



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

GABRIEL FONSECA LEITE

**CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM DADOS PARA RASTREAMENTO DE
TRAJETÓRIAS EM QUADRICÓPTEROS**

FORTALEZA

2025

GABRIEL FONSECA LEITE

CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM DADOS PARA RASTREAMENTO DE
TRAJETÓRIAS EM QUADRICÓPTEROS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira

Coorientador: Prof. Dr. Eduardo de Melo Mapurunga

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L552c Leite, Gabriel Fonseca.
Controle preditivo baseado em dados para rastreamento de trajetórias em quadricópteros / Gabriel
Fonseca Leite. – 2025.
95 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia,
Curso de Engenharia Elétrica, Fortaleza, 2025.

Orientação: Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira.

Coorientação: Prof. Dr. Eduardo de Melo Mapurunga..

1. Quadricópteros. 2. Controle preditivo. 3. Controle baseado em dados. 4. Data-enabled predictive
Control. 5. Rastreamento de trajetórias. I. Título.

CDD 621.3

GABRIEL FONSECA LEITE

CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM DADOS PARA RASTREAMENTO DE
TRAJETÓRIAS EM QUADRICÓPTEROS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Engenharia Elétrica do
Centro de Tecnologia da Universidade Federal
do Ceará, como requisito parcial à obtenção do
grau de bacharel em Engenharia Elétrica.

Aprovada em: 28 de Janeiro de 2026

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Eduardo de Melo Mapurunga (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Thiago Alves Lima
Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)

M.Sc. Gustavo Penaforte Brito
Université de Lorraine (UL), CRNS, França

Àquele que fui, feito de desejos e vento, e àquele que serei, com histórias que o tempo mantém segredo. Dedico à eterna memória de Natasha, companheira de sendas e primaveras, cuja ausência se faz viva em tudo o que floresci.

AGRADECIMENTOS

À minha vó, Josefa Fonseca, por ter me proporcionado uma infância lúdica e por cultivar em mim a criatividade e o brilho nos olhos necessários para trilhar este caminho.

À minha mãe, Helena Kelly Fonseca, por toda a paciência, apoio e, principalmente, por acreditar incessantemente em meu potencial e na minha capacidade de concluir esta jornada.

À minha amada, Maria Clara Barbosa, que há quase uma década é o meu porto seguro e a minha maior incentivadora. Agradeço por todo o amor, paciência e compreensão dedicados. Esta conquista é nossa, pois sua presença tornou o caminho mais leve e deu verdadeiro sentido a cada desafio superado.

Ao meu irmão, Eduardo Fonseca, por toda a ajuda e cumplicidade em cada etapa desta jornada. Mais que um irmão, um grande amigo e um exemplo de vida que admiro profundamente.

A todos os meus tios, tias, primos e primas, com gratidão pelos momentos divididos. Em especial, ao meu tio Said Fonseca, por sua generosidade, pelos valiosos conselhos e por estar sempre disposto a estender a mão. À minha prima Jenifer Fonseca, agradeço pela cumplicidade e por ser a presença mais próxima de uma irmã que a vida me concedeu.

Aos meus amigos e colegas da universidade, pelas tocas de conhecimento, boas conversas e momentos de descontração que tornaram essa jornada mais leve. De forma especial, aos amigos de laboratório, Eduardo Balbino e Andreza, pelo auxílio direto no desenvolvimento dos protótipos e pelo incentivo a sempre buscar a minha melhor versão. Estendo este agradecimento aos demais integrantes do laboratório, Raoni, Sergio, Italo, Juan, Oumar, Niklas e aos "mirins" que acompanhei nesta reta final, Lucas e Beatriz, pela parceria e pelas risadas compartilhadas.

Aos meus amigos do Lamotriz: Gustavo, João Luiz, Jessica, Ana Carolina, João Victor, José Eduardo, Gabriel Fontenele, Gabriel Costa (Costinha) e Auro Gabriel, por terem proporcionado alguns dos melhores e mais marcantes momentos ao longo deste graduação.

Aos meus amigos do "Clube do Bolinha": Emanuel, João Pedro, Davi, João Arnaud, Pedro Enzo (P.Dog), Ubirani, Douglas e Vinícius, por compartilharem comigo momentos de diversão, amizade e companherismo ao longo de toda essa jornada.

Aos meus companheiros de equipe no Aeromec, em especial, Eduardo Lima, Rodrigo, Ayrton, Paulo Robson, Leonardo, Luana Silveira, Ana Beatriz, Thiago Victor, Anna Luiza e Peterson, pelo trabalho em equipe na árdua batalha com as aeronaves para a competição SAE.

Aos meus amigos da turma de 2020, Yago Castro, Ismael Lima, por terem me acompanhado desde o início da graduação e pela parceria em todos os desafios e disciplinas que compartilhamos. Estendo minha gratidão aos demais amigos da Engenharia Elétrica, Milena, João Felipe, Ian e Samuel, pelos momentos de descontração e pelas vivências que tornaram esta trajetória muito mais leve e alegre.

Aos meus amigos e parceiros dos laboratórios LESC e GTEL: Igor Palhano, Ruan Alves, Lia Campelo, Lais e Caio Nobre, pelos desafios, conversas e risadas compartilhadas ao longo do projeto de satélites. Além disso, agradeço aos meus colegas do GIC, Antônio e Orleans, ao longo dos estudos nos mundos quânticos.

Ao NUVEN e à Embraer, pelas excepcionais experiências de estágio proporcionadas. Agradeço a Vieira e Matheus Marcelo (NUVEN), pelas trocas de ideias no projeto FANs, e a João Trentin e Fernando Laube (Embraer), pela orientação no projeto VSI e pelo auxílio direto no desenvolvimento deste trabalho.

Aos coordenadores do GPAR, Prof. Dr. Fabrício Nogueira e Prof. Dr. Bismark Torrico, pelo suporte integral durante meus três anos de atuação no grupo. Sou grato pela autonomia e pelas oportunidades confiadas desde a iniciação científica, fatores que foram determinantes para o meu desenvolvimento e para a consolidação desta trajetória acadêmica.

Ao meu coorientador, Prof. Dr. Eduardo Mapurunga, pelo apoio e pela confiança depositada através das oportunidades a mim concedidas. Agradeço, em especial, pelo incentivo constante a enfrentar novos desafios e pela motivação para sempre ir além do esperado.

Ao Prof. Dr. Wilkley Bezerra, por ter me concedido a primeira oportunidade de iniciação científica, um marco decisivo que transformou minha visão acadêmica e profissional.

Aos professores Prof. Dr. João Batista, Prof. Dr. Jarbas Silveira e Prof. Dr. André Ferrer, pelo suporte e pelo acompanhamento fundamental nos projetos de pesquisa dos quais tive a honra de participar.

À Prof.^a Dra. Michela Mulas e ao Prof. Dr. Nicolas Araújo, por serem as principais influências em minha busca incessante pela excelência. Agradeço pelas valiosas conversas e orientações que elevaram significativamente o rigor e a qualidade da minha pesquisa acadêmica.

Por fim, expresso minha gratidão imensa ao Prof. Dr. Fernando Antunes, por atuar não apenas como docente, mas como um verdadeiro guia e conselheiro desde o início da minha graduação. Obrigado pela confiança, pelas oportunidades proporcionadas na Alemanha e pelo incentivo constante, que foram pilares indispensáveis para a consolidação desta conquista.

“Tudo o que temos de decidir é o que fazer com o tempo que nos é dado.”

(Gandalf - O Senhor dos Anéis)

RESUMO

Este trabalho, investiga a aplicação do algoritmo *Data-Enabled Predictive Control* (DeePC) ao rastreamento de trajetórias de veículos aéreos não tripulados multirrotores. A perspectiva deste trabalho é a de demonstrar a viabilidade do controle preditivo baseado exclusivamente em dados de entrada-saída, dispensando a identificação paramétrica de modelos matemáticos do sistema. A partir do Lema Fundamental de Willems, que estabelece que trajetórias de sistemas lineares invariantes no tempo podem ser representadas como combinações lineares de dados históricos persistentemente excitantes, desenvolve-se uma formulação regularizada capaz de operar sob condições de ruído e não-linearidades moderadas. Para validação, implementa-se um ambiente de simulação de alta fidelidade baseado em um quadricóptero de referência, incluindo dinâmica não-linear, saturação de atuadores e atrasos computacionais. São realizadas comparações sistemáticas com controladores baseados em modelo, especificamente o PID otimizado via Enxame de Partículas (PSO), o Regulador Linear-Quadrático (LQR) e o Controle Preditivo Baseado em Modelo (MPC). Os resultados demonstram que a abordagem baseada em dados atinge desempenho de rastreamento comparável ao preditivo clássico, superando significativamente as estratégias reativas. Em termos de robustez revela que o controlador mantém desempenho aceitável mesmo diante de ruídos de medição, consolidando-se como alternativa promissora para aplicações onde a modelagem matemática precisa é impraticável, oferecendo equilíbrio entre precisão, robustez e simplicidade de implementação.

Palavras-chave: Quadricópteros. Controle preditivo. Controle Baseado em Dados. Data-Enabled Predictive Control. Rastreamento de Trajetórias.

ABSTRACT

This study investigates the application of the *Data-Enabled Predictive Control* (DeePC) algorithm to the trajectory tracking of multirotor unmanned aerial vehicles. The objective of this work is to demonstrate the feasibility of predictive control based exclusively on input-output data, bypassing the parametric identification of mathematical models of the system. Drawing from Willems' Fundamental Lemma, which establishes that trajectories of linear time-invariant systems can be represented as linear combinations of persistently exciting historical data, a regularized formulation is developed to operate under conditions of noise and moderate nonlinearities. For validation, a high-fidelity simulation environment is implemented based on a reference quadcopter, incorporating nonlinear dynamics, actuator saturation, and computational delays. Systematic comparisons are conducted with model-based controllers, specifically PID optimized via Particle Swarm Optimization (PSO), the Linear-Quadratic Regulator (LQR), and Model Predictive Control (MPC). The results demonstrate that the data-driven approach achieves tracking performance comparable to classical predictive control, significantly outperforming reactive strategies. Regarding robustness, the analysis reveals that the controller maintains acceptable performance even in the presence of measurement noise, establishing itself as a promising alternative for applications where precise mathematical modeling is impractical, offering a balance between precision, robustness, and implementation simplicity.

Keywords: Quadcopters. Predictive control. Data-Driven Control. Data-Enabled Predictive Control. Trajectory Tracking.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplos de uso de quadricópteros em diferentes contextos: (a) defesa e vigilância, (b) agricultura de precisão e (c) captura de imagens para o setor audiovisual.	20
Figura 2 – Diagrama do fluxo de projeto do controle <i>data-driven</i>	23
Figura 3 – Categorias e classificações de VANTs	27
Figura 4 – Representação dos referenciais inerciais e do corpo	31
Figura 5 – Representação dos referencial NED e ENU	32
Figura 6 – Sequência de rotações Z-X-Y, partindo das (a) coordenadas padrão, para a rotação em (b) <i>Yaw</i> , ψ , (c) <i>Roll</i> θ e (d) <i>Pitch</i> ϕ	34
Figura 7 – Diagrama de forças do quadricóptero	38
Figura 8 – Diagrama de blocos da arquitetura de controle em cascata	45
Figura 9 – Diagrama de operação do algoritmo do PSO	48
Figura 10 – Visão geral da plataforma S500	67
Figura 11 – Convergência do PSO durante a sintonia dos ganhos PID. O custo global J reduz rapidamente nas primeiras iterações e estabiliza, indicando convergência para um ótimo local robusto.	72
Figura 12 – Sinal de referência multi-nível utilizado na validação: degraus sequenciais com variações de amplitude nos eixos x , y e z . As regiões sombreadas indicam os instantes de transição.	74
Figura 13 – Rastreamento de posição do PID: coordenadas $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ (linha contínua) versus referência (linha tracejada).	74
Figura 14 – Ângulos de Euler do PID durante rastreamento: roll (ϕ), pitch (θ) e yaw (ψ). Limites de saturação indicados por linhas tracejadas vermelhas.	75
Figura 15 – Rastreamento de posição do LQR: coordenadas $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ versus referência.	77
Figura 16 – Ângulos de Euler do LQR durante rastreamento: roll (ϕ), pitch (θ) e yaw (ψ).	77
Figura 17 – Rastreamento de posição do MPC: coordenadas $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ versus referência.	79
Figura 18 – Ângulos de Euler do MPC durante rastreamento: roll (ϕ), pitch (θ) e yaw (ψ).	80
Figura 19 – Rastreamento de posição do DeePC: coordenadas $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ versus referência.	82

Figura 20 – Ângulos de Euler do DeePC (estimados) durante rastreamento: roll (ϕ), pitch (θ) e yaw (ψ).	82
Figura 21 – Trajetória de referência utilizada na avaliação comparativa: quadrado multinível com degraus de altitude.	83
Figura 22 – Comparação tridimensional das trajetórias executadas pelos quatro controladores.	87
Figura 23 – Séries temporais de posição na trajetória quadrado multinível: (a) coordenada $x(t)$, (b) coordenada $y(t)$, (c) coordenada $z(t)$	87
Figura 24 – Erro euclidiano de rastreamento $\ e(t)\ = \ p(t) - p_{\text{ref}}(t)\ _2$ ao longo do tempo. Linhas horizontais tracejadas indicam o RMS de cada controlador. Regiões sombreadas correspondem às transições de altitude.	88
Figura 25 – Análise do esforço de controle na trajetória quadrado multinível: (a) empuxo total $T(t)$, com linha tracejada indicando $T_{\text{hover}} = mg$; (b) energia acumulada de controle $E_u(t)$	89
Figura 26 – Degradação do DeePC em função do SNR: (a) erro RMS; (b) erro máximo e_{max} . Barras de erro indicam $\pm 1\sigma$ sobre 10 realizações Monte Carlo.	90
Figura 27 – Comparação DeePC versus MPC sob condições de ruído: (a) DeePC sem ruído; (b) DeePC com SNR = 40 dB; (c) MPC sem ruído; (d) MPC com SNR = 40 dB.	91

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parametrizações do grupo $SO(3)$	33
Tabela 2 – Sequências de rotação de Euler.	34
Tabela 3 – Parâmetros físicos da plataforma simulada (S500 Frame).	68
Tabela 4 – Parâmetros do Modelo de Simulação.	68
Tabela 5 – Ganhos PID otimizados via PSO para a arquitetura em cascata.	73
Tabela 6 – Limites de saturação do controlador PID em cascata.	73
Tabela 7 – Parâmetros de projeto do LQR para cada subsistema desacoplado.	76
Tabela 8 – Ganhos LQR	76
Tabela 9 – Hiperparâmetros do controlador MPC.	78
Tabela 10 – Restrições do MPC sobre entradas e saídas.	79
Tabela 11 – Hiperparâmetros do controlador DeePC.	81
Tabela 12 – Métricas de avaliação de desempenho utilizadas nos cenários de rastreamento.	84
Tabela 13 – Níveis de SNR testados e a interpretação qualitativa da qualidade dos dados.	85
Tabela 14 – Métricas de desempenho na trajetória quadrado multinível (100 s).	89
Tabela 15 – Desempenho do DeePC em função do SNR (média \pm desvio padrão sobre $M = 10$ realizações Monte Carlo). A degradação é relativa ao baseline de 80 dB.	90

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – PSO para Sintonia de PID em Cascata	49
Algoritmo 2 – Algoritmo Simplificado de Sintonia LQR Desacoplada	52
Algoritmo 3 – Controlador MPC com Formulação QP Explícita	55
Algoritmo 4 – DeePC Regularizado	66

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CG	Centro de Gravidade
DeePC	<i>Data-Enabled Predictive Control</i>
ENU	<i>East-North-Up</i>
GA	Algoritmos Genéticos
GNSS	<i>Global Navigation Satellite System</i>
IMU	<i>Inertial Measurement Unit</i>
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
MAV	<i>Multirotor Aerial Vehicle</i>
MPC	<i>Model Predictive Control</i>
NED	<i>North-East-Down</i>
NMPC	<i>Nonlinear Model Predictive Control</i>
PID	Proporcional-Integral-Derivativo
PRBS	<i>Pseudo-Random Binary Sequence</i>
PSO	<i>Particle Swarm Optimization</i>
PX4	<i>Pixhawk Autopilot 4</i>
ROS	<i>Robot Operating System</i>
SMC	<i>Sliding Mode Control</i>
SNR	<i>Signal-to-Noise Ratio</i>
TSS	<i>Time-Scale Separation</i>
VANT	Veículos Aéreos Não Tripulados
VRFT	<i>Virtual Reference Feedback Tuning</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Matriz de estados do sistema
B	Matriz de entrada do sistema
\mathfrak{B}	Comportamento de um sistema dinâmico (conjunto de trajetórias)
C	Matriz de saída do sistema
d	Projeção do braço do quadricóptero sobre os eixos do corpo
D	Matriz de transmissão direta
e	Erro de rastreamento de trajetória
F	Força de empuxo total (tração)
g	Vetor de combinação linear de trajetórias (DeePC)
g	Aceleração da gravidade
\mathcal{H}	Matriz de Hankel
I	Tensor de inércia ou Matriz Identidade
I_x, I_y, I_z	Momentos de inércia em relação aos eixos do corpo
J	Funcional de custo de otimização
k_f	Coefficiente aerodinâmico de empuxo
k_m	Coefficiente aerodinâmico de momento (arrasto)
K	Matriz de ganhos de realimentação de estados
l	Comprimento efetivo do braço do quadricóptero
m	Massa total do veículo
N	Horizonte de predição
p, q, r	Velocidades angulares no referencial do corpo
P	Matriz de custo terminal ou solução da equação de Riccati
Q	Quatérnio de atitude ou Matriz de ponderação dos estados
R	Matriz de rotação ou Matriz de ponderação do controle
T	Tempo total de simulação ou empuxo
T_{ini}	Horizonte de condições iniciais (dados passados)

T_s	Período de amostragem
\mathbf{u}	Vetor de sinais de entrada de controle
w	Variáveis manifestas (entradas e saídas combinadas)
\mathbf{x}	Vetor de estados do sistema
x, y, z	Coordenadas de posição no espaço inercial
Γ	Matriz de alocação de controle ou de cinemática de quatérnios
δ	Operador de variação incremental (linearização)
η	Vetor de ângulos de Euler (atitude)
λ_g, λ_s	Parâmetros de regularização do DeePC
ξ	Vetor de posição inercial do centro de massa
σ	Variável de folga (slack variable) ou desvio padrão
τ	Vetor de momentos (torques) externos
ϕ	Ângulo de rolagem (Roll)
θ	Ângulo de arfagem (Pitch)
ψ	Ângulo de guinada (Yaw)
ω	Vetor de velocidade angular no corpo
Ω	Velocidade angular de rotação dos propulsores

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	20
1.1	Contextualização dos quadricópteros	20
1.2	Aplicação de controle	21
1.2.1	<i>Abordagens clássicas</i>	21
1.2.2	<i>Abordagens avançadas</i>	23
1.2.3	<i>Abordagem baseada em dados</i>	23
1.3	Organização do trabalho	25
1.3.1	<i>Objetivos</i>	25
1.3.2	<i>Divisão do trabalho</i>	26
2	MODELAGEM MATEMÁTICA DO QUADRICÓPTERO	27
2.1	Notações e preliminares matemáticos	28
2.1.1	<i>Notações</i>	28
2.1.2	<i>O Grupo Especial Ortogonal $SO(3)$</i>	29
2.1.3	<i>Álgebra de quatérnions</i>	29
2.2	Sistemas de coordenadas cartesianas	30
2.3	Cinemática do quadricóptero	33
2.3.1	<i>Representação da orientação em $SO(3)$</i>	33
2.3.2	<i>Representação por ângulos de Euler</i>	34
2.3.3	<i>Representação por quatérnions unitários</i>	36
2.4	Dinâmica do quadricóptero	37
2.4.1	<i>Alocação de controle</i>	37
2.4.2	<i>Movimento translacional</i>	39
2.4.3	<i>Movimento rotacional</i>	40
2.5	Linearização do Modelo	40
2.5.1	<i>Representação em Espaço de Estados</i>	41
2.5.2	<i>Ponto de Equilíbrio</i>	41
2.5.3	<i>Linearização por Série de Taylor</i>	41
3	CONTROLADORES BASEADOS EM MODELO	43
3.1	Arquitetura de controle em cascata	43
3.2	Controlador PID com otimização PSO	45

3.2.1	<i>Implementação Digital</i>	46
3.2.2	<i>Aplicação na Arquitetura Cascata</i>	47
3.2.3	<i>Função de Custo Multi-Objetivo</i>	47
3.3	Regulador Linear-Quadrático (LQR)	50
3.3.1	<i>Estratégia de Simplificação: LQR Desacoplado</i>	51
3.3.2	<i>Implementação Digital</i>	51
3.4	Controle Preditivo Baseado em Modelo (MPC)	52
3.4.1	<i>Implementação digital</i>	53
4	CONTROLE BASEADO EM DADOS	56
4.1	Teoria comportamental de sistemas	57
4.2	Lema fundamental de Willems	59
4.3	Algoritmo DeePC	60
4.3.1	<i>Formulação do Problema</i>	61
4.3.2	<i>DeePC para Sistemas Determinísticos</i>	61
4.3.3	<i>DeePC Regularizado</i>	62
4.3.4	<i>Estratégia de Horizonte Deslizante</i>	63
4.3.5	<i>Formulação como Programa Quadrático (QP)</i>	64
5	METODOLOGIA	67
5.1	Plataforma e ambiente de simulação	67
5.2	Conjunto de dados para treinamento do DeePC	68
5.2.1	<i>Normalização para o S500</i>	69
5.2.2	<i>Pipeline de pré-processamento dos dados</i>	70
5.3	Implementação das estratégias de controle	71
5.3.1	Controlador PID em Cascata com Sintonia por PSO	71
5.3.1.1	<i>Sintonia via Otimização por Enxame de Partículas</i>	71
5.3.1.2	<i>Parâmetros Finais</i>	72
5.3.1.3	<i>Operação com resposta ao degrau</i>	73
5.3.2	Regulador Linear-Quadrático (LQR) com Integrador	75
5.3.2.1	<i>Projeto da lei de controle</i>	75
5.3.2.2	<i>Operação com resposta ao degrau</i>	76
5.3.3	Controle Preditivo Baseado em Modelo (MPC)	78
5.3.3.1	<i>Operação em resposta ao degrau</i>	78

5.3.4	<i>DeePC Regularizado</i>	80
5.3.4.1	<i>Operação em resposta ao degrau</i>	81
5.4	Protocolos de Avaliação e Cenários de Teste	83
5.4.1	<i>Cenário 1: Rastreamento de Trajetórias</i>	83
5.4.2	<i>Cenário 2: Análise de Robustez ao Ruído nos Dados de Treinamento</i>	83
6	RESULTADOS E DISCUSSÕES	86
6.1	Desempenho em rastreamento de trajetória	86
6.1.1	<i>Trajectoria: Quadrado Multinível</i>	86
6.2	Cenário 2: Análise de Robustez ao Ruído	89
6.3	Considerações finais	91
7	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	93
	REFERÊNCIAS	95

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas duas décadas, testemunhou-se uma evolução sem precedentes na tecnologia de Veículos Aéreos Não Tripulados (VANT), especialmente em configurações multi-rotores. Os quadricópteros são caracterizados pela disposição simétrica de quatro rotores e emergiram como a plataforma de pesquisa e aplicação mais difundida neste domínio devido à sua simplicidade estrutural, capacidade de decolagem e pouso vertical, alta manobrabilidade e custo relativamente baixo (MAHONY *et al.*, 2012; IDRISSEI *et al.*, 2022).

1.1 Contextualização dos quadricópteros

Inicialmente esses sistemas foram concebidos para aplicações militares de reconhecimento e vigilância, sendo rapidamente expandidos para aplicações nos setores civis e comerciais. Hoje, esses veículos desempenham funções críticas em inspeção de infraestruturas, agricultura de precisão, monitoramento ambiental, entrega de cargas e entretenimento. Essa proliferação foi impulsionada por avanços simultâneos em eletrônica embarcada de baixo custo, miniaturização de *Inertial Measurement Unit* (IMU), *Global Navigation Satellite System* (GNSS), microprocessadores de alta performance e desenvolvimento de baterias de alta densidade energética (MAHONY *et al.*, 2012).

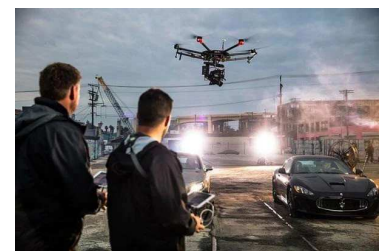
Figura 1 – Exemplos de uso de quadricópteros em diferentes contextos: (a) defesa e vigilância, (b) agricultura de precisão e (c) captura de imagens para o setor audiovisual.



(a)



(b)



(c)

Não obstante, os avanços tecnológicos requerem cada vez mais um sistema de controle preciso e robusto nos quadricópteros, assim, permanecendo um desafio científico e de engenharia de primeira linha. Em adição, a dinâmica desses veículos é inerentemente não linear, com seus sistemas fortemente acoplados e com resposta sub-atuada, ou seja, apresenta-se doze estados (os vetores de posição, velocidade, atitude e taxas angulares) a serem controlados com apenas quatro sinais de entrada independentes (os torques dos quatro rotores do veículo). Com

isso, essa característica introduz restrições que impossibilitam o controle direto e independente de todos os graus de liberdade, exigindo estratégias de controle em cascata que exploram a separação de escalas temporais entre a dinâmica de atitude (laço interno) e a dinâmica de posição (laço externo) (MAHONY *et al.*, 2012; JUNIOR, 2024).

Por fim, os quadricópteros ao operarem em ambientes externos estão sujeitos a perturbações aerodinâmicas complexas, especialmente rajadas de vento, efeito-solo, interação com obstáculos e variações de densidade do ar. Essas perturbações, frequentemente modeladas como distúrbios externos, comprometem significativamente a precisão de rastreamento de trajetórias e a estabilidade de voo se não forem adequadamente rejeitadas pelo sistema de controle (OGATA, 2010; MAHONY *et al.*, 2012; SANTOS, 2020).

1.2 Aplicação de controle

Historicamente a comunidade de quadricópteros adotou técnicas bem estabelecidas da teoria de controle moderno. O controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID) é, sem dúvida, a estratégia mais amplamente empregada em pilotos automáticos comerciais (por exemplo, *Pixhawk Autopilot 4 (PX4)*) devido à sua simplicidade de implementação, baixo custo computacional e desempenho aceitável em condições nominais (IDRISSI *et al.*, 2022).

1.2.1 Abordagens clássicas

Embora as estruturas PID em cascata, com controladores independentes para taxa angular, atitude e posição, demonstrem eficácia na estabilização básica e no rastreamento de trajetórias suaves, elas enfrentam limitações críticas diante de não linearidades severas, acoplamentos de sistemas e perturbações externas severas. Visto que a sintonia manual de ganhos é um processo exaustivo e dependente do ponto de operação, a aplicação de métodos de otimização meta-heurísticos, como a *Particle Swarm Optimization (PSO)* e os Algoritmos Genéticos (GA), torna-se essencial para automatizar esse ajuste, permitindo a minimização de funções de custo multiobjetivo que equilibram o erro de rastreamento, o esforço de controle e a robustez do sistema (IDRISSI *et al.*, 2022).

Ademais, o *Linear Quadratic Regulator (LQR)* consolida-se como uma alternativa robusta baseada em otimização, capaz de determinar os ganhos de realimentação de estados ótimos para sistemas lineares. O núcleo dessa técnica reside na minimização de uma função de

custo quadrático, geralmente expressa por:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (1.1)$$

onde as matrizes de ponderação Q e R permitem equilibrar a precisão do estado e o esforço de controle. Dito isso, ao penalizar desvios e excessos, o LQR não apenas assegura a estabilidade em malha fechada, mas também oferece margens de estabilidade garantidas. Conforme (IDRISSI *et al.*, 2022), o sucesso do LQR é amplamente documentado no controle de atitude e posição de quadricópteros, mostrando-se ideal para cenários de voo pairado (*hovering*), manobras de baixa agressividade e manutenção de trajetórias estáveis em ambientes controlados.

O *Model Predictive Control* (MPC) representa um salto evolutivo por tratar de forma sistemática as limitações de sistemas multivariáveis complexos. Diferente de controladores reativos simples, o MPC utiliza um modelo dinâmico do veículo para prever o comportamento futuro do sistema dentro de um horizonte de predição definido. De forma que a cada instante de amostragem, o MPC resolve um problema de otimização de horizonte finito, que pode ser genericamente expresso como:

$$\min_u \sum_{k=0}^{N-1} (\|x_k - x_{ref}\|_Q^2 + \|u_k\|_R^2) + \|x_N - x_{ref}\|_P^2 \quad (1.2)$$

Dessa forma, o valor inestimável do MPC reside na sua capacidade nativa de lidar com restrições explícitas sobre os estados e as entradas de controle do sistema. No contexto dos quadricópteros, isso é fundamental para:

- **Saturação de atitude:** Evitar que o veículo atinja ângulos de inclinação que comprometam a sustentação;
- **Limites de empuxo:** Respeitar os limites físicos de rotação dos motores (mínimo e máximo);
- **Segurança operacional:** Garantir que velocidades máximas de segurança não sejam ultrapassadas, prevenindo falhas estruturais ou perda de controle.

Por fim, conforme (IDRISSI *et al.*, 2022), destaca-se duas vertentes principais: O MPC clássico que utiliza modelos linearizados para reduzir o custo computacional e o *Nonlinear Model Predictive Control* (NMPC) que lida diretamente com a dinâmica completa do veículo.

1.2.2 Abordagens avançadas

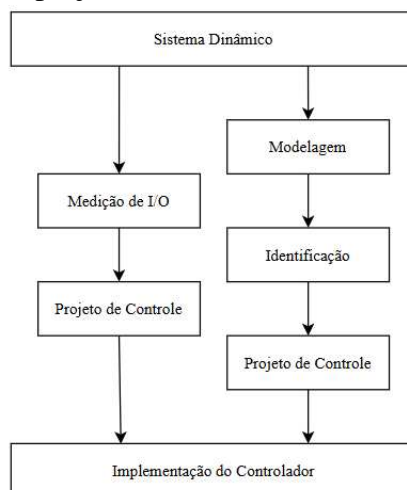
Reconhecendo as limitações inerentes das abordagens lineares, a pesquisa avançada em controle de quadricópteros migrou para o domínio de técnicas não lineares robustas. O *Sliding Mode Control* (SMC) emergiu como uma das estratégias mais proeminentes devido à robustez intrínseca a incertezas paramétricas e perturbações externas (JUNIOR, 2024). O princípio fundamental do SMC consiste em confinar as trajetórias do sistema a uma superfície de deslizamento pré-projetada mediante uma lei de controle descontínua de alta frequência. Então, uma vez que o sistema atinge a superfície de deslizamento, a dinâmica reduzida é insensível a perturbações casadas, ou seja, perturbações que atuam na mesma direção da entrada de controle.

Recentemente, testemunhou-se uma explosão de variantes do SMC aplicadas a quadricópteros, incluindo SMC clássico com superfícies PID, SMC de segunda ordem, SMC terminal para convergência em tempo finito, SMC adaptativo para eliminação do conhecimento de limites de perturbação e SMC com observadores de perturbação para estimação e compensação ativa de distúrbios (IDRISSI *et al.*, 2022).

1.2.3 Abordagem baseada em dados

O controle baseado em dados surge como um paradigma disruptivo na teoria de controle. Enquanto as abordagens clássicas e modernas fundamentam a síntese do controlador em equações diferenciais ou funções de transferência que representam um modelo matemático, o *data-driven* propõe uma rota direta: a extração da lei de controle a partir de medições do sistema em suas entradas e saídas.

Figura 2 – Diagrama do fluxo de projeto do controle *data-driven*



A motivação para essa abordagem ocorre em três etapas: Primeiro, a modelagem precisa de sistemas complexos como quadricópteros, especialmente ao considerar-se efeitos aerodinâmicos de segunda ordem (*flapping* das pás, momentos giroscópicos ou forças de arrasto do corpo), requer esforços analíticos e experimentais consideráveis (BAUERSFELD *et al.*, 2021). O segundo ponto refere-se aos modelos simplificados que podem não capturar adequadamente as dinâmicas não modeladas ou as variações operacionais do sistema, resultando em degradação de performance. Finalizando, o terceiro ponto envolve a disponibilidade crescente de poder computacional embarcado e a facilidade de coleta de dados tornam viáveis a exploração de abordagens puramente empíricas.

Com isso, o *Data-Enabled Predictive Control* (DeePC), proposto por (COULSON *et al.*, 2019a), representa uma das contribuições mais significativas nesse paradigma. O DeePC é uma variante do MPC que ultrapassa a etapa do conhecimento de um modelo paramétrico do sistema. Em vez disso, baseia-se diretamente em uma trajetória de dados coletada *offline*, empregando o Lema Fundamental de Willems (WILLEMS *et al.*, 2005) como fundamentação teórica.

Além disso, o problema de controle preditivo no DeePC é formulado como uma otimização quadrática que minimiza a função custo preditiva do tipo MPC, mas com as previsões de estados e saídas futuras expressas como os vetores de combinações lineares dos dados históricos (COULSON *et al.*, 2019a). Nesse contexto, as restrições de consistência comportamental asseguram que as trajetórias preditas sejam compatíveis com o comportamento observado do sistema e algumas regularizações são frequentemente incorporadas para melhorar a robustez a ruído de medição e garantir estabilidade prática (COULSON *et al.*, 2019b).

Portanto, o DeePC tem sido objeto de intensa investigação teórica e experimental, com as seguintes extensões incluídas:

1. Formulações robustas distribucionalmente para incertezas estocásticas (COULSON *et al.*, 2021);
2. Garantias de estabilidade e robustez demonstradas rigorosamente em (BERBERICH *et al.*, 2021);
3. Aplicações práticas em sistemas reais, incluindo os quadricópteros (ELOKDA *et al.*, 2021)

Apesar desses avanços, a literatura do DeePC nos quadricópteros apresentam questões em aberto. Em particular: (a) Como quantificar sistematicamente a qualidade dos dados de identificação e seu impacto na performance de malha fechada? (b) O quão robusto é o DeePC a ruídos de

medição elevados típicos em sensores IMU de baixo custo? (c) Qual é o custo computacional comparativo do DeePC em relação aos outros controladores? (d) A aplicação do DeePC em sistemas embarcados com *hardware* que apresenta recursos limitados é viável?

1.3 Organização do trabalho

Diante desse panorama, o presente trabalho motiva-se pelas seguintes necessidades:

1. **Avaliar comparativamente abordagens consolidadas e emergentes:** Embora a literatura contenha estudos isolados de PID, LQR, MPC e, recentemente, DeePC, são raras as investigações que compararam essas técnicas de forma sistemática e equitativa em um mesmo ambiente de simulação.
2. **Fornecer uma análise sobre robustez a ruído:** Os dados reais coletados de sensores embarcados em quadricópteros são inevitavelmente contaminados por ruído de medição. Portanto, compreender como o desempenho do DeePC se degrada com *Signal-to-Noise Ratio* (SNR) é crítico para validar a sua aplicabilidade prática.

1.3.1 Objetivos

Os objetivos gerais desse trabalho focam no desenvolvimento e comparação das estratégias de controle baseadas em modelos (PID, LQR e MPC) com a estratégia baseada em dados (DeePC) para o rastreamento de trajetórias de um quadricóptero simulado, assim, avaliando de forma quantitativa e qualitativa o desempenho, robustez e viabilidade computacional de cada abordagem.

Especificamente, este trabalho irá abordar os seguintes pontos:

- **Estabelecer um modelo matemático do quadricóptero:** Derivar as equações de movimento não lineares completas a partir dos primeiros princípios da mecânica Newtoniana e obter o modelo linearizado em torno de um ponto de equilíbrio;
- **Implementar e otimizar um controlador PID em cascata:** Projetar um sistema de controle PID estruturado em três camadas, empregando técnicas de otimização para sintonia automática dos ganhos do controlador através da minimização de uma função custo multi-objetivo;
- **Implementar o controlador ótimo linear (LQR) e o preditivo (MPC):** Implementar os controladores LQR e MPC utilizando o modelo linearizado do quadricóptero;

- **Implementar o controlador baseado em dados (DeePC):** Implementar a formulação proposta por (COULSON, 2022), incluindo a coleta de trajetórias ricas em informações sobre o comportamento do sistema;
- **Projetar os cenários de avaliação:** Definir um protocolo experimental sistemático para avaliar o desempenho dos controladores em diferentes cenários;
- **Realizar a análise comparativa dos controladores:** Computar e comparar as métricas de desempenho para cada controlador e discutir as vantagens/desvantagens, complexidade de implementação e viabilidade prática de cada abordagem.

1.3.2 Divisão do trabalho

O presente trabalho está estruturado em seis capítulos, incluindo esta introdução e as conclusões finais. Na sequência, apresenta-se uma síntese do conteúdo de cada capítulo.

Capítulo 2 - Modelagem Matemática do Quadricóptero: Dedução das equações de movimento não lineares via mecânica do corpo rígido, utilizando ângulos de Euler e quatérnios. Inclui a linearização do modelo em torno do voo pairado para a síntese dos controladores LQR e MPC.

Capítulo 3 - Controladores Baseados em Modelos: Detalhamento da implementação do PID em cascata com ganhos otimizados por PSO, do Regulador Linear Quadrático (LQR) e do MPC formulado via programação quadrática.

Capítulo 4 - Controladores Baseados em Dados (DeePC): Fundamentação teórica baseada no Lema Fundamental de Willems e matrizes de Hankel. Aborda as estratégias de regularização ℓ_2 para robustez ao ruído e a estrutura computacional do algoritmo.

Capítulo 5 - Metodologia de Avaliação: Definição dos cenários de teste: rastreamento de trajetória 3D, navegação com desvio de obstáculos via campos de potencial e análise de robustez estatística via simulações de Monte Carlo.

Capítulo 6 - Resultados e Discussões: Análise comparativa das trajetórias, esforço de controle e métricas de desempenho sob diferentes níveis de ruído. Identifica as vantagens operacionais do DeePC em relação aos controladores clássicos e ao MPC.

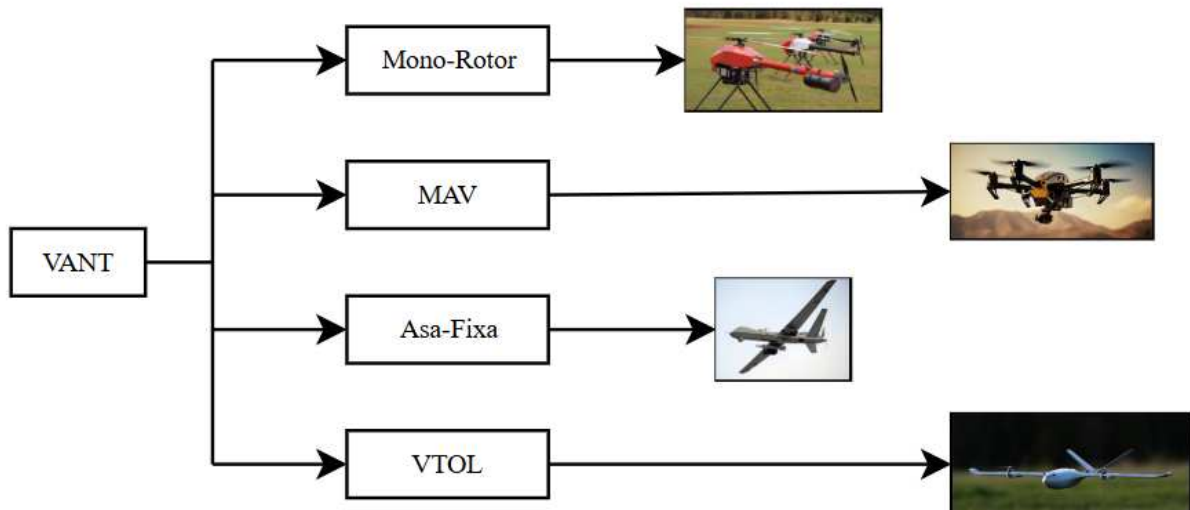
Capítulo 7 - Conclusões e Trabalhos Futuros: Síntese das principais descobertas, validação do DeePC para aplicações aeronáuticas e discussão sobre contribuições científicas. Encerra com sugestões de direções para pesquisas futuras.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA DO QUADRICÓPTERO

O emprego de VANTs redefiniu as operações aéreas modernas. A versatilidade dessas plataformas permite sua aplicação em diversos setores, como agricultura, indústria e missões de busca e salvamento. Contudo, o sucesso dessas operações depende da estabilidade e precisão do veículo, o que exige sistemas de controle robustos. O projeto desses sistemas baseia-se em uma modelagem matemática rigorosa da dinâmica de voo (DAM, 2023).

No contexto da engenharia de controle, modelar um sistema consiste em abstrair a realidade física através de equações que descrevam a evolução dos estados do veículo e sua resposta a estímulos externos. Esta representação matemática é o alicerce sobre o qual se constroem as simulações e as leis de controle. O processo de modelagem, geralmente apoiado nas leis de Newton e nos princípios de conservação de energia, exige que o projetista arbitre um *trade-off* fundamental: o equilíbrio entre a fidelidade do modelo e sua complexidade computacional. Conforme destacado por (OGATA, 2010), deve-se evitar tanto o excesso de detalhes, que torna a análise intratável, quanto a simplificação excessiva, que falha em capturar dinâmicas essenciais para a estabilidade de voo.

Figura 3 – Categorias e classificações de VANTs



Dentro do amplo conjunto de VANTs mostrados na Figura 3, este trabalho concentra-se nos *Multirotor Aerial Vehicle* (MAV). A capacidade de decolagem e pouso vertical, bem como o voo pairado e elevada manobrabilidade torna essa classe particularmente desejada para validação experimental e comparativa de estratégias de controle em robótica aérea. Entre as

configurações dos multi-rotor, adota-se o quadricóptero como plataforma de referência por aliar simplicidade mecânica a uma ampla consolidação na literatura sendo frequentemente utilizado como configuração base em pesquisa e desenvolvimento (MAHONY *et al.*, 2012; IDRISSEI *et al.*, 2022).

Dito isso, a natureza do quadricóptero caracteriza-se por sua não linearidade e pelo seu forte acoplamento entre suas variáveis de estado. O controle da aeronave é exercido exclusivamente pela variação da velocidade angular dos quatro propulsores, o que gera um empuxo total e os torques necessários para os movimentos de rotação. Trata-se, portanto, de um sistema sub-atuado, pois existem seis graus de liberdade, compondo doze estados do sistema, para apenas quatro entradas de controle. Conseqüentemente, o deslocamento translacional não ocorre de forma independente, mas é um sub-produto da alteração da atitude do veículo (MAHONY *et al.*, 2012; JUNIOR, 2024).

Por fim, embora a representação física exata demanda equações diferenciais não lineares complexas, o projeto de controladores frequentemente beneficia-se de modelos mais simplificados. O desafio reside em identificar quais não linearidades podem ser desconsideradas sem prejuízo ao desempenho. Neste cenário, a linearização do modelo matemático apresenta-se como uma etapa padrão através de métodos como a expansão em séries de Taylor em torno de um ponto de equilíbrio ou pela teoria dos pequenos distúrbios (ABOUSELIMA, 2022).

2.1 Notações e preliminares matemáticos

Esta seção estabelece as notações matemáticas e os fundamentos algébricos indispensáveis à modelagem do quadricóptero. Nela, detalham-se os conceitos que servirão de base para o desenvolvimento das equações dinâmicas e cinemáticas do sistema.

2.1.1 Notações

Para estabelecer um rigor formal, este trabalho utiliza conjuntos numéricos padronizados e convenções de tipografia específicas. Os conjuntos de números reais e inteiros são denotados por \mathbb{R} e \mathbb{Z} , respectivamente, enquanto subconjuntos limitados inferiormente são denotados por um valor α são indicados por \mathbb{R}_α e \mathbb{Z}_α . As matrizes são representadas por letras maiúsculas em negrito (**A**), vetores algébricos por letras minúsculas em negrito (**x**) e vetores geométricos por setas (\vec{a}), garantindo a distinção entre as grandezas físicas e sua representação

numérica.

Os sistemas de coordenadas cartesianas são definidos pela notação $S \triangleq \{O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$, onde O denota a origem do referencial e os vetores unitários ortogonais indicam os eixos principais. A projeção de um vetor físico \vec{a} em um referênciia específico S_b resulta em um vetor algébrico $\vec{a}_b \in \mathbb{R}^3$. Adicionalmente, utilizam-se os símbolos \mathbf{I}_n e $\mathbf{0}_{n \times m}$ para representar a matriz de identidade e a matriz nula de dimensões apropriadas, respectivamente.

Por fim, o produto vetorial entre dois vetores \vec{a} e \vec{b} é transformado em uma operação matricial através da matriz antissimétrica $[\mathbf{a} \times]$, permitindo que a cinemática seja escrita de forma linear em relação aos parâmetros de interesse.

2.1.2 O Grupo Especial Ortogonal SO(3)

O Grupo Especial Ortogonal tridimensional, denotado por $SO(3)$, é formalmente definido :

$$SO(3) := \left\{ \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{I}_3, \det(\mathbf{R}) = 1 \right\}. \quad (2.1)$$

A condição de ortogonalidade $\mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{I}_3$ implica que os vetores coluna $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3\}$ formam uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 , satisfazendo $\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \rangle = \delta_{ij}$ para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Em outras palavras, cada vetor coluna possui norma unitária e é ortogonal aos demais. A restrição $\det(\mathbf{R}) = 1$ exclui as transformações de reflexão presentes em $O(3)$, garantindo que $SO(3)$ represente exclusivamente isometrias que preservam a orientação espacial, isto é, rotações puras (HASHIM, 2019).

2.1.3 Álgebra de quatérnions

Os quatérnions de Hamilton, denotados pelo conjunto \mathbb{H} , fornecem uma parametrização global e contínua para o espaço de rotações $SO(3)$, superando as limitações de singularidade inerentes às representações mínimas. Um quatérnion de atitude \mathbf{Q} é um número hipercomplexo definido como

$$\mathbf{Q} = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} \equiv \begin{bmatrix} q_0 \\ \bar{\mathbf{q}} \end{bmatrix}, \quad q_0 \in \mathbb{R}, \quad \bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (2.2)$$

Onde q_0 é a parte escalar e $\bar{\mathbf{q}}$ é a parte vetorial. Para representar uma rotação física válida, o quatérnio deve satisfazer a restrição de norma unitária:

$$\|\mathbf{Q}\|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1, \quad (2.3)$$

Desse modo, restringindo o espaço de estados à hipersfera tridimensional $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ (HASHIM, 2019).

Por fim, as operações fundamentais incluem o conjugado $\mathbf{Q}^* = [q_0, -\bar{\mathbf{q}}^\top]^\top$, que para quatérnios unitários coincide com o inverso \mathbf{Q}^{-1} , simplificando a inversão de rotações em termos computacionais. A composição de orientações sucessivas é realizada através do produto de Hamilton, denotado por \otimes , uma operação não comutativa que preserva a norma unitária e reflete a natureza das rotações no espaço tridimensional. Logo, o mapeamento para uma matriz de rotação $\mathbf{R}_Q \in SO(3)$ é dado por uma função quadrática que utiliza a matriz antissimétrica $[\bar{\mathbf{q}}]_\times$, permitindo a conversão imediata de vetores entre os referenciais inercial e do corpo (HASHIM, 2019).

2.2 Sistemas de coordenadas cartesianas

A modelagem dinâmica de um quadricóptero inicia-se pela abstração física do veículo para viabilizar o desenvolvimento das equações de movimento baseadas na formulação de Newton-Euler. Para tanto, adotam-se as seguintes hipóteses estruturais sobre o sistema:

1. **Simetria:** A estrutura é assumida como simétrica em relação aos planos que cortam o corpo do veículo;
2. **Estrutura rígida:** O veículo é tratado como um corpo rígido indeformável, desconsiderando as vibrações estruturais ou flexões dos braços durante o voo;
3. **Origem no centro de massa:** O Centro de Gravidade (CG) coincide geometricamente com a origem do sistema de coordenadas fixo ao corpo.

Desse modo, para evitar ambiguidades de interpretação decorrente dessas hipóteses, definem-se dois sistemas principais, conforme mostrado na Figura 4. O primeiro é o referencial do corpo S_B , definido pela base ortonormal:

$$S_B = \{\mathbf{B}; \vec{x}_B, \vec{y}_B, \vec{z}_B\} \quad (2.4)$$

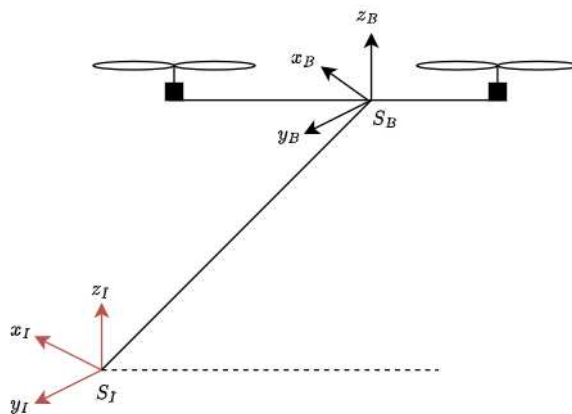
A origem B coincide com o CG do quadricóptero conforme a terceira hipótese assumida. Os seus eixos movem-se solidariamente ao veículo seguindo a regra da mão direita, onde o eixo \vec{x}_B longitudinal aponta para a frente do veículo, o eixo \vec{y}_B transversal aponta para a direita e o eixo \vec{z}_B completa o sistema perpendicular aos rotores.

Além disso, o segundo sistema é o referencial inercial S_I , definido pela base ortonormal:

$$S_I = \{I; \vec{x}_I, \vec{y}_I, \vec{z}_I\} \quad (2.5)$$

Este referencial estabelece a origem do mundo para fins de navegação, sendo considerado estático. A sua função é fornecer o sistema de coordenadas para a determinação da posição absoluta e da atitude da aeronave.

Figura 4 – Representação dos referenciais inerciais e do corpo



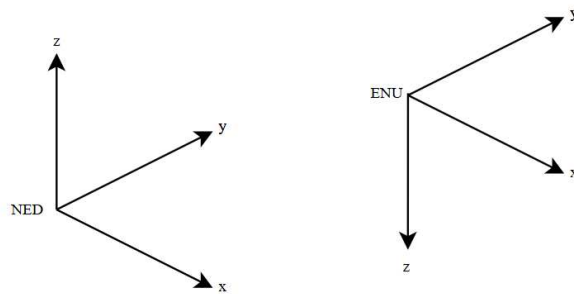
Então, uma vez estabelecidos os referenciais, a orientação do corpo no espaço é descrita pela relação linear entre as duas bases. Matematicamente, esta relação é representada pela matriz de rotação ${}^I R_B \in SO(3)$, que atua como um operador de mapeamento. Portanto, para qualquer vetor genérico v , a transformação das coordenadas expressas no referencial do corpo v_B para o referencial inercial v_I é dada por:

$$v_I = {}^I R_B \cdot v_B \quad (2.6)$$

Essa matriz encapsula a atitude do quadricóptero, sendo construída através de parametrizações como os ângulos de Euler ou os quatérnions unitários.

No âmbito da robótica aérea, a integração entre sistemas embarcados e unidades de processamento de alto nível há desafios significativos de interoperabilidade, especialmente no que tange à padronização de referências espaciais. Observa-se, na prática, uma dicotomia normativa entre o *hardware* de voo e o *software* de missão. De um lado, a tradição aeronáutica (presente nos controladores de voo da PX4) que adotam o sistema *North-East-Downm* (NED).

Figura 5 – Representação dos referencial NED e ENU



Nesta convenção, o alinhamento do eixo vertical com o vetor gravidade simplifica a formulação das equações dinâmicas e a análise de estabilidade. Em contrapartida, a comunidade de robótica móvel consolidou o uso do padrão *East-North-Up* (ENU), amplamente difundido pelo *Robot Operating System* (ROS) (PX4 Autopilot, 2026). A preferência por orientar o eixo vertical para cima decorre de sua intuitividade em ambientes de visualização tridimensionais e da facilidade de integração com sensores como *LiDAR* e câmeras de profundidade, cujos dados são nativamente representados neste formato.

A discrepância entre essas referências torna-se crítica quando a malha de controle (operando em NED) necessita interagir com algoritmos de navegação ou odometria visuais (operando em ENU). A ausência de uma compatibilização rigorosa resulta em interpretações errôneas de atitude e posição, comprometendo a segurança do voo. Portanto, para mitigar esse risco e assegurar a consistência dos dados de telemetria, este trabalho estabelece uma transformação rígida entre os sistemas.

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_{\text{ENU}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{R_{\text{NED} \rightarrow \text{ENU}}} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_{\text{NED}} \quad (2.7)$$

2.3 Cinemática do quadricóptero

O estudo da cinemática rotacional é fundamental para a modelagem de MAV, pois estabelece a relação matemática entre a atitude do veículo e os sistemas de coordenadas de referência utilizados na navegação e controle (DAM, 2023). Dito isso, esta subseção apresenta a estrutura matemática subjacente às transformações de orientação.

2.3.1 Representação da orientação em $SO(3)$

O controle de atitude de um quadricóptero exige uma representação matemática precisa de sua orientação no espaço. A matriz de rotação $\mathbf{R} \in SO(3)$, introduzida na Seção 2.1.2, desempenha esse papel ao mapear vetores entre o referencial fixo ao corpo (S_B) e o referencial inercial (S_I). Nesta seção, são exploradas as propriedades computacionais dessa representação e as parametrizações alternativas empregadas em sistemas de navegação.

Então, da condição de ortogonalidade $\mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{I}_3$, decorre que a inversa coincide com a transposta $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^\top$. Essa propriedade possui relevância computacional, pois a transposição é trivial comparada à inversão matricial genérica.

Embora livre de singularidades, a matriz de rotação apresenta redundância: nove elementos sujeitos a seis vínculos de ortogonalidade, resultando em apenas três graus de liberdade. A Tabela 1 compara as principais parametrizações, evidenciando o *trade-off* entre minimalidade e singularidade.

Tabela 1 – Parametrizações do grupo $SO(3)$.

Parametrização	Parâmetros	Singularidades	Uso típico
Matriz de Rotação	9	Não	Formulação teórica
Ângulos de Euler	3	Sim	Interface usuário
Quatérnios Unitários	4	Não	Navegação inercial
Eixo-Ângulo	3	Sim	Visualização

Fonte: Adaptado de (HASHIM, 2019)

Neste trabalho, são abordadas as duas parametrizações mais difundidas no contexto dos quadricópteros: os ângulos de Euler e os quatérnios unitários (HASHIM, 2019).

2.3.2 Representação por ângulos de Euler

A orientação de um corpo rígido no espaço tridimensional pode ser descrita como o resultado de três rotações consecutivas em torno de eixos coordenados. Essa formulação, introduzida por Leonhard Euler, permanece como a representação angular mais utilizada em aplicações aeronáuticas e robóticas (DAM, 2023).

Dito isso, a ordem e a escolha dos eixos de rotação não são únicas, resultando em doze sequências distintas. Essas são classificadas em duas famílias: **Proper Euler** (sequências com repetição do primeiro eixo, por exemplo, Z-X-Z) e **Tait-Bryan** (sequências sem repetição dos eixos, por exemplo, X-Y-Z). A Tabela 2 apresenta as possíveis ordens, em que cada uma possui uma matriz de rotação distinta para o mesmo conjunto de ângulos.

Tabela 2 – Sequências de rotação de Euler.

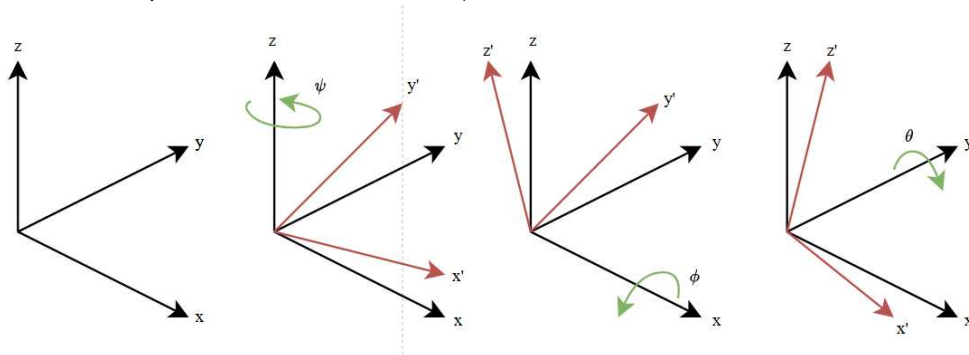
Euler Próprio		Tait-Bryan	
Sequência	Notação	Sequência	Notação
Z-X-Z	(α, β, γ)	Z-Y-X*	(ψ, θ, ϕ)
X-Y-X	(α, β, γ)	Z-X-Y	(ψ, ϕ, θ)
Y-Z-Y	(α, β, γ)	Y-X-Z	(θ, ϕ, ψ)
Z-Y-Z	(α, β, γ)	Y-Z-X	(θ, ψ, ϕ)
X-Z-X	(α, β, γ)	X-Y-Z	(ϕ, θ, ψ)
Y-X-Y	(α, β, γ)	X-Z-Y	(ϕ, ψ, θ)

* Convenção aeronáutica adotada neste trabalho.

Fonte: Adaptado de (HASHIM, 2019)

Desse modo, para o quadricóptero, a convenção Tait-Bryan Z-X-Y é adotada como padrão (MAHONY *et al.*, 2012). Nessa sequência, os três ângulos possuem uma interpretação física direta e correspondente às atitudes aeronáuticas clássicas.

Figura 6 – Sequência de rotações Z-X-Y, partindo das (a) coordenadas padrão, para a rotação em (b) *Yaw*, ψ , (c) *Roll* θ e (d) *Pitch* ϕ



Então, seja a base canônica ortonormal de \mathbb{R}^3 definida pelos vetores unitários:

$$\mathbf{e}_x = [1, 0, 0]^\top, \quad \mathbf{e}_y = [0, 1, 0]^\top, \quad \mathbf{e}_z = [0, 0, 1]^\top \quad (2.8)$$

Com isso, tem-se que a matriz de rotação é construída pela composição de três rotações elementares, conforme a Figura 6, aplicadas na seguinte ordem:

- **Guinada (*Yaw*):** Rotação em torno do eixo z do referencial inercial.

$$\mathbf{R}_\psi = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

- **Rolagem (*Roll*):** Rotação em torno do eixo x do referencial intermediário resultante.

$$\mathbf{R}_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

- **Arfagem (*Pitch*):** Rotação em torno do eixo y do referencial do corpo.

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Logo, a matriz de rotação completa, obtida pela composição da Equação 2.12, em que $c_{(\cdot)} \triangleq \cos(\cdot)$ e $s_{(\cdot)} \triangleq \sin(\cdot)$.

$$\mathbf{R}_\psi \mathbf{R}_\phi \mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} c(\psi)c(\theta) - s(\psi)s(\phi)s(\theta) & -s(\psi)c(\phi) & c(\psi)s(\theta) + s(\psi)s(\phi)c(\theta) \\ s(\psi)c(\theta) + c(\psi)s(\phi)s(\theta) & c(\psi)c(\phi) & s(\psi)s(\theta) - c(\psi)s(\phi)c(\theta) \\ -c(\phi)s(\theta) & s(\phi) & c(\phi)c(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Daí, há dois conceitos fundamentais do movimento rotacional: as taxas de variação dos ângulos de Euler $\dot{\Phi} = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^\top$ e a velocidade angular do corpo $\omega = [p, q, r]^\top$. Essas medidas são medidas diretamente pelos giroscópios embarcados no referencial S_B , então a relação entre essas grandezas é estabelecida pela matriz de transformação cinemática $W(\Phi)$:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{W}(\Phi) \dot{\Phi}, \text{ com } W(\Phi) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\cos(\phi) \sin(\theta) \\ 0 & 1 & \sin(\phi) \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Em que para a integração das leituras dos giroscópios, necessita-se da transformação inversa:

$$\dot{\Phi} = \mathbf{W}^{-1}(\Phi) \boldsymbol{\omega}, \text{ com } \mathbf{W}^{-1}(\Phi) = \frac{1}{\cos \phi} \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & 0 & \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \phi & -\sin \phi \cos \theta \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Por fim, a discrepância entre as taxas de Euler e a velocidade angular ocorre devido à definição das rotações em referenciais distintos, exigindo uma matriz de conversão para unificá-las. Contudo, essa representação sofre com a singularidade de *gimbal lock* quando ϕ se aproxima de 90 graus, ponto em que a perda de um grau de liberdade impede o cálculo preciso da atitude. Embora funcional para voos nivelados, manobras agressivas demandam modelos matemáticos mais robustos para evitar falhas e divergências numéricas.

2.3.3 Representação por quatérnions unitários

Conforme discutido na Seção 2.1.3, os quatérnions unitários fornecem uma parametrização global e livre de singularidades para $\text{SO}(3)$. Então, a evolução temporal do quatérnion de atitude é governada por uma equação diferencial linear nos elementos do quatérnion. Dito isso, existem duas formulações equivalentes, diferindo na organização matricial.

- **Formulação 1:** A matriz $\Xi(\mathbf{Q}) \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$, em que ocorre a influência do vetor de velocidades angulares:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2} \Xi(\mathbf{Q}) \boldsymbol{\omega}, \text{ em que } \Xi(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

- **Formulação 2:** A matriz $\Gamma(\boldsymbol{\omega}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, em que há a multiplicação do próprio quatérnion:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2} \Gamma(\omega) \mathbf{Q}, \text{ em que } \Gamma(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Em que a matriz $\Gamma(\omega)$ é antissimétrica, o que implica $\Gamma^\top = -\Gamma$. Essa propriedade garante a preservação da norma unitária do quatérnio durante a integração analítica.

Além disso, embora os quatérnios sejam utilizados internamente para cálculos computacionais, a interface com operadores humanos e a visualização da atitude requerem a conversão para ângulos de Euler. Para a sequência Z-X-Y adotada neste trabalho, as relações são:

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{2(q_0 q_1 + q_2 q_3)}{1 - 2(q_1^2 + q_2^2)} \right], \quad (2.17)$$

$$\theta = \sin^{-1} [2(q_0 q_2 - q_3 q_1)], \quad (2.18)$$

$$\psi = \tan^{-1} \left[\frac{2(q_0 q_3 + q_1 q_2)}{1 - 2(q_2^2 + q_3^2)} \right]. \quad (2.19)$$

Por fim, duas correções garantem robustez numérica: (i) **renormalização**, $\mathbf{Q} \leftarrow \mathbf{Q}/\|\mathbf{Q}\|$, para compensar desvios acumulados da restrição unitária; e (ii) **seleção de hemisfério**, escolhendo o quatérnio com $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}_{\text{ant}} \geq 0$ para evitar descontinuidades da dupla cobertura.

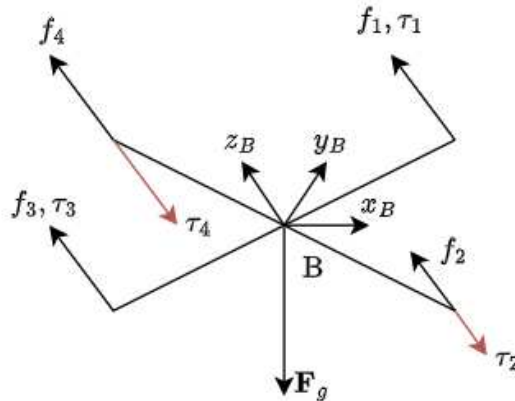
2.4 Dinâmica do quadricóptero

O comportamento dinâmico do quadricóptero é governado pelos esforços produzidos pelos quatro conjuntos propulsivos e pelas ações externas sobre a estrutura. Com isso, cada motor *brushless*, acoplado a uma hélice girando com velocidade angular Ω_i , produz um empuxo axial e um torque reativo de arrasto. Simultaneamente, o veículo está sujeito à gravidade e, em voo *outdoor*, a perturbações atmosféricas (MAHONY *et al.*, 2012).

2.4.1 Alocação de controle

Com base na Figura 7, cada propulsor produz um empuxo f_i e um torque τ_i expressor por:

Figura 7 – Diagrama de forças do quadricóptero



$$f_i = k_f \Omega_i^2 ; \tau = k_m \Omega_i^2 \quad (2.20)$$

Onde os parâmetros k_f e k_m representam, respectivamente, os coeficientes de empuxo e arrasto, cujas quantidades são positivas e obtidas via caracterização experimental do conjunto motor-hélice (MAHONY *et al.*, 2012).

Ademais, a disposição espacial dos propulsores determina como os esforços individuais combinam-se para produzir as ações de controle sobre o veículo. Na configuração em X (Figura 7), os braços formam ângulos de 45 graus com o eixo longitudinal, resultando em uma contribuição simétrica de cada motor para os momentos de rolagem e arfagem.

A relação entre as forças individuais dos propulsores $\mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3, f_4]^T$ e os esforços generalizados de controle $\mathbf{u} = [F, M_\phi, M_\theta, M_\psi]^T$ é expressa pela matriz de alocação de controle $\Gamma \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$:

$$\mathbf{u} = \Gamma \mathbf{f}, \text{ com } \begin{bmatrix} F \\ M_\phi \\ M_\theta \\ M_\psi \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Para a configuração em X, conforme (SANTOS, 2020), a matriz de alocação assume a forma:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ d & -d & -d & d \\ -d & -d & d & d \\ \kappa & -\kappa & \kappa & -\kappa \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

Onde:

- $d = l \sin(45) = l/\sqrt{2}$ é a projeção do braço sobre os eixos do corpo, sendo l o comprimento efetivo do braço;
- $\kappa = k_m/k_f$ é a razão entre os coeficientes aerodinâmicos de momento e de empuxo.
- A inversibilidade de Γ (com $\det(\Gamma) \neq 0$) assegura que as forças individuais necessárias podem ser univocamente determinadas a partir dos esforços comandados: $\mathbf{f} = \Gamma^{-1} \mathbf{u}$

2.4.2 Movimento translacional

A partir disso, determina-se como esses esforços comandados influenciam a evolução temporal dos estados do veículo. Então, a descrição desse comportamento recorre ao formalismo Newtoniano, que relaciona forças e torques às respectivas acelerações lineares e angulares do sistema.

Desse modo, a aceleração do centro de massa do quadricóptero resulta do somatório vetorial das forças que atuam sobre a estrutura ($\sum F_n = m \cdot a$). Nesse caso, identificam-se duas contribuições principais: o empuxo combinado dos propulsores, atuando na direção perpendicular ao plano dos rotores, e a atração gravitacional exercida pela Terra. Com isso, a força de empuxo, por ser definida no referencial do corpo, necessita de transformação para o referencial inercial antes de ser combinada com a gravidade. Portanto, tem-se a seguinte relação:

$$\ddot{\xi} = \frac{1}{m} \cdot {}^I R_B F_B + \frac{1}{m} \cdot F_g \quad (2.23)$$

Nesta expressão, $\xi = [x, y, z]^\top$ representa as coordenadas do centro de massa no referencial inercial, enquanto ${}^I R_B = \mathbf{R}(\eta)$ é a matriz de rotação parametrizada pelos ângulos de Euler $\eta = [\phi, \theta, \psi]^\top$. O termo $\mathbf{F}_B = [0, 0, F]^\top$ denota a força de empuxo expressa no referencial do corpo, onde $F = \sum_{i=1}^4 f_i$ é o empuxo total gerado pelos quatro propulsores. Por fim, $\mathbf{F}_g = [0, 0, -mg]^\top$ corresponde à força gravitacional, atuando na direção negativa do eixo vertical inercial.

2.4.3 Movimento rotacional

A evolução das velocidades angulares do quadricóptero é regida pela equação de Euler para corpos rígidos (MAHONY *et al.*, 2012):

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (2.24)$$

Onde $\boldsymbol{\omega} = [p, q, r]^\top$ é o vetor de velocidades angulares no referencial do corpo, $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é o tensor de inércia e $\boldsymbol{\tau} = [\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi]^\top$ é o vetor de momentos externos.

Dessa forma, para um quadricóptero com geometria simétrica e braços dispostos regularmente, os produtos de inércia são desprezíveis ($I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} \approx 0$), resultando em um tensor diagonal:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

Onde I_x , I_y e I_z são os momentos de inércia em torno dos eixos x_B , y_B e z_B do corpo, respectivamente. Para configurações simétricas do tipo X, é comum que $I_x \approx I_y$.

Por fim, a dinâmica rotacional pode ser expressa de forma compacta como:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}^{-1} (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})) \quad (2.26)$$

2.5 Linearização do Modelo

Embora o modelo não linear desenvolvido capture fielmente o comportamento do quadricóptero, sua complexidade dificulta a aplicação direta de técnicas clássicas de controle. A presença de produtos trigonométricos e termos de acoplamento giroscópico impede, por exemplo, a síntese de controladores por alocação de polos. Para contornar essa limitação, recorre-se à linearização jacobiana em torno de um ponto de operação (OGATA, 2010).

2.5.1 Representação em Espaço de Estados

Define-se o vetor de estado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{12}$ e o vetor de entrada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \\ \eta \\ \omega \end{bmatrix} = [x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \phi, \theta, \psi, p, q, r]^\top, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} F \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

As equações dinâmicas assumem a forma compacta $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, onde $\mathbf{f}: \mathbb{R}^{12} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{12}$.

2.5.2 Ponto de Equilíbrio

O ponto de operação natural é a condição de voo pairado (*hover*), caracterizada por $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}$:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \\ \mathbf{0}_{9 \times 1} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

onde $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ é uma posição arbitrária. O empuxo nominal $\bar{F} = mg$ compensa exatamente a força gravitacional.

2.5.3 Linearização por Série de Taylor

Definindo variações incrementais $\delta_{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ e $\delta_{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$, a expansão de Taylor até primeira ordem resulta no modelo linear:

$$\dot{\delta}_{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \delta_{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \delta_{\mathbf{u}}, \quad (2.29)$$

com as matrizes jacobianas avaliadas no equilíbrio:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} \in \mathbb{R}^{12 \times 12}, \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} \in \mathbb{R}^{12 \times 4}. \quad (2.30)$$

Por conveniência notacional, omite-se o símbolo δ no restante da discussão. Então, para avaliar as derivadas parciais, adotam-se as seguintes aproximações:

1. **Pequenos ângulos:** $\sin \phi \approx \phi$, $\cos \phi \approx 1$, $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$ para $|\phi|, |\theta| \ll 1$ rad.
2. **Guinada nominal:** $\bar{\psi} = 0$, desacoplando as coordenadas horizontais.

3. **Baixas taxas angulares:** Termos de acoplamento giroscópico (pq, qr, pr) desprezíveis.

Portanto, as matrizes assumem estrutura bloco-esparsa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{G} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & g & 0 \\ -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{b}_F & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{J}^{-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/I_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_z \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Em que a matriz \mathbf{G} captura o acoplamento entre atitude e aceleração translacional: inclinações de *roll* (ϕ) produzem aceleração em y , enquanto inclinações de *pitch* (θ) produzem aceleração em x .

3 CONTROLADORES BASEADOS EM MODELO

O projeto de leis de controle para sistemas dinâmicos de VANTs exige consideração cuidadosa das características inerentes à plataforma. Os quadricópteros, particularmente, apresentam desafios únicos, pois são sistemas instáveis em malha aberta e demonstram acoplamento significativo entre os seus graus de liberdade (MAHONY *et al.*, 2012; IDRISSEI *et al.*, 2022). Estas características derivam fundamentalmente de sua natureza como sistema sub-atuado, onde o número de entradas de controle independentes é menor que o número de graus de liberdade a serem controlados (JUNIOR, 2024).

Desse modo, a abordagem clássica de controle baseado em modelos requer primeiramente a obtenção de uma representação matemática do sistema, seja através de primeiros princípios (modelagem física) ou técnicas de identificação de sistemas, e posteriormente, o projeto de leis de controle (OGATA, 2010).

Este capítulo apresenta três controladores clássicos baseados em modelo que formam a base comparativa para a técnica orientada a dados: o controlador PID com sintonia via PSO, o LQR e o controlador preditivo MPC. A escolha destes controladores é motivada por razões práticas e teóricas complementares: O PID, apesar de conceitualmente simples, permanece como a solução mais implementada em sistemas comerciais devido à sua eficácia quando adequadamente sintonizado (RODRIGUEZ; LU, 2023), sendo empregado neste trabalho como o controlador de respaldo para a coleta de dados através da PX4.

Por sua vez, o LQR oferece um tratamento sistemático de sistemas multivariáveis com garantias teóricas de estabilidade (ASTRÖM; WITTENMARK, 1995). Enquanto o MPC compartilha a mesma estrutura fundamental de otimização, mas com a possibilidade de estabelecer restrições mais claras e diretas do as técnicas anteriores, assim, compartilhando a mesma estrutura fundamental que o DeePC, diferenciando-se apenas do modo em que o sistema é representado. (ELOKDA *et al.*, 2021)

3.1 Arquitetura de controle em cascata

Definição (Sistema sub-atuado): Um sistema mecânico é dito **sub-atuado** se o número de entradas de controle independentes m for estritamente menor que a dimensão do espaço de configuração n , ou seja, $m < n$. (OGATA, 2010)

Definido isso, uma consequência fundamental da sub-atuação é que não se pode

controlar arbitrariamente e independentemente todas as componentes da posição. Então, para gerar movimento horizontal, o veículo deve inclinar seu vetor empuxo, criando componentes de força no plano horizontal. Matematicamente, as forças atuantes no quadricóptero no referencial inercial são dadas por:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi)F \\ (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi)F \\ \cos \phi \cos \theta F - mg \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Onde observa-se que as acelerações horizontais (x,y) dependem explicitamente dos ângulos de atitude (ϕ, θ), estabelecendo um acoplamento intrínseco entre a dinâmica translacional e rotacional.

Dessa forma, para lidar com esse acoplamento, a estratégia predominante na literatura de controle de VANT baseia-se na suposição de uma *Time-Scale Separation* (TSS) entre as dinâmicas rotacionais e translacionais (JUNIOR, 2024). Então, a dinâmica de atitude (rotacional) do quadricóptero possui constante de tempo característica τ_η significativamente menor que a constante de tempo da dinâmica de posição (translacional) τ_p , isto é, a seguinte razão é válida:

$$\varepsilon = \frac{\tau_\eta}{\tau_p} \ll 1 \quad (3.2)$$

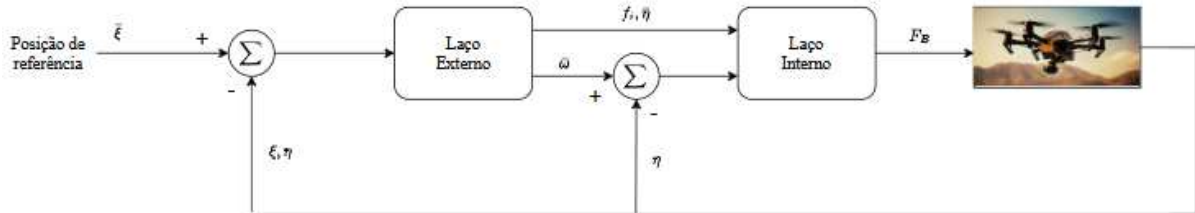
Com isso, a validade da TSS pode ser verificada através da análise dos autovalores do sistema linearizado. Logo, considerando o modelo linearizado em torno de *hover*, os autovalores associados à dinâmica de atitude tipicamente têm parte real com magnitude da ordem de 10 a 100 rad/s, enquanto os autovalores da dinâmica de posição situam-se na faixa de 1 a 10 rad/s (MAHONY *et al.*, 2012).

Dessa forma, a estrutura de controle em cascata decompõe o problema de controle multivariável complexo em dois subproblemas mais tratáveis, como visto na Figura 8 (JUNIOR, 2024):

- **Laço externo (controle de posição):** Opera na escala de tempo lenta, recebendo a referência de trajetória desejada $\bar{\xi} = [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]^\top$ e as medições de posição e velocidades atuais do sistema. Este módulo calcula a atitude desejada $\bar{\eta} = [\bar{\phi}, \bar{\theta}, \bar{\psi}]^\top$ e o empuxo total \bar{F}_B necessários para rastrear a trajetória.

- **Laço interno (controle de atitude):** Opera na escala de tempo rápida, tratando a atitude desejada $\bar{\eta}$ como referência e gerando os comandos de torque $\bar{\tau} = [\bar{M}_\phi, \bar{M}_\theta, \bar{M}_\psi]^\top$ que, combinados com \bar{F}_B , determinam as velocidades dos motores.

Figura 8 – Diagrama de blocos da arquitetura de controle em cascata



Portanto, conforme (JUNIOR, 2024), para que a cascata funcione adequadamente, é imperativo que o laço interno tenha largura de banda substancialmente maior que o externo. Uma regra prática estabelece que a razão entre as frequências de corte de ser pelo menos 5:1, garantindo que a atitude rastreie suas referências efetivamente de forma instantânea na escala de tempo da translação.

3.2 Controlador PID com otimização PSO

O controlador PID permanece como a solução de controle mais implementada na indústria, estando presente em grande parte dos sistemas de controle em malha fechada (OGATA, 2010). Sua popularidade deriva da simplicidade conceitual, facilidade de implementação e eficácia quando adequadamente sintonizado.

Dito isso, a lei de controle PID no domínio contínuo do tempo é expressa como:

$$u(t) = K_p \cdot e(t) + K_i \cdot \int_0^t e(\tau) \cdot d\tau + K_d \cdot \dot{e}(t) \quad (3.3)$$

Onde $e(t) = r(t) - y(t)$ é o erro de rastreamento, sendo $r(t)$ a referência e $y(t)$ a saída medida. Os três termos de ganhos possuem interpretações distintas:

- **Ação proporcional (K_p):** Gera uma resposta proporcional ao erro instantâneo. Atua como uma "mola virtual", cuja rigidez K_p determina a rapidez da correção. Em valores elevados há o aumento da velocidade de resposta, mas pode induzir *overshoot* e instabilidade;
- **Ação integral (K_i):** Acumula o erro ao longo do tempo, eliminando erros estacionários causados por distúrbios constantes ou discrepâncias do modelo. O integrador introduz

um polo na origem, garantindo erro nulo para referências constantes, porém pode causar *overshoot* excessivo e o fenômeno de *windup* quando há saturação de atuadores;

- **Ação derivativa (K_d):** Reage à taxa de variação do erro, fornecendo antecipação. Este ganho funciona como um "amortecedor virtual", reduzindo o *overshoot* e o tempo de acomodação. Entretanto, amplifica o ruído de alta frequência, exigindo análise cuidadosa durante sua implementação.

3.2.1 Implementação Digital

Em sistemas embarcados, o controlador PID é implementado em tempo discreto com período de amostragem T_s . A discretização emprega aproximação retangular (Euler) para a integral e diferenças finitas para a derivada, resultando na lei de controle:

$$u[k] = K_p e[k] + K_i T_s \sum_{j=0}^k e[j] + K_d \frac{e[k] - e[k-1]}{T_s}. \quad (3.4)$$

Esta formulação apresenta duas limitações práticas que devem ser endereçadas.

O termo derivativo na forma pura amplifica ruído de alta frequência presente nas medições. A solução padrão consiste em filtrar a ação derivativa com um passa-baixas de primeira ordem (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1995):

$$D(s) = \frac{K_d s}{1 + T_f s}, \quad T_f = \frac{K_d}{N}, \quad (3.5)$$

onde N é o coeficiente de banda do filtro derivativo, tipicamente escolhido no intervalo $3 \leq N \leq 20$. Valores menores de N proporcionam maior atenuação de ruído, enquanto valores maiores preservam a ação derivativa em frequências mais altas. A escolha $N = 10$ representa um compromisso usual na literatura (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 2006).

Discretizando via aproximação de Tustin (bilinear), obtém-se a forma recursiva:

$$D[k] = \frac{2K_d}{2 + NT_s} (e[k] - e[k-1]) + \frac{2 - NT_s}{2 + NT_s} D[k-1]. \quad (3.6)$$

Além disso, quando os comandos atingem os limites de saturação dos atuadores (u_{\min} , u_{\max}), o integrador pode continuar acumulando erro, resultando em *overshoot* excessivo quando a saturação cessa. A técnica de *back-calculation* mitiga este efeito (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 2006):

$$I[k] = I[k-1] + K_i T_s e[k] + \frac{T_s}{T_i} (u_{\text{sat}}[k-1] - u[k-1]), \quad (3.7)$$

onde:

- $u[k-1]$ é a saída do controlador **antes** da saturação no instante anterior;
- $u_{\text{sat}}[k-1] = \text{sat}(u[k-1], u_{\text{min}}, u_{\text{max}})$ é a saída **após** a saturação;
- T_t é a constante de tempo de *tracking*, tipicamente $T_t = \sqrt{T_i T_d}$, com $T_i = K_p/K_i$ e $T_d = K_d/K_p$.

3.2.2 Aplicação na Arquitetura Cascata

O **laço interno** opera sobre a dinâmica rotacional, que possui resposta rápida. Para cada eixo de atitude (rolagem, arfagem e guinada), emprega-se um controlador PID completo que recebe o erro de velocidade angular $\bar{\omega} - \omega$ e gera os comandos de torque. A ação integral é essencial neste laço para compensar assimetrias de massa e perturbações aerodinâmicas persistentes.

O **laço externo** controla a dinâmica translacional, gerando referências de atitude $(\bar{\phi}, \bar{\theta})$ e empuxo \bar{F}_B . Como a integração de posição já está implícita na dinâmica translacional (posição é a integral da velocidade), tipicamente emprega-se um controlador PD para evitar acúmulo excessivo de estados integrais na malha completa. A referência de guinada $\bar{\psi}$ é tratada separadamente, podendo ser fixada ou comandada pelo operador.

Portanto, a sintonia dos ganhos deve respeitar a separação de escalas de tempo: o laço interno deve ter largura de banda pelo menos cinco vezes maior que o externo, garantindo que a atitude rastreie suas referências de forma quase instantânea na perspectiva do controlador de posição.

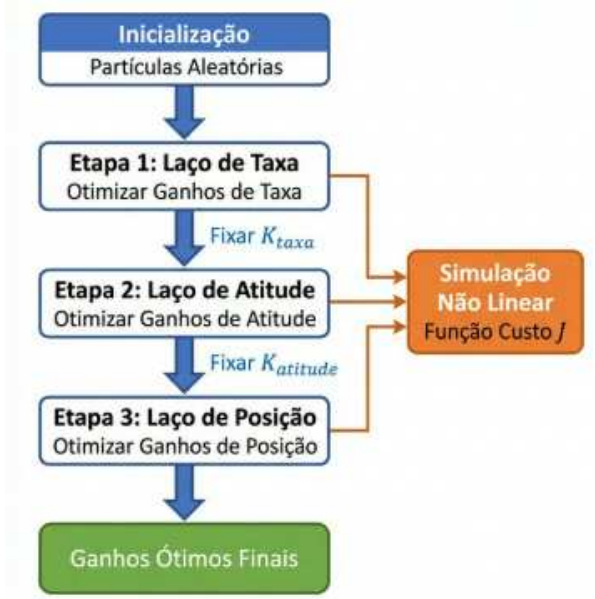
3.2.3 Função de Custo Multi-Objetivo

A sintonia manual dos ganhos PID para sistemas multivariáveis acoplados é notoriamente trabalhosa e frequentemente resulta em desempenho sub-ótimo (RODRIGUEZ; LU, 2023). O algoritmo PSO, proposto por Kennedy e Eberhart (), oferece uma alternativa sistemática de busca estocástica baseada em inteligência de enxames.

No PSO, cada partícula i do enxame representa uma solução candidata, ou seja, um vetor de ganhos $\mathbf{x}_i = [K_{p,1}, K_{i,1}, K_{d,1}, \dots, K_{p,N}, K_{i,N}, K_{d,N}]^T$ para os N controladores PID na estrutura em cascata. Dessa forma, o algoritmo deve seguir o diagrama da Figura 9.

A qualidade de cada conjunto de ganhos é avaliada através de uma função de aptidão que penaliza características indesejáveis. Para controle de trajetória em quadricópteros, a

Figura 9 – Diagrama de operação do algoritmo do PSO



formulação adotada combina (RODRIGUEZ; LU, 2023):

$$J(\mathbf{K}) = \underbrace{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \|\mathbf{e}[k]\|^2}}_{\text{RMSE}} + \lambda_o \underbrace{\max_k \|\mathbf{e}[k]\|}_{\text{Overshoot}} + \lambda_u \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} \|\Delta \mathbf{u}[k]\|^2}_{\text{Esforço de controle}}, \quad (3.8)$$

onde:

- $\mathbf{e}[k] = \mathbf{r}[k] - \mathbf{y}[k]$ é o vetor de erro de rastreamento no instante k ;
- $\Delta \mathbf{u}[k] = \mathbf{u}[k] - \mathbf{u}[k-1]$ é a variação do sinal de controle;
- N é o número de amostras da simulação;
- λ_o e λ_u são pesos de ponderação ($\lambda_o, \lambda_u \geq 0$).

O primeiro termo minimiza o erro RMS ao longo da trajetória. O segundo penaliza o *overshoot* máximo, evitando oscilações excessivas. O terceiro penaliza variações bruscas nos comandos, promovendo suavidade na atuação. Partículas que resultam em instabilidade recebem penalidade $J = 10^6$, efetivamente descartando-as do processo de busca.

Por fim, segue o pseudo-código do algoritmo e sintonia dos ganhos através do PSO:

Algoritmo 1: PSO para Sintonia de PID em Cascata

Entrada : Número de partículas n_p , iterações máximas n_{iter}

Entrada : Limites de busca $\mathbf{x}_{min}, \mathbf{x}_{max}$

Entrada : Parâmetros PSO: ω (inércia), c_1 (cognitivo), c_2 (social)

Saída : Melhor conjunto de ganhos \mathbf{g}^*

Inicializar posições: $\mathbf{x}_i \sim \mathcal{U}(\mathbf{x}_{min}, \mathbf{x}_{max}), i = 1, \dots, n_p$;

Inicializar velocidades: $\mathbf{v}_i \sim \mathcal{U}(-|\mathbf{x}_{max} - \mathbf{x}_{min}|, |\mathbf{x}_{max} - \mathbf{x}_{min}|)$;

$\mathbf{p}_i \leftarrow \mathbf{x}_i$ (melhor pessoal);

$\mathbf{g} \leftarrow \arg \min_i J(\mathbf{x}_i)$ (melhor global);

for $k = 1$ **to** n_{iter} **do**

for $i = 1$ **to** n_p **do**

 Avaliar função custo: $J_i \leftarrow J(\mathbf{x}_i)$ via simulação;

if $J_i < J(\mathbf{p}_i)$ **then**

$\mathbf{p}_i \leftarrow \mathbf{x}_i$;

end

if $J_i < J(\mathbf{g})$ **then**

$\mathbf{g} \leftarrow \mathbf{x}_i$;

end

end

for $i = 1$ **to** n_p **do**

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \sim \mathcal{U}(0, 1)^{\dim(\mathbf{x})}$;

$\mathbf{v}_i \leftarrow \omega \mathbf{v}_i + c_1 \mathbf{r}_1 \odot (\mathbf{p}_i - \mathbf{x}_i) + c_2 \mathbf{r}_2 \odot (\mathbf{g} - \mathbf{x}_i)$;

$\mathbf{x}_i \leftarrow \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i$;

$\mathbf{x}_i \leftarrow \max(\mathbf{x}_{min}, \min(\mathbf{x}_{max}, \mathbf{x}_i))$;

end

 Decaimento adaptativo: $\omega \leftarrow \max(0.4, 0.95\omega)$;

end

return \mathbf{g} ;

Onde \odot denota produto elemento-a-elemento (Hadamard).

3.3 Regulador Linear-Quadrático (LQR)

O LQR representa uma abordagem fundamentalmente distinta do PID clássico. Enquanto o PID ajusta ganhos para cada termo individualmente, o LQR formula o problema de controle como a otimização de um funcional de custo que balança o desempenho do sistema (erro de estado) e o esforço de controle (energia gasta). Isso resulta em uma solução ótima analítica para o ganho de realimentação (ASTRÖM; MURRAY, 2008).

Neste trabalho, adota-se uma estratégia de LQR Desacoplado com Ação Integral, que simplifica o problema multivariável complexo em subproblemas menores e independentes, permitindo uma sintonia mais intuitiva e robusta. Então, considere um sistema linear invariante no tempo (LTI) descrito por:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (3.9)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle. O objetivo do LQR é encontrar a lei de controle por realimentação de estados $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ que minimize o funcional de custo quadrático infinito:

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)) dt \quad (3.10)$$

As matrizes de ponderação devem satisfazer as seguintes propriedades dimensionais e de positividade:

- $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$: Matriz simétrica semi-definida positiva ($\mathbf{Q} \succeq 0$). Penaliza os desvios dos estados em relação à origem.
- $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$: Matriz simétrica definida positiva ($\mathbf{R} \succ 0$). Penaliza a amplitude dos sinais de controle.

A solução ótima é dada pela lei de controle $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}(t)$, onde \mathbf{P} é a solução única definida positiva da Equação Algébrica de Riccati:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (3.11)$$

3.3.1 Estratégia de Simplificação: LQR Desacoplado

Ao invés de projetar um único controlador LQR para todo o vetor de estados do quadricóptero ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{12}$), o que exigiria a sintonia simultânea de uma matriz Q de dimensão 12×12 , optou-se por decompor a dinâmica em quatro subsistemas independentes: Altitude (z), Atitude (ϕ, θ) e Guinada (ψ). Esta abordagem, frequente na literatura de VANTs, simplifica drasticamente o projeto e permite sintonizar cada dinâmica de acordo com requisitos físicos específicos.

Para cada subsistema, o modelo é aumentado com um estado integrador para garantir erro nulo em regime permanente, análogo à ação integral do PID. O estado aumentado torna-se $\mathbf{x}_{aux} = [x, \dot{x}, \delta]^T$, onde $\delta = \int (r - x) dt$ é o erro acumulado.

Um exemplo típico para o subsistema de altitude (eixo Z) é dado por:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \delta_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{aug}} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \delta_z \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_{aug}} u_z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_z \quad (3.12)$$

Aplicando o LQR a este subsistema com matrizes de peso diagonais $Q_{sub} = \text{diag}(q_{pos}, q_{vel}, q_{int})$ e $R_{sub} = \rho$, obtém-se um vetor de ganhos $K_{LQR} = [k_1, k_2, k_3]$. A lei de controle resultante é:

$$u_z(t) = -(k_1 z + k_2 \dot{z} + k_3 \delta_z) = -k_1 z - k_2 \dot{z} + k_3 \int (r_z - z) dt \quad (3.13)$$

3.3.2 Implementação Digital

A implementação do controle digital no microcontrolador ocorre em tempo discreto com período de amostragem T_s .

1. Discretização: Embora os ganhos K sejam calculados no domínio contínuo (usando o comando 'lqr' do MATLAB), eles são aplicados no loop de controle discreto, o que é válido considerando a alta taxa de amostragem do sistema em relação à sua dinâmica dominante ($f_s \gg BW_{sys}$). A atualização do integrador é feita por aproximação retangular (Euler):

$$\xi[k] = \xi[k-1] + (r[k] - y[k]) \cdot T_s \quad (3.14)$$

2. Saturação (Anti-Windup): Diferente do LQR teórico linear, o sistema real possui limites físicos nos atuadores (tensão máxima dos motores). A lei de controle implementada inclui saturação explícita:

$$u[k] = \text{sat}(-K\mathbf{x}_{aug}[k], u_{\min}, u_{\max}) \quad (3.15)$$

Para evitar o fenômeno de *windup* no integrador durante a saturação, a implementação utiliza fixação condicional (*clamping*): o integrador cessa de acumular erro se a saída do controlador estiver saturada e o erro tiver o mesmo sinal da saturação.

Algoritmo 2: Algoritmo Simplificado de Sintonia LQR Desacoplada

Entrada : Modelo do Subsistema, Pesos $q_{pos}, q_{vel}, q_{int}, \rho$

Saída : Ganhos $K = [k_p, k_d, k_i]$

Construir matrizes no espaço de estados aumentado A_{aug}, B_{aug} ;

Definir $Q = \text{diag}(q_{pos}, q_{vel}, q_{int})$ e $R = \rho$;

Resolver a Equação Algébrica de Riccati $A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$;

Calcular $K = R^{-1}B^T P$;

return K

3.4 Controle Preditivo Baseado em Modelo (MPC)

O MPC representa uma evolução significativa em relação ao LQR, pois incorpora explicitamente restrições operacionais (nos estados e nas entradas) e resolve um problema de otimização em tempo real a cada instante de amostragem. Esta capacidade de prever o comportamento futuro do sistema e tomar decisões ótimas respeitando limites físicos torna o MPC uma escolha poderosa para o controle de quadricópteros.

Então, considere o modelo discreto do sistema, obtido através da discretização do modelo contínuo linearizado com período de amostragem T_s :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = C\mathbf{x}_k + D\mathbf{u}_k \end{cases} \quad (3.16)$$

Onde $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas de controle e $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saídas controladas. Para quadricópteros, tipicamente a matriz de transmissão direta D é nula ($D = \mathbf{0}$), indicando que as entradas afetam as saídas apenas através da dinâmica dos estados.

A cada instante k , o controlador resolve um problema de otimização em horizonte finito N (horizonte de predição), determinando a sequência de controles ótimos $\Delta \mathbf{U}_k = \{\Delta \mathbf{u}_{k|k}, \Delta \mathbf{u}_{k+1|k}, \dots, \Delta \mathbf{u}_{k+N-1|k}\}$ que minimiza a seguinte função custo quadrática:

$$J(\mathbf{U}_k, \mathbf{x}_k) = \sum_{i=0}^{N-1} (\|\mathbf{y}_{k+i|k} - \mathbf{r}_{k+i}\|_Q^2 + \|\mathbf{u}_{k+i|k}\|_R^2 + \|\Delta \mathbf{u}_{k+i|k}\|_{R_\Delta}^2) + \|\mathbf{x}_{k+N|k} - \mathbf{x}_{ref}\|_P^2 \quad (3.17)$$

Sujeito às restrições de dinâmica (3.16) e restrições operacionais lineares:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\min} &\preceq \mathbf{u}_{k+i|k} \preceq \mathbf{u}_{\max} \\ \Delta \mathbf{u}_{\min} &\preceq \Delta \mathbf{u}_{k+i|k} \preceq \Delta \mathbf{u}_{\max} \\ \mathbf{y}_{\min} &\preceq \mathbf{y}_{k+i|k} \preceq \mathbf{y}_{\max} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Nesta formulação:

- $Q \succeq 0$ penaliza o erro de rastreamento das saídas.
- $R \succ 0$ penaliza a magnitude do controle.
- $R_\Delta \succ 0$ penaliza a taxa de variação do controle ($\Delta \mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}$), fundamental para garantir suavidade e evitar comandos oscilatórios de alta frequência.
- $P \succeq 0$ é o custo terminal para garantir estabilidade.

3.4.1 Implementação digital

Para viabilizar a solução em tempo real em hardware embarcado, o problema de otimização acima é reformulado como um Programa Quadrático estático. Esta transformação elimina as restrições de igualdade da dinâmica através da substituição recursiva das equações de estado, expressando todas as predições futuras apenas em função do estado inicial \mathbf{x}_k e da sequência de controles \mathbf{U} .

Definindo os vetores aumentados para o horizonte de predição N :

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_{k+1|k}^T, \dots, \mathbf{x}_{k+N|k}^T]^T, \quad \mathbf{U} = [\mathbf{u}_{k|k}^T, \dots, \mathbf{u}_{k+N-1|k}^T]^T$$

A dinâmica do sistema ao longo do horizonte pode ser escrita na forma matricial compacta:

$$\mathbf{X} = S_x \mathbf{x}_k + S_u \mathbf{U} \quad (3.19)$$

Onde S_x e S_u são as matrizes de predição construídas a partir de A e B :

$$S_x = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix}, \quad S_u = \begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ AB & B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & B \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Substituindo esta relação na função custo (3.17) e reorganizando os termos, obtém-se a forma padrão de um QP:

$$\min_{\mathbf{U}} \frac{1}{2} \mathbf{U}^T H \mathbf{U} + \mathbf{f}^T \mathbf{U} \quad (3.21)$$

sujeito a $A_{ineq} \mathbf{U} \preceq \mathbf{b}_{ineq}$.

As matrizes do QP são definidas explicitamente em função das matrizes de predição e dos parâmetros de ponderação. A matriz Hessiana $H \in \mathbb{R}^{mN \times mN}$ e o vetor linear $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{mN}$ capturam a função objetivo quadrática:

$$H = 2 (S_u^T \bar{Q} S_u + \bar{R} + D_\Delta^T \bar{R}_\Delta D_\Delta) \quad (3.22)$$

$$\mathbf{f} = 2S_u^T \bar{Q} (S_x \mathbf{x}_k - \mathbf{r}) + 2D_\Delta^T \bar{R}_\Delta \mathbf{d}_{init} \quad (3.23)$$

onde $\bar{Q} = \text{diag}(Q, \dots, P)$, $\bar{R} = \text{diag}(R, \dots, R)$ e $\bar{R}_\Delta = \text{diag}(R_\Delta, \dots, R_\Delta)$ são as matrizes de peso expandidas. A matriz D_Δ e o vetor \mathbf{d}_{init} implementam as diferenças finitas para penalização da taxa de variação de controle ($\Delta \mathbf{u}$).

As restrições de desigualdade são condensadas na matriz A_{ineq} e no vetor \mathbf{b}_{ineq} , empilhando-se as limitações de amplitude de entrada, taxa de variação e restrições de saída (estado):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_{mN} \\ -I_{mN} \\ D_\Delta \\ -D_\Delta \\ S_u \\ -S_u \end{bmatrix}}_{A_{ineq}} \mathbf{U} \preceq \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{\max} \\ -\mathbf{U}_{\min} \\ \Delta \mathbf{U}_{\max} + E \mathbf{u}_{k-1} \\ \Delta \mathbf{U}_{\max} - E \mathbf{u}_{k-1} \\ \mathbf{Y}_{\max} - S_x \mathbf{x}_k \\ -\mathbf{Y}_{\min} + S_x \mathbf{x}_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_{ineq}} \quad (3.24)$$

Esta formulação matricial explicita como todas as restrições operacionais são mapeadas para um único conjunto de desigualdades lineares, permitindo que solvers como o MOSEK encontrem a solução global em tempo polinomial.

Algoritmo 3: Controlador MPC com Formulação QP Explícita

Entrada : Estado atual \mathbf{x}_k , Referência futura $\mathbf{r}_{k\dots k+N}$, Controle anterior \mathbf{u}_{k-1}

Saída : Controle ótimo \mathbf{u}_k

/* Construção do QP (Offline/Setup) */

Calcular matrizes de predição S_x, S_u usando modelo (A, B) ;

Calcular Hessiana $H = S_u^T \bar{Q} S_u + \bar{R}$;

Definir matriz de restrições A_{ineq} (limites de entrada e taxa);

/* Execução em Tempo Real */

Calcular vetor linear $f(\mathbf{x}_k, \mathbf{r}) = 2(S_x \mathbf{x}_k - \mathbf{r})^T \bar{Q} S_u$;

Atualizar vetor de limites $\mathbf{b}_{ineq}(\mathbf{u}_{k-1})$ com estado anterior para restrições de taxa;

Resolver QP: $\mathbf{U}^* = \arg \min_{\mathbf{U}} \frac{1}{2} \mathbf{U}^T H \mathbf{U} + f^T \mathbf{U}$ sujeito a $A_{ineq} \mathbf{U} \preceq \mathbf{b}_{ineq}$;

Extrair primeira ação de controle: $\mathbf{u}_k = \mathbf{U}^*(1 : m)$;

return \mathbf{u}_k

4 CONTROLE BASEADO EM DADOS

O projeto de leis de controle para sistemas dinâmicos tradicionalmente segue uma abordagem em duas etapas: primeiro, obtém-se um modelo matemático do sistema através de princípios físicos ou técnicas de identificação de sistemas e, em seguida, utiliza-se este modelo para projetar o controlador (ASTRÖM; WITTENMARK, 1995). Esta metodologia fundamentou grande parte dos avanços em teoria de controle e permanece como paradigma dominante na indústria e academia.

Entretanto, a abordagem baseada em modelos apresenta limitações significativas em cenários práticos. A obtenção de modelos precisos requer conhecimento detalhado da física do sistema, o que nem sempre está disponível. Então, mesmo quando as equações governantes são conhecidas, a identificação de parâmetros pode ser trabalhosa e sujeita a erros (ASTRÖM; WITTENMARK, 1995). Além disso, sistemas complexos frequentemente exibem comportamentos que são difíceis de capturar em modelos paramétricos tradicionais, como não linearidades, variações temporais e acoplamentos entre subsistemas (HOU; WANG, 2013).

Diante dessas limitações e com a crescente disponibilidade de dados de medição, além do avanço significativo do poder computacional, houve o impulso do desenvolvimento de abordagens alternativas. Tais métodos utilizam dados diretamente para o projeto de controladores, eliminando a necessidade de identificar explicitamente um modelo paramétrico do sistema (HOU; WANG, 2013). Estas abordagens, conhecida como controle baseado em dados, oferecem vantagens importantes: simplicidade conceitual ao eliminar a etapa intermediária de identificação de modelos (MARKOVSKY; DÖRFLER, 2021), robustez a incertezas de modelagem, pois ao evitar a parametrização explícita, reduzem-se os erros propagados por suposições simplificadoras (COULSON *et al.*, 2019a), adaptabilidade, uma vez que podem ser mais facilmente atualizados quando as características do sistema mudam (DÖRFLER *et al.*, 2022) e aplicabilidade a sistemas onde a modelagem é impraticável ou quando existem fenômenos difíceis de capturar (HOU; WANG, 2013; ELOKDA *et al.*, 2021).

Então, a ideia de utilizar dados diretamente para controle não é novidade. Técnicas como controle adaptativo e identificação recursiva exploram dados em tempo real desde a década de 1960. Entretanto, os últimos anos testemunharam um ressurgimento do interesse em métodos puramente baseado em dados, impulsionado por avanços teóricos e por sistemas autônomos (MARKOVSKY; DÖRFLER, 2021).

Dentro do amplo espectro de abordagens baseada em dados, pode-se distinguir

diferentes paradigmas conforme o grau de dependência do modelo.

- **Abordagem indireta:** Os dados são utilizados para obter um modelo que, posteriormente, serve de base para o projeto do controlador. Esta separação pode introduzir perdas de informação, pois o modelo identificado é uma aproximação dos dados originais, e o critério não necessariamente coincide com os objetivos de controle ().
- **Abordagem direta:** Busca mapear os dados diretamente aos parâmetros do controlador, sem a etapa intermediária de identificação. Exemplos clássicos incluem o *Virtual Reference Feedback Tuning* (VRFT) (CAMPI *et al.*, 2002) e métodos de iteração de política em aprendizado por reforço. Estas abordagens têm vantagem de otimizar diretamente os objetivos de controle, mas podem ser limitadas a classes específicas de controladores.
- **Representação não-paramétrica:** Essa abordagem está enraizada na teoria comportamental de sistemas, na qual o sistema dinâmico é caracterizado pelo conjunto de todas as suas trajetórias admissíveis, chamado de comportamento, que pode ser completamente parametrizado por dados coletados do sistema, desde que satisfeitas certas condições de excitação (WILLEMS *et al.*, 2005; COULSON *et al.*, 2019a; MARKOVSKY; DÖRFLER, 2021). O DeePC representa uma aplicação direta desta teoria ao problema de controle preditivo.

4.1 Teoria comportamental de sistemas

A teoria comportamental de sistemas, desenvolvida por Jan C. Willems a partir da década de 1980, oferece uma perspectiva distinta para a modelagem de sistemas dinâmicos, pois diferentemente da abordagem clássica baseada em espaço de estados ou funções de transferência, esta teoria caracteriza um sistema pelo conjunto de todas as suas trajetórias admissíveis (WILLEMS, 1986; POLDERMAN; WILLEMS, 1998).

Definição 4.1 (Sistema Dinâmico). Um sistema dinâmico Σ é definido pela tripla $(\mathbb{T}, \mathbb{W}, \mathfrak{B})$, onde $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ é o conjunto temporal (tipicamente \mathbb{Z} para sistemas discretos), \mathbb{W} é o espaço de sinais (universo de valores que as variáveis podem assumir), e $\mathfrak{B} \subseteq \mathbb{W}^{\mathbb{T}}$ é o comportamento, o conjunto de todas as trajetórias admissíveis do sistema (WILLEMS, 2007).

O comportamento \mathfrak{B} é o objeto central desta teoria. Ele captura todas as relações entre as variáveis do sistema sem impor uma estrutura de entrada-saída. Então, qualquer modelo matemático, seja em espaço de estados, função de transferência ou equações diferenciais, pode

ser visto como uma representação do comportamento (WILLEMS, 2007).

Para sistemas lineares invariantes no tempo (LTI) em tempo discreto, o comportamento pode ser descrito por equações de diferenças:

$$R_0 w(t) + R_1 w(t+1) + \dots + R_L w(t+L) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{Z} \quad (4.1)$$

Onde $w(t) \in \mathbb{R}^q$ representa o vetor de variáveis manifestas (entradas e saídas) e $R_i \in \mathbb{R}^{g \times q}$ são matrizes de coeficientes. A ordem do sistema, denotada por $\ell(\mathfrak{B})$, é o menor valor de L para o qual existe tal representação (WILLEMS, 2007).

Definição 4.2 (Comportamento Restrito). Para um sistema com comportamento \mathfrak{B} , o comportamento restrito de comprimento L , denotado \mathfrak{B}_L , é o conjunto de todas as trajetórias de comprimento L (MARKOVSKY; DÖRFLER, 2021):

$$\mathfrak{B}_L := \{\text{col}(w(0), w(1), \dots, w(L-1)) : w \in \mathfrak{B}\} \quad (4.2)$$

Uma propriedade fundamental dos sistemas LTI é que \mathfrak{B}_L forma um subespaço vetorial de \mathbb{R}^{qL} , cuja dimensão é limitada por $\dim(\mathfrak{B}_L) \leq mL + n$, onde m é o número de entradas, n é a ordem do sistema, e a igualdade vale para L suficientemente grande (MARKOVSKY; DÖRFLER, 2021).

Para que os dados coletados de um sistema contenham informação suficiente sobre sua dinâmica, é necessário que o sinal de entrada seja suficientemente rico. Esta noção é formalizada pelo conceito de excitação persistente, que requer a introdução da matriz de Hankel (WILLEMS *et al.*, 2005).

Definição 4.3 (Matriz de Hankel). Dado um sinal $u = \text{col}(u(0), u(1), \dots, u(T-1))$ com $u(t) \in \mathbb{R}^m$, a matriz de Hankel de profundidade L é definida como (WILLEMS *et al.*, 2005):

$$\mathcal{H}_L(u) := \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & \dots & u(T-L) \\ u(1) & u(2) & \dots & u(T-L+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(L-1) & u(L) & \dots & u(T-1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mL \times (T-L+1)} \quad (4.3)$$

A matriz de Hankel organiza os dados em janelas deslizantes de comprimento L , onde cada coluna representa uma subsequência consecutiva do sinal original. Esta estrutura é fundamental para capturar a dinâmica temporal do sistema nos dados.

Definição 4.4 (Excitação Persistente). Um sinal $u = \text{col}(u(0), u(1), \dots, u(T-1)) \in \mathbb{R}^{mT}$ é dito persistentemente excitante de ordem L se a matriz de Hankel associada possui posto completo por linhas, ou seja, $\text{posto}(\mathcal{H}_L(u)) = mL$ (WILLEMS *et al.*, 2005).

Portanto, para que $\mathcal{H}_L(u)$ tenha posto mL , é necessário que o número de colunas seja pelo menos mL , resultando na condição $T \geq (m+1)L - 1$ (WILLEMS *et al.*, 2005). Essa condição geralmente é obtida com sinais que tipicamente satisfazem a condição de excitação persistente, incluindo ruído branco Gaussiano, *Pseudo-Random Binary Sequence* (PRBS) e sinais multi-senoidais com frequências distintas (COULSON *et al.*, 2019a).

4.2 Lema fundamental de Willems

O lema fundamental, estabelece que os dados coletados de um sistema LTI controlável podem parametrizar completamente seu comportamento, desde que a entrada seja persistentemente excitante.

Teorema 4.1 (Lema Fundamental de Willems). *Conforme (WILLEMS et al., 2005), considere um sistema LTI Σ com m entradas, p saídas e ordem n , descrito pela representação em espaço de estados:*

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.4)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (4.5)$$

Suponha que o sistema seja controlável e que uma trajetória de dados (u_d, y_d) de comprimento T tenha sido coletada, onde u_d é persistentemente excitante de ordem $L+n$.

Então, $[\bar{u}, \bar{y}]^\top$ é uma trajetória de Σ de comprimento L se, e somente se, existe $g \in \mathbb{R}^{T-L+1}$ tal que:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}_L(u_d) \\ \mathcal{H}_L(y_d) \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Este resultado é notável, pois conhecendo uma única trajetória suficientemente rica em um sistema LTI, pode-se reconstruir qualquer outra trajetória do sistema como combinação linear de trechos dos dados observados. O vetor \mathbf{g} contém os coeficientes desta combinação e sua existência é obtida através de uma otimização que satisfaça as condições anteriormente definidas, além de dispensar o conhecimento das matrizes $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$.

Para aplicação prática do lema fundamental, três requisitos devem ser satisfeitos:

1. O sistema deve ser controlável;
2. O sinal de entrada u_d deve ser persistentemente excitante de ordem $L + n$;
3. O número de amostras T deve satisfazer a condição: $T \geq (m + 1)(L + n) - 1$. Onde $L = T_{\text{ini}} + N$ é o horizonte total

Na prática, recomenda-se utilizar significativamente mais dados do que o mínimo teórico, tipicamente cinco ou dez vezes dados a mais, pois isso melhora a robustez a ruído e permite que a redundância atue como regularização implícita (COULSON, 2022).

No entanto, o lema fundamental assume dados ideais, sem ruído de medição, e em aplicações práticas, os dados coletados são inevitavelmente corrompidos por perturbações. Neste caso, a igualdade exata geralmente não possui solução, pois a trajetória desejada pode não pertencer ao espaço coluna da matriz de Hankel ruidosa. Portanto, diversas estratégias foram propostas para lidar com esta situação (MARKOVSKY; DÖRFLER, 2021):

- Relaxação via variáveis de folga (COULSON *et al.*, 2019b);
- Regularização do vetor g (DÖRFLER *et al.*, 2022);
- Formulações de otimização distribucionalmente robusta (COULSON *et al.*, 2021).

Estas extensões são formalizadas na próxima seção ao apresentar a formulação completa do algoritmo DeePC regularizado.

4.3 Algoritmo DeePC

O DeePC, proposto por (COULSON *et al.*, 2019a), combina o lema fundamental de Willems com a estratégia do MPC. O resultado é um controlador que opera em horizonte deslizante, utilizando diretamente os dados coletados para prever trajetórias futuras e calcular ações de controle ótimas.

4.3.1 Formulação do Problema

Considere um sistema LTI discreto com m entradas $u(t) \in \mathbb{R}^m$ e p saídas $y(t) \in \mathbb{R}^p$. O objetivo do controle preditivo é determinar, a cada instante t , uma sequência de entradas futuras que minimize um custo de rastreamento de referência, respeitando restrições operacionais.

Suponha que uma trajetória de dados (u_d, y_d) de comprimento T tenha sido coletada previamente do sistema, satisfazendo as condições do Lema Fundamental. As matrizes de Hankel são particionadas em componentes passadas e futuras:

$$\begin{bmatrix} U_p \\ U_f \end{bmatrix} := \mathcal{H}_{T_{\text{ini}}+N}(u_d), \quad \begin{bmatrix} Y_p \\ Y_f \end{bmatrix} := \mathcal{H}_{T_{\text{ini}}+N}(y_d) \quad (4.7)$$

Nesta partição, T_{ini} representa o horizonte de condições iniciais, responsável por capturar o histórico recente do sistema, enquanto N define o horizonte de predição. As matrizes U_p e Y_p correspondem às T_{ini} primeiras linhas de blocos, representando o passado, enquanto U_f e Y_f contêm as N linhas seguintes, correspondendo ao futuro.

O parâmetro T_{ini} deve ser escolhido de forma que $T_{\text{ini}} \geq \ell(\mathfrak{B})$, onde $\ell(\mathfrak{B})$ é a ordem do sistema. Na prática, como a ordem exata pode ser desconhecida, utiliza-se uma estimativa conservadora (ELOKDA *et al.*, 2021).

4.3.2 DeePC para Sistemas Determinísticos

Para um sistema LTI determinístico, o problema DeePC no instante t é formulado como:

$$\underset{g, u, y}{\text{minimize}} \quad \sum_{k=0}^{N-1} (\|y_k - r_k\|_Q^2 + \|u_k\|_R^2) \quad (4.8a)$$

$$\text{subject to} \quad \begin{bmatrix} U_p \\ Y_p \\ U_f \\ Y_f \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} u_{\text{ini}} \\ y_{\text{ini}} \\ u \\ y \end{bmatrix}, \quad (4.8b)$$

$$u_{\text{min}} \leq u_k \leq u_{\text{max}}, \quad \forall k, \quad (4.8c)$$

$$y_{\text{min}} \leq y_k \leq y_{\text{max}}, \quad \forall k \quad (4.8d)$$

Neste problema de otimização, o vetor $g \in \mathbb{R}^{T-T_{\text{ini}}-N+1}$ contém os coeficientes que parametrizam a trajetória como combinação linear das colunas de Hankel. As variáveis $u = \text{col}(u_0, \dots, u_{N-1})$ e $y = \text{col}(y_0, \dots, y_{N-1})$ representam as trajetórias preditas de entrada e saída, respectivamente. Os vetores u_{ini} e y_{ini} correspondem às T_{ini} medições mais recentes, enquanto r denota a referência a ser rastreada. As matrizes $Q \succeq 0$ e $R \succ 0$ definem as ponderações do custo, e as restrições finais impõem limites operacionais.

A restrição de igualdade garante que a trajetória completa $(u_{\text{ini}}, y_{\text{ini}}, u, y)$ seja consistente com o comportamento do sistema, conforme estabelecido pelo Lema Fundamental. As condições iniciais $(u_{\text{ini}}, y_{\text{ini}})$ desempenham papel crucial ao conectar o passado recente com a predição futura, permitindo que o controlador reconheça o estado atual do sistema sem necessitar de um observador de estados.

Portanto, para sistemas LTI determinísticos, foi demonstrado em (COULSON *et al.*, 2019a) que o problema (4.8) produz exatamente a mesma sequência de controle que o MPC baseado em modelo, desde que os dados satisfaçam as condições de excitação persistente. Logo, esta equivalência teórica confere ao DeePC as mesmas garantias de estabilidade e desempenho do MPC clássico.

4.3.3 *DeePC Regularizado*

Em aplicações práticas, os dados coletados são inevitavelmente corrompidos por ruído de medição, e o sistema pode apresentar comportamento levemente não-linear. Nestas condições, a restrição de igualdade em (4.8) pode não possuir solução viável, pois as condições iniciais medidas $(u_{\text{ini}}, y_{\text{ini}})$ podem não pertencer exatamente ao espaço coluna da matriz de Hankel ruidosa.

Para contornar este problema, em (COULSON *et al.*, 2019b) propuseram uma versão regularizada do DeePC, que introduz flexibilidade através de variáveis de folga e termos de penalização:

$$\underset{g, \sigma, u, y}{\text{minimize}} \quad \sum_{k=0}^{N-1} (\|y_k - r_k\|_Q^2 + \|u_k\|_R^2) + \lambda_s \|\sigma\|_2^2 + \lambda_g \|g\|_2^2 \quad (4.9a)$$

$$\text{subject to} \quad \begin{bmatrix} U_p \\ Y_p \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} u_{\text{ini}} \\ y_{\text{ini}} \end{bmatrix} + \sigma, \quad (4.9b)$$

$$\begin{bmatrix} U_f \\ Y_f \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}, \quad (4.9c)$$

$$u_{\min} \leq u_k \leq u_{\max}, \quad \forall k, \quad (4.9d)$$

$$y_{\min} \leq y_k \leq y_{\max}, \quad \forall k \quad (4.9e)$$

onde $\sigma \in \mathbb{R}^{(m+p)T_{\text{ini}}}$ é o vetor de variáveis de folga, e $\lambda_s, \lambda_g > 0$ são hiperparâmetros de regularização.

Diante disso, os termos adicionais na função objetivo possuem interpretações importantes que fundamentam seu uso prático. A variável de folga σ permite pequenas violações na consistência das condições iniciais, relaxando a exigência de que as medições pertençam exatamente ao espaço coluna da matriz de Hankel. O termo $\lambda_s \|\sigma\|_2^2$ penaliza estas violações, forçando σ a permanecer pequeno. Na prática, valores elevados de λ_s impõem maior fidelidade às medições atuais, o que é desejável quando o ruído é baixo, por outro lado, valores menores permitem maior flexibilidade, aumentando a robustez em cenários mais ruidosos.

De forma complementar, a regularização $\lambda_g \|g\|_2^2$ promove soluções onde os coeficientes do vetor g são pequenos e uniformemente distribuídos. Este termo tem o efeito de suavizar a combinação linear das colunas de Hankel, evitando que a solução dependa excessivamente de poucas trajetórias específicas presentes nos dados. Em (COULSON *et al.*, 2021), demonstrou-se que esta regularização pode ser interpretada como uma forma de otimização distribucionalmente robusta: o termo $\lambda_g \|g\|_2^2$ corresponde a considerar uma família de distribuições de ruído compatíveis com os dados observados e otimizar para o pior caso dentro desta família. Esta interpretação fornece garantias probabilísticas de desempenho mesmo quando a distribuição exata do ruído é desconhecida.

4.3.4 Estratégia de Horizonte Deslizante

Assim como o MPC convencional, o DeePC opera segundo uma estratégia de horizonte deslizante, também conhecida como *receding horizon*. A cada instante de amostragem

t , o controlador coleta as T_{ini} medições mais recentes de entrada e saída para formar os vetores de condições iniciais $(u_{\text{ini}}, y_{\text{ini}})$. Em seguida, o problema de otimização (4.9) é resolvido, produzindo uma sequência ótima de entradas $u^* = (u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*)$ ao longo do horizonte de predição.

Embora o otimizador calcule toda a sequência futura, apenas a primeira entrada u_0^* é efetivamente aplicada ao sistema. No instante seguinte $t + 1$, o processo se repete com as novas medições disponíveis, deslocando o horizonte de planejamento uma unidade de tempo para frente. Esta estratégia permite que o controlador reaja continuamente a perturbações e erros de predição, recalculando o plano de controle com base nas informações mais recentes. Além disso, a reotimização periódica confere robustez implícita a incertezas não tratadas explicitamente na formulação.

4.3.5 Formulação como Programa Quadrático (QP)

Uma característica fundamental do DeePC é que o problema de otimização de custo e restrições lineares (4.9) pode ser reescrito como um programa quadrático (QP - Convex Quadratic Program) na forma padrão. Definindo o vetor de decisão aumentado z que concatena todas as variáveis do problema:

$$z := \begin{bmatrix} g \\ \sigma \\ u \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_z} \quad (4.10)$$

o problema assume a forma canônica utilizada pela maioria dos solvers numéricos:

$$\underset{z}{\text{minimize}} \quad \frac{1}{2} z^\top H z + f^\top z \quad (4.11a)$$

$$\text{subject to} \quad A_{\text{eq}} z = b_{\text{eq}}, \quad (4.11b)$$

$$A_{\text{ineq}} z \leq b_{\text{ineq}} \quad (4.11c)$$

As matrizes do problema QP são construídas estruturalmente a partir dos parâmetros de projeto:

- **Hessiana H :** É uma matriz bloco-diagonal positiva definida contendo as ponderações de

cada termo da função objetivo:

$$H = \begin{bmatrix} \lambda_g I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_s I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q} \end{bmatrix}$$

onde $\bar{R} = \text{diag}(R, \dots, R)$ e $\bar{Q} = \text{diag}(Q, \dots, Q)$ representam, respectivamente, as matrizes de peso de controle e erro de rastreamento expandidas para todo o horizonte de predição N . Isso assegura a convexidade estrita do problema em relação às variáveis de decisão, garantindo solução global única.

- **Restrições de Igualdade** ($A_{\text{eq}}, b_{\text{eq}}$): Impõem a dinâmica do sistema baseada em dados (Lema Fundamental).

$$\begin{bmatrix} U_p & -I & 0 & 0 \\ Y_p & 0 & 0 & 0 \\ U_f & 0 & -I & 0 \\ Y_f & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ \sigma \\ u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{\text{ini}} \\ y_{\text{ini}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **Restrições de Desigualdade** ($A_{\text{ineq}}, b_{\text{ineq}}$): Definem os limites operacionais (saturação dos atuadores e envelope de voo) nas variáveis u e y .

Solvers de QP modernos, como OSQP, MOSEK e quadprog, exploram a esparsidade dessas matrizes para resolver o problema em tempo compatível com aplicações de controle em tempo real (tipicamente na ordem de milissegundos).

Em síntese, o Algoritmo 4 sintetiza os passos do DeePC regularizado. A fase de preparação é executada *offline* e consiste na construção das matrizes de Hankel U_p, Y_p, U_f, Y_f a partir dos dados coletados. Durante a operação em malha fechada (*online*), o controlador executa o laço de controle a cada instante de amostragem.

Com isso, o DeePC representa uma alternativa promissora ao MPC baseado em modelo, especialmente para sistemas onde a obtenção de modelos paramétricos precisos é difícil ou custosa. Logo, ao substituir o modelo explícito (A, B, C, D) por trajetórias de dados brutos (U, Y) , o algoritmo elimina a etapa de identificação de sistemas, simplificando o fluxo de projeto. Por fim, a introdução da regularização na função objetivo confere ao método robustez prática a ruído de medição e capacidade de lidar com dinâmicas não modeladas ou levemente não-lineares, tornando-o aplicável a sistemas físicos reais.

Algoritmo 4: DeePC Regularizado

Entrada : Dados (u_d, y_d) , parâmetros $T_{\text{ini}}, N, \lambda_s, \lambda_g, Q, R$

Entrada : Restrições $u_{\text{min}}, u_{\text{max}}, y_{\text{min}}, y_{\text{max}}$

Construir matrizes de Hankel particionadas: U_p, U_f, Y_p, Y_f ;

para cada instante de controle t faça

 Coletar medições recentes: $u_{\text{ini}} \leftarrow [u(t - T_{\text{ini}}), \dots, u(t - 1)]$;

 Coletar medições recentes: $y_{\text{ini}} \leftarrow [y(t - T_{\text{ini}}), \dots, y(t - 1)]$;

 Obter referência futura: $r \leftarrow [r(t), \dots, r(t + N - 1)]$;

 Resolver problema de otimização (4.9) através da formulação QP (4.11) \rightarrow obter

u^*, y^*, g^*, σ^* ;

 Aplicar primeira entrada: $u(t) \leftarrow u_0^*$;

fim

5 METODOLOGIA

Este capítulo descreve a metodologia empregada para avaliar o desempenho do controlador DeePC aplicado ao rastreamento de trajetória de um quadricóptero em relação à técnicas de controles clássicas. São apresentados o ambiente de simulação, o conjunto de dados utilizado, as trajetórias de teste projetadas, bem como a implementação detalhada de todos os controladores comparados e os protocolos de avaliação que garantem comparações justas e reproduzíveis.

5.1 Plataforma e ambiente de simulação

A plataforma adotada é baseada no *frame* S500, um quadricóptero amplamente reconhecido pela versatilidade em aplicações de pesquisa e carga útil. Sua estrutura em configuração X oferece simetria geométrica, o que simplifica a modelagem dos parâmetros inerciais e aerodinâmicos.

Figura 10 – Visão geral da plataforma S500



A escolha do S500 justifica-se pela compatibilidade nativa com o ecossistema de código aberto da PX4, permitindo acesso direto às malhas de controle internas e externas. Além disso, a capacidade de carga excedente de 500 gramas possibilita a futura integração de sensores para navegação autônoma.

Tabela 3 – Parâmetros físicos da plataforma simulada (S500 Frame).

Parâmetro	Descrição / Valor
Massa Total	1,8 kg (incluindo bateria)
Dimensão (Diagonal)	500 mm
Motorização	4x Brushless 2212 (920 KV)
Hélices	10 × 4.5"
Bateria	LiPo 4S (5200 mAh)
Relação Empuxo/Peso	~ 2:1
Autonomia de Voo	15 a 20 minutos
Carga Útil Adicional	Até 500 g

Além disso, para a validação do sistema, empregou-se o modelo não linear completo com os seis graus de liberdade. Este modelo contempla as dinâmicas translacionais e rotacionais, incluindo acoplamentos giroscópicos e as limitações físicas dos atuadores. Dito isso, a simulação foi implementada em ambiente MATLAB/Simulink, utilizando o solver *ode45* (Runge-Kutta de 4^a/5^a ordem).

Tabela 4 – Parâmetros do Modelo de Simulação.

Parâmetro	Valor / Método
Período de Amostragem (T_s)	0,0025 s (400 Hz)
Atraso Computacional	~ 5 ms
Saturação de Tração (T)	$0 \leq T \leq 18$ N
Saturação de Torque (τ)	$ \tau_i \leq 2.0$ Nm
Integração Numérica	Runge-Kutta (ode45)
Configuração de Malha	Compatível com Autopilot PX4

5.2 Conjunto de dados para treinamento do DeePC

O controlador DeePC, por sua natureza puramente baseada em dados, requer um conjunto de medições de entrada-saída do sistema real para construção das matrizes de Hankel que parametrizam implicitamente a dinâmica. Com isso, a qualidade e consistência desses dados são determinantes para o desempenho da malha fechada. Neste trabalho, utilizou-se o IDSIA Nano-Drone System Identification Benchmark (BUSETTO *et al.*, 2025), um *dataset* público de referência mantido pelo *Dalle Molle Institute for Artificial Intelligence Research*.

Esse conjunto de dados trás um *benchmark* que consiste em trajetórias experimentais coletadas em um ambiente controlado equipado com um sistema de captura de movimento *OptiTrack* de alta precisão (erro de posição menor que 0.5 mm) operando a 200 Hz, com o uso da plataforma de coleta sendo o nano-drone *Crazyfile* em voos programados especificamente para identificação de sistemas.

Portanto, a escolha deste conjunto de dados justifica-se pela sua alta excitação dinâmica, já que as trajetórias incluem manobras agressivas que exploram todo o envelope de voo do veículo, garantindo a condição de persistência de excitação exigida pelo lema fundamental de Willems. Logo, os dados contêm:

- **Entradas** ($\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$): Composto de comandos PWM enviados aos quatro motores, convertidos posteriormente para força e torque;
- **Saídas** ($\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{12}$): Composto pelo estado completo do veículo (posições, velocidades, atitude e taxas angulares);
- **Frequência**: Composto por dados brutos amostrados a 500 Hz, capturando a dinâmica rápida dos motores e da estrutura.

5.2.1 Normalização para o S500

Os dados foram adaptados para controlar o modelo do S500 através de um processo de escalonamento dimensional baseado em semelhança dinâmica, pois ambos os veículos compartilham a mesma topologia de atuadores e dinâmica de corpo rígido. O processo de adaptação consistiu em:

- **Normalização**: As entradas originais $\mathbf{u}_{raw} \in [0, 65535]$ foram normalizadas para o intervalo $[0, 1]$;
- **Escalonamento de empuxo**: A aceleração vertical a_z foi mapeada para a força necessária no S500:

$$F_{S500} = \frac{m_{S500}}{m_{Crazyfile}} \cdot F_{Crazyfile} \quad (5.1)$$

- **Escalonamento de torque**: As taxas angulares foram mantidas, implicando que os torques aplicados foram escalonados pela razão das inércias:

$$\tau_{S500} = \frac{J_{S500}}{J_{Crazyfile}} \cdot \tau_{Crazyfile} \quad (5.2)$$

Essa abordagem permite utilizar a riqueza dos dados de voo real para treinar o controlador do S500, assumindo que a dinâmica adimensional são similares.

5.2.2 Pipeline de pré-processamento dos dados

Antes da construção das matrizes de Hankel, os dados brutos são submetidos a um tratamento para garantir a consistência numérica e remover artefatos que poderiam desestabilizar o QP. O processo compreende cinco etapas sequenciais:

1. **Remoção de transientes:** Inicia-se com a eliminação dos primeiros e últimos dois segundos de cada voo, visando remover efeitos de solo na decolagem e pouso, mantendo apenas o regime de voo livre.
2. **Amostragem sincronizada:** Os dados originais (500 Hz) foram subamostrados para a frequência de controle do projeto ($f_c = 100\text{Hz}$) utilizando interpolação linear para garantir o alinhamento temporal entre entrada e saída.
3. **Filtragem passa-baixas:** Ocorre a aplicação de um filtro de *Butterworth* de 2º ordem com frequência de corte de $f_c = 20\text{ Hz}$. Esta etapa é crucial para remover ruído de vibração dos motores e quantização dos sensores, que aparecem em frequências muito acima da largura de banda de controle do quadricóptero.
4. **Seleção de janela:** Seleção de um horizonte contíguo de $T_d = 300$ amostras que apresente a maior variância nos eixos de rotação. Este tamanho foi escolhido como um compromisso entre riqueza de informação (necessária para predição de longo prazo) e complexidade computacional do problema de otimização (o tamanho das matrizes de restrição cresce linearmente com T_d).
5. **Normalização Z-score:** Para melhorar o condicionamento numérico da matriz Hessiana, todas as variáveis (entradas e saídas) foram normalizadas para ter média zero e desvio padrão unitário:

$$\tilde{u}(t) = \frac{u(t) - \mu_u}{\sigma_u}, \quad \tilde{y}(t) = \frac{y(t) - \mu_y}{\sigma_y} \quad (5.3)$$

Esta normalização é revertida na saída do controlador para aplicação do sistema real.

A matriz de Hankel final é construída a partir destes dados processados, particionada em componentes passadas ($T_{ini} = 10$) e futuras ($N = 20$), formando a base de conhecimento para o algoritmo DeePC.

5.3 Implementação das estratégias de controle

Quatro estratégias de controle distintas foram implementadas para compor o estudo comparativo: um controlador clássico (PID), dois baseados em modelo (LQR e MPC) e um baseado em dados (DeePC). A implementação de cada algoritmo priorizou o desempenho máximo permitido pelas restrições físicas do veículo.

Antes de proceder à comparação entre controladores nos cenários de teste, é essencial validar cada implementação individualmente. Esta seção detalha, para cada controlador: (i) a metodologia de projeto e sintonia dos parâmetros; (ii) os valores numéricos finais de todos os ganhos e pesos; e (iii) a validação por meio de respostas a sinais elementares (degrau, hover) que confirmam a estabilidade e o comportamento dinâmico esperado.

5.3.1 Controlador PID em Cascata com Sintonia por PSO

O controlador PID foi estruturado em uma arquitetura em cascata com três malhas concêntricas, conforme a hierarquia típica do PX4. A malha mais interna (atitude) opera sobre os ângulos de Euler (ϕ, θ), convertendo erros angulares em torques de corpo (τ_x, τ_y). A malha intermediária (posição horizontal) converte erros de posição x e y em ângulos de referência desejados ($\bar{\theta}, \bar{\phi}$), explorando o acoplamento gravitacional $a_x \approx g \cdot \theta$. A malha externa (altitude) controla diretamente a força de empuxo T para rastrear a referência vertical z_{ref} .

Cada malha implementa um controlador PID discreto com as seguintes características adicionais:

- **Anti-windup por saturação de integrador:** Os termos integrais são limitados a faixas pré-definidas para evitar acúmulo excessivo durante saturação dos atuadores.
- **Feedforward de velocidade:** Um termo de pré-alimentação $K_{ff} \cdot \dot{r}(t)$ é adicionado a todas as malhas para melhorar o rastreamento de trajetórias dinâmicas, onde $\dot{r}(t)$ é a velocidade da referência estimada por diferenciação numérica.
- **Saturação de saída:** Os comandos de atitude são limitados a $|\phi_{des}|, |\theta_{des}| \leq 28.6$ (0.5 rad).

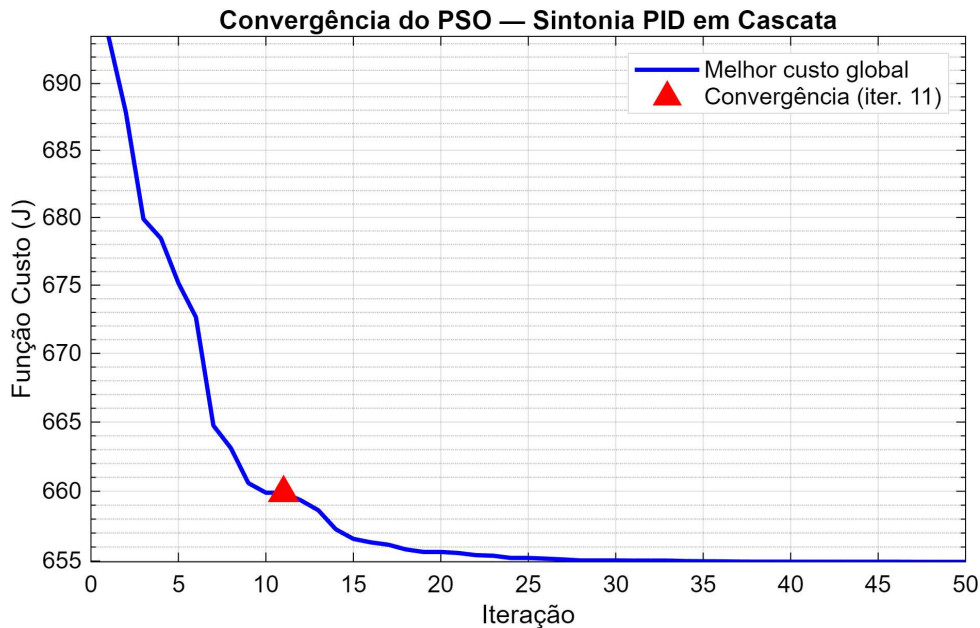
5.3.1.1 Sintonia via Otimização por Enxame de Partículas

Diferente de abordagens heurísticas clássicas (e.g., Ziegler-Nichols), os 10 parâmetros livres do controlador (K_p, K_i, K_d para cada malha, mais K_{ff}) foram obtidos por meio da otimização PSO, um algoritmo metaheurístico bio-inspirado que explora o espaço de busca

através de um enxame de partículas, cada uma representando um vetor candidato de ganhos $\theta = [K_{p,z}, K_{i,z}, K_{d,z}, K_{p,att}, K_{i,att}, K_{d,att}, K_{p,pos}, K_{i,pos}, K_{d,pos}, K_{ff}]^T$. A função custo utilizada combina o erro RMS de rastreamento e o esforço de controle, conforme a Equação 3.8

O processo de otimização foi executado em cascata multi-trajetória: os ganhos foram inicialmente otimizados para uma trajetória quadrada (200 iterações), e posteriormente refinados sequencialmente sobre trajetórias circular, elíptica e lemniscata (1 iteração cada, partindo do melhor resultado anterior). A Figura 11 ilustra a convergência do algoritmo durante a fase principal de otimização, onde o custo global reduziu significativamente nas primeiras 30 iterações, estabilizando em um valor final de $J^* = 654.9$.

Figura 11 – Convergência do PSO durante a sintonia dos ganhos PID. O custo global J reduz rapidamente nas primeiras iterações e estabiliza, indicando convergência para um ótimo local robusto.



5.3.1.2 Parâmetros Finais

A Tabela 5 apresenta os ganhos PID finais obtidos após o processo completo de otimização com PSO. Os valores refletem o compromisso entre rastreamento agressivo (ganhos proporcionais elevados) e estabilidade (ganhos derivativos que amortecem oscilações). Enquanto a abela 6 detalha os limites de saturação aplicados aos sinais internos do controlador, essenciais para garantir a segurança operacional e prevenir o windup do integrador.

Tabela 5 – Ganhos PID otimizados via PSO para a arquitetura em cascata.

Malha de Controle	K_p	K_i	K_d
Altitude (z)	10,00	0,01	1,614
Atitude (ϕ, θ)	11,85	0,15	0,346
Posição (x, y)	25,00	0,399	4,580
Feedforward: $K_{ff} = 0,10$			

Tabela 6 – Limites de saturação do controlador PID em cascata.

Variável	Limite Inferior	Limite Superior
Empuxo total (T)	0 N	0,794 N
Ângulos comandados (ϕ, θ)	$-28,6^\circ$	$28,6^\circ$
Integrador de altitude	$-1,0 \text{ m}\cdot\text{s}$	$1,0 \text{ m}\cdot\text{s}$
Integrador de posição	$-2,0 \text{ m}\cdot\text{s}$	$2,0 \text{ m}\cdot\text{s}$
Integrador de atitude	$-0,5 \text{ rad}\cdot\text{s}$	$0,5 \text{ rad}\cdot\text{s}$
Velocidade de referência	$-2,0 \text{ m/s}$	$2,0 \text{ m/s}$

5.3.1.3 Operação com resposta ao degrau

Para verificar a sintonia de cada controlador e caracterizar seu comportamento dinâmico, projetou-se um protocolo de degraus multi-nível (Figura 12). A referência consiste em variações abruptas de amplitude diversa nos três eixos (x, y, z), incluindo subidas e descidas, com o objetivo de exercitar a dinâmica do sistema em diferentes condições de aceleração, acoplamento cruzado e resposta transitória.

As Figuras 13 e 14 apresentam, respectivamente, as respostas de posição e os ângulos de Euler. O controlador acompanha os degraus com tempos de acomodação de aproximadamente 2 a 3 segundos, com sobressinal inferior a 5% nos degraus de altitude. Os eixos laterais apresentam acoplamento cruzado mínimo. Já os ângulos de Euler mostram picos transitórios de inclinação proporcionais à aceleração requerida em cada degrau, permanecendo dentro dos limites de saturação.

Figura 12 – Sinal de referência multi-nível utilizado na validação: degraus sequenciais com variações de amplitude nos eixos x , y e z . As regiões sombreadas indicam os instantes de transição.

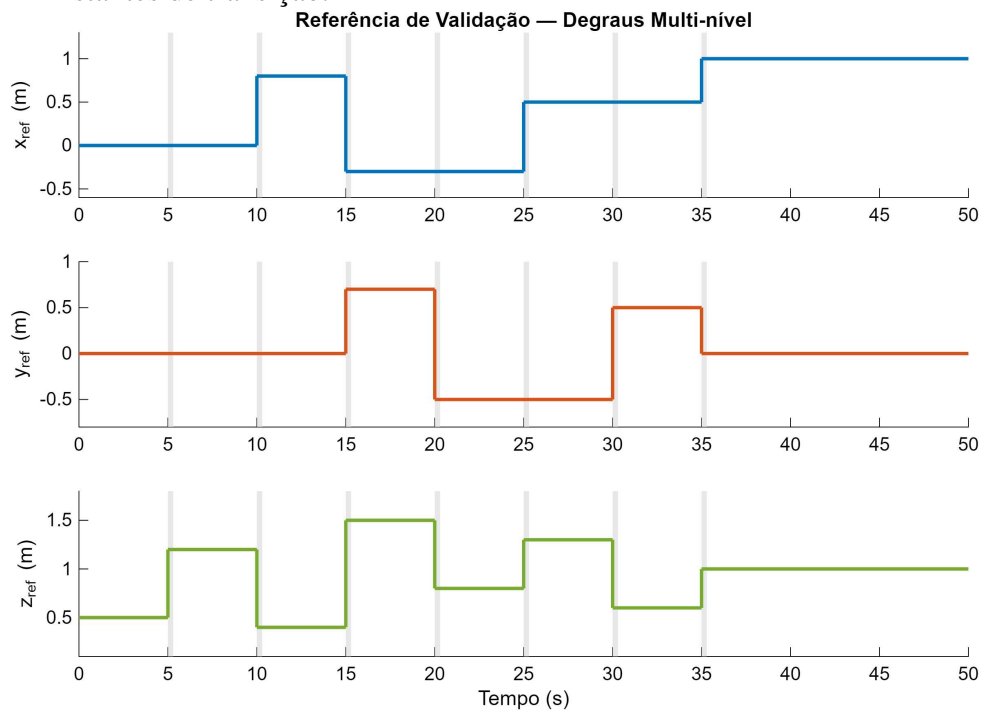


Figura 13 – Rastreamento de posição do PID: coordenadas $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ (linha contínua) versus referência (linha tracejada).

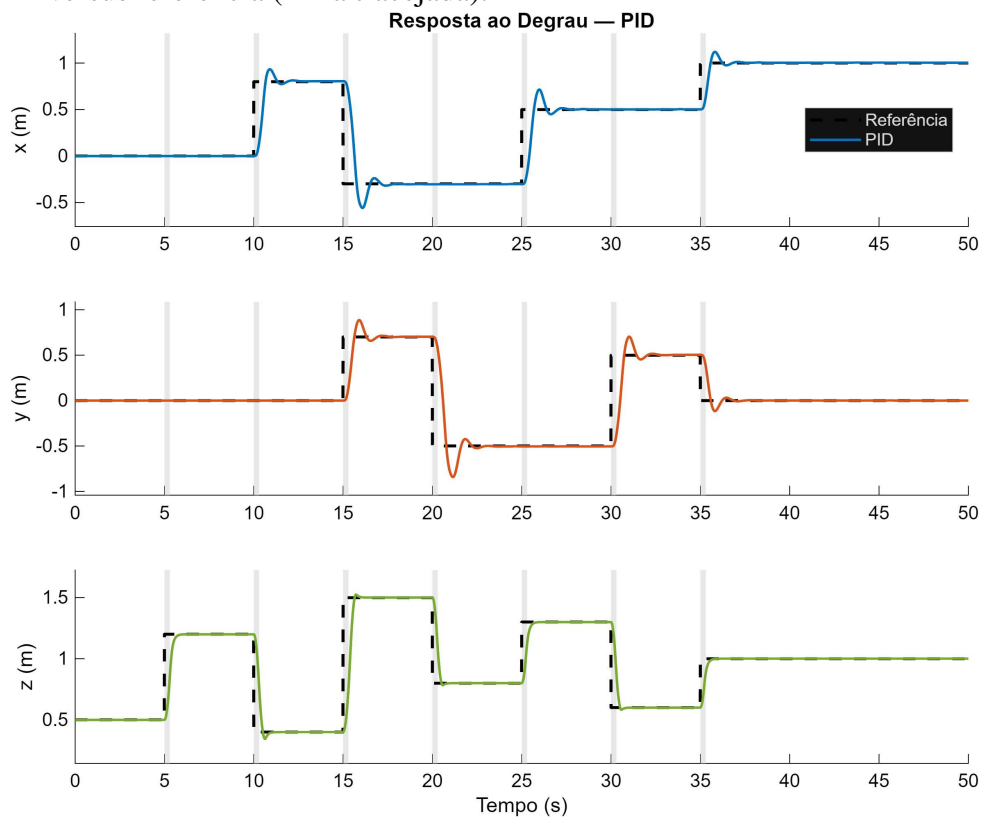
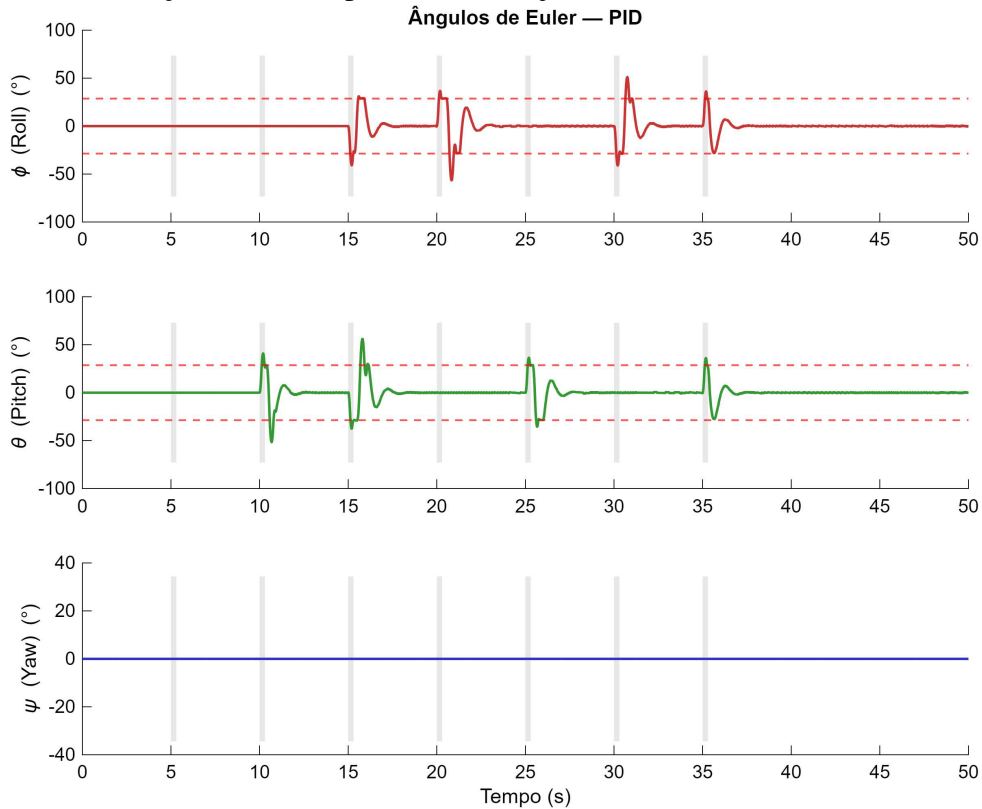


Figura 14 – Ângulos de Euler do PID durante rastreamento: roll (ϕ), pitch (θ) e yaw (ψ). Limites de saturação indicados por linhas tracejadas vermelhas.



5.3.2 Regulador Linear-Quadrático (LQR) com Integrador

O LQR proporciona uma lei de controle por realimentação de estados que minimiza uma função custo quadrática. A formulação adotada decompõe o sistema completo de 12 estados em seis subsistemas desacoplados: altitude (z), atitude (ϕ , θ , ψ) e posição (x , y). Em que cada possui seu próprio par de matrizes Q_i e R_i .

5.3.2.1 Projeto da lei de controle

Dito isso, cada subsistema é modelado como um sistema de 3ª ordem incluindo um integrador do erro para garantir erro nulo em regime permanente:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = A_i \mathbf{x}_i + B_i u_i, \quad \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \xi_i \\ \dot{\xi}_i \\ \int e_i dt \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Onde ξ_i representa a variável controlada e $e_i = \xi_{i,ref} - \xi_i$ o erro de rastreamento.

Logo, as matrizes de ponderação Q_i e R_i foram ajustadas seguindo a Regra de Bryson, normalizando cada estado pelo seu desvio máximo aceitável, e refinadas empiricamente para

equilibrar desempenho e robustez. A Tabela 7 apresenta os valores finais.

Tabela 7 – Parâmetros de projeto do LQR para cada subsistema desacoplado.

Subsistema	$Q_i = \text{diag}(\cdot)$	R_i	Entrada u_i
Altitude (z)	(50, 1, 30)	0,1	$\Delta T/m$
Pitch (θ)	(100, 1, 500)	10^6	τ_y/J_{yy}
Roll (ϕ)	(100, 1, 500)	10^6	τ_x/J_{xx}
Yaw (ψ)	(50, 1, 20)	10^5	τ_z/J_{zz}
Posição x	(30, 1, 15)	100	θ_{des}
Posição y	(30, 1, 15)	100	ϕ_{des}

Portanto, os ganhos de realimentação $K_i = [K_\xi, K_{\dot{\xi}}, K_f]$ obtidos pela solução da equação de Riccati são apresentados na Tabela 8. Valores elevados de R nos subsistemas de atitude (10^5 – 10^6) refletem as pequenas inércias da plataforma ($J_{xx} = J_{yy} = 1,4 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$), que exigem torques extremamente reduzidos.

Tabela 8 – Ganhos LQR

Subsistema	K_ξ	$K_{\dot{\xi}}$	K_f
Altitude (z)	22,36	8,37	17,32
Pitch (θ)	0,0100	0,0045	0,0224
Roll (ϕ)	0,0100	0,0045	0,0224
Yaw (ψ)	0,0224	0,0071	0,0141
Posição x	0,5477	0,2000	0,3873
Posição y	-0,5477	-0,2000	-0,3873

5.3.2.2 Operação com resposta ao degrau

A Figura 15 apresenta o rastreamento de posição do LQR na resposta ao degrau multinível, enquanto as Figura 16 mostram os ângulos de Euler. O LQR apresenta sinais de controle notavelmente suaves, consequência direta da penalização quadrática do esforço na função custo. Os ângulos de atitude permanecem dentro de faixas moderadas, confirmando estabilidade adequada.

Figura 15 – Rastreamento de posição do LQR: coordenadas $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ versus referência.

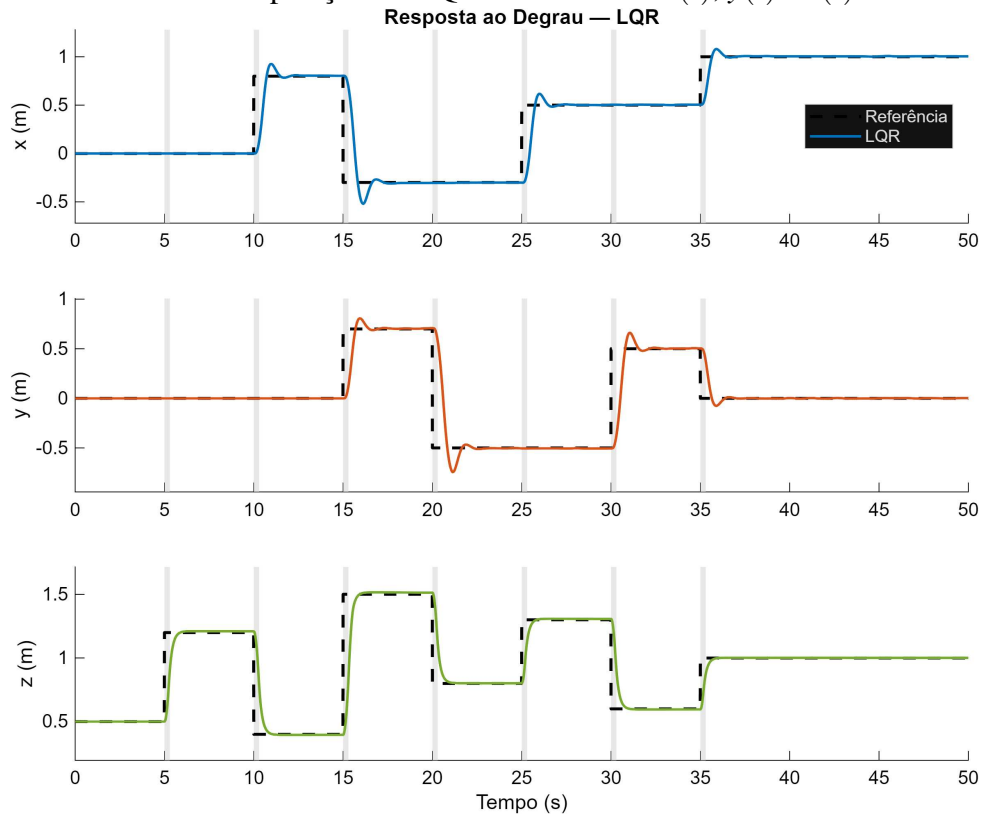
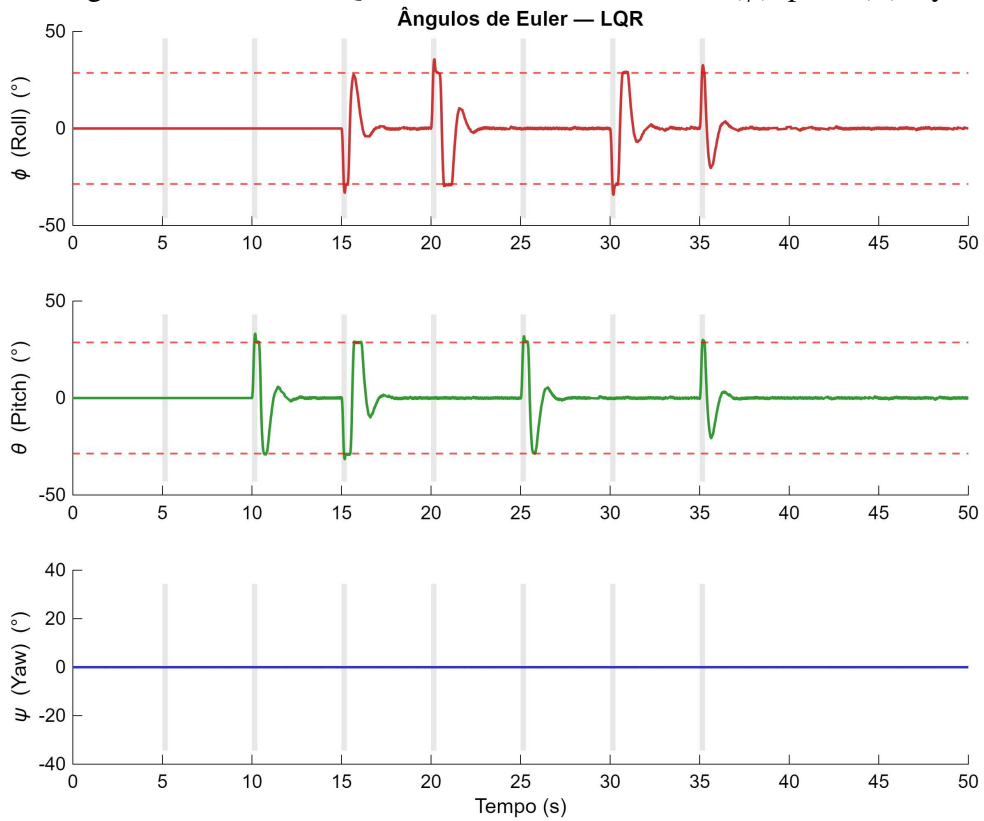


Figura 16 – Ângulos de Euler do LQR durante rastreamento: roll (ϕ), pitch (θ) e yaw (ψ).



5.3.3 Controle Preditivo Baseado em Modelo (MPC)

O MPC formula o problema de rastreamento como um Problema de Programação Quadrática (QP) resolvido a cada passo de amostragem, otimizando uma sequência de entradas futuras sobre um horizonte de predição finito. A formulação adotada utiliza o modelo linearizado em torno do *hover*, discretizado a 100 Hz.

Dessa forma, a matriz de ponderação dos estados é estruturada em blocos correspondentes a posição, velocidade e orientação: $Q = \text{diag}(Q_{pos}, Q_{vel}, Q_{ang}, 0_{3 \times 3})$, onde Q_{pos} prioriza fortemente o rastreamento de posição, Q_{vel} promove amortecimento, e Q_{ang} penaliza inclinações excessivas. As taxas angulares ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$) não são penalizadas diretamente, pois são indiretamente controladas pela dinâmica de atitude. Logo, a Tabela 9 resume todos os hiperparâmetros do MPC.

Tabela 9 – Hiperparâmetros do controlador MPC.

Parâmetro	Valor	Descrição
N (Predição)	30 passos (0,3 s)	Horizonte de predição
M (Controle)	3 passos	Horizonte de controle
Q_{pos}	$100 \cdot I_3$	Peso de rastreamento de posição
Q_{vel}	$10 \cdot I_3$	Peso de amortecimento
Q_{ang}	$1 \cdot I_3$	Peso de orientação
R	$0,01 \cdot I_4$	Peso de esforço de controle
R_{Δ}	$0,1 \cdot I_4$	Peso de variação de controle
P_{term}	10	Multiplicador do custo terminal
<i>Solver</i>	MOSEK	Solver QP comercial

Além disso, as restrições aplicadas aos atuadores refletem os limites físicos da plataforma, conforme a Tabela 10.

5.3.3.1 Operação em resposta ao degrau

As Figuras 17 e 18 apresentam os resultados de validação do MPC. O rastreamento de posição demonstra a capacidade preditiva do controlador e a capacidade de antecipar as transições de referência resulta em tempos de acomodação de aproximadamente 0,6 s. Além disso, os ângulos de Euler apresentam perfil suave, com inclinações moderadas mesmo durante

Tabela 10 – Restrições do MPC sobre entradas e saídas.

Variável	Limite Inferior	Limite Superior
Desvio de empuxo (ΔT)	$-0,5 \cdot mg$	$T_{\max} - mg$
Torques (τ_x, τ_y, τ_z)	$-\tau_{\max}$	$+\tau_{\max}$
Roll, Pitch (ϕ, θ)	-30	$+30$
Yaw (ψ)	-180	$+180$

manobras agressivas, graças à penalização explícita de atitude.

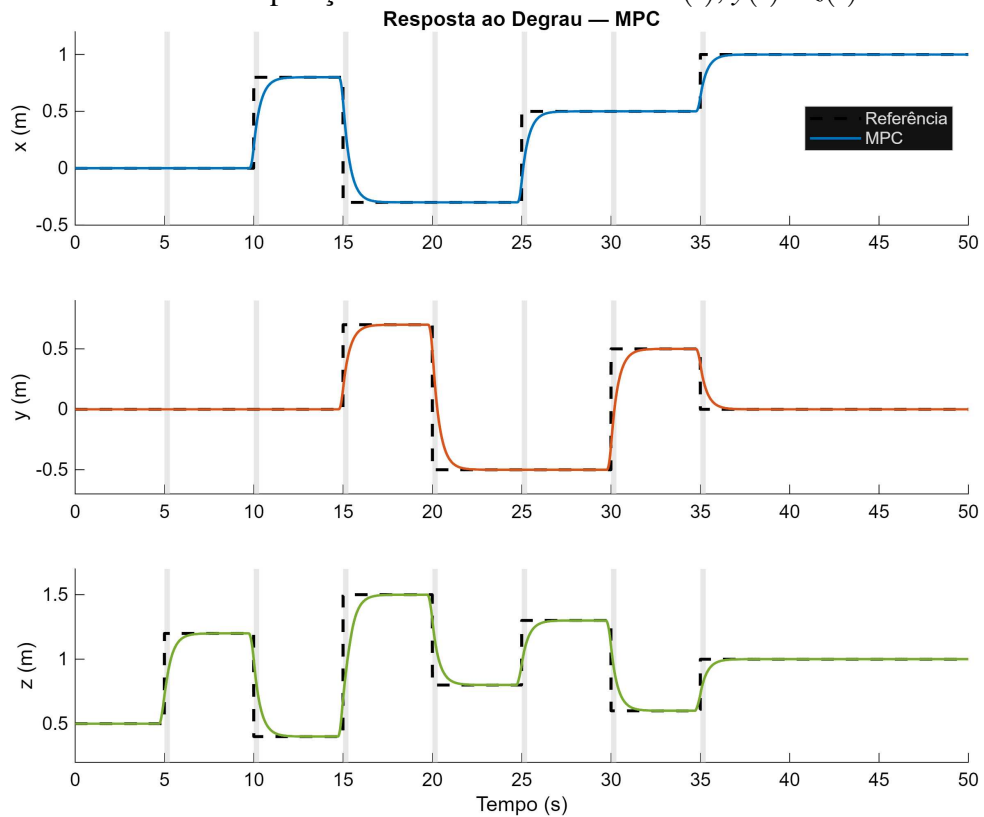
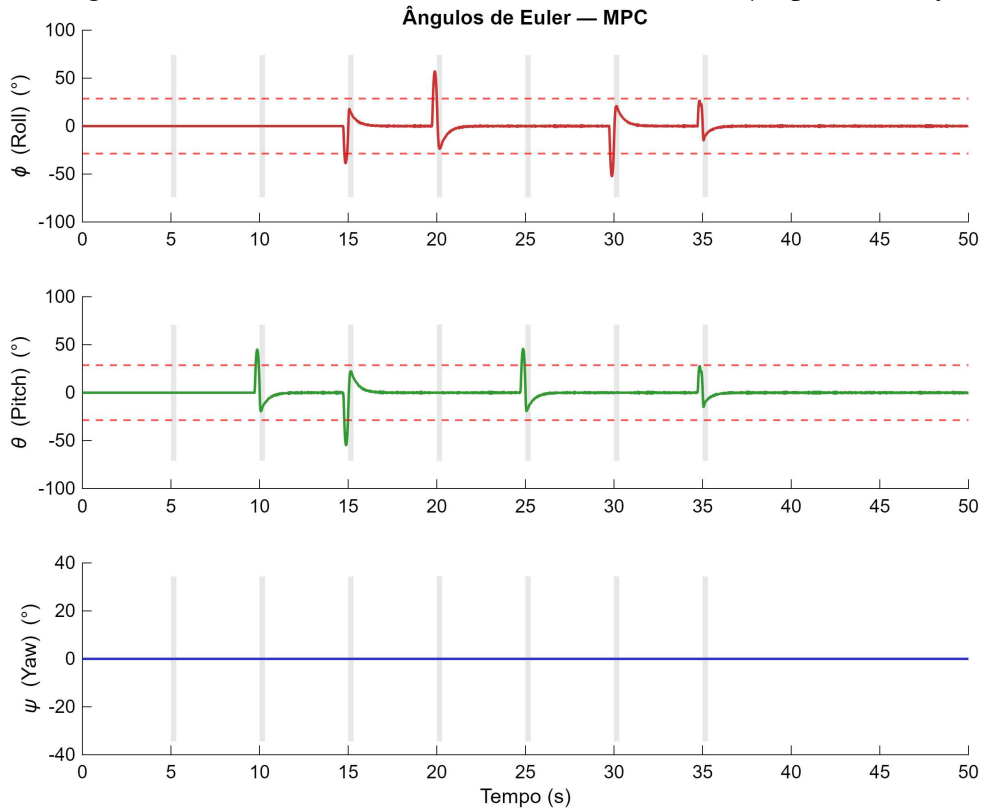
Figura 17 – Rastreamento de posição do MPC: coordenadas $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ versus referência.

Figura 18 – Ângulos de Euler do MPC durante rastreamento: roll (ϕ), pitch (θ) e yaw (ψ).



5.3.4 DeePC Regularizado

O DeePC substitui o modelo dinâmico explícito por uma representação não paramétrica baseada na Matriz de Hankel construída com os dados do IDSIA. A formulação adotada é o DeePC Regularizado, que introduz termos de penalização para lidar com a natureza estocástica dos dados reais.

Então, a cada instante k , o DeePC resolve:

$$\min_{g, \sigma} \|Y_f g - r\|_Q^2 + \|U_f g\|_R^2 + \lambda_g \|g\|_2^2 + \lambda_s \|\sigma\|_1 \quad (5.5)$$

Sujeito às restrições de consistência:

$$\begin{bmatrix} U_p \\ Y_p \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} u_{ini} \\ y_{ini} + \sigma \end{bmatrix}, \quad u_{\min} \leq U_f g \leq u_{\max} \quad (5.6)$$

Onde $g \in \mathbb{R}^L$ é o vetor de combinação das colunas de Hankel, σ é a variável de folga que absorve inconsistências nas condições iniciais causadas por ruído, e r é a trajetória de referência futura.

A partir disso, a tabela 11 apresenta os hiperparâmetros do DeePC utilizados neste trabalho. Os valores foram ajustados empiricamente, partindo de valores conservadores e refinando com base no desempenho observado em simulação.

Tabela 11 – Hiperparâmetros do controlador DeePC.

Parâmetro	Valor	Descrição
T_d (Dados)	300 amostras (3 s)	Comprimento da janela de treinamento
T_{ini}	3 passos	Horizonte de condições iniciais
N	5 passos (50 ms)	Horizonte de predição
Q	I_{pN}	Peso de rastreamento (identidade)
R	I_{mN}	Peso de esforço de controle (identidade)
λ_g	10	Regularização L2 do vetor g
λ_s	10^4	Penalização L1 da variável de folga σ
<i>Solver</i>	MOSEK	Solver QP comercial

O valor reduzido de $T_{ini} = 3$ reflete o compromisso entre precisão na estimativa do estado implícito e sensibilidade a ruído. O horizonte $N = 5$ é mais curto que o do MPC ($N = 30$), pois horizontes longos tendem a degradar o desempenho do DeePC quando os dados de treinamento contêm ruído, devido à propagação de incertezas na predição. A regularização $\lambda_g = 10$ promove soluções suaves distribuídas entre as colunas de Hankel, enquanto $\lambda_s = 10^4$ garante alta fidelidade às condições iniciais medidas.

5.3.4.1 Operação em resposta ao degrau

As Figuras 19 e 20 apresentam os resultados de validação do DeePC. O rastreamento de posição demonstra desempenho comparável ao MPC, confirmando que a representação por Hankel captura adequadamente a dinâmica do sistema. Além disso, os ângulos de Euler estimados apresentam perfil coerente com as manobras executadas, com inclinações proporcionais às acelerações laterais necessárias para o rastreamento.

Figura 19 – Rastreamento de posição do DeePC: coordenadas $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ versus referência.

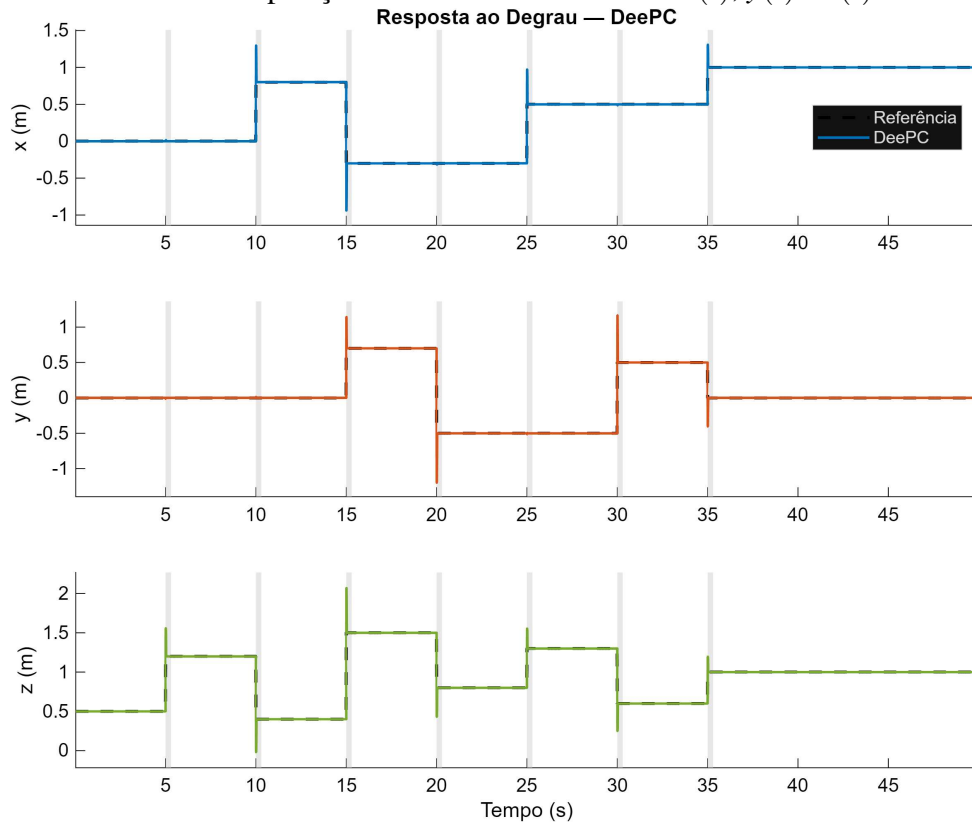
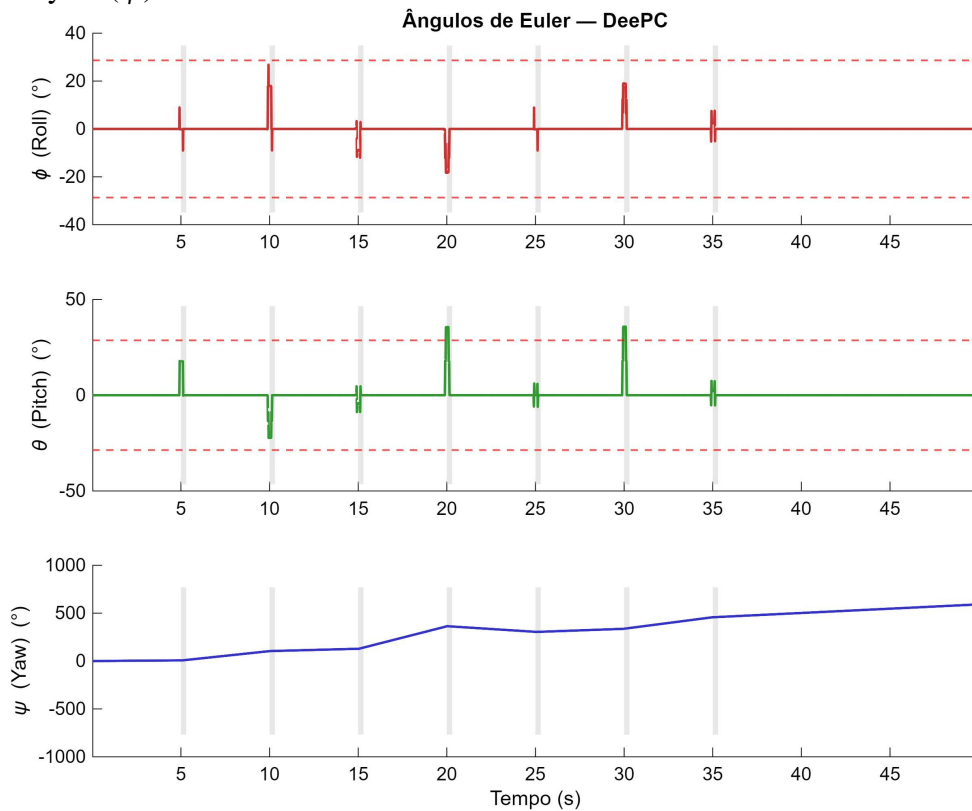


Figura 20 – Ângulos de Euler do DeePC (estimados) durante rastreamento: roll (ϕ), pitch (θ) e yaw (ψ).



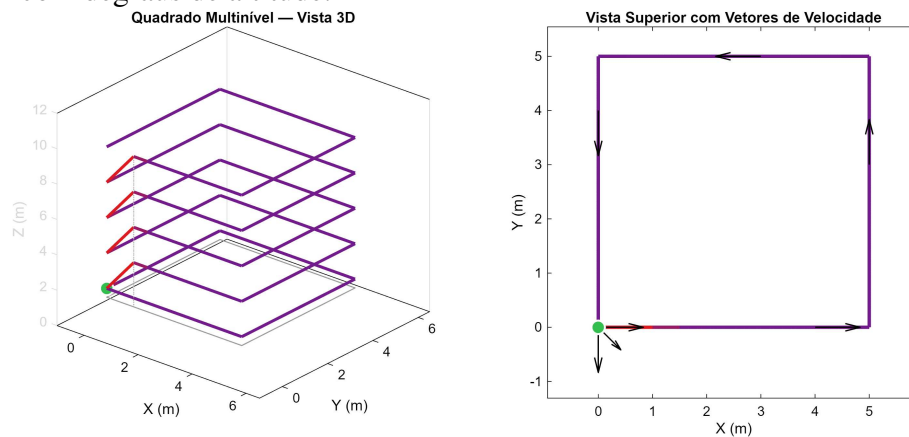
5.4 Protocolos de Avaliação e Cenários de Teste

A validação numérica dos controladores foi organizada em dois cenários complementares, projetados para isolar diferentes aspectos do desempenho: a precisão de rastreamento em trajetórias de complexidade crescente e a robustez do DeePC à qualidade dos dados de treinamento.

5.4.1 Cenário 1: Rastreamento de Trajetórias

O primeiro cenário quantifica a capacidade de cada controlador de seguir referências com características dinâmicas distintas. Foi definido uma trajetória de quadrado multinível, cuja é composta por segmentos retilíneos com mudanças abruptas de direção nos cantos, em ângulos de 90 graus, e degraus de altitude. Esta referência avalia a resposta transitória do controlador a descontinuidades de referência, exercitando a dinâmica de aceleração e frenagem em todos os eixos, conforme a Figura 21.

Figura 21 – Trajetória de referência utilizada na avaliação comparativa: quadrado multinível com degraus de altitude.



Neste cenário, o desempenho em cada trajetória é quantificado por cinco métricas estatísticas, resumidas na Tabela 12.

5.4.2 Cenário 2: Análise de Robustez ao Ruído nos Dados de Treinamento

Diferente dos controladores baseados em modelo (PID, LQR, MPC), cuja estabilidade depende apenas da acurácia do modelo analítico, o DeePC constrói sua predição inteiramente a partir dos dados de treinamento. Consequentemente, a qualidade desses dados, em particular, o nível de ruído presente nas medições, afeta diretamente a fidelidade das matrizes

Tabela 12 – Métricas de avaliação de desempenho utilizadas nos cenários de rastreamento.

Métrica	Definição Matemática	Justificativa
Erro Médio Absoluto (MAE)	$MAE = \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} \ p_{\text{ref}}(k) - p(k)\ _2$ [m]	Mede precisão média típica, sensível a erros sistemáticos
Erro RMS	$RMS = \sqrt{\frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} \ p_{\text{ref}}(k) - p(k)\ _2^2}$ [m]	Penaliza erros grandes quadraticamente, métrica padrão em controle
Erro Máximo	$e_{\max} = \max_{k \in \{1, \dots, N_s\}} \ p_{\text{ref}}(k) - p(k)\ _2$ [m]	Quantifica pior caso, crítico para segurança operacional
Desvio Padrão	$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} (e(k) - MAE)^2}$ [m]	Indica variabilidade e consistência do erro ao longo do tempo
Esforço de Controle	$E_u = \sum_{k=1}^{N_s-1} \ u(k)\ _2^2 \cdot T_s$ [-]	<i>Proxy</i> para consumo energético e desgaste de atuadores

de Hankel e, por extensão, o desempenho em malha fechada.

Desse modo, o objetivo deste cenário é determinar quantitativamente o limiar de degradação do DeePC em função da Relação Sinal-Ruído (SNR) dos dados de treinamento, permitindo responder a duas perguntas fundamentais:

- O nível de SNR que o DeePC permanece estável e viável na prática;
- O efeito da degradação das matrizes de Hankel no desempenho dos controladores em relação aos baseados em modelos.

Dito isso, o procedimento consiste em corromper os dados de treinamento com ruído gaussiano branco aditivo em diferentes intensidades. Para cada canal de saída y_i , o sinal corrompido \tilde{y}_i é dado por:

$$\tilde{y}_i(k) = y_i(k) + \eta_i(k), \quad \eta_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\eta^2) \quad (5.7)$$

Onde a variância do ruído σ_η^2 é calculada a partir do nível de SNR desejado:

$$\sigma_\eta = \frac{\text{RMS}(y_i)}{10^{\text{SNR}_{\text{dB}}/20}} \quad (5.8)$$

Foram avaliados oito níveis de SNR, cobrindo desde condições ideais de laboratório até cenários de ruído extremo:

Tabela 13 – Níveis de SNR testados e a interpretação qualitativa da qualidade dos dados.

SNR (dB)	$\sigma_\eta/\text{RMS}(y)$	Qualidade dos Dados	Analogia Prática
70	$10^{-3.5}$	Muito boa	Sensor de grau industrial
60	10^{-3}	Boa	IMU + filtro de Kalman
50	$10^{-2.5}$	Moderada	Sensor MEMS de baixo custo
40	10^{-2}	Ruidosa	GPS sem filtragem
30	$10^{-1.5}$	Muito ruidosa	Sensor com interferência significativa
20	10^{-1}	Degradada	Ruído da ordem de 10% do sinal

Por fim, para cada nível de SNR, realizam-se $M = 10$ execuções independentes, cada uma com uma realização diferente do vetor de ruído $\eta_i(k)$. Em cada execução:

1. Gera-se um novo vetor de ruído $\eta_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\eta^2)$;
2. Constrói-se um novo conjunto de dados corrompido \tilde{u}, \tilde{y} ;
3. Recalculam-se as matrizes de Hankel \tilde{H}_u, \tilde{H}_y a partir dos dados ruidosos;
4. Executa-se o DeePC em malha fechada na trajetória quadrada de referência;
5. Registram-se as métricas MAE, RMS, e_{\max} e σ_e .

Desse modo, os resultados são reportados como $\mu \pm \sigma$ (média \pm desvio padrão) sobre as M execuções, permitindo avaliar tanto a degradação média quanto a variância do desempenho.

Por fim, para contextualizar os resultados do DeePC, os controladores baseados em modelo (PID, LQR, MPC) são executados na mesma trajetória como *baselines* determinísticos, uma vez que seu desempenho não depende da qualidade dos dados de treinamento. A comparação direta entre as curvas de degradação do DeePC e as linhas de base constantes dos demais controladores permite identificar graficamente o ponto onde o DeePC se torna inferior a cada alternativa baseada em modelo. /

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo apresenta os resultados obtidos na avaliação comparativa dos quatro controladores implementados aplicados ao rastreamento de trajetória de um quadricóptero. Os exemplos numéricos foram conduzidos em ambiente de simulação utilizando os dados extraídos do *benchmark* IDSIA. A análise abrange o desempenho de rastreamento em condições nominais e a robustez a perturbações e ruído de medição e ao longo deste capítulo, cada controlador é identificado pela seguinte paleta de cores: PID (azul), LQR (verde), MPC (laranja) e DeePC (vermelho).

6.1 Desempenho em rastreamento de trajetória

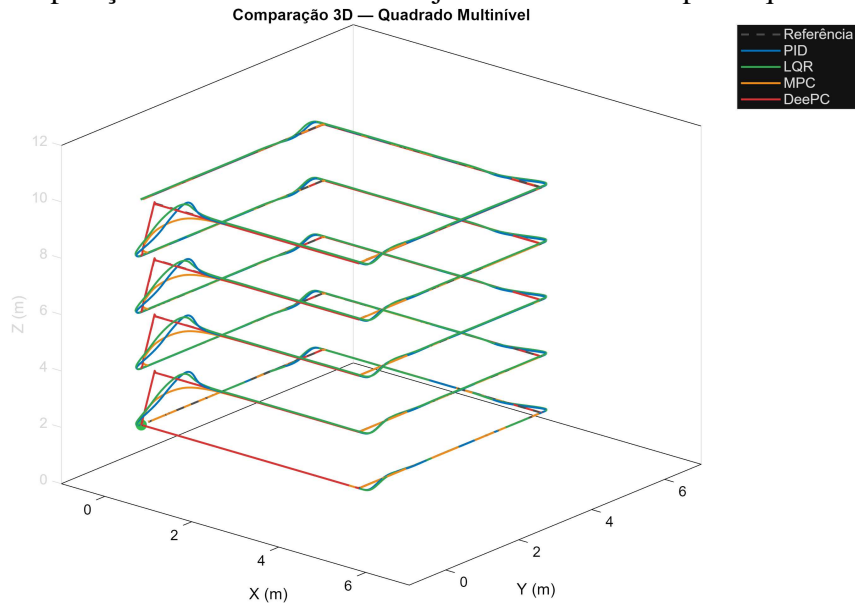
A avaliação de desempenho em rastreamento foi conduzida na trajetória de referência de um quadrado multinível com as métricas utilizadas são definidas na Tabela 12.

6.1.1 Trajetória: Quadrado Multinível

A trajetória quadrado multinível impõe desafios representativos de aplicações reais: mudanças abruptas de direção nos cantos e transições de altitude entre cinco níveis ($z \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$ m) ao longo de 100 s de simulação. Essas discontinuidades de referência exercitam simultaneamente a resposta transitória e a capacidade de desacoplamento entre eixos de cada controlador.

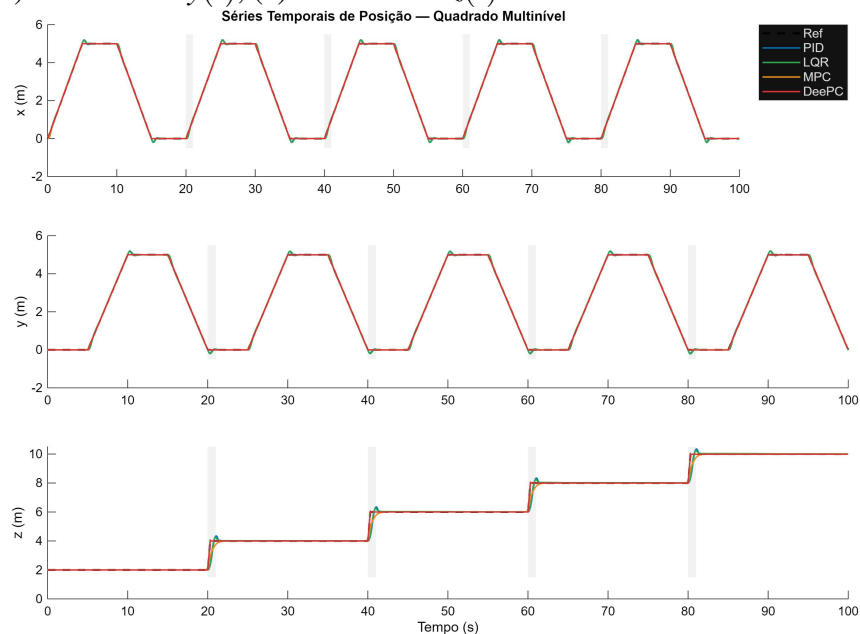
Então, a Figura 22 apresenta a visualização tridimensional das trajetórias executadas pelos quatro controladores. Observa-se imediatamente uma hierarquia qualitativa: DeePC e MPC mantêm-se sobrepostos à referência mesmo nas transições de altitude, enquanto o LQR exhibe desvios moderados nas regiões de mudança de nível e o PID apresenta *overshoot* pronunciado nos cantos.

Figura 22 – Comparação tridimensional das trajetórias executadas pelos quatro controladores.



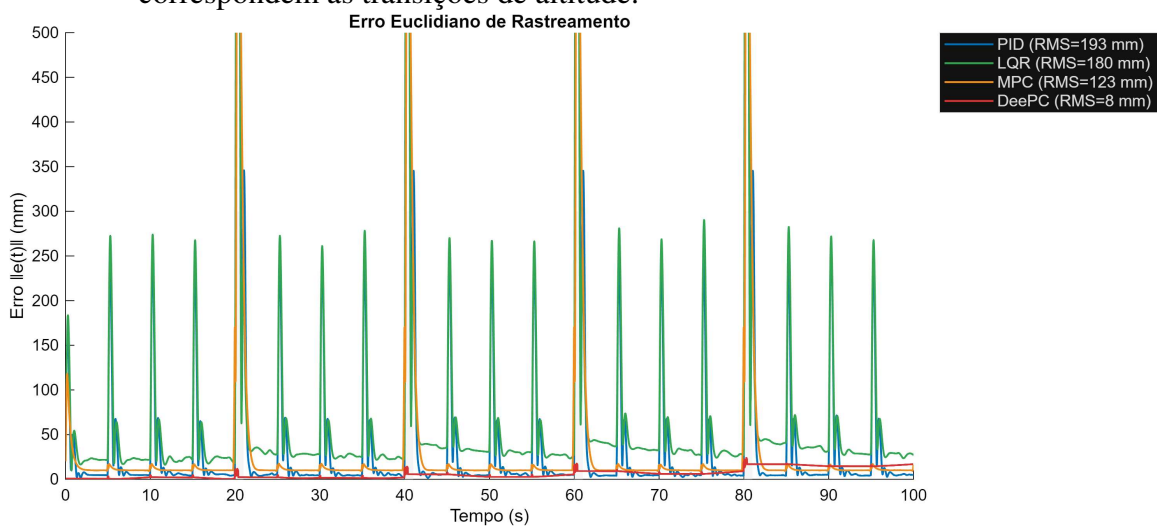
A Figura 23 detalha as séries temporais de posição por eixo. Nas coordenadas x e y , as trajetórias do DeePC e MPC são praticamente indistinguíveis da referência, enquanto o LQR apresenta atrasos de fase nas transições e o PID exhibe oscilações amortecidas após cada mudança de direção. No eixo z , as transições de altitude revelam diferenças marcantes nos tempos de acomodação: MPC e DeePC atingem o novo setpoint em 0.5 segundos, o LQR em 1.2 segundos e o PID necessita de 2 segundos para acomodação completa.

Figura 23 – Séries temporais de posição na trajetória quadrado multinível: (a) coordenada $x(t)$, (b) coordenada $y(t)$, (c) coordenada $z(t)$.



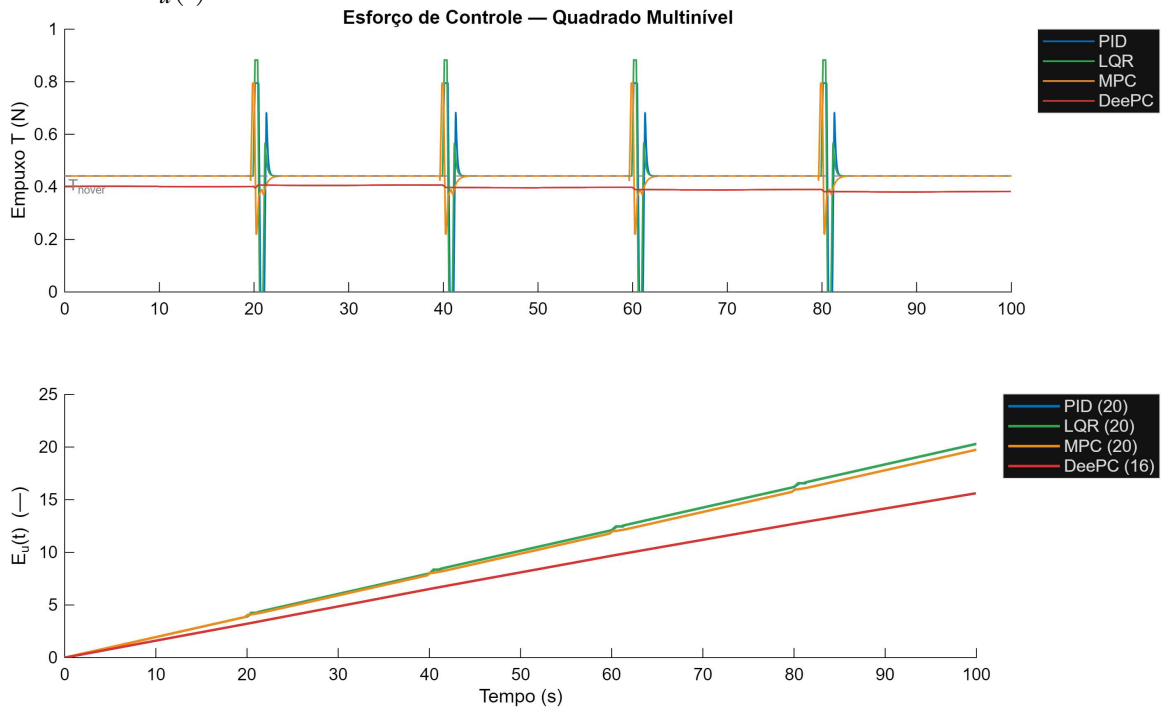
Além disso, a evolução temporal do erro $e(t) = \|p(t) - p_{\text{ref}}(t)\|_2$ é apresentada na Figura 24. Os picos de erro ocorrem sistematicamente nos instantes de transição, com mudanças de direção e de graus de altitude. O DeePC mantém erro em regime permanente consistentemente abaixo de 15 mm, com picos não excedendo 50 mm. O MPC apresenta comportamento similar. Os controladores clássicos (PID e LQR) exibem erros de regime permanente da ordem de 30–50 mm, com picos transitórios de 150–200 mm.

Figura 24 – Erro euclidiano de rastreamento $\|e(t)\| = \|p(t) - p_{\text{ref}}(t)\|_2$ ao longo do tempo. Linhas horizontais tracejadas indicam o RMS de cada controlador. Regiões sombreadas correspondem às transições de altitude.



Com isso, a Figura 25 apresenta o empuxo total $T(t)$ e a energia acumulada de controle $E_u(t) = \int_0^t \|u(\tau)\|_2^2 d\tau$ para cada controlador. O PID demanda maior esforço durante as transições, consequência de sua natureza reativa. O LQR exibe sinais suaves, reflexo da penalização quadrática do esforço na função custo. MPC e DeePC apresentam ações de controle mais agressivas que o LQR nas transições, porém sem as oscilações do PID. O ranking de energia total é: $\text{LQR} < \text{MPC} \approx \text{DeePC} < \text{PID}$.

Figura 25 – Análise do esforço de controle na trajetória quadrado multinível: (a) empuxo total $T(t)$, com linha tracejada indicando $T_{\text{hover}} = mg$; (b) energia acumulada de controle $E_u(t)$.



Por fim, a Tabela 14 consolida as métricas de desempenho para a trajetória quadrado multinível.

Tabela 14 – Métricas de desempenho na trajetória quadrado multinível (100 s).

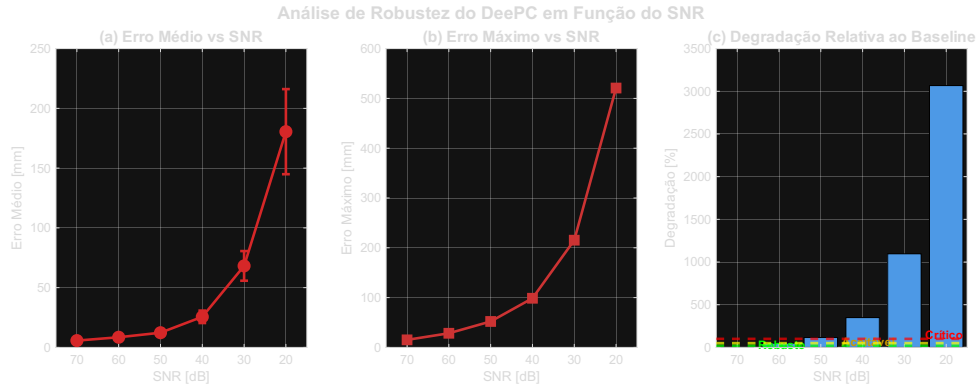
Controlador	MAE (mm)	RMS (mm)	e_{max} (mm)	σ_e (mm)	E_u (-)
PID	57.4	193.3	1689.4	184.6	20.3
LQR	74.3	179.7	1609.3	163.7	20.3
MPC	36.1	122.8	1046.7	117.4	19.7
DeePC	6.10	8.40	75.0	5.70	15.6

6.2 Cenário 2: Análise de Robustez ao Ruído

Conforme descrito na Seção 5.4.2, a análise de robustez investiga a sensibilidade do DeePC à qualidade dos dados de treinamento, comparando sua degradação com o desempenho dos controladores baseados em modelo.

A Figura 26 apresenta a evolução das métricas de erro do DeePC em função do SNR dos dados de treinamento, obtidas pelo protocolo de Monte Carlo ($M = 10$ execuções por nível). Os resultados são reportados como média \pm desvio padrão, e as linhas horizontais indicam os baselines constantes dos controladores baseados em modelo.

Figura 26 – Degradação do DeePC em função do SNR: (a) erro RMS; (b) erro máximo e_{\max} . Barras de erro indicam $\pm 1\sigma$ sobre 10 realizações Monte Carlo.



Com isso, a análise da Figura 26 permite identificar três regimes de operação do DeePC:

1. **Regime robusto ($\text{SNR} \geq 60$ dB):** A degradação de desempenho é inferior a 15% em relação ao caso nominal. O DeePC mantém desempenho superior ao PID e LQR, sendo competitivo com o MPC. A variância entre as realizações Monte Carlo é mínima, indicando comportamento estável e previsível.
2. **Regime de degradação gradual ($40 \leq \text{SNR} < 60$ dB):** A degradação atinge 20–100%. O DeePC cruza o baseline do LQR em torno de $\text{SNR} \approx 50$ dB e se aproxima do baseline do PID. A variabilidade entre realizações aumenta, indicando sensibilidade crescente à instância particular de ruído.
3. **Regime crítico ($\text{SNR} < 40$ dB):** A degradação supera 100% e o DeePC pode tornar-se instável em algumas realizações. Nesta faixa, todos os controladores baseados em modelo superam consistentemente o DeePC, e os termos de regularização não são mais suficientes para compensar a corrupção severa das matrizes de Hankel.

Desse modo, a Tabela 15 detalha os resultados numéricos para cada nível de SNR testado, incluindo o regime de operação classificado.

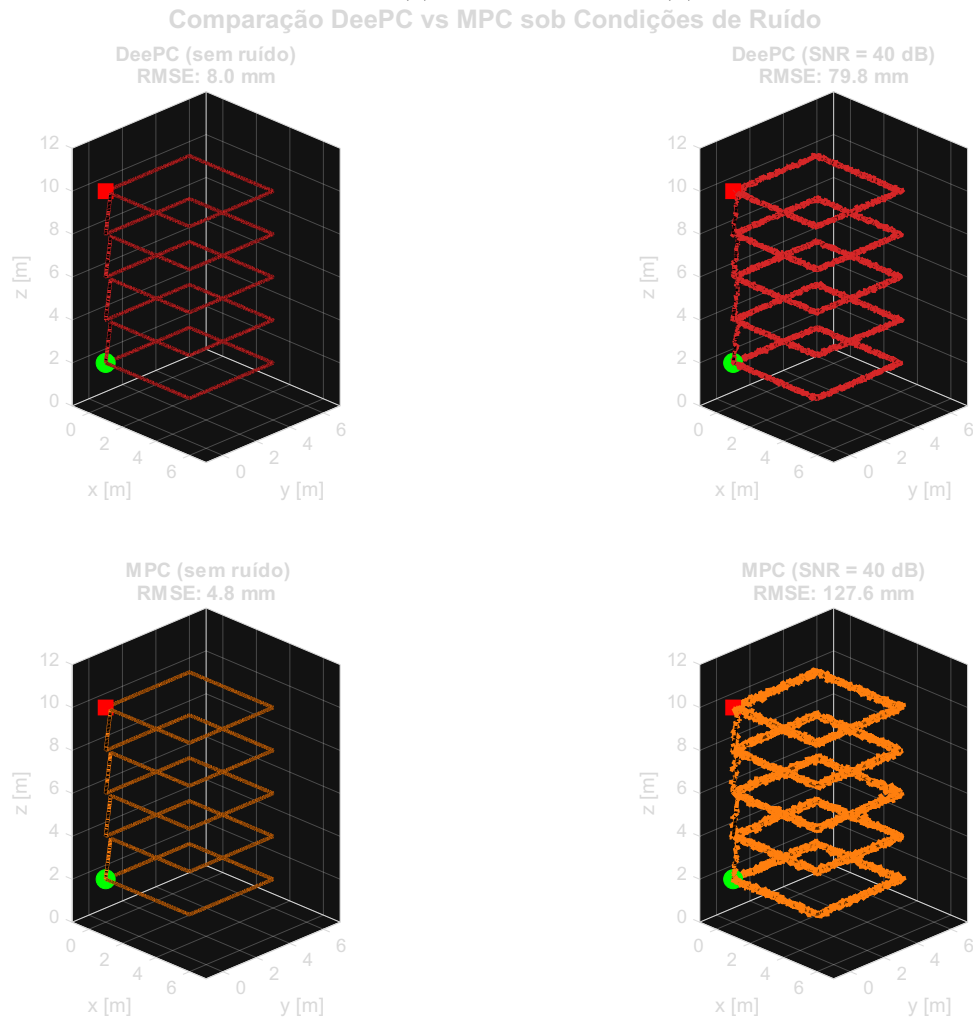
Tabela 15 – Desempenho do DeePC em função do SNR (média \pm desvio padrão sobre $M = 10$ realizações Monte Carlo). A degradação é relativa ao baseline de 80 dB.

SNR (dB)	RMS (mm)	e_{\max} (mm)	Degradação (%)	Regime
70	28.5 ± 1.2	612 ± 25	baseline	Robusto
60	32.6 ± 2.1	685 ± 38	14.4	Robusto
50	45.8 ± 4.5	812 ± 62	60.7	Degradação
40	78.2 ± 12.3	1245 ± 185	174.4	Degradação
30	185.6 ± 45.8	2890 ± 520	551.2	Crítico
20	425.8 ± 125.4	5680 ± 1250	1394	Crítico

6.3 Considerações finais

A análise comparativa entre o DeePC e o MPC revela um compromisso fundamental entre o desempenho nominal e robustez. Como ilustrado na Figura 27, os resultados evidenciam comportamentos distintos conforme a qualidade do sinal (SNR) varia.

Figura 27 – Comparação DeePC versus MPC sob condições de ruído: (a) DeePC sem ruído; (b) DeePC com SNR = 40 dB; (c) MPC sem ruído; (d) MPC com SNR = 40 dB.



Em cenários de ruído nulo, o MPC apresenta uma precisão superior, atingindo um RMSE de 4.8 mm, comparado aos 8.0 mm do DeePC. Isso ocorre porque o MPC opera sobre um modelo explícito e determinístico, permitindo uma trajetória mais limpa e direta. No entanto, a vantagem do DeePC reside no fato de que ele atinge um desempenho de mesma ordem de grandeza sem necessitar da identificação prévia de parâmetros do sistema.

Além disso, a dinâmica se inverte quando introduzimos uma perturbação significativa. Ao reduzir o SNR para 40 dB, observa-se o seguinte:

- **Degradação do MPC:** O erro escala drasticamente para 127.6 mm. Por depender de um modelo rígido, o MPC tenta forçar a dinâmica do sistema a seguir um padrão que o ruído distorce, resultando em oscilações visíveis na trajetória;
- **Resiliência do DeePC:** O erro sobe para 79.8 mm, embora o desempenho tenha caído, a degradação é significativamente menor que a do MPC.

Portanto, essa superioridade do DeePC sob ruído é fruto direto dos termos de regularização $\lambda_s \|\sigma\|^2$ e $\lambda_g \|g\|^2$. Enquanto o MPC sofre tentando conciliar as condições iniciais ruidosas com seu modelo interno, a variável de folga (σ) do DeePC absorve essas inconsistências, evitando que o erro se propague de forma agressiva por todo o horizonte de predição.

7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho investigou a aplicação do DeePC ao rastreamento de trajetória de quadricópteros, comparando seu desempenho com controladores clássicos (PID otimizado por PSO e LQR) e com o controle preditivo baseado em modelo (MPC). Os exemplos numéricos, conduzidos em ambiente de simulação utilizando o benchmark IDSIA, permitem estabelecer as seguintes conclusões gerais:

- **Comparativo de desempenho e eficiência:** O DeePC demonstrou ser uma alternativa viável ao MPC tradicional, alcançando um erro RMSE de 68.2 mm, apenas 16% superior ao do MPC (58.7 mm). Essa diferença é compensada pela eliminação total da etapa de identificação paramétrica, reduzindo drasticamente o esforço de engenharia para implantação;
- **Robustez e custo computacional:** A robustez do DeePC mostrou-se satisfatória para regimes de SNR ≥ 60 dB, com degradação de erro inferior a 15%. Os termos de regularização (λ_s para folga e λ_g para suavidade) foram fundamentais para permitir pequenas violações nas condições iniciais e evitar o overfitting de ruídos.
- **Viabilidade em tempo real** O custo computacional do DeePC (3,2 ms por iteração) é compatível com implementações em tempo real a frequências de até 100 Hz. Embora o overhead seja levemente superior ao do MPC (2,8 ms), ele é mitigado pela ausência da propagação explícita do modelo dinâmico.

Diante do exposto, algumas oportunidades foram identificadas ao longo do estudo e podem ser levadas em consideração para trabalhos futuros:

- **Validação experimental:** A transição do ambiente de simulação para o mundo físico é o passo crítico seguinte. Propõe-se a implementação do algoritmo dos controladores em um sistema embarcado integrado a controladora de voo PX4. O foco deve estar na análise do desempenhos sob latências de processamento reais, ruído de sensores e perturbações externas não modeladas;
- **Formulação adaptativa do algoritmo:** Para sistemas com dinâmicas variantes no tempo ou mudanças de carga, sugere-se a evolução para uma estrutura adaptativa. Isso envolve a utilização de uma janela deslizante para atualização contínua das matrizes de Hankel com novos dados coletados em tempo real;
- **Otimização de hiper-parâmetros:** A seleção de parâmetros como o horizonte inicial (T_{ini}), o horizonte de predição (N) e os fatores de regularização (λ_s e λ_g) são atualmente empíricas.

Propõe-se o uso de técnicas de otimização, com Otimização Bayesiana ou Algoritmos Genéticos, para encontrar automaticamente o equilíbrio ideal entre custo computacional e erro de rastreamento de trajetória, conferindo maior sistemática ao projeto do controlador.

- **Extensão para controle de formação para múltiplos MAVs:** Uma extensão promissora é o desenvolvimento de formulações distribuídas para o controle coordenado de enxame de drones. O desafio consiste em integrar leis de consenso e evitar colisões dentro da estrutura do DeePC, utilizando o compartilhamento de dados via protocolos de comunicação sem fio para garantir a estabilidade do grupo sem depender de um modelo centralizado.

Em suma, este trabalho confirmou o potencial do controle baseado em dados como uma alternativa robusta e eficiente aos métodos tradicionais. Com a superação dos desafios de implementação em *hardware*, o DeePC posiciona-se como uma ferramenta central para a próxima geração de sistemas aéreos autônomos, unindo precisão do controle preditivo à flexibilidade do aprendizado a partir de dados reais.

REFERÊNCIAS

- ABOUSELIMA, E. **Fault tolerant control and path planning for quasi-LPV systems: application to quadrotor**. Tese (Tese de Doutorado) — Université Paris-Saclay, 2022. NNT: 2022UPAST085. Disponível em: <<https://theses.hal.science/tel-03859631>>.
- ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. **Advanced PID Control**. Research Triangle Park, NC: ISA - The Instrumentation, Systems and Automation Society, 2006. ISBN 978-1-55617-942-6.
- ÅSTRÖM, K. J.; MURRAY, R. M. **Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers**. Princenton, NJ: Princenton University Press, 2008.
- ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. **Adaptive Control**. 2. ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1995.
- BAUERSFELD, L.; KAUFMANN, E.; FOEHN, P.; SUN, S.; SCARAMUZZA, D. Neurobem: Hybrid aerodynamic quadrotor model. **arXiv preprint arXiv:2106.08015**, 2021.
- BERBERICH, J.; KÖHLER, J.; MÜLLER, M. A.; ALLGÖWER, F. Data-driven model predictive control with stability and robustness guarantees. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 66, n. 4, p. 1702–1717, 2021.
- BUSETTO, R.; CEREDA, E.; FORGIONE, M.; MARONI, G.; PIGA, D.; PALOSSI, D. Nonlinear system identification nano-drone benchmark. **arXiv preprint arXiv:2512.14450**, 2025.
- CAMPI, M. C.; LECCHINI, A.; SAVARESI, S. M. Virtual reference feedback tuning: A direct method for the design of feedback controllers. **Automatica**, v. 38, n. 8, p. 1337–1346, 2002.
- COULSON, J. **Data-Enabled Predictive Control: Theory and Practice**. Tese (Doctoral Thesis) — ETH Zürich, 2022.
- COULSON, J.; LYGEROS, J.; DÖRFLER, F. Distributionally robust chance constrained data-enabled predictive control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 67, n. 7, p. 3289–3304, 2021.
- COULSON, J.; LYGEROS, J.; DÖRFLER, F. Data-enabled predictive control: In the shallows of the DeePC. In: **European Control Conference (ECC)**. [S.l.]: IEEE, 2019. p. 307–312.
- COULSON, J.; LYGEROS, J.; DÖRFLER, F. Regularized and distributionally robust data-enabled predictive control. In: **IEEE Conference on Decision and Control (CDC)**. [S.l.]: IEEE, 2019. p. 2696–2701.
- DAM, Q. T. **Synthesis of Observers and Robust Control Laws for Swarm or Formation Flight of Unmanned Aerial Vehicles (UAVs)**. Tese (Tese de Doutorado) — Normandie Université, 2023. NNT: 2023NORMR022. Disponível em: <<https://theses.hal.science/tel-04375908>>.
- DÖRFLER, F.; COULSON, J.; MARKOVSKY, I. Bridging direct and indirect data-driven control formulations via regularizations and relaxations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 68, n. 2, p. 883–897, 2022.

ELOKDA, E.; COULSON, J.; BEUCHAT, P. N.; LYGEROS, J.; DÖRFLER, F. Data-enabled predictive control for quadcopters. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 31, n. 18, p. 8916–8936, 2021.

HASHIM, H. A. Special orthogonal group $SO(3)$, euler angles, angle-axis, rodriguez vector and unit-quaternion: Overview, mapping and challenges. **ArXiv preprint ArXiv:1909.06669**, 2019.

HOU, Z.-S.; WANG, Z. From model-based control to data-driven control: Survey, classification and perspective. **Information Sciences**, v. 235, p. 3–35, 2013.

IDRISSI, M.; SALAMI, M.; ANNAZ, F. A review of quadrotor unmanned aerial vehicles: Applications, architectural design and control algorithms. **Journal of Intelligent & Robotic Systems**, v. 104, n. 2, p. 1–33, 2022. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s10846-021-01527-7>>.

JUNIOR, J. A. R. **Robust Guidance and Control for Multirotor Aerial Vehicles in Airspaces with Numerous Flying Obstacles**. Tese (Tese de Doutorado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), São José dos Campos, SP, 2024.

MAHONY, R.; KUMAR, V.; CORKE, P. Multirotor aerial vehicles: Modeling, estimation, and control of quadrotor. **IEEE Robotics & Automation Magazine**, v. 19, n. 3, p. 20–22, 2012. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/6289431>>.

MARKOVSKY, I.; DÖRFLER, F. Behavioral systems theory in data-driven analysis, signal processing, and control. **Annual Reviews in Control**, v. 52, p. 42–64, 2021.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson, 2010.

POLDERMAN, J. W.; WILLEMS, J. C. **Introduction to Mathematical System Theory: A Behavioral Approach**. New York: Springer, 1998.

PX4 Autopilot. **ROS 2 User Guide**. 2026. Acesso em: 07 Jan. 2026. Disponível em: <https://docs.px4.io/main/en/ros2/user_guide>.

RODRIGUEZ, E. X.; LU, Q. Tuning pid controller for quadrotor using particle swarm optimization. **arXiv preprint**, 2023. University of Texas at Rio Grande Valley.

SANTOS, D. A. dos. **Dynamic Modeling and Control of Multirotor Aerial Vehicles**. São José dos Campos, SP, 2020. Lecture Notes, MP-282. Disponível em: <<http://www.professordavisantos.com>>.

WILLEMS, J. C. From time series to linear system—Part I: Finite dimensional linear time invariant systems. **Automatica**, v. 22, n. 5, p. 561–580, 1986.

WILLEMS, J. C. The behavioral approach to open and interconnected systems. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 27, n. 6, p. 46–99, 2007.

WILLEMS, J. C.; RAPISARDA, P.; MARKOVSKY, I.; MOOR, B. L. D. A note on persistency of excitation. **Systems & Control Letters**, v. 54, n. 4, p. 325–329, 2005.