



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

LEANDRO ALVES DUTRA

BURACOS DE MINHOCA DE EINSTEIN-DIRAC-MAXWELL

**FORTALEZA
2026**

LEANDRO ALVES DUTRA

BURACOS DE MINHOCA DE EINSTEIN-DIRAC-MAXWELL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física.
Área de Concentração: Física .

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.

FORTALEZA
2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

- S185r Dutra, Leandro.
 Buracos de Minhoca de Einstein-Dirac-Maxwell / Leandro Alves Dutra. - 2026.
 103 f. : il.
- Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa
de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2026.
 Orientação: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.
1. Relatividade Geral; 2. espinores; 3. equações de campo; 4. solução de Simpon-
Visser I. Título.

CDD 530

LEANDRO ALVES DUTRA

BURACOS DE MINHOCA DE EINSTEIN-DIRAC-MAXWELL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física.
Área de Concentração: Física .

Aprovada em 20 / 01 /2026 .

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho
Universidade Federal de Ceará (UFC)
(Orientador)

Prof. Dr. Ivan Carneiro Jardim
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Prof. Dr. Célio Rodrigues Muniz
Universidade Estadual do Ceará (UECE - FECLI)

Prof. Dr. Wendel Macedo Mendes
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

Prof. Dr. Marcony Silva Cunha
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dedico este trabalho a minha tia, meu amor materno.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus, por me abençoar a cada dia e me permitir saúde e força para conquistar os meus objetivos. Agradeço a minha tia Lucinha, pois me prestando papel de mãe, encorajou-me e me deu forças para encarar todo o processo.

Agradeço a minha prima/irmã Dhiéssica que sempre foi o pulso firme e a ordem que eu obedecia. Agradeço ao meu pai, que apesar da distância, sei que torce por mim. Agradeço aos meus amigos de infância Caio, Marcelo, Mairton, Italo e Luiz Paulo, pois estiveram ao meu lado no lazer e no incentivo.

Faço agradecimentos especiais a Débora, que apesar de não estar mais na minha vida, foi a pessoa que me incentivou a fazer a seleção de mestrado. Também tenho um sentimento de imensa gratidão a Dalila, pois foi a pessoa que viveu todo o processo ao meu lado, além de ter sido muitas vezes a primeira leitora deste trabalho, opinando e corrigindo erros.

Faço também agradecimentos aos meus professores formadores: Wendel Macedo Mendes, Ricardo Renan Landim de Carvalho e Geová Maciel de Alencar Filho que estiveram sempre ao meu lado, ajudando-me a construir uma base de conhecimento sólida e formando sem dúvidas um bom profissional.

Por fim, agradeço às instituições que me formei, sendo a Universidade Estadual do Ceará a que obtive minha graduação em Física e a Universidade Federal do Ceará, a que hoje me dedico ao título de mestre. Faço agradecimentos aos colegas e amigos que o laboratório LabGmc2 me proporcionou. Agradecendo todo o incentivo financeiro fornecido pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), que me permitiu dedicação exclusiva nesse sonho realizado que é a obtenção de um título de pós-graduação. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

O presente trabalho apresenta um estudo do modelo Einstein-Dirac-Maxwell (EDM), com ênfase em soluções analíticas. A teoria estudada neste trabalho, discute soluções de um conjunto de equações que acopla, no âmbito da Relatividade Geral, os campos gravitacional, fermiônico e eletromagnético. Com objetivo de apresentar um estudo teórico sólido, foram realizadas revisões bibliográficas para cada campo físico abordado na teoria. Em particular, foram analisadas possíveis soluções do tipo Simpson-Visser para o modelo EDM, constatando a impossibilidade da obtenção de tais soluções. Desta forma, a solução de Simpson-Visser foi, portanto, utilizada como parâmetro de comparação, permitindo avaliar as limitações da teoria.

Palavras-chave: Relatividade Geral; espinores; equações de campo; solução de Simpson-Visser

ABSTRACT

This paper presents a study of the Einstein-Dirac-Maxwell (EDM) model, with an emphasis on analytical solutions. The theory studied in this work discusses solutions to a set of equations that encompass, within the framework of General Relativity, gravitational, fermionic, and electromagnetic fields. To present a solid theoretical study, bibliographic reviews were conducted for each physical field addressed in the theory. In particular, possible Simpson-Visser solutions for the EDM model were verified, confirming the impossibility of obtaining such solutions. Therefore, the Simpson-Visser solution was used as a comparison parameter, allowing for the evaluation of the theory's specifications.

Keywords: General Relativity; spinors; field equations; Simpson-Visser solution.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Buraco de minhoca conectando duas regiões de universos distintos.	36
Figura 2 – Buraco de minhoca conectando regiões do mesmo universo.	36
Figura 3 – Diagrama de imersão da garganta de um buraco de minhoca.	42
Figura 4 – Representação da condição de energia nula (NEC) próximo a garganta ($r_0 = 1$) do buraco de minhoca.	96

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	RELATIVIDADE GERAL	14
2.1	A gravidade Como uma Teoria Geométrica	14
2.1.1	<i>A gravidade como um campo escalar</i>	15
2.1.2	<i>O Tensor métrico</i>	19
2.1.3	<i>Geodésica e Derivada covariante</i>	21
2.2	Curvatura do Espaço-Tempo	23
2.2.1	<i>O tensor curvatura de Riemann</i>	24
2.3	Equações de Einstein	26
2.4	Solução esfericamente simétrica	31
2.5	Buracos de Minhoca de Morris-Thorne	35
2.5.1	<i>Análise geométrica do buraco de minhoca de Morris-Thorne</i>	40
2.5.2	<i>Condições de energia no buraco de minhoca de Morris-Thorne</i>	42
3	FORMULAÇÃO ESPINORIAL	44
3.1	A teoria não-relativística do spin $1/2$	44
3.1.1	<i>Rotações e o grupo $SO(3)$</i>	45
3.1.2	<i>Representação espinorial do $SO(3)$ e o grupo $SU(2)$</i>	48
3.2	Quantização do momento angular através da álgebra de Lie	53
3.3	A teoria relativística do spin $1/2$	56
3.3.1	<i>O Grupo de Lorentz $SO(3,1)$ e sua Representação Spinorial</i>	57
3.3.2	<i>Representação spinorial do $SO(3,1)$ e a álgebra de Clifford</i>	61
3.4	Espinores de Dirac, Weyl e Majorana	63
3.4.1	<i>Representação de Weyl</i>	64
3.4.2	<i>Representação de Dirac</i>	64
3.4.3	<i>Representação de Majorana</i>	66
3.5	A equação de Dirac	67
3.5.1	<i>Ação de Dirac</i>	67
3.5.2	<i>Soluções da equação de Dirac</i>	69
3.6	Espinores em espaço-tempo curvos	71

4	O ELETROMAGNETISMO COVARIANTE	75
5	WORMHOLES NA TEORIA EDM	78
5.1	A ação da teoria	78
5.2	Equações de movimento	79
5.3	Ansatz da métrica e suas conexões de spin	80
5.4	O tensor de energia e momento de Dirac	81
5.5	As equações de Einstein	85
5.6	A equação de Maxwell	86
5.7	A equação de Dirac	88
5.8	Uma solução analítica	90
5.9	Análise da solução de Einstein-Dirac-Maxwell	94
5.10	Solução de Simpson–Visser na teoria EDM	97
6	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS	99
	REFERÊNCIAS	100
	APÊNDICE A – TÓPICOS ESSENCIAIS DE TEORIA DE GRUPOS . . .	102

1 INTRODUÇÃO

O modelo Einstein-Dirac-Maxwell (EDM) descreve soluções com fontes não triviais das equações de campo de Einstein ¹, apresentando um acoplamento entre os campos gravitacional, fermiônico e de gauge. Destacando que o tema central deste trabalho é investigar soluções exatas para o caso especial onde os férmions apresentam carga elétrica e massa próximas de zero.

Com a ideia de apresentar uma fundamentação teórica sólida, iniciamos no Capítulo 2 a descrever os principais fundamentos da Relatividade Geral. Este capítulo segue uma linha cronológica para as teorias aceitas do campo gravitacional. Partindo da teoria newtoniana descrita por um potencial escalar que satisfaz a equação de Poisson, mas mostrando suas limitações ao ser incapaz de incorporar a invariância de Lorentz [1].

Antes da formulação da Relatividade Geral, várias tentativas de apresentar uma teoria relativística da gravitação foram propostas. Das ideias apresentadas, destaca-se a teoria do campo escalar de Nordström que trouxe a substituição do formalismo vetorial tridimensional para o formalismo de quadrivetores. Também estabeleceu que a teoria gravitacional relativística deveria ser entendida como uma teoria de campo escalar e que, diferentemente da teoria newtoniana, a fonte deste campo é mais geral do que somente a densidade de massa, ligando a teoria gravitacional relativística ao formalismo tensorial, através do traço do tensor energia-momento [2].

O entendimento de que a teoria gravitacional de Einstein tinha natureza geométrica foi uma extensão quase que natural de uma teoria gravitacional escalar, pois a teoria de Nordström apesar de satisfazer alguns princípios fundamentais da física como conservação da energia, princípio da equivalência e possuir um limite clássico correto, apresenta problemas ao considerar fontes eletromagnéticas, pois sua equação considera apenas o traço do tensor energia-momento, sendo este nulo para o eletromagnetismo [2].

Desde a formulação das equações de campo de Einstein, soluções exatas começaram

¹Fontes não triviais são aquelas cujo tensor energia-momento não é nulo nem degenerado e altera de forma essencial a geometria do espaço-tempo.

a ser exploradas, aumentando assim a compreensão da estrutura do espaço-tempo. Em 1916, meses após a publicação da teoria de Einstein, apresentou-se como o marco inicial das soluções exatas do conjunto de equações, a solução de Schwarzschild, que apresenta características específicas, como simetria esférica, independência do tempo e um tensor de energia-momento nulo ²[3].

Apesar das aparentes simplificações da solução de Schwarzschild, a mesma é de grande importância para estudos referentes à Relatividade Geral [3]. No contexto deste trabalho, a solução de Reissner-Nordström, que representa geometrias com fontes eletricamente carregadas, ganha bastante notoriedade, pois a mesma surge como limite particular das soluções obtidas no modelo EDM, aumentando assim sua relevância física [4][5].

No capítulo 3 revisa-se o formalismo spinorial, lembrando que os conceitos de simetria e leis de conservação estão diretamente relacionados em Física [6]. A inclusão de campos fermiônicos como fontes gravitacionais exige o uso do formalismo spinorial, uma vez que partículas de spin $1/2$ não admitem descrições puramente tensoriais. Por essa razão, o capítulo é dedicado à revisão da teoria de grupos e das representações spinoriais dos grupos $SO(3)$ e $SO(3,1)$, fundamentais para a compreensão do momento angular e do spin na Mecânica Quântica e na Relatividade Restrita [7][8].

Para generalizar as propriedades seguidas pelos espinores em espaços-tempo curvos, é necessário considerar a teoria gravitacional, levando em conta o princípio da equivalência de Einstein, no qual relaciona localmente quantidades que estão num referencial inercial (espaço flat) com quantidades no referencial do campo (espaço curvo) [9]. A extensão do formalismo spinorial a espaços-tempo curvos requer a introdução das tetradas (vierbeins), esse procedimento garante a consistência do acoplamento entre férmions e gravitação [10].

O capítulo 4 destina-se à revisão da formulação covariante do eletromagnetismo de Maxwell. Apesar dessa formulação ser uma nova forma de escrever as equações do eletromagnetismo, as regras da eletrodinâmica clássica não mudam [11]. Embora as equações de Maxwell sejam naturalmente compatíveis com a Relatividade Restrita, sua extensão a espaços-tempo curvos exige o uso de derivadas covariantes e do acoplamento mínimo. Esse formalismo é essencial para a construção consistente do modelo Einstein–Dirac–Maxwell.

²Embora o tensor energia-momento seja nulo na região externa, a solução corresponde ao campo gravitacional gerado por uma fonte pontual idealizada.

Por fim, o Capítulo 5 é dedicado ao estudo de soluções de buracos de minhoca no contexto da teoria EDM. Analisa-se o acoplamento entre um par de férmions carregados, com spins opostos, e o campo eletromagnético, respeitando o princípio de exclusão de Pauli. São discutidas soluções analíticas e limites físicos relevantes, incluindo a recuperação da solução de Reissner–Nordström em regimes apropriados. Dessa forma, este trabalho contribui para a compreensão de soluções auto-consistentes do modelo EDM e de suas implicações físicas no estudo de geometrias não triviais do espaço-tempo.

2 RELATIVIDADE GERAL

A forma como entendemos o campo gravitacional foi mudando ao longo do tempo e durante séculos, a gravidade foi encarada como uma força de ação à distância, como descrita na teoria newtoniana, que apesar da sua precisão para descrever fenômenos astronômicos, apresentava limitações conceituais e experimentais em relação aos princípios da relatividade e em relação a eventos que ocorrem na presença de campos intensos ou em altas velocidades.

Com a necessidade de formular uma teoria gravitacional mais geral, que respeitasse os princípios da relatividade, tornou-se necessário reinterpretar a gravidade como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo induzida pela presença de matéria e energia. Dentre as várias contribuições da teoria da Relatividade Geral, uma das mais importantes, é a análise de soluções exatas das soluções de campo, as quais têm papel fundamental na compreensão do espaço-tempo.

Das soluções exatas conhecidas, num contexto contemporâneo, destacam-se modelos que descrevem buracos negros, pela sua importância observacional. Já num contexto teórico, destacam-se soluções de buracos de minhoca, pois tais soluções permitem investigar cenários nos quais as propriedades clássicas do espaço-tempo sejam modificadas (violação das condições de energia).

Desta forma, este capítulo tem como objetivo introduzir os fundamentos conceituais da gravitação como uma teoria geométrica, desenvolvendo uma estrutura que segue o contexto histórico, apresentando alguns desafios no desenvolvimento formal da Relatividade Geral. Por fim, são apresentados os conceitos físicos e matemáticos das soluções de buracos de minhoca, enfatizando as condições existentes sobre as fontes para sua existência.

2.1 A gravidade Como uma Teoria Geométrica

A teoria da gravitação aceita até o início do século XX era a gravitação universal newtoniana, esta por sua vez relaciona um potencial escalar com sua fonte geradora, uma densidade de massa ρ , através da equação de Poisson. Propostas de estender a gravitação universal de Newton foram feitas, estas baseadas num campo escalar que satisfazem a equação de Poisson e são invariantes de Lorentz [1]. Das ideias apresentadas, destaca-se a teoria de Nordström que trouxe a substituição do formalismo vetorial tridimensional tradicional para o formalismo

de quadrivetores, e também estabeleceu que a fonte do campo escalar era mais geral do que somente a densidade de massa, ligando a teoria gravitacional relativística ao formalismo tensorial, através do traço do tensor energia-momento [2].

No entanto a teoria de Nordstöm apesar de satisfazer alguns princípios fundamentais da física como conservação da energia, princípio da equivalência e possuir um limite clássico correto, apresenta problemas ao considerar fontes eletromagnéticas, pois sua equação considera apenas o traço do tensor energia-momento, sendo este nulo para o eletromagnetismo.

Com o intuito de corrigir os problemas encontrados com o formalismo de Nordstöm e propor uma teoria do campo gravitacional que fosse compatível com a relatividade especial, Albert Einstein propôs em 1915 uma teoria relacionando matéria-energia com a própria geometria do espaço-tempo. Esta por sua vez permite determinar o tensor métrico, ou seja, a geometria do espaço em torno de fontes de matéria ou energia, sendo estas grandezas intimamente relacionadas pelo princípio da equivalência [2].

2.1.1 A gravidade como um campo escalar

A tentativa mais simples de descrever a gravidade pela teoria de campos é através de um campo escalar que no limite clássico satisfaz a equação de Poisson,

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho. \quad (2.1)$$

A equivalência da massa gravitacional com a massa inercial exige que a fonte de matéria seja acoplada com a constante gravitacional G . Esta ideia pode ser generalizada pela relatividade através da equivalência massa-energia, ou seja, a energia também deve ser acoplada a G . Portanto a tentativa de uma lei da gravitação que satisfaz a relatividade restrita deve ser dada por um campo escalar de spin zero, este descrito pela teoria de Klein Gordon. Isso implica dizer que o operador d'alembertiano aplicado no campo será proporcional a uma fonte escalar externa multiplicada pela constante gravitacional G [6]. Para obtenção de tal relação, toma-se a ação de uma partícula relativística acoplada a um campo escalar $\phi(x^\mu)$, com constante de acoplamento λ :

$$S = - \int_{\tau_2}^{\tau_1} (mc^2 + \lambda\phi) d\tau, \quad (2.2)$$

sendo o elemento de linha $ds = \sqrt{\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = cd\tau$ no espaço de Minkowski. Aplicando a variação juntamente com o princípio de Hamilton em 2.2:

$$\delta S = - \int_{\tau_2}^{\tau_1} [\delta(d\tau)(mc^2 + \lambda\phi) + \lambda d\tau \delta\phi], \quad (2.3)$$

onde $\delta\phi = \delta x^\mu \partial_\mu \phi$, logo:

$$\delta S = - \int_{\tau_2}^{\tau_1} [\delta(d\tau)(mc^2 + \lambda\phi) + \lambda d\tau \delta x^\mu \partial_\mu \phi], \quad (2.4)$$

Sabendo também que $\delta(d\tau) = -\frac{dx_\mu}{d\tau} d(\delta x^\mu) = -u_\mu d(\delta x^\mu)$

$$\delta S = \int_{\tau_2}^{\tau_1} u_\mu \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} (mc^2 + \lambda\phi) d\tau - \lambda \int_{\tau_2}^{\tau_1} d\tau \delta x^\mu \partial_\mu \phi, \quad (2.5)$$

realizando a integração por partes no primeiro termo:

$$S = - \int_{\tau_2}^{\tau_1} \left\{ \frac{d}{d\tau} [mc^2 + \lambda\phi] u_\mu + \lambda \partial_\mu \phi \right\} \delta x^\mu d\tau, \quad (2.6)$$

logo:

$$\frac{d}{d\tau} [mc^2 + \lambda\phi] u_\mu + \lambda \partial_\mu \phi = 0. \quad (2.7)$$

Sendo $\frac{d\phi}{d\tau} = u^\nu \partial_\nu \phi$, conclui-se que:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = -\lambda \frac{\partial^\mu \phi}{(mc^2 + \lambda\phi)} - \lambda \frac{u^\mu u^\nu \partial_\nu \phi}{(mc^2 + \lambda\phi)}. \quad (2.8)$$

Esta é a equação de movimento de uma partícula de massa m na presença de um campo escalar ϕ . A equação (2.8) é explicitamente dependente da massa e da constante de acoplamento, isto contrasta com o princípio da equivalência, desta forma é conveniente escolher a constante de acoplamento proporcional a massa $\lambda \equiv lm$, onde l tem unidade de comprimento para preservar a homogeneidade das unidades. Também será definido o novo potencial $\Phi = l\phi$, desta forma [2]:

$$\begin{aligned} \frac{du^\mu}{d\tau} &= -lm \frac{\partial^\mu \left(\frac{\Phi}{l}\right)}{(mc^2 + ml\frac{\Phi}{l})} - ml u^\mu u^\nu \frac{\partial_\nu \left(\frac{\Phi}{l}\right)}{(mc^2 + ml\frac{\Phi}{l})} \\ &= -\frac{\partial^\mu \left(\frac{\Phi}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)} - u^\mu u^\nu \frac{\partial_\nu \left(\frac{\Phi}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

A equação (2.9) mostra que a trajetória das partículas influenciadas por um campo gravitacional Φ é independente da massa, desde que a massa inercial associada ao termo mc^2 coincida com a massa que se acopla ao potencial. Com as escolhas de Φ e λ , a ação da partícula se movendo

num campo gravitacional é:

$$S = -mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(1 + \frac{\Phi}{c^2} \right). \quad (2.10)$$

Essa ação acopla a partícula com o campo escalar, mas trata o mesmo como uma entidade externa e estática. Para que a conservação das grandezas mencionadas seja mantida, o próprio campo deve possuir energia, momento e momento angular [2].

Entendendo que o campo é uma entidade dinâmica, suas quantidades de energia e momento evoluem de acordo com uma equação de movimento. A equação (2.10) não permite tal evolução com isto é necessário adicionar um termo dado por:

$$S_{campo} = \int d^4x \mathcal{L}_{campo} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_{campo} \equiv -\frac{1}{2l^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = -\frac{1}{8\pi Gc} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi, \quad (2.11)$$

para um limite clássico apropriado $l = \sqrt{4\pi Gc}$, onde G é a constante da gravitação universal.

Com isso a ação (2.10) fica:

$$S = -mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau - m \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Phi d\tau - \frac{1}{8\pi Gc} \int d^4x \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi. \quad (2.12)$$

Isolando o segundo e terceiro termos que têm dependência explícita do campo,

$$S_\Phi = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Phi d\tau - \frac{1}{8\pi Gc} \int d^4x \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi. \quad (2.13)$$

Observando que o primeiro termo da equação (2.13) está integrada em $d\tau$, define-se;

$$n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \delta[x^\mu - z^\mu(\tau)], \quad (2.14)$$

sendo $\delta[x^\mu] \equiv \delta(x^0)\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$ a função delta quadridimensional, esta por sua vez ter o papel de representar que a densidade de massa será nula em todo espaço-tempo exceto na linha mundo da partícula, logo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \int d^4x n(x) \Phi &= \int d\tau \int d^4x \delta[x^\mu - z^\mu(\tau)] \Phi \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \Phi, \end{aligned} \quad (2.15)$$

com isso a ação (2.12) fica:

$$S = -mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau - \frac{1}{c} \int d^4x \left[\frac{1}{8\pi G} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + mn(x) \Phi \right]. \quad (2.16)$$

Variando a ação (2.16) com relação ao campo, é obtida a equação de movimento:

$$\frac{1}{4\pi Gc} \partial_\mu \partial^\mu \Phi = \frac{mn(x)}{c} \quad \longrightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu \Phi \equiv \square \Phi = 4\pi G\rho, \quad (2.17)$$

onde $\rho = mn(x)$.

A equação de movimento (2.17) tem seu limite clássico correto, resultando na equação de Poisson (2.1), e sua ação geradora 2.16 tem algumas características que sugerem a validade da teoria, tais propriedades são:

- É invariante de Lorentz;
- resulta em uma força sempre atrativa;
- gera equações de movimento independentes da massa, respeitando o princípio da equivalência [2].

Mesmo com algumas propriedades necessárias sendo satisfeitas, a teoria carece de generalização, pois o lado direito da equação (2.17) indica que a única fonte geradora do campo gravitacional é a densidade de massa.

As leis de conservação da física clássica surgem das simetrias de transformações. Assim, separa-se as transformações em espaciais (translação e rotação), gerando a conservação do momento e momento angular respectivamente, e temporal, gerando a conservação da energia. Por sua vez a teoria da relatividade, juntamente com as transformações de Lorentz unificam o espaço e o tempo num contínuo espaço-temporal. Desta maneira podemos englobar as leis de conservação em uma invariância por translação espaço-temporal[1].

Com a unificação das leis de conservação correspondentes, existe a necessidade de implementar um termo mais geral para a fonte na equação (2.17), logo a mesma deve ser escrita em termos do tensor de *energia-momento* $T_{\mu\nu}$. Como o único invariante (escalar) construído com o tensor $T_{\mu\nu}$ no espaço de Minkowski ($\eta_{\mu\nu}$) é o traço dado por $T \equiv T_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = T^\mu_\mu$, logo equação [2]:

$$\square \Phi = -\frac{4\pi G}{c^2} T. \quad (2.18)$$

Esta equação pode ser obtida da ação:

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{8\pi Gc} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \frac{\Phi T}{c^3} + L_{fonte} \right]. \quad (2.19)$$

Sendo o primeiro termo responsável pela energia cinética do campo gravitacional, o segundo

a interação da fonte com o campo e o terceiro a lagrangiana da fonte, que é independente do campo. A equação (2.19) define uma teoria escalar da gravidade que é invariante de Lorentz.

Mesmo com a generalização da fonte da teoria escalar do campo gravitacional, esta continua apresentando alguns problemas. Considerando a equação (2.18), temos que a fonte do campo gravitacional é o traço do tensor de *energia-momento*, porém esta teoria é falha se considerada uma fonte puramente eletromagnética, pois T do tensor eletromagnético é nulo. Assim, a teoria leva a conclusão de que fontes eletromagnéticas não serão afetadas por um campo gravitacional externo. Sabe-se que este fato é incorreto experimentalmente, devido o desvio comprovado da luz na presença de uma fonte de campo gravitacional [12].

As limitações da teoria de Nordström vem das restrições na definição do próprio espaço-tempo, mostrando que a teoria gravitacional só se reduz a teoria de Nordström para um sistema conformalmente cartesiano[1]. Tomando a ação em (2.10), e redefinindo o elemento de linha:

$$ds_{\Phi} = cd\tau \left(1 + \frac{\Phi}{c^2} \right). \quad (2.20)$$

Sendo $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$, logo:

$$\eta_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) \equiv \eta_{\mu\nu} \left[1 + \frac{\Phi(t, \mathbf{x})}{c^2} \right]^2 \quad (2.21)$$

Observa-se que a mudança feita no elemento de linha (2.21) devido a interação de uma partícula massiva com um campo gravitacional só foi possível pelo princípio da equivalência, pois o mesmo torna a massa apenas uma constante multiplicativa na ação 2.10. Concluímos que existe uma necessidade de uma formulação puramente geométrica da gravidade, onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico.

2.1.2 O Tensor métrico

Na teoria Newtoniana, uma partícula é livre se a mesma não está sujeita a nenhuma força, até mesmo da gravitacional. Porém do ponto de vista da teoria da gravitação relativística, uma partícula livre está sempre em queda livre, isto é, sujeita apenas ao campo gravitacional. Isso porque, na teoria relativística, a gravidade deixa de ser uma força, sendo compreendida como uma manifestação da geometria do espaço-tempo em questão. Assim, a geometria, dadas as devidas considerações, desempenha o papel de um campo. Esta noção nos permite abdicar, não só no caso gravitacional, da ideia de interação a distância, pois agora as partículas testes não sentirão mais as fontes diretamente, mas sim o seu campo que servira como um intermediário

[3].

Da descrição geométrica da gravidade, vem a necessidade de definir o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, sendo este um campo tensorial simétrico de tipo (0,2), cuja contração com os diferenciais de coordenadas define o intervalo invariante $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. Assim, o tensor métrico deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. $g_{\mu\nu}$ deve ser de classe C^2 , pois suas derivadas segundas devem existir e serem contínuas;
2. $\det g_{\mu\nu} = g \neq 0$, isto é, $g_{\mu\nu}$ é não singular;
3. $g_{\mu\nu}$ é simétrico, ou seja, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ [13].

Devido as propriedades de simetria listadas acima, o número de elementos independentes de $g_{\mu\nu}$ é inicialmente dado por:

$$n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (2.22)$$

Do ponto de vista físico, o tensor métrico tem diversas funções, sendo elas: fornecer a ideia de passado e futuro; determinar o menor caminho entre dois pontos (geodésica) em espaços com geometrias quaisquer, ou seja, a trajetória das partículas testes; substituir o campo gravitacional newtoniano; fornecer a noção de referencial localmente inercial; determinar causalidade, definindo a velocidade da luz como velocidade limite, dentre outras [14].

O tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$ dependente das coordenadas, pode surgir em diferentes contextos. Primeiramente, para a situação de um sistema de coordenadas não inercial, terá sua métrica dependente das coordenadas. Considerando o elemento de linha em coordenadas esféricas:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2. \quad (2.23)$$

Apesar da dependência explícita das coordenadas em (2.23), a mesma se reduz a forma cartesiana se considerada a mudança de coordenadas,

$$\begin{cases} x = r \text{sen} \phi \cos \theta \\ y = r \text{sen} \phi \text{sen} \theta \\ z = r \cos \theta. \end{cases} \quad (2.24)$$

ou seja, o espaço em questão continua sendo plano, só está sendo escrito por um sistema de coordenadas curvilíneas. De maneira geral, uma métrica que descreve um espaço genuinamente curvo, será aquela que não pode ser reduzida globalmente a forma cartesiana [2].

Para a construção de uma teoria gravitacional covariante, a métrica $g_{\mu\nu}$ deve se transformar como um tensor. Logo analisando o elemento de linha ds'^2 é:

$$ds'^2 = g'_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = ds^2 = g_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} \quad (2.25)$$

$$g'_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} dx'^{\mu} dx'^{\nu}.$$

Logo,

$$g'_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}. \quad (2.26)$$

Concluindo assim que $g_{\mu\nu}$ é um tensor do tipo (0, 2).

2.1.3 Geodésica e Derivada covariante

De maneira intuitiva, as curvas geodésicas são as "linhas mais retas possíveis" que podem ser traçadas numa geometria curva [15]. Estas, por sua vez, determinam o movimento de partículas materiais na influência de um campo gravitacional. Sua equação pode ser analisada como uma generalização da equação de força na gravidade de Newton [2]. Para encontrar as curvas geodésicas, considera-se a ação:

$$S = -m \int d\tau \quad \text{onde} \quad ds = cd\tau; \quad c = 1. \quad (2.27)$$

Sendo $d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$, sua variação é dada por:

$$2d\tau\delta(d\tau) = -[dx^{\mu} dx^{\nu} (\partial_{\alpha} g_{\mu\nu}) \delta x^{\alpha} + 2g_{\mu\nu} dx^{\mu} d(\delta x^{\nu})]. \quad (2.28)$$

Concluindo que:

$$\delta(d\tau) = - \left[\frac{1}{2} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} (\partial_{\alpha} g_{\mu\nu}) \delta x^{\alpha} + g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \right] d\tau. \quad (2.29)$$

Substituindo (2.29) em (2.27), integrando o segundo termo por partes e observando que $\delta x^{\mu} \rightarrow 0$, nos extremos τ_1 e τ_2 , resultando:

$$\delta S = m \int \left[\frac{1}{2} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} (\partial_{\alpha} g_{\mu\nu}) - \frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\alpha} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \right) \right] \delta x^{\alpha} d\tau, \quad (2.30)$$

aplicando o princípio de Hamilton $\delta S = 0$:

$$\frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\alpha} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \right) = \frac{1}{2} (\partial_{\alpha} g_{\mu\nu}) u^{\mu} u^{\nu}. \quad (2.31)$$

Realizando a regra do produto do lado esquerdo da equação e utilizando a simetria da métrica,

$$g_{\mu\alpha} \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{1}{2} u^\mu u^\nu (\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\mu}), \quad (2.32)$$

multiplicando ambos os lados da equação (2.32) por $g^{\nu\alpha}$ e notando que $g^{\nu\alpha} g_{\mu\alpha} = \delta_\mu^\nu$:

$$\frac{du^\nu}{d\tau} = -\frac{1}{2} g^{\nu\alpha} u^\mu u^\lambda (-\partial_\alpha g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\alpha\lambda} + \partial_\lambda g_{\mu\alpha}), \quad (2.33)$$

onde é definido o símbolo de Christoffel:

$$\Gamma_{\alpha\mu\lambda} \equiv \frac{1}{2} (-\partial_\alpha g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\alpha\lambda} + \partial_\lambda g_{\mu\alpha}). \quad (2.34)$$

Como $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu = g^{\nu\alpha} \Gamma_{\alpha\mu\lambda}$, é concluído que:

$$\frac{du^\nu}{d\tau} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu u^\mu u^\lambda = 0. \quad (2.35)$$

Por fim, esta é a equação da geodésica, que descreve o movimento livre de partículas no espaço-tempo, podendo representar tanto efeitos de curvatura gravitacional quanto efeitos puramente coordenados, dependendo da métrica considerada. Esta por sua vez, tem um limite clássico importante, que pode ser analisado considerando a métrica (2.21),

$$g_{00} = \eta_{00} \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)^2 = - \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)^2. \quad (2.36)$$

Expandindo o parêntese em (2.36), e observando que $c = 1$;

$$g_{00} \approx - \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \longrightarrow g_{00} \approx -(1 + 2\Phi) \quad \text{e} \quad g_{ij} \approx \delta_{ij}. \quad (2.37)$$

Logo fazendo as aproximações $u^0 \approx 1$, $d\tau \approx dt$, $u_i \approx u^i$ e considerando a métrica (2.37):

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &\approx \frac{1}{2} (\partial_i g_{00} u^0 u^0 + \partial_j g_{jk} u^j u^k) \\ &= \frac{1}{2} [-\partial_i (1 + 2\Phi) + (\partial_i \delta_{jk}) u^j u^k] \\ &= -\partial_i \Phi. \end{aligned} \quad (2.38)$$

A equação (2.38) resgata a equação clássica da gravitação newtoniana.

Na relatividade o entendimento de que as leis físicas devam ser covariantes leva a necessidade de que suas grandezas envolvidas devem se transformar como um tensor. Sabendo que as leis da natureza são geralmente escritas na forma de equações diferenciais, precisa-se encontrar uma expressão que generaliza a noção de derivada, pois a derivada ordinária conven-

cional de um vetor $\partial_\mu u^\nu$, não satisfaz as leis de transformações tensoriais, sendo dada por:

$$\begin{aligned}\partial'_\mu u'^\nu &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \partial_\alpha \left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} u^\beta \right) \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial u^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} + u^\beta \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \left(\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \\ &= \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \right) \partial_\alpha u^\beta + u^\beta \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \left(\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right).\end{aligned}\quad (2.39)$$

Para que a equação (2.39) se transforme como um tensor, o segundo termo deve se anular. Com isso, deve ser acrescentado um "termo de correção" para que assim, as leis de transformações tensoriais sejam satisfeitas. Definindo assim, a derivada covariante, dada por:

$$\nabla_\beta u^\alpha \equiv \partial_\beta u^\alpha + \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha u^\lambda, \quad (2.40)$$

onde $\Gamma_{\lambda\beta}^\alpha$ se transforma como:

$$\Gamma'_{\mu\beta}{}^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\theta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\beta} \Gamma_{\theta\gamma}{}^\nu - \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\beta} \left(\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\eta \partial x^\rho} \right). \quad (2.41)$$

A derivada covariante tem uma interpretação geométrica simples, pois a mesma surge da variação da direção dos vetores de base de um sistema de coordenadas de ponto a ponto. Como no exemplo de coordenadas curvilíneas, em que os vetores de base apesar de terem módulo constante, apresentam direções diferentes em diferentes pontos, fazendo com que um "termo de correção" seja acrescentado na derivada para que representar a variação dos próprios vetores de base. Em espaços planos existe sempre a possibilidade de escrever as coordenadas na forma cartesiana, algo que não é possível para sistemas genuinamente curvos, logo a derivada ordinária deve ser substituída pela derivada covariante quando o espaço possuir curvatura [2].

2.2 Curvatura do Espaço-Tempo

A ideia de curvatura pode ser dada em termos das propriedades do símbolo (conexão) de Christoffel associado a uma métrica euclidiana ou de Minkowski. Pois este apresenta uma série de propriedades que estão associadas a planicidade do espaço em questão. Portanto lista-se três características fundamentais que podem ser extraídas de espaços planos, sendo elas: o transporte paralelo de um vetor em torno de um circuito fechado deixa-o inalterado; as derivadas covariantes comutam entre si; as geodésicas inicialmente paralelas, permanecem paralelas, não existindo um desvio geodésico. Todos esses conceitos estão intimamente relacionados com o tensor de Riemann, que é derivado das conexões [14].

A forma de quantificar uma curvatura se dar por meio do tensor de Riemann ou de curvatura. Para demonstrar a forma explícita do mesmo, será considerada a não comutatividade da derivada covariante.

2.2.1 O tensor curvatura de Riemann

Tomando a expressão (2.40) da derivada covariante de um vetor, e aplicando novamente este operador:

$$\begin{aligned}\nabla_\beta(\nabla_\alpha A^\mu) &= \partial_\beta(\nabla_\alpha A^\mu) + \Gamma_{\gamma\beta}^\mu \nabla_\alpha A^\gamma - \Gamma_{\alpha\beta}^\theta \nabla_\theta A^\mu \\ &= \partial_\beta \partial_\alpha A^\mu + \partial_\beta(\Gamma_{\lambda\alpha}^\mu A^\lambda) + \Gamma_{\gamma\beta}^\mu \partial_\alpha A^\gamma - \Gamma_{\alpha\beta}^\theta \partial_\theta A^\mu + \Gamma_{\gamma\beta}^\mu \Gamma_{\lambda\alpha}^\gamma A^\lambda \\ &\quad - \Gamma_{\alpha\beta}^\theta \Gamma_{\lambda\theta}^\mu A^\lambda,\end{aligned}\tag{2.42}$$

fazendo a mudança nos índices $\beta \longleftrightarrow \alpha$ na equação (2.42) e subtraindo $\nabla_\beta(\nabla_\alpha A^\mu) - \nabla_\alpha(\nabla_\beta A^\mu)$:

$$\begin{aligned}\nabla_\beta(\nabla_\alpha A^\mu) - \nabla_\alpha(\nabla_\beta A^\mu) &= (\partial_\beta \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu) A^\lambda + \Gamma_{\gamma\beta}^\mu \Gamma_{\lambda\alpha}^\gamma - (\partial_\alpha + \Gamma_{\lambda\beta}^\mu) A^\lambda - \Gamma_{\gamma\alpha}^\mu \Gamma_{\lambda\beta}^\gamma \\ &= -(\partial_\alpha \Gamma_{\lambda\beta}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu + \Gamma_{\gamma\alpha}^\mu \Gamma_{\lambda\beta}^\gamma - \Gamma_{\gamma\beta}^\mu \Gamma_{\lambda\alpha}^\gamma) A^\lambda,\end{aligned}\tag{2.43}$$

definindo o tensor curvatura $R_{\lambda\alpha\beta}^\mu$:

$$R_{\lambda\alpha\beta}^\mu \equiv \partial_\alpha \Gamma_{\lambda\beta}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu + \Gamma_{\gamma\alpha}^\mu \Gamma_{\lambda\beta}^\gamma - \Gamma_{\gamma\beta}^\mu \Gamma_{\lambda\alpha}^\gamma,\tag{2.44}$$

logo a equação (2.43) fica:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] A^\lambda = \nabla_\alpha(\nabla_\beta A^\mu) - \nabla_\beta(\nabla_\alpha A^\mu) = R_{\lambda\alpha\beta}^\mu A^\lambda.\tag{2.45}$$

O tensor escrito em (2.44) descreve matematicamente se um espaço é verdadeiramente plano. Sabendo que $R_{\lambda\alpha\beta}^\mu = 0$ é uma equação tensorial, esta será verdadeira para qualquer sistema de coordenadas. O tensor de Riemann tem algumas propriedades importantes, como exemplo a simetria nos seus últimos índices α e β , que é fácil de ser visto com o sinal do comutador $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] = -[\nabla_\beta, \nabla_\alpha]$. Já a simetria entre seus dois primeiros índices é dado se considerarmos a derivada covariante da métrica $\nabla_\alpha g_{\mu\nu}$,

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] g_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\beta}^\gamma g_{\gamma\nu} + R_{\nu\alpha\beta}^\gamma g_{\gamma\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\nu\mu\alpha\beta} = 0,\tag{2.46}$$

logo $R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}$. Para analisar a simetria na troca dos pares de índices $\mu, \nu \longleftrightarrow \alpha, \beta$, deve-se escrever o tensor de Riemann em termos das derivadas da métrica, com a forma explícita

do símbolo de Christoffel definido em (2.34), dando:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha\partial_\nu g_{\mu\beta} + \partial_\beta\partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\beta\partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha\partial_\mu g_{\nu\beta}) + g_{\theta\lambda}(\Gamma_{\nu\alpha}^\theta\Gamma_{\mu\beta}^\lambda - \Gamma_{\nu\beta}^\theta\Gamma_{\mu\alpha}^\lambda), \quad (2.47)$$

da equação (2.47) é fácil ver que $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$ e a relação:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\beta\nu\alpha} + R_{\mu\alpha\beta\nu} = 0. \quad (2.48)$$

Desta forma as simetrias nos índices do tensor curvatura podem ser listadas como:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha} \\ R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta} \\ R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu} \\ R_{\mu[\nu\alpha\beta]} = 0. \end{array} \right. \quad (2.49)$$

De maneira geral, o tensor de Riemann tem N^4 componentes independentes (N é a dimensão do espaço) porém estas são reduzidas através das simetrias dadas nas equações (2.49), sendo o número de componentes independentes dadas por:

$$\frac{1}{2}M(M+1) - \frac{N!}{(N-4)!4!} = \frac{N^2(N^2-1)}{12}, \quad (2.50)$$

sendo o primeiro termo dado pelas simetrias da terceira equação de (2.49), onde $M = N(N-1)/2$ é dado pelas antissimetrias nos índices μ, ν e α, β . Já o segundo termo da equação (2.50) é dado pela combinatória dos índices devido a quarta equação de (2.49). Desta forma, sendo considerado o espaço-tempo, com $N = 4$, as simetrias reduzem o número de componentes independentes do tensor $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ de $4^4 = 256$ para 20, resultado da equação (2.50)[2].

Da contração do tensor de Riemann com a métrica podem ser obtidos também o tensor e escalar de Ricci,

$$R_{\nu\lambda} = g^{\mu\alpha}R_{\mu\nu\alpha\lambda} = R_{\nu\alpha\lambda}^\alpha = \partial_\alpha\Gamma_{\nu\lambda}^\alpha - \partial_\lambda\Gamma_{\nu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\theta\alpha}^\alpha\Gamma_{\nu\lambda}^\theta - \Gamma_{\theta\lambda}^\alpha\Gamma_{\nu\alpha}^\theta, \quad (2.51)$$

esta equação define o tensor de Ricci. Já o escalar de Ricci é a contração do tensor (2.51), ou seja:

$$R = g^{\nu\lambda}R_{\nu\lambda} = g^{\nu\mu}g^{\lambda\alpha}R_{\nu\lambda\mu\alpha}. \quad (2.52)$$

As duas quantidades em (2.51) e (2.52) têm uma importante relação que será utilizada na teoria de Einstein da gravitação. Assim, para obter esta relação, considera-se a identidade

de Bianchi:

$$\nabla_{\alpha}R_{\nu\theta\lambda}^{\mu} + \nabla_{\lambda}R_{\nu\alpha\theta}^{\mu} + \nabla_{\theta}R_{\nu\lambda\alpha}^{\mu} = 0, \quad (2.53)$$

utilizando as definição (2.51) e (2.52), é obtido a nova relação:

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha}R_{\nu\theta\lambda}^{\theta} - \nabla_{\lambda}R_{\nu\theta\alpha}^{\theta} + \nabla_{\theta}R_{\nu\lambda\alpha}^{\theta} &= \nabla_{\alpha}R_{\nu\lambda} - \nabla_{\lambda}R_{\nu\alpha} + \nabla_{\theta}R_{\nu\lambda\alpha}^{\theta} \\ &= \nabla_{\alpha}R_{\lambda}^{\lambda} - \nabla_{\lambda}R_{\alpha}^{\lambda} + \nabla_{\theta}R_{\alpha}^{\theta} \\ &= \nabla_{\alpha}R - 2\nabla_{\theta}R_{\alpha}^{\theta} \\ &= \nabla_{\theta} \left(R_{\alpha}^{\theta} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha}^{\theta}R \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.54)$$

definindo:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (2.55)$$

A expressão (2.55) define o tensor de Einstein, quantidade fundamental na descrição geométrica da gravitação.

2.3 Equações de Einstein

O procedimento de encontrar as equações de movimento já foi realizado quando desenvolvemos a teoria escalar da gravidade, onde primeiramente foi construído o princípio da ação para o sistema. Esta ação por sua vez era dividida em partes, sendo a primeira levando em conta somente os efeitos do campo sobre um sistema de partículas, este termo não continha informações que descrevessem a evolução do sistema como um todo, daí veio a necessidade de adicionar um termo responsável pela dinâmica do próprio campo, sendo este dependente do campo e de suas derivadas de primeira ordem.

Para a teoria geométrica da gravidade será feito um procedimento semelhante ao mencionado para o campo escalar, onde a simetria por transformação geral de coordenadas precisa ser mantida. Para isto, o elemento de volume d^4x é substituído por $\sqrt{-g}d^4x$, as derivadas ordinárias por derivadas covariantes e a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$, gerando a ação de um sistema material interagindo com um campo gravitacional, dada por:

$$S_m = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m(\phi, \nabla\phi, g_{\mu\nu}). \quad (2.56)$$

De maneira semelhante com o caso do campo escalar, deve existir um termo responsável por descrever a dinâmica do próprio campo. Para o caso de uma teoria geométrica da gravitação, a lagrangiana L_g deve ser função da própria métrica com sua derivada primeira

$\mathcal{L}_g = \mathcal{L}_g(g_{\mu\nu}, \partial_\alpha g_{\mu\nu})$. Porém esta suposição apresenta dificuldades, pois na consideração do referencial de Riemann ¹ ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $\partial_\alpha g_{\mu\nu} = 0$) o princípio de Hamilton ($\delta S = \delta S_m + \delta S_g = 0$) gera equações de movimento triviais. Desta forma na proposta da lagrangiana, podemos levar em consideração termos lineares da derivada segunda da métrica, logo a mesma terá a forma $\mathcal{L}_g = \mathcal{L}_g((g_{\mu\nu}, \partial_\alpha g_{\mu\nu}, \partial_\alpha^2 g_{\mu\nu}))$, onde os termos indesejados podem ser eliminados[2].

Como o tensor de Riemann tem dependência linear das derivadas segundas da métrica, um escalar construído pelo mesmo também irá satisfazer esta condição. Sabendo que a teoria relativística exige a covariância do princípio da ação, sugere-se que a lagrangiana do campo gravitacional seja escrita em termos de um escalar construído a partir do tensor curvatura, sendo que tal escalar já foi definido na equação (2.52), o escalar de Ricci. De forma geral, o escalar de Ricci pode ser adicionado e multiplicado por uma constante, desta forma a ação do campo gravitacional terá uma lagrangiana da forma:

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{2\kappa} \left(R - \frac{2\Lambda}{c^2} \right), \quad (2.57)$$

onde Λ é a constante cosmológica e κ uma constante relacionada com a constante gravitacional G . Por simplificação dos cálculos na obtenção das equações de movimento, considera-se $\Lambda = 0$, com isso:

$$\begin{aligned} 2\kappa\mathcal{L}_g = R = g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2}(g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} + g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}R_{\alpha\beta\delta\gamma}) \\ &= \frac{1}{2}(g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma})R_{\alpha\beta\gamma\delta}, \end{aligned} \quad (2.58)$$

definindo o tensor:

$$Q^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \frac{1}{2}(g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}), \quad (2.59)$$

logo:

$$2\kappa\mathcal{L}_g = Q^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (2.60)$$

onde o tensor $Q^{\alpha\beta\gamma\delta}$ tem todas as simetrias do tensor curvatura e divergente nulo em relação a qualquer índice. Para analisar esta equação, escreve-se o tensor curvatura na forma $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$, com o intuito de escrever o mesmo em termo dos símbolos de Christoffel. Levando em conta

¹Um referencial de Riemann é um sistema de coordenadas localmente inercial, construído em torno de um ponto (ou de uma linha mundo), usando coordenadas normais de Riemann.

também a antissimetria de $Q^{\alpha\beta\gamma\delta}$,

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}Q_{\alpha}^{\beta\gamma\delta}R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} &= \sqrt{-g}Q_{\alpha}^{\beta\gamma\delta}\frac{1}{2}(R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} - R^{\alpha}_{\beta\delta\gamma}) \\ &= 2\sqrt{-g}Q_{\alpha}^{\beta\gamma\delta}\Gamma^{\alpha}_{\epsilon\gamma}\Gamma^{\epsilon}_{\beta\delta} + 2\partial_{\gamma}(\sqrt{-g}Q_{\alpha}^{\beta\gamma\delta}\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}) \\ &\quad - 2\sqrt{-g}\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}\partial_{\gamma}Q_{\alpha}^{\beta\gamma\delta} - 2\sqrt{-g}\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}\Gamma^{\epsilon}_{\gamma\epsilon}Q_{\alpha}^{\beta\gamma\delta}.\end{aligned}\quad (2.61)$$

Sabendo que:

$$\partial_{\gamma}(\sqrt{-g}) = \frac{-1}{2\sqrt{-g}}\partial_{\gamma}g = \sqrt{-g}\Gamma^{\epsilon}_{\gamma\epsilon}\quad (2.62)$$

e

$$\partial_{\gamma}Q_{\alpha}^{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\epsilon}_{\gamma\alpha}Q_{\epsilon}^{\beta\gamma\delta} - \Gamma^{\beta}_{\gamma\epsilon}Q_{\alpha}^{\epsilon\gamma\delta} - \Gamma^{\gamma}_{\gamma\alpha}Q_{\alpha}^{\beta\epsilon\delta},\quad (2.63)$$

logo a equação (2.61) fica:

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}Q_{\alpha}^{\beta\gamma\delta}R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} &= 2\sqrt{-g}Q_{\alpha}^{\beta\gamma\delta}\Gamma^{\alpha}_{\epsilon\gamma}\Gamma^{\epsilon}_{\beta\delta} + 2\partial_{\gamma}(\sqrt{-g}Q_{\alpha}^{\beta\gamma\delta}\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}) \\ &\equiv \sqrt{-g}\mathcal{L}_{Quadratica} + \mathcal{L}_{Superficie}.\end{aligned}\quad (2.64)$$

Concluindo que a lagrangiana do campo gravitacional pode ser separado em dois termos, um termo quadrático nas derivadas primeira da métrica e um termo de superfície que é um divergente total. Com isso a ação total da gravitação é dada por:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g}R + \int d^4x \sqrt{-g}\mathcal{L}_m - \int d^4x \mathcal{L}_S.\quad (2.65)$$

Para encontrar a equação de movimento, primeiro analisa-se primeiro o termo quadrático, onde essa análise é feita de maneira indireta,

$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{-g}L_Q) &= \delta(\sqrt{-g}g^{\beta\theta}R_{\beta\theta}) - \delta\mathcal{L}_{Superficie} \\ &= \delta(\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}\delta(g^{\beta\theta})R_{\beta\theta} + \sqrt{-g}g^{\beta\theta}\delta(R_{\beta\theta}) - \delta\mathcal{L}_{Superficie},\end{aligned}\quad (2.66)$$

observando que:

$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{-g}) &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g; \quad \text{onde} \quad \delta g = gg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu},\end{aligned}\quad (2.67)$$

logo a equação (2.66) pode ser escrita na forma:

$$\delta(\sqrt{-g}L_Q) = \left(R_{\beta\theta} - \frac{1}{2}g_{\beta\theta}R\right)\sqrt{-g}\delta g^{\beta\theta} + \sqrt{-g}g^{\beta\theta}\delta R_{\beta\theta} - \delta\mathcal{L}_{Superficie},\quad (2.68)$$

onde o termo entre parênteses já foi definido em (2.55), com isso a equação (2.68) fica:

$$\delta(\sqrt{-g}L_Q) = \sqrt{-g}G_{\beta\theta}\delta g^{\beta\theta} + \sqrt{-g}g^{\beta\theta}\delta R_{\beta\theta} - \delta L_{Superficie}. \quad (2.69)$$

Para calcular o segundo termo da equação (2.69), será levado em conta um referencial localmente inercial, ou seja, $\Gamma_{\nu\theta}^{\mu} = 0$ e $g_{\mu\nu} = constante$. Com isso a definição do tensor de Ricci (2.51) fica:

$$R_{\beta\theta} = \partial_{\mu}\Gamma_{\beta\theta}^{\mu} - \partial_{\theta}\Gamma_{\beta\mu}^{\mu}, \quad (2.70)$$

logo:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}g^{\beta\theta}\delta R_{\beta\theta} &= \sqrt{-g}g^{\beta\theta}\delta(\partial_{\mu}\Gamma_{\beta\theta}^{\mu} - \Gamma_{\beta\mu}^{\mu}) \\ &= \sqrt{-g}\partial_{\mu}(g^{\beta\theta}\delta\Gamma_{\beta\theta}^{\mu} - g^{\beta\mu}\delta\Gamma_{\beta\theta}^{\theta}). \end{aligned} \quad (2.71)$$

É importante notar que a equação (2.71) depende da variação dos símbolos de Christoffel $\delta\Gamma_{\nu\theta}^{\mu}$. Esta quantidade por sua vez tem um caráter tensorial, diferentemente do próprio $\Gamma_{\nu\theta}^{\mu}$. Observando que o termo entre parênteses pode ser desenvolvido da forma:

$$(g^{\beta\theta}\delta\Gamma_{\beta\theta}^{\mu} - g^{\beta\mu}\delta\Gamma_{\beta\theta}^{\theta}) = g^{\beta\theta}(\delta_{\alpha}^{\mu}\delta_{\theta}^{\gamma} - \delta_{\theta}^{\mu}\delta_{\alpha}^{\gamma})\delta\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = 2g^{\beta\theta}Q_{\alpha\theta}^{\mu\gamma}\delta\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}, \quad (2.72)$$

logo o segundo termo da equação (2.69) pode ser escrita como:

$$\sqrt{-g}g^{\beta\theta}\delta R_{\beta\theta} = 2\partial_{\mu}(\sqrt{-g}g^{\beta\theta}Q_{\alpha\theta}^{\mu\gamma}\delta\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}). \quad (2.73)$$

Para analisar a lagrangiana de superfície no terceiro termo da equação (2.69) é necessário retomar o termo dado na equação (2.64),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Superficie} &= 2\partial_{\gamma}(\sqrt{-g}Q_{\alpha}^{\beta\gamma\delta}\Gamma_{\beta\delta}^{\alpha}) \\ \delta\mathcal{L}_{Superficie} &= 2\partial[Q_{\alpha}^{\beta\gamma\delta}(\sqrt{-g}g^{\beta\theta}\delta\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}\delta(\sqrt{-g}g^{\beta\theta}))], \end{aligned} \quad (2.74)$$

onde $Q_{\alpha}^{\beta\gamma\delta}$ é constante e o termo $\delta(\sqrt{-g}g^{\beta\theta})$ precisa ser calculado, logo:

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}g^{\beta\theta}) &= \delta(\sqrt{-g})g^{\beta\theta} + \sqrt{-g}\delta g^{\beta\theta} \\ &= \sqrt{-g}\delta g^{\beta\theta} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\beta\theta}\delta g^{\beta\theta} \\ &= \sqrt{-g}(\delta_{\mu}^{\beta}\delta_{\mu}^{\theta} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\beta\theta})\delta g^{\mu\nu} \\ &= \sqrt{-g}B_{\mu\nu}^{\beta\theta}\delta g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

onde foi definido a quantidade

$$B_{\mu\nu}^{\beta\theta} \equiv (\delta_{\mu}^{\beta} \delta_{\nu}^{\theta} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\beta\theta}), \quad (2.76)$$

com isso o termo de superfície (2.74) fica:

$$\delta L_{Superfície} = 2\partial_{\mu} [\sqrt{-g} Q_{\alpha\theta}^{\mu\gamma} g^{\beta\theta} \delta\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \sqrt{-g} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} Q_{\alpha\theta}^{\mu\gamma} B_{\lambda\nu}^{\beta\theta} \delta g^{\lambda\nu}], \quad (2.77)$$

observando que o primeiro termo da equação (2.77) cancela-se com (2.73), na substituição destes na ação quadrática (2.69). Por simplificação define-se:

$$M_{\lambda\nu}^{\mu} \equiv 2\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} Q_{\alpha\theta}^{\mu\gamma} B_{\lambda\nu}^{\beta\theta}, \quad (2.78)$$

logo a variação da lagrangiana quadrática fica:

$$\delta(\sqrt{-g}L_Q) = \sqrt{-g}G_{\beta\theta}\delta g^{\beta\theta} - \partial_{\mu}[\sqrt{-g}M_{\lambda\nu}^{\mu}\delta g^{\lambda\nu}], \quad (2.79)$$

com isso o princípio da ação para a ação (2.79) resulta:

$$\delta S_Q = \frac{1}{2\kappa} \left[\int_V d^4x \sqrt{-g} G_{\beta\theta} \delta g^{\beta\theta} - \int_V d^4x \partial_{\mu} (\sqrt{-g} M_{\lambda\nu}^{\mu} \delta g^{\lambda\nu}) \right]. \quad (2.80)$$

Utilizando o teorema da divergência no segundo termo desta equação, onde a métrica é $g_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu}$ na superfície ∂V e o vetor normal é dado por n_{μ} , logo:

$$\delta S_Q = \frac{1}{2\kappa} \left[\int_V d^4x \sqrt{-g} G_{\beta\theta} \delta g^{\beta\theta} - \int_{\partial V} d^3x \sqrt{h} (n_{\mu} M_{\beta\theta}^{\mu}) g^{\beta\theta} \right]. \quad (2.81)$$

Sendo $\delta g^{\beta\theta} = 0$ na superfície, concluindo

$$\delta S_Q = \frac{1}{2\kappa} \int_V d^4x \sqrt{-g} G_{\beta\theta} \delta g^{\beta\theta}. \quad (2.82)$$

Para a análise da ação total, ainda falta a proposta de uma ação para a matéria. Esta por sua vez será dado em termos do tensor energia-momento da matéria. Esta proposição corrige as incoerências encontradas na teoria escalar da gravidade, logo:

$$\delta S \equiv -\frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.83)$$

com isso a equação de movimento é dada por:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int_V d^4x \sqrt{-g} \left(G_{\mu\nu} - \frac{\kappa}{c} T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} = 0, \quad (2.84)$$

concluindo que:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{\kappa}{c}T_{\mu\nu}. \quad (2.85)$$

Esta é a equação de campo de Einstein, relacionando a geometria do espaço através dos termos do lado esquerdo da equação, com as fontes de energia e momento.

2.4 Solução esfericamente simétrica

Em 1916 poucos meses após Einstein publicar sua teoria da gravitação, Karl Schwarzschild encontrou sua primeira solução exata [3]. A solução de Schwarzschild tem características específicas da fonte, como a simetria esférica tornando a mesma a mais simples das soluções da equação de Einstein. Para encontrar esta solução, leva-se em conta o elemento de linha simetricamente esférico na forma:

$$ds^2 = -A(\vec{r})dt^2 + B(\vec{r})dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (2.86)$$

onde os coeficientes A e B serão calculados. Por simplificação as componentes do tensor de Ricci referentes a métrica (2.86), serão calculadas através da equação de Euler-Lagrange (lembrando que as componentes do tensor de Ricci, podem ser obtidas através das derivadas explícitas da métrica):

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial x^\mu} = 0, \quad (2.87)$$

onde $L^2 = -g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$, pois a lagrangiana quadrada leva a mesma equação geodésica que L , desde que τ seja um parâmetro afim [2]. Utilizando a métrica (2.86),

$$\mathcal{L}^2 = -g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = A\dot{t}^2 - B\dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \text{sen}^2\theta\dot{\phi}^2). \quad (2.88)$$

Substituindo (2.88) em (2.89) e comparando com a equação geodésica $\ddot{x}^\mu = -\Gamma_{\beta\gamma}^\mu\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma$, onde $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, e $x^3 = \phi$.

- Para $\mu = 0 \rightarrow x^0 = t$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}[A(r)\dot{t}] &= \frac{dA}{d\tau}\frac{dr}{d\tau}\dot{t} + A(r)\ddot{t} \\ &= A'\dot{r}\dot{t} + A\ddot{t}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

logo:

$$\ddot{t} = -\frac{A'}{A}\dot{t}\dot{r}, \quad (2.90)$$

comparando com a curva geodésica:

$$\ddot{i} = -\frac{A'}{A}i\dot{r}, \quad \ddot{x}^\mu = -\Gamma_{\beta\gamma}^\mu \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma, \quad (2.91)$$

$\mu = 0$, $\beta = t, r$ e $\gamma = r, t$, ou seja:

$$\frac{A'}{A}i\dot{r} = 2\Gamma_{tr}^t i\dot{r} \quad \longrightarrow \quad \Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{A'}{2A}. \quad (2.92)$$

• Para $\mu = 1 \rightarrow x^1 = r$:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial r} = \frac{d}{d\tau}(2B\dot{r}) - (A'\dot{t}^2 - B'\dot{r}^2 - 2r\dot{\theta}^2 - 2rsen^2\theta\dot{\phi}^2) = 0, \quad (2.93)$$

logo:

$$\ddot{r} = -\frac{B'}{2B}\dot{r}^2 - \frac{A'}{2B} + \frac{r}{B}\dot{\theta}^2 + \frac{rsen^2\theta}{B}\dot{\phi}^2, \quad (2.94)$$

comparando com a geodésica:

$$\ddot{r} = -\Gamma_{\alpha\beta}^r \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = -\Gamma_{tt}^r \dot{t}^2 - \Gamma_{rr}^r \dot{r}^2 - \Gamma_{\theta\theta}^r \dot{\theta}^2 - \Gamma_{\phi\phi}^r \dot{\phi}^2 - \Gamma_{tr}^r \dot{t}\dot{r}, \quad (2.95)$$

os símbolos de Christoffel são:

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{A'}{2B}; \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{B'}{2B}; \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{B} \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{rsen^2\theta}{B}. \quad (2.96)$$

• Para $\mu = 2 \rightarrow x^2 = \theta$:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial \theta} = \frac{d}{d\tau}(2r^2\dot{\theta}) - 2r^2sen\theta cos\theta\dot{\phi}^2 = 0, \quad (2.97)$$

$$\ddot{\theta} = sen\theta cos\theta\dot{\phi}^2 - \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta}. \quad (2.98)$$

Sendo a equação geodésica:

$$\ddot{\theta} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\theta \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = -\Gamma_{\phi\phi}^\theta \dot{\phi}^2 - 2\Gamma_{\theta r}^\theta \dot{r}\dot{\theta}, \quad (2.99)$$

concluindo que:

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -sen\theta cos\theta \quad e \quad \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, \quad (2.100)$$

• Para $\mu = 3 \rightarrow x^3 = \phi$:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial \phi} = \frac{d}{d\tau}(2r^2sen^2\theta\dot{\phi}) = 0, \quad (2.101)$$

logo:

$$\ddot{\phi} = -\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} - 2cotg\theta\dot{\theta}\dot{\phi}, \quad (2.102)$$

como:

$$\ddot{\phi} = -\Gamma_{\alpha\beta}^{\phi} \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} = -2\Gamma_{r\phi}^{\phi} \dot{r} \dot{\phi} - 2\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} \dot{\theta} \dot{\phi}, \quad (2.103)$$

concluindo que:

$$\Gamma_{r\phi}^{\phi} = \frac{1}{r} \quad \text{e} \quad \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \cotg\theta. \quad (2.104)$$

De posse dos símbolos de Christoffel em (2.92), (2.96), (2.100) e (2.104) serão calculados os tensores de Ricci. Devido as simetrias espaciais $\theta \rightarrow -\theta$, $\phi \rightarrow -\phi$, pois o sistema em análise tem simetria esférica, e o fato da métrica ser estática, provocando uma simetria temporal, as componentes cruzadas do tensor de Ricci são nulas,

$$R_{rt} = R_{r\theta} = R_{r\phi} = R_{t\theta} = R_{t\phi} = R_{\theta\phi} = 0. \quad (2.105)$$

Com o intuito de mostrar que as componentes angulares do tensor de Ricci $R_{\theta\theta}$ e $R_{\phi\phi}$ não são independentes, faz-se uma mudança de variável $(\theta, \phi) \rightarrow (\theta', \phi')$ na 2-esfera unitária, onde seu elemento de linha será dado por:

$$d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2 = \left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial\theta'} \right)^2 + \text{sen}^2\theta \left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta'} \right)^2 \right] d\theta'^2 + \dots, \quad (2.106)$$

como o elemento de linha é invariante:

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial\theta'} \right)^2 + \text{sen}^2\theta \left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta'} \right)^2 = 1. \quad (2.107)$$

Por outro lado, lembrando da lei de transformação do tensor de Ricci;

$$R'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} R_{\mu\nu}$$

$$R_{\theta'\theta'} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial\theta'} \right)^2 R_{\theta\theta} + 2 \left(\frac{\partial\theta}{\partial\theta'} \right) \left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta'} \right) R_{\theta\phi} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta'} \right)^2 R_{\phi\phi}. \quad (2.108)$$

Como o termo cruzado é nulo, tem-se:

$$R_{\theta'\theta'} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial\theta'} \right)^2 R_{\theta\theta} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta'} \right)^2 R_{\phi\phi}, \quad (2.109)$$

substituindo a equação (2.107) em (2.109) e utilizando o fato de que $R_{\theta'\theta'} = R_{\theta\theta}$:

$$R_{\theta\theta} = \left[1 - \text{sen}^2\theta \left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta'} \right)^2 \right] R_{\theta\theta} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta'} \right)^2 R_{\phi\phi}, \quad (2.110)$$

$$(R_{\phi\phi} - \text{sen}^2\theta R_{\theta\theta}) \left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta'} \right)^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad R_{\phi\phi} = \text{sen}^2\theta R_{\theta\theta}. \quad (2.111)$$

Com esse resultado, apenas as componentes R_{tt} , $R_{\theta\theta}$ e R_{rr} precisam ser calculadas. Tomando a definição do tensor de Ricci em (2.52) e utilizando os valores dos símbolos de Christoffel já calculados,

- Calculando R_{tt} :

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= \partial_\alpha \Gamma_{tt}^\alpha - \partial_t \Gamma_{t\alpha}^\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{tt}^\beta - \Gamma_{t\beta}^\alpha \Gamma_{t\alpha}^\beta \\
&= \partial_r \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{tt}^r - \Gamma_{tt}^r \Gamma_{tr}^r \\
&= \partial_r \Gamma_{tt}^r + (\Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{\phi r}^\phi - \Gamma_{tr}^r) \Gamma_{tt}^r \\
&= \partial \left(\frac{A'}{2B} \right) + \left(\frac{B'}{2B} + \frac{2}{r} - \frac{A'}{2a} \right) \frac{A'}{2B} \\
&= \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{rB}.
\end{aligned} \tag{2.112}$$

- Calculando R_{rr} :

$$\begin{aligned}
R_{rr} &= \partial_\alpha \Gamma_{rr}^\alpha - \partial_r \Gamma_{r\alpha}^\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{rr}^\beta - \Gamma_{r\beta}^\alpha \Gamma_{r\alpha}^\beta \\
&= -\partial_r \Gamma_{rt}^t - \partial_r \Gamma_{r\theta}^\theta - \partial_r \Gamma_{r\phi}^\phi + \Gamma_{rt}^t (\Gamma_{rr}^r - \Gamma_{rt}^t) + \Gamma_{rr}^r (\Gamma_{r\theta}^\theta + \Gamma_{r\phi}^\phi) \\
&\quad - (\Gamma_{r\theta}^\theta)^2 - (\Gamma_{r\phi}^\phi)^2 \\
&= -\partial_r \left(\frac{A'}{2A} \right) - \partial_r \left(\frac{2}{r} \right) + \frac{A'}{2A} \left(\frac{B'}{2B} - \frac{A'}{2A} \right) + \frac{B'}{rB} - \frac{2}{r^2} \\
&= -\frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{B'}{rB}.
\end{aligned} \tag{2.113}$$

- Calculando $R_{\theta\theta}$:

$$\begin{aligned}
R_{\theta\theta} &= \partial_\alpha \Gamma_{\theta\theta}^\alpha - \partial_\theta \Gamma_{\theta\alpha}^\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{\theta\theta}^\beta - \Gamma_{\theta\beta}^\alpha \Gamma_{\theta\alpha}^\beta \\
&= \partial_r \Gamma_{\theta\theta}^r - \partial_\theta \Gamma_{\theta\phi}^\phi + (\Gamma_{tr}^t + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\phi r}^\phi - \Gamma_{\theta r}^\theta) \Gamma_{\theta\theta}^r - (\Gamma_{\theta\phi}^\phi)^2 \\
&= \partial_r \left(\frac{r}{B} \right) - \partial_\theta (\cot g \theta) - \left(\frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} \right) \frac{r}{B} - \cot g^2 \theta \\
&= 1 - \frac{1}{B} - \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right).
\end{aligned} \tag{2.114}$$

O resultado para $R_{\phi\phi}$ é facilmente obtido com a relação (2.111). Para a região externa a uma fonte esférica de raio R_0 , temos vácuo, logo $T_{\mu\nu} = 0$. Assim, as equações de Einstein no vácuo reduzem-se a $G_{\mu\nu} = 0$, que por sua vez, implica em $R_{\mu\nu} = 0$. Desta forma, podemos calcular,

$$BR_{tt} + AR_{rr} = \frac{1}{rB} (A'B + B'A) = \frac{1}{rB} \frac{d}{dr} (AB), \tag{2.115}$$

como esse resultado tem que ser nulo, $AB = \text{constante}$. Na condição $r \rightarrow \infty$, o espaço tempo tem que ser praticamente plano, isso requer que as funções $A, B \rightarrow 1$, com isso:

$$B(r) = \frac{1}{A(r)}. \quad (2.116)$$

Da equação de campo, sabemos que $R_{\theta\theta} = 0$, com isso substituindo a equação (2.116) em (2.114) e igualando a zero:

$$1 - A - \frac{rA}{2} \left[\frac{A'}{A} - A \left(-\frac{A'}{A^2} \right) \right] = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dA}{dr} = \frac{1 - A}{r}, \quad (2.117)$$

resolvendo esta equação:

$$A(r) = 1 + \frac{K}{r}, \quad (2.118)$$

onde K é uma constante. Sabemos que no limite de campo fraco $g_{00} = -(1 - 2GM/r)$, a constante K toma o valor $K = -2GM$, concluindo que a métrica (2.86) tem a forma:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.119)$$

Esta é a solução de Schwarzschild da equação de campo de Einstein.

Apesar da solução (2.119) ter sido baseada em coeficientes estacionários, ou seja, sem dependência temporal, existe um teorema que garante que tal solução também é válida para fontes esfericamente simétricas dependentes do tempo, este é o teorema de Birkoff [2].

2.5 Buracos de Minhoca de Morris-Thorne

Em 1988 Michael S. Morris e Kip S. Thorne publicaram um dos artigos mais influentes que abordam soluções exatas das equações de campo de Einstein, o mesmo é intitulado “Wormholes in Spacetime and Their Use for Interstellar Travel: A Tool for Teaching General Relativity”, e representa um modelo matemático simples para se estudar buracos de minhoca atravessáveis [16].

Desta forma, sabemos que buracos de minhoca atravessáveis são soluções matemáticas válidas das equações de Einstein, onde tais soluções conectam duas regiões distintas do espaço-tempo. Podemos ter duas formas diferentes de buracos de minhoca atravessáveis, onde o primeiro conecta dois “universos” distintos e assintoticamente planos, já o outro conecta regiões diferentes do mesmo universo. Destacando que ambas as situações são descritas pelas mesmas soluções das equações de Einstein.

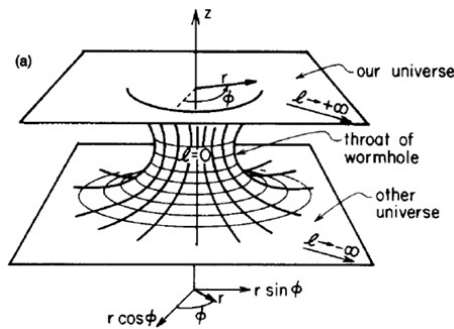


Figura 1: Buraco de minhoca conectando duas regiões de universos distintos.
Fonte: Morris e Thorne, 1988.

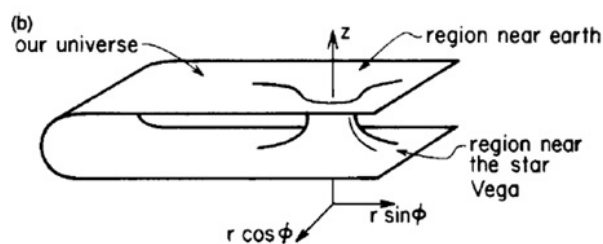


Figura 2: Buraco de minhoca conectando regiões do mesmo universo.
Fonte: Morris e Thorne, 1988.

Mesmo que um dos objetivos principais do trabalho tenha sido a busca por uma ferramenta pedagógica para o ensino dos conceitos fundamentais da teoria gravitacional de Einstein, o mesmo apresenta um grau de rigor matemático e conceitual que o tornou referência notável da área. Até então, muitos modelos de buracos de minhoca (como o tipo Einstein–Rosen) apresentavam uma estrutura instável, colapsando rapidamente ou apresentando horizonte de eventos. Portanto, tais soluções eram caracterizadas por serem buracos de minhoca não atravessáveis.

Assim, Morris e Thorne propuseram uma série de critérios que deveriam ser seguidos para que tais soluções fossem atravessáveis. No total, nove critérios foram enumerados pelos autores, porém alguns deles estão relacionados a travessia feita por seres humanos (ou outro ser vivo), que apresentam limitações fisiológicas, mas não necessariamente precisam ser seguidas para que os buracos de minhoca sejam considerados atravessáveis.

Os critérios que serão considerados neste trabalho, serão aqueles que caracterizam a travessia do ponto de vista matemático, desconsiderando os detalhes para a viagem humana. Com esse propósito, considera-se um *ansatz* da métrica que preserve a simetria esférica, a mesma seja estática, a ausência de horizonte de eventos e que a travessia apresente: tempo próprio finito e que as forças de maré sejam mantidas pequenas. A forma geral da métrica para

um buraco de minhoca que apresente essas características é dada por,

$$ds^2 = -c^2 e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.120)$$

onde $\Phi(r)$ é a função de *redshift*, pois está ligada a propriedades causais e ao efeito Doppler. Já a função $b(r)$ está ligada a geometria espacial do buraco de minhoca. Para determinar as funções arbitrárias $\Phi(r)$ e $b(r)$, precisamos das equações de Einstein. Seguindo o mesmo procedimento da seção 2.4, podemos encontrar os símbolos de Christoffel pela definição (2.34) ou pelo o método da equação de Euler-Lagrange. Com isso, os símbolos de Christoffel da métrica (2.120) são dados por:

$$\begin{aligned} \Gamma_{r\theta}^t &= \Phi'(r), \quad \Gamma_{tt}^r = c^2 e^{2\Phi(r)} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \Phi'(r), \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{b(r) - r b'(r)}{2b(r)r - 2r^2}, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\cos \theta \sin \theta, \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot \theta. \end{aligned} \quad (2.121)$$

Da definição do tensor de Riemman em (2.51), calcula-se, a componente R_{rtr}^t ,

$$\begin{aligned} R_{rtr}^t &= \partial_t \Gamma_{rr}^t - \partial_r \Gamma_{rt}^t + \Gamma_{rt}^t \Gamma_{rr}^r - (\Gamma_{tr}^t)^2 \\ R_{rtr}^t &= -\Phi'' + \frac{(b'r - b)}{2r(r - b)} \Phi' - (\Phi')^2. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Pelo mesmo procedimento, utilizando a definição (2.51) e substituindo os símbolos de Christoffel (2.121), obtemos as demais componentes,

$$\begin{aligned} R_{\theta t \theta}^t &= -r\Phi'(1 - b/r), \\ R_{\phi t \phi}^t &= -r\Phi'(1 - b/r) \sin^2 \theta, \\ R_{\theta r \theta}^r &= \frac{b'r - b}{2r}, \\ R_{\phi r \phi}^r &= \frac{(b'r - b) \sin^2 \theta}{2r}, \\ R_{\phi \theta \phi}^\theta &= \left(\frac{b}{r}\right) \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Com o intuito de simplificar os cálculos em relação às quantidades geométricas de interesse, é adequado definir um referencial composto por um conjunto de vetores de base ortonormais, correspondentes ao referencial próprio de observadores estáticos (tetradas). Nesse referencial, os observadores permanecem em repouso em relação às coordenadas espaciais (r, θ, ϕ) . Inici-

almente, as quantidades em (2.123) foram calculadas na base,

$$\Delta s = c\Delta t \mathbf{e}_t + \Delta r \mathbf{e}_r + \Delta\theta \mathbf{e}_\theta + \Delta\phi \mathbf{e}_\phi. \quad (2.124)$$

Com objetivo de obter as quantidades físicas locais, introduz-se então uma base ortonormal $\{\mathbf{e}_{\hat{t}}, \mathbf{e}_{\hat{r}}, \mathbf{e}_{\hat{\theta}}, \mathbf{e}_{\hat{\phi}}\}$, definida de modo que o tensor métrico assuma a forma da métrica de Minkowski local. Desta forma, a relação entre a nova base e a antiga é dada por:

$$\mathbf{e}_{\hat{t}} = e^{-\Phi} \mathbf{e}_t, \quad \mathbf{e}_{\hat{r}} = (1 - b/r)^{1/2} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_{\hat{\theta}} = r^{-1} \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{e}_{\hat{\phi}} = (r \sin \theta)^{-1} \mathbf{e}_\phi, \quad (2.125)$$

onde nessa base ortonormal, os coeficientes métricos tornam-se,

$$g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \mathbf{e}_{\hat{\alpha}} \cdot \mathbf{e}_{\hat{\beta}} = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.126)$$

Reescrevendo as componente (2.123) na base local através das transformações $R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}} = e_{\hat{t}}^t e_{\hat{r}}^r e_{\hat{t}}^t e_{\hat{r}}^r R_{trtr}$, onde utiliza-se (2.125). Logo são obtidas as componentes do tensor de Riemman,

$$R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}}^{\hat{t}} = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \left[\Phi''(r) + (\Phi'(r))^2 - \frac{\Phi'(r) b'(r) r - b(r)}{2 r(r-b(r))} \right] \quad (2.127)$$

$$R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}}^{\hat{t}} = R_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}}^{\hat{t}} = -\frac{1}{r} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \Phi'(r) \quad (2.128)$$

$$R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}}^{\hat{r}} = R_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}}^{\hat{r}} = \frac{1}{2r^3} [b'(r)r - b(r)] \quad (2.129)$$

$$R_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}}^{\hat{\theta}} = \frac{b(r)}{r^3}. \quad (2.130)$$

Pela definição do tensor de Ricci $R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = R_{\hat{\mu}\hat{\alpha}\hat{\nu}}^{\hat{\alpha}}$, temos:

$$R_{\hat{t}\hat{t}} = R_{\hat{t}\hat{t}\hat{t}}^{\hat{t}} + R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}}^{\hat{r}} + R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}}^{\hat{\theta}} + R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}}^{\hat{\phi}}$$

$$R_{\hat{t}\hat{t}} = 2(1 - b/r)\Phi'/r - (1 - b/r) \left\{ -\Phi'' + \frac{b'r - b}{2r(r-b)}\Phi' - (\Phi')^2 \right\}, \quad (2.131)$$

e as demais componentes são dadas por,

$$R_{\hat{r}\hat{r}} = \frac{b'r - b}{r} + (1 - b/r) \left\{ -\Phi'' + \frac{b'r - b}{2r(r-b)}\Phi' - (\Phi')^2 \right\}, \quad (2.132)$$

$$R_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = R_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = -(1 - b/r)\Phi'/r + \frac{b'r - b}{2r^3}. \quad (2.133)$$

Por fim, o escalar de Ricci calculado no referencial local é dado por $R = g^{\hat{\mu}\hat{\nu}}R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \eta^{\hat{\mu}\hat{\nu}}R_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$,

$$R = \eta^{\hat{t}\hat{t}}R_{\hat{t}\hat{t}} + \eta^{\hat{r}\hat{r}}R_{\hat{r}\hat{r}} + \eta^{\hat{\theta}\hat{\theta}}R_{\hat{\theta}\hat{\theta}} + \eta^{\hat{\phi}\hat{\phi}}R_{\hat{\phi}\hat{\phi}}$$

$$R = -4(1 - b/r)\Phi'/r + 2b'/r^2 + 2(1 - b/r) \left\{ -\Phi'' + \frac{b'r - b}{2r(r - b)}\Phi' - (\Phi')^2 \right\}. \quad (2.134)$$

De posse das componentes da diagonal do tensor de Ricci e do escalar de curvatura, é possível calcular o tensor de Einstein definido em (2.55) (na base tetrada).

$$G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{2}\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}R. \quad (2.135)$$

Com isso, as componentes da diagonal do tensor $G_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ são dadas por:

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = b'/r^2 \quad (2.136)$$

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = -b/r^3 + 2(1 - b/r)\Phi'/r \quad (2.137)$$

$$G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left(\Phi'' - \frac{b'r - b}{2r(r - b)}\Phi' + (\Phi')^2 \right) + \frac{\Phi'}{r} - \frac{b'r - b}{2r^2(r - b)}. \quad (2.138)$$

A parte final do procedimento para encontrar o sistema que fornece a dinâmica do espaço-tempo, é utilizar a equação de Einstein (2.85), onde o lado esquerdo da equação é dado pelo tensor de energia-momento. Como a equação de Einstein apresenta uma relação de proporcionalidade entre os tensores $G_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$, sabe-se que as únicas componentes não nulas de $T_{\mu\nu}$ são as da diagonal e as componentes angulares são degeneradas, ou seja ²,

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \begin{pmatrix} c^2\rho(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(r) \end{pmatrix}. \quad (2.139)$$

Sendo $c^2\rho(r)$ a densidade de massa-energia ou simplesmente densidade de energia do sistema, $\tau(r)$ é a tensão exercida na direção radial, e $p(r)$ a pressão tangencial. Portanto, utilizando as equações de Einstein, são obtidas as expressões:

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\hat{t}\hat{t}} \quad \rightarrow \quad b' = 8\pi Gc^{-2}r^2\rho, \quad (2.140)$$

²Utilizando as unidades do trabalho [16]

e as demais componentes geram as equações,

$$\Phi' = \frac{-8\pi Gc^{-4}\tau r^3 + b}{2r(r-b)} \quad (2.141)$$

$$\tau' = (\rho c^2 - \tau)\Phi' - \frac{2(p + \tau)}{r}. \quad (2.142)$$

Com objetivo de impor restrições sobre a geometria do buraco de minhoca, ou seja ajustando as funções da métrica $b(r)$ e $\Phi(r)$, com o intuito de que o mesmo seja atravessável, é possível reescrever as equações anteriores como:

$$\rho = \frac{c^2}{8\pi G r^2} b' \quad (2.143)$$

$$\tau = \frac{c^4}{8\pi G} \left[\frac{b}{r} - 2(r-b)\Phi' \right] \quad (2.144)$$

$$p = \frac{r}{2} [(\rho c^2 - \tau)\Phi' - \tau'] - \tau. \quad (2.145)$$

O problema foi então reduzido a determinação do tensor de energia-momento sabendo propriedades específicas da métrica.

2.5.1 Análise geométrica do buraco de minhoca de Morris-Thorne

Para interpretar e entender a geometria do buraco de minhoca, é necessário estudar seu diagrama de imersão (embedding). A ideia é visualizar a geometria espacial do buraco de minhoca, e para este fim, considera-se $t = \text{constante}$ e investiga-se sua faixa equatorial, fazendo $\theta = \pi/2$. Desta forma, a métrica (2.120) fica,

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2 d\phi^2. \quad (2.146)$$

Para visualizar a curvatura dessa superfície, segue-se o procedimento introduzido em [16], no qual essa geometria bidimensional é imergida (embebida) num espaço euclidiano tridimensional auxiliar. Esse embedding consiste em representar a superfície curva por meio de uma função $z(r)$ em um espaço tridimensional plano, de modo que a métrica induzida na superfície reproduza exatamente a métrica espacial original. Sabemos que na Relatividade Geral, o sistema de referência não altera o conteúdo físico a ser analisado. Desta forma, esse procedimento não altera a geometria física do espaço-tempo, mas permite interpretar de forma intuitiva a estrutura da garganta do wormhole e estabelecer a condição geométrica de flaring-out, fundamental para caracterizar a existência de um buraco de minhoca atravessável. Com isso, o espaço

coordenado auxiliar, será dado em coordenadas cilíndricas,

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (2.147)$$

que pode ser reescrita na forma,

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (2.148)$$

Por comparação direta entre as equações (2.146) e (2.148), temos a relação:

$$1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 = \left(1 - \frac{b}{r} \right)^{-1} \Rightarrow \frac{dz}{dr} = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{-1/2}. \quad (2.149)$$

Dessa última expressão, podemos ver como $z(r)$ varia em relação a r , além de mostrar a dependência do buraco de minhoca da função $b(r)$, por isso a mesma chama-se função *shape*. Podemos ver também que a estrutura geométrica é dividida em duas partes, a primeira representada pelo sinal positivo (up) e a segunda representada pelo sinal negativo (down). Importante destacar também que dz/dr diverge quando $b(r) = r$.

Sabendo que todo buraco de minhoca possui um raio mínimo r_0 , no qual conhecemos como garganta, e é caracterizada por $b(r_0) = r_0$, podemos perceber que neste ponto a derivada de dz/dr diverge. Assim, já podemos apresentar critérios para que uma determinada solução das equações de Einstein seja um buraco de minhoca.

Observando que o termo radial da métrica (2.146) não é simplesmente dr^2 , mas sim $(1 - b/r)^{-1} dr^2$, isso implica que a coordenada r não é uma distância física real, mas apenas uma coordenada geométrica. Por esse motivo e para evitar algumas divergências com a coordenada r , é definido,

$$dl = \pm \left[1 - \frac{b(r)}{r} \right]^{-1/2} dr, \quad (2.150)$$

logo a coordenada l é dada por:

$$l = \pm \int_{b_0}^r \frac{dr}{[1 - b(r)/r]^{1/2}}. \quad (2.151)$$

Para que a coordenada l seja finita, temos a condição $1 - b(r)/r \geq 0 \rightarrow b(r) \leq r$. Outras relações importantes que surgem da influência geométrica de $b(r)$, podem ser encontradas aplicando a regra da cadeia em (2.149), ou seja, $dz/dl = (dz/dr)(dr/dl)$, logo:

$$\frac{dz}{dl} = \pm \sqrt{\frac{b}{r}}; \quad \frac{dr}{dl} = \pm \sqrt{1 - \frac{b}{r}}. \quad (2.152)$$

Essas relações, nos permitem entender o comportamento de $z(l)$ em torno da garganta. Todas essas relações que estudamos, fazem referência à função $b(r)$, onde através da mesma conseguimos impor a existência de uma garganta (raio mínimo).

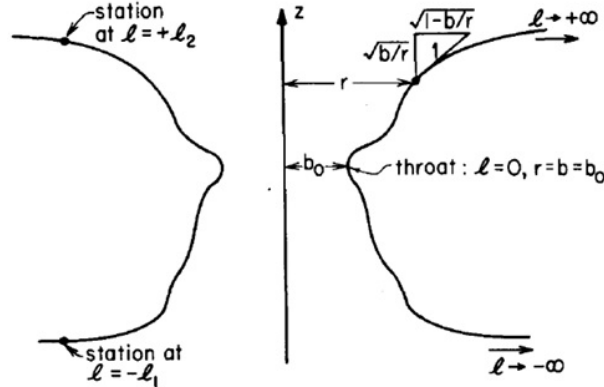


Figura 3: Diagrama de imersão da garganta de um buraco de minhoca.

Fonte: Morris e Thorne, 1988.

Por outro lado, a função de *redshift* também é importante para análise do buraco de minhoca, pois sabemos que a condição para que o mesmo seja atravessável seja a ausência de um horizonte de eventos, sendo assim, g_{00} da métrica de Morris-Thorne não pode se anular. Nesse caso, $g_{00} = -e^{2\Phi(r)}$ não pode ser zero, ou seja, $\Phi(r) \rightarrow -\infty$ não é permitido. E para buracos de minhoca assintoticamente planos, a métrica de Minkowski deve ser retomada, isto é, $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) = 0$.

2.5.2 Condições de energia no buraco de minhoca de Morris-Thorne

Ao fazer o estudo da tensão radial τ na garganta, e na sua proximidade, de um buraco de minhoca, obtém-se um dos resultados mais importantes apresentado pelo trabalho de Morris e Thorne. Com objetivo de apresentar essa conclusão, descrevemos primeiramente assim como em [16] a tensão radial na garganta, que é dada por:

$$\tau(b_0) \equiv \tau_0 = \frac{1}{8\pi G c^{-4} b_0^2} \approx \frac{5 \times 10^{42} \text{ N}}{b_0^2}, \quad (2.153)$$

que apresenta um valor muito grande e difícil razoabilidade física. Com isso, temos a proposta de analisar a tensão radial na vizinhança da garganta, para isso, define-se a função de dimensionalidade, dada por:

$$\zeta \equiv \frac{\tau - \rho c^2}{|\rho c^2|} \quad (2.154)$$

das equações de campo, obtemos,

$$\zeta = \frac{b/r - b' - 2(r-b)\Phi'}{|b'|}. \quad (2.155)$$

Considerando agora que temos interesse em soluções assintoticamente planas, isto é, podemos considerar o efeito *flaring out*, onde é necessário um raio mínimo (garganta), que por consequência, sua derivada segunda deve ser positiva, logo:

$$\frac{dr}{dz} = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{1/2} \rightarrow \left. \frac{d^2r}{dz^2} \right|_{r=b_0} = \left. \frac{b-b'r}{2b^2} \right|_{r=b_0} > 0. \quad (2.156)$$

Substituindo esse resultado na função de dimensionalidade,

$$\zeta = \frac{2b^2}{r|b'|} \left(\frac{d^2r}{dz^2} \right) - 2(r-b) \frac{\Phi'}{|b'|}. \quad (2.157)$$

Fazendo a análise desse resultado na garganta do buraco de minhoca,

$$\zeta_0 = \lim_{r \rightarrow b_0} \frac{2b^2}{r|b'|} \left(\frac{d^2r}{dz^2} \right) - \lim_{r \rightarrow b_0} 2(r-b) \frac{\Phi'}{|b'|}, \quad (2.158)$$

por fim, esse resultado nos fornece a condição:

$$\zeta_0 = \frac{\tau_0 - \rho_0 c^2}{|\rho_0 c^2|} > 0 \rightarrow \tau_0 > \rho_0 c^2. \quad (2.159)$$

Esse resultado nos fornece a medida quantitativa da violação das condições de energia na garganta do buraco de minhoca. Fisicamente falando, isso significa dizer que a tensão radial deve ser maior que a densidade de energia. Isso é altamente não usual, pois em matéria clássica normalmente ocorre o contrário.

3 FORMULAÇÃO ESPINORIAL

A importância da formulação espinorial surge naturalmente da necessidade de descrever partículas de spin semi-inteiro. O spin $1/2$, por sua vez, é uma propriedade quântica intrínseca dos prótons, nêutrons e elétrons, que formam a base da estrutura da matéria. Fisicamente, o spin $1/2$ manifesta-se em fenômenos experimentais, como a interação spin-órbita ou na descrição da estrutura fina do átomo. Importante destacar, que tais partículas obedecem à estatística de Fermi-Dirac, e estão sujeitas ao princípio de exclusão de Pauli.

Enquanto rotações de partículas clássicas são dadas por representações vetoriais usuais, partículas de spin $1/2$ transformam-se segundo representações espinoriais. Uma das principais diferenças entre tais transformações está no fato de que partículas de spin semi-inteiro retornam seu estado inicial apenas por uma transformação de 720° , diferentemente das rotações clássicas, onde o estado inicial é retomado após uma rotação de 360° .

Matematicamente, o spin semi-inteiro está associado a representações específicas das simetrias rotacionais no espaço tridimensional. Sabendo que as rotações em três dimensões são representadas pelo grupo $SO(3)$, e este não admite representações espinoriais, temos a necessidade de apresentar e descrever o grupo $SU(2)$, que constitui um recobrimento duplo de $SO(3)$.

A teoria de grupos fornece a base matemática para o estudo das transformações sofridas por partículas de spin $1/2$. Com o objetivo de investigar tais propriedades, este capítulo apresenta inicialmente uma descrição não relativística seguida da exposição relativística do spin $1/2$, destacando suas propriedades algébricas e seu papel na construção da formulação espinorial.

3.1 A teoria não-relativística do spin $1/2$

Em Física, as leis de conservação estão relacionadas diretamente às simetrias dos sistemas físicos em análise. Tais simetrias são notadas primeiramente no estudo da Mecânica Clássica através do teorema de Noether, que estabelece uma relação entre as propriedades de simetria e as quantidades conservadas, como energia, quantidade de movimento e momento angular [17].

Para cada situação, temos que o conjunto das operações de simetria formam um

grupo. Com isso, a teoria de grupos é a ferramenta necessária para o estudo de invariantes e simetrias. No início do século XX, Wigner e outros estudiosos notaram que a noção de invariantes era um conceito fundamental para a explicação de fenômenos quânticos. Por consequência, na Mecânica Quântica o conceito de spin e momento angular mostraram-se fundamentais, pois a lei de conservação do momento angular é uma consequência da simetria rotacional, ou seja, é invariante sob rotações espaciais [7].

A teoria de grupos é a maneira de formalizar matematicamente os conceitos de reflexões espaciais, paridade, rotações e geometria [7]. Levando em consideração o momento angular como uma quantidade fundamental para o desenvolvimento da teoria, é necessário definir e descrever o grupo de rotações em três dimensões, denominado $SO(3)$. Através de um ajuste dos parâmetros do grupo $SO(3)$, nota-se um isomorfismo entre este grupo e o grupo $SU(2)$, tal propriedade proporciona a escolha de qual representação utilizar. A representação do grupo $SU(2)$ é denominada de representação spinorial do grupo $SO(3)$, destacando que esta é uma teoria não-relativística do spin $\frac{1}{2}$ [8].

3.1.1 Rotações e o grupo $SO(3)$

Tomando como base física a isotropia do espaço, o que significa que não há uma direção preferencial em relação a outra, considera-se um vetor \vec{r} que pode ser escrito num referencial S em termos das suas coordenadas $\{x_i\}$, mas também será possível escrever o mesmo vetor num referencial S' , onde o mesmo é uma rotação em torno do eixo z do sistema S , tal rotação deve preservar o módulo de \vec{r} [7], ou seja:

$$\|\vec{r}\| = \|\vec{r}'\|. \quad (3.1)$$

Sendo $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ as componentes do vetor \vec{r} no sistema S , logo suas componentes em S' para uma rotação de um ângulo ϕ são,

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\phi + y\sin\phi \\ y' &= -x\sin\phi + y\cos\phi \\ z' &= z, \end{aligned} \quad (3.2)$$

na forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

onde $A(\phi)$ é a matriz de rotação de um ângulo ϕ em torno de z [7]. Uma rotação na sua forma mais geral será descrita através dos ângulos de Euler, que são representados por rotações sucessivas em torno de eixos particulares [18]. Desta maneira tem-se:

$$(x, y, z) \longrightarrow (\xi, \eta, \zeta_{\text{fixo}}) \longrightarrow (\xi'_{\text{fixo}}, \eta', \zeta') \longrightarrow (x', y', z'), \quad (3.4)$$

estas transformações geram as seguintes matrizes:

$$A(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \text{sen}\phi & 0 \\ -\text{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \\ 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$C(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \text{sen}\psi & 0 \\ -\text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

onde $\phi : [0, 2\pi]$, $\theta : [0, \pi]$ e $\psi : [0, 2\pi]$ são os ângulos de Euler. Desta forma uma rotação geral em três dimensões é dada por $R(\phi, \theta, \psi) = C(\psi)B(\theta)A(\phi)$ [17].

$$R(\phi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\text{sen}\phi\text{sen}\psi & -\text{sen}\psi\cos\phi - \cos\theta\text{sen}\phi\text{sen}\psi & \text{sen}\psi\text{sen}\theta \\ -\text{sen}\psi\cos\phi - \cos\theta\text{sen}\phi\cos\psi & -\text{sen}\psi\text{sen}\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & -\text{sen}\theta\cos\phi \\ \text{sen}\psi\text{sen}\theta & \cos\psi\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

De maneira geral, as transformações de rotação podem ser escritas matricialmente como:

$$X' = RX, \quad (3.7)$$

onde as matrizes R formam um grupo não abeliano denominado $O(3)$. Se a condição $\det R = +1$ for imposta, tais matrizes compõem o grupo $SO(3)$, que é definido como:

$$SO(3) = \{R \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 3); R^{-1} = R^T \text{ e } \det R = 1\}. \quad (3.8)$$

Tomando o caso geral de um grupo especial ortogonal $SO(n)$, pode-se analisar as principais características dos seus elementos. Uma matriz quadrada pode ser escrita em termos de uma função exponencial matricial, onde esta preserva propriedades semelhantes a função exponencial definida nos reais. Sendo R um elemento de $SO(n)$, é possível escrever:

$$R = e^M, \quad (3.9)$$

onde os $M's$ são matrizes reais $n \times n$ (n^2 elementos). De maneira formal, a função exponencial matricial estabelece uma conexão entre as propriedades da álgebra de Lie das matrizes quadradas e o correlato grupo de Lie. Sabendo que:

$$\begin{aligned} R^T R &= \mathbb{I} \Rightarrow R^T = R^{-1} \\ e^{M^T} &= e^{-M} \Rightarrow M^T = -M, \end{aligned} \quad (3.10)$$

logo M é anti simétrica. Portanto, sua diagonal principal é nula e a parte triangular superior é refletida na parte triangular inferior. Com isto, a quantidade de parâmetros independentes é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Elementos independentes} &= \text{Total} - \text{Diagonal principal} - \text{Parte triangular} \\ &= n^2 - n - \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Considerando a equação (3.11) para $n = 3$, a quantidade de elementos independentes é igual a 3, que corresponde aos ângulos de Euler. Sabe-se que uma representação do grupo de Lie pode ser escrita como (A.1):

$$D(a) = e^{-ia^k J_k}, \quad (3.12)$$

onde os J_k são os geradores do grupo. Desta forma, comparando as equações (3.9) e (3.12), obtemos:

$$M = -ia^k J_k. \quad (3.13)$$

Assim, para o grupo $SO(3)$, os parâmetros a^k são os ângulos de Euler e os J^k os geradores do grupo. Sabe-se que M é uma matriz antissimétrica, para o grupo $SO(3)$ podemos escrever:

$$M_{ij} = -\varepsilon_{ijk} a^k. \quad (3.14)$$

Das equações (3.13) e (3.14) podemos concluir que os geradores do $SO(3)$ são dados por:

$$(J_i)_{jk} = i\varepsilon_{ijk}, \quad (3.15)$$

e seguem a álgebra de Lie dada por:

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} (J_k). \quad (3.16)$$

Com isso podemos construir um operador infinitesimal que segue as propriedades descritas no

Apêndice A para as representações de um grupo. Seja \hat{n} um vetor unitário na direção de um eixo qualquer, uma rotação infinitesimal $\delta\phi$ em torno desse eixo é dada por:

$$\begin{aligned} R_n(\delta\phi) &= 1 - i(\delta\phi_x J_x + \delta\phi_y J_y + \delta\phi_z J_z) \\ &= \mathbb{I} - i(\hat{n} \cdot \vec{J}) \delta\phi. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Pelo teorema de Lie, um elemento geral do grupo de rotações $SO(3)$ é dado por [19]:

$$R_n(\phi) = e^{-\phi \hat{n} \cdot \vec{J}}. \quad (3.18)$$

Com a equação (3.18), é fácil ver as relações de fechamento, a existência de um elemento inverso e uma identidade.

3.1.2 Representação espinorial do $SO(3)$ e o grupo $SU(2)$

Antes de formalizar a representação espinorial, será feita a mudança de parâmetros do grupo $SO(n)$ da seguinte maneira:

$$A = \exp(i\alpha^i G_i) \quad \Rightarrow \quad A = \exp\left(\frac{i}{2}\alpha^{ij} G_{ij}\right), \quad (3.19)$$

onde i está variando de 1 até $\frac{n(n-1)}{2}$ e α^{ij} , G_{ij} são antissimétricos. A álgebra seguida pelos G 's é a mesma do momento angular [8],

$$L_{ij} = x_i \partial_j - x_j \partial_i, \quad (3.20)$$

com:

$$[L_{ij}, L_{kl}] = i(\delta_{ik} L_{jl} - \delta_{il} L_{jk} + \delta_{jk} L_{il} - \delta_{jl} L_{ik}), \quad (3.21)$$

onde adotamos $\hbar = 1$. Assim,

$$[G_{ij}, G_{kl}]_{mn} = i[\delta_{ik}(G_{jl})_{mn} - \delta_{il}(G_{jk})_{mn} + \delta_{jk}(G_{il})_{mn} - \delta_{jl}(G_{ik})_{mn}]. \quad (3.22)$$

Para descobrir a forma matricial de $(G_{ij})_{mn}$, precisa-se tomar a transformação de um vetor através de um elemento $A \in SO(n)$:

$$x'_m = a_{mn} x_n. \quad (3.23)$$

Pela equação (3.19), tem-se:

$$\begin{aligned}
 x'_m &= \left[\exp \left(\frac{i}{2} a^{ij} G_{ij} \right) \right]_{mn} x_n \\
 &= \left[1 + \frac{i}{2} a^{ij} G_{ij} + \dots \right]_{mn} x_n \\
 &\approx x_m + \frac{i}{2} a^{ij} (G_{ij})_{mn} x_n.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Para uma transformação infinitesimal,

$$\delta x_m \equiv x'_m - x_m = \frac{i}{2} a^{ij} (G_{ij})_{mn} x_n, \tag{3.25}$$

onde $\delta x_m = a_{mn} x_n$. Logo,

$$a_{mn} = \frac{i}{2} a^{ij} (G_{ij})_{mn}. \tag{3.26}$$

Esta equação tem como solução

$$(G_{ij})_{mn} = -i(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}), \tag{3.27}$$

que nos dá a forma explícita dos geradores de $SO(3)$, a saber,

$$\begin{aligned}
 G_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & G_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 G_{23} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

De maneira geral, a representação spinorial do grupo $SO(n)$ é dada quando seus geradores são escritos em termos das $\frac{n(n-1)}{2}$ matrizes Γ_i 's que seguem a álgebra de Clifford [8],

$$\{\Gamma_i, \Gamma_j\} \equiv \Gamma_i \Gamma_j + \Gamma_j \Gamma_i = 2\delta_{ij}, \tag{3.29}$$

que continuam seguindo a álgebra (3.16). Para encontrar seus geradores em termo das matrizes Γ_i , define-se as matrizes M tal que,

$$M = \Gamma_i x_i \longrightarrow M' = \Gamma_i x'_i, \tag{3.30}$$

onde $x'_i = R_{ij}x_j$, de onde pode-se concluir que $|M|^2 = |M'|^2$. Analisando as seguintes transformações:

$$\begin{cases} M\psi = \phi \\ \psi' = S\psi \\ \phi' = S\phi \\ M'\psi' = \phi', \end{cases} \quad (3.31)$$

pode-se concluir que as matrizes Γ_i se transformam como:

$$S(a)\Gamma_j S^{-1}(a) = R_{ij}(a)\Gamma_i. \quad (3.32)$$

Derivando ambos os lados desta equação e notando-se que,

$$\left. \frac{\partial S}{\partial a_{lm}} \right|_{a=0} = G_{lm}; \quad \left. \frac{\partial S^{-1}}{\partial a_{lm}} \right|_{a=0} = -G_{lm} \quad \text{e} \quad \frac{\partial R_{ij}}{\partial a_{lm}} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}, \quad (3.33)$$

logo,

$$\begin{aligned} G_{lm}\Gamma_j - \Gamma_j G_{lm} &= [G_{lm}, \Gamma_j] = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\Gamma_i \\ &= \Gamma_l\delta_{jm} - \Gamma_m\delta_{jl}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Pela álgebra de Clifford, pode-se escrever

$$\delta_{ij} = \frac{1}{2}(\Gamma_i\Gamma_j + \Gamma_j\Gamma_i), \quad (3.35)$$

de onde conclui-se que:

$$[G_{lm}, \Gamma_j] = \frac{1}{4} [[\Gamma_l, \Gamma_m], \Gamma_j] \quad \longrightarrow \quad G_{lm} = \frac{1}{4} [\Gamma_l, \Gamma_m]. \quad (3.36)$$

Esse resultado mostra como são os geradores na representação spinorial (a menos da unidade imaginária). Sabendo-se que as matrizes de Pauli seguem a álgebra de Clifford,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{onde} \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}. \quad (3.37)$$

Para o $SU(2)$, as matrizes Γ_i , podem ser relacionadas com as matrizes de Pauli, com isso os geradores (3.36) podem ser escritos como:

$$G_{lm} = \frac{i}{4} [\sigma_l, \sigma_m], \quad (3.38)$$

que forma o conjunto de geradores do $SU(2)$, representado por matrizes 2×2 , definidas como:

$$SU(2) = \{U \in Mat(\mathbb{C}, 2); U^{-1} = U^\dagger \text{ e } \det U = 1\}. \quad (3.39)$$

De maneira geral, o grupo $SU(n)$ é composto por matrizes complexas $n \times n$, logo a quantidade de elementos independentes são $2n^2$. Porém, são impostas algumas condições,

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= \mathbb{I} \quad \longrightarrow \quad |detU|^2 = 1 \\ detU &= e^{i\alpha}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Para $detU = 1 \Rightarrow \alpha = 0$, o que reduz o número de parâmetros independentes para $2n^2 - 1$. Admitindo que [8],

$$U = e^M, \quad (3.41)$$

onde M são matrizes complexas $M = A + iB$, tem-se que:

$$\begin{aligned} U^{-1} &= U^\dagger \quad \Rightarrow \quad M^\dagger = -M. \\ \therefore A^T - iB^T &= -A - iB \quad \Rightarrow \quad A^T = -A \text{ (antissimétrica)} \quad \text{e} \quad B^T = B \text{ (simétrica)}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Para matrizes simétricas e antissimétricas tem-se $\frac{n(n+1)}{2}$ e $\frac{n(n-1)}{2}$ elementos, respectivamente; o número de parâmetros independentes é dado por:

$$2n^2 - 1 - \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = n^2 - 1. \quad (3.43)$$

Portanto para o grupo $SU(2)$, tem-se $2^2 - 1 = 3$ parâmetros independentes. Desta forma, com as condições impostas as matrizes de $SU(2)$, tem-se que a matriz mais geral terá a forma:

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3 \\ &= x_i \sigma_i. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Assim, pode-se concluir que qualquer matriz pertencente ao $SU(2)$ pode ser escrita como uma combinação linear das matrizes de Pauli. Através da equação (3.19), sabe-se que:

$$S_i = \exp\left(\frac{i}{2} \alpha^i \sigma_i\right). \quad (3.45)$$

Tomando a transformação de similaridade da matriz (3.44),

$$U' = S_i U S_i^{-1}, \quad (3.46)$$

especificando $i = 3$, tem-se

$$\begin{aligned} U' = S_3 U S_3^{-1} &= \exp\left(\frac{i}{2}\alpha^3 \sigma_3\right) x_i \sigma_i \exp\left(-\frac{i}{2}\alpha^3 \sigma_3\right) \\ &= \exp\left(\frac{i}{2}\alpha^3 \sigma_3\right) (x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3) \exp\left(-\frac{i}{2}\alpha^3 \sigma_3\right). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Pela identidade de Euler, sabe-se que:

$$\exp\left(\frac{i}{2}\alpha^3 \sigma_3\right) = \cos\left(\frac{\alpha_3}{2}\right) + i\sigma_3 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_3}{2}\right), \quad (3.48)$$

tal que a equação (3.47) fica:

$$U' = (x_1 \cos\alpha_3 + x_2 \operatorname{sen}\alpha_3) \sigma_1 + (-x_1 \operatorname{sen}\alpha_3 + x_2 \cos\alpha_3) \sigma_2 + x_3 \sigma_3. \quad (3.49)$$

Sabendo-se que $U' = x'_1 \sigma_1 + x'_2 \sigma_2 + x'_3 \sigma_3$, obtém-se:

$$\begin{aligned} x' &= x_1 \cos\alpha_3 + x_2 \operatorname{sen}\alpha_3 \\ y' &= -x_1 \operatorname{sen}\alpha_3 + x_2 \cos\alpha_3 \\ z' &= x_3. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Concluindo-se que a matriz em (3.47) reproduz as mesmas transformações obtidas na equação (3.2). Este resultado também pode ser obtido para as matrizes S_2 e S_3 , comprovando assim que os elementos do grupo $SU(2)$ realiza as rotações tridimensionais, ou seja, os grupos $SO(3)$ e $SU(2)$ são homeomorfos [8]. Se os parâmetros forem escolhidos como os ângulos de Euler, a rotação mais geral será dada por:

$$U = U_\phi U_\theta U_\psi. \quad (3.51)$$

Pode-se concluir que o grupo $SU(2)$ é a representação espinorial do grupo das rotações, onde o mesmo atua em elementos bidimensionais complexos chamados de espinores, dados por:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

Estes objetos representam os spins a Mecânica Quântica não relativística, sendo eles o spin up ψ_1 e down ψ_2 , cujas respectivas projeções são dadas por $\frac{1}{2}\hbar$ e $-\frac{1}{2}\hbar$.

3.2 Quantização do momento angular através da álgebra de Lie

A quantização do momento angular é desenvolvida das relações de comutação da álgebra de Lie do grupo SO(3), descrita na equação (3.16). Para a construção da teoria é necessária a definição do operador J^2 , a saber [19],

$$J^2 \equiv J_x^2 + J_y^2 + J_z^2. \quad (3.53)$$

Com essa definição, é possível calcular as relações de comutação entre o operador J^2 e suas componentes J_i ,

$$\begin{aligned} [J^2, J_z] &= [J_x^2 + J_y^2 + J_z^2, J_z^2] \\ &= J_x[J_x, J_z] + [J_x, J_z]J_x + J_y[J_y, J_z] + [J_y, J_z]J_y. \end{aligned} \quad (3.54)$$

De acordo com a relação (3.16), e sabendo que para as demais componentes o cálculo é semelhante, tem-se:

$$[J^2, J_z] = 0 \Rightarrow [J^2, J_i] = 0. \quad (3.55)$$

Como as componentes individuais não comutam entre si e comutam com J^2 , escolhe-se por convenção, J_z para ser diagonalizado juntamente com J^2 [19]. Tornando autovetores simultâneos de J^2 e J_z , onde a e b são autovalores de J^2 e J_z , respectivamente, suas equações são dadas por:

$$\begin{aligned} J^2 |a, b\rangle &= a |a, b\rangle \\ J_z |a, b\rangle &= b |a, b\rangle. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Para que os valores de a e b sejam encontrados é necessário a definição dos operadores escada [19]:

$$J_{\pm} \equiv J_x \pm iJ_y. \quad (3.57)$$

Desta maneira, tem-se.

$$\begin{aligned} [J_+, J_-] &= [J_x + iJ_y, J_x - iJ_y] \\ &= [J_x, J_x] - i[J_x, J_y] + i[J_y, J_x] + [J_y, J_y] \\ &= -2i[J_x, J_y] \\ &= 2\hbar J_z \end{aligned} \quad (3.58)$$

e

$$\begin{aligned}
[J_z, J_{\pm}] &= [J_z, J_x \pm iJ_y] \\
&= [J_z, J_x] \pm i[J_z, J_y] \\
&= i\hbar\epsilon_{321}J_y \pm i(i\hbar\epsilon_{321}J_x) \\
&= \pm\hbar J_{\pm}.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Por fim:

$$\begin{aligned}
[J^2, J_{\pm}] &= [J^2, J_x \pm iJ_y] \\
&= [J^2, J_x] \pm i[J^2, J_y] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Para os operadores escada, tem-se J_{\pm} ,

$$\begin{aligned}
J_z(J_{\pm}|a, b\rangle) &= ([J_z, J_{\pm}] + J_{\pm}J_z)|a, b\rangle \\
&= (b \pm \hbar)|a, b\rangle.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Desta forma, observa-se que na atuação dos operadores J_{\pm} nos autovetores de J_z , resulta novamente em um autoestado de J_z com autovalores somados ou subtraídos de \hbar [19]. De maneira semelhante, pode-se observar o que estes operadores fazem com os autoestados de J^2 . Segue-se então,

$$\begin{aligned}
J^2(J_{\pm}|a, b\rangle) &= J_{\pm}J^2|a, b\rangle \\
&= a(J_{\pm}|a, b\rangle).
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Com isso, conclui-se que os operadores J_{\pm} só aumentam ou diminuem os autovalores b .

$$J_{\pm}|a, b\rangle = c_{\pm}|a, b \pm \hbar\rangle. \tag{3.63}$$

A condição física de que o momento angular seja limitado por um máximo e mínimo leva a conclusão de que não se pode aplicar J_{\pm} infinitamente [19]. Para analisar seus valores limites, primeiro, escreve-se o operador J^2 em termos dos J_{\pm} :

$$J^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2. \tag{3.64}$$

Sabendo-se que $J_- = J_+^\dagger$, tem-se

$$J^2 - J_z^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_+^\dagger + J_+^\dagger J_+), \quad (3.65)$$

onde $J_+ J_+^\dagger$ tem valores esperados positivos:

$$J_+^\dagger J_+ = \mathbf{J}^2 - J_z^2 - \hbar J_z \quad (3.66)$$

Este resultado mostra que os valores de b estão limitados pelos valores de a. Por consequência disso:

$$\langle a, b | J^2 - J_z^2 | a, b \rangle \geq 0 \Rightarrow a \geq b^2. \quad (3.67)$$

De maneira semelhante,

$$J_+ |a, b_{max}\rangle = 0 \Rightarrow J_- J_+ |a, b_{max}\rangle = 0 \quad \text{e} \quad J_- |a, b_{min}\rangle = 0 \Rightarrow J_+ J_- |a, b_{min}\rangle = 0. \quad (3.68)$$

Substituindo os valores de $J_- J_+$ e $J_+ J_-$ em (3.68):

$$a = b_{max}(b_{max} + \hbar), \quad (3.69)$$

$$a = b_{min}(b_{min} - \hbar). \quad (3.70)$$

Igualando as duas equações em (3.69), conclui-se que $b_{max} = -b_{min}$, logo os valores de b variam no intervalo,

$$-b_{max} \leq b \leq b_{max}. \quad (3.71)$$

O estado $|a, b_{max}\rangle$ pode ser obtido aplicando J_+ em $|a, b_{max}\rangle$ sucessivas vezes, logo:

$$\begin{aligned} b_{max} &= b_{min} + n\hbar \\ &= -b_{max} + n\hbar \\ &= \frac{n\hbar}{2}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Definindo:

$$j \equiv \frac{b_{max}}{\hbar} = \frac{n}{2}. \quad (3.73)$$

Logo, o autovalor de J^2 é dado por:

$$a = \hbar^2 j(j+1), \quad (3.74)$$

se b for definido como $b \equiv m\hbar$, as equações (3.56) ficam:

$$\begin{aligned} J^2 |j, m\rangle &= j(j+1)\hbar |j, m\rangle, \\ J_z |j, m\rangle &= m\hbar |j, m\rangle. \end{aligned} \quad (3.75)$$

As equações em (3.75) representam a quantização do momento angular. Estas são consequências das relações de comutação da álgebra de Lie do grupo das rotações [19]. Com as equações de autovalores (3.75) e sabendo que $J_+^\dagger J_+ = \mathbf{J}^2 - j_z^2 - \hbar J_z$, consegue-se calcular as equações de autovalor dos operadores J_+ e J_- :

$$J_\pm |j, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\hbar |j, m \pm 1\rangle. \quad (3.76)$$

Com estas equações, pode-se escrever as formas matriciais de J_1 e J_2 , desde que os mesmos sejam escritos como:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2}(J_+ + J_-), \\ J_2 &= \frac{1}{2i}(J_+ - J_-). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Com isto:

$$\begin{aligned} \langle m' | J_1 | m \rangle &= \frac{1}{2}(\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\delta_{m',m+1} + \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\delta_{m',m-1}) \\ \langle m' | J_2 | m \rangle &= -\frac{i}{2}(\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\delta_{m',m+1} - \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\delta_{m',m-1}). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Sendo j o número quântico que representa o spin e sabendo que $-j \leq m \leq j$. Se $j = \frac{1}{2}$, as equações em (3.78) juntamente com a equação de J_z em (3.75) retomam as matrizes de Pauli, que são geradores do grupo SU(2). Este fato mostra que os vetores do SU(2) são responsáveis por acomodar os estados de spin 1/2.

3.3 A teoria relativística do spin 1/2

No estudo da relatividade especial é exigido que as leis da física sejam invariantes por translações do espaço e do tempo, por rotações no espaço real, tridimensional e por transformações de Lorentz. As três condições de invariância juntas formam o grupo de Poincaré, ou grupo de Lorentz não-homogêneo. Considerando-se apenas as rotações no espaço e a transformação de Lorentz juntas "Boosts", estas formam o grupo de Lorentz homogêneo [8].

A Mecânica Quântica ondulatória de Schrödinger foi aprimorada por W. Pauli em 1926, quando o mesmo escreveu uma função de onda de sistemas quânticos que comportavam spin, estes eram representados por espinores bidimensionais não-relativísticos. Já em 1928 P. Dirac generalizou este conceito para uma teoria relativística, utilizando espinores com quatro

componentes [20]. Para construir tal teoria é necessário descrever o grupo de Lorentz $SO(3,1)$ juntamente com sua representação spinorial.

3.3.1 O Grupo de Lorentz $SO(3,1)$ e sua Representação Spinorial

O grupo de Lorentz é o grupo $SO(3,1)$, onde o mesmo é não compacto, ortogonal e contém o grupo das rotações espaciais $SO(3)$ como subgrupo. Ele é composto por matrizes Λ_{ν}^{μ} (4x4) agindo em diferentes coordenadas do espaço-tempo[21].

$$\Delta x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} \Delta x^{\nu}. \quad (3.79)$$

Tal que estas matrizes satisfazem a condição de ortogonalidade:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad (3.80)$$

onde η é a métrica de Minkowski,

$$\eta = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

Os geradores do grupo de Lorentz seguem a álgebra dada na equação (3.22). Embora a forma original da álgebra em (3.22) dependa do espaço tridimensional, uma vez que envolve o símbolo de Levi-Civita ϵ_{ijk} , pode-se generalizar para n -dimensões, pois esta álgebra é a mesma para os grupos $SO(n)$. Pode-se obter facilmente a álgebra de Lie do grupo de Lorentz $SO(3,1)$ apenas substituindo a métrica euclidiana δ_{ij} pela métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ [21]:

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} J_{\mu\rho}). \quad (3.82)$$

Para encontrar as formas matriciais dos geradores do grupo de Lorentz, considera-se a seguinte relação:

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda_{\sigma}^{\mu} \Lambda_{\rho}^{\nu} = \eta_{\sigma\rho}. \quad (3.83)$$

Derivando ambos os lados desta equação e definindo a quantidade $G_{\nu\sigma} \equiv \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\sigma}^{\mu}$:

$$\left. \frac{\partial G_{\nu\sigma}}{\partial a^{\lambda}} \right|_{a=0} \delta_{\rho}^{\nu} + \delta_{\sigma}^{\mu} \left. \frac{\partial G_{\mu\rho}}{\partial a^{\lambda}} \right|_{a=0} = 0, \quad (3.84)$$

Pois $\Lambda_{\sigma}^{\mu}|_{a=0} = \delta_{\sigma}^{\mu}$, onde a é um parâmetro infinitesimal que descreve transformações de Lo-

rentz em torno da identidade, de tal forma que em $a = 0$, recupera-se a delta. Com isso, temos,

$$(G_\lambda)_{\rho\sigma} = -(G_\lambda)_{\sigma\rho}. \quad (3.85)$$

Essa relação de antissimetria nos parâmetros $a_{\rho\sigma} = -a_{\sigma\rho}$, permite obter a quantidade total de parâmetros independentes. Como $\rho, \sigma = 0, 1, 2, 3$ têm quatro valores possíveis:

$$\text{Quant. de parâmetros independentes} = \binom{4}{2} = 6. \quad (3.86)$$

Da antissimetria de $(G^{\rho\sigma})_{\mu\nu}$:

$$\begin{cases} (G^{\rho\sigma})_{\mu\nu} = -(G^{\sigma\rho})_{\mu\nu} \\ (G^{\rho\sigma})_{\mu\nu} = -(G^{\sigma\rho})_{\nu\mu} \end{cases} \quad (3.87)$$

Concluindo que:

$$(G^{\rho\sigma})_{\mu\nu} = \delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma - \delta_\nu^\rho \delta_\mu^\sigma. \quad (3.88)$$

Derivando a expressão $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\lambda} \Lambda_\nu^\lambda$ e utilizando a equação (3.88):

$$\eta_{\mu\lambda} (J^{\rho\sigma})_\nu^\lambda = \delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma - \delta_\nu^\rho \delta_\mu^\sigma \quad \Rightarrow \quad (J^{\rho\sigma})_\nu^\lambda = \left. \frac{\partial \Lambda_\nu^\lambda}{\partial a_{\rho\sigma}} \right|_{a=0}. \quad (3.89)$$

Logo (acrescentando a unidade imaginária):

$$(J^{\rho\sigma})_\nu^\alpha = i(\eta^{\rho\alpha} \delta_\nu^\sigma - \eta^{\sigma\alpha} \delta_\nu^\rho). \quad (3.90)$$

Esta é a forma explícita dos geradores do grupo de Lorentz, separados em boosts e rotações.

- A condição para obter os boosts é $\rho = 0$ e $\sigma = i$:

$$(J^{0i})_\nu^\alpha = i(\eta^{0\alpha} \delta_\nu^i - \eta^{0\alpha} \delta_\nu^0). \quad (3.91)$$

Observa-se que a equação (3.91) é nula se $\alpha, \nu \neq 0$ ou $\alpha, \nu = 0$ juntas, logo:

$$\begin{aligned} (J^{0i})_j^0 &= i(\eta^{00} \delta_j^i) = -i\delta_j^i \\ (J^{0i})_0^j &= i(\eta^{0j} \delta_0^i - \eta^{ij} \delta_0^0) = -i\delta^{ij}, \end{aligned} \quad (3.92)$$

estes são os geradores dos boosts do grupo de Lorentz, que de maneira explícita ficam:

$$J^{01} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J^{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

$$J^{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- A condição para obter os geradores das rotações é $\rho = i$ e $\sigma = j$:

$$(J^{ij})_{\nu}^{\alpha} = i(\eta^{i\alpha}\delta_{\nu}^j - \eta^{j\alpha}\delta_{\nu}^i), \quad (3.94)$$

onde (3.94) é nula se $\alpha = 0$ ou $\nu = 0$, com isto, $\alpha = k$ e $\nu = l$:

$$(J^{ij})_l^k = i(\delta^{ik}\delta_l^j - \delta^{jk}\delta_l^i). \quad (3.95)$$

Observa-se que os geradores em (3.95) são os mesmos das rotações em (2.27), logo estes são responsáveis pelas rotações do grupo de Lorentz. Desta forma, como o grupo de Lorentz é um grupo de Lie, e é possível escrever os geradores do mesmo como:

$$\exp\{-i\vec{a}\cdot\vec{J}\} = \exp\{-ia_{\mu\nu}(J^{\mu\nu})\} = \exp\left\{-i\left[a_{0i}(J^{0i}) + \frac{a_{ij}}{2}(J^{ij})\right]\right\}, \quad (3.96)$$

sendo uma parte responsável pelos boosts e a outra pelas rotações, totalizando seis geradores.

Definindo:

$$J_k \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}J^{ij}; \quad J_{0i} \equiv K_i, \quad (3.97)$$

onde estes seguem sua própria álgebra de Lie:

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= \left[\frac{1}{2} \varepsilon_{iab} J^{ab}, \frac{1}{2} \varepsilon_{jcd} J^{cd} \right] \\
&= \frac{1}{4} \varepsilon_{iab} \varepsilon_{jcd} [J^{ab}, J^{cd}] \\
&= \frac{i}{4} \varepsilon_{iab} \varepsilon_{jcd} [\delta^{ac} J^{bd} - \delta^{ad} J^{bc} + \delta^{bd} J^{ac} - \delta^{bc} J^{ad}] \\
&= \frac{i}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abk} J^{ab} \\
&= i \varepsilon_{ijk} J_k.
\end{aligned} \tag{3.98}$$

De maneira semelhante:

$$\begin{aligned}
[J_i, K_j] &= \left[\frac{1}{2} \varepsilon_{iab} J^{ab}, J_{0j} \right] \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon_{iab} [J^{ab}, J_{0j}] \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon_{iab} \eta_{jk} [J^{ab}, J^{k0}] \\
&= \frac{i}{2} \varepsilon_{iab} \eta_{jk} (\eta^{ak} J^{b0} - \eta^{a0} J^{bk} + \eta^{b0} J^{ak} - \eta^{bk} J^{a0}) \\
&= i \varepsilon_{ijk} J_{0k} \\
&= i \varepsilon_{ijk} K_k,
\end{aligned} \tag{3.99}$$

por fim:

$$\begin{aligned}
[K_i, K_j] &= [J_{0i}, J_{0j}] \\
&= \delta_{ia} \delta_{jb} [J^{0a}, J^{0b}] \\
&= i \delta_{ia} \delta_{jb} (\eta^{00} J^{ab} - \eta^{0b} J^{a0} + \eta^{ab} J^{00} - \eta^{a0} J^{0b}) \\
&= -\frac{i}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abk} J^{ab} \\
&= -i \varepsilon_{ijk} J_k.
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Com isso, observamos que as álgebras dos geradores definidos em (3.97) estão desacopladas, logo com as relações (3.98), (3.99) e (3.100) pode-se definir os geradores combinados:

$$M_i = \frac{J_i + iK_i}{2}; \quad N_i = \frac{J_i - iK_i}{2}, \tag{3.101}$$

onde estes seguem a álgebra,

$$[M_i, M_j] = i \varepsilon_{ijk} M_k; \quad [N_i, N_j] = i \varepsilon_{ijk} N_k, \quad [M_i, N_j] = 0. \tag{3.102}$$

Desta forma pode-se observar que os boosts e as rotações combinados seguem sua própria álgebra de Lie.

3.3.2 Representação spinorial do $SO(3,1)$ e a álgebra de Clifford

A representação spinorial do grupo de Lorentz surge naturalmente da covariância da equação de Dirac [8]. Como já mencionado, os objetos de spin $J = 1/2$ são representados pelo grupo $SU(2)$ e são definidos através das matrizes de Pauli, onde as mesmas seguem a regra:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (3.103)$$

e as relações de comutação dadas em (3.16) e a álgebra de Clifford mencionada em (2.37). O lado direito da equação (2.37) é o produto da métrica com a identidade, que pode ser escrita de maneira geral por:

$$\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}. \quad (3.104)$$

Para construir as representações completas da álgebra de Clifford no espaço de Minkowski, utiliza-se $\eta_{\mu\nu}$ em 3.104, logo:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}; \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (3.105)$$

De maneira análoga à representação spinorial do grupo de rotações, os geradores da representação spinorial de $SO(3,1)$ são:

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad (3.106)$$

onde as matrizes γ 's satisfazem diversas identidades:

$$\gamma_\mu = \gamma^0 \gamma_\mu^\dagger \gamma^0, \quad (3.107)$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = \eta_{\mu\nu} - 2i \Sigma_{\mu\nu}, \quad (3.108)$$

$$tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4\eta_{\mu\nu}. \quad (3.109)$$

De maneira geral, a transformação das matrizes γ 's no espaço de Minkowski é dada como $S\Gamma^\mu S^{-1} = \Lambda^\mu_\nu \Gamma^\nu$, generalizando o resultado obtido em (3.32). Sabendo também que o produto das matrizes gamma's seguem a álgebra de Clifford, é definida a matriz γ^5 :

$$\gamma^5 \equiv -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \quad (3.110)$$

onde o sinal é convenção e a unidade imaginária garante $(\gamma_5)^2 = I$. A matriz γ^5 tem as seguintes propriedades:

$$\gamma_\mu \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma_\mu, \quad (3.111)$$

$$\gamma_5 = \gamma^5, \quad (3.112)$$

$$\text{tr}(\gamma_5) = 0, \quad (3.113)$$

$$\text{tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu) = 0. \quad (3.114)$$

De maneira semelhante à transformação das coordenadas dos quadrivetores em (3.79), a transformação dos espinores ψ é dada por:

$$\psi' = S(\Lambda) \psi, \quad (3.115)$$

onde,

$$S = \exp\left(\frac{a^{\mu\nu}}{2} \Sigma_{\mu\nu}\right) \quad \text{e} \quad S^{-1} = \exp\left(-\frac{a^{\mu\nu}}{2} \Sigma_{\mu\nu}\right), \quad (3.116)$$

sendo $\Sigma_{\mu\nu}$ os geradores do grupo de Lorentz definidos em (3.106). Sabendo que nas equações de Schrödinger e Klein-Gordon é avaliado a evolução temporal da quantidade $\psi^\dagger \psi$, analisa-se sua covariância:

$$\psi'^\dagger \psi' = (S\psi)^\dagger S\psi = \psi^\dagger S^\dagger S\psi. \quad (3.117)$$

onde $\Sigma_{0i}^\dagger = \Sigma_{0i}$ e $\Sigma_{ij}^\dagger = -\Sigma_{ij}$, observa-se:

$$S^\dagger = \exp\left(a^{0i} \Sigma_{0i} - \frac{a^{ij}}{2} \Sigma_{ij}\right) \quad (3.118)$$

e

$$S^{-1} = \exp\left(-a^{0i} \Sigma_{0i} - \frac{a^{ij}}{2} \Sigma_{ij}\right). \quad (3.119)$$

Através das equações (3.118) e (3.119) comprova-se que a quantidade $\psi^\dagger \psi$ em (3.117) não é invariante. Por outro lado, considerando a quantidade:

$$\begin{aligned} \frac{a^{\mu\nu}}{2} \Sigma_{\mu\nu} \gamma_0 &= a^{0i} \Sigma_{0i} \gamma_0 + \frac{a^{ij}}{2} \Sigma_{ij} \gamma_0 \\ &= \gamma_0 \left(-a^{0i} \Sigma_{0i} + \frac{a^{ij}}{2} \Sigma_{ij}\right), \end{aligned} \quad (3.120)$$

logo, comprova-se que $S^\dagger \gamma_0 = \gamma_0 S^{-1}$, pois:

$$\begin{aligned}
 S^\dagger \gamma_0 &= \sum_n \frac{\left(a^{0i} \Sigma_{0i} - \frac{a^{ij}}{2} \Sigma_{ij} \right)}{n!} \gamma_0 \\
 &= \gamma_0 \sum_n \frac{\left(-a^{0i} \Sigma_{0i} - \frac{a^{ij}}{2} \Sigma_{ij} \right)}{n!} \\
 &= \gamma_0 S^{-1}.
 \end{aligned} \tag{3.121}$$

Com isto, é introduzida a quantidade $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_0$. Analisando a invariância de $\bar{\psi} \psi$:

$$(\bar{\psi} \psi)' = \psi'^\dagger \gamma_0 \psi = (S \psi)^\dagger \gamma_0 S \psi = \psi^\dagger \gamma_0 S^{-1} S \psi = \bar{\psi} \psi. \tag{3.122}$$

Observa-se então que a quantidade $\bar{\psi} \psi$ é invariante de Lorentz. Portanto, na construção da ação de Dirac, considera-se $\bar{\psi} \psi$ não $\psi^\dagger \psi$ [21].

3.4 Espinores de Dirac, Weyl e Majorana

Para formular uma teoria quântica que respeitasse a relatividade restrita, descobriu-se que a quantidade $\bar{\psi} \psi$ é invariante de Lorentz, como pode ser visto na equação 3.122, onde ψ é o spinor de Dirac. Por sua vez, este contém quatro coordenadas, ou seja, o mesmo pode ser escrito como uma matriz coluna 4 x 1. Para a construção do spinor de Dirac será formulada a representação dos espinores de Weyl como passo intermediário[21].

Nos geradores da representação spinorial do grupo de Lorentz, observa-se a dependência destes em relação as matrizes γ_μ , o que pode ser observado em (3.106), estas formam um conjunto de matrizes que respeitam a álgebra de Clifford, e não possuem uma única representação. Dentre as representações das matrizes γ_μ , destacam-se as representações de Dirac, Weyl e Majorana [22].

A definição de qual representação será utilizada depende de quais objetivos devem ser alcançados, como exemplo, a representação de Dirac é utilizada na discussão do limite clássico da equação de Dirac. A representação de Weyl é bastante utilizada quando se quer analisar as propriedades de quiralidades de férmions. Já a representação de Majorana destaca-se por sua dependência da matriz de conjugação de carga e por seus espinores serem compostos inteiramente por componentes reais [22].

3.4.1 Representação de Weyl

A representação de Weyl das matrizes γ em termos das matrizes de Pauli é:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_{2 \times 2} \\ \mathbb{I}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.123)$$

estas atuam em espinores do tipo $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$, que são chamados de right e left respectivamente. Estes se transformam da seguinte maneira:

- Right;

$$\psi_\alpha \Rightarrow \psi'_\alpha = \left(e^{i\frac{\theta^j \sigma_j}{2}} \right)_\alpha^\beta \psi_\beta. \quad (3.124)$$

- Left;

$$\psi^{\dot{\alpha}} \Rightarrow \psi'^{\dot{\alpha}} = \left(e^{i\frac{\theta^j \sigma_j}{2}} \right)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \psi^{\dot{\beta}}. \quad (3.125)$$

Tomando como base um conjunto de duas operações que são feitas através de elementos de um grupo, podemos verificar que

$$R[g_1]R[g_2] = e^{i\alpha(g_1 g_2)} R[g_1 g_2]. \quad (3.126)$$

Como as transformações de espinores pertencem ao grupo de Lorentz, a transformação geral que combina rotações e boosts é:

$$\Lambda^\mu_\nu = \left(e^{i\omega^j k_j} e^{i\theta^j J_j} \right)^\mu_\nu, \quad (3.127)$$

onde J_i e K_i são definidos em (3.97). Tomando as definições de M_i e N_i em 3.101, analisa-se o spinor right de Weyl[21]. Para o spinor right $N_i = 0$, logo $J_i = ik_i = \frac{\sigma_i}{2}$, com isso a transformação deste spinor é dada por:

$$\Lambda(R) = e^{\frac{\omega^j \sigma_j}{2}} e^{i\frac{\theta^j \sigma_j}{2}}. \quad (3.128)$$

De maneira semelhante, para o spinor left, definido por $M_i = 0$, tem-se $J_i = -iK_i = -\frac{\sigma_i}{2}$. Logo,

$$\Lambda(L) = e^{-\frac{\omega^j \sigma_j}{2}} e^{i\frac{\theta^j \sigma_j}{2}}. \quad (3.129)$$

3.4.2 Representação de Dirac

Para construir o espinor de Dirac é necessário observar a representação matricial das equações (3.128) e (3.129), tais equações formam matrizes bidimensionais agindo nos espinores

de Weyl. Para desenvolver as representações completa de matrizes que seguem a álgebra de Clifford em quatro dimensões de Minkowski, descritas em (3.105), onde estas atuam em objetos ψ^α [21], nos espinores de Dirac, que se transformam como,

$$(\gamma^\mu)^\alpha_\beta \psi^\beta = (\psi')^\alpha, \quad (3.130)$$

estes objetos são compostos pelos dois espinores de Weyl,

$$\psi^\alpha = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}. \quad (3.131)$$

Destaca-se aqui que existe uma liberdade na escolha das matrizes γ^i 's, desde que a álgebra de Clifford seja respeitada, desta forma, define-se a representação de Dirac das matrizes γ^i 's como:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.132)$$

É possível construir um operador que relaciona o spinor de Dirac com os espinores de Weyl. Para isto é necessário analisar as propriedades da matriz γ^5 definida em (3.110), que pode ser escrita na representação de Dirac explicitamente como:

$$\gamma^0 \gamma^1 = (-i\sigma^1 \otimes \mathbb{I})(\sigma^2 \otimes \sigma^1) = -i\sigma^1 \sigma^2 \otimes \sigma^1 = \sigma^3 \otimes \sigma^1, \quad (3.133)$$

$$\gamma^2 \gamma^3 = (\sigma^2 \otimes \sigma^2)(\sigma^2 \otimes \sigma^3) = \mathbb{I} \otimes \sigma^2 \sigma^3 = \mathbb{I} \otimes i\sigma^1, \quad (3.134)$$

portanto, substituindo (2.133) e (2.134) na definição de γ^5 ,

$$\gamma^5 = -i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = (\sigma^3 \otimes \sigma^1)(\mathbb{I} \otimes \sigma^1) = \sigma^3 \otimes \mathbb{I} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad (3.135)$$

como γ^5 é diagonal, é imediato ver que:

$$\gamma^5 \psi_R = +\psi_R \quad \text{e} \quad \gamma^5 \psi_L = -\psi_L. \quad (3.136)$$

Através das equações em (3.136), pode-se definir os operadores de projeção P_R e P_L que atuando no spinor de Dirac geram os subespaços R/L [21]. Portanto, definindo,

$$P_R \equiv \frac{1 + \gamma^5}{2} \quad \text{e} \quad P_L \equiv \frac{1 - \gamma^5}{2}, \quad (3.137)$$

podemos verificar as seguintes propriedades,

$$P_R^\dagger = P_R; \quad P_L^\dagger = P_L; \quad P_R^2 = P_R; \quad P_L^2 = P_L \quad \text{e} \quad P_R P_L = 0. \quad (3.138)$$

Com as definições (3.137) é fácil ver que;

$$\frac{1 + \gamma^5}{2} \psi = \psi_R \quad \text{e} \quad \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi = \psi_L. \quad (3.139)$$

definem a relação entre os espinores de Dirac e Weyl.

3.4.3 Representação de Majorana

A representação de Majorana é construída de maneira que as matrizes γ_i sejam complexas [22].

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = i \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \quad (3.140)$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = -i \begin{pmatrix} \sigma^1 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix},$$

Com a combinação das matrizes (3.140), pode-se obter:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix}. \quad (3.141)$$

Como todas as matrizes γ são complexas, $(\gamma^\mu)^* = -\gamma_\mu$ e $(\gamma^5)^* = -\gamma_5$. A conexão desta representação se faz pela matriz unitária U,

$$U = U^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \gamma_{Majorana}^\mu = U \gamma_{Dirac}^\mu U^\dagger. \quad (3.142)$$

O spinor de Majorana é definido da seguinte forma:

$$\psi^C = C \bar{\psi}^T = \psi, \quad (3.143)$$

onde na representação de Majorana a matriz de conjugação de carga $C = \gamma^0$. Os espinores de Majorana são reais,

$$\gamma^C = -\gamma^0(\psi^\dagger \gamma^0)^T = \psi^* \quad \longrightarrow \quad \psi = \psi^*. \quad (3.144)$$

Como a matriz γ^5 também é diagonal nesta representação, assim como em (3.135), as relações de projeções em (3.139) continuam válidas. É importante destacar que o spinor de Majorana tem quatro componentes reais, com isto o mesmo tem quatro graus de liberdade. Já o spinor de Weyl tem duas componentes complexas, ou seja, quatro graus de liberdade, assim como no spinor de Majorana. Por outro lado, o spinor de Dirac tem quatro componentes complexas, resultando em oito graus de liberdade [22].

3.5 A equação de Dirac

Na tentativa de propor uma teoria quântica que fosse compatível com a relatividade especial, em 1927 foi apresentada a equação de Klein-Gordon, esta por sua vez apresentava resultados que eram equivocadamente considerados incorretos, como exemplo as soluções negativas de energia. O desenvolvimento de outra teoria era necessário com o suposto erro da equação de equação de Klein-Gordon, o que motivou em 1928 Dirac a desenvolver sua teoria quântica relativística [8].

3.5.1 Ação de Dirac

Para construir uma ação relativística, primeiramente precisa-se analisar se seus termos são covariantes [21]. Como foi visto anteriormente, a quantidade $\bar{\psi}\psi$ é invariante de Lorentz, além disso, considerando as seguintes transformações no espaço de Minkowski :

$$\gamma'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu} \quad \text{e} \quad \partial'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} \partial_{\nu}. \quad (3.145)$$

É fácil ver que o termo $\gamma^{\mu} \partial_{\mu}$ é invariante de Lorentz também, desta maneira uma proposta de ação que seja invariante de Lorentz e geram as equações de movimento de Dirac é:

$$S_{\psi} = \int d^4x \bar{\psi} (\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m) \psi, \quad (3.146)$$

onde defini-se $\gamma^{\mu} \partial_{\mu} \equiv \not{\partial}$ e $\gamma^{\mu} p_{\mu} \equiv \not{p}$. Sabendo que $\psi \in \mathbb{C}$ e que ψ , $\bar{\psi}$ são campos independentes, a variação da ação resulta em:

$$(\gamma^{\mu} \psi_{\mu} - m) \psi = 0, \quad (3.147)$$

esta é a equação de movimento de Dirac.

A ação em (3.147) foi construída em termos dos espinores de Dirac ψ e uma representação γ^{μ} da álgebra de Clifford, logo a representação específica que deve ser utilizada,

vai depender do problema em análise [22].

Para analisar a quiralidade, o spinor de Dirac da equação (3.147) deve ser decomposto nos espinores de Weyl ψ_R e ψ_L . Uma vez que:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad i\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.148)$$

o termo de massa da ação fica:

$$\begin{aligned} m\bar{\psi}\psi &= m\psi^\dagger i\gamma^0 \psi = m \begin{pmatrix} \psi_R^\dagger & \psi_L^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} \\ &= m \begin{pmatrix} \psi_R^\dagger & \psi_L^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} \\ &= m(\psi_R^\dagger \psi_L + \psi_L^\dagger \psi_R), \end{aligned} \quad (3.149)$$

A expressão (3.149) que representa o termo de massa de Dirac, apresenta um comportamento completamente acoplado, agrupando espinores de quiralidades left e right [21]. Para contornar esse problema, é necessário a obtenção de duas ações individuais para cada spinor de Weyl. Levando-se em conta a representação de Majorana,

$$\psi X = \psi^a X_a = \psi_b \varepsilon^{ba} X_a. \quad (3.150)$$

Sabendo-se que:

$$\varepsilon^{ba} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.151)$$

As matrizes em (3.151) são proporcionais, relacionadas por $i\sigma^2 = \varepsilon^{ba}$, com isso a equação (3.150) fica:

$$\psi_b \varepsilon^{ba} X_a = \psi_b i\sigma^2 X_a = \psi^\dagger i\sigma^2 X_R, \quad (3.152)$$

para o spinor ψ_R pode-se escrever o novo termo de massa, denominado termo de massa de Majorana;

$$L_{Mm} = m\psi_R^\dagger i\sigma^2 \psi_R. \quad (3.153)$$

Para encontrar o termo cinético descoplado é necessário dos operadores de projeção definidos em (3.137), pode-se observar que estes seguem as seguintes propriedades:

$$P_L^\dagger i\gamma^0 = i\gamma^0 P_R; \quad P^2 = \bar{P}_L P_R; \quad \bar{\psi} P_{R(L)} \psi = \bar{\psi}_{L(R)} \psi_{R(L)} \quad \text{e} \quad \not{P} P_R = P_L \not{P}, \quad (3.154)$$

logo:

$$\bar{\psi}\not{\partial}P_R\psi = \bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu P_R^2\psi = \bar{\psi}P_L\not{\partial}P_R\psi = (\overline{P_R\psi})\not{\partial}(P_R\psi) = \bar{\psi}_R\not{\partial}\psi_R. \quad (3.155)$$

Para o spinor ψ_L é semelhante, desta maneira, somando ambos os resultados,

$$\bar{\psi}\not{\partial}\psi = \bar{\psi}\not{\partial}(P_R + P_L)\psi = \bar{\psi}_R\not{\partial}\psi_R + \bar{\psi}_L\not{\partial}\psi_L. \quad (3.156)$$

Com os resultados obtidos em (3.153) e (3.156) a equação de Dirac pode ser encarada de maneira separada para os espinores ψ_R e ψ_L .

3.5.2 Soluções da equação de Dirac

Partindo da equação (3.147) e multiplicando a mesma por $(\gamma^\mu\psi_\mu + m)$:

$$(\gamma^\mu\psi_\mu + m)(\gamma^\mu\psi_\mu - m)\psi = 0 \longrightarrow (\partial_\mu\partial_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu - m^2) = 0 \quad (3.157)$$

onde,

$$\partial_\mu\partial_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu = \partial_\mu\partial_\nu\frac{1}{2}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\} = \partial_\mu\partial_\nu\eta^{\mu\nu} \equiv \square. \quad (3.158)$$

A equação (3.157) é a equação de Klein-Gordon. Com isto, uma solução da equação de Dirac também é solução da equação de Klein-Gordon [21]. As soluções da equação de KG são:

$$e^{\pm ip_\mu x^\mu} u(p), \quad (3.159)$$

onde $p^2 = -m^2$ e $u(p)$ é um spinor.

- Considerando o sinal positivo de (3.159) $e^{ip_\mu x^\mu} u(p)$:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip_\mu x^\mu} u(p), \quad (3.160)$$

logo:

$$\begin{aligned} (\not{\partial} - m)\psi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (i\gamma^\mu p_\alpha \delta_\mu^\alpha - m)u(p)e^{ip_\alpha x^\alpha} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (i\gamma^\mu p_\mu - m)u(p)e^{ip_\alpha x^\alpha} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.161)$$

portanto:

$$(i\not{p} - m)u(p) = 0. \quad (3.162)$$

esta equação na representação de Weyl (3.123) tem a forma:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & p_\mu \sigma^\mu \\ p_\mu \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m\mathbb{I} & 0 \\ 0 & m\mathbb{I} \end{pmatrix} \right] u_s(p) = 0, \quad \text{onde } \bar{\sigma}^\mu \equiv -\sigma^\mu \quad (3.163)$$

logo:

$$\begin{pmatrix} -m\mathbb{I} & p_\mu \sigma^\mu \\ p_\mu \bar{\sigma}^\mu & -m\mathbb{I} \end{pmatrix} u_s(p) = 0. \quad (3.164)$$

Simplificando este resultado considerando um referencial inercial $\vec{p} = 0$, logo $p_\mu \sigma^\mu = -m\mathbb{I}$:

$$m \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathbb{I} \end{pmatrix} u_s(p) = 0. \quad (3.165)$$

Sendo $u(p) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ uma matriz coluna, é fácil ver que uma solução da equação 3.165 é $a_1 = -a_3$ e $a_2 = -a_4$, desta maneira por simplificação, escolhe-se os valores $a_1 = 1, 0$ e $a_2 = 0, 1$ respectivamente, resultando em soluções do tipo:

$$u_s(p) = \begin{pmatrix} \xi_s \\ -\xi_s \end{pmatrix} \rightarrow u_1 = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u_2 = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (3.166)$$

- Considerando o sinal negativo em (3.159) $-e^{ip_\mu x^\mu} u(p)$:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-ip_\mu x^\mu} v(p), \quad (3.167)$$

de maneira semelhante ao que foi realizado na equação (3.161), é obtido o resultado:

$$(-i\not{p} - m)v(p) = 0. \quad (3.168)$$

Na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} m\mathbb{I} & p_\mu \sigma^\mu \\ p_\mu \bar{\sigma}^\mu & m\mathbb{I} \end{pmatrix} v_s(p) = 0. \quad (3.169)$$

Novamente fazendo a simplificação de um referencial inercial:

$$m \begin{pmatrix} \mathbb{I} & -\mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & \mathbb{I} \end{pmatrix} v_s(p) = 0. \quad (3.170)$$

Esta equação resulta nos espinores:

$$v_s(p) = \begin{pmatrix} \xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix} \longrightarrow v_1 = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } v_2 = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.171)$$

Os resultados obtidos nas equações (3.166) e (3.171) podem ser generalizados para o caso de um referencial não inercial, ou seja, para $\vec{p} \neq 0$,

$$u_s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{-p_\mu \sigma^\mu} \xi_s \\ -\sqrt{-p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi_s \end{pmatrix} \text{ e } v_s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{-p_\mu \sigma^\mu} \xi_s \\ \sqrt{-p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi_s \end{pmatrix}, \quad (3.172)$$

estes por sua vez devem satisfazer as relações:

$$\bar{u}_s(p) u_{s'}(p) = -2m \delta_{ss'} \quad (3.173)$$

$$\bar{v}_s(p) v_{s'}(p) = 2m \delta_{ss'} \quad (3.174)$$

$$\bar{u}_s(p) v_{s'}(p) = \bar{v}_s(p) u_{s'}(p) = 0. \quad (3.175)$$

O que implica na ortogonalidade dos espinores u_s e v_s .

3.6 Espinores em espaço-tempo curvos

Na construção de uma teoria quântica que segue as leis de invariância relativística, foi descrita a formulação spinorial do grupo de Lorentz, resultando na equação de Dirac que descreve partículas com spin semi-inteiro. Para generalizar a ideia de covariância, é necessário considerar a teoria gravitacional, para isto, leva-se em conta o princípio da equivalência de Einstein, no qual relaciona quantidades que estão num referencial inercial (espaço flat) com quantidades no referencial do campo (espaço curvo) [9].

Com o intuito de acoplar a interação gravitacional com partículas de spin 1/2, ou seja, os férmions, é necessário a introdução de novos objetos matemáticos e^a_μ , que são vetores que relacionam as transformações de Lorentz, representados por índices latinos, com transformações gerais de coordenadas, representados por índices gregos, e são denominados tetradas ou vierbiens [10].

Para construir o formalismo matemático dos espinores em espaços-tempo curvos, considera-se o princípio da equivalência, interpretando as coordenadas x^μ e suas derivadas no

referencial de "queda livre"[23]. Logo $\{x^\mu\} \rightarrow \{\xi^a\}$, com isso:

$$d\xi^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial x^\mu} dx^\mu, \quad (3.176)$$

definindo as tetradas como as quantidades $e^a_\mu \equiv \frac{\partial \xi^a}{\partial x^\mu}$. Dessa forma também podemos encontrar o elemento inverso dado por:

$$d\xi^a = e^a_\mu(x) dx^\mu \quad \text{e} \quad dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a} d\xi^a \equiv e_a^\mu(x) d\xi^a, \quad (3.177)$$

com as duas relações em (3.177),

$$d\xi^a = e^a_\mu(x) dx^\mu = e^a_\mu e_b^\mu(x) d\xi^b \quad \longrightarrow \quad e^a_\mu e_b^\mu = \delta_b^a. \quad (3.178)$$

Levando em consideração a transformação de um sistema de coordenadas flat para um sistema de coordenadas gerais $\{\xi^a\} \rightarrow \{x^\mu\}$, a métrica e sua inversa poderão ser escrita como:

$$g_{\mu\nu} = e^a_\mu(x) e^b_\nu(x) \eta_{ab} \quad \text{e} \quad g^{\mu\nu} = e_a^\mu(x) e_b^\nu(x) \eta^{ab}. \quad (3.179)$$

Já a métrica de Minkowski e sua inversa pode ser escrita em termos da métrica geral como:

$$\eta_{ab} = e_a^\mu(x) e_b^\nu(x) g_{\mu\nu} \quad \text{e} \quad \eta^{ab} = e_\mu^a(x) e_\nu^b(x) g^{\mu\nu}. \quad (3.180)$$

As matrizes gamma's em espaços curvos seguem a álgebra de Clifford descrita na equação 3.103, podem ser escritas em função das matrizes em espaços planos:

$$\Gamma^\mu = e_a^\mu \Gamma^a. \quad (3.181)$$

A ação de Dirac no espaço de Minkowski como foi vista na equação (3.145), possui simetria por transformação de Lorentz, implica dizer que as operações realizadas sob o grupo de Lorentz, não tem dependência das coordenadas do espaço-tempo [9]. Este fato é evidente quando é analisada a transformação dos espinores na equação (3.115), onde a matriz S não depende das coordenadas x^μ .

Como no espaço-tempo curvo a métrica não pode ser reduzida a uma métrica com as componentes constantes, ou seja, suas componentes sempre irão depender das coordenadas, as transformações nesses espaços devem variar de ponto a ponto, logo a equação (3.114) deverá ser escrita com uma dependência das coordenadas:

$$\psi'(x) = S(x) \psi(x). \quad (3.182)$$

Assim como foi necessário a generalização do conceito de derivada de um vetor num espaço-tempo curvo, surgirá uma regra de derivada de espinores se considerada a curvatura. Considerando $S(x) = S(\Lambda(x))$ e a transformação do operador ∂_μ ,

$$(\partial_a \psi)' = \Lambda_a^\nu(x) \partial_\nu S(x) \psi + \Lambda_a^\nu(x) S(x) \partial_\nu \psi, \quad (3.183)$$

observe que o primeiro tem a derivada da matriz S , ou seja, se a mesma não tem dependência das coordenadas, simetria é mantida. Para contornar esse problema, é introduzida a derivada spin-covariante D_a :

$$D_a \equiv e_a^\mu (\partial_\mu + \Omega_\mu), \quad (3.184)$$

onde Ω_μ é a conexão de spin. Esta por sua vez tem papel semelhante aquela definida na equação (2.34), na derivada de vetores em espaço curvo [9]. Com o intuito de que o operador (3.184) aplicado no spinor ψ seja invariante, exige-se condição:

$$(D_a \psi)' = \Lambda_a^b S(x) D_b \psi, \quad (3.185)$$

com isso calcula-se:

$$\begin{aligned} (D_a \psi)' &= e_a'^\mu (\partial'_\mu + \Omega'_\mu) \psi' \\ &= e_a'^\mu \partial'_\mu \psi' + e_a'^\mu \Omega'_\mu \psi', \end{aligned} \quad (3.186)$$

com a imposição (3.185) e substituindo a equação (3.183) no primeiro termo do lado direito da equação (3.186) resultando em:

$$\begin{aligned} \Lambda_a^b S(x) D_b \psi &= e_a'^\mu \Lambda_\mu^\nu(x) \partial_\nu S(x) \psi + e_a'^\mu \Lambda_\mu^\nu(x) S(x) \partial_\nu \psi + e_a'^\mu \Omega'_\mu S(x) \psi \\ \Lambda_a^b S(x) e_b^\lambda (\partial_\lambda + \Omega_\lambda) \psi &= e_a'^\mu \Lambda_\mu^\nu(x) \partial_\nu S(x) \psi + e_a'^\mu \Lambda_\mu^\nu(x) S(x) \partial_\nu \psi + e_a'^\mu \Omega'_\mu S(x) \psi, \end{aligned} \quad (3.187)$$

sabendo que as tetradas se transformam com a regra $e_a'^\mu = \Lambda_a^b e_b^\mu$, e observando que o primeiro termo do lado esquerdo se cancela com o segundo termo do lado direito resultando:

$$\Omega'_\mu = -\partial_\mu S(x) S^{-1}(x) + S(x) \Omega_\mu S^{-1}(x) \quad (3.188)$$

onde ambos os lados foram multiplicados a direita por $S^{-1}(x)$. Podemos observar que a equação (3.186) preserva seu formato se o objeto Ω se transforma da forma (3.188). Para calcular a forma explícita de Ω , levamos em conta o postulado tetrado, onde o mesmo afirma que a deri-

vada covariante do vierbein é nula, logo:

$$\nabla_{\mu} e^{\alpha}_{\nu} \equiv \partial_{\mu} e^{\alpha}_{\nu} - e^{\alpha}_{\rho} \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \omega_{\mu}^{\alpha\beta} e^{\beta}_{\nu} = 0, \quad (3.189)$$

desta forma pode-se concluir que:

$$\Omega_{\mu} = e^a_{\lambda} (\partial_{\mu} e^{b\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} e^{b\nu}) \Sigma_{ab} = \frac{i}{2} \Omega^{ab} \Sigma_{ab}, \quad (3.190)$$

onde Σ_{ab} é o gerador do grupo de Lorentz. Com isso a derivada spin-covariante em (3.185) fica:

$$D_a = e_a^{\mu} \left(\partial_{\mu} + \frac{1}{4} \Omega_{\mu}^{ab} \Gamma_a \Gamma_b \right). \quad (3.191)$$

Este operador é fundamental para o acoplamento da gravidade na teoria de Dirac [9].

4 O ELETROMAGNETISMO COVARIANTE

De maneira diferente da mecânica clássica, o eletromagnetismo clássico já é coerente com relatividade restrita. Isso implica que as equações de Maxwell e a força de Lorentz podem ser aplicadas em qualquer referencial inercial. Embora alguns fenômenos sejam interpretados como elétricos para um determinado observador, e magnéticos para outro, o movimento das partículas interagindo com esses campos serão os mesmos. O eletromagnetismo pode ser reformulado numa notação denominada covariante, onde suas equações são escritas através de quadri-vetores no espaço-tempo de Minkowski. Apesar da formulação covariante do eletromagnetismo ser uma nova forma de se escrever as equações de Maxwell, as regras da eletrodinâmica clássica não mudam [11].

Para calcular a dinâmica de uma partícula carregada interagindo com um campo eletromagnético, considera-se a ação

$$S = \int_a^b (-m d\tau + q A_\mu dx^\mu); \quad A^\mu = (\phi, \vec{A}), \quad (4.1)$$

onde sua variação em relação as coordenadas é dada por:

$$\delta S = \int_a^b [-m \delta(d\tau) + q \delta A_\mu dx^\mu + q A_\mu d(\delta x^\mu)], \quad (4.2)$$

sabendo que $\delta(d\tau) = -u_\mu d(\delta x^\mu)$ e $\delta A_\mu = \partial_\nu A_\mu \delta x^\nu$,

$$\delta S = \int_a^b \left[(m u_\mu + q A_\mu) \frac{d}{d\tau} (\delta x^\mu) + q (\partial_\nu A_\mu) u^\mu \delta x^\nu \right], \quad (4.3)$$

integrando o primeiro termo de (4.3) por partes,

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_a^b \left[-\frac{d}{d\tau} (m u_\mu + q A_\mu) \delta x^\mu + q (\partial_\nu A_\mu) u^\mu \delta x^\nu \right] + (m u_\mu + q A_\mu) \delta x^\mu \Big|_a^b \\ &= \int_a^b \left[-m \frac{du_\mu}{d\tau} \delta x^\mu - q (\partial_\nu A_\mu) u^\mu \delta x^\nu + q (\partial_\nu A_\mu) u^\nu \delta x^\mu \right] d\tau \\ &= \int_a^b \left[-m \frac{du_\mu}{d\tau} \delta x^\mu + q \delta x^\mu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) u^\nu \right] d\tau. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Definindo o tensor $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$:

$$\int_a^b \left[-m \frac{du_\mu}{d\tau} + q F_{\mu\nu} u^\nu \right] \delta x^\mu d\tau, \quad (4.5)$$

obtendo por fim a equação de movimento:

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = q F^{\mu\nu} u_\nu, \quad (4.6)$$

esta equação é a generalização da Força de Lorentz. Da definição do tensor $F_{\mu\nu}$, observa-se que o mesmo é um tensor de segunda ordem e antissimétrico, onde suas componentes são dadas por $F^{ij} = \varepsilon^{ijk} B_k$ e $F^{0i} = E^i$.

Para obtenção das equações de Maxwell, segue-se de maneira semelhante ao que foi feito para o campo escalar na equação (2.12), onde o segundo termo é substituído por $\Phi \rightarrow A_\mu J^\mu$ e o termo dinâmico é dado por:

$$\mathcal{L}_{campo} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (4.7)$$

Logo a ação do campo eletromagnético é:

$$S = - \int m d\tau + \int A_\mu J^\mu d^4x - \frac{1}{16\pi} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x, \quad (4.8)$$

variando esta ação em relação ao campo A_μ ,

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \delta A_\mu J^\mu d^4x - \frac{1}{16\pi} \int \delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) d^4x, \\ &= \int \left(\delta A_\mu J^\mu d^4x - \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} \right) d^4x, \end{aligned} \quad (4.9)$$

sabendo que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$:

$$\delta S = \int \left(J^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu \right) d^4x, \quad (4.10)$$

observando que $F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu = \partial_\nu (F^{\mu\nu} \delta A_\mu) - \delta A_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu}$,

$$\delta S = \int \left(J^\mu - \frac{1}{4\pi} \partial_\nu F^{\mu\nu} \right) \delta A_\mu d^4x + \frac{1}{4\pi} \int \partial_\nu (F^{\mu\nu} \delta A_\mu) d^4x. \quad (4.11)$$

Aplicando o teorema da divergência no último termo da equação (4.11), onde $\delta A_\mu = 0$ na hipersuperfície que envolve o volume d^4x , conclue-se que:

$$\delta S = \int \left(J^\mu - \frac{1}{4\pi} \partial_\nu F^{\mu\nu} \right) \delta A_\mu d^4x = 0, \quad (4.12)$$

concluindo por fim:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\mu. \quad (4.13)$$

Utilizando a definição de $F_{\mu\nu}$ é fácil observar que:

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \quad (4.14)$$

onde as quatro equações de Maxwell juntamente com a conservação da carga podem ser extraídas das equações (4.13) e (4.14).

Para uma generalização em espaços curvos da teoria covariante do eletromagnetismo, o elemento de volume na ação (4.8) deve ser substituído pelo invariante $d^4x \rightarrow \sqrt{-g}d^4x$ e o tensor eletromagnético deve ser escrito em termos das derivadas covariantes, ou seja, $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$, logo a ação (4.8) fica na forma:

$$S = - \int m d\tau + \int \sqrt{-g} A_\mu J^\mu d^4x - \frac{1}{16\pi} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (4.15)$$

De maneira semelhante ao procedimento realizado em (4.8), e levando em conta o resultado obtido para $\delta(\sqrt{-g})$ em (2.67), encontra-se a equação de movimento:

$$m u^\nu \nabla_\nu u^\mu = \left(\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\lambda\theta} u^\lambda u^\theta \right) = q F^{\mu\lambda} u_\lambda, \quad (4.16)$$

e as equações (4.13) e (4.14) ficam:

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = 4\pi J^\mu \quad (4.17)$$

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = 0. \quad (4.18)$$

Assim como no espaço flat, as equações (4.17) e (4.18) fornecem as equações de Maxwell [2].

5 WORMHOLES NA TEORIA EDM

A busca por soluções exatas das equações de Einstein tem importância fundamental no entendimento das propriedades conceituais e matemáticas da estrutura do espaço-tempo. Dentre as soluções conhecidas das equações de campo, como mencionadas no capítulo 2, destacam-se soluções do tipo wormholes, que apresentam geometrias que conectam regiões distintas do espaço-tempo. Assim, as mesmas proporcionam ferramentas para o entendimento teórico de topologias e propriedades físicas de regiões com curvatura não trivial do espaço-tempo.

Os grandes desafios físicos para a existência de tais objetos, surgem das condições apresentadas por suas fontes. Embora essas estruturas sejam previstas matematicamente pelas equações de campo, sua existência física é restrita à presença de fontes com propriedades não convencionais, pois frequentemente estão associadas à violação das condições clássicas de energia.

Neste trabalho, com o intuito de investigar novas soluções exatas das equações de Einstein, introduz-se como fontes, campos bem conhecidos e estudados na literatura, os campos fermiônico e eletromagnético. Com a combinação dos mesmos, formula-se a teoria de Einstein-Dirac-Maxwell, que apresenta uma dinâmica gravitacional determinada pelo acoplamento dos campos espinorial de Dirac e eletromagnético.

Desta forma, este capítulo tem como objetivo formular a teoria Einstein-Dirac-Maxwell, encontrando soluções do sistema de equações que descreve o modelo. É constatado, após as verificações das condições de energia, que a solução analítica encontrada neste trabalho, é do tipo wormhole, levantando assim uma importante discussão, pois a geometria de tal estrutura está sendo sustentada por “matéria ordinária” (os férmions). Ao final do capítulo, tenta-se estender o modelo para soluções do tipo Simpson-Visser, mostrando assim as limitações do modelo.

5.1 A ação da teoria

Sabe-se que as equações de Einstein levam à estruturas geométricas bem conhecidas na literatura como blackholes e wormholes, onde ambas soluções são sustentadas por diferentes tipos de fontes. Distintamente das soluções de buracos negros, que podem corresponder ao

regime de vácuo fora da fonte gravitacional, wormholes atravessáveis requerem a presença de fontes que violam determinadas condições de energia, como a condição de energia nula, o que significa dizer que o tensor de EM é composto por fontes de matéria exótica [24], [16].

Para a construção da teoria EDM, será considerada uma fonte composta por dois férmions relativísticos com spins opostos, de forma que obedecem o princípio de exclusão de pauli [19], e a estrutura geométrica simetricamente esférica seja mantida [4]. Desta forma, considerando as constantes $G = c = \hbar = 1$, a ação do modelo é dada por:

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{4} R + \mathcal{L}_{\mathcal{D}} - \frac{1}{4} F^2 \right], \quad (5.1)$$

sendo $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ é a densidade lagrangiana de Dirac, dada por:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}} = \sum_{\varepsilon=1,2} \left[\frac{i}{2} \bar{\Psi}^{\varepsilon} \gamma^{\nu} \hat{D}_{\nu} \Psi^{\varepsilon} - \frac{i}{2} \hat{D}_{\nu} \bar{\Psi}^{\varepsilon} \gamma^{\nu} \Psi^{\varepsilon} - \mu \bar{\Psi}^{\varepsilon} \Psi^{\varepsilon} \right], \quad (5.2)$$

onde \hat{D}_{ν} é a derivada covariante dada por $D_{\nu} = \partial_{\nu} - \Gamma_{\nu} - iqA_{\nu}$.

5.2 Equações de movimento

Para obter a equação de movimento relacionada ao campo de gauge, varia-se a ação (5.1) em relação ao campo A_{ν} :

$$\begin{aligned} \delta S_A &= \frac{1}{4\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\delta \mathcal{L}_{\mathcal{D}} - \frac{1}{4} \delta (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \nabla_{\mu} F^{\mu\nu} \delta A_{\nu} + \frac{i}{2} \sum_{\varepsilon=1,2} [\bar{\Psi}^{\varepsilon} \gamma^{\nu} (-iq \delta A_{\nu}) \Psi^{\varepsilon} - (iq \delta A_{\nu}) \bar{\Psi}^{\varepsilon} \gamma^{\nu} \Psi^{\varepsilon}] \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} + q \sum_{\varepsilon=1,2} \bar{\Psi}^{\varepsilon} \gamma^{\nu} \Psi^{\varepsilon} \right) \delta A_{\nu}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

pelo princípio de Hamilton:

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = -q \sum_{\varepsilon=1,2} \bar{\Psi}^{\varepsilon} \gamma^{\nu} \Psi^{\varepsilon} \equiv -q j^{\nu}. \quad (5.4)$$

Observe que o fator 4π não aparece em (5.4) assim como em (4.13) por conta do fator $\frac{1}{4\pi}$ global em (5.1). Agora, variando a ação em relação a $\bar{\Psi}$:

$$\begin{aligned} \delta S_{\bar{\Psi}} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\varepsilon=1,2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{i}{2} (\delta \bar{\Psi}^{\varepsilon}) \gamma^{\nu} \hat{D}_{\nu} \Psi^{\varepsilon} - \frac{i}{2} (\hat{D}_{\nu} \delta \bar{\Psi}^{\varepsilon}) \gamma^{\nu} \Psi^{\varepsilon} - \mu \delta \bar{\Psi}^{\varepsilon} \Psi^{\varepsilon} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\varepsilon=1,2} \int d^4x \sqrt{-g} \delta \bar{\Psi}^{\varepsilon} (i \gamma^{\nu} \hat{D}_{\nu} - \mu) \Psi^{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

resultando na equação de movimento de Dirac,

$$(i\gamma^\nu \hat{D}_\nu - \mu)\Psi^\varepsilon = 0. \quad (5.6)$$

As equações de movimento (5.4) e (5.6) foram estudadas para uma geometria esfericamente simétrica. Por último, para a obtenção da equação de Einstein, basta variar a ação (5.1) em relação a métrica, lembrando que a dependência geométrica está em R e em $\mathcal{L}_\mathcal{D}$, pois as matrizes γ^μ e o operador \hat{D}_μ são escritos em termos das tetradas. Após a variação, temos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 2T_{\mu\nu}, \quad (5.7)$$

onde,

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(D)} + T_{\mu\nu}^{(M)} \Rightarrow T_{\mu\nu}^{(M)} = F_{\mu\alpha}F_\nu^\alpha - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^2 \quad (5.8)$$

$$T_{\mu\nu}^{(D)} = -\frac{i}{4} \sum_{\varepsilon=1,2} [\bar{\Psi}^\varepsilon \gamma_\mu \hat{D}_\nu \Psi^\varepsilon + \bar{\Psi}^\varepsilon \gamma_\nu \hat{D}_\mu \Psi^\varepsilon - \hat{D}_\nu \bar{\Psi}^\varepsilon \gamma_\mu \Psi^\varepsilon - \hat{D}_\mu \bar{\Psi}^\varepsilon \gamma_\nu \Psi^\varepsilon]. \quad (5.9)$$

Desta forma, podemos observar a contribuição dos campos de Maxwell e Dirac no tensor energia-momento.

5.3 Ansatz da métrica e suas conexões de spin

A proposta para um ansatz da geometria do problema deve considerar uma métrica que caracterize uma estrutura esfericamente simétrica, que proporcione a união de duas regiões assintoticamente planas e a ausência de um horizonte de eventos, esta pode ser dada por:

$$ds^2 = -F_0^2(r)dt^2 + F_1^2(r)dr^2 + F_2^2(r)d\theta^2 + F_2^2(r)\sin^2\theta, \quad (5.10)$$

onde suas tetradas são dadas por:

$$e_t^0 = \varepsilon_t F_0; e_r^1 = \varepsilon_r F_0; e_\theta^2 = F_2; e_\phi^3 = F_0 \sin\theta, \quad (5.11)$$

onde $\varepsilon_r = \pm 1$. A mudança de sinal, deve-se ao fato de que a métrica (5.10) tenha que representar as duas regiões "up" (Σ_+) para $0 < r < \infty$ e "down" (Σ_-) para $-\infty < r < 0$, unidas pela garganta. Já a situação em que $\varepsilon_t = -1$ representa um tempo reverso na região (Σ_-), tal detalhe será observado melhor na invariância por simetria de reflexão nas equações que representam o modelo EDM [5]. Retomando a métrica (5.10), suas funções $F_i(r)$, para $i = 0, 1, 2$, devem

satisfazer a simetria $F_i(r) = F_i(-r)$ e seus símbolos de Christoffel são dados por:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \frac{F_0'}{F_0}; \Gamma_{tt}^r = \frac{F_0'F_0}{F_1^2}; \Gamma_{rr}^r = \frac{F_1'}{F_1}; \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{F_2F_2'}{F_1^2}; \Gamma_{\phi\phi}^r = -\sin^2\theta \frac{F_2'F_2}{F_1^2} \\ \Gamma_{\theta r}^\theta &= \frac{F_2'}{F_2}; \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\cos\theta \sin\theta; \Gamma_{\phi r}^\phi = -\frac{F_2'}{F_2}; \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot\theta. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Com isso calcula-se as conexões de spin que podem ser definidas como mencionado na equação (3.190),

$$\omega_{\mu b}^a = e_b^\lambda (e_\nu^a \Gamma_{\mu\lambda}^\nu - \partial_\mu e_\lambda^a), \quad (5.13)$$

logo obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\omega_t^0{}_1 = \omega_t^1{}_0 = \left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_r} \right) \frac{F_0'}{F_1} \\ \omega_\theta^2{}_1 = -\omega_\theta^1{}_2 = \varepsilon_r \frac{F_2'}{F_1} \\ \omega_\phi^3{}_1 = -\omega_\phi^1{}_3 = \varepsilon_r \sin\theta \frac{F_2'}{F_1} \\ \omega_\phi^3{}_1 = -\omega_\phi^1{}_3 = \cos\theta. \end{array} \right. \quad (5.14)$$

Desta forma é possível calcular as matrizes de conexões de spin, que são necessárias para a construção do operador derivada covariante. Utilizando a definição:

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \hat{\gamma}^b \hat{\gamma}^c, \quad (5.15)$$

obtem-se,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_t = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_r} \right) \frac{F_0'}{F_1} \hat{\gamma}^0 \hat{\gamma}^1 \\ \Gamma_\theta = \frac{\varepsilon_r F_2'}{2 F_1} \hat{\gamma}^1 \hat{\gamma}^2 \\ \Gamma_\phi = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_r \sin\theta \frac{F_2'}{F_1} \hat{\gamma}^1 \hat{\gamma}^3 + \cos\theta \hat{\gamma}^2 \hat{\gamma}^3 \right). \end{array} \right. \quad (5.16)$$

As matrizes de conexões de spin acima em (5.16) são necessárias para a construção das componentes do operador \hat{D}_μ que é utilizado na construção do tensor de energia e momento e o operador de Dirac.

5.4 O tensor de energia e momento de Dirac

Das equação de Dirac em (5.6) e do tensor de energia e momento em (5.8), observa-se a necessidade de construir as componentes do operador derivada covariante. Com isso, é

possível expressar as componentes do operador $\hat{D}_\mu = \partial_\mu - \Gamma_\mu - iqA_\mu$, onde $A = V(r)dt$, como:

$$\begin{aligned}\hat{D}_t &= \partial_t - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_r} \right) \frac{F'_0}{F_1} \hat{\gamma}^0 \hat{\gamma}^1 - iqV \\ \hat{D}_r &= \partial_r \\ \hat{D}_\theta &= \partial_\theta - \frac{\varepsilon_r F'_2}{2 F_1} \hat{\gamma}^1 \hat{\gamma}^2 \\ \hat{D}_\phi &= \partial_\phi - \frac{1}{2} \left(\varepsilon_r \sin \theta \frac{F'_2}{F_1} \hat{\gamma}^1 \hat{\gamma}^3 + \cos \theta \hat{\gamma}^2 \hat{\gamma}^3 \right).\end{aligned}\tag{5.17}$$

Estas por sua vez, apresentam-se na forma de uma matrizes 4×4 , que dependem de qual representação será utilizada para as matrizes γ 's. Tomando a equação do tensor EM de Dirac em (5.8),

$$T_{\mu\nu}(D) = \sum_{\varepsilon=1,2} T_{\mu\nu}^\varepsilon(D) = -\frac{i}{4} \sum_{\varepsilon=1,2} [\bar{\Psi}^\varepsilon \gamma_\mu \hat{D}_\nu \Psi^\varepsilon + \bar{\Psi}^\varepsilon \gamma_\nu \hat{D}_\mu \Psi^\varepsilon - \hat{D}_\nu \bar{\Psi}^\varepsilon \gamma_\mu \Psi^\varepsilon - \hat{D}_\mu \bar{\Psi}^\varepsilon \gamma_\nu \Psi^\varepsilon].$$

Sabendo que a métrica é diagonal, logo $\mu = \nu$. Destacando aqui a notação dos índices $\{t, r, \theta, \phi\}$ para o espaço-tempo curvo e $\{0, 1, 2, 3\}$ para o espaço-tempo de Minkowski. Considerando $\mu = \nu = t$ e notando que $\gamma_\alpha = g_{\alpha\beta} \gamma^\beta = g_{\alpha\beta} e^\beta_a \hat{\gamma}^a$:

$$T_{tt}^\varepsilon(D) = -\frac{i}{2} [\bar{\Psi}^\varepsilon \gamma_t \hat{D}_t \Psi^\varepsilon - \hat{D}_t \bar{\Psi}^\varepsilon \gamma_t \Psi^\varepsilon],\tag{5.18}$$

sabendo que $\gamma_t = g_{tt} e^t_0 \hat{\gamma}^0 = -\frac{F_0}{\varepsilon_t} \hat{\gamma}^0$ e utilizando a componente t da derivada covariante (5.17) e a mesma representação das matrizes γ 's descrita no apêndice A da referência [5], obtém-se:

$$\gamma_t \hat{D}_t = \left(-\frac{F_0}{\varepsilon_t} \partial_t + i \frac{F_0}{\varepsilon_t} qV \right) \hat{\gamma}^0 - \frac{\varepsilon_r F'_0 F_0}{2 F_1} \hat{\gamma}^1.\tag{5.19}$$

Por simplificação, define-se os operadores $\hat{T} \equiv i \frac{F_0}{\varepsilon_t} \partial_t + \frac{F_0}{\varepsilon_t} qV$ e $\hat{R} \equiv i \frac{\varepsilon_r F'_0 F_0}{2 F_1}$, logo o operador acima poderá ser escrito na sua forma matricial como:

$$\gamma_t \hat{D}_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\hat{T} - \hat{R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\hat{T} + \hat{R} \\ -\hat{T} + \hat{R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{T} - \hat{R} & 0 & 0 \end{pmatrix}.\tag{5.20}$$

Sabendo que um ansatz para as funções Ψ^ε que representam os férmions devem respeitar a simetria esférica e a simetria de reflexão, ou seja, devem permanecer invariantes quando $r \rightarrow -r$.

Tal proposta para Ψ^ε é dada por:

$$\Psi^1 = \begin{pmatrix} z(r) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ i\bar{z}(r) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \kappa \\ -i\bar{z}(r) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -z(r) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \kappa \end{pmatrix} e^{i\left(\frac{\phi}{2} - \omega t\right)}, \quad \Psi^2 = \begin{pmatrix} iz(r) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \bar{z}(r) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \kappa \\ \bar{z}(r) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ iz(r) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \kappa \end{pmatrix} e^{-i\left(\frac{\phi}{2} + \omega t\right)}, \quad (5.21)$$

onde $\kappa = \pm 1$ representam a quiralidade dos férmions e ω suas freqüências. E de maneira geral, $z(r)$ é uma função complexa que pode ser expressa pelas funções reais $P(r)$ e $Q(r)$, onde tais funções devem repetir a simetria $P(r) = P(-r)$ e $Q(r) = Q(-r)$. Assim a função $z(r)$ será expressa como:

$$z(r) = P(r) + iQ(r) \quad \text{ou} \quad z(r) = \phi_0 e^{i\alpha}; \quad \text{onde} \quad \phi_0 = \sqrt{Q^2 + P^2} \quad \text{e} \quad \tan \alpha = \frac{Q}{P}, \quad (5.22)$$

com isso, aplicando o operador (5.20), nas funções Ψ^1 e Ψ^2 respectivamente, obtém-se:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_1 \gamma_t \hat{D}_t \Psi_1 &= -i \left[-[\varepsilon_t F_0(\omega + qV) + \hat{R}] |z|^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + [-\varepsilon_t F_0(\omega + qV) + \hat{R}] |z|^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + [-\varepsilon_t F_0(\omega + qV) + \hat{R}] |z|^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - [\varepsilon_t F_0(\omega + qV) + \hat{R}] |z|^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ &= 2i\varepsilon_t F_0(\omega + qV) |z|^2 \\ &= 2i\varepsilon_t F_0(\omega + qV)(P^2 + Q^2). \end{aligned} \quad (5.23)$$

De maneira semelhante, calcula-se $\hat{D}_t \bar{\Psi}_1 \gamma_t \Psi_1 = -2i\varepsilon_t F_0(\omega + qV)(Q^2 + P^2)$, logo substituindo estes resultados na equação (5.18) para Ψ^1 , obtém-se:

$$T_{tt}^1 = 2\varepsilon_t F_0(\omega + qV)(P^2 + Q^2). \quad (5.24)$$

O cálculo para Ψ^2 é semelhante, resultando também em $T_{tt}^2 = 2\varepsilon_t F_0(\omega + qV)(P^2 + Q^2)$. Da equação (5.8),

$$T_{tt}(D) = T_{tt}^1 + T_{tt}^2 = 4\varepsilon_t F_0(\omega + qV)(P^2 + Q^2). \quad (5.25)$$

Os cálculos para as componentes T_{rr} e $T_{\theta\theta}$ são realizados da mesma maneira, resultando em um tensor de EM de Dirac dado por:

$$\begin{cases} T_{tt}^{(D)} = 4\varepsilon_t F_0(\omega + qV)(P^2 + Q^2) \\ T_{rr}^{(D)} = 4\varepsilon_r F_1(P'Q - Q'P) \\ T_{\theta\theta}^{(D)} = -2F_2 \kappa (P^2 - Q^2). \end{cases} \quad (5.26)$$

A solução analítica do conjunto de equações do modelo EDM será encontrada na simplificação dos parâmetros q e ω , considerando-os igual a zero, o que implica na anulação da componente $T_{tt}(D)$. Sabendo que o tensor de EM é composto pela soma em (), calcula-se sua contribuição devido ao campo de Gauge. Tomando a forma do tensor de EM de Maxwell em () e considerando a forma radial do campo elétrico $F_{10} = V'(r)$,

$$T_{\mu\nu}(M) = F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{\beta\lambda}F_{\beta\lambda}, \text{ onde } F^{\beta\lambda}F_{\beta\lambda} = 2g^{tt}g^{rr}(F_{tr})^2, \quad (5.27)$$

logo calculando as componentes do tensor de EM de Maxwell:

$$\begin{aligned} T_{tt}(M) &= F_{t\alpha}F_t^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{tt}F^{\beta\lambda}F_{\beta\lambda} \\ &= g^{rr}(F_{tr})^2 - \frac{1}{2}g_{tt}[g^{tt}g^{rr}(F_{tr})^2] \\ &= \frac{1}{2F_1^2}(V')^2 \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} T_{rr}(M) &= F_{r\alpha}F_r^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{rr}F^{\beta\lambda}F_{\beta\lambda} \\ &= g^{tt}(F_{tr})^2 - \frac{1}{2}g_{rr}[g^{tt}g^{rr}(F_{tr})^2] \\ &= -\frac{1}{2F_0^2}(V')^2 \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} T_{\theta\theta}(M) &= F_{\theta\alpha}F_{\theta}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\theta\theta}F^{\beta\lambda}F_{\beta\lambda} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{F_2}{F_0F_1}\right)^2 (V')^2. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Mesmo considerando o tensor de EM do campo de gauge com os índices em baixo, assim como utilizados na referência [5], destaca-se aqui a igualdade das componentes $T'_t(M) = T'_r(M)$, que é uma característica de um campo elétrico radial, assim como na solução de Reissner-Nordström [2]. Com as componentes acima, o tensor de EM total é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{tt} = \frac{1}{2F_1^2}(V')^2 + 4\varepsilon_t F_0(\omega + qV)(P^2 + Q^2) \\ T_{rr} = -\frac{1}{2F_0^2}(V')^2 + 4\varepsilon_r F_1(P'Q - Q'P) \\ T_{\theta\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{F_2}{F_0F_1}\right)^2 (V')^2 - F_2\kappa(P^2 - Q^2). \end{array} \right. \quad (5.31)$$

Por fim, este é o tensor de EM que representa uma fonte composta por dois férmions com spins opostos e dotados de uma carga elétrica q .

5.5 As equações de Einstein

Tomando o ansatz da métrica (5.10), os símbolos de Christoffel em (5.12), calcula-se as componentes do tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$,

$$\begin{cases} G_{tt} = \frac{F_0^2}{F_2^2} + \frac{2F_0^2 F_1' F_2'}{F_1^3 F_2} - \frac{F_0^2 F_2'^2}{F_1^3 F_2} - \frac{2F_0^2 F_1' F_2''}{F_1^2 F_2} \\ G_{rr} = \frac{2F_0' F_2'}{F_0 F_2} + \frac{F_2'^2 - F_1^2}{F_2^2} \\ G_{\theta\theta} = \frac{F_2^2 F_0''}{F_0 F_1^2} + \frac{F_2 F_2''}{F_1^2} + \left(\frac{F_2 F_0'}{F_0} - \frac{F_2 F_1'}{F_1} \right) \frac{F_2'}{F_1^2} - \frac{F_2^2 F_0' F_1'}{F_0 F_1^3}. \end{cases} \quad (5.32)$$

Desta forma, calcula-se as componentes da equação de Einstein (5.7),

$$\frac{F_0^2}{F_2^2} + \frac{2F_0^2 F_1' F_2'}{F_1^3 F_2} - \frac{F_0^2 F_2'^2}{F_1^3 F_2} - \frac{2F_0^2 F_1' F_2''}{F_1^2 F_2} = 2 \left[\frac{1}{2F_1^2} (V')^2 + 4\varepsilon_t F_0 (\omega + qV) (P^2 + Q^2) \right], \quad (5.33)$$

multiplicando ambos os lados desta equação por $-\frac{F_1^2}{2F_0^2}$:

$$\frac{F_2''}{F_2} + \frac{F_2'}{F_2} \left(\frac{F_2'}{2F_2} - \frac{F_1'}{F_1} \right) - \frac{F_1^2}{2F_2^2} + \frac{1}{F_0} \left[\frac{V'^2}{2F_0^2} + 4\varepsilon_t F_1 (\omega + qV) (P^2 + Q^2) \right] = 0. \quad (5.34)$$

Para a componente radial, tem-se:

$$\frac{2F_0' F_2'}{F_0 F_2} + \frac{F_2'^2 - F_1^2}{F_2^2} + 2 \left[\frac{V'^2}{2F_0^2} + 4\varepsilon_r F_1 (Q'P - P'Q) \right] = 0. \quad (5.35)$$

Para a componente $G_{\theta\theta}$ será realizada algumas manipulações,

$$\frac{F_2^2 F_0''}{F_0 F_1^2} + \frac{F_2 F_2''}{F_1^2} + \left(\frac{F_2 F_0'}{F_0} - \frac{F_2 F_1'}{F_1} \right) \frac{F_2'}{F_1^2} - \frac{F_2^2 F_0' F_1'}{F_0 F_1^3} = 2T_{\theta\theta}, \quad (5.36)$$

multiplicando ambos os lados por $\frac{F_1^2}{F_2^2}$,

$$\frac{F_0''}{F_0} + \frac{F_2''}{F_2} + \left(\frac{F_2'}{F_2} - \frac{F_1'}{F_1} \right) \frac{F_0'}{F_0} - \frac{F_0' F_1'}{F_1 F_2} = 2 \frac{F_1^2}{F_2^2} T_{\theta\theta}, \quad (5.37)$$

isolando o termo $\frac{F_2''}{F_2}$ em (5.34) e substituindo em (5.37), obtém-se:

$$\frac{F_0''}{F_0} + \left(\frac{F_2'}{F_2} - \frac{F_1'}{F_1} \right) \frac{F_0'}{F_0} - \frac{F_2'^2}{2F_2^2} + \frac{F_1^2}{2F_2^2} - \left[\frac{3V'^2}{4F_0^2} + 2F_1^2 \left(\varepsilon_t (\omega + qV) \frac{(P^2 + Q^2)}{F_0} - \frac{\kappa(P^2 - Q^2)}{F_2} \right) \right] = 0. \quad (5.38)$$

Mesmo fixando $F_2 = r$ através da simetria esférica, pode-se observar que o conjunto formado pelas três equações (5.34), (5.35) e (5.38), formam um sistema incompleto de equações, pois apresentam menos equações do que incógnitas (F_0, F_1, V, P e Q). Para a completude de tal

sistema, será necessário calcular explicitamente a forma das equações do campo de gauge e de Dirac.

5.6 A equação de Maxwell

Da equação de movimento descrita em (5.4), onde o tensor $F^{\mu\nu}$ é um tensor antissimétrico, pode-se utilizar as propriedades da derivada covariante para que calcular o lado esquerdo desta equação, logo:

$$\nabla_{\mu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}), \quad (5.39)$$

lembrando que as funções da métrica $g_{\mu\nu}$ em (5.10) e o tensor $F^{\mu\nu}$ só dependem da coordenada radial,

$$\nabla_{\mu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_r(\sqrt{-g}F^{r\nu}). \quad (5.40)$$

Como a métrica (5.10) é diagonal, facilmente é visto que $\sqrt{-g} = F_0F_1F_2^2 \sin\theta$, com isso a equação acima fica:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu}F^{\mu t} &= \frac{1}{F_0F_1F_2^2 \sin\theta} \partial_r[F_0F_1F_2^2 \sin\theta F^{rt}] \\ &= \frac{1}{F_0F_1F_2^2} \partial_r[F_0F_1F_2^2 g^{rr} g^{tt} F_{rt}] \\ &= -\frac{1}{F_0F_1F_2^2} \partial_r \left(\frac{F_2^2 V'}{F_0F_1} \right). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Para calcular o lado direito da equação de Maxwell, é necessário notar que a única componente diferente de será a componente temporal de j^{ν} . Com isso, calcula-se $j^t = \bar{\Psi}_1 \gamma^t \Psi_1 + \bar{\Psi}_2 \gamma^t \Psi_2$, onde $\gamma^t = i \frac{\varepsilon_t}{F_0} \tilde{\gamma}^0$, logo:

$$\begin{aligned} j^t &= i \frac{\varepsilon_t}{F_0} [\bar{\Psi}_1 \tilde{\gamma}^0 \Psi_1 + \bar{\Psi}_2 \tilde{\gamma}^0 \Psi_2] \\ &= \frac{4\varepsilon_t |z|^2}{F_0} \\ &= \frac{4\varepsilon_t}{F_0} (P^2 + Q^2). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Igualando (5.41) com (5.42), obtém-se a outra equação do sistema,

$$\left(\frac{F_2^2 V'}{F_0 F_1} \right)' = -4\varepsilon_t q F_1 F_2^2 (P^2 + Q^2). \quad (5.43)$$

Essa equação por sua vez, é uma equação diferencial de segunda ordem para $V(r)$, onde a mesma será utilizada para desacoplar o sistema das equações de Einstein. Destaca-se aqui também que as equações (5.4) e (5.43) corrigem os sinais das equações (2.3) e (3.18) da referência [5]. Da corrente j^i em (5.42) define-se a carga de Noether Q_N ¹

$$\begin{aligned} Q_N &\equiv \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_+} d^3x \sqrt{-g} j^t = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^\infty F_0 F_1 F_2^2 \left(\frac{4(P^2 + Q^2)}{F_0} \right) dr \\ &= 2 \int_0^\infty F_1 F_2^2 (P^2 + Q^2) dr, \end{aligned} \quad (5.44)$$

a integral em θ é de zero a $\frac{\pi}{2}$ pois está sendo considerada apenas a região Σ_+ . Multiplicando ambos os lados da equação (5.4) por $d^3x \sqrt{-g}$, utilizando os resultados (5.41), (5.42) e integrando, obtém-se:

$$\begin{aligned} \left. \frac{F_2^2(r)V'(r)}{F_0(r)F_1(r)} \right|_{r_0}^\infty &= 4q \int_{r_0}^\infty F_1 F_2^2 (P^2 + Q^2) dr \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{F_2^2(r)V'(r)}{F_0(r)F_1(r)} - \frac{F_2^2(r_0)V'(r_0^+)}{F_0(r_0)F_1(r_0)} &= 2qQ_N, \end{aligned} \quad (5.45)$$

onde $\frac{F_2^2(r_0)V'(r_0^+)}{F_0(r_0)F_1(r_0)}$ é a carga na garganta do wormhole Q_T . Tomando os limites assintóticos de F_0 e F_1 ,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F_2^2(r)V'(r) = 2qQ_N + Q_T. \quad (5.46)$$

Para valores de r suficientemente distantes da garganta, o comportamento de $V(r)$ é dado por $V(r) = \Phi - \frac{Q_e}{r}$, onde Φ é um valor constante e Q_e é a carga elétrica. Assim, o potencial segue as condições $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = \Phi$ e $V'(r) = \frac{Q_e}{r^2}$. Da simetria esférica, sabe-se que $F_2(r)$ sempre poderá ser escrita como $F_2(r) = r$, desta forma, a equação (5.46) fica:

$$Q_e = 2qQ_N + Q_T. \quad (5.47)$$

Essa equação indica que o campo de gauge total terá contribuições da carga localizada na garganta juntamente com a carga devido aos férmions. Essa discussão foi aberta aqui para enfatizar que no caso limite em que $q \rightarrow 0$, a carga total do sistema é aquela localizada na garganta do wormhole.

¹A carga de Noether possui a mesma dimensão da constante de acoplamento q , uma vez que $j^\nu = q \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi$ e, em quatro dimensões, $[\Psi] = L^{-3/2}$, o que implica em $[\bar{\Psi} \Psi] \sim L^{-3}$. Como $[dx^3] \sim L^3$, temos que $[Q_N] \sim [q]$.

5.7 A equação de Dirac

Para calcular a equação de Dirac explicitamente, primeiramente será necessário a construção do operador $\hat{D} \equiv \gamma^\mu \hat{D}_\mu$. Tomando as componentes de \hat{D}_μ em (5.17),

$$\begin{aligned} \hat{D} &\equiv \gamma^\mu \hat{D}_\mu = e^\mu_a \hat{\gamma}^a \hat{D}_\mu \\ &= e^t_0 \hat{\gamma}^0 \left[\partial_t - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_r} \right) \frac{F'_0}{F_1} \hat{\gamma}^0 \hat{\gamma}^1 - iqV \right] + e^r_1 \hat{\gamma}^1 \partial_r + e^\theta_2 \hat{\gamma}^2 \left(\partial_\theta - \frac{\varepsilon_r F'_2}{2 F_1} \hat{\gamma}^1 \hat{\gamma}^2 \right) \\ &\quad + e^\phi_3 \hat{\gamma}^3 \left[\partial_\phi - \frac{1}{2} \left(\varepsilon_r \sin \theta \frac{F'_2}{F_1} \hat{\gamma}^1 \hat{\gamma}^3 + \cos \theta \hat{\gamma}^2 \hat{\gamma}^3 \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Utilizando a anticomutatividade das matrizes $\hat{\gamma}$'s e sabendo que $(\hat{\gamma}^0)^2 = -\mathcal{I}$ e $(\hat{\gamma}^i)^2 = \mathcal{I}$,

$$\hat{D} = \frac{\varepsilon_t}{F_0} \hat{\gamma}^0 (\partial_t - iqV) + \frac{\varepsilon_r}{F_1} \hat{\gamma}^1 \left(\partial_r + \frac{F'_0}{2F_0} + \frac{F'_2}{F_2} \right) + \frac{1}{F_2} \left[\hat{\gamma}^2 \left(\partial_\theta + \frac{\cos \theta}{2 \sin \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \hat{\gamma}^3 \partial_\phi \right], \quad (5.49)$$

observando que $\partial_r [\ln(F_2 \sqrt{F_0})] = \frac{F'_0}{2F_0} + \frac{F'_2}{F_2}$, e definindo o operador angular de Dirac \mathcal{K} :

$$\mathcal{K} \equiv i \hat{\gamma}^0 \hat{\gamma}^1 \left[\hat{\gamma}^2 \left(\partial_\theta + \frac{\cos \theta}{2 \sin \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \hat{\gamma}^3 \partial_\phi \right]. \quad (5.50)$$

Destaca-se aqui a correção do fator de 1/2 em relação a equação (B.2) da referência [5], referente a componente angular do operador de Dirac. Com isso o operador de Dirac é dado por:

$$\hat{D} = \frac{\varepsilon_t}{F_0} \hat{\gamma}^0 (\partial_t - iqV) + \frac{\varepsilon_r}{F_1} \hat{\gamma}^1 \left(\partial_r + \partial_r [\ln(F_2 \sqrt{F_0})] \right) + \frac{i}{F_2} \hat{\gamma}^1 \hat{\gamma}^0 \mathcal{K}. \quad (5.51)$$

Considerando o ansatz (5.21), é observado com facilidade as equações de autovalor:

$$\mathcal{K} \Psi^\varepsilon = \pm \kappa \Psi^\varepsilon \quad (5.52)$$

$$\partial_t \Psi^\varepsilon = -i\omega \Psi^\varepsilon. \quad (5.53)$$

Para expressar o operador (5.51) na forma matricial, considera-se a representação do apêndice A novamente e por simplificação, define-se os operadores:

$$\begin{aligned} \hat{T} &\equiv \frac{\varepsilon_t}{F_0} \hat{\gamma}^0 (\partial_t - iqV), \quad \hat{R} \equiv \frac{\varepsilon_r}{F_1} \hat{\gamma}^1 \left(\partial_r + \partial_r [\ln(F_2 \sqrt{F_0})] \right), \quad \hat{\Theta} \equiv \frac{1}{F_2} \left(\partial_\theta + \frac{\cos \theta}{2 \sin \theta} \right), \\ \hat{\Phi} &\equiv \frac{1}{F_2 \sin \theta} \partial_\phi, \end{aligned} \quad (5.54)$$

logo a forma matricial do operador \hat{D} é:

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i(\hat{T} + \hat{R}) & i\hat{\Theta} + \hat{\Phi} \\ 0 & 0 & i\hat{\Theta} - \hat{\Phi} & i(\hat{T} - \hat{R}) \\ i(\hat{T} - \hat{R}) & -(i\hat{\Theta} + \hat{\Phi}) & 0 & 0 \\ -i\hat{\Theta} + \hat{\Phi} & i(\hat{T} + \hat{R}) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.55)$$

Por simplificação, considerando um spinor genérico qualquer Ψ^ε , onde suas componentes podem ser chamadas de a_j , com $j = 1, \dots, 4$, a equação de Dirac (5.6) resulta no sistema de quatro equações diferenciais de primeira ordem e acopladas, dadas por:

$$\begin{cases} i(\hat{T} + \hat{R})a_3 + (i\hat{\Theta} + \hat{\Phi})a_4 = \mu a_1 \\ i(\hat{T} - \hat{R})a_4 + (i\hat{\Theta} - \hat{\Phi})a_3 = \mu a_2 \\ i(\hat{T} - \hat{R})a_1 - (i\hat{\Theta} + \hat{\Phi})a_2 = \mu a_3 \\ i(\hat{T} + \hat{R})a_2 + (-i\hat{\Theta} + \hat{\Phi})a_4 = \mu a_4. \end{cases} \quad (5.56)$$

Tomando a primeira e a segunda equações do sistema (5.56) e substituindo as componentes do spinor Ψ^1 , obtém-se:

$$\varepsilon_r \bar{z}' + \bar{z} \varepsilon_r \left(\frac{F_2'}{F_2} + \frac{F_0'}{2F_0} \right) - i \frac{F_1 \varepsilon_t \bar{z}}{F_0} (\omega + qV) - i \frac{F_1 \varepsilon_t z}{F_2} \kappa - F_1 z \mu = 0 \quad (5.57)$$

$$\varepsilon_r z' + z \varepsilon_r \left(\frac{F_2'}{F_2} + \frac{F_0'}{2F_0} \right) + i \frac{F_1 \varepsilon_t z}{F_0} (\omega + qV) - i \frac{F_1 \varepsilon_t \bar{z}}{F_2} \kappa - F_1 \bar{z} \mu = 0, \quad (5.58)$$

somando e subtraindo estas equações é obtido o par de equações diferenciais,

$$\varepsilon_r P' + \varepsilon_r \left(\frac{F_2'}{F_2} + \frac{F_0'}{2F_0} \right) P + \frac{F_1}{F_2} \left[\kappa - \frac{F_2}{F_0} \varepsilon_t (\omega + qV) \right] Q - \mu F_1 P = 0 \quad (5.59)$$

$$\varepsilon_r Q' + \varepsilon_r \left(\frac{F_2'}{F_2} + \frac{F_0'}{2F_0} \right) P + \frac{F_1}{F_2} \left[\kappa - \frac{F_2}{F_0} \varepsilon_t (\omega + qV) \right] Q - \mu F_1 Q = 0. \quad (5.60)$$

Destacando aqui que as equações (5.34), (5.35), (5.59) e (5.60) só serão invariantes sobre reflexão $r \rightarrow -r$, caso o produto $\varepsilon_t (\omega + qV)$ mantenha o mesmo sinal, o que implica na escolha $\varepsilon_t = -1 \rightarrow \omega = -\omega$ e $V(-r) = -V(r)$. De posse do par de equações acima, juntamente com as equações (5.34), (5.35), (5.38) e (5.43), (5.59) e (5.60) o sistema que representa o modelo EDM está completo.

5.8 Uma solução analítica

De maneira geral a solução do conjunto de equações que descrevem o modelo EDM é numérica, porém, para o caso simplificado em que considera-se o limite em que o par de férmions apresentam carga e massa próximas de zero, ou seja, $\omega = q = \mu = 0$ e considerando também que em uma geometria esfericamente simétrica sempre é possível escrever $F_2(r) = r$. Com essas simplificações, o conjunto de equações de Einstein fica:

$$\begin{aligned} \frac{F_0''}{F_0} + \frac{F_0'}{F_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{F_1'}{F_1} \right) + \frac{F_1^2 - 1}{2r^2} - \frac{3V'^2}{2F_0^2} - \frac{4\kappa(Q^2 - P^2)F_1^2}{r} &= 0 \\ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{2r} - \frac{F_1'}{F_1} \right) - \frac{F_1^2}{2r^2} + \frac{V'^2}{2F_0^2} &= 0 \\ \frac{2F_0'}{rF_0} + \frac{1 - F_1^2}{r^2} + \frac{V'^2}{F_0^2} + 8F_1(PQ' - QP') &= 0. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Sabendo que o comportamento das soluções para as funções da métrica devem obedecer o limite assintótico que recupera o espaço de Minkowski, é estabelecida as condições limites $F_0(\infty) = F_1(\infty) = 1$. Para $q = 0$ em (5.43), é fácil ver que o termo do lado esquerdo é constante. Utiliza-se esse fato para desacoplar o sistema de equações (5.61). Desta forma, sabe-se que:

$$V' = \frac{C_1 F_0 F_1}{r^2}. \quad (5.62)$$

Pela relação (5.47), para $q = 0$, obtém-se a constante $C_1 = Q_e$, onde Q_e nessa situação é a carga intrínseca contida na garganta do wormhole. Substituindo a expressão (5.62) e isolando F_1' na equação do meio do sistema (5.61), obtém-se:

$$F_1' = \frac{F_1}{2r} + \frac{(Q_e^2 - r^2)}{2r^3} F_1^3, \quad (5.63)$$

essa equação por sua vez, tem como solução,

$$F_1(r) = \frac{1}{\sqrt{\frac{Q_e^2}{r^2} + 1 + \frac{C_2}{r}}}, \quad (5.64)$$

Aplicando a condição de contorno que sobre a garganta a função radial da métrica diverge [16], ou seja, $F_1(r_0) \rightarrow \infty$, obtém-se uma constante de integração $C_2 = -r_0 - \frac{Q_e^2}{r_0}$, resultando numa função $F_1(r)$ dada por:

$$F_1(r) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \left(1 - \frac{Q_e^2}{r_0 r}\right)}}. \quad (5.65)$$

Para encontrar a solução da componente temporal da métrica $F_0(r)$, será necessário a consideração do par de equações de Dirac (5.59) e (5.60), para $\omega = q = \mu = 0$, logo:

$$P' + \left(\frac{F_2'}{F_2} + \frac{F_0'}{2F_0} \right) P + \kappa \frac{F_1}{F_2} Q = 0 \quad (5.66)$$

$$Q' + \left(\frac{F_2'}{F_2} + \frac{F_0'}{2F_0} \right) Q + \kappa \frac{F_1}{F_2} P = 0, \quad (5.67)$$

multiplicando a de cima por Q e a de baixo por P e somando ambas, obtém-se:

$$Q'P - P'Q = \frac{\kappa F_1}{r} (Q^2 - P^2). \quad (5.68)$$

Substituindo a equação para o potencial (5.62) na primeira e terceira equações de Einstein em (5.61), juntamente com a substituição da relação (5.68) também na terceira equação de (5.61), obtém-se:

$$\frac{F_0''}{F_0} + \frac{F_0'}{F_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{F_1'}{F_1} \right) + \frac{F_1^2 - 1}{2r^2} - \frac{3Q_e^2 F_1^2}{2r^4} - \frac{4\kappa(Q^2 - P^2)F_1^2}{r} = 0 \quad (5.69)$$

$$\frac{2F_0'}{rF_0} + \frac{1 - F_1^2}{r^2} + \frac{Q_e^2 F_1^2}{r^4} + 8 \frac{F_1^2 \kappa}{r} (Q^2 - P^2) = 0, \quad (5.70)$$

dividindo a segunda equação por 2 e somando com a primeira, é obtida a equação diferencial desacoplada para F_0 , dada por:

$$F_0'' + \left(\frac{2}{r} - \frac{F_1'}{F_1} \right) F_0' - \frac{Q_e^2 F_1^2}{r^4} F_0 = 0. \quad (5.71)$$

Esta equação por sua vez, tem como solução,

$$F_0(r) = c_1 \cos \left[2 \arctan \left(\frac{Q_e \sqrt{r_0 - r}}{\sqrt{r_0(r_0 r - Q_e^2)}} \right) \right] + c_2 \sin \left[2 \arctan \left(\frac{Q_e \sqrt{r_0 - r}}{\sqrt{r_0(r_0 r - Q_e^2)}} \right) \right], \quad (5.72)$$

onde $r_0 > Q_e$. Considerando um ângulo genérico qualquer $\theta = \arctan \left(\frac{Q_e \sqrt{r_0 - r}}{\sqrt{r_0(r_0 r - Q_e^2)}} \right)$, e utilizando as relações do triângulo retângulo, observa-se:

$$\sin \theta = \frac{Q_e \sqrt{\frac{r_0}{r} - 1}}{\sqrt{r_0^2 - Q_e^2}} \quad \text{e} \quad \cos \theta = \frac{r_0 \sqrt{1 - \frac{Q_e^2}{r_0 r}}}{\sqrt{r_0^2 - Q_e^2}}. \quad (5.73)$$

Desta forma, utiliza-se as relações trigonométricas $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$ e $\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$,

$$\cos(2\theta) = \frac{r_0^2 + Q_e^2}{r_0^2 - Q_e^2} \left(1 - \frac{2r_0 Q_e^2}{(r_0^2 + Q_e^2)r} \right) \text{ e } \sin(2\theta) = \frac{2r_0 Q_e \sqrt{\left(\frac{r_0}{r} - 1\right) \left(1 - \frac{Q_e^2}{r_0 r}\right)}}{r_0^2 - Q_e^2}, \quad (5.74)$$

com isso a solução (5.72) pode ser escrita como:

$$F_0(r) = c_1 \left(1 - \frac{2r_0 Q_e^2}{(r_0^2 + Q_e^2)r} \right) + c_2 \sqrt{\left(\frac{r_0}{r} - 1\right) \left(1 - \frac{Q_e^2}{r_0 r}\right)}. \quad (5.75)$$

Para que a solução seja real, $c_2 = 0$, pois $r_0 \leq r$. Sabendo que o Wormhole une duas regiões assintoticamente planas, como já mencionado, sabe-se que as funções da métrica devem recuperar Minkowski para valores extremos de r , isto é, em $r \rightarrow \infty$, $F_0 = 1$, concluindo que $c_1 = 1$.

Logo a solução para F_0 fixando suas constantes é:

$$F_0(r) = 1 - \frac{M}{r} \text{ onde } M \equiv \frac{2Q_e^2 r_0}{r_0^2 + Q_e^2}. \quad (5.76)$$

Com isso o elemento de linha encontrado como solução é dado por:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{M}{r} \right)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_0}{r} \right) \left(1 - \frac{Q_e^2}{r_0 r} \right)} + r^2 d\Omega^2. \quad (5.77)$$

Substituindo estes resultados na equação para o campo de (5.62),

$$V'(r) = \frac{Q_e}{r^2} \frac{1 - \frac{M}{r}}{\sqrt{\left(1 - \frac{r_0}{r} \right) \left(1 - \frac{Q_e^2}{r_0 r} \right)}}, \quad (5.78)$$

que tem como solução

$$V(r) = \frac{2Q_e r_0}{r_0^2 + Q_e^2} \sqrt{\left(1 - \frac{r_0}{r} \right) \left(1 - \frac{Q_e^2}{r_0 r} \right)} = \frac{M}{Q_e} \sqrt{\left(1 - \frac{r_0}{r} \right) \left(1 - \frac{Q_e^2}{r_0 r} \right)}. \quad (5.79)$$

Para encontrar as funções que descrevem os férmions, considera-se as equações (5.66) e (5.67), onde as mesmas representam um sistema de equações diferenciais acopladas de primeira ordem.

Para $F_2(r) = r$,

$$P' + \left(\frac{1}{r} + \frac{F_0'}{2F_0} \right) P + \kappa \frac{F_1}{r} Q = 0 \quad (5.80)$$

$$Q' + \left(\frac{1}{r} + \frac{F_0'}{2F_0} \right) Q + \kappa \frac{F_1}{r} P = 0. \quad (5.81)$$

Para descoplar, considera-se a definição $h(r) \equiv \frac{F_0'}{2F_0} + \frac{1}{r}$ e multiplicação de ambas pelo fator integrante $e^{A(r)}$,

$$\begin{cases} e^{A(r)}P' + e^{A(r)}h(r)P + e^{A(r)}\frac{F_1\kappa}{r}Q = 0 \\ e^{A(r)}Q' + e^{A(r)}h(r)Q + e^{A(r)}\frac{F_1\kappa}{r}P = 0, \end{cases} \quad (5.82)$$

observando que:

$$\frac{d}{dr}(e^{A(r)}P) = e^{A(r)}A'(r)P + e^{A(r)}P', \quad (5.83)$$

$$\begin{cases} (e^{A(r)}P)' + \frac{e^{A(r)}F_1\kappa}{r}Q = 0 \\ (e^{A(r)}Q)' + \frac{e^{A(r)}F_1\kappa}{r}P = 0, \end{cases} \quad (5.84)$$

reescrevendo estas equações em termos das novas variáveis $Y(r) \equiv e^{A(r)}P$ e $X(r) \equiv e^{A(r)}Q$,

$$\begin{cases} Y'(r) + \frac{F_1\kappa}{r}X(r) = 0 \\ X'(r) + \frac{F_1\kappa}{r}Y(r) = 0. \end{cases} \quad (5.85)$$

A solução deste conjunto de equações é dado por:

$$\begin{cases} X(r) = c_1 \cosh \left[2\kappa \operatorname{arctan} h \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{Q_e^2}{r_0 r}}}{\sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}} \right) \right] \\ Y(r) = c_2 \sinh \left[2\kappa \operatorname{arctan} h \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{Q_e^2}{r_0 r}}}{\sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}} \right) \right], \text{ onde } \kappa = \pm 1 \end{cases} \quad (5.86)$$

Lembrando que o $\cosh \theta$ é uma função par e o $\sinh \theta$ é uma função ímpar, pode-se reescrever a solução como:

$$X(r) = c_1 \cosh(2\theta) \text{ e } Y(r) = c_2 \sinh(2\theta), \text{ sendo } \theta = \operatorname{arctan} h \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{Q_e^2}{r_0 r}}}{\sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}} \right) \quad (5.87)$$

Das relações da trigonometria hiperbólica, tem-se que $\cosh(2\theta) = \cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta$ e $\sinh(2\theta) = 2 \sinh \theta \cosh \theta$ e sabendo também que a soma e subtração das soluções (5.92) também são soluções, obtém-se:

$$X(r) \pm Y(r) = c_0 (\cosh \theta \pm \kappa \sinh \theta)^2. \quad (5.88)$$

Analisando o argumento θ utilizando a trigonometria hiperbólica, obtém-se:

$$\sinh \theta = \sqrt{\frac{r_0 r - Q_e^2}{Q_e^2 - r_0^2}} \text{ e } \cosh \theta = \sqrt{\frac{r_0 r - r_0^2}{Q_e^2 - r_0^2}}. \quad (5.89)$$

Por outro lado, por comparação das equações (5.83) com a equação (5.82), obtém-se:

$$A'(r) = h(r) \Rightarrow A'(r) - \frac{F'_0}{2F_0} - \frac{1}{r} = 0, \quad (5.90)$$

esta equação tem como solução:

$$A(r) = c_1 e^{\ln \left[r(r_0^2 + Q_e^2) \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \right]} = c_1 r \sqrt{1 - \frac{M}{r}}. \quad (5.91)$$

Sendo $\bar{X}(r) = X(r) - Y(r)$ e $\bar{X}(r) = X(r) + Y(r)$, a solução para as funções dos férmions é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(r) = \frac{\bar{Y}}{e^{A(r)}} = c_1 \frac{\left(\sqrt{1 - \frac{Q_e^2}{r_0 r}} - \kappa \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}} \right)^2}{\sqrt{1 - \frac{M}{r}}} \\ Q(r) = \frac{\bar{X}}{e^{A(r)}} = c_2 \frac{\left(\sqrt{1 - \frac{Q_e^2}{r_0 r}} + \kappa \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}} \right)^2}{\sqrt{1 - \frac{M}{r}}}. \end{array} \right. \quad (5.92)$$

Com isso a solução do sistema de equações está completo. É importante destacar que as funções dos férmions em (5.92) não são normalizados, isto é, $Q(r)$ não se anula para $r \rightarrow \infty$. Outro detalhe importante é que a solução em (5.77) recupera a solução extremal ($Q_e = M$) de Reissner-Nordstrom quando $Q_e \rightarrow r_0$, amplamente reconhecida na literatura e mencionada na introdução.

5.9 Análise da solução de Einstein-Dirac-Maxwell

Com a proposta de analisar as propriedades geométricas da solução (5.77), serão utilizados os critérios apresentados na seção 2.5, baseados no trabalho [16]. Esses critérios baseiam-se principalmente na existência de uma garganta (raio mínimo r_0), na ausência de horizontes de eventos e na condição de *flaring out*. Desta forma, iniciamos essa análise comparando a métrica de Morris-Thorne (2.120) com (5.77), para avaliar a função *shape*,

$$\frac{b(r)}{r} = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \left(1 - \frac{Q_e^2}{r_0 r}\right) \rightarrow b(r) = r_0 + \frac{Q_e^2}{r_0} - \frac{Q_e^2}{r}. \quad (5.93)$$

Sabendo que a condição para existência de uma garganta é $b(r_0) = r_0$, temos que:

$$b(r_0) = r_0 + \frac{Q_e^2}{r_0} - \frac{Q_e^2}{r_0} = r_0, \quad (5.94)$$

comprovando assim a existência de um raio mínimo. Para analisar a condição de *flaring out* ($b'(r_0) < 1$), é necessário derivar a expressão (5.93), resultando em:

$$b'(r_0) = \frac{Q_e^2}{r_0^2} < 1 \quad \rightarrow \quad |Q_e| < r_0. \quad (5.95)$$

Esse resultado impõe a condição para a formação de uma garganta. A próxima condição a ser seguida pela solução (5.77) é a ausência de um horizonte de eventos, para isso, a análise é feita sobre a função de *red shift*, na qual a mesma não pode ser nula, ou seja, $e^{2\Phi(r)} \neq 0$. Portanto, temos a relação:

$$e^{2\Phi(r)} = \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2. \quad (5.96)$$

Para que a função acima se anule, a massa tem que ser igual ao raio r , mas pela própria definição da massa em (5.76), sabemos que $M < Q_e$, implicando na condição $M < r_0$. Por último, é fácil ver que as funções radial e temporal da métrica recuperam Minkowski quando $r \rightarrow \infty$, resultando num espaço assintoticamente plano.

Sabemos que a condição de energia nula (NEC), impõe que $T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$. Essa condição, para métricas esfericamente simétricas, resulta em $\rho + p_r \geq 0$, onde isso se resume a $T_t^t + T_r^r \geq 0$. Os índices mistos no tensor de energia-momento facilitam os cálculos na parte eletromagnética, pois as mesmas se cancelam. Do tensor de energia-momento (5.31), temos:

$$T_t^t + T_r^r = 4\epsilon_r F_1 (P'Q - Q'P). \quad (5.97)$$

Dessa forma, como $F_1(r)$ é sempre positiva, precisamos calcular o termo $P'Q - Q'P$ explicitamente, para analisarmos seu sinal. Das função dos férmions $P(r)$ e $Q(r)$ ² dadas em (5.92) temos:

$$P'Q - Q'P = -\frac{(Q_e^2 - r_0^2)^2}{16r^3 \left(Q_e^2 + r_0^2 - \frac{2Q_e^2 r_0}{r}\right) \sqrt{\left(1 - \frac{Q_e^2}{rr_0}\right) \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)}}. \quad (5.98)$$

²Para uma constante $c_2 = \frac{\kappa r_0}{32c_1(Q_e^2 + r_0^2)}$ [4].

Observa-se que todos os parâmetros dessa expressão são positivos, mas com um sinal negativo global, resultando na violação da condição de energia nula. Para uma melhor visualização dessa condição, verifica-se o comportamento do gráfico abaixo,

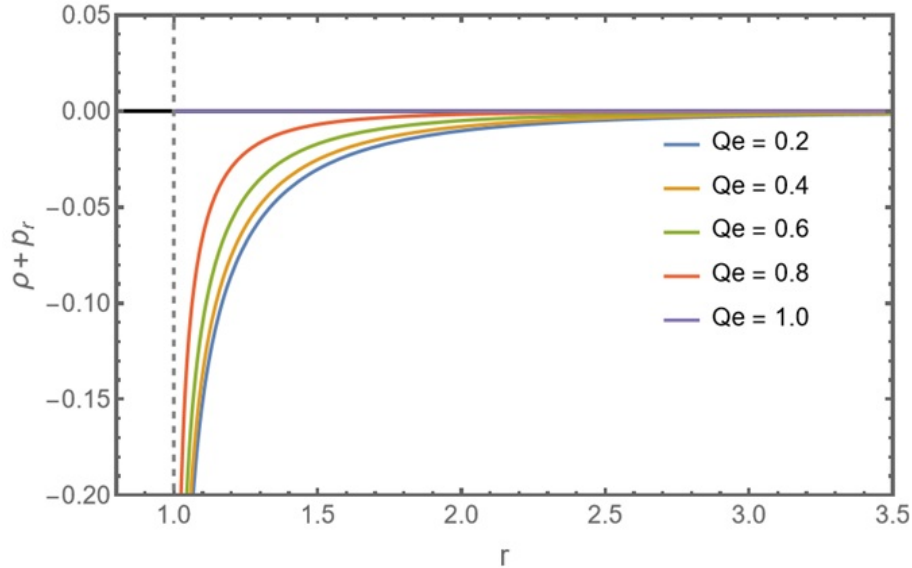


Figura 4: Representação da condição de energia nula (NEC) próximo a garganta ($r_0 = 1$) do buraco de minhoca.

Fonte: Elaborado pelo autor.

O gráfico acima, permite analisar a condição de energia nula (NEC) para diferentes valores da carga elétrica Q_e . Os resultados assumem os valores esperados, pois nas proximidades da garganta $r = r_0$, todos apresentam valores negativos, assim como previsto na seção 2.5. Importante destacar que o gráfico é crescente à medida que r aumenta, crescendo assintoticamente a zero. Essa característica se dá pelo fato de que a fonte exótica que sustenta essa geometria está localizada nas proximidades da garganta.

Mesmo que as contribuições diretas do campo eletromagnético se cancelem na composição $\rho + p_r$, a carga elétrica tem função fundamental na curvatura do espaço tempo, pois na medida que a mesma cresce, percebe-se a suavização da violação da NEC. Destacando também o seu caso limite, quando $Q_e \rightarrow r_0 = 1$, representando o caso extremal da solução de Reissner-Nordström.

Mesmo que os resultados apresentados nessa seção tenham saído como previsto pela teoria de Morris-Thorne, destaca-se aqui a análise geométrica feita, pois percebemos que a condição, necessária para existência de uma garganta regular, é controlada pela carga do buraco de minhoca $Q_e < r_0$, já a garantia de que essa estrutura seja atravessável, pela ausência de um horizonte de eventos, é dada por $M < r_0$.

Como foi visto nessa seção, o modelo Einstein-Dirac-Maxwell apresenta uma característica curiosa, pois na mesma, a “matéria comum” apresenta característica exótica. Para explorar essa propriedade, tentamos estender essa teoria para novas geometrias. Sabendo que dependendo do parâmetro regularizador da solução de Simpson-Visser, a mesma exige uma fonte exótica, desta forma, tentaremos uma fonte de Dirac-Maxwell na geometria de SV.

5.10 Solução de Simpson-Visser na teoria EDM

A solução de Simpson-Visser representa uma família de soluções relevantes das equações de Einstein [25]. Esta por sua vez permite a interpolação contínua entre as geometrias de buracos negros regulares e wormholes. Desta forma, é natural investigar se teorias gravitacionais acopladas a campos fundamentais como na teoria EDM, admitem soluções desta natureza.

A escolha da solução de Simpson-Visser foi motivada por seu papel de interpolação entre BHs regulares e WHs atravessáveis. Sabendo que em certas condições do parâmetro regularizador “a”, a condição de energia nula NEC é necessariamente violada, necessitando assim de fontes exóticas para sustentar tal geometria. Como o modelo EDM mostrou que fontes fermiônicas podem apresentar o comportamento de matéria exótica, investiga-se a solução de Simpson-Visser no contexto da teoria EDM.

O caso limite da solução (5.77) onde $Q_e \rightarrow r_0$ e recupera a solução de Reissner-Nordstrom também implica na anulação das funções de onda dos férmions, o que leva a um tensor de Energia-Momento de Dirac nulo, ou seja, $T_{\mu\nu}^{(D)} = 0$. Essa anulação da contribuição de Dirac na fonte implica na inexistência de soluções de Black Holes na teoria EDM. A interpretação física deste fato é que no colapso gravitacional, as nuvens de partículas de spin 1/2 desaparecem dentro do horizonte de eventos [26][27]. Desta forma, sabemos que soluções do tipo:

$$ds^2 = -F_0(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F_0(r)} + r^2 d\Omega^2, \quad (5.99)$$

não são permitidas. Com o intuito de encontrar novas soluções do sistema de equações da teoria EDM, tentou-se soluções do tipo Simpson-Visser, isto é, soluções dadas da forma:

$$ds^2 = -F_0(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F_0(r)} + (r^2 + a^2)d\Omega^2. \quad (5.100)$$

As soluções de Simpson-Visser, foram introduzidas na literatura no estudo de geometrias regulares, ou seja, sem singularidades. Um fato importante das soluções SV é que as mesmas

podem representar diferentes geometrias de acordo com o parâmetro a em (5.100). Isto é, estas soluções podem representar um buraco negro de Schwarzschild ($a = 0$), um buraco negro regular ($0 < a < 2M$) e um buraco de minhoca atravessável ($a > 2M$) [25]. Como a solução de SV pode representar um buraco de minhoca atravessável, esta poderia ser uma possível solução do modelo EDM, porém não é. Para observar isso, faz-se a consideração $F_0(r) = \frac{1}{F_1(r)}$ nas equações do modelo, gerando as seguintes equações:

$$\frac{F_2''}{F_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{F_2'}{F_2} \right)^2 + \frac{F_2' F_0}{F_2 F_0} - \frac{1}{2F_2^2 F_0^2} + \frac{(V')^2}{2F_0^2} = 0 \quad (5.101)$$

$$\frac{F_0''}{F_0} + \frac{F_0' F_2'}{F_0 F_2} + \left(\frac{F_0'}{F_0} \right)^2 - \frac{F_2'}{2F_2^2} + \frac{1}{2F_2^2 F_0^2} - \frac{3(V')^2}{2F_0^2} + \frac{4\kappa(P^2 - Q^2)}{F_2 F_0^2} = 0 \quad (5.102)$$

$$\frac{F_0' F_2'}{F_0 F_2} + \frac{F_2'^2}{2F_2^2} - \frac{1}{2F_2^2 F_0^2} + \frac{V'^2}{2F_0^2} + \frac{4(PQ' - QP')}{F_0} = 0. \quad (5.103)$$

Utilizandoas as equações dos férmions e do potencial, estas equações podem ser combinadas gerando,

$$F_0' + \left(\frac{F_2''}{F_2} + \frac{F_2'}{2F_2} \right) F_0 + \left(\frac{Q_e^2 - F_2^2}{2F_2^3 F_2'} \right) \frac{1}{F_0} = 0 \quad (5.104)$$

$$F_0'' + \frac{2F_2'}{F_2} F_0' + \frac{(F_0')^2}{F_0} - \frac{Q_e^2}{F_0 F_2^4} = 0 \quad (5.105)$$

sabendo que $F_2(r) = \sqrt{r^2 + a^2}$, estas equações apresentam soluções diferentes para a mesma função $F_0(r)$, sendo estas dadas por:

$$F_0(r) = \sqrt{1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{Q_e^2}{r^2} + \frac{\sqrt{a^2 + r^2}}{r^2} C_1} \quad (5.106)$$

$$F_0(r) = \frac{\sqrt{(Q_e^2 \arctan(\frac{r}{a}) - aC_1)^2 + 2a^2 Q_e^2 C_2}}{aQ_e}, \quad (5.107)$$

que são completamente independentes uma da outra. Isto representa na afirmação de que para $F_0(r) = \frac{1}{F_1(r)}$, o sistema perde graus de liberdade e fica inconsistente, implicando na não existência de soluções do tipo SV para o modelo EDM.

6 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS

De modo geral, o conjunto de equações geradas pelo modelo, não tem solução analítica, mas para a situação extrema onde considera-se spinors com massa e carga próximas de zero, obtém-se simplificações ao sistema que à partir daí foi resolvido. A solução obtida tem relação direta com a solução de Reissner-Nordström, evidenciando assim sua importância física.

Em particular, foram analisadas possíveis soluções do tipo Simpson-Visser para o modelo EDM, sucedendo na impossibilidade de tais resultados. Desta forma, a solução de Simpson-Visser foi, portanto, utilizada como parâmetro de comparação, permitindo avaliar as limitações da teoria. Esse resultado, nos permite concluir que, no contexto da Relatividade Geral, mesmo que considerando fontes compostas por campos físicos fundamentais, nada nos garante que diferentes geometrias são admissíveis.

Os resultados obtidos neste trabalho não visam a proposição de novas soluções inéditas, mas sim a sistematização do formalismo necessário para o estudo de wormholes na teoria Einstein-Dirac-Maxwell e a identificação explícita das limitações do modelo no que diz respeito à existência de determinadas geometrias. Nesse sentido, a dissertação fornece uma base teórica sólida para investigações futuras.

Uma extensão natural para os trabalhos futuros, consiste na investigação do modelo EDM em cenários geométricos menos restritivos. Desta forma, pretende-se analisar a simetria cilíndrica, pois considera-se plausível soluções do tipo black string sustentadas pelo modelo. Esse tipo de análise possui relevância tanto teórica quanto fenomenológica, pois conecta propriedades geométricas do espaço-tempo a efeitos fisicamente mensuráveis, especialmente as Forças de Maré e sua termodinâmica topológica.

Por fim, uma generalização conceitualmente relevante do modelo EDM consiste na substituição do eletromagnetismo linear por teorias de eletrodinâmica não linear, bem como na introdução de campos fermiônicos não convencionais, como os spinors do tipo Elko. Esses campos apresentam propriedades dinâmicas distintas dos spinors de Dirac usuais e surgem como candidatos naturais em cenários de gravitação modificada e matéria escura.

REFERÊNCIAS

- [1] CESAR, J.; TONIATO, J. D.; VELTEN, H. *Gravitação*. [S.l.]: Livraria da Física, São Paulo, 2021.
- [2] PADMANABHAN, T. *Gravitation: foundations and frontiers*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.
- [3] RINDLER, W. *Relativity: special, general, and cosmological*. [S.l.]: OUP Oxford, 2006.
- [4] BLÁZQUEZ-SALCEDO, J. L.; KNOLL, C.; RADU, E. Traversable wormholes in einstein-dirac-maxwell theory. *Physical Review Letters*, APS, v. 126, n. 10, p. 101102, 2021.
- [5] BLÁZQUEZ-SALCEDO, J. L.; KNOLL, C.; RADU, E. Einstein–dirac–maxwell wormholes: ansatz, construction and properties of symmetric solutions. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 82, n. 6, p. 1–15, 2022.
- [6] DOUGHTY, N. *Lagrangian interaction: an introduction to relativistic symmetry in electrodynamics and gravitation*. [S.l.]: CRC Press, 2018.
- [7] ARFKEN, G.; WEBER, H. H. *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*. [S.l.]: Elsevier, 2007.
- [8] NETO, J. B. *Matemática para físicos com aplicações*. [S.l.]: Livraria da Física, São Paulo, 2010.
- [9] MENDES, W. M. *Campos espinoriais em cenários de mundo brana de co-dimensão um*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Ceará, 2018.
- [10] SOUZA, C. A. d. *Teoria de Einstein-Cartan com campos de Dirac, ação de Holst e fluido de spin*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2016.
- [11] GRIFFITHS, D. J. *Eletrodinâmica, 3ª edição*. [S.l.]: editora Pearson, 2011.
- [12] CASTIÑEIRAS, J.; CRISPINO, L. C. B. Relatividade geral: fundamentos e primeira comprovação experimental. *Ciência e Cultura*, Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, v. 71, n. 3, p. 16–22, 2019.
- [13] FILHO, E. de S. S. *Tensor calculus for engineers and physicists*. [S.l.]: Springer, 2016.
- [14] CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019.
- [15] WALD, R. M. *General relativity*. [S.l.]: University of Chicago press, 2010.

- [16] MORRIS, M. S.; THORNE, K. S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 56, n. 5, p. 395–412, 1988.
- [17] LEMOS, N. A. *Mecânica analítica*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2013.
- [18] NETO, J. B. *Mecânica newtoniana, lagrangiana, hamiltoniana*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2004.
- [19] SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Mecânica quântica moderna*. [S.l.]: bookman, 2013.
- [20] JUNIOR, R. da R. Sobre os spinors e a estrutura do espaço-tempo. *Physicae*, v. 2, n. 1, p. 1–10, 2001.
- [21] NĂSTASE, H. *Classical field theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019.
- [22] SMIRNOV, A.; JR, A. J. D. F. Representações da equação de dirac em 1+ 1 dimensões. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 38, p. e3312, 2016.
- [23] RAMOND, P. *Field theory: a modern primer*. [S.l.]: Routledge, 2020.
- [24] VISSER, M. *Lorentzian wormholes: from einstein to hawking*. [S.l.]: Woodbury, 1995.
- [25] SIMPSON, A.; VISSER, M. Black-bounce to traversable wormhole. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2019, n. 02, p. 042, 2019.
- [26] FINSTER, F.; SMOLLER, J.; YAU, S.-T. Non-existence of black hole solutions for a spherically symmetric, static einstein–dirac–maxwell system. *Communications in mathematical physics*, Springer, v. 205, n. 2, p. 249–262, 1999.
- [27] FINSTER, F.; SMOLLER, J.; YAU, S.-T. The einstein-dirac-maxwell equations-black hole solutions. *arXiv preprint gr-qc/9910030*, 1999.
- [28] BASSALO, J. M. F.; CATTANI, M. S. D. *Teoria de Grupos para Físicos*. [S.l.]: Publicação IF E-BOOK, 2011.

APÊNDICE A - TÓPICOS ESSENCIAIS DE TEORIA DE GRUPOS

Definição: Um conjunto de elementos $G = \{a, b, c \dots\}$ é denominado grupo em relação a uma operação (*) se seus elementos seguem as seguintes propriedades [28]:

1. $\forall a, b \in G, a * b = c \in G$ (**Fechamento**)
2. $\forall a, b, c \in G (a * b) * c = a * (b * c)$ (**Associatividade**)
3. $\exists e \in G | \forall a \in G, a * e = e * a = a$ (**Elemento identidade**)
4. $\forall a \in G, \exists a^{-1} | a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (**Elemento inverso**).

Definição: Sendo a e b dois elementos de G, se $a * b = b * a$, diz-se que G é um grupo Abeliano.

Definição: Um grupo é denominado discreto/ contínuo se seus parâmetros forem discretos/contínuo.

Definição: Um grupo é denominado como Grupo de Lie se os parâmetros desse grupo são contínuos.

Os geradores de um Grupo de Lie podem ser escritos em termos de uma exponencial,

$$D(\alpha) = e^{i\alpha^i X_i} \quad (\text{A.1})$$

onde X_i são os geradores do grupo. A unidade imaginária i é convencional, uma vez que os geradores podem ser hermitianos ou não [28].

Definição: Dois grupos A e B são ditos isomórficos se $\forall a_i \in A$ está relacionado a um e somente um elemento $\forall b_i \in B$.

Definição: Dois grupos A e B são ditos homomórficos se existem pelo menos dois elementos $a_i, a_j \in A$ que estão relacionado a um elemento $\forall b_i \in B$.

Definição: Uma representação de um grupo é a forma explícita em que escreve-se elementos abstratos de um grupo, podendo estas ser representadas por números, exponenciais, matrizes, etc [7]. A representação $D(a)$ de um elemento a pertencente a um grupo G qualquer tem uma relação de isomorfismo com este elemento, desta forma, ela deve seguir:

1. $D(RS) = D(R)D(S), \forall R, S \in G$;
2. $D(R^{-1}) = [D(R)]^{-1}, \forall R \in G$;
3. $D(E) = \mathbb{I}$, onde E é o elemento identidade.

Definição: Duas representações matriciais de um grupo $D(G)$ e $U(G)$ são denominadas equivalentes se $\forall R \in G$, existe a transformação de similaridade:

$$U(R) = S^{-1}D(R)S \quad (\text{A.2})$$

Definição: Uma representação matricial é denominada redutível se esta pode ser escrita como:

$$D(R) = \begin{pmatrix} D^i(R) & 0 \\ 0 & D^j(R) \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

ou seja, na forma de uma matriz diagonal.