TOPSIS-MEDAC Hierárquico), estes foram aplicados no contexto educacional, resultando em um ranqueamento construído com base em ênfases definidas previamente pelo decisor (promoção da equidade), de modo a manter coerência e conexão com as diretrizes, políticas e objetivos institucionais que orientam toda e qualquer decisão multicritério. Os resultados deste estudo foram satisfatórios, demonstrando aumento nos pesos dos critérios enfatizados e contrastes nas pontuações entre as alternativas, o que tende a mitigar o nível de criticidade na tomada de decisão. Além disso, o método demonstrou robustez em diversos cenários de modelagem.

**Palavras-chave:** métodos AHP; métodos TOPSIS; problema de ranqueamento; assimetria; variabilidade.

## ABSTRACT

Several decision-making problems involve the analysis of multiple criteria that are often conflicting with one another. In this context, the resulting scenarios are complex, which calls for systematic methods to find solutions that adequately address all the criteria involved. The so-called multicriteria decision support methods can be used to assist in solving this type of problem. Among the various applicable methods, the AHP (Analytic Hierarchy Process) and TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution) stand out as the most widely used in the literature, along with numerous studies that propose variations and enhancements of these methods to expand their applicability across different decision contexts. This study proposes three new methodological approaches for multicriteria decision-making focused on emphasizing preferable criteria, namely the AHP-Equitative, AHP-MEDAC, and Hierarchical TOPSIS-MEDAC methods. These approaches aim to increase the weights of preferable criteria through the application of statistical measures to the performance of the alternatives in each criteria, specifically skewness and variability are used. The AHP-Equitative, inspired by the Gaussian AHP method, was the first approach proposed in this research, and some of its statistical limitations inherited from the Gaussian AHP are addressed in the AHP-MEDAC method. To validate the proposed methods (AHP-Equitative, AHP-MEDAC and Hierarchical TOPSIS-MEDAC), they were applied within the educational context, resulting in a ranking constructed based on emphases previously defined by the decision-maker (promotion of equity), maintaining coherence and alignment with the institutional guidelines, policies, and strategic objectives that underpin any multicriteria decision process. The results were satisfactory, demonstrating an increase in the weights of the emphasized criteria and greater contrasts among the scores of the alternatives, which tend to mitigate the level of criticality in decision-making. Moreover, the methods demonstrated robustness across different modeling scenarios.

**Keywords:** AHP method; TOPSIS method; ranking problem; skewness; variability.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diferentes tipos de decisão . . . . .	30
Figura 2 – Exemplo de pontuação conforme racionalidade compensatória . . . . .	35
Figura 3 – Exemplo de pontuação conforme racionalidade não compensatória . . . . .	35
Figura 4 – Levantamento estatístico do uso dos métodos MCDA em artigos científicos [1995-2016] . . . . .	36
Figura 5 – Fluxo de etapas do Método AHP . . . . .	37
Figura 6 – Estrutura hierárquica de critérios e subcritérios pelo método AHP . . . . .	37
Figura 7 – Agregação dos vetores para a construção da matriz de decisão . . . . .	40
Figura 8 – Fluxo de etapas do Método AHP-Gaussiano . . . . .	46
Figura 10 – Fluxo do Método TOPSIS . . . . .	46
Figura 9 – Representação geométrica do método TOPSIS . . . . .	47
Figura 11 – Análise da variabilidade e assimetria para os dois grupos de critérios . . . . .	51
Figura 12 – Estrutura hierárquica do modelo de decisão - <i>Case</i> “Geral” UFs . . . . .	57
Figura 13 – Correlações entre os <i>rankings</i> dos modelos “Nacional” (filtrado conforme Região) e “Regional” . . . . .	63
Figura 14 – Análise de Sensibilidade: influência da normalização e da categorização . . . . .	64
Figura 15 – Estrutura hierárquica do modelo de decisão - <i>Case</i> “Obras” Municípios . . . . .	68
Figura 16 – Mapa de Calor (Pontuações Globais dos Municípios) . . . . .	69
Figura 17 – Correlações entre <i>rankings</i> dos modelos “Nacional” (filtrado conforme Re- gião) e “Regional” . . . . .	70
Figura 18 – Estrutura hierárquica do modelo de decisão – <i>Case</i> “Transporte Escolar” . . . . .	73
Figura 19 – Top 1.000 (% Municípios por UF) . . . . .	75
Figura 20 – Top 1.000 (% Municípios da UF) . . . . .	75
Figura 21 – Top 1.000 (% Municípios por Região) . . . . .	76
Figura 22 – Top 1.000 (% Municípios da Região) . . . . .	76
Figura 23 – Top 25 (% Mesorregiões por UF) . . . . .	82
Figura 24 – Top 25 (% Mesorregiões da UF) . . . . .	82
Figura 25 – Top 100 (% Microrregiões por UF) . . . . .	83
Figura 26 – Top 100 (% Microrregiões da UF) . . . . .	83
Figura 27 – Top 25 (% Mesorregiões por Região) . . . . .	84
Figura 28 – Top 25 (% Mesorregiões da Região) . . . . .	84

Figura 29 – Top 100 (% Microrregiões por Região) . . . . .	84
Figura 30 – Top 100 (% Microrregiões da Região) . . . . .	85
Figura 31 – <i>Heatmaps</i> para a representação das posições das meso e microrregiões nos <i>rankings</i> . . . . .	86
Figura 33 – Fluxo do Método TOPSIS-MEDAC hierárquico . . . . .	90
Figura 34 – Pesos dos Subcritérios obtidos pelo método TOPSIS-MEDAC hierárquico . . . . .	94
Figura 35 – Pesos dos Critérios obtidos pelo método TOPSIS-MEDAC hierárquico . . . . .	94
Figura 36 – <i>Top 1.000</i> (% Municípios por UF) . . . . .	95
Figura 37 – <i>Top 1.000</i> (% Municípios da UF) . . . . .	96
Figura 38 – <i>Top 1.000</i> (% Municípios por Região) . . . . .	96
Figura 39 – <i>Top 1.000</i> (% Municípios da Região) . . . . .	97
Figura 40 – <i>Heatmaps</i> dos <i>Rankings</i> (TOPSIS-MEDAC e AHP-MEDAC) . . . . .	98
Figura 41 – Gráfico de Dispersão (Posições entre os <i>Rankings</i> TOPSIS-MEDAC e AHP- MEDAC) . . . . .	98

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Trabalhos que contribuíram com extensões e melhorias, especificamente, para os métodos AHP e TOPSIS . . . . .	26
Tabela 2 – Trabalhos que contribuíram na literatura, em geral, sobre os métodos MCDA	27
Tabela 3 – Trabalhos que contribuíram, especificamente, no âmbito de políticas públicas de educação através de modelagem . . . . .	28
Tabela 4 – Métodos de decisão multicritério classificados por tipo de problema . . . . .	34
Tabela 5 – Exemplo de comparação entre as pontuações de alternativas para evidenciar as diferentes abordagens de racionalidade compensatória . . . . .	36
Tabela 6 – Escala Fundamental de Saaty para comparações paritárias . . . . .	38
Tabela 7 – Tabela de Índices Randômicos . . . . .	41
Tabela 8 – Matriz de decisão inicial das alternativas nos subcritérios . . . . .	42
Tabela 9 – Matriz normalizada dos desempenhos das alternativas nos subcritérios . . . . .	43
Tabela 10 – Matriz de desempenhos agregados das alternativas no nível dos critérios . . . . .	43
Tabela 11 – <i>Ranking</i> final das alternativas segundo o desempenho global . . . . .	44
Tabela 12 – Critérios e subcritérios - <i>Case</i> nº 1 . . . . .	57
Tabela 13 – Matriz de Decisão . . . . .	58
Tabela 14 – Matriz de Decisão Normalizada . . . . .	59
Tabela 15 – Fatores Ênfase, e seus valores normalizados, dos subcritérios do modelo . . . . .	59
Tabela 16 – Fatores Ênfase, e seus valores normalizados, dos critérios do modelo . . . . .	60
Tabela 17 – Pesos normalizados dos critérios calculados pelos quatro métodos . . . . .	60
Tabela 18 – <i>Ranking</i> das UFs (uso do Método AHP-MEDAC) . . . . .	61
Tabela 19 – <i>Ranking</i> das UFs (uso dos demais métodos) . . . . .	62
Tabela 20 – Pesos dos subcritérios na análise de sensibilidade por normalização ( <i>case</i> 1)	65
Tabela 21 – Pesos dos critérios na análise de sensibilidade por normalização ( <i>case</i> 1) . . . . .	65
Tabela 22 – Matriz de correlações na análise de sensibilidade por normalização ( <i>case</i> 1)	65
Tabela 23 – Pesos dos subcritérios na análise de sensibilidade por categorização ( <i>case</i> 1)	66
Tabela 24 – Pesos dos critérios na análise de sensibilidade por categorização ( <i>case</i> 1). . . . .	66
Tabela 25 – Grupo e monotonicidade dos subcritérios . . . . .	67
Tabela 26 – Pesos normalizados dos critérios calculados pelos métodos AHP-MEDAC e AHP-Gaussiano (Adaptado) . . . . .	70
Tabela 27 – Pesos dos subcritérios na análise de sensibilidade por normalização ( <i>case</i> 2)	71

Tabela 28 – Pesos dos critérios na análise de sensibilidade por normalização ( <i>case 2</i> ) . . .	71
Tabela 29 – Matriz de correlações na análise de sensibilidade por normalização ( <i>case 2</i> )	71
Tabela 30 – Pesos dos subcritérios na análise de sensibilidade por categorização ( <i>case 2</i> )	72
Tabela 31 – Pesos dos critérios na análise de sensibilidade por categorização ( <i>case 2</i> ) . . .	72
Tabela 32 – Fatores Ênfase, e seus valores normalizados, dos subcritérios do modelo Municípios . . . . .	74
Tabela 33 – Fatores Ênfase, e seus valores normalizados, dos critérios do modelo Municípios	74
Tabela 34 – Top 10 do <i>Ranking</i> (Municípios) . . . . .	74
Tabela 35 – Formulações de agregação por subcritério para os modelos meso e microrregiões	77
Tabela 36 – Top 25 em cada subcritério (% Mesorregiões por UF) . . . . .	78
Tabela 37 – Top 100 em cada subcritério (% Microrregiões por UF) . . . . .	78
Tabela 38 – Top 25 em cada subcritério (% Mesorregiões por Região) . . . . .	78
Tabela 39 – Top 100 em cada subcritério (% Microrregiões por Região) . . . . .	79
Tabela 40 – Fatores Ênfase, e valores normalizados, dos subcritérios do modelo Mesorregiões . . . . .	79
Tabela 41 – Fatores Ênfase, e valores normalizados, dos subcritérios do modelo Microrregiões . . . . .	79
Tabela 42 – Fatores Ênfase, e valores normalizados, dos critérios do modelo Mesorregiões	80
Tabela 43 – Fatores Ênfase, e valores normalizados, dos critérios do modelo Microrregiões	80
Tabela 44 – Top 10 do <i>Ranking</i> (Mesorregiões) . . . . .	81
Tabela 45 – Top 10 do <i>Ranking</i> (Microrregiões) . . . . .	81
Tabela 46 – Pesos dos subcritérios na análise de sensibilidade por normalização ( <i>case 3</i> )	86
Tabela 47 – Pesos dos critérios na análise de sensibilidade por normalização ( <i>case 3</i> ) . . .	87
Tabela 48 – Matriz de correlações na análise de sensibilidade por normalização ( <i>case 3</i> )	87
Tabela 49 – Pesos dos subcritérios na análise de sensibilidade por categorização ( <i>case 3</i> )	87
Tabela 50 – Pesos dos critérios na análise de sensibilidade por categorização ( <i>case 3</i> ) . . .	88
Tabela 51 – <i>Top 10 do Ranking</i> dos Municípios (TOPSIS-MEDAC hierárquico e AHP-MEDAC) . . . . .	95
Tabela 52 – Pesos dos subcritérios na análise de sensibilidade por normalização ( <i>case 4</i> )	99
Tabela 53 – Pesos dos critérios na análise de sensibilidade por normalização ( <i>case 4</i> ) . . .	99
Tabela 54 – Matriz de correlações na análise de sensibilidade por normalização ( <i>case 4</i> )	100
Tabela 55 – Pesos dos subcritérios na análise de sensibilidade por categorização ( <i>case 4</i> )	100

Tabela 56 – Pesos dos critérios na análise de sensibilidade por categorização (*case 4*) . . 100

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AHP	<i>Analytic Hierarchy Process</i> / Processo de Análise Hierárquica
AHP-Equitativo	Método modificado do AHP com pesos calculados em função da variabilidade e assimetria dos dados, com ênfase na equidade
AHP-Gaussiano	Método modificado do AHP com pesos calculados em função da variabilidade e média dos dados
AHP-MEDAC	Método modificado do AHP com pesos calculados em função da variabilidade e assimetria dos dados, com ênfase generalizável (abordagem MEDAC)
ANP	<i>Analytic Network Process</i> / Processo de Análise em Rede
CO	Região Centro-Oeste do Brasil
DEA	<i>Data Envelopment Analysis</i> / Análise Envoltória de Dados
DEMA	Departamento de Estatística e Matemática Aplicada
ELECTRE	<i>ELimination Et Choix Traduisant la REalité</i> / Eliminação e Escolha Traduzindo a Realidade
ETI	Escolas de Tempo Integral
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
FG	Fator Gaussiano
FE	Fator Ênfase
GAIA	<i>Geometrical Analysis for Interactive Aid</i> / Análise Geométrica de Suporte Interativo
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
IDH	Índice de Desenvolvimento Humano
IDSE	Índice de Diferenciação Socioeconômica da Educação para ETI
INSE	Índice de Nível Socioeconômico dos Alunos
MAUT-UTA	<i>Multi-Attribute Utility Theory-Utilité Additive</i> / Teoria da Utilidade Multiatributo – Utilidade Aditiva
MCDA	<i>Multicriteria Decision Aid</i> / Apoio à Decisão Multicritério
MEDAC	<i>using skewness and variability Measures to Emphasize Decision Aid Criteria</i> / abordagem que utiliza medidas de assimetria e variabilidade para enfatizar critérios de apoio à decisão

NE	Região Nordeste do Brasil
NO	Região Norte do Brasil
PHFSS	<i>Picture Hesitant Fuzzy Soft Set</i> / Conjunto Fuzzy Soft Hesitante do Tipo <i>Picture</i>
PIB	Produto Interno Bruto
PNE	Plano Nacional de Educação do Brasil
PROMETHEE	<i>Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluation</i> / Método de Organização da Ordenação de Preferências por Avaliação de Fluxos de Preferência
q-ROF	<i>q-Rung Orthopair Fuzzy</i> / <i>Fuzzy</i> Ortogonal de q-ésimo Grau
ROCOSD	<i>Robustness, Correlation and Standard Deviation</i> / Robustez, Correlação e Desvio Padrão
SBPO	Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
SE	Região Sudeste do Brasil
SU	Região Sul do Brasil
TDIS	Taxa de Distorção Idade-Série
TOPSIS	<i>Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution</i> / Técnica para Ordenação de Preferências por Similaridade com a Solução Ideal
TOPSIS-MEDAC	Método modificado do TOPSIS com pesos calculados em função da variabilidade e assimetria dos dados, com ênfase generalizável (abordagem MEDAC)
TWD	<i>Three-Way Decision</i> / Decisão em Três Vias
UFC	Universidade Federal do Ceará
UFs	Unidades Federativas do Brasil
UTADIS	<i>Utilités Additives Discriminantes</i> / Utilidades Aditivas Discriminantes
VAAT	Valor Aluno Ano Total

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	Matriz de decisão com os desempenhos das alternativas, $A = [a_{ij}]_{n \times m}$
$A^*$	Matriz de decisão normalizada (AHP), conforme o contexto
$A_k^*$	Vetor de prioridade local referente ao subcritério $k$
$A^+$	Solução ideal (TOPSIS)
$A^-$	Solução anti-ideal (TOPSIS)
$a_{ij}$	Desempenho da alternativa $i$ no critério $j$
$a'_{ij}$	Desempenho da alternativa $i$ no critério $j$ após conversão de monotonicidade (AHP) ou após normalização (TOPSIS)
$a^*_{ij}$	Desempenho normalizado (AHP)
$a^*_{ik}$	Desempenho julgado para a alternativa no critério $k$ (AHP)
$a''_{ij}$	Desempenho normalizado e ponderado (TOPSIS)
$a^+_j$	Melhor desempenho (componente $j$ da solução ideal)
$a^-_j$	Pior desempenho (componente $j$ da solução anti-ideal)
$b_{ijk}$	Julgamento paritário (escala de Saaty) entre alternativas $i$ e $j$ no critério $k$
$b'_{ijk}$	Julgamento paritário normalizado
$\widetilde{a^*}_{.k}$	Mediana dos desempenhos normalizados no critério $k$
$\overline{a^*}_{.k}$	Média dos desempenhos normalizados no critério $k$
$\sigma(a^*_{.k})$	Desvio padrão dos desempenhos normalizados no critério $k$
$C_k$	Critério $k$
$C_{k.\ell}$	Subcritério $\ell$ associado ao critério $k$
$d^+_i$	Distância euclidiana da alternativa $i$ até $A^+$ (TOPSIS)
$d^-_i$	Distância euclidiana da alternativa $i$ até $A^-$ (TOPSIS)

$FE_k$	Fator Ênfase do critério $k$
$FE_{k_j}$	Fator Ênfase do subcritério $j$ do critério $k$
$FE_{k_j}^*$	Fator Ênfase normalizado do subcritério $j$ do critério $k$
$FEq_k$	Fator Equitativo do critério $k$
$FEq_{k_j}^*$	Fator Equitativo normalizado do subcritério $j$ do critério $k$
$FG_k$	Fator Gaussiano do critério $k$
$FG_{k_j}^*$	Fator Gaussiano normalizado do subcritério $k_j$ do critério $k$
$G$	Vetor de prioridade global das alternativas
$G(A_i)$	Prioridade global (pontuação) da alternativa $A_i$
$i$	Índice de alternativa, $i = 1, \dots, n$
$IC$	Índice de Consistência
$IR$	Índice Randômico
$j$	Índice de critério, $j = 1, \dots, m$
$k$	Índice de critério (ou grupo de subcritérios), conforme o contexto
$L$	Nível corrente da hierarquia ilustrado nos Pseudo-códigos
$L_{\text{último}}$	Último nível/mais baixo da hierarquia ilustrado nos Pseudo-códigos
$L_k$	Vetor de prioridade local referente ao critério $k$
$m$	Número de critérios no modelo
$m_k$	Número de subcritérios associados ao critério $k$
$n$	Número de alternativas no modelo
$N$	Ordem da matriz de julgamentos (na tabela do IR)
$RC$	Razão de Consistência
$W$	Vetor de pesos dos critérios do modelo

$W_k^E$	Vetor de pesos dos subcritérios subordinados ao critério $k$
$W^*$	Matriz de julgamentos dos critérios (AHP)
$W_k$	Vetor de pesos dos subcritérios do critério $k$
$W_k^G$	Vetor de pesos dos subcritérios vinculados ao critério $k$
$\lambda_{\max}$	Autovalor máximo da matriz de julgamentos
$\delta_k^+$	Semi-desvio acima da mediana no critério $k$
$\delta_k^-$	Semi-desvio abaixo da mediana no critério $k$
$\sigma(a_{.k}^*)^+$	Semidesvio padrão acima da média no critério $k$
$\sigma(a_{.k}^*)^-$	Semidesvio padrão abaixo da média no critério $k$
$\xi_i$	Coefficiente de proximidade relativa da alternativa $i$ (TOPSIS)
$\rho$	Coefficiente de correlação de Spearman

## LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – AHP-Equitativo (Pseudocódigo) . . . . .	52
Algoritmo 2 – AHP-MEDAC (Pseudocódigo) . . . . .	55
Algoritmo 3 – TOPSIS-MEDAC hierárquico (Pseudocódigo) . . . . .	92

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>21</b>
<b>1.1</b>	<b>Contextualização</b>	<b>21</b>
<b>1.2</b>	<b>Motivação e justificativa da relevância do trabalho</b>	<b>22</b>
<b>1.3</b>	<b>Estado da arte</b>	<b>24</b>
<b>1.4</b>	<b>Objetivos</b>	<b>28</b>
<i>1.4.1</i>	<i>Objetivo geral</i>	<i>28</i>
<i>1.4.2</i>	<i>Objetivos específicos</i>	<i>29</i>
<b>1.5</b>	<b>Estrutura geral do documento</b>	<b>29</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>30</b>
<b>2.1</b>	<b>Métodos MCDA</b>	<b>30</b>
<b>2.2</b>	<b>Método AHP</b>	<b>36</b>
<b>2.3</b>	<b>Método AHP-Gaussiano</b>	<b>45</b>
<b>2.4</b>	<b>Método TOPSIS</b>	<b>46</b>
<b>3</b>	<b>MÉTODO AHP-EQUITATIVO</b>	<b>50</b>
<b>4</b>	<b>MÉTODO AHP-MEDAC</b>	<b>53</b>
<b>4.1</b>	<b>Descrição do método</b>	<b>53</b>
<b>4.2</b>	<b>Aplicação do método no contexto educacional</b>	<b>56</b>
<i>4.2.1</i>	<i>Modelo nº 1: case “Geral” (nível de aplicação - UFs)</i>	<i>56</i>
<i>4.2.1.1</i>	<i>Implementação do modelo</i>	<i>56</i>
<i>4.2.1.2</i>	<i>Análise de sensibilidade do modelo</i>	<i>63</i>
<i>4.2.2</i>	<i>Modelo nº 2: case “Obras” (nível de aplicação - municípios)</i>	<i>67</i>
<i>4.2.2.1</i>	<i>Implementação do modelo</i>	<i>67</i>
<i>4.2.2.2</i>	<i>Análise de sensibilidade do modelo</i>	<i>70</i>
<i>4.2.3</i>	<i>Modelo nº 3: case “Transporte Escolar” (nível de aplicação - municípios, mesorregiões e microrregiões)</i>	<i>72</i>
<i>4.2.3.1</i>	<i>Implementação do modelo</i>	<i>72</i>
<i>4.2.3.2</i>	<i>Análise de sensibilidade do modelo</i>	<i>85</i>
<b>5</b>	<b>MÉTODO TOPSIS-MEDAC HIERÁRQUICO</b>	<b>89</b>
<b>5.1</b>	<b>Descrição do método</b>	<b>89</b>
<b>5.2</b>	<b>Aplicação do método no contexto educacional</b>	<b>93</b>

5.2.1	<i>Modelo: case ‘Transporte Escolar’ (nível de aplicação - municípios)</i> . . .	93
5.2.1.1	<i>Implementação do modelo</i> . . . . .	93
5.2.1.2	<i>Análise de sensibilidade do modelo</i> . . . . .	99
6	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b> . . . . .	102
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	104

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Contextualização

A tomada de decisão multicritério consiste em um processo cognitivo de escolha entre duas ou mais alternativas, levando em consideração a influência de diversos critérios envolvidos e a busca por múltiplos objetivos preferíveis. Esse processo decisório frequentemente se torna complexo devido a opiniões conflitantes entre os tomadores de decisão, à presença de incertezas, à pressão do tempo, aos recursos disponíveis e até mesmo aos vieses emocionais, os quais podem, em certa medida, transformar essa complexidade em um problema que pode resultar em consequências adversas para a decisão.

Nesse contexto, como solução para tais problemas decisórios, existe um campo do conhecimento dentro da pesquisa operacional denominado Apoio à Decisão Multicritério (*Multicriteria Decision Aid* — MCDA), que envolve métodos matemáticos que, quando aplicados a modelos de decisão, propiciam resultados consistentes para dar suporte à problemática. Um modelo de decisão corresponde a uma representação formal e simplificada do problema (Almeida, 2013), voltada à adequada estruturação das avaliações e da atribuição de valores, com apoio dos chamados métodos multicritério de apoio à decisão (métodos MCDA).

No âmbito das comunidades científica e acadêmica atuantes na área de MCDA, diversos métodos são aplicados em contextos distintos, como problemas de seleção, ordenação e classificação, refletindo em um cenário positivo quanto à contribuição da ciência para o desenvolvimento social e organizacional.

Uma pesquisa estatística sobre a aplicação desses métodos em artigos científicos, no período de 1995 a 2016, destaca os métodos AHP e TOPSIS como os mais utilizados, representando cerca de 46% das aplicações em estudos voltados à tomada de decisão (Oliveira e Salomon, 2017). Esse resultado evidencia a relevância desses métodos no campo do Apoio à Decisão Multicritério, indicando uma motivação para sua desenvoltura inicial, devido à ampla aplicabilidade, clareza metodológica, facilidade de entendimento e capacidade de lidar com problemas estruturais complexos.

O método AHP (*Analytic Hierarchy Process*), desenvolvido por Thomas L. Saaty na década de 1970, organiza o processo decisório em uma estrutura hierárquica composta por objetivo, critérios e alternativas, permitindo que o decisor compare as alternativas em pares e atribua pesos conforme sua percepção de importância. Com base na soma ponderada

dos desempenhos ao longo dos critérios, a melhor alternativa identificada é aquela de melhor desempenho geral calculado (Saaty, 1987). Uma versão modificada desse método, denominada AHP-Gaussiano, foi proposta por Marcos Santos *et al.* em 2021 e utiliza uma abordagem quantitativa para determinar os pesos, baseada na média e no desvio padrão dos dados de cada critério, sem depender do julgamento direto do decisor (Santos *et al.*, 2021). Por sua vez, o método TOPSIS (*Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution*), proposto por Hwang e Yoon, segue o princípio de que a melhor alternativa é aquela mais próxima da solução perfeita e mais distante da solução menos desejada, sendo essas distâncias calculadas levando em consideração os desempenhos normalizados das alternativas ao longo dos critérios (Hwang e Yoon, 1981).

Para ilustrar de maneira simples uma aplicação prática desses métodos, imagine, por exemplo, um cenário onde uma pessoa precise escolher um curso universitário. As alternativas podem incluir diferentes instituições de ensino, cada uma com características próprias. Os critérios de avaliação podem envolver fatores como a qualidade do corpo docente, a infraestrutura disponível, a localização, os custos e o mercado de trabalho. Nesse tipo de situação, os métodos multicritério auxiliam o decisor a organizar suas preferências e a ponderar os critérios de acordo com sua importância relativa, resultando em uma escolha mais racional e coerente com seus objetivos pessoais.

## **1.2 Motivação e justificativa da relevância do trabalho**

A motivação deste trabalho surge da necessidade de desenvolver instrumentos de apoio à decisão multicritério capazes de aprimorar processos decisórios em políticas públicas, especialmente em contextos marcados por desigualdades estruturais. No âmbito de um projeto de pesquisa do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), tornou-se necessário criar modelos de ranqueamento de entidades federativas que orientassem a distribuição de recursos educacionais de forma equânime, transparente e sensível às desigualdades existentes entre diferentes realidades territoriais. Esse cenário evidenciou a importância de metodologias capazes de incorporar, de maneira explícita, uma ênfase voltada à equidade diretamente em critérios específicos, permitindo que o processo decisório refletisse princípios de justiça social e assegurasse que entidades federativas em situação mais crítica recebessem atenção proporcional às suas necessidades.

Além disso, o contexto do problema analisado impôs restrições práticas relevantes

à modelagem do processo decisório. A elevada dimensionalidade do conjunto de alternativas, representadas por municípios, mesorregiões e microrregiões, associada à necessidade de construção de modelos replicáveis, escaláveis e passíveis de atualização periódica, tornou pouco viável a adoção de abordagens fortemente dependentes de julgamentos subjetivos e comparações diretas entre alternativas. Nesse cenário, mostrou-se mais adequado o desenvolvimento de modelos capazes de operar predominantemente a partir de bases de dados pré-existentes, reduzindo a dependência de processos intensivos de elicitación de preferências e permitindo que o processo decisório fosse conduzido de forma mais objetiva, transparente e compatível com a complexidade do problema tratado.

A justificativa da relevância deste trabalho está associada ao fato de que, embora métodos consolidados como AHP e TOPSIS sejam amplamente utilizados, eles apresentam limitações quando se busca integrar análises quantitativas decorrentes dos dados (como, por exemplo, variabilidade e assimetria) com ênfases qualitativas definidas pelo decisor. Esses métodos tradicionais constituíram o ponto de partida para o desenvolvimento das propostas aqui apresentadas. A partir deles, foram estruturadas três propostas metodológicas: AHP-Equitativo, AHP-MEDAC e TOPSIS-MEDAC Hierárquico. O primeiro representa a etapa inicial dessa linha de pesquisa e foi apresentado em Ferreira e Rêgo (2024), sendo publicado nos anais do 56º Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO), o que reforça seu reconhecimento como proposta inovadora.

Os métodos AHP-MEDAC e TOPSIS-MEDAC Hierárquico avançam essa mesma linha, incorporando de maneira mais robusta a abordagem MEDAC (*using skewness and variability Measures to Emphasize Decision Aid Criteria*). Essa abordagem permite que características estatísticas dos próprios dados guiem a determinação dos pesos, potencializando critérios associados à ênfase definida pelo decisor. Assim, a estrutura dos métodos deixa de depender prioritariamente de julgamentos subjetivos, passando a refletir, de forma mais direta, as condições empíricas observadas no problema analisado.

Essas duas metodologias (AHP-MEDAC e TOPSIS-MEDAC Hierárquico) configuram contribuições particularmente relevantes para a literatura, pois se mostram mais robustas e adaptáveis a diferentes cenários e estudos futuros, independentemente da área de aplicação. Embora a equidade tenha sido a ênfase adotada no projeto do FNDE, os métodos permitem trabalhar com qualquer ênfase específica, tais como eficiência, vulnerabilidade social, qualidade, impacto ambiental, saúde ou qualquer outro foco definido pelo decisor, o que amplia significativamente

seu potencial de uso.

A relevância dessas propostas também se evidencia ao oferecerem uma alternativa atualizada, transparente e orientada por dados para problemas complexos de priorização. Ao integrar dimensões quantitativas e qualitativas em uma única estrutura de decisão, os métodos desenvolvidos neste trabalho fornecem instrumentos mais fidedignos, capazes de reduzir vieses associados a julgamentos exclusivamente subjetivos e de fortalecer decisões alinhadas às necessidades reais observadas nos dados. Essa capacidade reforça a utilidade dos métodos não apenas em políticas públicas, mas em qualquer contexto que demande priorização criteriosa e fundamentada.

### 1.3 Estado da arte

Nos últimos anos, diversos estudos propuseram extensões e melhorias aos métodos AHP e TOPSIS (Tabela 1), visando benefícios como: redução de julgamentos e inconsistências (Pascoe *et al.*, 2023); incorporação de incerteza nas comparações pareadas (Otay *et al.*, 2023); otimização do vetor de prioridades com base em propriedades desejáveis como consistência, coerência e intensidade (Bartl e Ramík, 2022); controle da incerteza e aumento da satisfação decisória com uso do desvio padrão geométrico e julgamentos intervalares (Grošelj e Dolinar, 2023); e ajuste metodológico para refletir variações decorrentes de incertezas nos dados (Vaz *et al.*, 2025). Dentre essas modificações adotadas em relação ao AHP, uma metodologia que é interessante destacar e que serve de fundamentação para uma das propostas deste estudo é o método AHP-Gaussiano (Santos *et al.*, 2021), que propõe uma abordagem otimizada para determinar a importância dos critérios com base na variabilidade dos dados. No mesmo sentido, para o método TOPSIS, contribuições relevantes podem ser citadas tais como a integração deste método com a teoria da *Three-Way Decision* (Zhang *et al.*, 2021), a formulação em ambiente neutrosófico de valor único (Karabasević *et al.*, 2020) e a extensão para contexto *intuitionistic fuzzy* em decisão de grupo (Parveen e Kamble, 2021).

Além desses, há vários recentes trabalhos de destaque que vêm contribuindo na literatura, em geral, sobre os métodos MCDA (Tabela 2), como por exemplo as contribuições de HUANG *et al.* (2023) e TU *et al.* (2023) cujos esforços se voltam para o método *Best-Worst Method*; o primeiro propõe a extração de pesos a partir de preferências *fuzzy* incompletas, enquanto o segundo introduz métodos de priorização que incorporam julgamentos indiretos. DEVECI *et al.* (2024) integram conjuntos *fuzzy* de *Fermatean* para lidar com incertezas. PALA

(2023) propõem o método ROCOSD (*Robustness, Correlation and Standard Deviation*), que considera simultaneamente desvios padrão, coeficientes de correlação e robustez das classificações. ASHRAF *et al.* (2025) empregam o modelo PHFSS (*Picture Hesitant Fuzzy Soft Set*) para representar informações ambíguas e propõem um novo método aplicado à gestão sustentável de energia solar. LIU *et al.* (2025) propõem um modelo de decisão em grupo que incorpora preocupações com equidade e consenso, utilizando ordenação por desvio mínimo. Por fim, FARID *et al.* (2025) introduzem uma abordagem baseada em dados imprecisos utilizando conjuntos *q-Rung Orthopair Fuzzy Rough Sets*, apoiando decisões mais eficazes em políticas de transporte urbano frente às mudanças climáticas.

Apesar desses avanços, nenhuma das abordagens mencionadas integra simultaneamente análises quantitativas (variabilidade e assimetria) e qualitativas (julgamento de agrupamento pelo decisor) com foco em análise de dados para a modelagem dos critérios envolvidos na decisão. Especificamente, na área de políticas públicas e alocação de recursos educacionais, por exemplo, as contribuições são ainda mais escassas (Tabela 3). Alguns estudos tratam da alocação com viés social ou de equidade, como OMOEVA *et al.* (2021), que apresentam um modelo de medição de justiça distributiva com base na distribuição de recursos segundo as necessidades dos estudantes; WANG; LIU (2022), que utilizam *Data Envelopment Analysis* (DEA) com algoritmos de otimização na alocação eficiente de recursos na educação infantil; JUNG; WICKSTROM (2023), que propõem tarefas de modelagem matemática voltadas ao desenvolvimento de modelos escolares justos para distribuição de recursos públicos. Trabalhos mais recentes avançam no uso de técnicas orientadas a dados, como JIANG (2025), que emprega *Deep Learning* para prever demandas e otimizar a alocação governamental de recursos educacionais; SILVA *et al.* (2025), que utilizam modelos de aprendizado de máquina para previsão de matrículas escolares como subsídio ao planejamento de políticas públicas no contexto brasileiro; ALMASI; ANAHIDEH (2025), que propõem um arcabouço de alocação individualizada baseado em *bi-level contextual bandits* sob *delayed feedback*, incorporando restrições operacionais e de equidade; e XU (2024), que desenvolveu um modelo de previsão de demanda e recomendação de recursos no ensino superior baseado em *big data*, utilizando técnicas de filtragem colaborativa com métricas de similaridade.

Tabela 1 – Trabalhos que contribuíram com extensões e melhorias, especificamente, para os métodos AHP e TOPSIS

<b>Trabalho</b>	<b>Abordagem</b>	<b>Principais Contribuições</b>	<b>Limitações</b>
(Pascoe <i>et al.</i> , 2023)	AHP modificado	Redução de julgamentos e inconsistências	Pode simplificar demasiadamente o modelo
(Otay <i>et al.</i> , 2023)	AHP com incerteza	Comparações pareadas com incerteza	Exige modelagem <i>fuzzy</i> /intervalar
(Bartl e Ramík, 2022)	AHP otimizado	Vetor de prioridades mais consistente e coerente	Carga computacional maior
(Grošelj e Dolinar, 2023)	AHP intervalar	Controle de incertezas e aumento na satisfação decisória	Dificuldade prática de aplicação
(Vaz <i>et al.</i> , 2025)	AHP ajustado	Ajustes metodológicos para refletir incerteza nos dados	Perda de simplicidade do AHP tradicional
(Santos <i>et al.</i> , 2021)	AHP-Gaussiano	Determina pesos pela variabilidade dos dados, sem preferências do decisor	Limitação em problemas qualitativos
(Zhang <i>et al.</i> , 2021)	TOPSIS + TWD	Integra classificação e ordenação em ambiente <i>fuzzy</i>	Interpretação menos intuitiva
(Karabasević <i>et al.</i> , 2020)	TOPSIS neutrosófico	Adapta o método TOPSIS para uso com conjuntos neutrosóficos de valor único, permitindo lidar com graus de verdade, indeterminação e falsidade	Requer definições adicionais para representar corretamente a incerteza neutrosófica
(Parveen e Kamble, 2021)	TOPSIS <i>fuzzy</i> intuitivista	Estende o TOPSIS para o contexto de decisão em grupo sob ambiente <i>intuitionistic fuzzy</i> , ampliando sua aplicabilidade em situações com hesitação e imprecisão	Cálculo mais complexo e dependente da definição de funções de pertinência e hesitação

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 2 – Trabalhos que contribuíram na literatura, em geral, sobre os métodos MCDA

<b>Trabalho</b>	<b>Abordagem</b>	<b>Principais Contribuições</b>	<b>Limitações</b>
(Huang <i>et al.</i> , 2023)	Best-Worst Method	Extração de pesos a partir de preferências <i>fuzzy</i> incompletas	Dependência da qualidade dos julgamentos <i>fuzzy</i> incompletos
(Tu <i>et al.</i> , 2023)	Best-Worst Method	Priorização com julgamentos indiretos	Pode gerar complexidade adicional
(Deveci <i>et al.</i> , 2024)	Fermatean Fuzzy	Tratamento de incertezas complexas	Interpretação difícil para decisores
(Pala, 2023)	ROCOSD	Integra robustez, correlação e desvio padrão	Complexidade computacional elevada
(Ashraf <i>et al.</i> , 2025)	PHFSS	Representação de informações ambíguas	Aplicação restrita ao setor energético
(Liu <i>et al.</i> , 2025)	Ordenação por desvio mínimo	Incorpora equidade e consenso em decisão em grupo	Exige consenso entre decisores
(Farid <i>et al.</i> , 2025)	q-ROF Sets	Rough Apoio a decisões em transporte urbano sob incerteza	Limitação em contextos fora de transporte

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 3 – Trabalhos que contribuíram, especificamente, no âmbito de políticas públicas de educação através de modelagem

<b>Trabalho</b>	<b>Abordagem</b>	<b>Principais Contribuições</b>	<b>Limitações</b>
(Omoeva <i>et al.</i> , 2021)	Modelo de justiça distributiva	Mede equidade na alocação de recursos conforme necessidades estudantis	Pouca operacionalização prática
(Wang e Liu, 2022)	DEA + otimização	Alocação eficiente de recursos na educação infantil	Foco restrito em eficiência técnica
(Jung e Wickstrom, 2023)	Modelagem matemática	Desenvolvimento de modelos escolares justos	Requer adaptação para diferentes contextos
(Jiang, 2025)	<i>Deep Learning</i>	Previsão de demanda e otimização da alocação governamental de recursos educacionais	Baixa interpretabilidade e dependência de grandes volumes de dados
(Silva <i>et al.</i> , 2025)	<i>Machine Learning</i> (Random Forest)	Previsão de matrículas escolares como subsídio ao planejamento de políticas públicas educacionais	Não aborda explicitamente critérios de equidade ou julgamento do decisor
(Almasi e Anahideh, 2025)	<i>Bi-level contextual bandits</i>	Alocação individualizada de recursos sob <i>delayed feedback</i> com restrições operacionais e de equidade	Elevada complexidade computacional e foco em decisões sequenciais individuais
(Xu, 2024)	<i>Big data</i> e filtragem colaborativa	Alocação otimizada de recursos no ensino superior baseada em similaridade e recomendação de recursos	Ausência de estrutura multicritério explícita e de julgamento decisório

Fonte: Elaboração própria.

## 1.4 Objetivos

### 1.4.1 Objetivo geral

O objetivo geral desta dissertação é desenvolver e analisar propostas metodológicas de apoio à decisão multicritério capazes de gerar modelos de ranqueamento fundamentados em ênfases definidas pelo decisor. Tais propostas integram simultaneamente aspectos quantitativos (provenientes da variabilidade e assimetria dos dados de cada critério) e aspectos qualitativos (expressos na escolha de critérios enfatizados), permitindo construir resultados mais alinhados às prioridades estratégicas, diretrizes institucionais, princípios e orientações políticas que moldam processos decisórios em diferentes organizações e contextos de aplicação.

### 1.4.2 *Objetivos específicos*

- Apresentar o método AHP-Equitativo como a primeira formulação desenvolvida nesta pesquisa, destacando sua motivação, suas características e seu papel inicial na construção de modelos orientados por ênfase;
- Introduzir, formalizar e justificar a abordagem MEDAC (*using skewness and variability Measures to Emphasize Decision Aid Criteria*) como fundamento estatístico para a construção de métodos multicritério orientados por dados;
- Desenvolver o método AHP-MEDAC, incorporando a abordagem MEDAC à estrutura decisória do AHP, de modo a potencializar critérios enfatizados com base em medidas estatísticas dos dados;
- Desenvolver o método TOPSIS-MEDAC hierárquico, estendendo a abordagem MEDAC ao TOPSIS e estruturando-o de forma hierárquica para lidar com problemas complexos de priorização;
- Aplicar os métodos propostos ao contexto educacional, comparando-os entre si e com o método AHP-Gaussiano, por meio de análises de pesos, correlação entre *rankings*, segmentações e análise de sensibilidade, com o objetivo de avaliar a robustez, a consistência e a aplicabilidade prática das propostas.

## 1.5 Estrutura geral do documento

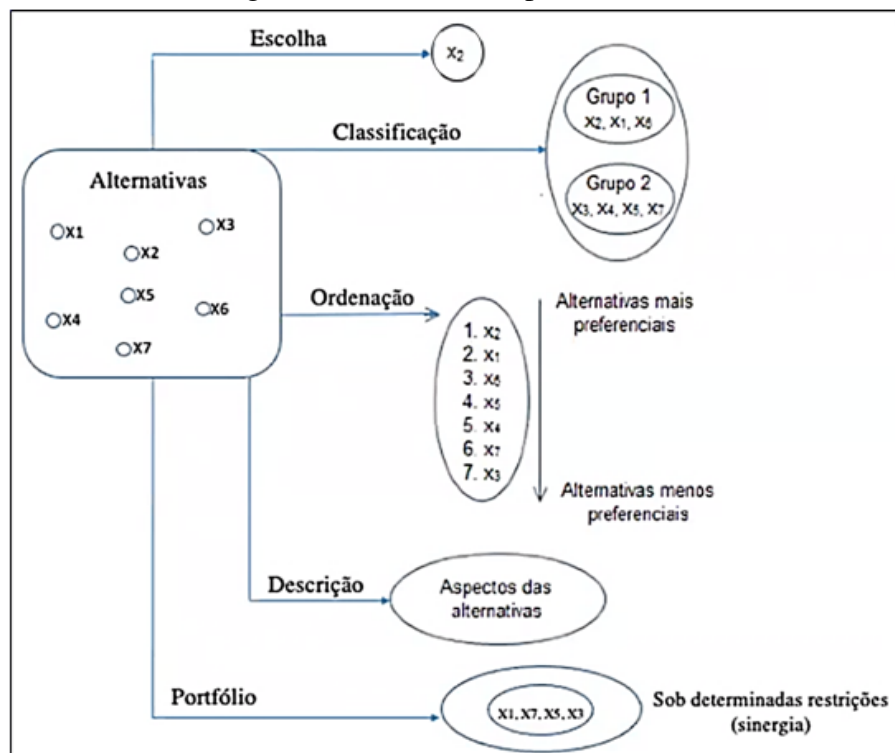
Além desta introdução, este trabalho está estruturado da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica que embasa as propostas metodológicas. O Capítulo 3 descreve o método *AHP-Equitativo*, que constitui a primeira proposta metodológica desenvolvida nesta dissertação, aplicado a um *case* em que denominamos como “Geral” no âmbito das Unidades Federativas do Brasil (UFs). O Capítulo 4 apresenta o método *AHP-MEDAC*, segunda proposta formulada nesta pesquisa, o qual também é avaliado por meio do *case* “Geral” (nível de aplicação em UFs), bem como pelos *cases* “Obras” e “Transporte Escolar”, ambos considerando o nível de aplicação municipal, sendo que, neste último, a modelagem também é feita a nível de mesorregiões e microrregiões. O Capítulo 5 trata do método *TOPSIS-MEDAC hierárquico*, terceira proposta metodológica desenvolvida, aplicada ao *case* “Transporte Escolar”, com foco no nível de aplicação municipal. Por fim, o Capítulo 6 apresenta as conclusões e as direções para trabalhos futuros.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Métodos MCDA

A tomada de decisão multicritério consiste em um processo cognitivo que envolve a avaliação de um conjunto de alternativas com base em vários critérios, levando em consideração o tipo de decisão que se pretende tomar. De acordo com a Figura 1, diferentes tratativas são necessárias conforme a natureza do problema.

Figura 1 – Diferentes tipos de decisão



Fonte: Silva (2020)

Conforme se nota há diferentes formas de se tratar as alternativas em um problema de decisão multicritério: por meio de escolha, classificação, ordenação, descrição ou definição de portfólio sob restrições. Essa estrutura evidencia a flexibilidade e a robustez dos métodos MCDA no apoio à tomada de decisão em contextos diversos.

No entanto, esse processo pode se tornar complexo em função de diversos fatores, tais como:

- Conflito de opiniões entre os decisores;
- Existência de incertezas nos dados;
- Pressão relacionada ao fator tempo;

- Limitação de recursos disponíveis;
- Presença de vieses emocionais.

Para lidar com tais desafios, a área de *Apoio à Decisão Multicritério*, inserida no campo da *Pesquisa Operacional*, desenvolve abordagens matemáticas que auxiliam na modelagem de problemas decisórios. Esses métodos visam desenvolver soluções consistentes para uma melhor tomada de decisão.

Conforme Costa e Belderrain (2009), o uso de Métodos Multicritério de Apoio à Decisão permite a agregação de características importantes para a tomada de decisão, propiciando uma melhor compreensão das dimensões do problema e inserção de incertezas, bem como uma melhor estruturação deste em consonância com as preferências do decisor. Existem inúmeros métodos aplicados no apoio à tomada de decisão, cuja escolha do método ocorre de acordo com o problema que se deseja resolver. Boeno e Chiwiacowsky (2020) apresentam uma classificação desses métodos por tipo de problema, conforme ilustrado na Tabela 4.

No contexto da tomada de decisão multicritério, é comum distinguir os métodos MCDA entre abordagens *preference-based* e *data-driven*, sendo as formulações tradicionais predominantemente enquadradas na primeira categoria. Os métodos *preference-based*, tais como AHP (Saaty, 1994), MACBETH (Costa e Vansnick, 1994) e a família dos métodos ELECTRE (Roy, ), constroem modelos de decisão a partir da elicitación direta das preferências do tomador de decisão, por meio de comparações pareadas, julgamentos semânticos ou da definição explícita de parâmetros de agregação, pesos e limiares. Nessas abordagens, o modelo é essencialmente interativo e construtivo, refletindo de forma explícita a estrutura cognitiva e os juízos subjetivos do decisor no processo de apoio à decisão.

Em contraste, a abordagem *data-driven* fundamenta-se na inferência de modelos de preferência a partir de dados pré-existentes, tais como escolhas observadas, comparações empíricas ou medições históricas, reduzindo a dependência da elicitación direta junto ao decisor. Nessa categoria, destacam-se modelos oriundos da teoria da escolha discreta, amplamente empregados para inferir preferências a partir de decisões efetivamente observadas em contextos reais (Train, 2009). Avanços mais recentes incluem abordagens baseadas em *machine learning* e *preference learning*, as quais utilizam técnicas de regressão, classificação e aprendizado de *rankings* para capturar regularidades, padrões latentes e incertezas presentes nos dados (Hüllermeier e Słowiński, 2024). O método AHP-Gaussiano (Santos *et al.*, 2021), que serviu como inspiração para este trabalho, enquadra-se nesta categoria de *data-driven*, uma vez que

calcula os pesos dos critérios com base na variabilidade dos desempenhos das alternativas nos critérios. Adicionalmente, observa-se também uma linha de pesquisa emergente voltada ao desenvolvimento de abordagens híbridas, nas quais estruturas clássicas de MCDA são integradas a técnicas avançadas de aprendizado profundo para inferência conjunta de parâmetros, pesos e limiares a partir de grandes volumes de dados, preservando a interpretabilidade dos modelos (Martyn e Kadziński, 2022).

De acordo com Almeida (2013), uma importante característica em Métodos Multi-critério, relevante para a escolha do método, está relacionada à racionalidade compensatória que pode existir ou não entre os critérios. Em função disso, os métodos se classificam em:

- **Métodos Compensatórios:** o baixo desempenho de uma alternativa em um critério pode ser compensado por um alto desempenho desta em um outro critério.
- **Métodos Não Compensatórios:** o baixo desempenho de uma alternativa em um critério não pode ser compensado por um alto desempenho desta em um outro critério.

Um exemplo de racionalidade compensatória, conforme Figura 2, ocorreu em uma partida de futebol válida pelo Campeonato Brasileiro de 2023 entre Palmeiras e Botafogo, onde o time do Botafogo venceu o 1º tempo da partida por 3 a 0, mas o Palmeiras reverteu o resultado no 2º tempo, vencendo o jogo por 4 a 3, de modo a notar que o desempenho superior do time vencedor em um critério (2º tempo) compensou seu desempenho inferior em outro (1º tempo), sendo o resultado final da partida definido pelo desempenho agregado. Por outro lado, um exemplo de abordagem não compensatória, conforme Figura 3, ocorreu nas eleições presidenciais dos Estados Unidos em 2016, em que Hillary Clinton, apesar de ter obtido o maior número de votos totais, não saiu vencedora, dado que Donald Trump alcançou a vitória por ter ganho as eleições em estados que lhe garantiram a maioria dos delegados, evidenciando que os votos obtidos pela candidata em estados nos quais foi derrotada não exerceram influência sobre a atribuição de delegados em outros estados e, portanto, não puderam ser compensados no resultado final da apuração.

Ainda sobre as diferença entre essas abordagens, para melhor comparabilidade, considere como outro exemplo um jogo de vôlei entre dois times A e B com 5 sets, mostrado na Tabela 5. Considerando as pontuações agregadas em todos os sets, os times A e B obtiveram, respectivamente, as pontuações 93 e 104. Ao mesmo tempo, dentre os 5 sets, o time A ganhou 3 deles, enquanto o time B ganhou os 2 restantes. Pela abordagem compensatória (modelo aditivo), o time B venceria a partida por 104 a 93, enquanto que pela abordagem não compensatória, o

vencedor seria o time A por ter vencido 3 sets contra 2.

Uma análise estatística da frequência de aplicação dos métodos MCDA em artigos científicos, publicados entre 1995 e 2016, evidencia o uso relevante dos métodos AHP e TOPSIS na literatura (contribuição agregada de 46% das ocorrências identificadas), conforme apresentado na Figura 4 (Oliveira e Salomon, 2017). Esse resultado reforça a importância desses dois métodos no contexto de apoio à decisão multicritério, destacando-se por sua fundamentação conceitual clara e pela facilidade de implementação em diferentes contextos práticos.

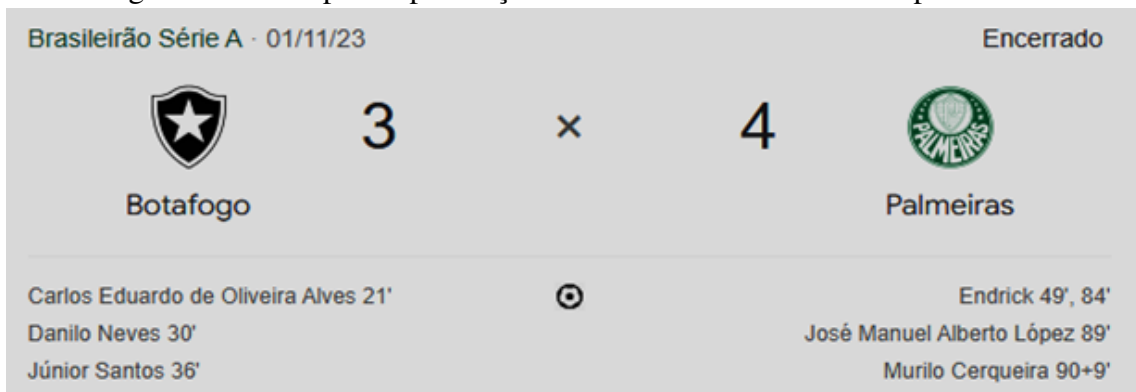
Diante desse cenário, este trabalho adota os métodos AHP e TOPSIS como base para o desenvolvimento e a aplicação dos modelos de decisão multicritério investigados. Na sequência, são apresentados o método AHP em sua formulação clássica, bem como uma variação proposta baseada em pressupostos estatísticos (AHP-Gaussiano), além do método TOPSIS, que fundamentam os modelos e aplicações desenvolvidos nos capítulos subsequentes.

Tabela 4 – Métodos de decisão multicritério classificados por tipo de problema

<b>Tipo de problema</b>	<b>Método</b>	<b>Exemplo de aplicação (Artigo de referência)</b>
Problemas de Seleção	AHP	<i>Utilização do método AHP em projeto para seleção de uma agência de marketing em uma empresa B2B</i> (Santin et al., 2023)
	ANP	<i>Neighborhood selection using the Analytical Network Process method for the capacitated vehicle routing problems</i> (Takan e Öztürk, 2023)
	MAUT-UTA	<i>UTASTAR method and its application in multi-criteria warehouse location selection</i> (Ehsanifar et al., 2021)
	PROMETHEE	<i>Aplicação do PROMETHEE V para seleção de portfólio de ações dos departamentos para inclusão no plano orçamentário anual da UFPE</i> (Rocha et al., 2022)
	ELECTRE I	<i>ELECTRE I para seleção de critério do sistema de qualidade de atenção ao paciente</i> (Silva e Jerônimo, 2020)
	TOPSIS	<i>Aplicação de um modelo baseado no método TOPSIS para a seleção de fornecedores em uma usina siderúrgica</i> (Garcia et al., 2023)
	DEA	<i>Input and output reconsidered in supplier selection dea model</i> (Dobos e Vörösmarty, 2023)
Problemas de Ordenação	AHP	<i>Analytic Hierarchy Process applied in the prioritization of third-party logistics providers in banking services</i> (Testoni et al., 2024)
	ANP	<i>Analytic Network Process (ANP) method: a comprehensive review of applications, advantages, and limitations</i> (Taherdoost e Madanchian, 2023)
	MAUT-UTA	<i>Applying fuzzy utilities additives star for sustainable supplier selection in iran's construction industry</i> (Hakimi et al., 2024)
	PROMETHEE	<i>Utilização do método multicritério PROMETHEE para definição da ordem de manutenção de pontes</i> (Machado et al., 2019)
	ELECTRE III	<i>Método multicritério ELECTRE III para ordenação de métodos de compressão de projeto</i> (Alves e Campos, 2024)
	TOPSIS	<i>Uma proposta para priorização de projetos no contexto de uma instituição federal de ensino superior</i> (Nascimento et al., )
	DEA	<i>A Data Envelopment Analysis model for ranking digital development in the countries of the European Union without explicit inputs and common weights analysis</i> (Bánhidi e Dobos, 2023)
Problemas de Classificação	UTADIS	<i>Classificação multicritério dos fatores de comprometimento organizacional: uma aplicação do método UTADIS</i> (Gonçalves, 2011)
	FlowSort	<i>Utilização de um modelo de decisão multicritério na classificação do nível de maturidade em gestão de processos para otimização de resultados no diagnóstico empresarial</i> (Nascimento, )
	ELECTRE-Tri	<i>Classificação multicritério: aplicação do ELECTRE-Tri aos métodos de previsão de demanda para novos produtos</i> (Ribeiro et al., 2024)
Problemas de Descrição	GAIA	<i>Evaluating rural tourism competitiveness: application of PROMETHEE-GAIA</i> (Agustin et al., 2022)

Fonte: Adaptado de Boeno e Chiwiacowsky (2020)

Figura 2 – Exemplo de pontuação conforme racionalidade compensatória



Fonte: <<https://www.google.com/search?q=botafogo+x+palmeiras+2023>>.

Figura 3 – Exemplo de pontuação conforme racionalidade não compensatória



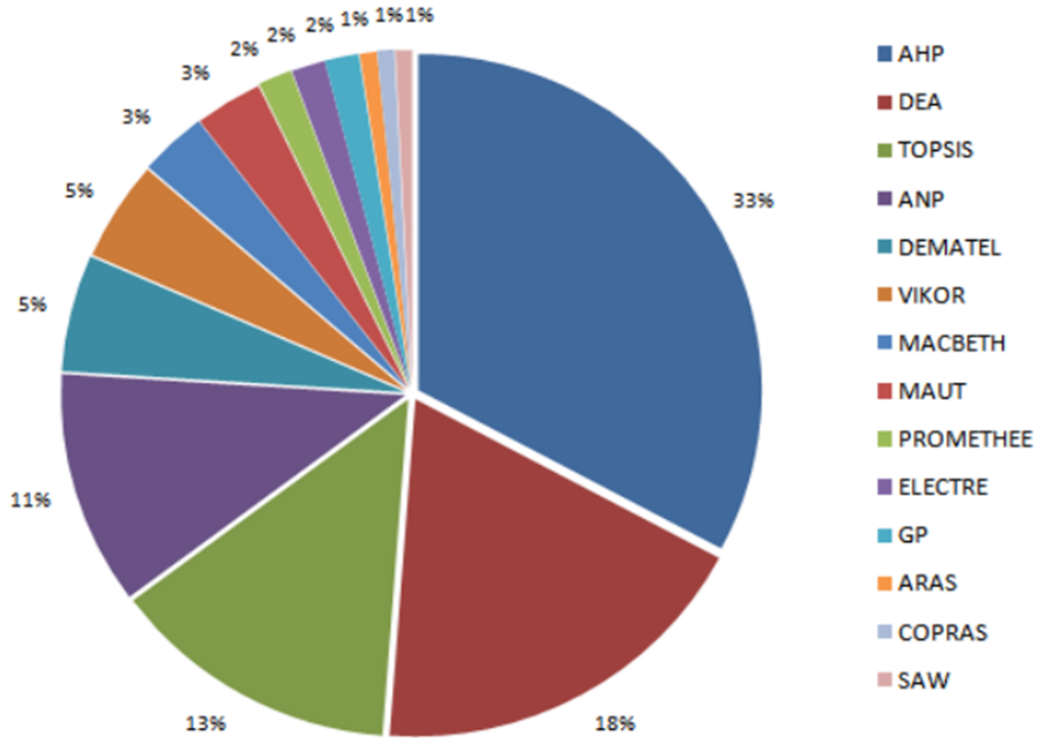
Fonte: <<https://www.poder360.com.br/internacional/leia-o-que-dizem-as-pesquisas-nos-eua-o-erro-de-2016-e-projecoes-para-2020/>>

Tabela 5 – Exemplo de comparação entre as pontuações de alternativas para evidenciar as diferentes abordagens de racionalidade compensatória

Time	A	B	Vencedor do SET
SET 1	25	23	A
SET 2	25	20	A
SET 3	11	25	B
SET 4	17	25	B
SET 5	15	11	A
<b>Total de pontos</b> (Modelo aditivo)	<b>93</b>	<b>104</b>	

Fonte: Adaptado de Almeida (2013).

Figura 4 – Levantamento estatístico do uso dos métodos MCDA em artigos científicos [1995-2016]



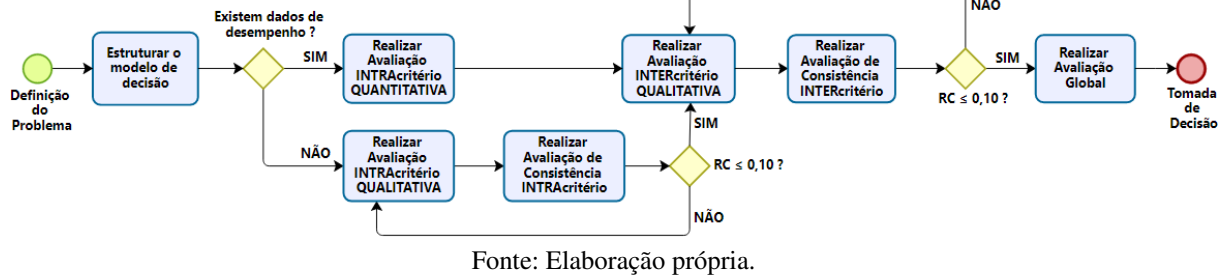
Fonte: Oliveira e Salomon (2017).

## 2.2 Método AHP

O método AHP é um método compensatório de apoio à decisão multicritério que apresenta uma abordagem para a modelagem de problemas baseada em uma estrutura hierárquica cuja a ideia está em avaliar alternativas/critérios a partir de comparações paritárias com o intuito de se obter pontuações globais que indiquem prioridades de escolha, dando suporte, portanto, na tratativa de decisões (Saaty e Vargas, 2012). A implementação do método AHP segue um fluxo

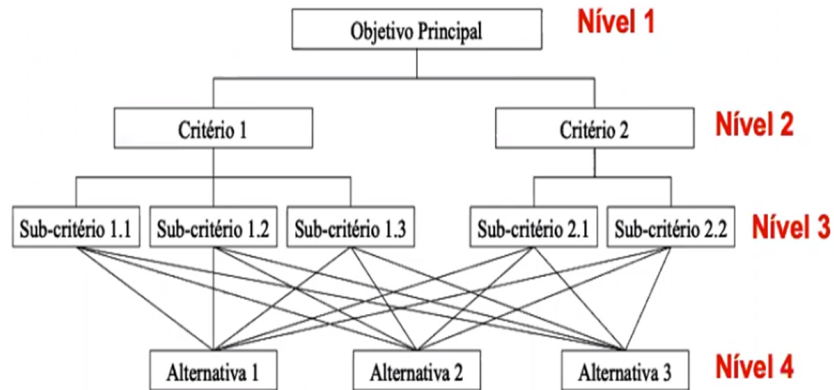
de etapas (Figura 5), conforme descritas adiante:

Figura 5 – Fluxo de etapas do Método AHP



*Etapa 1. Definição e Estruturação do Modelo de Decisão:* o problema de decisão é apresentado e seu objetivo de solução é estabelecido, bem como os critérios, alternativas e atores do processo são definidos. Nesse momento, para melhor modelagem e compreensão do problema de decisão, torna-se necessária a organização dos critérios e seus subcritérios em uma estrutura hierárquica, conforme exemplo na Figura 6:

Figura 6 – Estrutura hierárquica de critérios e subcritérios pelo método AHP



*Etapa 2. Avaliação Intracritério:* esta avaliação consiste na realização de comparações entre as alternativas dentro de cada critério de forma a se obter funções valor relacionadas aos desempenhos das alternativas, podendo ser estruturadas em um quadro comparativo (Almeida, 2013). Esse quadro comparativo é representado através de uma matriz (Matriz de Decisão) onde suas linhas e colunas correspondem às  $n$  alternativas e aos  $m$  critérios respectivamente, isto é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Na avaliação intracritério, existem dois cenários de avaliação: (i) avaliação quantitativa: onde os desempenhos das alternativas ( $a_{ij}$ ) já são dados existentes, advindos de fontes externas ao modelo de decisão; (ii) avaliação qualitativa: onde não existem previamente os dados referentes aos desempenhos das alternativas, de modo que se torna necessário aplicar uma abordagem de julgamento de valor pelo decisor, usando-se a escala de Saaty (Tabela 6), para a obtenção dos desempenhos e posterior construção da matriz de decisão.

Tabela 6 – Escala Fundamental de Saaty para comparações paritárias

<b>Intensidade de Importância</b>	<b>Definição</b>	<b>Explicação</b>
1	Mesma Importância	As duas atividades contribuem igualmente para o objetivo.
3	Importância pequena de uma sobre a outra	A experiência e o julgamento favorecem levemente uma atividade em relação à outra.
5	Importância grande ou essencial	A experiência e o julgamento favorecem fortemente uma atividade em relação à outra.
7	Importância muito grande ou demonstrada	Uma atividade é muito fortemente favorecida em relação à outra; sua dominação de importância é demonstrada na prática.
9	Importância absoluta	A evidência favorece uma atividade em relação à outra com o mais alto grau de certeza.
2, 4, 6, 8	Valores intermediários entre os valores adjacentes	Quando se procura uma condição de compromisso entre duas definições.

Fonte: Adaptado de Briozo e Musetti (2015).

No caso (i), os critérios presentes na matriz de decisão devem seguir o mesmo objetivo da problemática, devendo, portanto, todos convergirem para a maximização ou a minimização dos desempenhos. Nesse sentido, com a presença de critérios com monotonicidades distintas, a seguinte conversão para os elementos da matriz deve ser feita:

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{quando o } j\text{-ésimo critério for monotônico crescente} \\ \frac{1}{a_{ij}}, & \text{quando o } j\text{-ésimo critério for monotônico decrescente} \end{cases} \quad (1)$$

Nas avaliações quantitativas, os critérios geralmente apresentam unidades de medida distintas, sendo, portanto, necessário transformar o desempenho  $a_{ij}$  em  $a'_{ij}$ , entendido como o desempenho normalizado da alternativa  $i$  sob o critério  $j$ , ou seja:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^n a_{ij}} \quad (2)$$

Para cada critério  $k$  de avaliação qualitativa, seja  $b_{ijk}$  um valor da escala de Saaty que representa o quanto a alternativa  $i$  é preferível a alternativa  $j$  de acordo com critério  $k$ . Para cada critério, o número de comparações paritárias representa  $n(n-1)/2$  julgamentos, onde  $n$  é o número de alternativas. Conforme Saaty e Vargas (2012), para todo critério de avaliação qualitativa  $k$ , as propriedades de indiferença ( $b_{ijk} = 1$ , para  $i = j$ ) e de reciprocidade ( $b_{ijk} = 1/b_{jik}$ ) devem ser asseguradas nas matrizes de julgamentos.

Assim como nas avaliações quantitativas, nas qualitativas os valores de julgamentos da escala de Saaty também devem ser normalizados, ou seja:

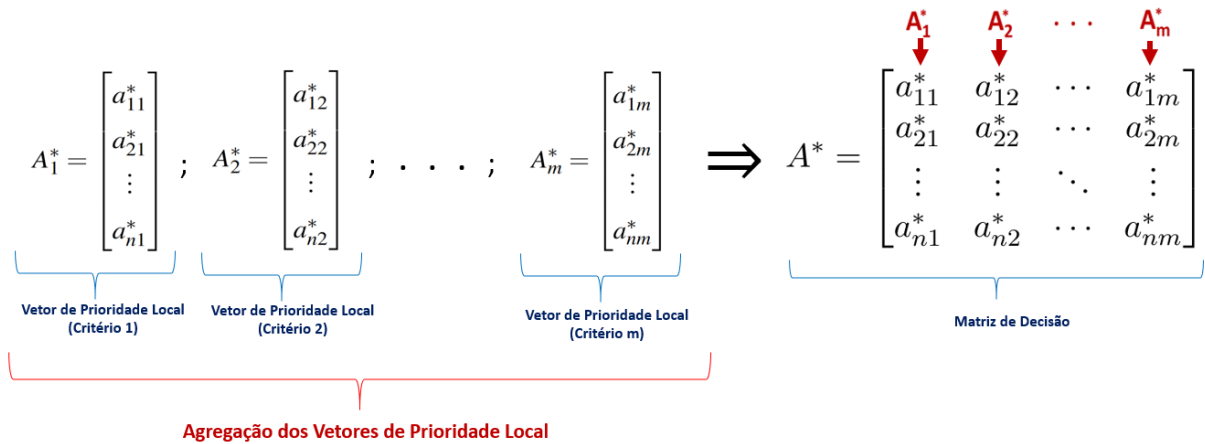
$$b'_{ijk} = \frac{b_{ijk}}{\sum_{i=1}^n b_{ijk}}$$

Especificamente, na avaliação qualitativa, após a normalização, deve-se transformar essas matrizes em vetores de prioridades locais  $A_k^*$ , onde  $k$  diz respeito ao  $k$ -ésimo critério, a partir do cômputo da média por linha, isto é:

$$a_{ik}^* = \frac{\sum_{j=1}^n b'_{ijk}}{n}$$

Essa transformação tem como objetivo criar um conjunto de vetores que reflitam os desempenhos julgados para as alternativas em cada critério, visando agregá-los com o desempenho das alternativas nos critérios de avaliação quantitativa para então construir a matriz de decisão do modelo (Figura 7).

Figura 7 – Agregação dos vetores para a construção da matriz de decisão



Fonte: Elaboração própria.

*Etapa 3. Avaliação Intercriatório Qualitativa:* esta avaliação consiste na realização de comparações entre as alternativas, considerando a combinação dos diferentes critérios, de forma a se obter *scores* (pontuações locais) para as alternativas (Almeida, 2013). Para isso, inicialmente, torna-se necessária a realização de comparações entre os critérios através de julgamentos do decisor via Escala de Saaty (Tabela 6) de modo a se construir a matriz de julgamentos dos pesos dos critérios:

$$W^* = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1m} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m1} & w_{m2} & \cdots & w_{mm} \end{bmatrix}$$

Seguindo a mesma abordagem da avaliação intracritério qualitativa, na avaliação intercritério a matriz de julgamentos  $W^*$  é submetida a operações de normalização e média por linha, de modo a se obter o vetor de pesos:

$$W^T = [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_m]$$

Considerando o modelo hierárquico estruturado conforme mostrado na Figura 6, os pontuações locais das alternativas para cada critério resultam da operação matricial  $A_k^* \times W_k$ , formando o vetor de prioridade local  $L_k$ , em que  $k$  denota um dado critério, isto é:

$$L_k = A_k^* \times W_k = \begin{bmatrix} a_{11}^{*k} & a_{12}^{*k} & \cdots & a_{1m_k}^{*k} \\ a_{21}^{*k} & a_{22}^{*k} & \cdots & a_{2m_k}^{*k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{*k} & a_{n2}^{*k} & \cdots & a_{nm_k}^{*k} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1^k \\ w_2^k \\ \vdots \\ w_{m_k}^k \end{bmatrix}, \quad (3)$$

em que  $m_k$  é o número de subcritérios do critério  $k$ .

Essa metodologia de agregação das pontuações locais e dos pesos se repete para cada nível da estrutura hierárquica até alcançar os critérios macro que não são subcritérios de nenhum outro. Nesse caso, a matriz de decisão  $A^*$  torna-se a agregação dos vetores de prioridade locais  $L_k$  e será utilizada na Etapa 5 (Avaliação Global das Alternativas).

*Etapa 4. Avaliação da Consistência dos Julgamentos:* esta avaliação consiste em analisar a coerência dos julgamentos feitos pelo decisor com o intuito de viabilizar o prosseguimento de execução do método. A análise é feita mediante o cômputo da Razão de Consistência (RC) dado por  $RC = \frac{IC}{IR}$ , onde  $IC = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$  e  $\lambda_{\max} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{[A^* \cdot W]_i}{W_i}$ .

O Índice Randômico (IR) é um valor tabelado (Tabela 7) e varia conforme a ordem da matriz de julgamentos (Saaty, 1994). Estes valores de IR se referem à média dos valores do Índice de Consistência (IC) obtidos a partir de simulações feitas por Saaty para cada ordem de matriz ( $N$ ).

Tabela 7 – Tabela de Índices Randômicos

$N$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Índice Randômico de Consistência (IR)	0	0	0,52	0,89	1,11	1,25	1,35	1,40	1,45	1,49

Fonte: Adaptado de Saaty (1994)

Conforme Saaty (2013), a consistência dos julgamentos é atendida quando  $RC \leq 0,10$ , objetivando evitar que os resultados finais do modelo de decisão sejam distorcidos por algum motivo referente ao subjetivismo do decisor. Caso o contrário ocorra, isto é, um valor de RC que extrapole o limite estabelecido, então, em geral, uma reavaliação pelo decisor sobre os julgamentos feitos anteriormente torna-se necessária para fins de ajustes.

*Etapa 5. Avaliação Global das Alternativas:* esta avaliação consiste em estabelecer o cômputo do desempenho global de cada alternativa, através da soma de seus desempenhos ponderados pelo peso de cada critério. O resultado é um vetor G (denominado por vetor de prioridades globais) resultante da multiplicação entre a matriz de decisão ( $A^*$ ) e o vetor de pesos dos critérios ( $W$ ) construídos nas avaliações intracritério e intercritério, respectivamente.

$$G = A^* \times W = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \cdots & a_{1m}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{2m}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^* & a_{n2}^* & \cdots & a_{nm}^* \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \quad (4)$$

Por fim, através da análise dos dados deste vetor G, tem-se informações suficientes a respeito das pontuações das alternativas, e, portanto, o método finaliza o modelo fornecendo tais informações como suporte para a tomada de decisão de acordo com o tipo de problemática.

Para melhor compreensão prática deste método, retomamos o exemplo mencionado ao final da Seção 1.1, onde considere que um dado decisor está avaliando quatro instituições de ensino superior ( $A_1, A_2, A_3$  e  $A_4$ ) diante de um cenário com cinco critérios principais, cada um detalhado em subcritérios:

- Corpo docente ( $C_1$ ): Titulação ( $C_{1.1}$ ) e Experiência ( $C_{1.2}$ );
- Infraestrutura ( $C_2$ ): Biblioteca ( $C_{2.1}$ ), Laboratórios ( $C_{2.2}$ ) e Recursos didáticos ( $C_{2.3}$ );
- Localização ( $C_3$ ): Proximidade de casa ( $C_{3.1}$ ) e Acesso por transporte público ( $C_{3.2}$ );
- Custos ( $C_4$ ): Mensalidade ( $C_{4.1}$ ), Bolsas/financiamento ( $C_{4.2}$ ) e Custos adicionais ( $C_{4.3}$ );
- Mercado de trabalho ( $C_5$ ): Empregabilidade ( $C_{5.1}$ ) e Parcerias profissionais ( $C_{5.2}$ ).

Suponha que, a partir de levantamentos preliminares, o decisor disponha de pontuações iniciais para o desempenho de cada alternativa em cada subcritério. Essas pontuações podem corresponder, por exemplo, a notas de avaliação, índices ou medidas quantitativas, resultando na seguinte matriz de decisão inicial (Tabela 8):

Tabela 8 – Matriz de decisão inicial das alternativas nos subcritérios

	$C_{1.1}$	$C_{1.2}$	$C_{2.1}$	$C_{2.2}$	$C_{2.3}$	$C_{3.1}$	$C_{3.2}$	$C_{4.1}$	$C_{4.2}$	$C_{4.3}$	$C_{5.1}$	$C_{5.2}$
$A_1$	38	14	24	33	37	9	12	19	32	11	68	20
$A_2$	39	17	12	18	21	11	17	18	33	16	51	25
$A_3$	23	13	14	44	41	8	10	16	21	13	27	22
$A_4$	40	12	33	36	35	9	16	7	26	14	37	13

Fonte: Elaboração própria.

Esses valores são então submetidos às transformações usuais do método (conversão de monotonicidade e normalização) de modo a se obter a seguinte matriz de decisão (Tabela 9):

Tabela 9 – Matriz normalizada dos desempenhos das alternativas nos subcritérios

	$C_{1.1}$	$C_{1.2}$	$C_{2.1}$	$C_{2.2}$	$C_{2.3}$	$C_{3.1}$	$C_{3.2}$	$C_{4.1}$	$C_{4.2}$	$C_{4.3}$	$C_{5.1}$	$C_{5.2}$
$A_1$	0,271	0,250	0,289	0,252	0,276	0,243	0,218	0,317	0,286	0,204	0,372	0,250
$A_2$	0,279	0,304	0,145	0,137	0,157	0,297	0,309	0,300	0,295	0,296	0,279	0,312
$A_3$	0,164	0,232	0,169	0,336	0,306	0,216	0,182	0,267	0,188	0,241	0,148	0,275
$A_4$	0,286	0,214	0,398	0,275	0,261	0,243	0,291	0,117	0,232	0,259	0,202	0,162

Fonte: Elaboração própria.

Na etapa seguinte, o decisor realiza julgamentos paritários entre os subcritérios de cada critério, utilizando a Escala Fundamental de Saaty (Tabela 6). Isso resultará na matriz de julgamentos de cada grupo de subcritérios e com os cálculos matemáticos seguintes (normalização e cálculo da média por linha) obtêm-se os pesos dos subcritérios. Para este exemplo, considere que os julgamentos do decisor resultaram nos seguintes pesos:

- Corpo docente ( $C_1$ ):  $w_{C_{1.1}} = 0,60$  e  $w_{C_{1.2}} = 0,40$
- Infraestrutura ( $C_2$ ):  $w_{C_{2.1}} = 0,40$ ,  $w_{C_{2.2}} = 0,35$  e  $w_{C_{2.3}} = 0,25$
- Localização ( $C_3$ ):  $w_{C_{3.1}} = 0,55$  e  $w_{C_{3.2}} = 0,45$
- Custos ( $C_4$ ):  $w_{C_{4.1}} = 0,50$ ,  $w_{C_{4.2}} = 0,30$  e  $w_{C_{4.3}} = 0,20$
- Mercado de trabalho ( $C_5$ ):  $w_{C_{5.1}} = 0,65$  e  $w_{C_{5.2}} = 0,35$

Para cada critério  $C_k$ , seleciona-se da matriz normalizada o conjunto de colunas correspondentes aos seus subcritérios e multiplica-se essa submatriz pelo vetor de pesos dos subcritérios vinculados a  $C_k$ . Esse procedimento gera os vetores de prioridade local  $L_k$  contendo as pontuações das alternativas em um critério específico. Os valores calculados são:

- Corpo docente ( $C_1$ ):  $L_1 = (0,263, 0,289, 0,191, 0,257)$
- Infraestrutura ( $C_2$ ):  $L_2 = (0,273, 0,145, 0,262, 0,321)$
- Localização ( $C_3$ ):  $L_3 = (0,232, 0,303, 0,201, 0,265)$
- Custos ( $C_4$ ):  $L_4 = (0,285, 0,298, 0,238, 0,180)$
- Mercado de trabalho ( $C_5$ ):  $L_5 = (0,329, 0,291, 0,192, 0,188)$

A agregação desses vetores de prioridade local forma a matriz de decisão no nível dos critérios, em que cada linha continua correspondendo a uma dada alternativa  $A_i$  e cada coluna agora representa um dado critério  $C_k$ , conforme Tabela 10:

Tabela 10 – Matriz de desempenhos agregados das alternativas no nível dos critérios

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
$A_1$	0,263	0,273	0,232	0,285	0,329
$A_2$	0,289	0,145	0,303	0,298	0,291
$A_3$	0,191	0,262	0,201	0,238	0,192
$A_4$	0,257	0,321	0,265	0,180	0,188

Fonte: Elaboração própria.

No nível dos critérios, o decisor volta a utilizar a Escala de Saaty para comparar par a par  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ , expressando sua percepção sobre a importância relativa agora de cada critério para o objetivo geral. Após a normalização da matriz de julgamentos e o cálculo da média por linha, obtém-se os pesos dos critérios:

- Corpo docente ( $C_1$ ):  $w_{C_1} = 0,27$
- Infraestrutura ( $C_2$ ):  $w_{C_2} = 0,25$
- Localização ( $C_3$ ):  $w_{C_3} = 0,15$
- Custos ( $C_4$ ):  $w_{C_4} = 0,13$
- Mercado de trabalho ( $C_5$ ):  $w_{C_5} = 0,20$

Por fim, o vetor de prioridades globais é obtido pela multiplicação da matriz de desempenho das alternativas no nível dos critérios pelo vetor de pesos dos critérios. Para as alternativas  $A_1, A_2, A_3$  e  $A_4$ , obtêm-se as seguintes pontuações globais:

$$G(A_1) = 0,277, \quad G(A_2) = 0,256, \quad G(A_3) = 0,217, \quad G(A_4) = 0,250$$

Com base nas pontuações globais obtidas para cada alternativa, é possível estabelecer o *ranking* final (Tabela 11) onde se nota  $A_1$  como sendo a melhor alternativa a ser escolhida pelo decisor neste exemplo considerado.

Tabela 11 – *Ranking* final das alternativas segundo o desempenho global

Posição	Alternativa
1º lugar	$A_1$
2º lugar	$A_2$
3º lugar	$A_4$
4º lugar	$A_3$

Fonte: Elaboração própria.

O exemplo apresentado ilustra de forma objetiva o funcionamento do método AHP em sua formulação clássica, evidenciando o processo de estruturação hierárquica, a obtenção dos pesos dos critérios e a agregação das preferências para a construção do *ranking* final das alternativas. A partir dessa formulação tradicional, a próxima seção introduz uma variação do método baseada em pressupostos estatísticos, visando ampliar a robustez do processo de ponderação dos critérios.

### 2.3 Método AHP-Gaussiano

O método AHP-Gaussiano é uma abordagem modificada do método AHP tradicional que traz como proposta diferencial uma maneira distinta de se obter o nível de importância dos critérios a partir da variabilidade dos dados (Santos *et al.*, 2021). No caso, os critérios são avaliados de acordo com o nível de variabilidade relativa entre os desempenhos das alternativas em cada critério. Formalmente, temos para cada critério  $k$  um parâmetro denominado Fator Gaussiano ( $FG_k$ ) que leva em consideração a razão entre o desvio padrão ( $\sigma(a_{.k}^*)$ ) e a média ( $\overline{a_{.k}^*}$ ) dos dados, isto é,

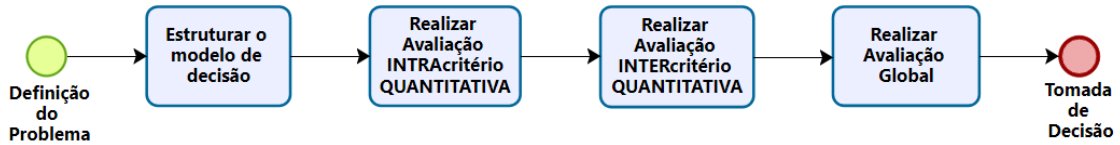
$$FG_k = \frac{\sigma(a_{.k}^*)}{\overline{a_{.k}^*}}, \quad \text{onde} \quad \overline{a_{.k}^*} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_{ik}^* \quad \text{e} \quad \sigma(a_{.k}^*) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (a_{ik}^* - \overline{a_{.k}^*})^2}$$

Para cada critério  $k$ , o vetor de pesos dos subcritérios que estão diretamente ligados abaixo do critério  $k$  na estrutura hierárquica,  $W_k^G$ , é construído a partir da agregação dos fatores gaussianos normalizados ( $FG_{k_j}^*$ ) dos subcritérios, isto é:

$$W_k^G = \begin{bmatrix} FG_{k_1}^* \\ FG_{k_2}^* \\ \vdots \\ FG_{k_l}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{FG_{k_1}}{FG_{k_1} + FG_{k_2} + \dots + FG_{k_l}} \\ \frac{FG_{k_2}}{FG_{k_1} + FG_{k_2} + \dots + FG_{k_l}} \\ \vdots \\ \frac{FG_{k_l}}{FG_{k_1} + FG_{k_2} + \dots + FG_{k_l}} \end{bmatrix}$$

Em relação ao fluxo das etapas do método AHP-Gaussiano (Figura 8), sua abordagem estatística acaba tornando desnecessária a participação de quaisquer julgamentos de valor pelo decisor, o que por consequência tornam as etapas de avaliação intracritério qualitativa e análise de consistência como inexistentes para o método. Nessa esteira, deve-se destacar que o método tem aplicabilidade exclusivamente diante de um cenário de avaliações intracritério e intercritério quantitativas (uso de dados existentes como entradas cardinais), o que resulta em ganhos de escalabilidade, tempo de execução, bem como evita quaisquer possibilidades de inconsistência nos resultados por motivo de elicitación de preferências.

Figura 8 – Fluxo de etapas do Método AHP-Gaussiano



Fonte: Elaboração própria.

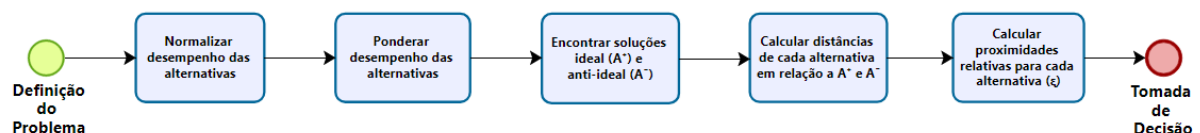
Dessa forma, o método AHP-Gaussiano é apresentado como uma alternativa metodológica ao AHP tradicional, adequada a contextos decisórios baseados exclusivamente em informações quantitativas, mantendo a estrutura hierárquica do método original e ampliando sua aplicabilidade em cenários orientados por dados. Na sequência, é apresentado o método TOPSIS em sua formulação clássica, considerado outro método base amplamente consolidado na literatura de apoio à decisão multicritério e que, assim como o AHP, fundamenta as adaptações e modelos desenvolvidos nesta dissertação.

## 2.4 Método TOPSIS

O método TOPSIS (*Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution*), criado por Ching-Lai Hwang e Kwangsun Yoon, é um método MCDA compensatório baseado na ideia de que, conforme Figura 9, cada alternativa deve ter a menor distância para a solução ideal  $A^+$  e a maior distância para a solução anti-ideal  $A^-$  (Hwang e Yoon, 1981). Com base nos desempenhos das alternativas ao longo dos critérios, calcula-se uma métrica relativa de simultaneidade dessas distâncias, de modo que tais valores desse parâmetro acabam servindo de base para problemas de decisão referentes à escolha, ordenação, classificação, entre outros.

Uma característica desse método é sua concepção baseada em soma ponderada (Almeida, 2013), cuja implementação segue um fluxo de etapas (Figura 10), conforme descrito a seguir:

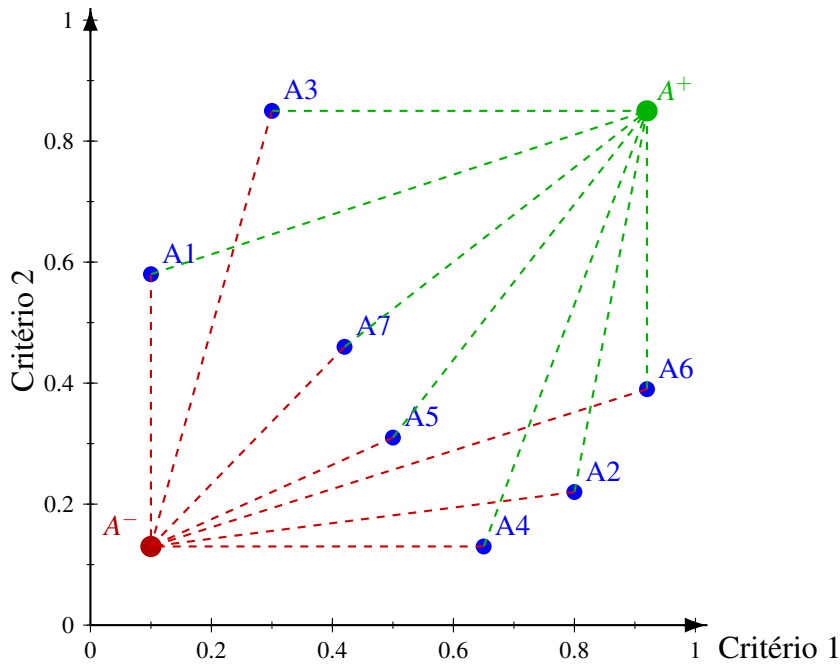
Figura 10 – Fluxo do Método TOPSIS



Fonte: Elaboração própria

*Etapa 1. Normalizar desempenho das alternativas:* com o problema de decisão apresentado, critérios e alternativas já definidos, é necessário em um primeiro momento normalizar

Figura 9 – Representação geométrica do método TOPSIS



Fonte: Elaboração própria

os dados de desempenhos das alternativas (matriz de decisão  $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ ), visando equalizar os valores para evitar o risco de viés por alguns critérios em relação aos demais.

Essa normalização para cada desempenho na matriz, em geral, ocorre através da divisão pela norma euclidiana, isto é:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ij}^2}}$$

*Etapa 2. Ponderar desempenho das alternativas:* considerando o uso de um vetor de pesos não-negativos  $W = (w_1, w_2, \dots, w_m)$  necessário para o método, com  $\sum w_j = 1$ , a matriz de decisão  $A$  é ponderada conforme esses pesos ( $A'' = [a''_{ij}]_{n \times m}$ ) através da seguinte multiplicação para cada desempenho normalizado:

$$a''_{ij} = w_j \cdot a'_{ij} \quad (5)$$

*Etapa 3. Encontrar soluções ideal ( $A^+$ ) e anti-ideal ( $A^-$ ):* a solução ideal basicamente consiste em um conjunto de valores que representam o melhor desempenho em cada critério, isto é,  $A^+ = (a_1^+, a_2^+, \dots, a_m^+)$ , que nada mais são do que os desempenhos para uma alternativa perfeita (Pacheco, 2016). Por outro lado, a solução anti-ideal abrange o conjunto dos

valores considerados como os piores desempenhos ao longo dos critérios, sendo representada por  $A^- = (a_1^-, a_2^-, \dots, a_m^-)$ .

A depender da monotonicidade do critério (crescente/maximização ou decrescente/-minimização), seu melhor e pior desempenho são obtidos da seguinte maneira:

$$a_j^+ = \begin{cases} \max_i \{a''_{ij}\}, & \text{para Critério de MAXimização} \\ \min_i \{a''_{ij}\}, & \text{para Critério de MINimização} \end{cases} \quad (6)$$

$$a_j^- = \begin{cases} \min_i \{a''_{ij}\}, & \text{para Critério de MAXimização} \\ \max_i \{a''_{ij}\}, & \text{para Critério de MINimização} \end{cases} \quad (7)$$

*Etapa 4. Calcular distâncias das alternativas em relação a  $A^+$  e  $A^-$ :* para cada alternativa são calculadas as distâncias euclidianas de seu vetor de desempenhos em relação aos vetores das soluções ideal ( $A^+$ ) e anti-ideal ( $A^-$ ), respectivamente denominadas por  $d_i^+$  e  $d_i^-$ , isto é:

$$d_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^m (a''_{ij} - a_j^+)^2} \quad (8)$$

$$d_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^m (a''_{ij} - a_j^-)^2} \quad (9)$$

*Etapa 5. Calcular proximidade relativa ( $\xi_i$ ) para cada alternativa:* com base nos valores de  $d_i^+$  e  $d_i^-$  obtidos, calcula-se uma métrica denominada por *proximidade relativa* ( $\xi_i$ ) para cada alternativa, cuja formulação matemática é dada por:

$$\xi_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-} \quad (10)$$

A ideia desse parâmetro está em mensurar simultaneamente o quão próximo uma dada alternativa  $a_i$  está em relação à solução ideal e o quão distante está da solução anti-ideal. Ou seja, o valor de  $\xi_i$  será tanto maior quanto mais próxima  $a_i$  for de  $A^+$  e mais distante for de  $A^-$  (Almeida, 2013), de modo que tais valores de proximidade das alternativas podem ser

ordenados para a construção de *rankings*, servindo de base, portanto, para a tomada de decisão tanto em problemáticas de ordenação como para outros cenários decisórios.

Dessa forma, o método TOPSIS se consolida como uma abordagem de apoio à decisão baseada na avaliação simultânea da proximidade das alternativas em relação às soluções ideal e anti-ideal, sendo mais um método clássico de efetiva aplicabilidade no contexto de MCDA. Por fim, com a apresentação dos métodos AHP, AHP-Gaussiano e TOPSIS em suas formulações clássicas, este capítulo estabeleceu a base teórica necessária das propostas metodológicas que foram desenvolvidas neste trabalho e serão descritas nos capítulos seguintes.

### 3 MÉTODO AHP-EQUITATIVO

O método AHP-Equitativo traz uma proposta de modificação do método AHP, seguindo uma abordagem estatística para a mensuração dos pesos dos critérios (similar ao que se verifica no método AHP-Gaussiano) baseada tanto na variabilidade como na assimetria dos dados. No caso, o método tem aplicabilidade em problemáticas de escolha ou ordenação cujos critérios possam ser categorizados em dois grupos: (i) Critérios Ênfase e; (ii) Critérios Não Ênfase. Originalmente, este método foi desenvolvido para distribuição de recursos públicos de educação entre entes federativos brasileiros e a ênfase adotada foi a busca da equidade em detrimento a busca da excelência em performance. Daí surgiu o nome AHP-Equitativo. Os resultados deste capítulo foram publicados em Ferreira e Rêgo (2024).

O objetivo do método AHP-Equitativo está em potencializar os critérios ênfase, de modo a atender objetivos estratégicos de acordo com as diretrizes e políticas envolvidas na problemática de decisão. Para isso, o peso do critério  $k$  é estabelecido por uma métrica estatística que leva em consideração a razão entre o semi-desvio abaixo ou acima da mediana (respectivamente,  $\delta_k^-$  e  $\delta_k^+$ ) e a mediana ( $\widetilde{a}_{\cdot k}^*$ ) dos dados no critério  $k$ , em que denominamos por Fator Equitativo ( $FEq_k$ ), isto é:

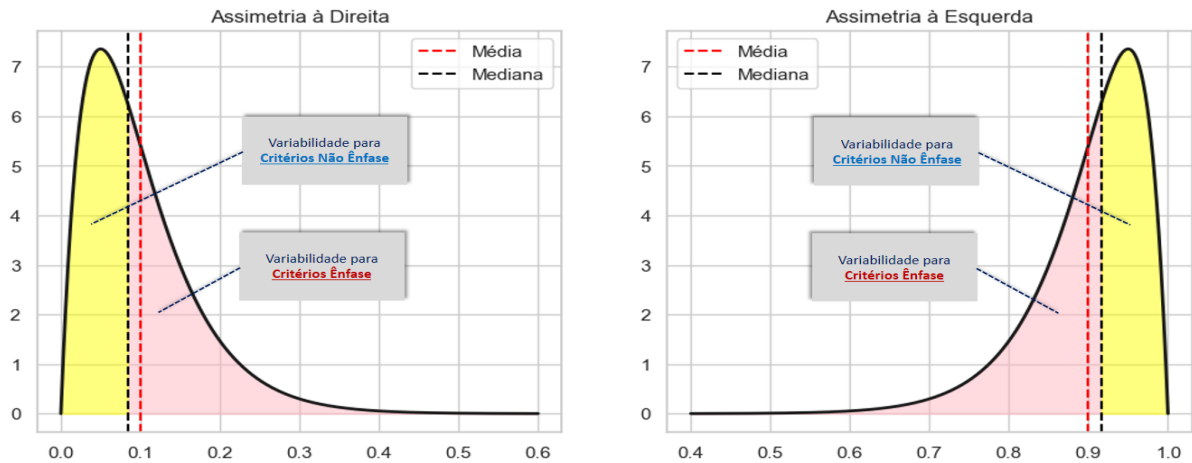
$$FEq_k = \begin{cases} \frac{\max\{\delta_k^+, \delta_k^-\}}{\widetilde{a}_{\cdot k}^*}, & \text{para Critérios Ênfase} \\ \frac{\min\{\delta_k^+, \delta_k^-\}}{\widetilde{a}_{\cdot k}^*}, & \text{para Critérios Não Ênfase,} \end{cases} \quad (11)$$

em que:

$$\delta_k^+ = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max\{(a_{ik}^* - \widetilde{a}_{\cdot k}^*), 0\}, \quad \delta_k^- = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max\{(\widetilde{a}_{\cdot k}^* - a_{ik}^*), 0\}.$$

Desse modo, nota-se que a estratégia matemática por detrás do método está em atribuir a maior semi variabilidade como peso para os critérios ênfase, enquanto os demais critérios têm seus pesos em função dessa menor parte da dispersão em torno da mediana (Figura 11).

Figura 11 – Análise da variabilidade e assimetria para os dois grupos de critérios



Fonte: Elaboração própria.

A proposta metodológica praticamente segue o mesmo fluxo de etapas de execução observado no método AHP-Gaussiano (Figura 8), ou seja, sua aplicabilidade tem atuação exclusivamente em um cenário de avaliações intracritério e intercritério quantitativas e, portanto, não se torna necessário quaisquer julgamentos de valor por parte do tomador da decisão. Para cada critério  $k$ , o vetor de pesos dos subcritérios que estão diretamente ligados abaixo do critério  $k$  na estrutura hierárquica,  $W_k^E$ , é construído a partir da agregação dos fatores ênfase normalizados ( $FE_{k_j}^*$ ) dos subcritérios, isto é:

$$W_k^E = \begin{bmatrix} FE_{k_1}^* \\ FE_{k_2}^* \\ \vdots \\ FE_{k_l}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{FE_{k_1}}{FE_{k_1} + FE_{k_2} + \dots + FE_{k_l}} \\ \frac{FE_{k_2}}{FE_{k_1} + FE_{k_2} + \dots + FE_{k_l}} \\ \vdots \\ \frac{FE_{k_l}}{FE_{k_1} + FE_{k_2} + \dots + FE_{k_l}} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Visando uma melhor compreensão e reprodutibilidade na aplicação do método AHP-Equitativo, o Algoritmo 1 apresenta o pseudocódigo do método. Ele apresenta toda a metodologia, as formulações matemáticas consideradas, bem como as formas de estruturação dos desempenhos das alternativas.

O método AHP-Equitativo teve sua versão aperfeiçoada para uma nova proposta metodológica (AHP-MEDAC) por motivo de limitações matemáticas observadas em casos específicos de decisão multicritério. A explicação dessas limitações sobre o método AHP-Equitativo, assim como a sua aplicação no contexto educacional, serão apresentadas em conjunto com o método AHP-MEDAC no capítulo seguinte.

---

**Algoritmo 1: AHP-Equitativo (Pseudocódigo)**


---

**ENTRADAS:** (i) Alternativas; (ii) Níveis e subordinações entre os critérios (critérios do 1º nível, critérios do 2º nível, ...); (iii) Categoria dos critérios (Equidade ou Excelência); (iv) Monotonicidade dos critérios (Maximização ou Minimização); (v) Matriz de desempenho das alternativas nos critérios dos níveis mais baixos (tipicamente, 2º nível).

**SAÍDAS:** Vetor de prioridade global das alternativas e o *ranking*.

**1 INÍCIO**

```

// PASSO 1 — Determinar a profundidade da hierarquia a partir das entradas
2   Calcular  $L_{\text{último}}$  a partir da estrutura de níveis indicada em (ii)
// Definir nível corrente como o último nível (mais baixo)
3   Definir  $L \leftarrow L_{\text{último}}$ 
// PASSO 2 — Tratamento de monotonicidade (apenas no último nível)
4   SE monotonicidade = Maximização ENTÃO
5       ┌ Manter valores (ver Eq. 1)
6   SENÃO
7       └ Aplicar conversão para maximização (ver Eq. 1)
// PASSO 3 — Normalização (apenas no último nível)
8   Normalizar colunas (ver Eq. 2)
9   ENQUANTO  $L \geq 1$  FAÇA
10      ┌ // PASSO 4 — Fator/Peso equitativo por critério (nível  $L$ )
11      ┌ Para cada critério do nível  $L$ , calcular o fator/peso equitativo  $FEq$  (ver Eq. 11)
12      ┌ // PASSO 5 — Vetor de fatores equitativos normalizados (nível  $L$ )
13      ┌ Para cada critério do nível  $L$ , calcular  $FEq^*$ , considerando os demais critérios desse nível
14      ┌ subordinados ao mesmo critério do nível  $L-1$  (ver Eq. 12)
15      ┌ Agregar os valores de  $FEq^*$  dos critérios de mesma subordinação para formar o vetor de
16      ┌ pesos normalizados (ver Eq. 12)
17      ┌ SE  $L > 1$  ENTÃO
18      ┌     ┌ // PASSO 6 — Construção do nível  $L-1$  a partir dos critérios no nível  $L$ 
19      ┌     ┌ Para cada critério do nível  $L-1$ , calcular o vetor de prioridade local das alternativas
20      ┌     ┌ considerando a parte da matriz de desempenho e o vetor  $FEq^*$  referentes aos
21      ┌     ┌ critérios do nível  $L$  subordinados (ver Eq. 3)
22      ┌     ┌ Construir a matriz de desempenho do nível  $L-1$  agregando os vetores de
23      ┌     ┌ prioridade locais obtidos
24      ┌     └ SENÃO
25      ┌     └ // PASSO 7 — Finalização (nível do topo:  $L = 1$ )
26      ┌     └ Calcular o vetor de prioridade global (ver Eq. 4), ordenar as pontuações e reportar o
27      ┌     └ ranking
28      ┌     └ // Atualizar nível (decremento para subir na hierarquia)
29      ┌     └ Definir  $L \leftarrow L - 1$ 

```

---

## 4 MÉTODO AHP-MEDAC

### 4.1 Descrição do método

O método AHP-MEDAC (*using skewness and variability Measures to Emphasize Decision Aid Criteria*) trazido neste trabalho é uma evolução do método AHP-Equitativo resultante da continuidade da pesquisa, onde seus objetivos são os mesmos do AHP-Equitativo, mas o formalismo matemático traz aperfeiçoamentos em relação a problemas encontrados no método AHP-Equitativo. Ou seja, com base na ênfase que motiva a problemática de decisão e na variabilidade e assimetria dos dados, este método visa obter os pesos dos critérios e potencializá-los em função dessa respectiva ênfase.

Em contrapartida ao método AHP-Equitativo, o método AHP-MEDAC traz consigo algumas melhorias matemáticas que o tornam mais viável e representativo aos dados para fins de construção de modelos de decisão. Tais melhorias ocorrem nas etapas: (i) avaliação intracritério quantitativa: conversão das monotonicidades e normalização dos dados; e (ii) avaliação intercritério quantitativa: formulação matemática para o cálculo dos pesos dos critérios.

Neste contexto, em relação à conversão das monotonicidades e normalização dos dados, nota-se que na conversão de critérios com monotonicidade decrescente (seção 2.2) observada nos métodos AHP tradicional, AHP-Gaussiano e AHP-Equitativo, há mudanças na variabilidade original trazida pelos dados ao se realizar a transformação do inverso multiplicativo, o que de certa forma pode propiciar distorções sobre a realidade da informação em estudo. Pensando nisso, o método AHP-MEDAC vem com uma proposta de conversão de monotonicidades, conjuntamente com a realização da etapa de normalização, que preserva essa variabilidade de modo a gerar dados utilizáveis que carregam consigo a informação original, além de proporcionar posteriormente resultados condizentes com o contexto real. Deste modo, a seguinte transformação maximin é proposta para realizar simultaneamente a conversão de monotonicidades e a normalização dos dados:

$$a_{ij}^* = \begin{cases} \frac{a_{ij} - \min(a_{.j})}{\max(a_{.j}) - \min(a_{.j})}, & \text{quando o } j\text{-ésimo critério for monotônico crescente} \\ \frac{\max(a_{.j}) - a_{ij}}{\max(a_{.j}) - \min(a_{.j})}, & \text{quando o } j\text{-ésimo critério for monotônico decrescente.} \end{cases} \quad (13)$$

Para a formulação matemática do cálculo dos pesos dos critérios, uma investigação exploratória sobre a metodologia estatística do método AHP-Equitativo nos mostrou que, em um

cenário de modelagem envolvendo variáveis binárias assimétricas, tem-se que  $\min\{\delta_k^+, \delta_k^-\} = 0$ , o que resulta no  $FE$  para Critérios Não Ênfase igual a zero e, conseqüentemente, eliminaria inconvenientemente a participação dos critérios desse grupo do modelo de decisão. Com o objetivo de evitar tal circunstância, o método AHP-MEDAC apresenta o cômputo dos fatores dos pesos em função apenas da variabilidade em torno da média (semidesvio padrão acima e abaixo da média, respectivamente,  $\sigma(a_{.k}^*)^+$  e  $\sigma(a_{.k}^*)^-$ ), sem a necessidade da presença de um denominador para ajuste de escala (ocorrendo já na etapa anterior de normalização), isto é:

$$FE_k = \begin{cases} \max\{\sigma(a_{.k}^*)^+, \sigma(a_{.k}^*)^-\}, & \text{para Critérios Ênfase} \\ \min\{\sigma(a_{.k}^*)^+, \sigma(a_{.k}^*)^-\}, & \text{para Critérios Não Ênfase,} \end{cases} \quad (14)$$

em que:

$$\sigma(a_{.k}^*)^+ = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\max\{(a_{ik}^* - \bar{a}_{.k}^*), 0\})^2} \quad \sigma(a_{.k}^*)^- = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\max\{(\bar{a}_{.k}^* - a_{ik}^*), 0\})^2} .$$

Com essas devidas melhorias matemáticas estabelecidas, constrói-se então os vetores de pesos dos subcritérios  $W_k^E$  conforme estrutura hierárquica do modelo, e a continuidade do método AHP-MEDAC segue o mesmo fluxo de execução do método AHP-Equitativo. Por fim, vale destacar que tanto o AHP-Equitativo quanto o AHP-MEDAC, idealizados neste trabalho, trazem as seguintes vantagens na resolução de problemas de decisão: (i) inexistência de distorção dos resultados globais das alternativas por subjetivismo de julgamento (inconsistências e/ou vieses); (ii) Desnecessidade de esforço cognitivo por parte do tomador da decisão, não consumindo seu tempo de trabalho frente as suas demais tarefas; (iii) Ganhos de escalabilidade em relação à necessidade de reajustes no modelo de decisão; (iv) Redução no tempo de execução do método, propiciando agilidade na tratativa do problema; e (v) Flexibilidade para uma modelagem qualitativa de preferências sobre os critérios, conforme necessidade da conjuntura da problemática.

Com o objetivo de orientar implementações futuras, o Algoritmo 2 apresenta o pseudocódigo do método AHP-MEDAC. Nesse algoritmo, apresenta-se toda a sistematização do fluxo de modelagem, a ponderação dos critérios e os métodos de síntese dos desempenhos das alternativas.

---

**Algoritmo 2: AHP-MEDAC (Pseudocódigo)**


---

**ENTRADAS:**

- (i) Alternativas; (ii) Níveis e subordinações entre os critérios (critérios do 1º nível, critérios do 2º nível, ...); (iii) Categoria dos critérios (Ênfase/Não Ênfase); (iv) Monotonicidade dos critérios (Maximização/Minimização); (v) Matriz de desempenho das alternativas nos critérios dos níveis mais baixos (tipicamente, 2º nível).

**SAÍDAS:**

Vetor de prioridade global das alternativas e o *ranking*.

**1 INÍCIO**

```

// PASSO 1 — Determinar a profundidade da hierarquia a partir das entradas
2   Calcular  $L_{\text{último}}$  a partir da estrutura de níveis indicada em (ii)
   // Definir nível corrente como o último nível (mais baixo)
3   Definir  $L \leftarrow L_{\text{último}}$ 
4   ENQUANTO  $L \geq 1$  FAÇA
   // PASSO 2 — Tratamento de monotonicidade e normalização
5   Aplicar conversão para maximização + normalização, de acordo com a monotonicidade
   inicial do critério (ver Eq. 13)
   // PASSO 3 — Fator/Peso ênfase por critério (nível  $L$ )
6   Para cada critério do nível  $L$ , calcular o fator/peso ênfase  $FE$  (ver Eq. 14)
   // PASSO 4 — Vetor de fatores ênfase normalizados (nível  $L$ )
7   Para cada critério do nível  $L$ , calcular  $FE^*$ , considerando os demais critérios desse nível
   subordinados ao mesmo critério do nível  $L-1$  (ver Eq. 12)
8   Agregar os valores de  $FE^*$  dos critérios de mesma subordinação para formar o vetor de
   pesos normalizados (ver Eq. 12)
9   SE  $L > 1$  ENTÃO
   // PASSO 5 — Construção do nível  $L-1$  a partir dos critérios no nível  $L$ 
10  Para cada critério do nível  $L-1$ , calcular o vetor de prioridade local das alternativas
   considerando a parte da matriz de desempenho e o vetor  $FE^*$  referentes aos
   critérios do nível  $L$  subordinados (ver Eq. 3)
11  Construir a matriz de desempenho do nível  $L-1$  agregando os vetores de
   prioridade locais obtidos
12  SENÃO
   // PASSO 6 — Finalização (nível do topo:  $L = 1$ )
13  Calcular o vetor de prioridade global (ver Eq. 4)
14  Ordenar em ordem decrescente e reportar o ranking
   // Atualizar nível (decremento para subir na hierarquia)
15  Definir  $L \leftarrow L - 1$ 

```

---

## 4.2 Aplicação do método no contexto educacional

Nesta seção são apresentados os fundamentos de aplicabilidade do método AHP-MEDAC no contexto educacional, envolvendo três modelos desenvolvidos (denotados por “*Case Geral - UFs*”, “*Case Obras - Municípios*” e “*Case Transporte Escolar - Municípios, Mesorregiões e Microrregiões*”) que se traduzem basicamente em cenários de decisão multicritério relacionados à problemática de ordenação. Em todos os *cases*, a ênfase estabelecida está na equidade, onde dois grupos de critérios são considerados: Critérios de Equidade (Critérios Ênfase) e Critérios de Manutenção da Excelência (Critérios Não Ênfase).

Nestes modelos de decisão, o conceito de equidade é entendido como a busca por justiça distributiva e redução de desigualdades no processo de alocação de recursos, de modo a mitigar os efeitos de contextos socioeconômicos e estruturais desfavoráveis observados nos desempenhos das alternativas (UFs, municípios, etc.). Por sua vez, a manutenção da excelência corresponde ao reconhecimento dos desempenhos das alternativas (UFs, municípios, etc.), assegurando que a valorização de bons resultados também seja considerada no processo decisório.

### 4.2.1 Modelo nº 1: case “Geral” (nível de aplicação - UFs)

#### 4.2.1.1 Implementação do modelo

##### *Etapa 1: Definição do Problema e Estruturação do Modelo de Decisão*

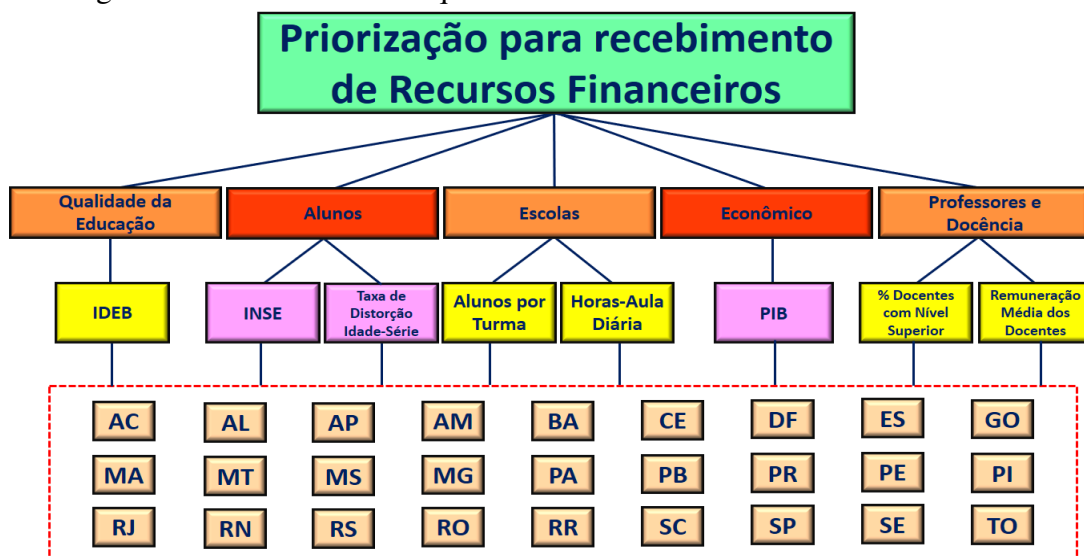
Uma organização pública é responsável por distribuir recursos financeiros para o setor da educação entre as 27 unidades federativas (UFs) do Brasil, sendo que a mesma necessita que seja criado um *ranking* para essas UFs com o objetivo de tomar decisões frente à priorização no recebimento de tais recursos com foco na equidade. O processo decisório abrange atores que compõem um grupo de decisão, formado por gestores, analistas e especialistas, onde a decisão final é única e consensual.

Nessa problemática de decisão, existem cinco dimensões de atuação no segmento educacional, onde serão consideradas como os critérios para o modelo a ser desenvolvido: ( $G_1$ ) Qualidade do Ensino; ( $G_2$ ) Alunos; ( $G_3$ ) Escolas; ( $G_4$ ) Econômico; e ( $G_5$ ) Professores e Docência. Esses critérios abrangem subcritérios que são distribuídos conforme sua dimensão de atuação (Tabela 12) e o modelo de decisão é então estruturado em uma hierarquia (Figura 12):

Tabela 12 – Critérios e subcritérios - *Case* nº 1

Critérios/ Subcritérios	Descrição	Objetivo	Monotonicidade
1. Qualidade do Ensino	Refere-se à eficácia do processo educativo em promover o aprendizado dos alunos.	Manutenção da Excelência	MAX / Crescente
1.1. IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica)	Indica uma métrica que avalia a qualidade da educação básica, considerando o desempenho estudantil em exames e taxa de aprovação.	Manutenção da Excelência	MAX / Crescente
2. Alunos	Refere-se às características educacionais inerentes aos alunos.	Equidade	MAX / Crescente
2.1. INSE (Índice de Nível Socioeconômico)	Indica o contexto socioeconômico dos alunos (renda familiar, escolaridade dos pais e condições de moradia), podendo influenciar o desempenho acadêmico.	Equidade	MIN / Decrescente
2.2. Taxa de Distorção Idade-Série (TDIS)	Indica a porcentagem de alunos que estão em séries escolares diferentes daquelas correspondentes à sua faixa etária, revelando problemas como defasagem.	Equidade	MAX / Crescente
3. Escolas	Refere-se às características da infraestrutura das instituições escolares.	Manutenção da Excelência	MAX / Crescente
3.1. Média Alunos por Turma	Indica a quantidade média de alunos por sala de aula, o que pode afetar a qualidade do ensino e a atenção individualizada que os alunos recebem.	Manutenção da Excelência	MIN / Decrescente
3.2. Média Horas-Aula Diária	Indica o tempo médio dedicado às aulas por dia, podendo afetar diretamente a qualidade da educação oferecida aos alunos.	Manutenção da Excelência	MAX / Crescente
4. Econômico	Refere-se à capacidade econômica do ente federativo.	Equidade	MAX / Crescente
4.1. PIB estadual <i>per capita</i>	Indica a divisão do produto interno bruto pelo número de habitantes do ente federativo.	Equidade	MIN / Decrescente
5. Professores e Docência	Refere-se à qualidade do corpo docente e ao processo de ensino.	Manutenção da Excelência	MAX / Crescente
5.1. Porcentagem de Docentes com Nível Superior	Indica a porcentagem de professores que possuem formação de nível superior, podendo impactar na qualidade do ensino oferecido.	Manutenção da Excelência	MAX / Crescente
5.2. Remuneração Média dos Docentes	Indica o salário médio recebido pelos professores, podendo influenciar na motivação e na qualidade do trabalho dos educadores.	Manutenção da Excelência	MAX / Crescente

Fonte: Elaboração própria.

Figura 12 – Estrutura hierárquica do modelo de decisão - *Case* “Geral” UFs

Fonte: Elaboração própria.

*Etapa 2: Avaliação Intracritério Quantitativa*

Os dados de desempenho das UFs referentes aos subcritérios do modelo de decisão foram obtidos a partir dos sites do INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (2024) e do INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (2024), onde foram agregados em uma única tabela (Tabela 13). A partir dessa tabela, os dados foram submetidos a operações de conversão de monotonicidades no sentido da maximização, bem como foram normalizados (operações descritas na Seção 4.1 desta dissertação) de forma a se obter a matriz de decisão  $A^*$  (Tabela 14):

Tabela 13 – Matriz de Decisão

UF	IDEB	INSE	Taxa de Distorção Idade-Série [%]	Alunos por Turma [alunos/sala]	Horas-Aula Diária [horas/dia]	PIB per capita [R\$]	% Docentes Nível Superior [%]	Remuneração Média [R\$]
AC	4.77	4.56	20.90	21.38	4.84	28 525.00	77.34	4111.67
AL	4.67	4.39	18.75	25.08	5.57	24 322.00	73.20	3176.64
AP	4.10	4.66	24.00	21.18	5.54	32 194.00	89.17	6221.08
AM	4.60	4.50	17.22	22.58	4.62	36 827.00	84.82	4559.25
BA	4.47	4.50	25.28	22.28	5.20	28 483.00	78.41	6450.65
CE	5.37	4.38	11.68	23.87	5.90	24 296.00	86.00	3739.89
DF	5.40	5.34	12.23	23.96	5.40	116 713.00	95.04	7666.10
ES	5.17	5.01	13.56	23.12	5.37	47 619.00	98.01	4647.60
GO	5.23	5.07	11.87	23.70	5.29	45 156.00	93.85	4667.81
MA	4.30	4.24	22.59	22.63	5.32	20 633.00	69.49	7053.23
MT	4.83	5.04	8.99	21.91	4.95	69 839.00	92.50	4763.75
MS	4.70	5.11	24.78	24.65	5.14	60 365.00	95.50	6810.39
MG	5.20	5.07	11.14	21.40	5.16	44 147.00	91.86	4957.74
PA	4.17	4.29	24.74	22.70	4.85	29 095.00	90.54	8677.50
PB	4.77	4.46	18.30	21.95	5.64	21 662.00	82.20	3675.49
PR	5.47	5.36	8.29	22.15	5.22	53 710.00	93.98	6296.29
PE	4.90	4.50	17.72	23.68	5.30	27 139.00	81.82	3632.59
PI	4.93	4.28	16.16	22.12	6.01	22 279.00	86.16	3751.48
RJ	4.90	4.93	23.60	23.10	5.25	71 850.00	75.71	5799.22
RN	4.27	4.57	22.78	23.54	4.75	28 409.00	89.14	5038.97
RS	5.17	5.38	16.02	19.37	5.09	54 559.00	88.10	4541.17
RO	4.80	4.88	11.49	22.09	4.97	42 248.00	95.13	4044.04
RR	4.70	4.70	19.68	20.47	5.00	33 153.00	85.63	4713.94
SC	5.20	5.51	15.72	21.55	4.80	61 274.00	91.78	4920.77
SP	5.50	5.28	6.20	24.55	5.81	70 471.00	95.22	4667.86
SE	4.67	4.39	18.72	23.27	5.79	25 965.00	90.86	5153.85
TO	4.80	4.73	12.04	21.90	5.85	38 512.00	86.42	3937.91

Fonte: Elaboração própria.

A partir da matriz de decisão normalizada, os fatores ênfase, e seus valores normalizados, ( $FE_{k_j}$  e  $FE_{k_j}^*$ ) dos subcritérios são calculados (Tabela 15). Note que os fatores ênfase normalizados dos subcritérios que estão agrupados sob o mesmo critério somam 1 como esperado.

*Etapa 3: Avaliação Intercritério Quantitativa*

Para se obter o vetor de prioridade global ( $G$ ) referente ao objetivo geral da problemática, torna-se necessário, inicialmente, obter os vetores de prioridades locais referentes aos cinco critérios estabelecidos no modelo ( $L_1, L_2, L_3, L_4$  e  $L_5$ ).

Tabela 14 – Matriz de Decisão Normalizada

UF	IDEB	INSE	Taxa de Distorção Idade-Série [%]	Alunos por Turma [alunos/sala]	Horas-Aula Diária [horas/dia]	PIB per capita [R\$]	% Docentes Nível Superior [%]	Remuneração Média [R\$]
AC	0.476	0.748	0.770	0.648	0.155	0.918	0.275	0.170
AL	0.405	0.882	0.657	0.000	0.681	0.962	0.130	0.000
AP	0.000	0.669	0.933	0.683	0.658	0.880	0.690	0.553
AM	0.357	0.795	0.578	0.438	0.000	0.831	0.538	0.251
BA	0.262	0.795	1.000	0.490	0.414	0.918	0.313	0.595
CE	0.905	0.890	0.287	0.211	0.917	0.962	0.579	0.102
DF	0.929	0.134	0.316	0.196	0.561	0.000	0.896	0.816
ES	0.762	0.394	0.386	0.343	0.541	0.719	1.000	0.267
GO	0.810	0.346	0.297	0.241	0.479	0.745	0.854	0.271
MA	0.143	1.000	0.859	0.429	0.503	1.000	0.000	0.705
MT	0.524	0.370	0.146	0.555	0.239	0.488	0.807	0.289
MS	0.429	0.315	0.974	0.075	0.376	0.586	0.912	0.661
MG	0.786	0.346	0.259	0.644	0.390	0.755	0.784	0.324
PA	0.048	0.961	0.971	0.418	0.164	0.912	0.738	1.000
PB	0.476	0.827	0.634	0.549	0.736	0.989	0.446	0.091
PR	0.976	0.118	0.110	0.512	0.434	0.656	0.859	0.567
PE	0.571	0.795	0.603	0.245	0.489	0.932	0.432	0.083
PI	0.595	0.969	0.522	0.518	1.000	0.983	0.585	0.105
RJ	0.571	0.457	0.912	0.346	0.455	0.467	0.218	0.477
RN	0.119	0.740	0.869	0.270	0.092	0.919	0.689	0.339
RS	0.762	0.102	0.514	1.000	0.338	0.647	0.653	0.248
RO	0.500	0.496	0.277	0.524	0.249	0.775	0.899	0.158
RR	0.429	0.638	0.706	0.807	0.273	0.870	0.566	0.279
SC	0.786	0.000	0.499	0.618	0.129	0.577	0.782	0.317
SP	1.000	0.181	0.000	0.092	0.856	0.481	0.902	0.271
SE	0.405	0.882	0.656	0.317	0.838	0.945	0.749	0.359
TO	0.500	0.614	0.306	0.557	0.885	0.814	0.594	0.138

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 15 – Fatores Ênfase, e seus valores normalizados, dos subcritérios do modelo

Parâmetros Estatísticos	IDEB	INSE	TDIS	Alunos por Turma	Horas-Aula Diária	PIB per capita	Docentes Nível Superior	Remuneração Média dos Docentes
Fator Ênfase	0.192	0.225	0.206	0.158	0.181	0.187	0.158	0.142
Fator Ênfase Normalizado	1.000	0.522	0.478	0.465	0.535	1.000	0.526	0.474

Fonte: Elaboração própria.

### *Critério 1: Qualidade do Ensino*

O vetor de prioridade local referente a este critério ( $L_1$ ) é o próprio vetor de dados do subcritério “IDEB” da matriz de decisão (Tabela 14) visto que o critério “Qualidade do Ensino” abrange apenas esse subcritério.

### *Critério 2: Alunos*

O vetor de prioridade global referente a este critério ( $L_2$ ) é o vetor resultante da multiplicação entre a submatriz de dados dos subcritérios “INSE” e “TDIS” da matriz de decisão (Tabela 14) e o vetor de  $FE_{kj}^*$  normalizados desses subcritérios, isto é:

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0,748 & 0,770 \\ 0,882 & 0,657 \\ 0,669 & 0,933 \\ \vdots & \vdots \\ 0,614 & 0,306 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,522 \\ 0,478 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,759 \\ 0,775 \\ 0,795 \\ \vdots \\ 0,467 \end{bmatrix}$$

*Crêterios 3, 4 e 5:*

Os vetores de prioridades locais referentes aos cr terios ‘‘Escolas’’ e ‘‘Professores e Docência’’ ( $L_3$  e  $L_5$ ) são obtidos seguindo o mesmo raciocínio de cálculo do vetor  $L_2$ , enquanto o vetor para o cr terio ‘‘PIB’’ ( $L_4$ ) segue a ideia similar a do cr terio  $L_1$ . De posse desses vetores, os os fatores ênfase, e seus valores normalizados, ( $FE_k$  e  $FE_k^*$ ) dos cr terios são calculados (Tabela 16).

Tabela 16 – Fatores ênfase, e seus valores normalizados, dos cr terios do modelo

Parâmetros Estatísticos	Qualidade da Educa�o	Alunos	Escolas	Econ�mico	Professores e Docência
Fator �nfase	0.192	0.222	0.169	0.187	0.167
Fator �nfase Normalizado	0.205	0.237	0.181	0.199	0.178

Fonte: Elabora o própria.

Simultaneamente   desenvoltura deste método, para os mesmos dados deste *case*, também foram aplicados os métodos AHP-Gaussiano (Se o 2.3) e AHP-Equitativo (Capítulo 3), bem como uma versão adaptada do AHP-Gaussiano sem o uso da média dos dados como denominador e com a conversão de monotocidades e normaliza o seguindo a idealiza o do método AHP-MEDAC (preservando a variabilidade original dos dados). A ideia está em verificar o efeito da proposta metodológica trazida neste trabalho (método AHP-MEDAC) frente aos demais métodos, considerando o valor agregado dos pesos dos cr terios com ênfase na equidade (‘‘Alunos’’ e ‘‘Econ mico’’), conforme   visto na Tabela 17:

Tabela 17 – Pesos normalizados dos cr terios calculados pelos quatro métodos

Crêterios	AHP-MEDAC	AHP-Equitativo	AHP-Gaussiano (adaptado)	AHP-Gaussiano (original)
Qualidade do Ensino	0,205	0,063	0,215	0,080
Alunos*	0,237	0,298	0,229	0,276
Escolas	0,181	0,033	0,197	0,041
Econ�mico*	0,199	0,469	0,174	0,399
Professores e Docência	0,178	0,138	0,185	0,204

Fonte: Elabora o própria.

Dessa análise, verifica-se que os métodos AHP-Equitativo e AHP-Gaussiano (original) são os que apresentam os maiores valores no peso agregado da ênfase equidade (respectivamente, 0,767 e 0,675), porém tais resultados se devem ao fato da distorção ocorrida na variabilidade dos dados causada pela transformação nas monotonidades decrescentes dos critérios, o que não reflete a realidade dos fatos. Logo, a comparação mais fidedigna para a modelagem deste *case* acaba se tornando apenas entre os métodos AHP-MEDAC e AHP-Gaussiano (adaptado) onde seus valores de ênfase de equidade agregada são, respectivamente, 0,436 e 0,403, o que nos evidencia que o método AHP-MEDAC conseguiu potencializar a ênfase da problemática em 8,19%.

#### *Etapa 4: Avaliação Global das Alternativas*

Por fim, o vetor de prioridade global  $G$  referente ao objetivo geral da problemática é obtido a partir da multiplicação entre a matriz agregada dos vetores  $L_1, L_2, \dots, L_5$  normalizados (conforme Seção 4.1) e o vetor agregado dos  $FE_k^*$  normalizados dos critérios, isto é:

$$G = \begin{bmatrix} 0,476 & 0,762 & 0,349 & 0,918 & 0,198 \\ 0,405 & 0,781 & 0,315 & 0,962 & 0,000 \\ 0,000 & 0,804 & 0,824 & 0,880 & 0,702 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0,500 & 0,427 & 0,928 & 0,814 & 0,390 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,205 \\ 0,237 \\ 0,181 \\ 0,199 \\ 0,178 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,559 \\ 0,517 \\ 0,640 \\ \vdots \\ 0,603 \end{bmatrix}$$

Com o vetor global obtido, tem-se as pontuações finais dos entes federativos, restando, por fim, ordená-los para a construção do *ranking* (Tabela 18). Com esse resultado, o método AHP-MEDAC finaliza o modelo de decisão multicritério fornecendo informações fundamentadas para uma recomendação de decisão à organização pública no que diz respeito à sua necessidade de priorização de UFs no recebimento dos recursos financeiros, levando em conta a ênfase estabelecida, no caso, a equidade.

Tabela 18 – *Ranking* das UFs (uso do Método AHP-MEDAC)

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°
PI	CE	SE	PB	AP	PA	BA	MA	RR	TO	ES	MG	PE	PR	RS	AC	GO	MS	SP	AL	RO	RN	RJ	AM	SC	DF	MT

Fonte: Elaboração própria.

Por fim, para fins de validação da robustez do método proposto neste trabalho (AHP-MEDAC), análises de correlações entre *rankings* foram feitas considerando os seguintes cenários comparativos: (i) *Ranking* do AHP-MEDAC em relação aos *Rankings* dos métodos

AHP-Equitativo, AHP-Gaussiano “Adaptado” e “Original”; e (ii) *Ranking* do AHP-MEDAC (filtrando as UFs por região geográfica) em relação aos *rankings* do AHP-MEDAC em modelos segmentados por essa regiões. No primeiro caso, os modelos aplicáveis a este *case* que usaram os demais métodos apresentaram os seguintes *rankings* (Tabela 19).

Tabela 19 – *Ranking* das UFs (uso dos demais métodos)

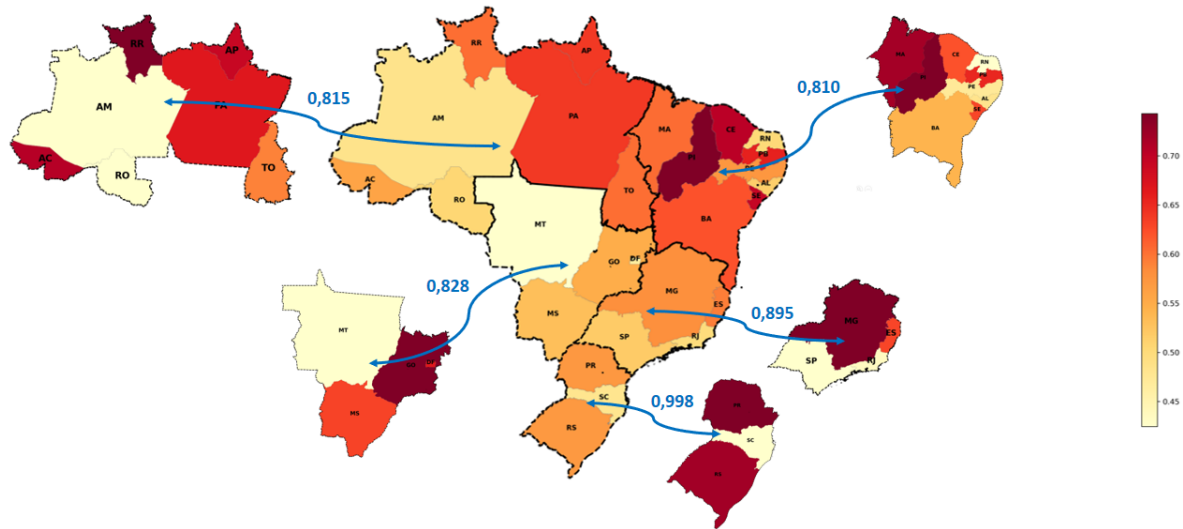
	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°
AHP-Equitativo	MA	PB	PA	BA	PI	SE	AL	RN	AP	AC	CE	PE	RR	AM	MS	TO	RJ	ES	RO	MG	GO	RS	SC	PR	DF	MT	SP
AHP-Gaussiano (adaptado)	PI	CE	SE	PB	AP	PA	BA	TO	ES	RR	MA	MG	PR	RS	PE	GO	AC	SP	MS	RJ	AL	RO	DF	SC	RN	AM	MT
AHP-Gaussiano (original)	MA	PA	BA	PB	PI	SE	RN	AP	AL	AC	PE	CE	RR	MS	AM	RJ	TO	ES	MG	GO	RO	RS	SC	PR	DF	MT	SP

Fonte: Elaboração própria.

Para essa comparação, utilizou-se a correlação de Spearman para avaliar a relação monotônica entre os *rankings* gerados pelos métodos, visto que essa métrica é apropriada para comparar posições relativas sem exigir uma relação linear. Os resultados indicam que o método AHP-MEDAC tem uma forte correlação ( $\rho = 0,910$ ) com o AHP-Gaussiano “Adaptado”, devido à similaridade nas operações de conversão de monotonicidades e normalização, e uma correlação moderada ( $\rho = 0,631$ ) com os métodos AHP-Equitativo e AHP-Gaussiano “Original”, demonstrando que o AHP-MEDAC mantém uma boa coerência com esses métodos e se torna viável para aplicação por apresentar correlações de moderada a alta, garantindo, portanto, consistência na priorização dos critérios.

No segundo caso comparativo, o método AHP-MEDAC foi implementado em 5 modelos de decisão para as UFs conforme sua respectiva região geográfica no Brasil - Norte (NO), Nordeste (NE), Centro-Oeste (CO), Sudeste (SE) e Sul (SU) - de modo a se avaliar as correlações de Spearman entre estes *rankings* e o *ranking* filtrado no modelo a nível nacional (Tabela 18). Os resultados indicam que o *ranking* a nível nacional tem fortes correlações com os *rankings* dos modelos NO, NE, CO, SE e SU (respectivamente, 0,815, 0,810, 0,828, 0,895 e 0,998), conforme Figura 13, demonstrando que o AHP-MEDAC se mantém robusto para modelagens por segmentações, tornando-o, portanto, viável para análises em diferentes granularidades de avaliação.

Figura 13 – Correlações entre os *rankings* dos modelos “Nacional” (filtrado conforme Região) e “Regional”



Fonte: Elaboração própria.

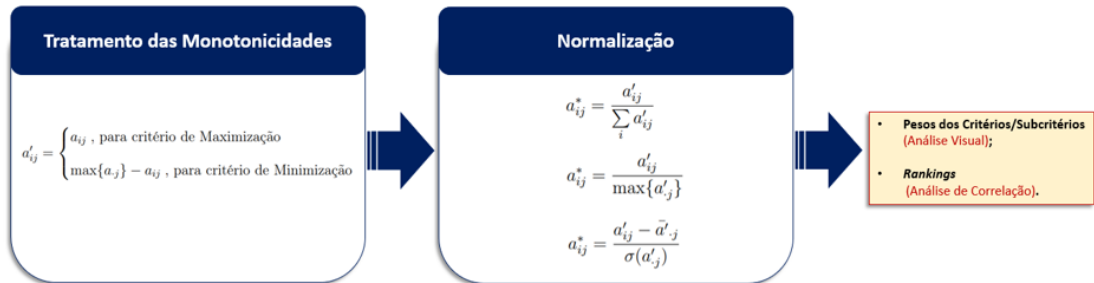
#### 4.2.1.2 Análise de sensibilidade do modelo

Análises de sensibilidade foram realizadas com o objetivo de avaliar a consistência e a robustez do método neste caso, sendo conduzidas em duas frentes de avaliação: (i) Análise sobre a influência do método de normalização, em que a normalização e a conversão das monotonicidades originais (Equação 13) são alteradas para outras formas diferentes de normalização, criando modelos que utilizam a normalização pela soma (dividindo o valor de uma alternativa em um critério pela soma de todos os valores nesse critério), normalização pelo valor máximo (dividindo o valor de uma alternativa em um critério pelo maior valor observado nesse critério) e normalização padrão (dividindo a diferença entre o valor de uma alternativa e a média do critério pelo seu desvio padrão); (ii) Análise sobre a influência da categorização, em que o agrupamento inicial de ênfase dos critérios é alterado por meio da inversão das categorias, ou seja, critérios de ênfase tornam-se de não ênfase e vice-versa, a fim de modificar os valores dos pesos calculados (Equação 14). Em ambas as abordagens, o objetivo foi verificar alterações nos valores dos pesos dos subcritérios/critérios por meio de uma observação visual comparativa, bem como avaliar a consistência entre os rankings através da correlação das posições das alternativas (Figura 14).

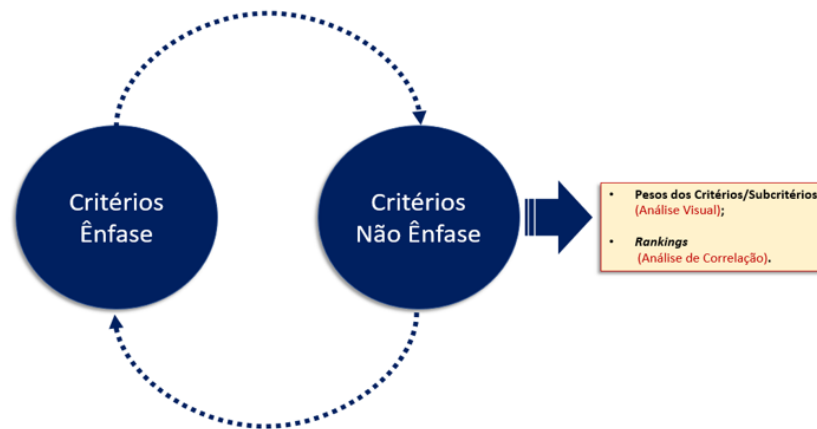
Figura 14 – Análise de Sensibilidade: influência da normalização e da categorização

## Análise de Sensibilidade

### Análise sobre a influência da **Normalização**



### Análise sobre a influência da **Categorização**



Fonte: Elaboração própria.

Na análise dos métodos de normalização, os pesos dos subcritérios/critérios dos modelos que utilizaram as normalizações propostas são comparados com aqueles obtidos a partir da abordagem original do método AHP-MEDAC (Tabelas 20 e 21), onde se observam diferenças expressivas entre os valores tanto no nível de subcritérios quanto de critérios, especificamente em função das normalizações pela soma e pelo valor máximo. Ao avaliar a consistência entre os rankings, é construída uma matriz de correlações de Spearman (Tabela 22), na qual são observadas correlações variando de moderadas a fortes, indicando que, mesmo com mudanças relevantes nos pesos causadas pelas diferentes normalizações, ainda é possível obter resultados razoavelmente consistentes.

Tabela 20 – Pesos dos subcritérios na análise de sensibilidade por normalização (*case 1*)

Subcritérios	AHP-MEDAC	Normalização_SOMA	Normalização_MÁXIMO	Normalização_PADRÃO
IDEB	1,000	1,000	1,000	1,000
INSE	0,522	0,627	0,591	0,511
Taxa de Distorção Idade-Série	0,478	0,373	0,409	0,489
Alunos por Turma	0,465	0,884	0,790	0,509
Horas-Aula Diária	0,535	0,116	0,210	0,491
PIB <i>per capita</i>	1,000	1,000	1,000	1,000
% Docentes com Nível Superior	0,526	0,252	0,338	0,511
Remuneração Média dos Docentes	0,474	0,748	0,662	0,489

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 21 – Pesos dos critérios na análise de sensibilidade por normalização (*case 1*)

Crítérios	AHP-MEDAC	Normalização_SOMA	Normalização_MÁXIMO	Normalização_PADRÃO
Qualidade da Educação	0,205	0,053	0,080	0,191
Alunos	0,237	0,293	0,299	0,206
Escolas	0,181	0,306	0,205	0,183
Econômico	0,199	0,233	0,304	0,229
Professores e Docência	0,178	0,115	0,113	0,190

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 22 – Matriz de correlações na análise de sensibilidade por normalização (*case 1*)

	AHP-MEDAC	Norm._SOMA	Norm._MÁXIMO	Norm._PADRÃO
<b>AHP-MEDAC</b>	<b>1,0000</b>	<b>0,5952</b>	<b>0,7210</b>	<b>0,9725</b>
<b>Norm._SOMA</b>	0,5952	<b>1,0000</b>	<b>0,8864</b>	<b>0,6691</b>
<b>Norm._MÁXIMO</b>	0,7210	0,8864	<b>1,0000</b>	<b>0,7289</b>
<b>Norm._PADRÃO</b>	0,9725	0,6691	0,7289	<b>1,0000</b>

Fonte: Elaboração própria.

Na análise por categorização, os pesos dos subcritérios/critérios do modelo que teve a proposta de inversão de ênfase nas categorias são comparados com os obtidos pelo AHP-MEDAC no cenário inicial (Tabelas 23 e 24), onde se nota praticamente valores bem próximos ao longo de todos os critérios. Ao se avaliar a consistência entre os *rankings*, o coeficiente de correlação obtido resultou em 0,9298, o que sinaliza uma correspondência forte entre os mesmos, sendo esta uma consequência das proximidades dos valores dos pesos entre os dois modelos.

Tabela 23 – Pesos dos subcritérios na análise de sensibilidade por categorização (*case 1*)

<b>Subcritérios</b>	<b>AHP-MEDAC</b>	<b>Categorias Invertidas</b>
IDEB	1,000	1,000
INSE	0,522	0,497
Taxa de Distorção Idade-Série	0,478	0,503
Alunos por Turma	0,465	0,450
Horas-Aula Diária	0,535	0,550
PIB <i>per capita</i>	1,000	1,000
% Docentes com Nível Superior	0,526	0,509
Remuneração Média dos Docentes	0,474	0,491

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 24 – Pesos dos critérios na análise de sensibilidade por categorização (*case 1*).

<b>Crítérios</b>	<b>AHP-MEDAC</b>	<b>Categorias Invertidas</b>
Qualidade da Educação	0,205	0,227
Alunos	0,237	0,222
Escolas	0,181	0,215
Econômico	0,199	0,141
Professores e Docência	0,178	0,195

Fonte: Elaboração própria.

Em síntese, com base nas análises de sensibilidade deste *case*, verifica-se que a escolha da normalização possui maior impacto sobre o peso e, conseqüentemente, sobre o *ranking* final das alternativas. Esse resultado é esperado, uma vez que os métodos de normalização modificados alteram a variabilidade dos dados, modificando os pesos dos subcritérios/critérios. Isso evidencia a importância de se utilizar a normalização adequada para manter o uso da variabilidade e da assimetria dos dados originais. Por outro lado, nesta aplicação, o efeito da alteração dos critérios de ênfase não se mostrou elevado. Uma das razões para esse resultado decorre do fato de que os subcritérios/critérios deste trabalho não apresentaram grande assimetria e, conseqüentemente, a escolha entre os maiores ou menores semi-desvios não teve grande impacto nos resultados.

## 4.2.2 Modelo nº 2: case “Obras” (nível de aplicação - municípios)

### 4.2.2.1 Implementação do modelo

Nesta seção, é apresentado um *case* cujo cenário consiste em uma organização pública que deseja distribuir recursos financeiros para investimentos em obras escolares a todos os municípios do Brasil. Para distribuir tais recursos, deseja-se utilizar um *ranking* como fundamentação para as decisões de prioridades, levando em conta, como ênfase neste cenário, a equidade.

Nesta problemática de decisão, dois critérios são considerados (aspecto político educacional e aspecto socioeconômico) contemplando os subcritérios INSE - Índice de Nível Socioeconômico dos alunos (para Escolas de Tempo Integral-ETI), Meta 6 do Plano Nacional de Educação<sup>1</sup>, IDSE (Índice de Diferenciação Socioeconômica da Educação para ETI), VAAT (Valor Aluno Ano Total), Programa ETI e Compromisso Nacional Criança Alfabetizada. Para esses subcritérios, os grupos dos critérios (Critérios de Equidade e Critérios de Manutenção da Excelência) a que pertencem, bem como suas monotonicidades (Maximização e Minimização) são definidos conforme Tabela 25.

Tabela 25 – Grupo e monotonicidade dos subcritérios

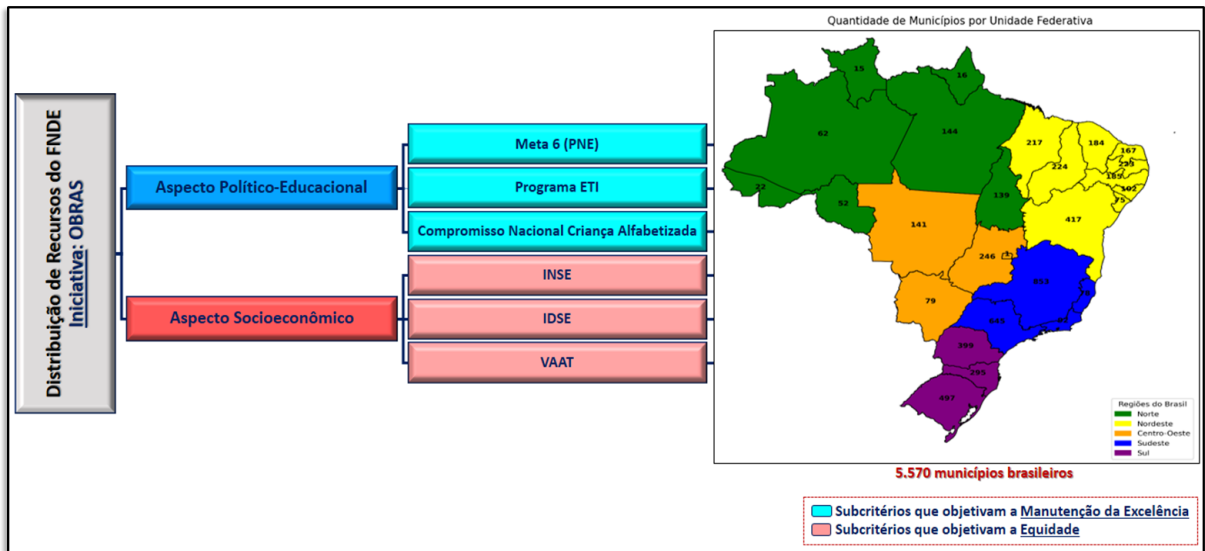
Subcritério	Grupo do subcritério (Equidade / Manutenção da Excelência)	Monotonicidade (Maximização / Minimização)
INSE (Escolas de Tempo Integral)	Equidade	MIN / Decrescente
Meta 6 PNE (Escolas de Tempo Integral)	Manutenção da Excelência	MAX / Crescente
IDSE (Escolas de Tempo Integral)	Equidade	MAX / Crescente
VAAT	Equidade	MIN / Decrescente
Programa Escolas de Tempo Integral	Manutenção da Excelência	MAX / Crescente
Compromisso Nac. Criança Alfabetizada	Manutenção da Excelência	MAX / Crescente

Fonte: Elaboração própria.

Na modelagem desse *case* de decisão “Obras”, os relacionamentos entre os subcritérios com seus respectivos critérios foram delineados conforme estrutura hierárquica definida na Figura 15. O critério *Aspecto Político Educacional*, com seus subcritérios, objetiva a manutenção da excelência, enquanto o critério *Aspecto Socioeconômico*, e seus relacionados, objetiva a equidade.

<sup>1</sup> A Meta 6 do Plano Nacional de Educação (PNE) do Brasil visa oferecer educação em tempo integral em, no mínimo, 50% das escolas públicas, atendendo pelo menos 25% dos estudantes até o final do período de vigência do plano. Para mais detalhes, ver *Plano Nacional de Educação – Lei nº 13.005/2014*.

Figura 15 – Estrutura hierárquica do modelo de decisão - *Case* “Obras” Municípios



Fonte: Elaboração própria.

A base de dados utilizada para este *case* foi obtida do FNDE, onde toda a desenvoltura da modelagem foi feita considerando o fluxo de realização do método AHP-MEDAC, conforme visto na Figura 8. O resultado final deste modelo foi o *ranking* contemplando os 5.570 municípios brasileiros (proposta de priorização para a recomendação da distribuição dos recursos financeiros destinados às obras escolares) que melhor pode ser representado por um mapa de calor das pontuações globais destes entes federativos, conforme Figura 16.

Figura 16 – Mapa de Calor (Pontuações Globais dos Municípios)



Fonte: Elaboração própria.

Nesse mapa, observa-se predominantemente municípios das regiões NO e NE com necessidades prioritárias por recursos em obras escolares, seguido de evidências para um quantitativo razoável referente aos entes das demais regiões. Um resultado também relevante a se destacar é o forte contraste das pontuações (as cores no mapa) entre os municípios, o que contribui de certa forma na tomada de decisão pela distância da dúvida, resultado este decorrente da contribuição do método AHP-MEDAC.

Para este *case* também foi implementado o método AHP-Gaussiano adaptado (formulação matemática para o cálculo dos pesos similar a que foi implementada no *Case* "Geral" - Nível UFs) para fins de comparabilidade e verificação dos pesos entre os dois métodos (Tabela 26). Dessa análise, verifica-se que a ênfase da equidade considerada (aspecto socioeconômico) teve seu peso potencializado em 36,9% pelo método AHP-MEDAC em relação ao AHP-Gaussiano, o que condiz com o objetivo desejado da proposta metodológica trazida neste trabalho.

Para a análise da robustez do método AHP-MEDAC neste *case*, foram desenvolvidos

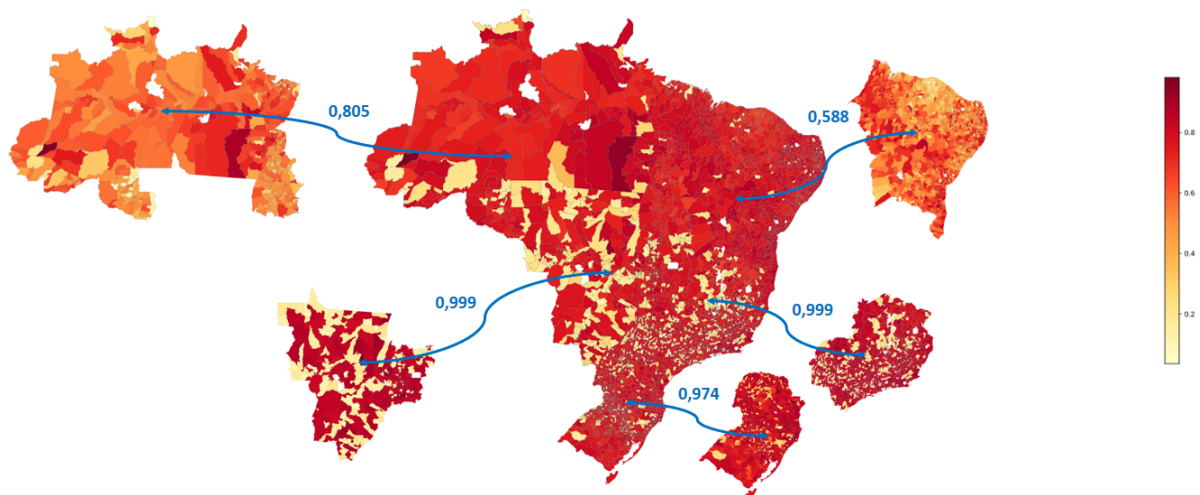
Tabela 26 – Pesos normalizados dos critérios calculados pelos métodos AHP-MEDAC e AHP-Gaussiano (Adaptado)

Critérios	AHP-MEDAC	AHP-Gaussiano (Adaptado)
Aspecto Político Educacional	0,625	0,726
Aspecto Socioeconômico	0,375	0,274

Fonte: Elaboração própria.

5 modelos de decisão, um para cada uma das 5 regiões geográficas do Brasil (NO, NE, CO, SE e SU), onde as correlações de Spearman entre os *rankings* destes modelos regionais e o *ranking* filtrado por região do modelo original (que engloba todos os municípios) foram calculadas (Figura 17). Os resultados indicam que o *ranking* a nível nacional tem fortes correlações com os *rankings* dos modelos NO, CO, SE e SU (respectivamente, 0,805, 0,999, 0,999 e 0,974) e uma correlação moderada de 0,588 com o modelo da região NE (influenciado por mudanças de assimetria e variabilidade nos dados entre os dois modelos), o que fortalece, novamente, a capacidade do método AHP-MEDAC em sua aplicabilidade, inclusive, para análises por segmentações.

Figura 17 – Correlações entre *rankings* dos modelos “Nacional” (filtrado conforme Região) e “Regional”



Fonte: Elaboração própria.

#### 4.2.2.2 Análise de sensibilidade do modelo

A análise de sensibilidade deste *case* segue um quadro de implementação e comparação semelhante ao realizado no caso anterior (Figura 14). Ou seja, são consideradas análises baseadas em variações no método de normalização ou em variações/inversões na ênfase dos

critérios, a fim de verificar a consistência e a robustez dos resultados do método AHP-MEDAC.

Considerando apenas as possíveis variações na forma de normalização, os pesos dos subcritérios/critérios dos modelos nesses cenários são então calculados (Tabelas 27 e 28). Os resultados mostram que, diferentemente do *case 1*, agora a normalização pelo valor máximo é a mais próxima dos resultados do método AHP-MEDAC. Os pesos obtidos de acordo com os outros dois métodos de normalização são bastante diferentes. Esse mesmo padrão de resultados é observado no que diz respeito à correlação de Spearman entre os *rankings* (Tabela 29). Esse fato também evidencia a importância de se utilizar o método de normalização adequado, que não altere a variabilidade e a assimetria originais dos dados.

Tabela 27 – Pesos dos subcritérios na análise de sensibilidade por normalização (*case 2*)

Subcritérios	AHP-MEDAC	Normalização_SOMA	Normalização_MÁXIMO	Normalização_PADRÃO
Meta 6 PNE – Escolas de Tempo Integral	0,044	0,954	0,067	0,522
Programa ETI	0,911	0,045	0,889	0,394
Compromisso Nacional Criança Alfabetizada	0,045	0,002	0,044	0,084
INSE – Escolas de Tempo Integral	0,425	0,476	0,326	0,342
Infraestrutura e resultados (IDSE) – Escolas de TI	0,392	0,322	0,534	0,320
VAAT	0,183	0,202	0,140	0,337

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 28 – Pesos dos critérios na análise de sensibilidade por normalização (*case 2*)

Critérios	AHP-MEDAC	Normalização_SOMA	Normalização_MÁXIMO	Normalização_PADRÃO
Aspecto Político-Educacional	0,625	0,968	0,596	0,481
Aspecto Socioeconômico	0,375	0,032	0,404	0,519

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 29 – Matriz de correlações na análise de sensibilidade por normalização (*case 2*)

	AHP-MEDAC	Norm._SOMA	Norm._MÁXIMO	Norm._PADRÃO
AHP-MEDAC	1,0000	0,1767	0,2408	0,8146
Norm._SOMA	0,1767	1,0000	-0,0195	0,3576
Norm._MÁXIMO	0,2408	-0,0195	1,0000	-0,0319
Norm._PADRÃO	0,8146	0,3576	-0,0319	1,0000

Fonte: Elaboração própria.

Para as variações na categorização dos critérios de ênfase, são apresentados os pesos do modelo com categorias invertidas e comparados com os valores obtidos no AHP-MEDAC original (Tabelas 30 e 31), onde alguns subcritérios apresentam diferenças relevantes nos valores, bem como uma ligeira variação no nível dos critérios. Entre os *rankings*, o coeficiente de

correlação de Spearman obtido é de 0,9880, o que é considerado uma correlação muito forte entre os resultados dos modelos.

Tabela 30 – Pesos dos subcritérios na análise de sensibilidade por categorização (*case 2*)

Subcritérios	AHP-MEDAC	Categorias_Invertidas
Meta 6 PNE – Escolas de Tempo Integral	0,044	0,027
Programa ETI	0,911	0,778
Compromisso Nacional Criança Alfabetizada	0,045	0,195
INSE – Escolas de Tempo Integral	0,425	0,394
Infraestrutura e resultados (IDSE) – Escolas de Tempo Integral	0,392	0,430
VAAT	0,183	0,176

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 31 – Pesos dos critérios na análise de sensibilidade por categorização (*case 2*)

Crítérios	AHP-MEDAC	Categorias_Invertidas
Aspecto Político-Educacional	0,625	0,772
Aspecto Socioeconômico	0,375	0,228

Fonte: Elaboração própria.

De modo geral, os resultados da análise de sensibilidade de ambos os casos conduzem a conclusões semelhantes. A normalização maximin deve ser utilizada, uma vez que a normalização possui grande impacto sobre a variabilidade e a assimetria dos dados, mas a ênfase nos critérios somente desempenha um papel crucial se os dados apresentarem uma forte assimetria.

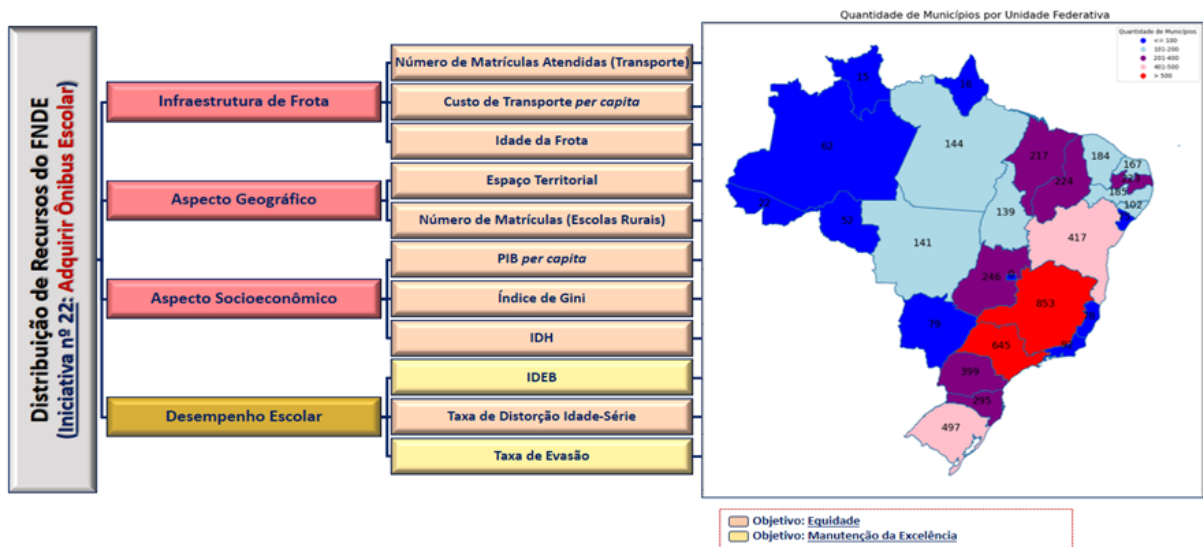
### 4.2.3 Modelo nº 3: *case* “Transporte Escolar” (nível de aplicação - municípios, mesorregiões e microrregiões)

#### 4.2.3.1 Implementação do modelo

Este *case* consiste em um cenário onde uma organização pública detém a atribuição de distribuir recursos financeiros para investimentos em transporte escolar destinados a municípios, com possibilidade de concessão de tais recursos em função das mesorregiões ou microrregiões do Brasil. Para uma distribuição organizada desses recursos com foco em equidade, será necessário o uso de *rankings* que serão obtidos a partir de três modelos de decisão multicritério desenvolvidos conforme a granularidade da unidade geográfica de interesse.

Os modelos matemáticos são estruturados a partir de quatro critérios (infraestrutura de frota, aspecto geográfico, aspecto socioeconômico e desempenho escolar) considerando onze subcritérios para uma análise inicial (Figura 18). Os subcritérios considerados são número de matrículas/alunos atendidas pelo transporte escolar, custo de transporte *per capita*, idade média da frota, espaço territorial, número de matrículas em escolas rurais, PIB *per capita*, Índice de Gini, IDH, IDEB, Taxa de Distorção Idade-Série (TDIS) e Taxa de Evasão.

Figura 18 – Estrutura hierárquica do modelo de decisão – Case “Transporte Escolar”



Fonte: Elaboração própria.

Em relação às monotonicidades, os subcritérios PIB *per capita*, IDH e Taxa de Evasão são de minimização, enquanto os demais são de maximização. Quanto aos grupos de subcritérios conforme a ênfase de interesse, tem-se que o critério Desempenho Escolar e seus subcritérios IDEB e Taxa de Evasão fazem parte da categoria de não ênfase (manutenção da excelência), à medida que os demais critérios e subcritérios têm seu objetivo na ênfase de interesse do modelo (equidade).

Com a desenvoltura deste modelo, em um primeiro momento tendo os municípios do Brasil como as alternativas, os pesos/fatores ênfase dos subcritérios foram calculados (Tabela 32). Conforme se observa pelos pesos normalizados, os subcritérios Custo de Transporte *per capita*, Número de Matrículas Atendidas (Escolas Rurais), IDH e TDIS são os de maiores pesos em seus respectivos critérios subordinados, o que tendem a influenciar relevantemente todo o cômputo seguinte para a geração do *ranking*.

Tabela 32 – Fatores Ênfase, e seus valores normalizados, dos subcritérios do modelo Municípios

Parâmetros Estatísticos	Nº Matrículas Atendidas (Transporte)	Custo Transporte <i>per capita</i>	Idade Média da Frota	Espaço Territorial	Nº Matrículas Atendidas (Escolas Rurais)	PIB <i>per capita</i>	Índice de Gini	IDH	IDEB	TDIS	Taxa de Evasão
Fator Ênfase	0,0143	0,2042	0,1308	0,0345	0,0520	0,0428	0,0913	0,1178	0,0987	0,1322	0,0371
Fator Ênfase Normalizado	0,0410	0,5846	0,3744	0,3991	0,6009	0,1700	0,3624	0,4676	0,3685	0,4932	0,1383

Fonte: Elaboração própria.

Em seguida, de posse dos cálculos anteriores, os pesos/fatores ênfase dos critérios são calculados (Tabela 33). Conforme se observa, os dois critérios com os maiores pesos normalizados são critérios ênfase, isto é, Infraestrutura de Frota e Aspecto Socioeconômico (valor agregado de 67,44% de relevância), o que evidencia um *insight* desejável obtido pela abordagem do método AHP-MEDAC.

Tabela 33 – Fatores Ênfase, e seus valores normalizados, dos critérios do modelo Municípios

Parâmetros Estatísticos	Infraestrutura de Frota	Aspecto Geográfico	Aspecto Socioeconômico	Desempenho Escolar
Fator Ênfase	0,1381	0,0614	0,1139	0,0602
Fator Ênfase Normalizado	0,3695	0,1644	0,3049	0,1612

Fonte: Elaboração própria.

Com o desenvolvimento do modelo, gerou-se o *ranking* desejado onde se fez um filtro dos 10 municípios de maiores pontuações globais para se fazer uma análise. Conforme Tabela 34, nota-se que este top 10 é composto exclusivamente por municípios da região Norte (Amazonas e Pará) com altas pontuações nos subcritérios de maiores pesos dos dois critérios mais relevantes (Infraestrutura de Frota e Aspecto Socioeconômico), isto é, Custo de Transporte *per capita* e IDH, respectivamente.

Tabela 34 – Top 10 do *Ranking* (Municípios)

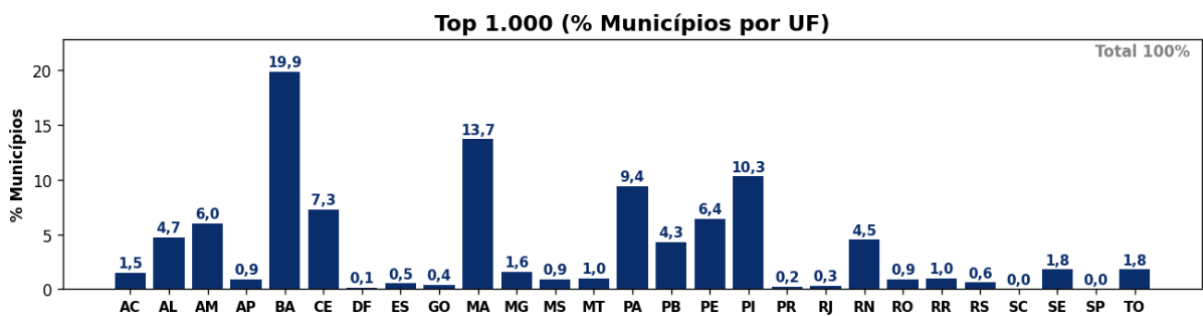
Posição	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Município	São Gabriel da Cachoeira	Barcelos	Portel	Breves	Chaves	Porto de Moz	Jacareacanga	Anajás	Cametá	Atalaia do Norte
UF	AM	AM	PA	PA	PA	PA	PA	PA	PA	AM

Fonte: Elaboração própria.

Ampliando o escopo de estudo para melhor entendimento das análises, considera-se agora um filtro composto pelos 1.000 municípios de maiores pontuações globais no *ranking*, onde se considera para uma primeira análise a proporção de municípios por UF presentes neste Top 1.000 denotada por “% municípios por UF” (quantidade de municípios de cada UF dividido por 1.000), observando-se, conforme Figura 19, que Bahia, Ceará, Maranhão, Pará, Pernambuco e Piauí registram os maiores percentuais, o que reforça o destaque das regiões Norte e Nordeste no resultado geral deste modelo. Para uma segunda análise, agora considera-se

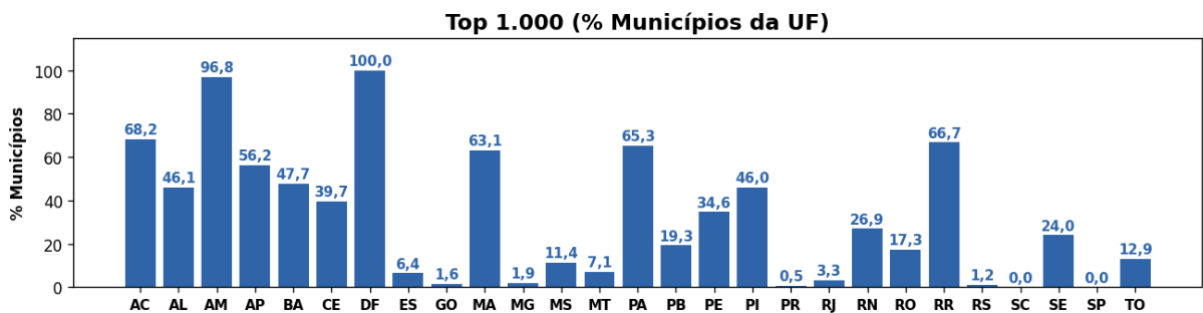
a proporção de municípios da UF presentes neste Top 1.000 denotada por “% municípios da UF” (quantidade de municípios de cada UF dividido pela quantidade de municípios existentes naquela UF), onde se nota, conforme Figura 20, que o Distrito Federal apresenta participação de 100% por possuir apenas uma unidade geográfica neste modelo e que está dentro do top 1.000, e que Acre, Amazonas, Amapá, Maranhão, Pará e Roraima apresentam percentuais superiores à metade de seus municípios, o que decorre do fato de a maioria dessas UFs abrangerem poucos municípios em seu território geográfico, mas que são evidenciados como prioridade no *ranking* do modelo.

Figura 19 – Top 1.000 (% Municípios por UF)



Fonte: Elaboração própria.

Figura 20 – Top 1.000 (% Municípios da UF)

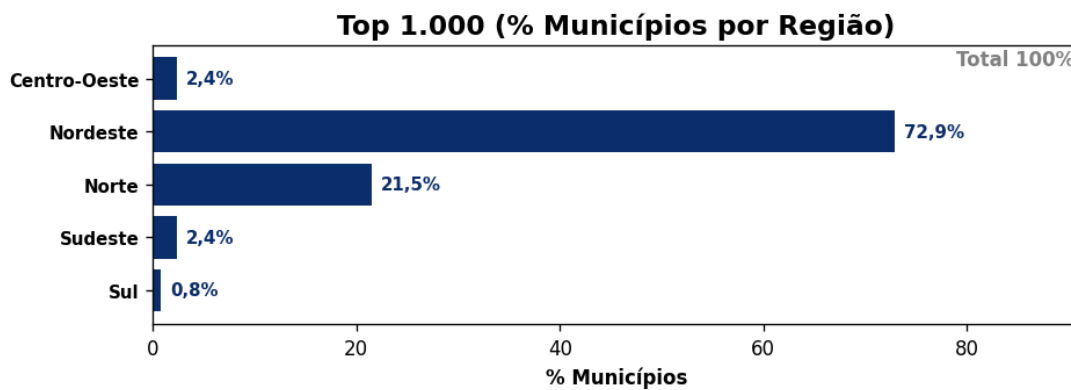


Fonte: Elaboração própria.

Por fim, visando fortalecer tais resultados das análises deste *case* a nível de municípios, busca-se então, aproveitando o mesmo Top 1.000, fazer uma avaliação em outra granularidade, agora em função do percentual dos municípios por região geográfica do Brasil, onde para uma primeira análise considera-se a quantidade de municípios de cada região presentes neste Top 1.000, sendo observado, conforme Figura 21, que Norte e Nordeste somam 94,4% dos municípios neste filtro e que essa predominância reforça a evidência por priorização a esses territórios, destacando-se que o Nordeste aparece em primeiro lugar em razão de ser a região com maior quantidade de municípios no Brasil e por esses municípios terem sido priorizados

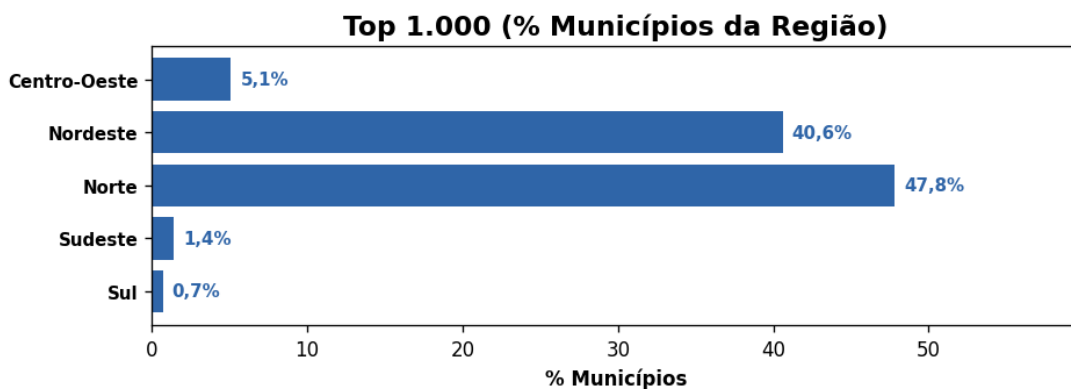
no *ranking*, o que naturalmente eleva sua participação percentual nesta métrica. Em uma segunda análise, considera-se a proporção de municípios da própria região presentes neste Top 1.000, onde se constata, conforme Figura 22, que Norte e Nordeste totalizam 88,4% quando considerados conjuntamente, sendo que o Norte assume a maior proporção por abranger um número reduzido de municípios em seu território e por esses serem priorizados no *ranking*, o que contribui para uma participação relativamente mais elevada nessa métrica de análise regional.

Figura 21 – Top 1.000 (% Municípios por Região)



Fonte: Elaboração própria.

Figura 22 – Top 1.000 (% Municípios da Região)



Fonte: Elaboração própria.

Continuando os trabalhos deste *case*, dois outros modelos foram desenvolvidos (níveis mesorregiões e microrregiões) como alternativas para o provimento de *rankings* que possam embasar as decisões referentes à distribuição de recursos para o transporte escolar. Para os dados desses modelos, buscou-se agregar os dados dos municípios de acordo com a meso ou microrregião a que eles pertencem utilizando uma formulação de agregação específica para cada subcritério, conforme Tabela 35.

Tabela 35 – Formulações de agregação por subcritério para os modelos meso e microrregiões

<b>Subcritério</b>	<b>Desempenho Agregado</b>
<b>Número de Matrículas Atendidas (Transporte Escolar)</b>	$\sum_{i=1}^n \text{N}^\circ \text{ de Matr. Atendidas}_i$
<b>Custo de Transporte per capita</b>	$\frac{\sum_{i=1}^n \text{Qtde R\$ recebida}_i}{\sum_{i=1}^n \text{N}^\circ \text{ de Matr. Atendidas}_i}$
<b>Idade Média da Frota</b>	$\frac{\sum_{i=1}^n \text{N}^\circ \text{ de Matr. Atendidas}_i \times \text{Idade Média da Frota}_i}{\sum_{i=1}^n \text{N}^\circ \text{ de Matr. Atendidas}_i}$
<b>Espaço Territorial</b>	$\sum_{i=1}^n \text{Espaço Territorial}_i$
<b>Número de Matrículas (Escolas Rurais)</b>	$\sum_{i=1}^n \text{N}^\circ \text{ de Matr. Escolas Rurais}_i$
<b>PIB per capita</b>	$\frac{\sum_{i=1}^n \text{População}_i \times \text{PIB per capita}_i}{\sum_{i=1}^n \text{População}_i}$
<b>Índice de Gini</b>	$\frac{\sum_{i=1}^n \text{População}_i \times \text{Índice de Gini}_i}{\sum_{i=1}^n \text{População}_i}$
<b>IDH</b>	$\frac{\sum_{i=1}^n \text{População}_i \times \text{IDH}_i}{\sum_{i=1}^n \text{População}_i}$
<b>IDEB</b>	$\frac{\sum_{i=1}^n \text{N}^\circ \text{ de Matr.}_i \times \text{IDEB}_i}{\sum_{i=1}^n \text{N}^\circ \text{ de Matr.}_i}$
<b>Taxa de Distorção Idade-Série</b>	$\frac{\sum_{i=1}^n \text{N}^\circ \text{ de Matr.}_i \times \text{TDIS}_i}{\sum_{i=1}^n \text{N}^\circ \text{ de Matr.}_i}$
<b>Taxa de Evasão</b>	$\frac{\sum_{i=1}^n \text{N}^\circ \text{ de Matr.}_i \times \text{Taxa de Evasão}_i}{\sum_{i=1}^n \text{N}^\circ \text{ de Matr.}_i}$

Fonte: Elaboração própria.

De posse dos dados, uma análise prévia desses dados iniciais calculados se torna interessante para fins de obtenção de *insights* e/ou expectativas quanto a conclusões posteriores no modelo. Sabendo que no Brasil há 137 mesorregiões e 558 microrregiões, buscou-se utilizar em torno de 18% desses quantitativos para esta primeira avaliação, considerando, portanto, uma análise dos 25 maiores desempenhos em cada critério para as mesorregiões e, de forma análoga, uma análise dos 100 maiores para as microrregiões.

Essas análises envolvem verificar o percentual de meso ou microrregiões por UF (Tabelas 36 e 37) e por região geográfica do Brasil (Tabelas 38 e 39). Propositalmente, nessas tabelas, as regiões Norte e Nordeste bem como suas UFs estão em destaque na cor vermelha com o objetivo de facilitar a compreensão dos *insights* que serão descritos a seguir.

Tabela 36 – Top 25 em cada subcritério (% Mesorregiões por UF)

UF	Nº Matrículas Atendidas (Transporte)	Custo de Transporte <i>per capita</i>	Idade Média Frota	Espaço Territorial	Nº Matrículas (Escolas Rurais)	PIB <i>per capita</i>	Índice de Gini	IDH	IDEB	TDIS	Taxa de Evasão
AC	0	4	4	0	0	0	8	4	0	4	0
AL	4	0	0	0	8	4	4	8	0	0	0
AM	4	16	8	16	8	12	16	12	0	8	0
AP	0	8	0	0	0	4	8	0	0	8	0
BA	20	4	4	12	24	8	4	12	0	16	0
CE	8	24	8	0	8	16	0	4	12	0	0
DF	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0
ES	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
GO	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	4
MA	8	12	8	0	16	8	12	8	0	0	0
MG	12	0	12	4	0	8	0	0	4	0	4
MS	0	0	0	8	0	0	0	0	0	8	4
MT	0	0	0	12	0	0	0	0	0	0	12
PA	16	20	8	16	20	8	16	12	0	20	0
PB	0	0	0	0	4	8	0	4	0	4	0
PE	8	4	0	0	8	8	8	12	0	0	0
PI	0	0	4	4	0	8	4	12	0	0	0
PR	4	0	0	0	0	0	0	0	24	0	40
RJ	4	0	8	0	4	0	0	0	0	12	0
RN	0	0	8	0	0	4	0	4	0	4	0
RO	0	4	0	8	0	0	0	0	0	0	0
RR	0	4	0	8	0	0	8	0	0	4	0
RS	0	0	8	0	0	0	0	0	4	0	0
SC	4	0	4	0	0	0	0	0	8	0	4
SE	0	0	4	0	0	4	0	8	0	12	0
SP	8	0	12	0	0	0	4	0	44	0	28
TO	0	0	0	8	0	0	4	0	0	0	0

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 37 – Top 100 em cada subcritério (% Microrregiões por UF)

UF	Nº Matrículas Atendidas (Transporte)	Custo de Transporte <i>per capita</i>	Idade Média Frota	Espaço Territorial	Nº Matrículas (Escolas Rurais)	PIB <i>per capita</i>	Índice de Gini	IDH	IDEB	TDIS	Taxa de Evasão
AC	0	3	3	3	3	0	5	2	0	4	0
AL	6	3	2	0	5	5	5	11	2	2	2
AM	1	13	4	13	6	7	12	8	0	7	0
AP	0	3	1	3	1	0	4	0	0	4	0
BA	21	9	3	7	21	11	11	11	0	18	0
CE	9	19	9	0	8	18	5	3	15	0	5
DF	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
ES	0	0	3	0	0	0	0	0	2	0	3
GO	2	0	1	4	1	0	1	0	5	0	5
MA	6	8	7	5	15	14	11	15	0	2	0
MG	5	0	9	4	1	4	0	0	7	0	8
MS	0	1	0	8	1	0	1	0	0	4	2
MT	0	5	3	16	0	0	5	0	0	0	9
PA	13	17	8	15	16	7	14	9	0	18	0
PB	0	1	5	0	1	14	1	13	0	4	0
PE	10	5	1	0	8	8	6	6	1	2	0
PI	3	2	2	5	5	6	5	10	0	4	0
PR	3	0	2	0	1	0	0	1	21	0	35
RJ	3	1	3	0	3	0	1	0	2	9	1
RN	2	3	8	0	1	5	1	3	0	10	0
RO	0	2	1	6	0	0	1	0	0	0	2
RR	0	2	1	4	1	0	4	1	0	2	0
RS	1	1	8	1	1	0	0	0	7	1	0
SC	7	0	3	0	0	0	0	0	4	0	3
SE	1	1	3	0	0	1	1	6	0	9	0
SP	7	1	9	0	0	0	1	0	34	0	24
TO	0	0	1	6	0	0	4	1	0	0	1

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 38 – Top 25 em cada subcritério (% Mesorregiões por Região)

Região	Nº Matrículas Atendidas (Transporte)	Custo de Transporte <i>per capita</i>	Idade Média Frota	Espaço Territorial	Nº Matrículas (Escolas Rurais)	PIB <i>per capita</i>	Índice de Gini	IDH	IDEB	TDIS	Taxa de Evasão
Centro-Oeste	0	0	0	24	0	0	4	0	4	8	20
Nordeste	48	44	36	16	68	68	32	72	12	36	0
Norte	20	56	20	56	28	24	60	28	0	44	0
Sudeste	24	0	32	4	4	8	4	0	48	12	36
Sul	8	0	12	0	0	0	0	0	36	0	44

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 39 – Top 100 em cada subcritério (% Microrregiões por Região)

Região	Nº Matrículas Atendidas (Transporte)	Custo de Transporte <i>per capita</i>	Idade Média Frota	Espaço Territorial	Nº Matrículas (Escolas Rurais)	PIB <i>per capita</i>	Índice de Gini	IDH	IDEB	TDIS	Taxa de Evasão
Centro-Oeste	2	6	4	28	3	0	8	0	5	4	16
Nordeste	58	51	40	17	64	82	46	78	18	51	7
Norte	14	40	19	50	27	14	44	21	0	35	3
Sudeste	15	2	24	4	4	4	2	0	45	9	36
Sul	11	1	13	1	2	0	0	1	32	1	38

Fonte: Elaboração própria.

Os *insights* obtidos nas tabelas por UF também podem ser obtidos das tabelas por região, de modo que objetivamente para esta avaliação é utilizado estas últimas tabelas. Conforme se observa nesses dados, para a maioria dos subcritérios, a presença de meso ou microrregiões do Norte e Nordeste é predominante, com destaque para o IDH com quase que 100% de representatividade, o que evidencia um alto nível de criticidade para essas regiões visto que tal subcritério tem monotonicidade decrescente e reflete os desempenhos mais baixos das unidades geográficas.

Em contrapartida, a representatividade do eixo NO-NE se torna bem menor em IDEB e Taxa de Evasão, justamente estes que são considerados subcritérios não ênfase. Logo, é provável que as altas pontuações das unidades geográficas das demais regiões (CO-SE-SU) nesses dois subcritérios não tenham impacto relevante para um bom posicionamento no *ranking* já que o método AHP-MEDAC tende a favorecer os critérios ênfase preferíveis.

Seguindo com mais análises, os pesos/fatores ênfase dos subcritérios para os modelos meso e microrregiões são calculados e apresentados, respectivamente, conforme Tabelas 40 e 41. Fazendo uma rápida análise visual dos pesos normalizados para cada subcritério entre os modelos, constata-se que, salvo os três últimos subcritérios, aparentemente há mudanças notáveis entre os valores, o que acaba despertando motivação para uma análise posterior de correlação entre os *rankings* com vistas a embasar a coerência da metodologia.

Tabela 40 – Fatores Ênfase, e valores normalizados, dos subcritérios do modelo Mesorregiões

Parâmetros Estatísticos	Nº Matrículas Atendidas (Transporte)	Custo Transporte <i>per capita</i>	Idade Média da Frota	Espaço Territorial	Nº Matrículas Atendidas (Escolas Rurais)	PIB <i>per capita</i>	Índice de Gini	IDH	IDEB	TDIS	Taxa de Evasão
Fator Ênfase	0,0988	0,0831	0,0924	0,1730	0,1482	0,1763	0,1231	0,1599	0,1264	0,1605	0,0371
Fator Ênfase Normalizado	0,3601	0,3029	0,3370	0,5386	0,4614	0,3839	0,2680	0,3481	0,3901	0,4954	0,1145

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 41 – Fatores Ênfase, e valores normalizados, dos subcritérios do modelo Microrregiões

Parâmetros Estatísticos	Nº Matrículas Atendidas (Transporte)	Custo Transporte <i>per capita</i>	Idade Média da Frota	Espaço Territorial	Nº Matrículas Rurais (Escolas Rurais)	PIB <i>per capita</i>	Índice de Gini	IDH	IDEB	TDIS	Taxa de Evasão
Fator Ênfase	0,0461	0,0556	0,0895	0,0842	0,1131	0,0785	0,1008	0,1471	0,1105	0,1488	0,0356
Fator Ênfase Normalizado	0,2411	0,2907	0,4682	0,4268	0,5732	0,2405	0,3088	0,4507	0,3746	0,5047	0,1207

Fonte: Elaboração própria.

Os pesos dos critérios para os modelos meso e microrregiões também são obtidos e apresentados conforme Tabelas 42 e 43. Comparando-se também pelos pesos normalizados, nota-se que em ambos os modelos, os critérios Aspecto Geográfico e Aspecto Socioeconômico têm forte relevância para os resultados posteriores e que os pesos de cada critério mudam suavemente de valor entre os modelos, o que é um indicativo de coerência da proposta metodológica trazida neste trabalho.

Tabela 42 – Fatores Ênfase, e valores normalizados, dos critérios do modelo Mesorregiões

Parâmetros Estatísticos	Infraestrutura de Frota	Aspecto Geográfico	Aspecto Socioeconômico	Desempenho Escolar
Fator Ênfase	0,0629	0,1935	0,1566	0,1336
Fator Ênfase Normalizado	0,1151	0,3540	0,2865	0,2444

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 43 – Fatores Ênfase, e valores normalizados, dos critérios do modelo Microrregiões

Parâmetros Estatísticos	Infraestrutura de Frota	Aspecto Geográfico	Aspecto Socioeconômico	Desempenho Escolar
Fator Ênfase	0,0578	0,1386	0,1561	0,0739
Fator Ênfase Normalizado	0,1355	0,3250	0,3662	0,1733

Fonte: Elaboração própria.

Com vistas a consolidar a consistência do método AHP-MEDAC, busca-se verificar a existência de conexão entre os *rankings* referentes aos três modelos desenvolvidos (níveis municípios, mesorregiões e microrregiões). Para este propósito, inicialmente utilizou-se do *ranking* dos municípios para gerar *rankings* de meso e microrregiões a partir da mediana das posições dos municípios pertencentes às suas respectivas unidades geográficas, de modo a fazer comparações com os *rankings* gerados anteriormente nos modelos desses dois níveis de granularidade.

Tais comparações ocorrem a partir de análises de correlação de Spearman sobre as posições das alternativas nos *rankings*, considerando o comparativo: (i) *Ranking* do Modelo Mesorregião x *Ranking* das Mesorregiões pela mediana das posições dos Municípios; (ii) *Ranking* do Modelo Microrregião x *Ranking* das Microrregiões pela mediana das posições dos Municípios. Os valores de correlações obtidos foram 0,8071 (entre os *rankings* das mesorregiões) e 0,8969 (entre os *rankings* das microrregiões), o que indica forte conexão entre o modelo municípios com os modelos das demais granularidades e, conseqüentemente, evidenciando uma consistência relevante da metodologia implementada neste *case*.

Um outro resultado dos modelos deste *case* a se considerar está na avaliação do top 10 nos *rankings* das meso e microrregiões, conforme apresentado nas Tabelas 44 e 45.

Dessa análise nota-se novamente que os top 10 são compostos predominantemente por unidades geográficas da região Norte (com destaque para as localizadas nos estados de Amazonas e Pará) onde, em ambos os modelos, suas pontuações são quantitativamente consideráveis nos subcritérios Espaço Territorial e IDH, e estes por sua vez detêm forte relevância sobre seus critérios subordinados (respectivamente, Aspecto Geográfico e Aspecto Socioeconômico) que são os que mais tendem a influenciar no *ranking* devido aos altos valores de peso.

Tabela 44 – Top 10 do *Ranking* (Mesorregiões)

Posição	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
Mesorregião	Norte Amazonense	Sul Amazonense	Nordeste Paraense	Sudoeste Paraense	Baixo Amazonas	Marajó	Centro Amazonense	Sudoeste Amazonense	Nordeste Baiano	Vale do Juruá
UF	AM	AM	PA	PA	PA	PA	AM	AM	BA	AC

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 45 – Top 10 do *Ranking* (Microrregiões)

Posição	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
Microrregião	Rio Negro	Alto Solimões	Furos de Breves	Portel	Altamira	Guamá	Cametá	Tarauacá	Madeira	Santarém
UF	AM	AM	PA	PA	PA	PA	PA	AC	AM	PA

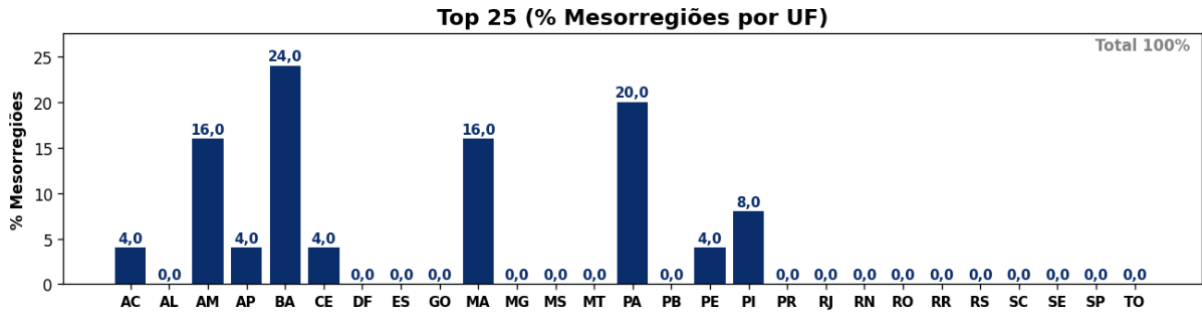
Fonte: Elaboração própria.

Nessa mesma perspectiva de aplicação de filtros nos resultados destes dois modelos, buscou-se analisar aproximadamente as 18% melhores pontuações dos *rankings*, implicando nas primeiras 25 mesorregiões (top 25) e nas 100 primeiras microrregiões (top 100), com o intuito de extrair *insights* relevantes sobre possíveis priorizações. Essa análise se molda em avaliar, considerando os filtros estabelecidos, a porcentagem dessas unidades geográficas em relação a UFs e regiões do Brasil, cujos resultados são descritos a seguir.

Analisando o Top 25 das mesorregiões pela proporção dessas unidades geográficas por UF presentes nesse conjunto, conforme Figura 23, nota-se que os estados de Amazonas, Bahia, Maranhão e Pará são os que apresentam as maiores participações, cuja a explicação é centrada no fato de que essas UFs estão entre os entes federativos de maior extensão territorial e de mais baixo IDH do Brasil, subcritérios esses subordinados aos critérios mais relevantes do modelo (respectivamente, Aspecto Geográfico e Aspecto Socioeconômico). Numa análise pela proporção de mesorregiões, da própria UF, que integram o Top 25, conforme Figura 24, verifica-se que esses mesmos estados continuam em destaque, cuja a explicação decorre da mesma fundamentação da análise anterior feita por UF (combinação da influência de subcritérios e critérios relevantes ao modelo), dado que a quantidade total de mesorregiões nessas UFs é em

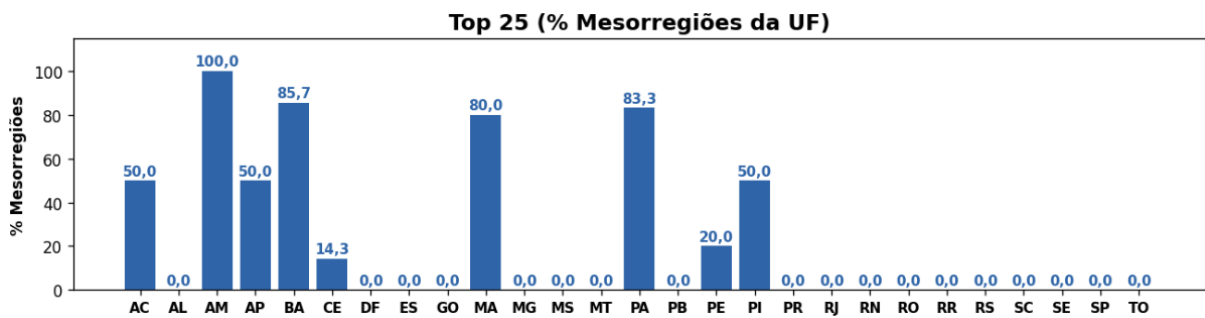
média 5 (numa faixa de valores que vai de 1-15), sendo considerada razoável e de impacto não tanto relevante.

Figura 23 – Top 25 (% Mesorregiões por UF)



Fonte: Elaboração própria.

Figura 24 – Top 25 (% Mesorregiões da UF)

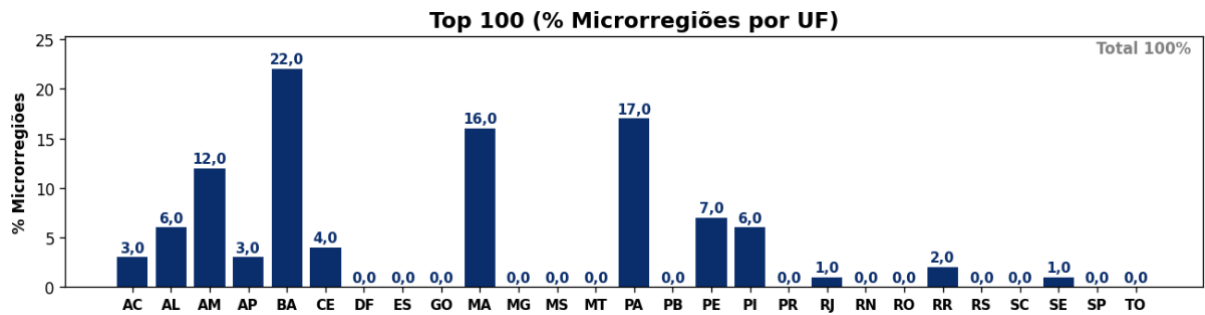


Fonte: Elaboração própria.

Para o Top 100 das microrregiões, considerando a proporção dessas unidades geográficas por UF presentes nesse conjunto, conforme Figura 25, verifica-se novamente o protagonismo dos estados de Amazonas, Bahia, Maranhão e Pará, cujo motivo também é embasado no que foi descrito na análise do Top 25 mesorregiões, isto é, as características territoriais e socioeconômicas dessas UF's influenciam diretamente os subcritérios e critérios do modelo, o que resulta em maior presença de microrregiões desses entes federativos entre as posições mais relevantes do *ranking*. Agora, numa análise da proporção de microrregiões, da própria UF, presentes no Top 100, conforme Figura 26, nota-se mais uma vez altas proporções relativas para as UF's já citadas (em decorrência do próprios critérios relevantes do modelo), além dos estados AC e AP cuja forte participação é justificada pelos resultados do modelo e principalmente pelo baixo quantitativo de microrregiões em seu território.

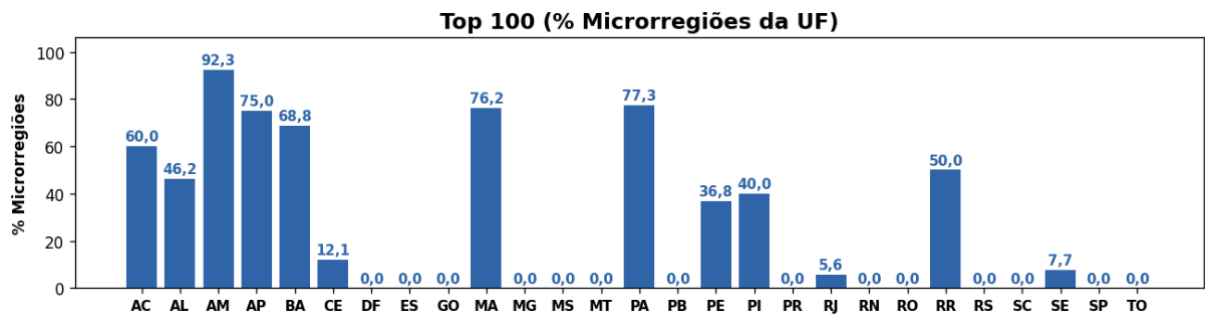
Iniciando agora as análises a nível de regiões geográficas do Brasil, considera-se inicialmente o Top 25 das mesorregiões por região, conforme Figura 27, onde se observa que

Figura 25 – Top 100 (% Microrregiões por UF)



Fonte: Elaboração própria.

Figura 26 – Top 100 (% Microrregiões da UF)



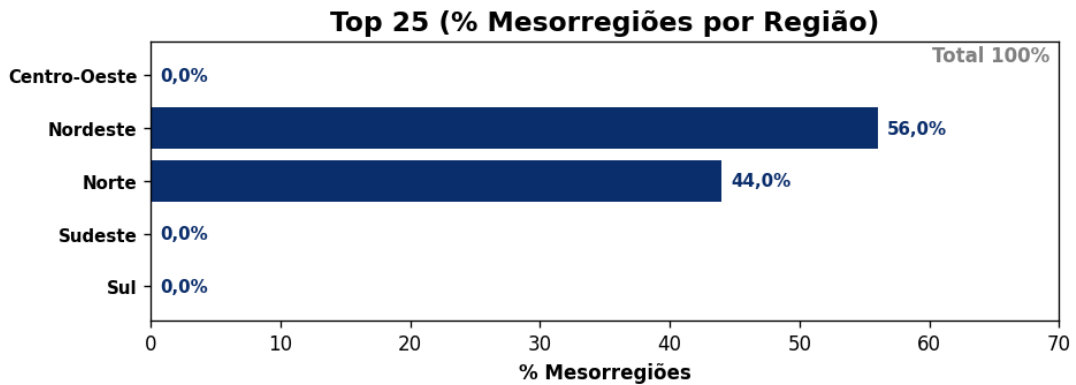
Fonte: Elaboração própria.

100% das mesorregiões presentes neste filtro pertencem às regiões Norte e Nordeste, resultado que reforça a predominância de prioridade dessas regiões já evidenciada em análises anteriores, sendo o Nordeste o primeiro colocado por concentrar a maior quantidade de mesorregiões do país e por estas terem obtidos elevadas pontuações como resultado da combinação da influência dos critérios mais relevantes do modelo (Aspecto Geográfico e Aspecto Socioeconômico). Quando se analisa o percentual de mesorregiões da própria região que integram o Top 25, conforme Figura 28, nota-se que o Norte passa a ocupar a primeira posição com 55,0% enquanto o Nordeste alcança 33,3%, e essa inversão decorre diretamente da menor quantidade total de mesorregiões existentes no Norte (em torno da metade da quantidade existente no Nordeste) o que implica em um valor relativamente mais elevado nessa métrica.

No caso das microrregiões, os resultados do Top 100 por região, conforme Figura 29, também revelam a predominância das regiões Norte e Nordeste, sendo que o Nordeste assume a primeira posição com 62% devido aos mesmos motivos descritos no Top 25 mesorregiões (grande quantidade de unidades geográficas nessa região e influência de seus desempenhos em critérios relevantes do modelo), enquanto o Norte participa com 37% e o Sudeste aparece de forma residual com 1%. Quando se considera o percentual de microrregiões da própria região presentes no Top 100, conforme Figura 30, observa-se uma inversão na liderança, com o

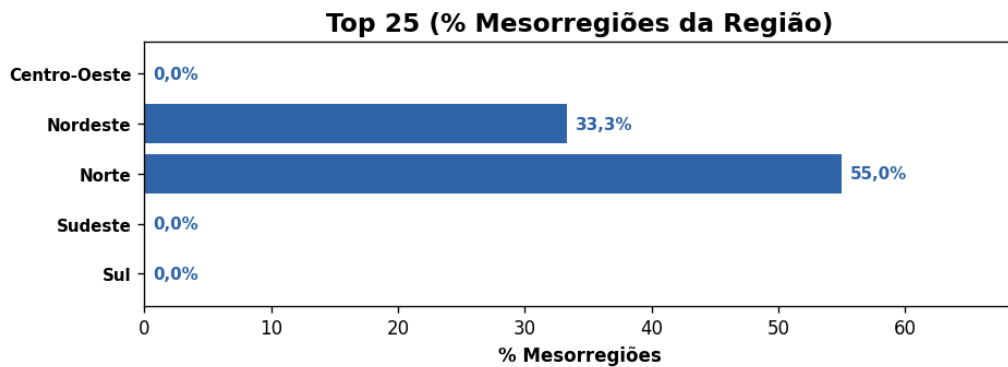
Norte apresentando 57,8%, seguido do Nordeste com 33,0% e do Sudeste com 0,6%, resultado explicado pela quantidade reduzida de microrregiões existentes no Norte (em torno de um terço da quantidade existente no Nordeste) que, ao ter várias de suas unidades apresentando condições críticas priorizadas pelo modelo, faz com que mais da metade de suas microrregiões passem a integrar as posições superiores do *ranking*.

Figura 27 – Top 25 (% Mesorregiões por Região)



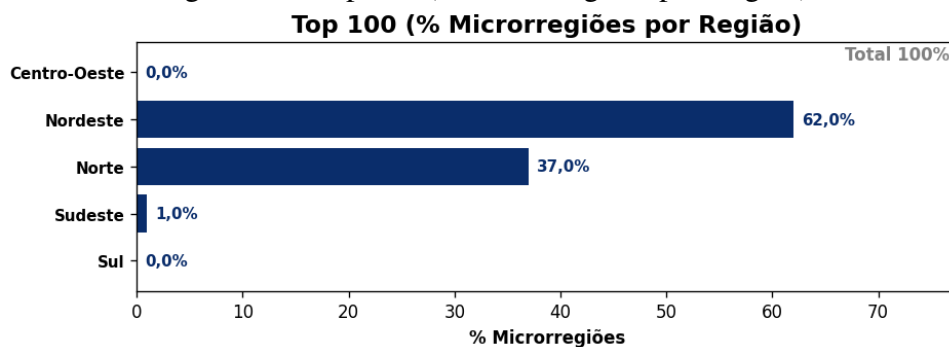
Fonte: Elaboração própria.

Figura 28 – Top 25 (% Mesorregiões da Região)



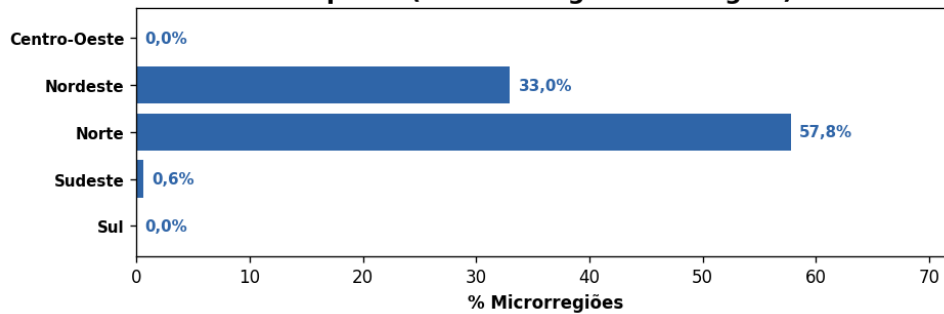
Fonte: Elaboração própria.

Figura 29 – Top 100 (% Microrregiões por Região)



Fonte: Elaboração própria.

Figura 30 – Top 100 (% Microrregiões da Região)  
**Top 100 (% Microrregiões da Região)**



Fonte: Elaboração própria.

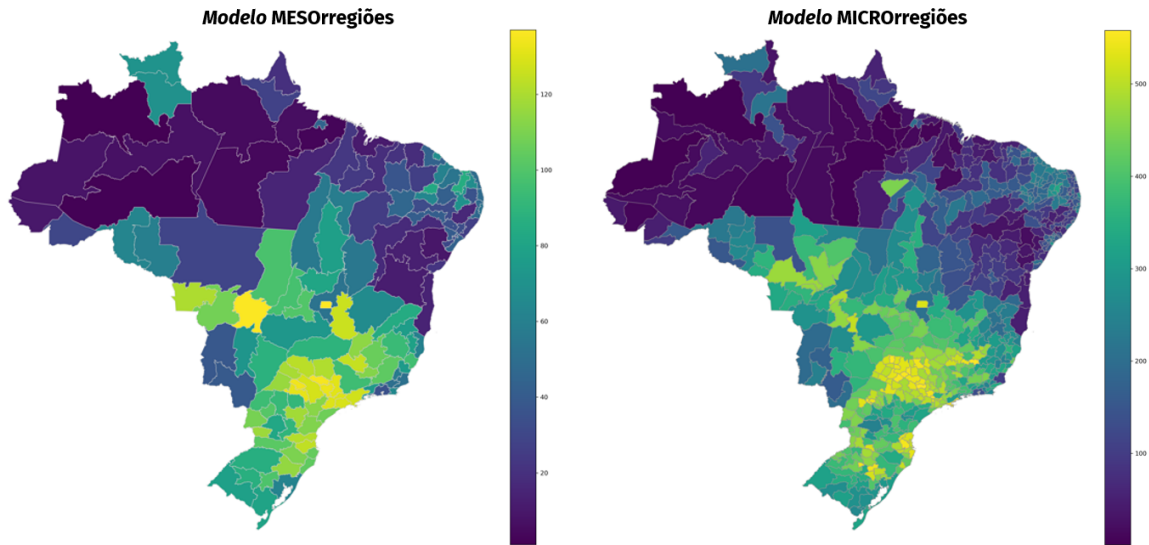
Em suma, após serem discutidas as análises realizadas sobre os *rankings* filtrados pelos melhores desempenhos territoriais (Top 25 das mesorregiões e Top 100 das microrregiões), deve-se destacar, numa avaliação global, a existência de padrões identificados nos resultados tanto na análise das prioridades em função das UFs quanto das Regiões, o que direciona praticamente para as mesmas conclusões entre os modelos. Essa conexão entre resultados observada para as diferentes dimensões geográficas (mesorregiões e microrregiões) é um reflexo da flexibilidade que o método AHP-MEDAC apresenta para sua implementação, evidenciando uma vantagem significativa deste método que se mantém consistente e coerente mesmo quando aplicado a recortes territoriais distintos.

Por fim, visando fundamentar ainda mais a correspondência dos *rankings* dos dois modelos, acaba se tornando necessário ampliar o escopo de avaliação através da análise dos *rankings* completos, sendo melhor representado por heatmaps (Figura 31), com uma escala em que quanto mais azul a cor da unidade geográfica melhor sua posição no *ranking* e quanto mais amarelo pior. Interessante notar que os contrastes de cores ao longo dos dois mapas são praticamente os mesmos e, novamente, aqui reforça a proposta por priorização de recursos para a maioria das unidades geográficas do eixo Norte-Nordeste, bem como evidencia novamente um dos principais atributos do método AHP-MEDAC que é a flexibilidade na modelagem dos problemas de decisão.

#### 4.2.3.2 Análise de sensibilidade do modelo

Para este *case*, a análise de sensibilidade realizada também segue o mesmo panorama adotado no *case 1* (Figura 14). Então, a partir de análises sobre variações na normalização e na categorização, tem-se a intenção de verificar o quão consistente e robusto é o método.

Figura 31 – *Heatmaps* para a representação das posições das meso e microrregiões nos *rankings*  
**Heatmaps por Posição no Ranking**



Fonte: Elaboração própria.

Para as variações de normalização, os pesos dos subcritérios/critérios dos modelos desses cenários são calculados e comparados com os resultados do AHP-MEDAC original (Tabelas 46 e 47), onde se nota divergências consideráveis entre os valores a nível de subcritérios, enquanto para os critérios a diferença notável é observada no modelo que usou a normalização pela soma. A matriz de correlações entre os *rankings* é então obtida (Tabela 48), onde se nota correspondências variando de média a alta, o que de certa forma evidencia um grau razoável de sensibilidade do método nestes cenários modificados.

Tabela 46 – Pesos dos subcritérios na análise de sensibilidade por normalização (*case 3*)

Subcritérios	AHP-MEDAC	Normalização_SOMA	Normalização_MÁXIMO	Normalização_PADRÃO
Número de Matrículas Atendidas (Transporte)	0,041	0,952	0,069	0,401
Custo de Transporte <i>per capita</i>	0,585	0,012	0,296	0,285
Idade Média da Frota	0,374	0,035	0,634	0,315
Espaço Territorial	0,399	0,645	0,399	0,510
Número de Matrículas (Escolas Rurais)	0,601	0,355	0,601	0,490
PIB <i>per capita</i>	0,170	0,111	0,195	0,392
Índice de Gini	0,362	0,239	0,269	0,303
IDH	0,468	0,649	0,536	0,305
IDEB	0,368	0,174	0,283	0,356
TDIS	0,493	0,769	0,560	0,436
Taxa de Evasão	0,138	0,057	0,157	0,208

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 47 – Pesos dos critérios na análise de sensibilidade por normalização (*case 3*)

Critérios	AHP-MEDAC	Normalização_SOMA	Normalização_MÁXIMO	Normalização_PADRÃO
Infraestrutura de Frota	0,370	0,632	0,324	0,260
Aspecto Geográfico	0,164	0,312	0,216	0,299
Aspecto Socioeconômico	0,305	0,022	0,276	0,238
Desempenho Escolar	0,161	0,035	0,184	0,203

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 48 – Matriz de correlações na análise de sensibilidade por normalização (*case 3*)

	AHP-MEDAC	Norm. SOMA	Norm. MÁXIMO	Norm. PADRÃO
<b>AHP-MEDAC</b>	<b>1,0000</b>	<b>0,5382</b>	<b>0,8102</b>	<b>0,8730</b>
<b>Norm. SOMA</b>	0,5382	<b>1,0000</b>	<b>0,3811</b>	<b>0,6252</b>
<b>Norm. MÁXIMO</b>	0,8102	0,3811	<b>1,0000</b>	<b>0,8279</b>
<b>Norm. PADRÃO</b>	0,8730	0,6252	0,8279	<b>1,0000</b>

Fonte: Elaboração própria.

No cenário para variações na categorização de ênfase, os pesos do modelo com categorias invertidas são apresentados e comparados com os valores obtidos no AHP-MEDAC original (Tabelas 49 e 50), onde se nota alguns poucos subcritérios com valores relativamente divergentes, bem como também se observa uma variação a se considerar a nível dos critérios. O coeficiente de correlação calculado resultou em 0,9922, evidenciando uma forte conexão entre os *rankings* dos modelos.

Tabela 49 – Pesos dos subcritérios na análise de sensibilidade por categorização (*case 3*)

Subcritérios	AHP-MEDAC	Categorias_Invertidas
Número de Matrículas Atendidas (Transporte)	0,041	0,005
Custo de Transporte <i>per capita</i>	0,585	0,658
Idade Média da Frota	0,374	0,337
Espaço Territorial	0,399	0,263
Número de Matrículas (Escolas Rurais)	0,601	0,737
PIB <i>per capita</i>	0,170	0,075
Índice de Gini	0,362	0,407
IDH	0,468	0,518
IDEB	0,368	0,377
TDIS	0,493	0,327
Taxa de Evasão	0,138	0,296

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 50 – Pesos dos critérios na análise de sensibilidade por categorização (*case 3*)

<b>Critérios</b>	<b>AHP-MEDAC</b>	<b>Categorias_Invertidas</b>
Infraestrutura de Frota	0,370	0,443
Aspecto Geográfico	0,164	0,061
Aspecto Socioeconômico	0,305	0,325
Desempenho Escolar	0,161	0,171

Fonte: Elaboração própria.

Com estes resultados, nota-se que o método AHP-MEDAC apresenta alta sensibilidade para a normalização pela soma, ao mesmo tempo que para a categorização, sua consistência, assim como nos *cases* anteriores, aparenta ser preservada, porém diante das proximidades nos valores dos pesos nada se pode concluir a respeito de uma alta robustez do método nesse último cenário. Logo, fica evidenciado neste *case* que o método é bastante influenciado pela forma de normalização, sendo, portanto, necessário utilizar a forma de normalização proposta originalmente no método AHP-MEDAC, visto que a mesma preserva a variabilidade original dos dados.

Dito isso, conclui-se então a aplicação do método AHP-MEDAC nos *cases* considerados, bem como a avaliação de seu comportamento por meio da análise de sensibilidade, evidenciando suas potencialidades no contexto decisório. No capítulo seguinte, é apresentada a terceira e última proposta metodológica desenvolvida neste trabalho (método TOPSIS-MEDAC hierárquico) que amplia a formulação tradicional do TOPSIS ao considerar uma estrutura hierárquica como base para o modelo de decisão, bem como uma abordagem estatística orientada a dados, na qual ênfases previamente definidas pelo decisor passam a nortear o processo decisório.

## 5 MÉTODO TOPSIS-MEDAC HIERÁRQUICO

### 5.1 Descrição do método

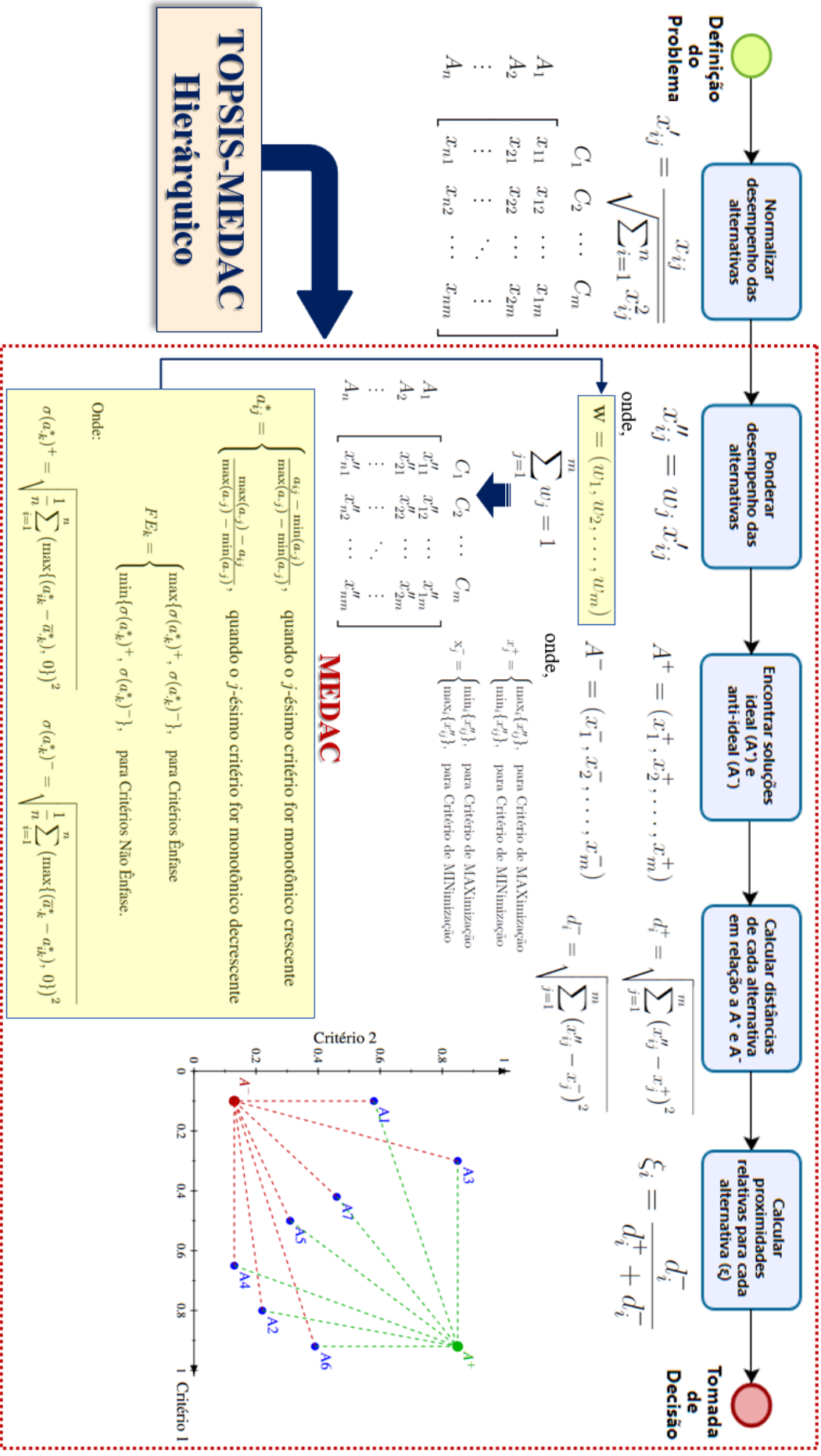
O método TOPSIS-MEDAC hierárquico aqui proposto é uma modificação do método TOPSIS tradicional, cujo diferencial reside na hierarquização dos critérios e na incorporação da ideia MEDAC estabelecida inicialmente pela proposta metodológica AHP-MEDAC (Capítulo 4). Isto é, busca-se obter um método em que os pesos possam ser obtidos com informações mínimas dos decisores a partir dos dados de forma a atender diretrizes e políticas estratégicas envolvidas na decisão. Deste modo, propõe-se enfatizar critérios por meio da potencialização de seus pesos e, com isso, obter resultados para o apoio à decisão mais direcionados aos interesses das organizações.

Trata-se de uma versão metodológica que une a robustez do processo de ordenação do TOPSIS com a capacidade analítica orientada a dados da fundamentação MEDAC, de modo a alinhar o processo decisório e os objetivos estratégicos na mesma direção, resultando em decisões mais assertivas, coerentes e justas.

Este método foi idealizado para tratar problemas de decisão que possuem estrutura hierárquica de critérios e subcritérios, permitindo que cada nível da hierarquia receba pesos derivados de medidas estatísticas obtidas diretamente dos dados, conforme os fundamentos do MEDAC. Assim como observado no método AHP-MEDAC, a atribuição dos pesos no método TOPSIS-MEDAC hierárquico é realizada com base na variabilidade e na assimetria das distribuições de desempenho das alternativas em cada critério, garantindo maior representatividade aos modelos de decisão com base em evidências quantitativas, maior integridade informacional dos dados e menor necessidade de intervenções subjetivas no processo decisório.

Em relação ao fluxo tradicional do método TOPSIS (Figura 10), o TOPSIS-MEDAC hierárquico mantém as principais etapas de cálculo, porém com uma diferença matemática importante: a etapa de normalização dos desempenhos das alternativas pela norma euclidiana é suprimida, uma vez que o processo de obtenção dos pesos decorrente do MEDAC já contempla a normalização e a conversão de monotonicidades dos dados (Equações 13 e 14), conforme ilustrado na Figura 33.

Figura 33 – Fluxo do Método TOPSIS-MEDAC hierárquico



Fonte: Elaboração própria.

Ou seja, a abordagem MEDAC também já traz uma matriz de decisão compatível com a escala adimensional necessária ao TOPSIS, eliminando a necessidade de transformações adicionais nos dados e, com isso, tornando o método mais direto e menos redundante. Além disso, preserva-se as propriedades estatísticas originais das variáveis de modo a se evitar distorções numéricas durante o processamento.

Sendo assim, a partir de uma matriz de decisão estruturada e a implementação da abordagem MEDAC no cálculo dos pesos dos critérios (Equações 13, 14 e 12), o método TOPSIS-MEDAC hierárquico segue o fluxo convencional do TOPSIS tradicional nas etapas subsequentes: (i) ponderação dos desempenhos das alternativas com base nos pesos obtidos pela abordagem MEDAC (Equação 5); (ii) obtenção da solução ideal  $A^+$  e anti-ideal  $A^-$  para cada critério (Equações 6 e 7); (iii) cálculo das distâncias euclidianas entre as alternativas e  $A^+$  e  $A^-$  (Equações 8 e 9); e (iv) cálculo do coeficiente de proximidade relativa de cada alternativa, que expressa o seu grau de desempenho em relação ao cenário ideal de escolha (Equação 10).

Deve-se destacar que, por seu diferencial em se trabalhar com modelos de decisão hierárquicos, o TOPSIS-MEDAC propõe que, quando ocorre uma mudança de nível hierárquico (por exemplo, do nível de subcritérios para o de critérios), há a necessidade de reiniciar o fluxo analítico dos dados — realizando novamente as conversões de monotonicidade, normalizações e o cálculo dos pesos — para os critérios envolvidos no nível atual. Esse procedimento garante a consistência matemática entre os diferentes estratos da hierarquia, preserva a lógica de integração ascendente dos resultados e mantém a ênfase que norteia o processo decisório do modelo.

Com o propósito de tornar o método mais compreensível sistematicamente, bem como fomentar sua aplicação prática em pesquisas posteriores, o algoritmo 3 apresenta o pseudocódigo do TOPSIS-MEDAC hierárquico, descrevendo de forma estruturada todo o fluxo de processamento deste método, desde o cálculo dos pesos e a integração hierárquica dos critérios até as etapas de cálculo dos desempenhos e ordenação final das alternativas.

---

**Algoritmo 3: TOPSIS-MEDAC hierárquico (Pseudocódigo)**


---

**ENTRADAS:** (i) Alternativas; (ii) Níveis e subordinações entre os critérios (critérios do 1º nível, critérios do 2º nível, ...); (iii) Categoria dos critérios (Ênfase/Não Ênfase); (iv) Monotonicidade dos critérios (Max/Min); (v) Matriz de desempenho das alternativas nos critérios dos níveis mais baixos (tipicamente, 2º nível).

**SAÍDAS:** Vetor de prioridade global das alternativas e o *ranking*.

**1 INÍCIO**

```

2 // PASSO 1 — Determinar a profundidade da hierarquia a partir das entradas
3 Calcular  $L_{\text{último}}$  a partir da estrutura de níveis indicada em (ii)
4 // Definir nível corrente como o último nível (mais baixo)
5 Definir  $L \leftarrow L_{\text{último}}$ 
6 ENQUANTO  $L \geq 1$  FAÇA
7     // PASSO 2 — Tratamento de monotonicidade e normalização
8     Aplicar conversão para maximização e normalização, de acordo com a monotonicidade
9     inicial do critério (ver Eq. 13)
10    // PASSO 3 — Fator/Peso ênfase por critério (nível  $L$ )
11    Para cada critério do nível  $L$ , calcular o fator/peso ênfase  $FE$  (ver Eq. 14)
12    // PASSO 4 — Vetor de fatores ênfase normalizados (nível  $L$ )
13    Para cada critério do nível  $L$ , calcular  $FE^*$ , considerando os demais critérios desse nível
14    subordinados ao mesmo critério do nível  $L-1$  (ver Eq. 12)
15    Agregar os valores de  $FE^*$  dos critérios de mesma subordinação para formar o vetor de
16    pesos normalizados (ver Eq. 12)
17    // PASSO 5 — Distâncias das alternativas em relação às soluções ideais
18    Calcular a matriz de desempenho ponderada usando os valores de  $FE^*$  como pesos (ver
19    Eq. 5)
20    Calcular as soluções ideais positiva e negativa de cada critério (ver Eqs. 6 e 7)
21    Calcular as distâncias das alternativas em relação às soluções ideais considerando a matriz
22    ponderada e as subordinações (ver Eqs. 8 e 9)
23    SE  $L > 1$  ENTÃO
24        // PASSO 6 — Construção do nível  $L-1$  a partir dos critérios do nível  $L$ 
25        Para cada critério do nível  $L-1$ , calcular o vetor de proximidade relativa
26        considerando as distâncias dos critérios subordinados (ver Eq. 10)
27        Construir a matriz de desempenho do nível  $L-1$  agregando os vetores de
28        proximidade relativa obtidos
29    SENÃO
30        // PASSO 7 — Finalização (nível do topo:  $L = 1$ )
31        Calcular o vetor de proximidade relativa global
32        Ordenar em ordem decrescente e reportar o ranking (ver Eq. 10)
33    // Atualizar nível (decremento para subir na hierarquia)
34    Definir  $L \leftarrow L - 1$ 

```

---

## 5.2 Aplicação do método no contexto educacional

Nesta seção são apresentados os fundamentos de aplicabilidade do método TOPSIS-MEDAC hierárquico no contexto educacional, aplicado ao *case* “Transporte Escolar – Municípios”, o mesmo cenário de decisão modelado anteriormente com o uso do método AHP-MEDAC (Subseção 4.2.3), utilizando-se igualmente o mesmo conjunto de dados.

Considerou-se a mesma estrutura hierárquica (Figura 18), com os mesmos critérios e subcritérios, preservando-se igualmente as monotonicidades correspondentes, além do agrupamento de critérios em Ênfase (Equidade) e Não Ênfase (Manutenção da Excelência).

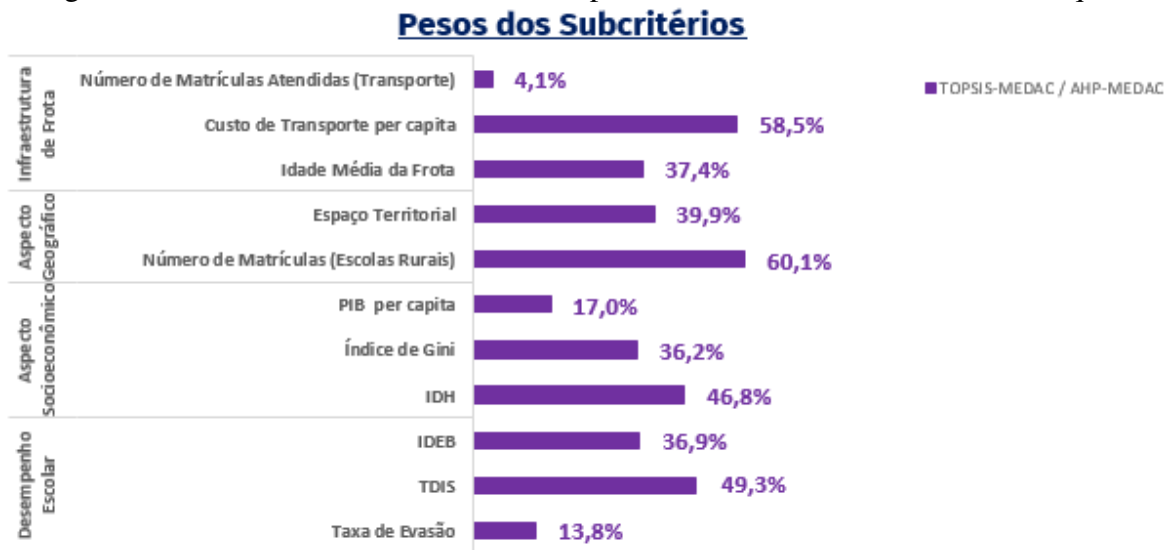
### 5.2.1 Modelo: *case* ‘Transporte Escolar’ (nível de aplicação - municípios)

#### 5.2.1.1 Implementação do modelo

Os primeiros resultados deste *case* são os pesos dos subcritérios (Figura 34), que são exatamente os mesmos computados no método AHP-MEDAC, onde é possível observar os maiores pesos para “Custo de Transporte per capita”, “Número de Matrículas em Escolas Rurais”, “IDH” e “TDIS” dentro de seus respectivos grupos de critérios, o que indica que esses subcritérios tendem a exercer maior influência sobre a desenvoltura matemática posterior do modelo de decisão.

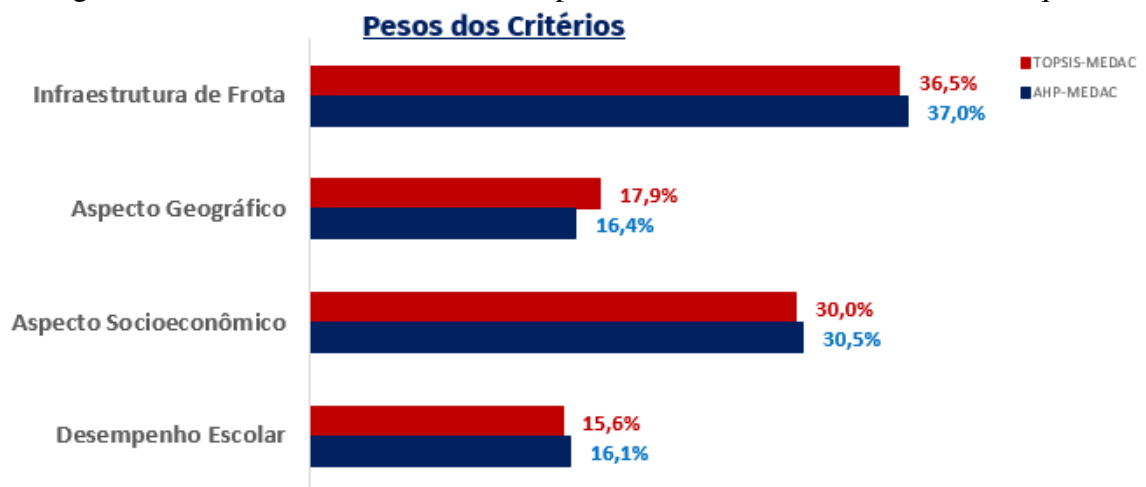
A nível de critérios, os pesos calculados foram os apresentados na Figura 35, onde podem ser destacados dois pontos: (i) os critérios “Infraestrutura de Frota” e “Aspecto Socioeconômico” — ambos pertencentes ao grupo de critérios Ênfase (Equidade) — apresentam os maiores pesos relativos, o que lhes confere maior relevância decisória e faz com que tendam a impactar de forma mais expressiva o comportamento do modelo; (ii) observa-se que os valores obtidos para esses critérios mantêm forte correspondência entre os métodos TOPSIS-MEDAC hierárquico e AHP-MEDAC, com diferenças visuais mínimas entre os pesos, o que constitui uma avaliação positiva, pois evidencia consistência e convergência dos resultados parciais, reforçando a coerência matemática entre as abordagens.

Figura 34 – Pesos dos Subcritérios obtidos pelo método TOPSIS-MEDAC hierárquico



Fonte: Elaboração própria.

Figura 35 – Pesos dos Critérios obtidos pelo método TOPSIS-MEDAC hierárquico



Fonte: Elaboração própria.

Ainda sobre as avaliações comparativas entre os resultados dos métodos TOPSIS-MEDAC hierárquico e AHP-MEDAC, o coeficiente de correlação de Spearman, entre os *rankings* gerados pelos métodos, foi calculado e seu valor resultou em 0,9900, o que caracteriza uma correlação fortemente positiva entre as ordenações, indicando elevada coerência entre os resultados.

Nesses *rankings*, comparando o *top 10* entre os métodos (Tabela 51), nota-se que os municípios que ocupam as primeiras posições são praticamente os mesmos, variando apenas suavemente em suas colocações, o que demonstra consistência na prioridade relativa considerada no processo decisório.

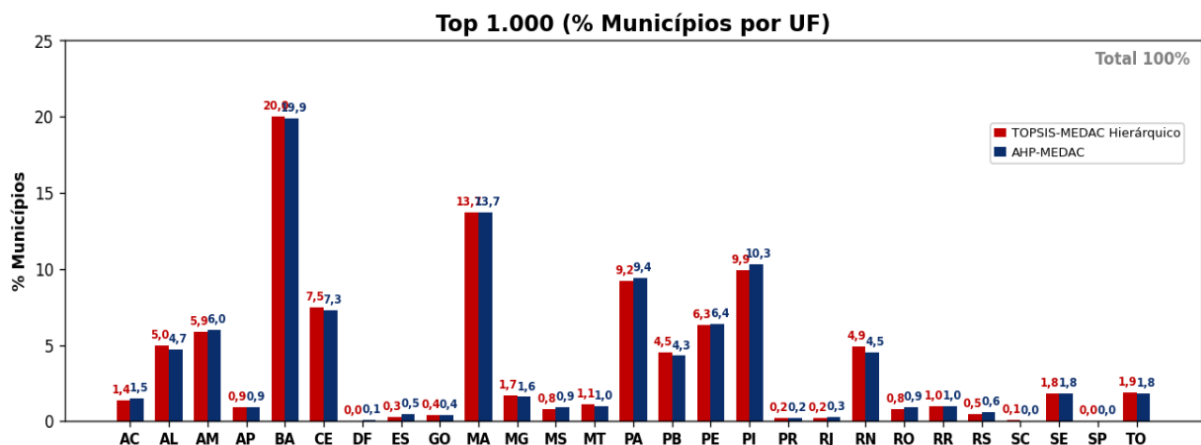
Tabela 51 – *Top 10 do Ranking dos Municípios (TOPSIS-MEDAC hierárquico e AHP-MEDAC)*

Posição	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
<b>TOPSIS-MEDAC hierárquico</b>	Barcelos (AM)	Portel (PA)	Breves (PA)	São Gabriel da Cachoeira (AM)	Atalaia do Norte (AM)	Jacareacanga (PA)	Porto de Moz (PA)	Chaves (PA)	Cametá (PA)	Anajás (PA)
<b>AHP-MEDAC</b>	São Gabriel da Cachoeira (AM)	Barcelos (AM)	Portel (PA)	Breves (PA)	Chaves (PA)	Porto de Moz (PA)	Jacareacanga (PA)	Anajás (PA)	Cametá (PA)	Atalaia do Norte (AM)

Fonte: Elaboração própria.

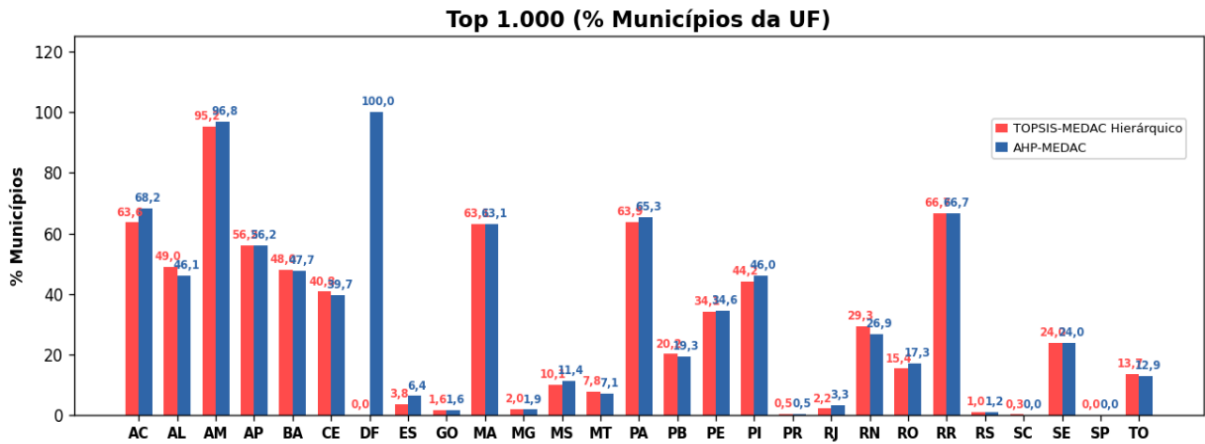
Ampliando o escopo de análise, agora considerando o *Top 1.000 do ranking* gerado pelo método TOPSIS-MEDAC hierárquico, nota-se que o percentual de municípios por UF nesse filtro (Figura 36) apresenta números expressivos para os estados da Bahia, Ceará, Maranhão, Pará, Pernambuco e Piauí, justamente UFs pertencentes ao eixo Norte–Nordeste, o que evidencia uma tendência de concentração por prioridades para essas regiões. Em relação ao percentual de municípios da sua UF localizada que estão neste *top 1.000* (Figura 37), ainda apresentam números expressivos os mesmos estados destacados na análise por região, com a inclusão, influenciada fortemente pelo baixo quantitativo de municípios em seu território, das UFs: Acre, Alagoas, Amapá e Roraima.

Observe que em uma avaliação comparativa global entre os resultados do *top 1.000* destes dois modelos fica nítido perceber que há aproximação em valores entre os dois modelos para a grande maioria das unidades geográficas consideradas, independentemente da referência adotada para o cômputo das proporções. Logo, tal constatação reforça novamente o alinhamento analítico entre os métodos TOPSIS-MEDAC hierárquico e AHP-MEDAC em uma perspectiva de mesma direção decisória a se considerar neste cenário avaliativo.

Figura 36 – *Top 1.000 (% Municípios por UF)*

Fonte: Elaboração própria.

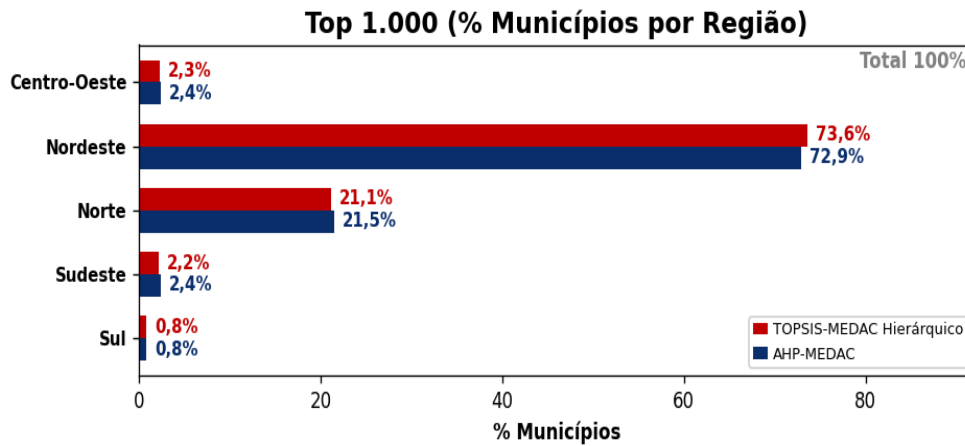
Figura 37 – Top 1.000 (% Municípios da UF)



Fonte: Elaboração própria.

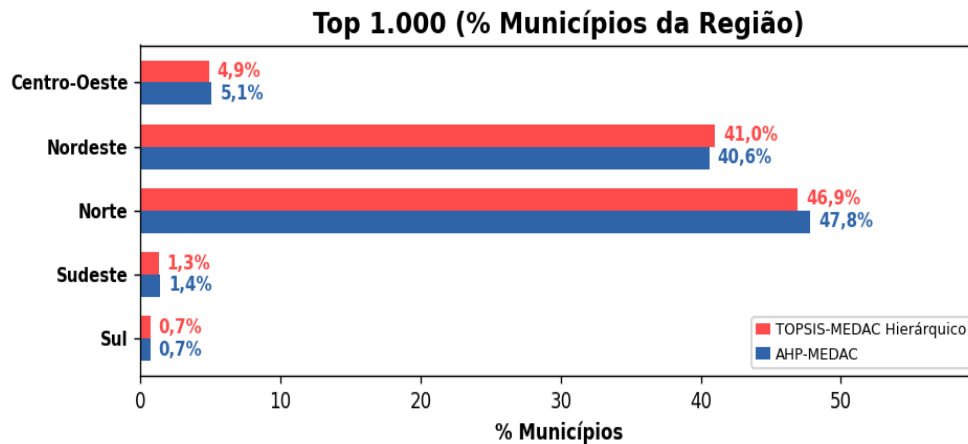
Agora, analisando o Top 1.000 em outra granularidade (a nível de regiões), faz-se a avaliação do percentual de municípios presentes por região (obtido pela razão entre a quantidade de municípios de uma dada região presentes neste *ranking* filtrado e o total de 1.000 municípios — Figura 38), e também da região (obtido pela razão entre a quantidade de municípios de uma dada região presentes neste *ranking* filtrado e o total de municípios existentes dessa mesma região — Figura 39).

Figura 38 – Top 1.000 (% Municípios por Região)



Fonte: Elaboração própria.

Figura 39 – Top 1.000 (% Municípios da Região)



Fonte: Elaboração própria.

Por esses resultados, nota-se que há destaques expressivos na participação de municípios das regiões Norte e Nordeste, concentrando a maior parte das localidades priorizadas, o que reforça novamente a tendência de prioridade para essas regiões. Além disso, torna-se relevante destacar dois *insights* aqui observados: (i) o percentual de municípios por região presentes no Top 1.000 mostra-se mais elevado no Nordeste, dada a maior quantidade de municípios dessa região em situação de prioridade, o que naturalmente amplia sua presença no *ranking*; (ii) ao se considerar o percentual de municípios da própria região, ocorre uma inversão nas posições, com a região Norte passando a ocupar o 1º lugar, em virtude de seu quantitativo de municípios ser pequeno.

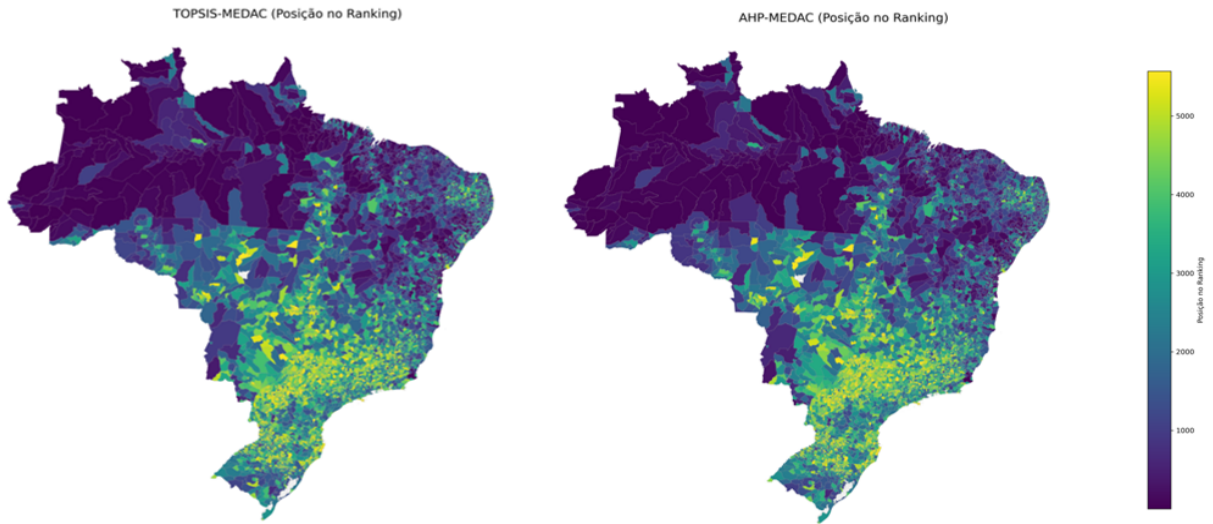
Com vistas a comparar os resultados dos dois modelos neste panorama considerado, nota-se novamente os mesmos entendimentos observados na análise de granularidade anterior, isto é, a compatibilidade entre os resultados e, conseqüentemente, o alinhamento decisório entre o TOPSIS-MEDAC hierárquico e o AHP-MEDAC. Essa correspondência de resultados sinaliza uma modelagem matematicamente adequada e direcionada trazida pela abordagem MEDAC, o que é reflexo de sua consistência no apoio à tomada de decisão.

Por fim, visando tornar mais fiel a comparação entre os resultados dos *rankings* dos métodos TOPSIS-MEDAC hierárquico e AHP-MEDAC, ampliou-se o escopo para todos os municípios do Brasil, sendo a representação mais adequada por meio dos *heatmaps* das posições no *ranking* de cada método (Figura 40), em que a cor de cada município representa sua posição no *ranking* em um dado método, e cuja escala de cores indica que tons mais escuros e azulados correspondem às melhores colocações (maior prioridade), enquanto tons mais claros e amarelados indicam as posições mais baixas. Visualmente, não se observam distinções marcantes

entre os mapas, com diferenças quase imperceptíveis.

Figura 40 – *Heatmaps* dos *Rankings* (TOPSIS-MEDAC e AHP-MEDAC)

**Heatmaps dos Rankings (TOPSIS-MEDAC e AHP-MEDAC)**

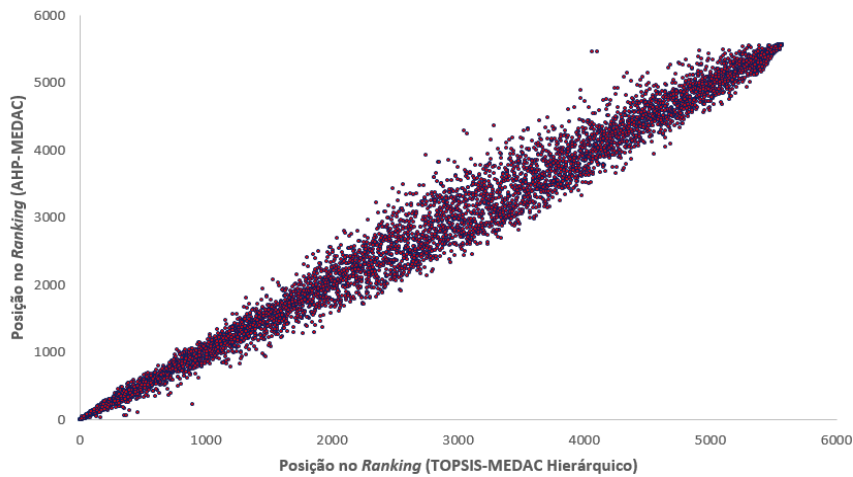


Fonte: Elaboração própria.

Fortalecendo esse *insight*, foi construído um gráfico de dispersão das posições dos municípios no *ranking* (Figura 41), em que cada ponto representa um município, cujas coordenadas correspondem simultaneamente à sua posição em um método e no outro. Por esse gráfico, nota-se que os pontos apresentam uma tendência linear crescente, o que sinaliza uma forte correlação entre os *rankings* e, portanto, confirma a correspondência entre as ordenações, consolidando então a plena conexão do processo decisório entre os dois métodos.

Figura 41 – Gráfico de Dispersão (Posições entre os *Rankings* TOPSIS-MEDAC e AHP-MEDAC)

**Gráfico de Dispersão (Posições entre os Rankings TOPSIS-MEDAC Hierárquico e AHP-MEDAC)**



Fonte: Elaboração própria.

### 5.2.1.2 Análise de sensibilidade do modelo

Em relação às análises de sensibilidade implementadas para este *case*, todo o procedimento de realização segue o mesmo panorama descrito na subseção 4.2.1.2 do capítulo anterior deste trabalho (Figura 14). No caso, análises de variações na normalização e na categorização frente ao método TOPSIS-MEDAC são consideradas, de modo a se verificar a consistência/robustez deste método proposto.

Na análise da influência da normalização, os pesos dos subcritérios/critérios dos modelos para os diferentes cenários de normalização são calculados e comparados com os resultados do TOPSIS-MEDAC original (Tabelas 52 e 53), onde se nota divergências consideráveis em praticamente todas as formas de normalização testadas tanto a nível de subcritérios como nos critérios. Para uma avaliação sobre a conexão entre os *rankings*, a matriz de correlações é construída (Tabela 54), onde se nota, predominantemente, correlações médias, o que novamente evidencia um grau razoável de sensibilidade do método diante da normalização.

Tabela 52 – Pesos dos subcritérios na análise de sensibilidade por normalização (*case 4*)

Subcritérios	TOPSIS-MEDAC	Normalização_SOMA	Normalização_MÁXIMO	Normalização_PADRÃO
Número de Matrículas Atendidas (Transporte)	0,041	0,952	0,069	0,401
Custo de Transporte <i>per capita</i>	0,585	0,012	0,296	0,285
Idade Média da Frota	0,374	0,035	0,634	0,315
Espaço Territorial	0,399	0,645	0,399	0,510
Número de Matrículas (Escolas Rurais)	0,601	0,355	0,601	0,490
PIB <i>per capita</i>	0,170	0,111	0,195	0,392
Índice de Gini	0,362	0,239	0,269	0,303
IDH	0,468	0,649	0,536	0,305
IDEB	0,368	0,174	0,283	0,356
TDIS	0,493	0,769	0,560	0,436
Taxa de Evasão	0,138	0,057	0,157	0,208

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 53 – Pesos dos critérios na análise de sensibilidade por normalização (*case 4*)

Critérios	TOPSIS-MEDAC	Normalização_SOMA	Normalização_MÁXIMO	Normalização_PADRÃO
Infraestrutura de Frota	0,365	0,618	0,367	0,265
Aspecto Geográfico	0,179	0,311	0,192	0,287
Aspecto Socioeconômico	0,300	0,028	0,269	0,241
Desempenho Escolar	0,156	0,043	0,172	0,207

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 54 – Matriz de correlações na análise de sensibilidade por normalização (*case 4*)

	TOPSIS-MEDAC	Norm._SOMA	Norm._MÁXIMO	Norm._PADRÃO
<b>AHP-MEDAC</b>	<b>1,0000</b>	<b>0,4748</b>	<b>0,5500</b>	<b>0,7237</b>
<b>Norm._SOMA</b>	0,4748	<b>1,0000</b>	<b>0,1405</b>	<b>0,4493</b>
<b>Norm._MÁXIMO</b>	0,5500	0,1405	<b>1,0000</b>	<b>0,6295</b>
<b>Norm._PADRÃO</b>	0,7237	0,4493	0,6295	<b>1,0000</b>

Fonte: Elaboração própria.

Na análise da influência da categorização de ênfase, os pesos do modelo com categorias invertidas são apresentados e comparados com os valores obtidos pela abordagem original do método TOPSIS-MEDAC (Tabelas 55 e 56), onde se nota valores suavemente divergentes a se considerar ao longo de alguns subcritérios e critérios. A correspondência entre os *rankings* resultou em um coeficiente de correlação de 0,9928, o que evidencia uma notável conexão entre os *rankings* dos modelos.

Tabela 55 – Pesos dos subcritérios na análise de sensibilidade por categorização (*case 4*)

Subcritérios	TOPSIS-MEDAC	Categorias_Invertidas
Número de Matrículas Atendidas (Transporte)	0,041	0,005
Custo de Transporte <i>per capita</i>	0,585	0,658
Idade Média da Frota	0,374	0,337
Espaço Territorial	0,399	0,263
Número de Matrículas (Escolas Rurais)	0,601	0,737
PIB <i>per capita</i>	0,170	0,075
Índice de Gini	0,362	0,407
IDH	0,468	0,518
IDEB	0,368	0,377
TDIS	0,493	0,327
Taxa de Evasão	0,138	0,296

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 56 – Pesos dos critérios na análise de sensibilidade por categorização (*case 4*)

Critérios	TOPSIS-MEDAC	Categorias_Invertidas
Infraestrutura de Frota	0,365	0,453
Aspecto Geográfico	0,179	0,071
Aspecto Socioeconômico	0,300	0,329
Desempenho Escolar	0,156	0,147

Fonte: Elaboração própria.

Em suma, para o TOPSIS-MEDAC nota-se que esse método apresenta uma sensibilidade crítica para mudanças no procedimento de normalização e, em contrapartida, para a categorização verifica-se que com as variações é praticamente estável o resultado, assim como também observado nas análises de sensibilidade do método AHP-MEDAC. Desse modo, fica evidenciado que assim como o AHP-MEDAC, o TOPSIS-MEDAC é sensível a escolha do método de normalização, que deve ser preservado para manter a variabilidade original dos dados. Além disso, para a categorização, observou-se uma correlação considerável entre os *rankings*, resultante do fato de que os pesos na inversão de categorias pouco mudam. Este fato é reflexo da baixa assimetria dos dados no estudo de caso em questão e, portanto, não se pode retirar em geral a importância da categorização dos critérios de análise.

Com isso, encerra-se a apresentação e a aplicação do método TOPSIS-MEDAC hierárquico, incluindo a análise de sensibilidade conduzida, a partir dos quais é constatada a efetividade do método e a consistência geral de seu comportamento no contexto decisório analisado. Dessa forma, este capítulo completa o conjunto de propostas metodológicas desenvolvidas neste trabalho, consolidando uma abordagem de decisão multicritério orientada a dados e estruturada por ênfases previamente definidas pelo decisor, que fundamenta as conclusões a serem apresentadas no capítulo seguinte.

## 6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Esta dissertação teve como objetivo propor, desenvolver e aplicar metodologias de apoio à decisão multicritério orientadas por dados (*data-driven*), capazes de incorporar ênfases previamente definidas pelo decisor de forma estatisticamente fundamentada. Para isso, foi desenvolvida a abordagem MEDAC, que utiliza medidas de assimetria e variabilidade da distribuição dos dados para induzir, de maneira controlada e explicável, o aumento relativo dos pesos associados aos critérios de ênfase. Ao longo do trabalho, verificou-se que a primeira proposta desenvolvida (método AHP-Equitativo) apresentava limitações relacionadas à preservação da variabilidade original dos dados e uso de critérios de valores binários com distribuição assimétrica, o que motivou o refinamento metodológico que culminou no desenvolvimento do método AHP-MEDAC.

As contribuições metodológicas centrais deste trabalho concentram-se na proposição e validação dos métodos AHP-MEDAC e TOPSIS-MEDAC hierárquico, os quais ampliam abordagens clássicas da literatura ao integrar, de forma explícita, diretrizes decisórias e ênfases definidas pelo decisor a partir de informações empíricas extraídas dos dados. Esses métodos mantêm a estrutura conceitual dos paradigmas tradicionais, ao mesmo tempo em que reduzem a dependência de julgamentos subjetivos diretos, favorecendo uma modelagem mais objetiva, transparente e adequada a cenários de alta dimensionalidade.

Os estudos de caso realizados em diferentes níveis de aplicação (UFs, municípios, mesorregiões e microrregiões) demonstraram a viabilidade e a consistência da abordagem proposta. De maneira geral, os resultados indicaram que os métodos desenvolvidos são capazes de potencializar as ênfases estabelecidas pelo decisor, mantendo coerência estatística, estabilidade relativa em diferentes recortes territoriais e consistência quando o mesmo fenômeno é analisado sob distintas granularidades geográficas. As análises de sensibilidade realizadas reforçaram a importância do procedimento de normalização como elemento estrutural do modelo, ao passo que evidenciaram estabilidade relativa frente a variações na categorização de ênfase em cenários específicos.

Além disso, a proposição do método TOPSIS-MEDAC hierárquico permitiu estender a abordagem MEDAC para outro paradigma de decisão multicritério, mantendo forte convergência decisória em relação ao AHP-MEDAC e oferecendo uma perspectiva complementar de ordenação sem perda de alinhamento com as diretrizes estabelecidas. Essa convergência reforça a consistência matemática da abordagem e amplia seu potencial de aplicação em diferentes

contextos decisórios.

Apesar das contribuições apresentadas, este trabalho possui algumas limitações. Os métodos propostos possuem caráter predominantemente quantitativo, exigindo que as alternativas sejam avaliadas a partir de bases de dados numéricas completas e consistentes, o que pode restringir sua aplicação em cenários com informações essencialmente qualitativas ou com elevado grau de incompletude. Além disso, a correta aplicação dos modelos pressupõe alinhamento prévio com o decisor quanto à definição e hierarquização dos critérios e quanto à categorização das ênfases, etapa fundamental para garantir uma modelagem eficaz do processo decisório. Finalmente, o método de incorporar ênfases em critérios proposto neste trabalho é dependente da existência de assimetria dos dados, uma vez que para dados simétricos os desvios-padrão à esquerda e à direita são iguais.

Do ponto de vista prático, os impactos deste trabalho são relevantes em múltiplas dimensões. Sob a perspectiva social, os métodos propostos contribuem para a redução de desigualdades ao priorizar, de forma orientada por dados, regiões historicamente mais vulneráveis. No âmbito educacional, fornecem suporte fundamentado à formulação e à gestão de políticas públicas, fortalecendo decisões baseadas em evidências. Em termos econômicos, favorecem maior eficiência na alocação de recursos ao reduzir incertezas e ampliar o contraste entre alternativas, favorecendo, desse modo, decisões mais objetivas. Do ponto de vista tecnológico, as propostas metodológicas foram disponibilizadas como produtos de dados ao projeto *Big Data* e IA do FNDE a serem incorporadas no módulo multicritério da plataforma Antonieta de Barros. Além disso, a implementação em uma plataforma digital institucional confere visibilidade à produção acadêmica, ao transformar os resultados da pesquisa em uma ferramenta aplicada, inovadora e alinhada às demandas atuais da gestão pública orientada por dados.

Como direções para trabalhos futuros, recomenda-se ampliar a validação empírica da abordagem MEDAC em novos contextos decisórios, com diferentes objetivos e naturezas de dados, incluindo cenários com múltiplas ênfases simultâneas. Sugere-se também aprofundar estudos sobre estratégias de normalização que preservem propriedades estatísticas desejáveis e reduzam sensibilidade a escalas e *outliers*. Outras extensões promissoras incluem a combinação da abordagem MEDAC com outros métodos multicritério, arquiteturas híbridas de decisão e cenários dinâmicos, incorporando dimensão temporal, atualização periódica dos *rankings* e análises ampliadas de robustez e incerteza.

## REFERÊNCIAS

- AGUSTIN, E. S. A. S.; MARTINI, R.; SETIYONO, B. Evaluating rural tourism competitiveness: application of PROMETHEE-GAIA method. **Cogent Economics & Finance**, [s. l.], v. 10, n. 1, p. 2054526, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/23322039.2022.2054526>. Acesso em: 12 jun. 2025.
- ALMASI, M.; ANAHIDEH, H. Bi-level contextual bandits for individualized resource allocation under delayed feedback. **arXiv.org**, [S. l.], 2025. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2511.10572>. Acesso em: 12 jun. 2025.
- ALMEIDA, A. T. D. **Processo de decisão nas organizações**: construindo modelos de decisão multicritério. São Paulo: Atlas, 2013.
- ALVES, A. C.; CAMPOS, V. R. Método multicritério ELECTRE III para ordenação de métodos de compressão de projeto. 2024. In: ENCONTRO NACIONAL DE TECNOLOGIA DO AMBIENTE CONSTRUÍDO, 20., 2024, Maceió. **Anais [...]**. Maceió: ANTAC, 2024. Disponível em: <https://eventos.antac.org.br/index.php/entac/article/view/5755>. Acesso em: 15 jun. 2025.
- ASHRAF, S.; JANA, C.; SOHAIL, M.; CHOUDHARY, R.; AHMAD, S.; DEVECI, M. Multi-criteria decision-making model based on picture hesitant fuzzy soft set approach: an application of sustainable solar energy management. **Information Sciences**, [s. l.], v. 686, p. 121334, 2025. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2024.121334>. Acesso em: 12 jun. 2025.
- BÁNHIDI, Z.; DOBOS, I. A data envelopment analysis model for ranking digital development in the countries of the european union without explicit inputs and common weights analysis. **Decision Analytics Journal**, [s. l.], v. 6, p. 100167, 2023. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2772662223000073>. Acesso em: 11 jun. 2025.
- BARTL, D.; RAMÍK, J. A new algorithm for computing priority vector of pairwise comparisons matrix with fuzzy elements. **Information Sciences**, [s. l.], v. 615, p. 103–117, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2022.09.024>. Acesso em: 12 jun. 2025.
- BOENO, E. G. B.; CHIWIACOWSKY, L. D. Modelo de apoio à tomada de decisão na gestão de portfólio de projetos com base em uma abordagem de análise multicritério. **Scientia cum Industria**, Caxias do Sul, v. 8, n. 2, p. 145–155, 2020. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.18226/23185279.v8iss2p145>. Acesso em: 1 jul. 2025.
- BRIOZO, R. A.; MUSETTI, M. A. Método multicritério de tomada de decisão: aplicação ao caso da localização espacial de uma unidade de pronto atendimento—upa 24 h. **Gestão & Produção**, São Carlos, v. 22, n. 4, p. 805–819, 2015.
- COSTA, C. A.; VANSNICK, J. C. Macbeth: an interactive path towards the construction of cardinal value functions. **European Journal of Operational Research**, [s. l.], v. 52, n. 2, p. 188–202, 1994.
- COSTA, T. C.; BELDERRAIN, M. C. N. Decisão em grupo em métodos multicritério de apoio à decisão. 2009. In: ENCONTRO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E PÓS-GRADUAÇÃO DO ITA, 15., 2009, São José dos Campos. **Anais [...]**. São José dos Campos: ITA, 2009. p. 1–6. Disponível em: <https://www.ita.br>. Acesso em: 1 jul. 2025.

DEVECI, M.; MISHRA, A. R.; RANI, P.; GOKASAR, I.; ISIK, M.; DELEN, D.; OOI, K.-B.; DAIM, T. Evaluation of intelligent transportation system implementation alternatives in metaverse using a fermatean fuzzy distance measure-based oca model. **Information Sciences**, [s. l.], v. 657, p. 120008, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2023.120008>. Acesso em: 12 jun. 2025.

DOBOS, I.; VÖRÖSMARTY, G. Input and output reconsidered in supplier selection dea model. **Central European Journal of Operations Research**, [s. l.], v. 32, p. 67–81, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10100-023-00845-5>. Acesso em: 12 jun. 2025.

EHSANIFAR, M.; WOOD, D. A.; BABAIE, A. Utastar method and its application in multi-criteria warehouse location selection. **Operations Management Research**, [s. l.], v. 14, p. 202–215, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s12063-020-00169-6>. Acesso em: 11 jun. 2025.

FARID, H. M. A.; RIAZ, M.; SIARRY, P.; SIMIC, V. Enhanced decision-making for urban climate change transportation policies using q-rung orthopair fuzzy rough fairly information aggregation. **Information Sciences**, [s. l.], v. 702, p. 121900, 2025. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2025.121900>. Acesso em: 12 jun. 2025.

FERREIRA, J. R. C.; RÊGO, L. C. Equidade na tomada de decisão: uma nova perspectiva em decisão multicritério com o uso do método AHP-Equitativo. 2024. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 56., 2024, Fortaleza. **Anais [...]**. Fortaleza: Galoá, 2024.

GARCIA, B. V. N.; PATUSSI, M. A.; GONÇALVES, T. J. M. **Aplicação de um modelo baseado no método TOPSIS para a seleção de fornecedores em uma usina siderúrgica**. 2023. 28 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Engenharia de Produção com ênfase em Tecnologias de Decisão) - Instituto Federal do Espírito Santo, Cariacica, 2023. Disponível em: <https://repositorio.ifes.edu.br/bitstream/handle/123456789/4059>. Acesso em: 13 jun. 2025.

GONÇALVES, M. E. L. **Classificação multicritério dos fatores de comprometimento organizacional**: uma aplicação do método UTADIS. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Economia e Finanças, Ibmec, Rio de Janeiro, 2011. 68 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Administração) – Faculdade de Economia e Finanças, Ibmec, Rio de Janeiro, 2011. Disponível em: <https://s3.amazonaws.com/public-cdn.ibmec.br/portalibmec-content/public/arquivos/df>. Acesso em: 12 jun. 2025.

GROŠELJ, P.; DOLINAR, G. Group ahp framework based on geometric standard deviation and interval group pairwise comparisons. **Information Sciences**, [s. l.], v. 626, p. 370–389, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2022.12.053>. Acesso em: 10 jun. 2025.

HAKIMI, M.; DANESHVAR, A.; EHSANIFAR, M.; NOURI, I. Applying fuzzy utilities additives star for sustainable supplier selection in iran’s construction industry. **International Journal of Engineering**, [s. l.], v. 37, n. 10, p. 2008–2020, 2024. Disponível em: <https://www.ije.ir>. Acesso em: 12 jun. 2025.

HUANG, J.; XU, Y.; WEN, X.; ZHU, X.; HERRERA-VIEDMA, E. Deriving priorities from the fuzzy best-worst method matrix and its applications: a perspective of incomplete reciprocal preference relation. **Information Sciences**, [s. l.], v. 634, p. 761–778, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2023.03.111>. Acesso em: 12 jun. 2025.

HÜLLERMEIER, E.; SŁOWIŃSKI, R. Preference learning and multiple criteria decision aiding: differences, commonalities, and synergies – part i. **4OR – Quarterly Journal of Operations Research**, [s. l.], v. 22, n. 2, p. 179–209, 2024.

HWANG, C.-L.; YOON, K. **Multiple attribute decision making: methods and applications**. New York: Springer-Verlag, 1981. *E-book*. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-48318-9>. Acesso em: 07 nov. 2025.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Produto Interno Bruto (PIB)**. 2024. Rio de Janeiro: IBGE, 2024. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/explica/pib.php>. Acesso em: 23 maio 2024.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Indicadores Educacionais**. 2024. Brasília, DF: INEP, 2024. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/aceso-a-informacao/dados-abertos/indicadores-educacionais>. Acesso em: 23 maio 2024.

JIANG, C. Research on the optimization strategy of government education resource allocation based on deep learning. 2025. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON MANAGEMENT SCIENCE AND COMPUTER ENGINEERING, 2025, New York. Proceedings [...]*. New York: Association for Computing Machinery, 2025. p. 114–120. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/3760023.3760043>. Acesso em: 10 jun. 2025.

JUNG, H.; WICKSTROM, M. H. Teachers creating mathematical models to fairly distribute school funding. **Journal of Mathematical Behavior**, [s. l.], v. 70, p. 101041, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101041>. Acesso em: 07 set. 2025.

KARABASEVIĆ, C. D. *et al.* An extension of the TOPSIS method adapted for the use of single-valued neutrosophic sets. **Symmetry**, [s. l.], v. 12, n. 8, p. 1263, 2020.

LIU, J.; SHUI, T.; JIN, F.; SHAO, L.; ZHU, J. Minimum deviation distribution ranking model and fairness concern-based consensus building for group decision-making. **Information Sciences**, [s. l.], v. 692, p. 121654, 2025.

MACHADO, E. L.; SANTOS, A. d. P. L.; LACERDA, M. Utilização do método multicritério PROMETHEE para definição da ordem de manutenção de pontes. 2019. *In: SIMPÓSIO PARANAENSE DE PATOLOGIA DAS CONSTRUÇÕES, 4., 2019, Curitiba. Anais [...]*. Curitiba: SPPC, 2019. p. 10–19. Artigo n. 4SPPC102. Disponível em: <https://sppc.org.br>. Acesso em: 22 dez. 2025.

MARTYN, K.; KADZIŃSKI, M. Deep preference learning for multiple criteria decision analysis. **European Journal of Operational Research**, [s. l.], v. 305, n. 4, p. 1843–1863, 2022.

NASCIMENTO, C. R. S. M. S.; ALMEIDA-FILHO, A. T.; PALHA, R. P. Uma proposta para priorização de projetos no contexto de uma instituição federal de ensino superior. *In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE QUALIDADE DO PROJETO DO AMBIENTE CONSTRUÍDO, 7., 2021, Londrina. Anais [...]*. Londrina: ANTAC, 2021.

NASCIMENTO, J. M. F. **Utilização de um modelo de decisão multicritério na classificação do nível de maturidade em gestão de processos para otimização de resultados no diagnóstico empresarial**. Dissertação (Mestrado). 111 f. Mestrado em Engenharia de Produção – Centro Acadêmico do Agreste, Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2024.

OLIVEIRA, V. A. R. D.; SALOMON, V. A. P. Métodos de decisão multicritério aplicados a análise de indicadores de desempenho – um estudo bibliométrico. 2017. *In: ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO*, 37., 2017, Joinville. **Anais [...]**. Joinville: ABEPRO.

OMOEVA, C.; CUNHA, N. M.; MOUSSA, W. Measuring equity of education resource allocation: an output-based approach. **International Journal of Educational Development**, [s. l.], v. 87, p. 102492, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ijedudev.2021.102492>. Acesso em: 13 jun. 2025.

OTAY, I.; ONAR, S. c.; ÖZTAYSI, B.; KAHRAMAN, C. A novel interval valued circular intuitionistic fuzzy ahp methodology: application in digital transformation project selection. **Information Sciences**, [s. l.], v. 647, p. 119407, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2023.119407>. Acesso em: 12 jun. 2025.

PACHECO, A. **TOPSIS**: um algoritmo de tomada de decisão. 2016. Vitória, ES: Computação Inteligente, 2016. Disponível em: <https://computacaointeligente.com.br/algoritmos/TOPSIS-tomada-de-decisao/>. Acesso em: 23 out. 2025.

PALA, O. A new objective weighting method based on robustness of ranking with standard deviation and correlation: the rocosd method. **Information Sciences**, [s. l.], v. 636, p. 118930, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2023.03.141>. Acesso em: 12 jun. 2025.

PARVEEN, N.; KAMBLE, S. S. An extension of the TOPSIS method for group decision-making in an intuitionistic fuzzy environment. **Mathematics and Computers in Simulation**, [s. l.], v. 187, p. 528–543, 2021.

PASCOE, S.; FARMERY, A.; NICHOLS, R.; LOTHIAN, S.; AZMI, K. A modified analytic hierarchy process suitable for online survey preference elicitation. **Algorithms**, [s. l.], v. 16, n. 4, p. 198, 2023. Disponível em: <https://www.mdpi.com/1999-4893/16/4/198>. Acesso em: 13 jun. 2025.

RIBEIRO, G. F.; BASSETTO, P.; ROCHA, R. P. D.; KACHBA, Y. R.; JUNIOR, A. B. Classificação multicritério: aplicação do ELECTRE TRI aos métodos de previsão de demanda para novos produtos. **Revista de Gestão dos Países de Língua Portuguesa**, Rio de Janeiro, 2024. Disponível em: <https://bibliotecadigital.fgv.br>. Acesso em: 20 ago. 2025.

ROCHA, E. E. d.; ROCHA, L. C. J. B. V. d.; CARVALHO, B.; JERÔNIMO, T. d. B. Aplicação do Promethee V para seleção de portfólio de ações dos departamentos para inclusão no plano orçamentário anual da UFPE. 2022. *In: ENCONTRO DA ANPAD*, 46., 2022, Online. **Anais [...]**. Maringá: ANPAD, 2022. p. 1–20. Disponível em: <https://www.anpad.org.br>. Acesso em: 14 jun. 2025.

ROY, B. The outranking approach and the foundations of electre methods. *In: COSTA, C. A. Bana (org.). Readings in multiple criteria decision aid*. Berlin: Springer, 1991. p. 155–183.

SAATY, R. W. The analytic hierarchy process—what it is and how it is used. **Mathematical Modelling**, [s. l.], v. 9, n. 3-5, p. 161–176, 1987.

SAATY, T. L. How to make a decision: the analytic hierarchy process. **INFORMS**, Pennsylvania, v. 24, n. 6, p. 19–43, 1994.

SAATY, T. L. Fundamentals of decision making and priority theory with the analytic hierarchy process. Pittsburgh: RWS Publications, 2013. (AHP Series, v. VI).

SAATY, T. L.; VARGAS, L. **Models, methods, concepts & applications of the analytic hierarchy process**. New York: Springer, 2012.

SANTIN, L. C. B.; PACHECO, B. C. S.; NAGANO, M. S. Utilização do método ahp em projeto para seleção de uma agência de marketing em uma empresa b2b. **Revista de Gestão e Projetos**, [s. l.], v. 14, n. 2, p. 174–195, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.5585/gep.v14i2.23854>. Acesso em: 12 jun. 2025.

SANTOS, M.; COSTA, I. P. A.; GOMES, C. F. S. Multicriteria decision-making in the selection of warships: a new approach to the AHP method. **International Journal of the Analytic Hierarchy Process**, [s. l.], v. 13, n. 1, p. 147–169, 2021.

SILVA, A. B. O.; JERÔNIMO, T. d. B. Electre i para seleção de critério do sistema de qualidade de atenção ao paciente. 2020. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 10., 2020, Online. **Anais [...]**. Ponta Grossa: APREPRO, 2020. Disponível em: <https://aprepro.org.br/conbrepro/2020/anais/arquivos>. Acesso em: 25 out. 2025.

SILVA, A. C. S. d. **Método multicritério analytic hierarchy process (AHP)**: apresentação da Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Amanda Simões (ITA). 2020. Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2020. 1 vídeo (3h 31min). Disponível em: YouTube. Acesso em: 1 jul. 2025.

SILVA, L. C.; CABRAL, L. S.; SILVA JÚNIOR, J. J.; SANTOS, L. L. P.; OLIVEIRA, T. T. M.; COSTA, B. J. D.; LOBO, J. F.; PIMENTEL JÚNIOR, D. M.; CRUZ, N. J. T.; SILVA, R. A.; PIMENTEL, B. A. Forecasting student enrollments in brazilian schools for equitable and efficient education resource allocation. 2025. In: ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE ON DIGITAL GOVERNMENT RESEARCH, 26., 2025, Porto Alegre. **Proceedings [...]**. Porto Alegre: ACM, 2025. Disponível em: <https://doi.org/10.59490/dgo.2025.939>. Acesso em: 27 set. 2025.

TAHERDOOST, H.; MADANCHIAN, M. Analytic network process (ANP) method: a comprehensive review of applications, advantages, and limitations. **Journal of Data Science and Intelligent Systems**, [s. l.], v. 1, p. 1–25, May 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.47852/bonviewJDSIS3202885>. Acesso em: 15 out. 2025.

TAKAN, M. A.; ÖZTÜRK, Z. K. Neighborhood selection using the analytical network process method for the capacitated vehicle routing problems. **Brazilian Journal of Operations and Production Management**, Rio de Janeiro, v. 20, n. 3 (special ed.), p. e20231398, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.14488/BJOPM.2023.1398>. Acesso em: 12 jun. 2025.

TESTONI, P. S.; TRAMARICO, C. L.; RODRÍGUEZ, E. C. A.; MARINS, F. A. S. Analytic hierarchy process applied in the prioritization of third-party logistics (3pl) providers. **Produção**, São Paulo, v. 34, p. e20230123, 2024. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/prod/a/q8YrzdTcMBKrTkwGgmtwLnK/>. Acesso em: 14 jun. 2025.

TRAIN, K. E. **Discrete choice methods with simulation**. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

TU, J.; WU, Z.; PEDRYCZ, W. Priority ranking for the best-worst method. **Information Sciences**, [s. l.], v. 635, p. 42–55, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2023.03.119>. Acesso em: 24 out. 2025.

VAZ, L. A. V.; FILGUEIRA, H. J. A.; ROSENDO, E. E. Q.; SILVA, R. M. d.; SANTOS, C. A. G. A novel integration of analytic hierarchy process and fuzzy logic to evaluate drought vulnerability in a semiarid region. **Socio-Economic Planning Sciences**, [s. l.], v. 99, p. 102221, 2025. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.seps.2025.102221>. Acesso em: 12 jun. 2025.

WANG, L.; LIU, T. Optimization algorithm of preschool education resource allocation based on data envelopment analysis model. **Scientific Programming**, [s. l.], v. 2022, p. 3858664, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1155/2022/3858664>. Acesso em: 17 jun. 2025.

XU, Y. Research on optimized allocation model of educational resources in colleges and universities based on big data. **Applied Mathematics and Nonlinear Sciences**, [s. l.], v. 9, n. 1, p. 1–12, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.2478/amns-2024-3529>. Acesso em: 17 jun. 2025.

ZHANG, K.; DAI, J.; ZHAN, J. A new classification and ranking decision method based on three-way decision theory and TOPSIS models. **Information Sciences**, [s. l.], v. 568, p. 54–85, 2021.