



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CICERO TIARLOS NOGUEIRA CRUZ

Uma demonstração do teorema de Grayson sobre  
evolução de curvas planas pela curvatura

FORTALEZA

2011

# Cicero Tiarlos Nogueira Cruz

Uma demonstração do teorema de Grayson sobre evolução de  
curvas planas pela curvatura

Dissertação submetida à Coordenação  
do Curso de Pós-Graduação em  
Matemática, da Universidade Federal  
do Ceará, para obtenção do grau de  
Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Levi Lopes de  
Lima.

FORTALEZA

2011

Cruz, Cicero Tiarlos Nogueira.  
C961d Uma demonstração do teorema de Grayson sobre  
evolução de curvas planas pela curvatura/ Cícero  
Tiarlos Nogueira Cruz. -Fortaleza, 2011.  
45 f.  
Orientador: Prof. Dr. Levi Lopes de Lima.  
Área de concentração: Matemática  
Dissertação(Mestrado)- Universidade Federal do Ceará,  
Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Fortaleza, 2011.  
1.Geometria diferencial.I. Lima, Levi Lopes de (Orient.)  
CDD 516.36

folha de aprovação

*À minha família*

# Agradecimentos

Aos meus pais: Jesualdo e Zezita por acreditarem em mim, aos meus irmãos: Tiago e Tiarlison por serem meus grandes parceiros e amigos para qualquer hora.

Aos meus colegas de graduação: Fabiano Luiz da Silva, Antônio Emiliano Ribeiro, Cícera Ferreira dos Santos e Rosilda Benício de Sousa. Além dos meus professores da graduação na Universidade Regional do Cariri: Mário de Assis Oliveira, Evandro Carlos Ferreira dos Santos, Carlos Alberto Soares de Almeida, Zeláber Gondim Guimarães, Pedro Ferreira de Lima e em especial ao meu orientador de iniciação científica: Carlos Humberto Soares Júnior, pelo grande incentivo.

Aos companheiros da Pós-graduação: João Vitor da Silva, Francisco Pereira Chaves, Priscila Rodrigues de Alcântara, Júnio Moreira de Alencar, Francisco de Assis Benjamim Filho, Maria Wanderlândia Coriolano de Lavor, Maria de Fátima Cruz Tavares, José Loester Sá Carneiro, Antonio Wilson Rodrigues da Cunha, Filipe Mendonça de Lima, Francisco Calvi da Cruz Júnior, João Francisco da Silva Filho, Antonio Edinardo de Oliveira, José Deibson da Silva, José Ederson Melo Braga, Leon Denis da Silva, Rondinelle Marcolino Batista, Tiago Mendonça Lucena de Veras.

Não posso perder a oportunidade de agradecer a: Flávio França, José Nazareno, Kelton Silva, Ernani Ribeiro Jr, Juscelino Pereira Silva, Marco Antonio Lázaro Velásquez Rachel Costa, Elaine Sampaio, Robério Alexandre, Leonardo, Euripedes, Camilo Carlos, Ícaro Carlos e Damião Junior. Agradeço muitíssimo a Andressa.

Aos funcionários da pós-graduação, em especial a para a competente e simpática Andréa, além dos funcionários da biblioteca pelo pronto serviço.

A meu orientador Levi Lopes de Lima pela paciência e dicas na organização deste trabalho.

Aos professores do curso de mestrado em matemática: Luquésio Petrola

de Melo Jorge, Cleon da Silva Barroso, Antônio Caminha Muniz Neto, Jorge Herbert Soares de Lira, Silvano Dias Bezerra de Menezes, José Othon Dantas Lopes, Aldir Chaves Brasil Júnior, Marcos Ferreira de Melo, João Lucas Marques Barbosa, José Fábio Bezerra Montenegro, Eduardo Vasconcelos Oliveira Teixeira e Levi Lopes de Lima, pelo conhecimento transmitido.

Ao CNPQ, pelo suporte financeiro.

A Deus acima de TUDO.

O aspecto mais triste da vida de hoje é  
que a ciência ganha em conhecimento mais  
rapidamente que a sociedade em sabedoria.  
Isaac Asimov



# Resumo

Baseados no recente trabalho de Andrews e Bryan [2], apresentamos uma nova demonstração do famoso teorema de Grayson [4], que descreve o comportamento assintótico de curvas planas fechadas e simples evoluindo pelo fluxo da curvatura. A demonstração representa uma simplificação notável em relação aos métodos anteriores e consiste em normalizar o fluxo de forma a preservar o comprimento (igual a  $2\pi$ ). Feito isto, estabelece-se uma desigualdade isoperimétrica que controla inferiormente o comprimento de cordas em termos do comprimento dos arcos correspondentes e do tempo decorrido. Essa estimativa é precisa o suficiente para permitir controlar uniformemente a curvatura ao longo do tempo, o que implica, sem muitas dificuldades, que a curvatura do fluxo normalizado converge uniformemente na topologia  $C^\infty$  para a função identicamente igual a 1.

**Palavra-chave:** fluxo pela curvatura, geometria, desigualdade isoperimétrica

# Abstract

Based on the recent work by Andrews and Bryan [2] we present a new proof of the celebrated Grayson's theorem [4], which describes the asymptotic behavior of simple curves evolving by the curve shortening flow. The proof represents a remarkable simplification over the previous methods and consist of normalizing the flow in order to preserve the length (equal to  $2\pi$ ). It is then established an isoperimetric inequality which provides a lower bound for the length of chords in terms of the corresponding arcs and elapsed time. This estimate is sufficiently strong to uniformly control the curvature in time, implying, without many difficulties, that the curvature of the normalized flow converges in the  $C^\infty$  topology to the function identically equal to 1.

**Word-Keys:** curve shortening flow, geometry, isoperimetric inequality

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Geometria de curvas e o fluxo da curvatura</b>	<b>14</b>
2.1	Curvas planas . . . . .	14
2.2	Evolução pela curvatura . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Uma desigualdade isoperimétrica para o fluxo da curvatura</b>	<b>21</b>
3.1	Normalizando o fluxo da curvatura . . . . .	21
3.2	A desigualdade isoperimétrica de Andrews and Bryan . . . . .	23
<b>4</b>	<b>O teorema de Grayson</b>	<b>34</b>
<b>5</b>	<b>Apêndice</b>	<b>37</b>

# Capítulo 1

## Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento assintótico de curvas planas simples evoluindo pelo fluxo da curvatura. Mais precisamente, seja  $\tilde{F}_0 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva plana que suporemos simples (isto é, sem auto-intersecções). Diz-se que  $\tilde{F}_0$  evolui pela curvatura se existe, para algum  $\varepsilon > 0$ , uma aplicação  $\tilde{F} : [0, \varepsilon) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfazendo o PVI (problema de valor inicial)

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tau} &= -\tilde{k}\tilde{N} \\ \tilde{F}(0, \cdot) &= \tilde{F}_0(\cdot) \end{cases} \quad (1.1)$$

onde  $\tilde{k}(\tau, \cdot)$  é a curvatura e  $\tilde{N}(\tau, \cdot)$  é o vetor normal unitário à curva em  $\tilde{F}(\tau, \cdot)$ , que escolhemos apontando para fora da região limitada pela curva. Neste caso, diz-se que  $\tilde{F}$  é uma solução (local) do fluxo da curvatura.

Utilizando a Teoria de Equações Parabólicas mostra-se que o PVI acima possui uma solução maximal no tempo, digamos  $\tilde{F} : [0, \tilde{T}) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , para qualquer curva inicial  $\tilde{F}_0$  simples; veja Teorema 2.1 abaixo. Mais ainda, como aplicação do Princípio do Máximo, verifica-se que, ao longo da evolução, a curva permanece simples e contrai-se em tempo finito a um ponto, no sentido que sua área se anula quando  $\tau \rightarrow \tilde{T}$ . Determinar o comportamento assintótico da curva quando  $\tau \rightarrow \tilde{T}$ , porém, é tarefa deveras complicada que

foi completamente resolvida por M. Grayson, conforme explicado no teorema abaixo, que é o principal resultado deste trabalho.

**Teorema 1.1** *Se aplicarmos uma homotopia a uma solução  $\tilde{F}_0$  do fluxo da curvatura (1.1) de tal modo as curvas da evolução possuam a mesma área então as curvas deste fluxo normalizado convergem para um círculo na topologia  $C^\infty$ . Em palavras, o fluxo da curvatura contrai qualquer curva fechada simples em tempo finito para um ponto, tornando-a circular ao final da evolução.*

Até recentemente, as demonstrações disponíveis deste resultado, que descreve precisamente o comportamento assintótico de soluções de uma equação parabólica não-linear, em geral dependiam de resultados extremamente técnicos na teoria das equações de evolução geométricas (classificação de singularidades, fórmulas de monotonia, desigualdade de Harnanack, etc.) Recentemente, porém, Andrews e Bryan [2] apresentaram uma demonstração do teorema de Grayson que evita inteiramente o uso destas técnicas sofisticadas e deduz diretamente o resultado a partir de uma desigualdade isoperimétrica para uma versão normalizada do fluxo. Mais precisamente, o passo inicial na demonstração é aplicar uma homotopia conveniente às curvas do fluxo da curvatura de tal modo a preservar o comprimento (fazendo-o igual a  $2\pi$ , digamos) ao longo da evolução. Estabelece-se então, para qualquer solução deste fluxo normalizado, uma desigualdade isoperimétrica que controla inferiormente o comprimento de cordas em termos do comprimento dos arcos correspondentes e do tempo decorrido; veja Teorema 3.1 abaixo. Esta estimativa é precisa o suficiente para garantir um controle uniforme, isto é, independente do tempo, para a norma  $C^0$  da curvatura do fluxo normalizado; veja Teorema 4.1 abaixo. A partir daí, é relativamente simples verificar que a curvatura do fluxo normalizado converge, na topologia  $C^\infty$ , para a função identicamente igual a 1, e o Teorema de Grayson resulta imediatamente.

# Capítulo 2

## Geometria de curvas e o fluxo da curvatura

Neste capítulo recordamos os fatos básicos da geometria de curvas planas. Além disso, apresentamos o fluxo da curvatura e discutimos suas propriedades fundamentais.

### 2.1 Curvas planas

Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo. Uma *curva parametrizada* em  $\mathbb{R}^2$  é uma aplicação  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  suave e regular. Aqui, suavidade significa que  $\alpha$  possui derivadas de todas as ordens em todos os pontos de seu domínio, enquanto regularidade significa que  $\alpha_u(u_0) \neq 0$  para qualquer  $u_0 \in I$ . Note que isso implica em particular que podemos definir a reta tangente a  $\alpha$  em todos os seus pontos.

Diremos que  $\bar{\alpha} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma *reparametrização* de  $\alpha$  se vale  $\bar{\alpha} = \alpha \circ h$  para algum difeomorfismo crescente  $h : J \rightarrow I$  entre intervalos da reta. É conveniente identificar curvas parametrizadas que diferem por uma reparametrização  $h$  como acima, de forma que somente estaremos interessados em propriedades do *traço* de  $\alpha$ ,  $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$ , que não dependem da

parametrização utilizada. O objeto que resulta desta identificação será chamado de *curva plana* ou simplesmente *curva*.

Lembremos que um *movimento rígido* em  $\mathbb{R}^2$  é uma aplicação  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  da forma

$$\phi(x) = Ax + b, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

onde  $A \in SO(2)$  é uma matriz ortogonal com determinante unitário e  $b \in \mathbb{R}^2$ . Se  $\nu = |\alpha_u| > 0$  é a *velocidade* de  $\alpha$  então é fácil verificar que a integral

$$L[\alpha] = \int \nu du,$$

o *comprimento* de  $\alpha$ , não depende da parametrização utilizada para calculá-lo e é invariante por movimentos rígidos. Se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfaz  $|\alpha_s(s)| = 1$  para qualquer  $s \in I$ , o que sempre pode ser obtido por meio de uma reparametrização, diremos que  $\alpha$  é *parametrizada pelo comprimento de arco* e que  $s$  é o *parâmetro comprimento de arco* para  $\alpha$ . De posse de tal parametrização, denotaremos por  $\mathbf{T} = \alpha_s$  o *vetor tangente unitário* a  $\alpha$ . Note que, como a terminologia dá a entender,  $\mathbf{T}$  possui norma unitária.

Fixemos a orientação canônica em  $\mathbb{R}^2$ . O *vetor normal unitário*  $\mathbf{N}$  a  $\alpha$  é completamente determinado pelas seguintes condições: i)  $|\mathbf{N}| = 1$ ; ii) a base  $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}\}$  determina, nesta ordem, a orientação *oposta* à orientação fixada em  $\mathbb{R}^2$ . Logo,  $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}\}$  define um diedro móvel ao longo de  $\alpha$ .

Uma curva  $\alpha$  é dita ser *fechada* se seu domínio é o círculo unitário  $S^1$ , ou seja,  $\alpha : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Além disso,  $\alpha$  é *simples* se não possui auto-intersecção. Note que com a nossa convenção, a normal unitária de uma curva simples, percorrida no sentido anti-horário, sempre aponta para fora da região limitada determinada pela curva.

Resulta de  $|\mathbf{T}| = 1$  que  $\langle \mathbf{T}_s, \mathbf{T} \rangle = 0$  e assim existe uma função suave

$$\kappa = -\langle \mathbf{T}_s, \mathbf{N} \rangle : I \rightarrow \mathbb{R},$$

a *curvatura* de  $\alpha$ .

Note ainda que  $\langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle = 0$  implica  $\langle \mathbf{N}_s, \mathbf{T} \rangle = -\langle \mathbf{N}, \mathbf{T}_s \rangle = -\kappa$ , e assim valem as equações de Serret-Frenet.

$$\begin{cases} \alpha_s &= \mathbf{T} \\ \mathbf{T}_s &= -\kappa \mathbf{N} \\ \mathbf{N}_s &= \kappa \mathbf{T}, \end{cases}$$

O Teorema Fundamental das Curvas [1] garante que a curvatura determina completamente a curva a menos de movimentos rígidos. A demonstração usa as equações de Serret-Frenet. Além disso, estas equações permitem determinar o comportamento local de uma curva. Com efeito, expandindo  $\alpha = \alpha(s)$  em série de Taylor em torno de  $s_0 \in I$  temos:

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \alpha(s_0) + (s - s_0)\mathbf{T}(s_0) - \frac{(s - s_0)^2}{2}\kappa(s_0)\mathbf{N}(s_0) - \\ &\quad - \frac{(s - s_0)^3}{6}(\kappa'(s_0)\mathbf{N}(s_0) + \kappa(s_0)^2\mathbf{T}(s_0)) + o(|s - s_0|^4). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Isto mostra em particular que a curvatura determina, localmente, quanto  $\alpha$  afasta-se de sua reta tangente.

## 2.2 Evolução pela curvatura

Em muitas situações de natureza prática, uma curva plana fechada e simples aparece como modelo matemático de uma interface, ou membrana, que separa dois meios físicos de constituições distintas. A interação entre esses dois meios determina a evolução da membrana ao longo do tempo através de uma lei que especifica a velocidade instantânea com que cada ponto da membrana se move. Passemos agora a definir o conceito matemático que descreve uma evolução deste tipo.

**Definição 1** *Seja  $\tilde{F}_0 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada, não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco. Uma variação de  $\tilde{F}_0$  é uma aplicação suave  $\tilde{F} : (-\varepsilon, \varepsilon) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfazendo:*



1.  $\tilde{F}(0, u) = \tilde{F}_0(u)$  para qualquer  $u \in S^1$ ;
2. Para qualquer  $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  a aplicação  $\tilde{F}^\tau : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $\tilde{F}^\tau(u) = \tilde{F}(\tau, u)$ , define uma curva fechada regular.

Uma variação de  $G_0$  descreve portanto uma família a um parâmetro de curvas, dependendo de  $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , e que ‘passa’ por  $\tilde{F}_0$  quando  $\tau=0$ . O parâmetro  $\tau$  pode ser visto como o tempo ao longo da qual as curvas da variação evoluem. Como deformações tangentes às curvas de uma variação podem ser incorporadas a reparametrizações, que certamente não afetam a geometria das curvas, descrever uma variação é em princípio equivalente a fornecer sua lei de evolução:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tau} = g\tilde{N}, \quad (2.2)$$

onde

$$g(\tau, u) = \left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tau}(\tau, u), \tilde{N} \right\rangle, \quad (\tau, u) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times S^1,$$

é a *função variacional*. Aqui,  $\{\tilde{T}, \tilde{N}\}$  é o diedro móvel ao longo de  $\tilde{F}$ .

O lema seguir determina a evolução de invariantes de curvas ao longo de uma variação.

**Lema 1** *Se  $\tilde{k}$  é a curvatura de uma variação como acima temos:*

1. *A velocidade  $\nu$  evolui de acordo com*

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} = \nu g\tilde{k}.$$

2. *(Fórmula da primeira variação do comprimento) O comprimento  $L$  evolui de acordo com*

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} = \int g\tilde{k}ds. \quad (2.3)$$

**Demonstração:** Pela regra da cadeia, as equações de Serret-Frenet podem ser reescritas em termos do parâmetro  $u$  como:

$$\begin{cases} \tilde{G}_u = \nu \tilde{T} \\ \tilde{T}_u = -\nu \tilde{k} \tilde{T} \\ \tilde{N}_u = \nu \tilde{k} \tilde{T} \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau}(\nu^2) &= \frac{\partial}{\partial \tau} \langle \tilde{F}_u, \tilde{F}_u \rangle \\ &= 2 \left\langle \tilde{F}_u, \frac{\partial \tilde{F}_u}{\partial \tau} \right\rangle \\ &= 2 \left\langle \tilde{T}_u, \left( \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tau} \right)_u \right\rangle \\ &= 2 \langle \nu \tilde{T}, (g \tilde{N})_u \rangle \\ &= 2 \langle \nu \tilde{T}, g_u \tilde{N} + g(\nu \tilde{k} \tilde{T}) \rangle \\ &= 2\nu^2 g \tilde{k}, \end{aligned}$$

e isto demonstra o primeiro item. Para o segundo, note que

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} = \int_{S^1} \frac{\partial \nu}{\partial \tau} du = \int_{S^1} g \tilde{k} \nu du = \int g \tilde{k} ds,$$

como desejado. □

Note que, se quisermos deformar uma curva ao longo de uma variação de maneira que seu comprimento diminua de forma mais eficiente possível, devemos fazê-lo de modo que  $g = -\tilde{k}$  em (2.2). Isto dá origem ao *fluxo da curvatura*:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tau} = -\tilde{k} \tilde{N} \\ \tilde{F}(0, \cdot) = \tilde{F}_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

onde  $\tilde{F}_0$  é uma curva fechada previamente conhecida. Devemos pensar neste sistema de equações como um PVI (problema de valor inicial), ou seja, a curva  $\tilde{F}_0$  é dada de antemão e busca-se então, para algum  $\varepsilon > 0$ , uma aplicação suave  $\tilde{F} : [0, \varepsilon) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfazendo as equações.

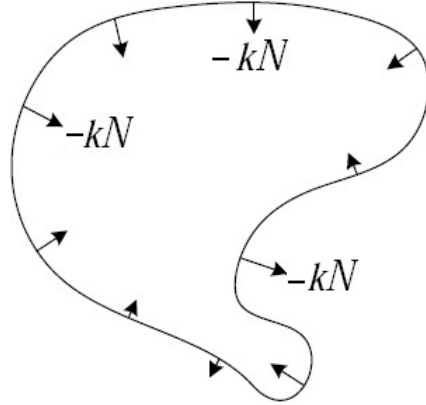


Figura 1. Curva evoluindo pelo fluxo da curvatura

No Apêndice mostraremos, a partir de resultados clássicos na Teoria das Equações Diferenciais Parciais Parabólicas, o seguinte resultado.

**Teorema 2.1** *Para qualquer curva inicial  $\tilde{F}_0$  simples o PVI (2.4) possui uma única solução suave  $\tilde{F} : [0, \varepsilon) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , para algum  $\varepsilon > 0$ . Mais ainda, a solução existe no tempo enquanto sua curvatura permanecer uniformemente limitada. Em particular, se  $\tilde{T} < +\infty$  é o tempo maximal de existência da solução então necessariamente vale*

$$\lim_{\tau \rightarrow \tilde{T}} \|\tilde{k}(\tau, \cdot)\|_{C^0(S^1)} = +\infty. \quad (2.5)$$

Resulta do Teorema 5.1 que, ao longo da evolução, a curva permanece simples e contrai-se em tempo finito para um ponto, no sentido que sua área se anula quando  $\tau \rightarrow \tilde{T}$ . Um problema deveras interessante, e de natureza bastante complicada, é determinar o comportamento assintótico das soluções de (2.4). A este respeito, o teorema a seguir fornece uma resposta completamente satisfatória a esta questão.

**Teorema 2.2** (Grayson, [4]) *Se aplicarmos uma homotopia à solução maximal  $\tilde{F}$  do fluxo da curvatura (2.4) de tal modo as curvas da evolução possuam a mesma área então as curvas deste fluxo normalizado convergem para um círculo na topologia  $C^\infty$ . Em palavras, o fluxo da curvatura contrai qualquer curva simples em tempo finito para um ponto, tornando-a circular ao final da evolução.*

Até recentemente, todas as demonstrações disponíveis deste resultado utilizavam argumentos extremamente sofisticados da teoria de equações de evolução geométricas. Recentemente, porém, conforme já mencionamos na Introdução, Andrews e Bryan [2] apresentaram uma demonstração direta do teorema de Grayson. O argumento consiste em normalizar o fluxo de tal modo a preservar o comprimento das curvas e então estabelecer, como principal ingrediente da demonstração, uma desigualdade isoperimétrica para este fluxo normalizado que controla inferiormente o comprimento de cordas em função dos comprimentos dos arcos correspondentes e do tempo decorrido, conforme explicado no próximo capítulo.

# Capítulo 3

## Uma desigualdade isoperimétrica para o fluxo da curvatura

Neste capítulo vamos apresentar uma desigualdade isoperimétrica para soluções normalizadas do fluxo pela curvatura que é o principal ingrediente na demonstração do teorema de Grayson recentemente apresentada por Andrews and Bryan [2].

### 3.1 Normalizando o fluxo da curvatura

Seja  $\tilde{F}_0 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva simples e  $\tilde{F} : [0, \tilde{T}) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a solução maximal do PVI (fluxo pela curvatura):

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tau} &= -\tilde{k}\tilde{N} \\ \tilde{F}(0, \cdot) &= \tilde{F}_0(\cdot) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $\tilde{k}(\tau, \cdot)$  é a curvatura. Pelo Teorema 2.1 tal solução existe e  $\tilde{T} < +\infty$ .

Para nossos propósitos convém normalizar o fluxo  $\tilde{F}^\tau = \tilde{F}(\tau, \cdot)$ , transformando-o num novo fluxo  $F : [0, T) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $0 < T \leq \infty$ , de tal modo

que todas as curvas  $F^t = F(t, \cdot)$ ,  $t \in [0, T)$ , tenham o mesmo comprimento, digamos  $2\pi$ . Faremos isto definindo

$$F(t, p) = \frac{2\pi}{L[\tilde{F}(\tau, p)]} \tilde{F}(\tau, p),$$

onde  $L[\tilde{F}(\tau, \cdot)]$  é o comprimento de  $\tilde{F}(\tau, \cdot)$ , e

$$t = \int_0^\tau \left( \frac{2\pi}{L[\tilde{F}(\tau', \cdot)]} \right)^2 d\tau',$$

de modo que

$$T = \int_0^{\hat{T}} \left( \frac{2\pi}{L[\tilde{F}(\tau', \cdot)]} \right)^2 d\tau'.$$

Assim,  $t$  é o novo parâmetro temporal que se relaciona com o tempo original  $\tau$  através de

$$\frac{dt}{d\tau} = \left( \frac{2\pi}{L[\tilde{F}(\tau, p)]} \right)^2.$$

Note que  $L[F(t, \cdot)] = 2\pi$  para  $t \in [0, T)$ , como queríamos. Mais ainda, a curvatura  $k$  de  $F$  é

$$k(t, \cdot) = \frac{L[\tilde{F}(\tau, p)]}{2\pi} \tilde{k}(\tau, \cdot) \quad (3.2)$$

e os elementos de comprimento de arco são relacionados por

$$ds_t = \frac{2\pi}{L[\tilde{F}(\tau, p)]} d\tilde{s}_\tau. \quad (3.3)$$

**Lema 2** Denotando por  $\{T, N\}$  o diedro móvel ao longo de  $F$ . A curva  $F$  evolui de acordo com

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \overline{k^2} F - kN, \quad (3.4)$$

onde  $\overline{k^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} k^2 ds$ .

**Demonstração** Com efeito, veja que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt},$$

com

$$\frac{d\tau}{dt} = \left( \frac{L[\tilde{F}(\tau', \cdot)]}{2\pi} \right)^2.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{2\pi}{L[\tilde{F}(\tau, \cdot)]} \tilde{F}(p, \tau) \right) \\
&= \left( \frac{2\pi}{L[\tilde{F}(\tau, \cdot)]} \right) \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{2\pi}{L[\tilde{F}(\tau, \cdot)]} \right) \tilde{F} \\
&= - \left( \frac{2\pi}{L[\tilde{F}(\tau, \cdot)]} \right) \tilde{k} \tilde{N} + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{2\pi}{L[\tilde{F}(\tau, \cdot)]} \right) \tilde{F} \\
&= - \left( \frac{2\pi}{L[\tilde{F}(\tau, \cdot)]} \right) \tilde{k} \tilde{N} - \\
&\quad - \left( \frac{2\pi}{L[\tilde{F}(\tau, \cdot)]} \right)^2 \left( - \int \tilde{k}^2 d\tilde{s} \right) \frac{L[\tilde{F}(\tau, \cdot)]}{2\pi} F(t, p),
\end{aligned}$$

onde usamos (2.3) com  $g = -\tilde{k}$ . Assim,

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{2\pi}{L[\tilde{F}(\tau, \cdot)]} \left( -\tilde{k} \tilde{N} + \left( \int \tilde{k}^2 d\tilde{s} \right) F(t, p) \right),$$

e o resultado segue em função de (3.2) e (3.3), visto que  $N = \tilde{N}$ .

□

## 3.2 A desigualdade isoperimétrica de Andrews and Bryan

Seja  $F : [0, T) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma solução de (3.4). Noutras palavras,  $F$  é a normalização de uma solução maximal do fluxo da curvatura (1.1) de tal modo que as curvas possuem, ao longo da evolução, comprimento fixo igual a  $2\pi$ . Consideremos então as funções

$$d, \ell : [0, T) \times S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

dadas por

$$d(t, p, q) = |F(t, q) - F(t, p)|, \quad \ell(t, p, q) = \int_p^q ds_t = s_t(q) - s_t(p).$$

Em outras palavras,  $d(t, p, q)$  é o comprimento da corda determinada por  $F(t, p, q)$  e  $F(t, q)$  e  $\ell(t, p, q)$  é o comprimento do arco determinado por estes pontos. A desigualdade isoperimétrica de Andrews e Bryan [2] fornece uma cota inferior para  $d$  em termos de  $\ell$  e  $t$ . Mais precisamente, vale o resultado a seguir.

**Teorema 3.1** *Seja  $F : [0, T) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma solução do fluxo normalizado (3.4). Então existe  $\bar{t} \in \mathbb{R}$  tal que para quaisquer  $p, q \in S^1$  e  $t \geq 0$  vale*

$$d(t, p, q) \geq f(\ell(t, p, q), t - \bar{t}) \quad (3.5)$$

onde

$$f(t, x) = 2e^t \arctan(e^{-t} \operatorname{sen}(\frac{x}{2})), \quad t \in \mathbb{R}, x \in [0, 2\pi] \cong S^1.$$

**Demonstração:** Vamos inicialmente verificar que vale a desigualdade  $d \geq f(\ell, -\bar{t})$  para  $\bar{t}$  suficientemente grande. Noutras palavras, existe  $\bar{t} \in \mathbb{R}$  tal que (3.5) é satisfeita em  $t = 0$ . Para tanto, veja que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) &= 2e^t \left[ \arctan(e^{-t} \operatorname{sen}(x/2)) - \frac{e^{-t} \operatorname{sen}(x/2)}{1 + e^{-2t} \operatorname{sen}^2(x/2)} \right] \\ &= 2e^t h(e^{-t} \operatorname{sen}(x/2)), \end{aligned}$$

onde

$$h(z) = \arctan(z - \frac{z}{1+z^2}).$$

Note que  $h(0) = 0$  e  $h'(z) = \frac{2z^2}{(1+z^2)^2} > 0$  para  $z > 0$  e assim  $h(z) > 0$  para  $z > 0$ , donde  $\frac{\partial f}{\partial t} > 0$ , e conseqüentemente  $f$  é estritamente crescente em  $t$ . Observe ainda que  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(x, t) = 2\operatorname{sen}(x/2)$  e  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(x, t) = 0$ .

Consideremos agora

$$a(p, q) = \inf\{e^t; d(p, q) \geq f(\ell(p, q), -t)\}$$

para  $p \neq q$  em  $S^1$ . Aqui,  $d(p, q) = d(0, p, q)$  e  $\ell(p, q) = \ell(0, p, q)$ . Veja que, pelo Teorema da Função Implícita,  $a$  é suave e positiva sempre que  $0 < d < 2\operatorname{sen}(\ell/2)$ , e aí é dada por

$$d(p, q) = f(\ell(p, q), -\log(a(p, q))). \quad (3.6)$$



O lema a seguir mostra que  $a$  estende-se continuamente para a diagonal  $\{p = q\} \subset S^1 \times S^1$ .

**Lema 3** *A função  $a$  se estende a uma função contínua em  $S^1 \times S^1$  se pusermos*

$$a(p, p) = \sqrt{\frac{\max\{k(p)^2 - 1, 0\}}{2}}.$$

*Em particular,  $\bar{a} = \sup\{a(p, q); p \neq q\} < +\infty$ .*

**Demonstração:** Fixemos  $p$  e parametrizemos  $F_0$  pelo comprimento de arco  $s$  de modo que  $F_0(0) = p_0 = (0, 0)$ . Assim, por (2.1),

$$\begin{aligned} F_0(s_2) - F_0(s_1) &= (s_2 - s_1)T(s_1) - \frac{(s_2 - s_1)^2}{2}k(s_1)N(s_1) \\ &\quad - \frac{(s_2 - s_1)^3}{6}(k(s_1)N(s_1) + k(s_1)^2T(s_1)) + o(|s_2 - s_1|^4) \\ &= ((s_2 - s_1) - \frac{(s_2 - s_1)^3}{6}k(s_1)^2)T(s_1) \\ &\quad - \left( \frac{(s_2 - s_1)^2}{2}k(s_1) + \frac{(s_2 - s_1)^3}{6}k(s_1) \right) N(s_1) + o(|s_2 - s_1|^4), \end{aligned}$$

e, uma vez que  $d(s_1, s_2) = |F_0(s_2) - F_0(s_1)|$ ,

$$\begin{aligned} d(s_1, s_2)^2 &= |s_2 - s_1|^2 \left( 1 - \frac{(s_2 - s_1)^2}{12}k(s_1)^2 + O(|s_2 - s_1|^3) \right) \\ &= |s_2 - s_1|^2 \left( 1 - \frac{(s_2 - s_1)^2}{12}k(0)^2 + O((|s_2| + |s_1|)|s_2 - s_1|^2) \right). \end{aligned}$$

Mas  $\ell(s_2, s_1) = |s_2 - s_1|$ , de sorte que

$$d(s_1, s_2) = \ell(s_1, s_2) - \frac{\ell(s_1, s_2)^3}{24}(k(0)^2 + O(|s_2| + |s_1|)).$$

Por outro lado, a expansão em série de Taylor de  $f$  em  $x = 0$  fornece

$$f(x, -\log a) = x - \frac{1 + 2a^2}{24}x^3 + O(x^4),$$

e como  $2\text{sen}(x/2) = x - \frac{1}{24}x^3 + O(x^4)$ , (3.6) nos dá, para  $k(0)^2 > 1$ ,

$$\ell - \left( \frac{k(0)^2}{24} + O(|s_2| + |s_1|) \right) \ell^3 = \ell - \frac{1 + 2a^2}{24}\ell^3 + O(\ell^4).$$

Logo,

$$\max\{k(0)^2, 1\} = 1 + 2a(s_1, s_2)^2 + O(|s_1| + |s_2|),$$

e assim

$$\lim_{(s_1, s_2) \rightarrow (0,0)} a(s_1, s_2) = \sqrt{\frac{\max\{k(0)^2 - 1, 0\}}{2}}, \quad (3.7)$$

e a continuidade de  $a$  em  $(p, p)$  segue.

□

Como  $f$  é monótona temos

$$d(p, q) \geq f(\ell(p, q), -\log a(p, q)) \geq f(\ell(p, q), -\bar{t}),$$

onde  $\bar{t} = \log \bar{a}$ , e assim (3.5) vale para  $t = 0$ .

Para verificar que (3.5) também vale para  $t > 0$  consideremos  $Z : [0, T) \times S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$Z(t, p, q) = d(t, p, q) - f(\ell(t, p, q), t - \bar{t}). \quad (3.8)$$

Note que  $Z$  é contínua e diferenciável se  $p \neq q$ . Fixe  $t_1 \in (0, T)$  e escolha  $C > \sup\{\bar{k}^2(t); 0 \leq t \leq t_1\}$ . O lema a seguir completa a demonstração de (3.5).

**Lema 4** *Para qualquer  $\varepsilon > 0$ ,  $Z_\varepsilon = Z + \varepsilon e^{Ct}$  permanece positivo em  $[0, t_1] \times S^1 \times S^1$ .*

Com efeito, suponha por absurdo que este não é o caso. Ora, em  $t = 0$  e ao longo da diagonal  $\{(p, p); p \in S^1\}$  tem-se  $Z_\varepsilon \geq \varepsilon > 0$ , de modo que se  $Z_\varepsilon$  não permanece positivo existem  $t_0 \in (0, t_1]$  e  $(p_0, q_0) \in S^1 \times S^1$  com  $p_0 \neq q_0$  tais que

$$Z_\varepsilon(t_0, p_0, q_0) = 0 = \inf\{Z_\varepsilon(t, p, q, t); p, q \in S^1, 0 \leq t \leq t_0\}. \quad (3.9)$$

Logo, em  $(t_0, p_0, q_0)$  teremos

$$Z = -\varepsilon e^{Ct_0}, \quad \frac{\partial Z}{\partial t} + C\varepsilon e^{Ct_0} = \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial t} \leq 0, \quad (3.10)$$

Além disso, aí as derivadas espaciais de primeira ordem de  $Z$  se anulam e as de segunda ordem são não-negativas. Mostraremos a seguir que estas condições em  $Z$  não podem acontecer simultaneamente.

Sem perda de generalidade, podemos supor que a curva  $F^{t_0}$  é parametrizada pelo comprimento de arco. Note que a normal unitária  $N$  foi escolhida apontando para fora da região limitada pela curva. Dados  $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ , considere a curva  $\mu(u) = (p_0 + \xi u, q_0 + \eta u, t_0)$  e calculemos:

$$\frac{\partial}{\partial u} Z(\mu(u)) = \frac{\partial Z}{\partial p} \cdot \frac{\partial}{\partial u}(p_0 + \xi u) + \frac{\partial Z}{\partial q} \cdot \frac{\partial}{\partial u}(q_0 + \eta u) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} t_0. \quad (3.11)$$

Ora,

$$\frac{\partial Z}{\partial p} = \frac{\partial d}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p} f(\ell, t - \bar{t}) = \frac{\partial d}{\partial p} - \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \ell}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial}{\partial p} (t - \bar{t}) \right)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial d}{\partial p}(t, p, q) &= \frac{\partial}{\partial p} |F(t, q) - F(t, p)| \\ &= \frac{\partial}{\partial p} \sqrt{\langle F(t, q) - F(t, p), F(t, q) - F(t, p) \rangle} \\ &= \frac{\langle -\frac{\partial F}{\partial p}(t, p), F(t, q) - F(t, p) \rangle}{\sqrt{\langle F(t, q) - F(t, p), F(t, q) - F(t, p) \rangle}} \\ &= \frac{\langle -\frac{\partial F}{\partial p}(t, p), F(t, q) - F(t, p) \rangle}{d(t, p, q)} \\ &= \langle -T_p, w \rangle, \end{aligned}$$

onde  $T_p = \frac{\partial F}{\partial p}(t, p)$  e, para  $p \neq q$ ,

$$w(p, q, t) = \frac{F(t, q) - F(t, p)}{d(t, p, q)}.$$

Um cálculo análogo vale para  $\frac{\partial d}{\partial q}(t, p, q)$ , de maneira que (3.11) torna-se:

$$\frac{\partial}{\partial u} Z(\mu(u)) = \xi (-\langle w, T_p \rangle + f') + \eta (\langle w, T_q \rangle - f'), \quad (3.12)$$

onde  $f'$  é a derivada em relação ao primeiro argumento espacial. Note que  $w$  aponta na direção da corda  $\overline{F(t_0, p_0)F(t_0, q_0)}$ .

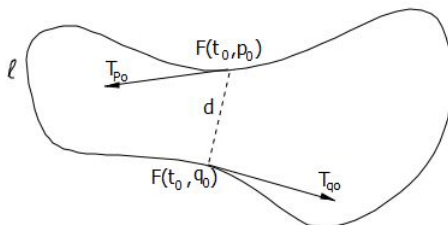


Figura 2

Sabemos que o lado esquerdo de (3.12) anula-se em  $u = 0$ , de modo que vale

$$f' = \langle w, T_{p_0} \rangle = \langle w, T_{q_0} \rangle, \quad (3.13)$$

e assim temos duas possibilidades a considerar, a saber, ou  $T_{p_0} = T_{q_0} \neq w$  ou  $w$  bissecta  $T_{p_0}$  e  $T_{q_0}$ .

Vamos inicialmente eliminar a possibilidade do primeiro caso acontecer. Assim, suponha  $T_{p_0} = T_{q_0} \neq w$ . Pela escolha que fizemos do vetor normal unitário  $N$ , resulta que ele faz um ângulo agudo com a corda  $\overline{F(t_0, p_0)F(t_0, q_0)}$  numa das extremidades do arco de  $F^{t_0}$  determinado por  $p_0$  e  $q_0$  e um ângulo obtuso na outra. Assim, pontos da corda próximos de uma das extremidades estão dentro da região determinada pela curva enquanto pontos próximos da outra extremidade estão fora. Logo, existe um outro ponto onde a curva  $F^{t_0}$  cruza a corda (A figura 3 ilustra estes fatos). Podemos supor que este ponto de intersecção corresponde a  $s$  satisfazendo  $p_0 < s < q_0$ , de maneira que

$$d(p_0, q_0) = d(p_0, s) + d(s, q_0)$$

e

$$\ell(p_0, q_0) = \min\{\ell(p_0, s) + \ell(s, q_0), 2\pi - \ell(p_0, s) - \ell(s, q_0)\}.$$

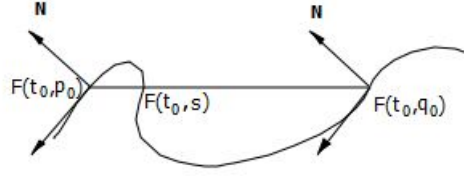


Figura 3

Note ainda que  $f(\cdot, a)$  é estritamente concava pois

$$f''(x) = \frac{-\operatorname{sen} \frac{x}{2} (1/2 + e^{2t})}{(1 + e^{-2t} \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2})^2},$$

e assim vale

$$f(x+y) = f(x+y) + f(0) \leq f(x) + f(y), \quad x, y > 0, x+y < 2\pi.$$

Mais ainda,  $f(x) = f(2\pi - x)$ . Desse modo,

$$\begin{aligned} Z(p_0, q_0) &= d(p_0, q_0) - f(\ell(p_0, q_0), a) \\ &= d(p_0, s) + d(s, q_0) - f(\ell(p_0, s) + \ell(s, q_0), a) \\ &> d(p_0, s) - f(\ell(p_0, s), a) + d(s, q_0) - f(\ell(s, q_0), a) \\ &= Z(p_0, s) + Z(s, q_0), \end{aligned}$$

donde resulta que ou  $Z(p_0, s) < Z(p_0, q_0)$  ou  $Z(s, q_0) < Z(p_0, q_0)$ , o que implica que  $Z_\varepsilon(p_0, s) < Z_\varepsilon(p_0, q_0)$  ou  $Z_\varepsilon(s, q_0) < Z_\varepsilon(p_0, q_0)$ . Mas isto está em flagrante contradição com (3.9).

Vamos agora considerar o segundo caso, ou seja,  $w$  bissecta  $T_{p_0}$  e  $T_{q_0}$ , de modo que  $\langle T_{p_0}, T_{q_0} \rangle = \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$  e  $\langle T_{p_0}, w \rangle = \langle T_{q_0}, w \rangle = \cos \theta$  para algum  $\theta$ . Fazendo  $\xi = 1$  e  $\eta = -1$  em

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u^2} Z(\mu(u)) \Big|_{u=0} &= \xi^2 \left[ \frac{1}{d} (1 - \langle w, T_{p_0} \rangle^2) + \langle w, k_{p_0} N_{p_0} \rangle - f'' \right] \\ &+ \eta^2 \left[ \frac{1}{d} (1 - \langle w, T_{q_0} \rangle^2) + \langle w, k_{q_0} N_{q_0} \rangle - f'' \right] \\ &+ 2\xi\eta \left[ \frac{1}{d} (\langle w, T_{p_0} \rangle \langle w, T_{q_0} \rangle - \langle T_{p_0}, T_{q_0} \rangle) + f'' \right] \end{aligned}$$

resulta que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{\partial^2}{\partial u^2} Z(p_0 + u, q_0 + u, t_0) \\
&= \frac{1}{d} [2 - \langle w, T_{p_0} \rangle^2 - \langle w, T_{q_0} \rangle^2 - 2\langle w, T_{p_0} \rangle \langle w, T_{q_0} \rangle + \\
&\quad + \langle w, k_{p_0} N_{p_0} - k_{q_0} N_{q_0} \rangle + 2\langle T_{p_0}, T_{q_0} \rangle - 4f''] \\
&= \frac{1}{d} [2 - (\langle w, T_{p_0} \rangle + \langle w, T_{q_0} \rangle)^2 + 2\langle T_{p_0}, T_{q_0} \rangle - \\
&\quad - 4f'' + \langle w, k_{p_0} N_{p_0} - k_{q_0} N_{q_0} \rangle] \\
&= \frac{1}{d} [2 - (2 \cos \theta)^2 + 2 \cos 2\theta - \\
&\quad - 4f'' + \langle w, k_{p_0} N_{p_0} - k_{q_0} N_{q_0} \rangle] \\
&= \frac{1}{d} [-4f'' + \langle w, k_{p_0} N_{p_0} - k_{q_0} N_{q_0} \rangle],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$0 \leq \langle w, k_{p_0} N_{p_0} - k_{q_0} N_{q_0} \rangle - 4f''. \quad (3.14)$$

Para explorar esta desigualdade, faremos uso do resultado a seguir.

**Lema 5** *Ao longo do fluxo normalizado (3.4),  $d$  e  $\ell$  evoluem de acordo com*

$$\frac{\partial d}{\partial t} = d\overline{k^2} + \langle w, k_{p_0} N_{p_0} - k_{q_0} N_{q_0} \rangle \quad (3.15)$$

e

$$\frac{\partial \ell}{\partial t} = \overline{k^2} \ell - \int_{p_0}^{q_0} k^2 ds. \quad (3.16)$$

**Demonstração:** Para a demonstração, veja primeiro que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial d}{\partial t}(t, p, q) &= \frac{\langle \frac{\partial F}{\partial t}(t, p) - \frac{\partial F}{\partial t}(t, q), F_p - F_q \rangle}{d(t, p, q)} \\
&= \frac{1}{d} \langle -k_p N_p + \overline{k^2} F_p + k_q N_q - \overline{k^2} F_q - k_q N_q, F_p - F_q \rangle \\
&= \frac{1}{d} \langle (F_p - F_q) \overline{k^2}, F_p - F_q \rangle + \frac{1}{d} \langle k_q N_q - k_p N_p, F_p - F_q \rangle \\
&= \frac{1}{d} |F_p - F_q|^2 \overline{k^2} + \langle w, k_p N_p - k_q N_q \rangle \\
&= d\overline{k^2} + \langle w, k_p N_p - k_q N_q \rangle,
\end{aligned}$$

e (3.15) segue. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial F}{\partial p} \right|^2 &= 2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial p} \right\rangle \\
&= 2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right) \right\rangle \\
&= 2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial p} (\bar{k}^2 F - kN) \right\rangle \\
&= 2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial p}, \bar{k}^2 \frac{\partial F}{\partial p} + F \frac{\partial \bar{k}^2}{\partial p} - \frac{\partial k}{\partial p} N - k \frac{\partial N}{\partial p} \right\rangle \\
&= 2 \bar{k}^2 \left| \frac{\partial F}{\partial p} \right|^2 + 2 \left\langle \nu T, F \frac{\partial \bar{k}^2}{\partial u} \right\rangle - 2 \left\langle \nu T, \frac{\partial k}{\partial u} N - k^2 \nu T \right\rangle \\
&= 2 \bar{k}^2 \nu^2 - 2 \nu^2 k^2,
\end{aligned}$$

onde  $\nu = |\partial F / \partial p|$  é a velocidade. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial F}{\partial p} \right| = (\bar{k}^2 - k^2) \left| \frac{\partial F}{\partial p} \right|$$

e (3.16) segue após integração.

□

A partir de (3.15) e (3.16), temos

$$\begin{aligned}
-C \varepsilon e^{Ct_0} &\geq \frac{\partial Z}{\partial t} \\
&= \frac{\partial d}{\partial t} - f' \frac{\partial \ell}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \\
&= \langle w, k_{p_0} N_{p_0} - k_{q_0} N_{q_0} \rangle + \bar{k}^2 d - f' \left( \bar{k}^2 \ell - \int_{p_0}^{q_0} k^2 ds \right) - \frac{\partial f}{\partial t} \\
&= \langle w, k_{p_0} N_{p_0} - k_{q_0} N_{q_0} \rangle + \bar{k}^2 (\varepsilon e^{Ct_0} + f - f' \ell) + f' \int_{p_0}^{q_0} k^2 ds - \frac{\partial f}{\partial t},
\end{aligned}$$

e usando (3.14) chegamos a

$$-C \varepsilon e^{Ct_0} \geq 4f'' + \bar{k}^2 (\varepsilon e^{Ct_0} + f - f' \ell) + f' \int_{p_0}^{q_0} k^2 ds - \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (3.17)$$

Para explorar esta desigualdade, note que  $f$  é uma função côncava, donde  $(f - f'\ell)' = -f''\ell > 0$  se  $\ell > 0$ , donde  $f - f'\ell > 0$ . Por outro lado, note que

$$\int_{S^1} k ds = 2\pi = \int_{S^1} ds$$

e

$$\left( \int_{S^1} k ds \right)^2 \leq \int_{S^1} k^2 ds \int_{S^1} ds,$$

donde  $\overline{k^2} \geq 1$ . Como  $\ell \leq \pi$  percebemos ainda que  $f' \geq 0$ , donde, novamente pela desigualdade de Hölder,

$$\int_{p_0}^{q_0} k^2 \geq \frac{\left( \int_{p_0}^{q_0} |k| ds \right)^2}{\ell} \geq \frac{4\alpha^2}{\ell}, \quad (3.18)$$

onde  $\alpha = \angle(w, T_{p_0}) = 2\angle(T_{p_0}, T_{q_0})$ . Note que, por (3.13),  $\theta = \angle(T_{p_0}, T_{q_0}) = 2 \arccos(f')$ .

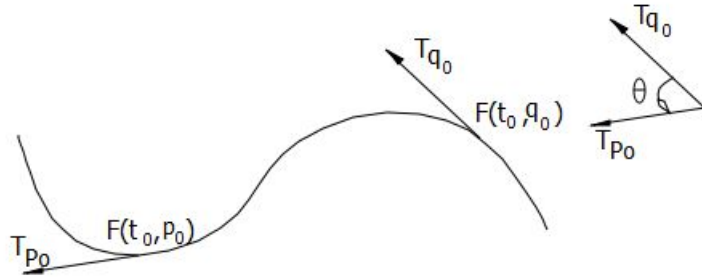


Figura 4

Seja agora

$$Lf = 4f'' + f - f'\ell + 4\frac{f'}{\ell}(\arccos(f'))^2 - \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Usando  $\overline{k^2} \geq 1$  e (3.18) temos,

$$Lf \leq 4f'' + \overline{k^2}(\epsilon e^{Ct_0} + f - f'\ell) + f' \int_{p_0}^{q_0} k^2 ds - \frac{\partial f}{\partial t},$$



de modo que (3.17) pode ser reescrito como

$$-C\varepsilon e^{Ct_0} \geq Lf + \overline{k^2}\varepsilon e^{Ct_0},$$

e portanto  $Lf < 0$  pela escolha que fizemos de  $C$ .

Para finalizar a argumentação, seja  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $h(z) = (\arccos(z))^2$ . É fácil ver que  $h$  é convexa, isto é,  $h(x) \geq h(a) + h'(a)(x - a)$  para quaisquer  $a, x \in [0, 1]$ . Daí,

$$h(f') \geq h(\cos \frac{\ell}{2}) + h'(\cos \frac{\ell}{2})(f' - \cos \frac{\ell}{2}) = \frac{\ell^2}{4} - \frac{\ell}{\operatorname{sen} \frac{\ell}{2}}(f' - \cos \frac{\ell}{2}),$$

e conseqüentemente,

$$(\arccos(f'))^2 \geq -\frac{\ell}{\operatorname{sen} \frac{\ell}{2}}(f' - \cos \frac{\ell}{2}).$$

Daí resulta que  $0 > Lf \geq \overline{L}f$ , onde

$$\overline{L}f = 4f'' + f - 4\frac{f'}{\operatorname{sen} \frac{\ell}{2}}(f' - \cos \frac{\ell}{2}) - \frac{\partial f}{\partial t},$$

mas isto é absurdo pois calculando temos  $\overline{L}f \leq 0$ . Isto completa a demonstração do Teorema 3.1.

# Capítulo 4

## O teorema de Grayson

Neste capítulo final, indicamos como o Teorema 3.1 conduz a uma nova demonstração do teorema de Grayson (Teorema 2.2). O passo inicial consiste em obter um controle uniforme no tempo para a curvatura de soluções do fluxo normalizado (3.4).

**Teorema 4.1** *Se  $k : [0, T) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  é a curvatura de uma solução do fluxo normalizado (3.4) com curva inicial  $F^0$  simples e  $\bar{t}$  é como no Teorema 3.1, então vale*

$$\sup\{k(p, t)^2; p \in S^1\} \leq 1 + 2e^{-2(t-\bar{t})},$$

para  $0 \leq t < T$ .

**Demonstração:** Basta notar que, usando o Teorema 3.1 e o Lema 3, tem-se,  $t \geq 0$  e  $p \in S^1$ ,

$$\sqrt{\frac{\max\{k(p, t)^2 - 1, 0\}}{2}} = a(p, p, t) \leq \sup\{a(p, q, t); p \neq q\} \leq e^{\bar{t}-t}.$$

□

**Corolário 1** *O fluxo normalizado está definido para todo tempo, ou seja,  $T = +\infty$ . Mais ainda, todas as derivadas da curvatura estão uniformemente*

controladas:

$$\left\| \frac{\partial^n k}{\partial s^n} \right\| \leq C(n, \bar{t})(1 + t^{-n/2}), \quad (4.1)$$

para  $n > 0$  e  $t > 0$ .

**Demonstração:** Observe que o fluxo original  $\tilde{F}$  pode ser obtido a partir do fluxo normalizado  $F$  por  $\tilde{F}(p, \tau) = \lambda(t)F(p, t)$ , onde  $\tau = \int_0^t \lambda(t')^2 dt'$  e

$$\lambda(t) = \frac{L[\bar{F}_0]}{2\pi} \exp\left(-\int_0^t \bar{k}^2(t') dt'\right).$$

Logo, se  $T < +\infty$ ,

$$\tilde{k}(\tau, \cdot) = \frac{1}{\lambda(t)} k(t, \cdot) \leq C, \quad \tau \in [0, \tilde{T})$$

onde  $\tilde{T}$  é o tempo maximal de  $\tilde{F}$ . Mas isto contradiz (2.5).

O controle uniforme (4.1) sobre as derivadas de  $k$  pode ser obtida agora da maneira usual, ou seja, usando o Princípio do Máximo e a equação de evolução para  $k$ . Por exemplo, controla-se  $\frac{\partial k}{\partial s}$  analisando a equação de evolução para  $t \left| \frac{\partial k}{\partial s} \right|^2 + k^2$ , uma vez que  $k$  é limitada. Os detalhes serão omitidos.

□

Para completar a demonstração do Teorema 2.2, note que  $\int k ds = L = 2\pi$  e assim,

$$\begin{aligned} \int (k(s) - 1)^2 ds &= \int k^2 ds - 2 \int k ds + L \\ &= \int (k^2 - 1) ds \\ &\leq 2e^{-2(t-\bar{t})}, \end{aligned}$$

ou seja,  $\|k - 1\|_{L^2} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Para extrair, a partir desta informação, a convergência uniforme das derivadas de  $k$  para 0 quando  $t \rightarrow$

$+\infty$ , faremos uso da desigualdade de interpolação de Gagliardo-Nirenberg [3]. Como

$$\int (k - 1) ds = 0,$$

esta desigualdade afirma que, para  $i \leq m$ ,

$$\|D^i k\|_{L^\infty} \leq C(m, i) \|D^m k\|_{L^\infty}^{\frac{2i+1}{2m+1}} \|k - 1\|_{L^2}^{\frac{2(m-i)}{2m+1}}.$$

Assim,

$$\|D^i k\|_{L^\infty} \leq C(i, \bar{t}, \varepsilon) e^{-(1-\varepsilon)t}$$

para  $t \geq 1$  e qualquer  $\varepsilon > 0$ , com  $m$  escolhido suficientemente grande para  $\varepsilon > 0$  dado. Portanto,  $k \rightarrow 1$  em  $C^\infty$  quando  $t \rightarrow \infty$  e o Teorema 2.2 segue imediatamente.

# Capítulo 5

## Apêndice

O objetivo deste Apêndice é fornecer uma demonstração dos Teoremas 2.1 e 5.1 utilizando resultados clássicos da Teoria de Equações Diferenciais Parciais Parabólicas. Para o Teorema 2.1, o método consiste em, supondo que a curva inicial é simples, escrever as curvas da evolução como gráficos normais à curva inicial de uma família a um parâmetro de funções  $f^\tau : [0, \varepsilon) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno que evolui no tempo de acordo com uma equação parabólica. A teoria geral destas equações garante então a existência local (no tempo) e unicidade de soluções.

Para deduzir a equação de evolução de  $\tilde{F}$ , seja então  $\tilde{F} : [0, \varepsilon) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma solução local de (2.4), que reescreveremos na forma

$$\frac{\partial \tilde{F}^\tau}{\partial \tau} = -\tilde{k}^\tau \tilde{N}^\tau, \quad (5.1)$$

onde  $\tilde{k}^\tau$  é a curvatura de  $\tilde{F}^\tau$  e  $\tilde{N}^\tau$  é o vetor normal unitário. Assim,

$$\tilde{k}^\tau = -\langle \tilde{T}_{s^\tau}^\tau, \tilde{N}^\tau \rangle, \quad (5.2)$$

onde  $s^\tau$  é o parâmetro de comprimento de arco de  $F^\tau$  e  $\tilde{T}^\tau = \tilde{F}_{s^\tau}^\tau$  é o vetor tangente unitário a  $\tilde{F}^\tau$ .

Se  $\tilde{F}_0$ , que supomos parametrizada pelo comprimento de arco, é simples

então para  $\varepsilon$  suficiente pequeno podemos representar

$$\tilde{F}^\tau = \tilde{F}_0 + f^\tau \tilde{N}, \quad \tau \in [0, \varepsilon), \quad (5.3)$$

para alguma função suave  $f^\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Aqui,  $\{\tilde{T}, \tilde{N}\}$  é o diedro móvel ao longo de  $\tilde{F}_0$ . Substituindo (5.3) em (5.1) resulta que

$$\frac{\partial f^\tau}{\partial \tau} \tilde{N} + f^\tau \frac{\partial \tilde{N}}{\partial \tau} = -\tilde{k}^\tau \tilde{N}^\tau,$$

e usando que  $\langle \frac{\partial \tilde{N}}{\partial \tau}, \tilde{N} \rangle = 0$  pois  $\|\tilde{N}\| = 1$  segue que

$$\frac{\partial f^\tau}{\partial \tau} = -\tilde{k}^\tau \langle \tilde{N}^\tau, \tilde{N} \rangle, \quad (5.4)$$

que é a equação de evolução de  $f^\tau$ . Conforme já mencionado, vamos mostrar que esta equação é parabólica, e como obviamente existe uma correspondência biunívoca entre soluções locais de (5.1) com dado inicial  $\tilde{F}_0$  e soluções locais de (5.4) com dado inicial  $f^0 = 0$ , o resultado segue da teoria das equações parabólicas aplicada a (5.4).

Ora, derivando (5.3) com relação a  $s$  obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{F}_s^\tau &= \tilde{F}_s + f_s^\tau \tilde{N} + f^\tau \tilde{N}_s \\ &= \tilde{T} + f_s^\tau \tilde{N} + f^\tau \tilde{k} \tilde{T} \\ &= (1 + \tilde{k} f^\tau) \tilde{T} + f_s^\tau \tilde{N}, \end{aligned}$$

de modo que se  $f^\tau$  é suficientemente pequena ( $|\tilde{k} f^\tau| < 1$ ) então  $\tilde{F}^\tau$  é regular e simples com vetor tangente unitário dado por

$$\tilde{T}^\tau = \frac{(1 + \tilde{k} f^\tau) \tilde{T} + f_s^\tau \tilde{N}}{\nu^\tau}, \quad (5.5)$$

onde  $\nu^\tau = \sqrt{(1 + \tilde{k} f^\tau)^2 + (f_s^\tau)^2}$  é a velocidade de  $\tilde{F}^\tau$ . Daí, é claro que a normal unitária a  $\tilde{F}^\tau$  é

$$\tilde{N}^\tau = \frac{f_s^\tau \tilde{T} - (1 + \tilde{k} f^\tau) \tilde{N}}{\nu^\tau}. \quad (5.6)$$

Em particular, (5.4) pode ser reescrito como

$$\frac{\partial f^\tau}{\partial \tau} = \frac{(1 + \tilde{k}f^\tau)}{\nu^\tau} \tilde{k}^\tau. \quad (5.7)$$

Por outro lado,

$$\tilde{k}^\tau = -\frac{ds^\tau}{d\tau} \langle \tilde{T}_{s^\tau}, \tilde{N}^\tau \rangle = -\frac{1}{\nu^\tau} \langle \tilde{T}_{s^\tau}, \tilde{N}^\tau \rangle \quad (5.8)$$

já que  $s^\tau = \int \nu_\tau ds$ . Mais ainda, reescrevendo (5.5) como

$$\nu^\tau \tilde{T}^\tau = (1 + \tilde{k}f^\tau) \tilde{T} + f_s^\tau \tilde{N}, \quad (5.9)$$

e derivando em relação a  $s$  resulta que

$$\nu_s^\tau \tilde{T}^\tau + \nu^\tau \tilde{T}_s^\tau = ((1 + \tilde{k}f^\tau)_s + \tilde{k}f_s^\tau) \tilde{T} + (f_{ss}^\tau - \tilde{k}(1 + \tilde{k}f^\tau)) \tilde{N},$$

e fazendo o produto interno disto com  $\tilde{N}^\tau$  temos finalmente que

$$\tilde{k}^\tau = -\frac{f_s^\tau ((1 + \tilde{k}f^\tau)_s - \tilde{k}f_s^\tau)}{(\nu^\tau)^3} + \frac{(1 + \tilde{k}f^\tau)(f_{ss}^\tau + \tilde{k}(1 + \tilde{k}f^\tau))}{(\nu^\tau)^3}. \quad (5.10)$$

Em função de (5.8) concluímos que a equação de evolução para  $f^\tau$  é

$$\frac{\partial f^\tau}{\partial \tau} = A(s, f^\tau, f_s^\tau) f_{ss} + B(s, f^\tau, f_s^\tau), \quad (5.11)$$

onde

$$A(s, f^\tau, f_s^\tau) = \frac{(1 + \tilde{k}f^\tau)^2}{(\nu^\tau)^4}.$$

Como  $f^0 = 0$  temos que  $A = 1$  para  $\tau = 0$  e (5.11) é parabólica com respeito a  $f^t$  para  $t$  suficientemente pequeno e a teoria das equações parabólicas [6] fornece a existência e unicidade de uma solução local para (5.11). Mais precisamente, existe  $f : [0, \varepsilon) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  função de classe  $C^{2,\alpha}$  que satisfaz (5.11) com  $f(0, s) = 0$ ,  $s \in S^1$ . Pelo que vimos acima, resulta que (5.1) possui uma única solução para cada curva inicial dada.

Suponha agora que  $\tilde{F} : [0, \tilde{T}) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma solução maximal de (5.1) cuja curvatura  $\tilde{k}^\tau$  é uniformemente limitada em  $[0, \tilde{T})$ , condição que representaremos simplesmente por

$$\|\tilde{k}^\tau\|_{C^0(S^1)} \leq C.$$

Por (5.10) resulta em particular que  $f_{ss}^\tau$  é uniformemente limitada no tempo, ou seja,

$$\|f_s^\tau\|_{C^1(S^1)} \leq C'. \quad (5.12)$$

Por (5.11), podemos considerar que  $f^\tau$  satisfaz uma equação *linear* parabólica cujos coeficientes são uniformemente limitados na norma  $C^1$ . A teoria de Schauder [6] implica então um controle uniforme no tempo do tipo

$$\|f^\tau\|_{C^{2,\beta}(S^1)} \leq C_\beta.$$

Voltando a (5.11) vemos agora que seus coeficientes são uniformemente controlados no tempo na norma  $C^{1,\beta}$  donde, novamente por Schauder,

$$\|f^\tau\|_{C^{3,\beta}(S^1)} \leq C_\beta.$$

Prosseguindo indefinidamente neste raciocínio, concluímos que todas as derivadas de  $f^\tau$  são uniformemente controladas em  $[0, \tilde{T})$ , de modo que  $f^\tau$  se estende suavemente ao intervalo fechado  $[0, \tilde{T}]$ , o mesmo acontecendo com  $\tilde{F}^\tau$ . Resolvendo (5.1) com condição inicial  $\tilde{F}^{\tilde{T}}$  resulta que a solução pode ser estendida a um intervalo do tipo  $[0, \tilde{T} + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , o que contraria a maximalidade do intervalo original  $[0, \tilde{T})$ . Isto conclui, portanto, a demonstração do Teorema 2.1.

O seguinte resultado também desempenha um papel fundamental neste trabalho.

**Teorema 5.1** *As seguintes proposições a respeito de soluções de (5.1) são verdadeiras:*

1. *Se  $\tilde{F} : [0, \tilde{T}) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma solução maximal de (5.1) com  $\tilde{F}^0$  simples então  $\tilde{F}^\tau$  é simples para  $\tau \in [0, \tilde{T})$ ;*
2. *Se  $\tilde{F}_i : [0, \tilde{T}_i) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $i = 1, 2$ , são soluções de (5.1) com curvas iniciais simples e disjuntas entre si então as curvas da evolução permanecem disjuntas ao longo da evolução;*



3. Para qualquer solução maximal  $\tilde{F} : [0, \tilde{T}) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de (5.1) com  $\tilde{F}^0$  simples vale que  $\tilde{T} < +\infty$ . Mais ainda, quando  $\tau \rightarrow \tilde{T}$ ,  $\tilde{F}^\tau$  contra-se a um ponto no sentido que sua área se anula quando  $\tau \rightarrow \tilde{T}$ .

**Demonstração:** Observe que localmente (em relação à variável espacial), soluções de (5.1) podem ser representadas por uma família de gráficos, ou seja,  $F(\tau, v) = (x, u(x, t))$ , com  $x$  variando em algum intervalo  $J \subset S^1$ . Daí,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tau} &= \left( \frac{\partial x}{\partial \tau}, u_x \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) \\ &= \frac{\partial x}{\partial \tau} (1, u_x) + (0, \frac{\partial u}{\partial \tau}). \end{aligned}$$

Fazendo o produto interno com

$$\tilde{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2}} (u_x, -1)$$

e usando (5.1) resulta que

$$-k = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2}} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (5.13)$$

Com a nossa escolha de normal, a curvatura de um gráfico expressa-se como

$$k = -\frac{u_{xx}}{(1 + u_x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (5.14)$$

de modo que  $u$  evolui ao longo do tempo por meio da equação parabólica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{xx}}{(1 + u_x^2)}. \quad (5.15)$$

De posse desta informação, os dois primeiros itens do teorema decorrem imediatamente do Princípio do Máximo Forte (PMF) [7]. O terceiro item também segue usando o PMF. Mostra-se então que

$$\tilde{T} \leq \frac{1}{2} \left( \min_{S^1} \tilde{k}(0, \cdot) \right)^2.$$

Os detalhes podem ser encontrados em [5].

□

# Referências Bibliográficas

- [1] ALENCAR, H; SANTOS, W. *Geometria das Curvas Planas. ( XII Escola de Geometria Diferencial)*, Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [2] ANDREWS, B.; BRIAN, P. *Curvature Bound for Curve Shortening Flow via Distance Comparison and a Direct Proof of Grayson's Theorem*, arXiv:0908.2682v1[math.DG].
- [3] ANDREWS, B. *The affine curve-lengthening flow*, J. Reine Angew. Math., v.506, p.43- 83, 1999.
- [4] GRAYSON, M. *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, J. Differential Geom., v.26, n.2, p.285-314, 1987.
- [5] LIMA, L.L. *Fluxos Geométricos: uma introdução via exemplos*. 1.ed. Belém: SBM, 2010.
- [6] LIEBERMAN, Gary M. *Second order parabolic differential equations*. Singapore: World Scientific, 1996.
- [7] PROTTER, M. H.; WEINBERGER, H. F. *Maximum principles in differential equations*, New york: Springer-Verlag, 1984
- [8] ZHU, Xi-Ping, *Lectures on mean curvature flow*. Providence, R.I.: American Mathematical Society: International Press, 2002.