

Subdivisões De Orientações Do Grafo Bipartido Completo

$K_{2,3}$ *

Philippe M. Serra^{1†}, Ana Karolinnna Maia¹

¹Departamento de Computação - Universidade Federal do Ceará (UFC)

philipemserra@gmail.com, karolmaia@ufc.br

Abstract. *In this work, we explore the problem of finding a subdivision of a digraph F in a digraph D , with the goal of identifying polynomial-time and NP-complete instances of the problem. More specifically, we focus on the cases where F is an orientation of $K_{2,3}$, in an attempt to gain a clearer understanding of a conjecture regarding the problem in planar graphs. We present all possible orientations of $K_{2,3}$ and the cases where the problem can be solved in polynomial time, using flow techniques or the Directed Grid Theorem. The complexity of only one case remains open.*

Resumo. *Neste trabalho, exploramos o problema de encontrar uma subdivisão de um digrafo F em um digrafo D . com o objetivo de identificar instâncias polinomiais e NP-completas do mesmo. Mais especificamente, focamos nos casos em que F é uma orientação do $K_{2,3}$, na tentativa de ter uma visão mais clara sobre uma conjectura a respeito do problema em grafos planares. Apresentamos todas as possíveis orientações do $K_{2,3}$ e os casos que o problema pode ser resolvido de maneira polinomial, utilizando fluxos ou Teorema do Grid Direcionado. A complexidade de apenas um caso permanece em aberto.*

1. Introdução

Uma *subdivisão* de um digrafo $F(V, A)$, ou uma F -subdivisão, é um digrafo obtido a partir de F através da substituição de cada arco $(a, b) \in E(F)$ por um caminho direcionado de a para b (que pode ser o próprio arco) disjunto do restante do digrafo e conservando a direção original. Nós consideramos a seguinte questão para um digrafo predefinido F .

F -SUBDIVISÃO

Entrada: Um digrafo D .

Pergunta: D contém uma subdivisão de F (como subgrafo)?

Esse problema aparece como uma generalização natural para digrafos de um dos problemas que compõe a teoria dos menores, um tema fundamental cujos resultados trouxeram diversos avanços para a área de teoria dos grafos [Robertson and Seymour 1995]. Um dos fatos que ilustra a relevância do estudo da detecção de subdivisões em grafos é que muitas classes interessantes são definidas pela proibição de certos subgrafos induzidos. Grafos planares são um exemplo bem conhecido: eles foram caracterizados por Kuratowski como os grafos que não possuem subdivisões do K_5 ou $K_{3,3}$. Outras classes

*Parcialmente financiado por CNPq Universal 404479/2023-5.

†Bolsa UFC pelo programa de iniciação científica Pibic-UFC.

de grafos e digrafos determinadas pela proibição de um conjunto de subgrafos podem ser vistas em [Chudnovsky et al. 2006, Chudnovsky and Seymour 2007, Granot et al. 2000].

O problema alternativo em que procuramos por subdivisões *induzidas* de um determinado grafo H em um grafo qualquer recebido como entrada G também é uma questão de interesse. O caso não-direcionado é NP-completo como mostrado por Lévêque et al. para $H = K_5$ [Lévêque et al. 2009] enquanto seu equivalente para subdivisões não-induzidas pode ser resolvido em tempo polinomial para todo H fixo pelo algoritmo de linkage de Robertson and Seymour [Robertson and Seymour 1995]. Alguns algoritmos polinomiais para encontrar subdivisões induzidas em grafos não direcionados utilizam técnicas sofisticadas. Um exemplo é uso do algoritmo *three-in-a-tree* de Chudnovsky e Seymour [Chudnovsky and Seymour 2010]. O problema de *three-in-a-tree* consiste em responder para um determinado grafo e três vértices pré-determinados, se há uma árvore contendo esses vértices. O algoritmo para resolvê-lo, que tem o tempo de execução de $O(n^4)$, fornece uma ferramenta geral que pode ser usada em muitas soluções do problema de subdivisão.

Bang-Jensen et al. [Bang-Jensen et al. 2015] investigaram o problema de encontrar uma F -subdivisão em que F é um grafo direcionado. Eles encontraram muitos digrafos F para os quais o problema é NP-completo, através do problema de encontrar um 2-linkage em um digrafo [Fortune et al. 1980]. Em particular, este é o caso para todos os digrafos que possuem somente *vértices grandes*, isto é, ou seu grau de saída (ou entrada) é maior ou igual a 3, ou o grau total é maior ou igual a 4 (caso contrário, dizemos que o vértice é *pequeno*). Por outro lado, eles apresentaram algoritmos polinomiais para resolver o problema em vários outros digrafos (como ciclos, caminhos, *spindles*, etc.), muitos dos quais utilizam fluxos com ferramenta. Isso os conduziu a conjecturar que existe uma dicotomia entre instâncias polinomiais e NP-completas. Entretanto, não existe uma imagem clara de quais grafos em geral são tratáveis e quais são difíceis, embora algumas conjecturas forneçam algum indício.

Conjectura 1. [Bang-Jensen et al. 2015] *O problema F -SUBDIVISÃO é NP-completo para todo digrafo não planar F .*

Para abordar a Conjectura 1, gostaríamos de investigar primeiramente o que ocorre com relação aos grafos *periplanares*, que são aqueles que não possuem subdivisões do K_4 ou $K_{2,3}$. Neste trabalho, analisamos o que acontece em subdivisões de orientações $K_{2,3}$.

2. Definições

2.1. Vértices

Seja v um vértice, defina o *conjunto de entrada* e o *conjunto de saída* como $N^-(v)$ e $N^+(v)$ respectivamente e $N(v)$ como o conjunto de todos os seus vizinhos no grafo subjacente.

O *grau de entrada* e o *grau de saída* de um vértice v são $d^-(v)$ e $d^+(v)$ respectivamente e $d(v)$ o seu *grau total*. Além do mais o *conjunto de arcos de entrada* e o *conjunto de arcos de saída* de v são $E^-(v)$ e $E^+(v)$ respectivamente e $E(v)$ é o *conjunto de arcos* que incidem em v .

Um vértice v é uma *fonte* se $d^-(v) = 0$ e é um *sumidouro* se $d^+(v) = 0$. Um vértice v é um *vértice pequeno* se $d^-(v) \leq 2$, $d^+(v) \leq 2$ e $d(v) \leq 3$. Um vértice v é um *vértice grande* se ele não for pequeno.

2.2. Transformações

O *inverso* de um digrafo D qualquer, ou D -*invertido*, é o digrafo criado ao inverter todos os arcos de D , ou seja, (u, v) é um arco em D -*invertido* se, e só se, (v, u) é um arco em D .

Um digrafo é um *digrafo pequeno* se ele contém apenas vértices pequenos e, dado um digrafo D , o D -*pequeno* é o digrafo sem arcos paralelos criado ao transformar cada vértice v de D nos conjuntos de vértices $v^- = \{v_1^-, v_2^-, \dots, v_{d^-(v)}^-\}$ e $v^+ = \{v_1^+, v_2^+, \dots, v_{d^+(v)}^+\}$ de modo que se (u, v) é um arco em D então existem j, i tais que (u_j^+, v_i^-) é um arco em D -pequeno e que, $\forall i, 1 \leq i < d^-(v), 1 \leq j < d^+(v)$, os pares $(v_i^-, v_{i+1}^-), (v_j^+, v_{j+1}^+)$ e $(v_{d^-(v)}^-, v_1^+)$ também são arcos em D -pequeno.

Seja D um digrafo e s, t dois vértices de D . Construimos $D_{peq}(s, t)$ da seguinte maneira: dado D -pequeno, remova os vértices dos conjuntos s^+, s^-, t^+, t^- de D -pequeno. Adicione os vértices s', t' , de modo que, para cada vértice v restante no digrafo: se $\exists a \in s^+/v \in N^+(a)$ então adicione o arco (s', v) ; se $\exists b \in t^-/v \in N^-(b)$ então adicione o arco (v, t') ; caso (s, t) é um arco de D , adicione o arco (s', t') .

2.3. k -Linkage

Um instância de k -*linkage*, dado um digrafo de entrada D , é um par ordenado (S, T) de conjunto de vértices de D tal que, $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ e $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$, de modo que ela é verdadeira se existem caminhos direcionados P_i de s_i para $t_i, \forall i \leq k$, e P_i e P_j são disjuntos em vértices, $\forall i, j \leq k$, e $i \neq j$. [Fortune et al. 1980] Decidir se uma instância de k -*linkage* é verdadeira é um problema NP -Completo.

2.4. Redes

Uma *rede* N é um par $(D(V, E), c : E \rightarrow \mathbb{R})$, na qual D é um digrafo e c é a *função de capacidade* da rede. Sejam s, t vértices de V . A definição de um fluxo f de s para t na rede N é uma função $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que: se $e \in E$, então $0 \leq f(e) \leq c(e)$ e, se $v \in V, v \notin \{s, t\}$, $\sum_{e \in E^-(v)} f(e) = \sum_{e \in E^+(v)} f(e)$, e que $\sum_{e \in E^+(s)} f(e) = \sum_{e \in E^-(t)} f(e)$.

Além do mais $f(s, t) = \sum_{e \in N_-(t)} f(e)$ e $f_{max}(s, t) = max_f(f(s, t))$. Um digrafo de fluxo $D_f(V, E, f)$ de uma rede $N(D(V, E), c)$ e um fluxo f é um subdigrafo de D tal que $\forall e \in E, e \in E_f \Leftrightarrow f(e) > 0$ e que $\forall v \in V, v \in V_f \Leftrightarrow \exists e \in E(v)/f(e) > 0$.

Um *digrafo de fluxo* D_f de um fluxo f com o vértice inicial s e final t pode ser decomposto em caminhos direcionados que podem ou não se intersectar. O conjunto desses caminhos é a decomposição de D_f em caminhos.

2.5. Digrafos

Sejam $F(V_F, E_F)$ e $H(V_H, E_H)$ dois subgrafos de um digrafo D , definimos $F \cap H = L(V_L, E_L)$ como o subgrafo de D tal que $V_L = V_F \cap V_H$ e $E_L = E_F \cap E_H$.

Dizemos que uma *tupla de vértices* F' é uma F -*Subdivisão* em um digrafo D se os vértices contidos na tupla pertencem a alguma F -Subdivisão.

2.6. Caminhos

Um *caminho direcionado* $P(V_P, E_P)$ é um digrafo tal que seus vértices podem ser ordenados em uma tupla (p_1, p_2, \dots, p_l) tal que $(p_{i-1}, p_i) \in E_P, 1 \leq i \leq l$. Dado um caminho

direcionado $P(V_P, E_P)$, dizemos que $P = (p_1, p_2, \dots, p_l)$ quando $V_P = \{p_1, p_2, \dots, p_l\}$ e $\forall a, b, 1 \leq a, b \leq l, (p_a, p_b) \in E_P \Leftrightarrow a = b - 1$.

Uma *intersecção* entre caminhos direcionados P_1, P_2, \dots, P_l , subgrafos de um digrafo D , é um caminho direcionado T tal que $T \subseteq P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_l$.

Um *cruzamento* entre dois caminhos direcionados P e Q , subgrafos de um digrafo D , é um vértice v tal que $v \in P \cap Q$.

O *primeiro cruzamento* entre dois caminhos direcionados $P = (p_1, p_2, \dots, p_l)$ e $Q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$, subgrafos de um digrafo D , de s para t , ou seja, $p_1 = q_1 = s$ e $p_l = q_m = t$ é um vértice v tal que $v = p_{\min\{i|p_i \in P \cap Q, 1 < i < l\}}$.

Sejam P, Q , subgrafos de um digrafo D , dois caminhos direcionados de s para t . P e Q são dois *caminhos direcionados disjuntos em vértice de s para t* se $P \cap Q = \{s, t\}$.

Um (k_1, k_2, \dots, k_p) -*spindle* é um digrafo composto por uma fonte a , um sumidouro b e p caminhos direcionados $\{P_1, P_2, \dots, P_p\}$ disjuntos em vértices de a para b de modo que P_i contenha k_i vértices, para todo $1 \leq i \leq p$.

Um *trecho* T de um caminho direcionado P é um caminho direcionado tal que $T \subset P$. Usamos $T(P, v)$ para denotar um trecho de um caminho direcionado $P = (p_1, \dots, v, \dots, p_l)$ tal que $T(P, v) = (p_1, \dots, v)$.

Um caminho direcionado P *carrega um fluxo* em um fluxo f do vértice s até o vértice t em uma rede N se P inicia com s , termina com t e para todo arco e em P , $f(e) \geq 1$. Além do mais, se $T(V_T, E_T)$ é uma intersecção de caminhos direcionados P_1, P_2, \dots, P_t que carregam fluxos, então, $\forall e \in E_T, f(e) \geq 1$.

Um *caminho direcionado degenerado* $P(V_P, E_P)$ é um caminho direcionado que carrega um fluxo exatamente nos mesmos arcos que outro caminho direcionado $Q(V_Q, E_Q)$ carrega um fluxo. Ou seja $V_P = V_Q$.

3. Lemas introdutórios

Lema 1. [Bang-Jensen et al. 2015] *Seja D um digrafo, é possível encontrar D -pequeno em tempo polinomial.*

Demonstração. Para cada vértice v , serão criado os vértices $\{v_1^-, v_2^-, \dots, v_{d^-(v)}^-, v_1^+, v_2^+, \dots, v_{d^+(v)}^+\}$, ou seja, $d(v)$ vértices. Para cada vértice $u \in \{v_1^-, v_2^-, \dots, v_{d^-(v)}^-, v_1^+, v_2^+, \dots, v_{d^+(v)-1}^+\}$ são criados dois arcos. $v_{d^+(v)}^+$ cria um arco. Logo, para cada vértice v , são criados $2d(v) - 1$ arcos.

$$\Rightarrow \text{Tempo} = \sum_{v \in V} O(3d(v) - 1) = O(|V|(3|E| - |V|)) = O(|V||E|). \quad \square$$

3.1. k -Linkage

O lema abaixo mostra a conservação de caminhos direcionados na transformação de D para D -pequeno.

Lema 2. [Bang-Jensen et al. 2015] *Existe um caminho direcionado de u para v em D se, e só se, existe um caminho direcionado de u_1^+ para $v_{d^-(v)}^-$ no D -pequeno.*

Demonstração. Seja $w^1 = u$ e $w^l = v$, $P = (w^1, w^2, \dots, w^l)$ é um caminho direcionado de u para v se, e só se, existem i_1, i_2, \dots, i_{l-1} e j_1, j_2, \dots, j_{l-1} tais que $(w_{i_t}^{t+}, w_{j_t}^{(t+1)-})$ são arcos em D -pequeno, para todo t , $l > t \geq 1$. Ou seja, se $P' = (w_1^{1+}, \dots, w_{i_1}^{1+}, w_{j_1}^{2-}, \dots, w_{i_2}^{2+}, \dots, w_{j_{l-1}}^{l-}, \dots, w_{d-(v)}^{l-})$ é um caminho direcionado. \square

Para facilitar, dado P um caminho direcionado subgrafo de D , e $P = (p^1, p^2, \dots, p^l)$, denotaremos $P_{peq} = (p_1^{1+}, \dots, p_{i_1}^{1+}, p_{j_1}^{2-}, \dots, p_{i_2}^{2+}, \dots, p_{j_{l-1}}^{l-}, \dots, p_{d-(p^l)}^{l-})$ como o caminho direcionado gerado por P em D -pequeno.

Lema 3. [Bang-Jensen et al. 2015] Sejam P e Q dois caminhos direcionados subgrafos de D . Se P e Q são disjuntos em vértices no digrafo D , então P_{peq} e Q_{peq} são dois caminhos direcionados disjuntos em vértices no D -pequeno.

O lema abaixo segue devido a conservação entre os caminhos de um digrafo D com D -pequeno.

Lema 4. [Bang-Jensen et al. 2015] Seja D um digrafo pequeno e $S, T \subseteq D$, então encontrar se (S, T) é um k -linkage é NP -Completo.

4. Manipulando a capacidade de arcos em redes para encontrar subdivisões

Lema 5. [Bang-Jensen et al. 2015] Seja $N = (D(V, E), c : E \rightarrow \mathbb{R})$ uma rede, tal que $c(e) = 1, \forall e \in E$, e sejam $s, t \in V$, então encontrar $f_{max}(s, t)$ é equivalente a encontrar a maior quantidade de caminhos direcionados que podem ser traçados de s para t tais que sejam disjuntos em arestas dois a dois.

Lema 6. [Bang-Jensen et al. 2015] Seja $D(V, E)$ um digrafo pequeno, sejam $s, t \in V$ e P e Q dois caminhos direcionados de s para t . Se P e Q são disjuntos em arestas, então eles são disjuntos em vértices (com exceção de s e t).

Demonstração. Suponha que exista um vértice w que ambos compartilhem. Como w não é uma das pontas do caminho, então $d_-(w) \geq 2$, porém, para que os caminhos não compartilhem arestas, devemos ter $d_+(w) \geq 2 \Rightarrow d(w) \geq 4 \Rightarrow w$ é um vértice grande. Prova por absurdo. \square

Como existe uma preservação de caminhos disjuntos em vértices entre D e D -pequeno, podemos utilizar algoritmos de fluxo máximo, como o Ford Fulkerson, para encontrar a quantidade máxima de caminhos direcionados disjuntos de s para t .

Lema 7. [Menger 1927] Seja $D(V, E)$ um digrafo e $s, t \in V$. É possível encontrar a quantidade máxima de caminhos direcionados disjuntos em vértices de s para t em tempo polinomial.

O lema abaixo demonstra a preservação de intersecção de caminhos entre D e D -pequeno.

Lema 8. *Seja D um digrafo e sejam P e Q dois caminhos direcionados subgrafos de D . $\{T^1, T^2, \dots, T^l\}$ são intersecções entre P e Q , então $\{T_{peq}^1, T_{peq}^2, \dots, T_{peq}^l\}$ são intersecções entre P_{peq} e Q_{peq} . Além do mais, se T' é uma intersecção de P_{peq} e Q_{peq} , então existe uma intersecção T de P e Q tal que $T' \subseteq T_{peq}$. Ou seja, a transformação de D para D -pequeno preserva intersecções.*

A partir desses lemas, foram desenvolvidos outros teoremas para expandir a possibilidade de padrões de caminhos direcionados entre dois vértices que podem ser encontrados.

Lema 9. *Seja $D(V, E)$ um digrafo e sejam $s, t \in V$. Seja $N = (D_{peq}(s, t), c : E \rightarrow \mathbb{R})$ uma rede tal que $c(e) = 2, \forall e \in E/E^+(s')$ e $c(e) = 1, \forall e \in E^+(s')$, então encontrar $f_{max}(s', t')$ é equivalente a encontrar a maior quantidade de caminhos direcionados que podem ser traçados de s' para t' tais que um trecho de caminho direcionado pode ser intersecção de no máximo 2 de tais caminhos, ou seja, não há intersecção simultânea de 3 caminhos.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que encontramos o fluxo máximo f de s' para t' , com valor do fluxo máximo $f_{max}(s', t')$ e digrafo de fluxo D_f . Como $f_{max}(s', t') = \sum_{e \in E^+(s')} f(e)$ e $\forall e \in E^+(s'), f(e) = 0$ ou $f(e) = 1$, pois $f(e) \leq c(e) = 1$, então $f_{max}(s', t')$ arcos de saída de s' são os inícios de todos os caminhos direcionados da decomposição de D_f em caminhos. Suponha que exista pelo menos uma intersecção w , que não seja s' ou t' , de pelo menos 3 caminhos direcionados. Como cada caminho carrega um fluxo para o vértice w , então $\sum_{e \in E^-(w)} f(e) \geq 3$, e $2d^-(w) = \sum_{e \in E^-(w)} c(e) \geq \sum_{e \in E^-(w)} f(e) \geq 3 \Rightarrow d^-(w) \geq 2$. Como $d^-(w) \leq 2$, então $d^-(w) = 2$. Entretanto temos que $\sum_{e \in E^-(w)} f(e) = \sum_{e \in E^+(w)} f(e)$ e analogamente temos que $d^+(w) = 2$, logo $d(w) = 4$ e temos um absurdo.

(\Leftarrow) Suponha que existam f caminhos que começam em diferentes arcos de s' e que seguem as condições restantes do enunciado. Suponha também que f é o máximo. Cada um desses caminhos leva um fluxo de s' para t' . Logo, $f_{max} \geq f$. Porém, se for possível adicionar mais fluxo, como $c(e) \leq 2$, estaremos adicionando mais um caminho de s' para t' , em um outro arco ainda não saturado de s' , que também segue as condições do enunciado, um absurdo, pois f é máximo. Logo, $f_{max} = f$.

Logo, podemos encontrar a quantidade máxima destes caminhos. Além do mais, podemos usar o algoritmo Ford-Fulkerson para encontrar $f_{max}(s', t')$ em $O(|E|f_{max}(s', t'))$ e como $f_{max} = \sum_{e \in E^+(s')} f(e) \leq \sum_{e \in E^+(s')} c(e) = d^+(s') \leq V$; então podemos encontrar esta quantidade em $O(|E||V|)$. \square

Veja que, no teorema abaixo, não há caminhos direcionados degenerados, uma vez que cada arco de saída de s pode começar somente um caminho.

Teorema 1. *Seja $D(V, E)$ um digrafo e $s, t \in V$. É possível encontrar a quantidade máxima de caminhos direcionados de s para t tais que um trecho diferente de s ou t de um caminho direcionado pode ser uma intersecção de no máximo 2 de tais caminhos em tempo polinomial.*

Demonstração. Em tempo $O(|E||V|)$, podemos construir D -pequeno e é possível construir $D_{peq}(s, t)$ em $O(|E||V|)$ a partir do D -pequeno. Seja $N(D_{peq}(s, t), c)$ uma rede,

com $c(e) = 2, \forall e \in E/E^+(s_1^+)$ e $c(e) = 1 \forall e \in E^+(s_1^+)$. Então é possível encontrar $f_{max}(s', t')$ em $O(|E||V|)$. Pelo **Lema 9**, podemos encontrar a quantidade máxima de caminhos direcionados em que seus trechos diferentes de s' e t' podem ser intersecção de no máximo 2 caminhos de s' para t' . Como, com exceção de s' e t' e seus arcos, os vértices e arcos de D -pequeno são preservados. Pelo **Lema 8**, as intersecções diferentes de s e t dos tais caminhos são preservadas em D e, portanto, conseguimos a quantidade máxima de tais caminhos em $O(|E||V|)$. \square

5. Orientações do $K_{2,3}$

5.1. Orientações isomorfas e equivalentes

Lema 10. *Uma (F -invertido)-subdivisão é resolvido em tempo polinomial se, e só se, F -subdivisão também é resolvido em tempo polinomial.*

Demonstração. Seja D o digrafo usado na entrada do problema de (F -invertido)-subdivisão. Basta procurar uma subdivisão de F em D -invertido, uma vez que uma subdivisão de F -invertido existe se, e só se, houver uma subdivisão de F em D -invertido. Como F é congruente a um (F -invertido)-invertido, se (F -invertido)-subdivisão é resolvido em tempo polinomial, então F -subdivisão é resolvido em tempo polinomial. \square

Sejam a, b, c, d, e os vértices do $K_{2,3}$, de modo que $d(a) = d(e) = 3$. Podemos analisar apenas os casos de orientações com $d^+(a) \geq 2$, pois as outras possibilidades são inversas de tais orientações. As Figuras 1 e 2 mostram todos os casos de orientações relevantes.

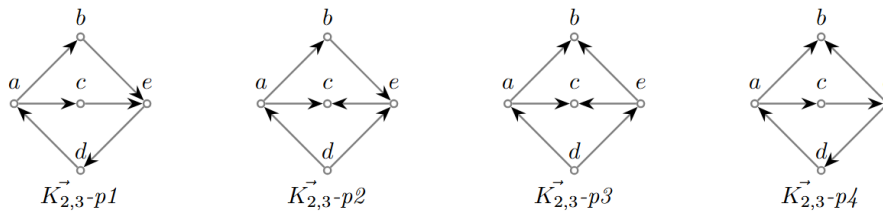


Figura 1. Orientações apenas com vértices pequenos

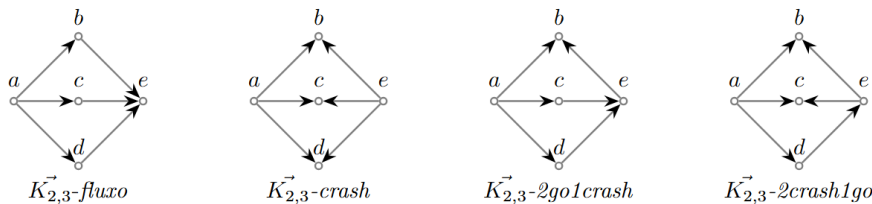


Figura 2. Orientações com dois vértices grandes à esquerda e com um vértice grande à direita

5.2. Orientações do $K_{2,3}$ apenas com vértices pequenos

Teorema 2. [Kawarabayashi and Kreutzer 2015] Existe uma função $f(k)$ tal que todo grafo direcionado com largura em árvore direcionada pelo menos $f(k)$ contém uma grade cilíndrica de tamanho k como um menor borboleta.

Aplicando o Teorema 2, caso o digrafo D de entrada tenha largura em árvore limitada por $f(4)$, uma vez que o problema do k -linkage pode ser resolvido em tempo polinomial nesse tipo de grafo, F -SUBDIVISÃO também pode ser resolvido em tempo polinomial em digrafos com largura em árvore limitada [Johnson et al. 2001].

Caso o digrafo D de entrada não tenha largura em árvore limitada por tal parâmetro, então D contém uma grade cilíndrica de tamanho 4 como uma menor borboleta. Se existe uma subdivisão de F na tal grade cilíndrica então existe uma subdivisão de F no digrafo D . É possível encontrar subdivisões de todos os casos de orientação apenas com vértices pequenos em uma grade cilíndrica de tamanho 4, como mostra a Figura 3, onde as subdivisões estão marcadas em preto.

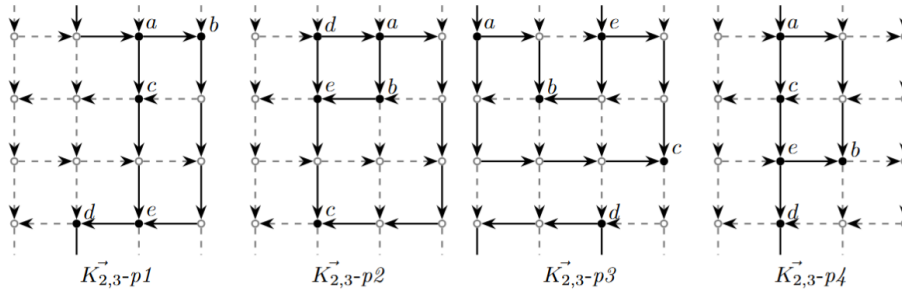


Figura 3. Subdivisões de orientações de $K_{2,3}$ com apenas vértices pequenos encontrados em uma grade cilíndrica de tamanho 4. As subdivisões foram marcadas em preto

5.3. Orientações do $K_{2,3}$ com dois vértices grandes

Teorema 3. [Bang-Jensen et al. 2015] Seja F um (k_1, k_2, \dots, k_p) -spindle e $k_i \leq 2, \forall i, 1 \leq i \leq p$, então uma F -subdivisão é solucionável em tempo polinomial.

O $K_{2,3}^{-fluxo}$ é um $(2, 2, 2)$ -spindle, logo, pelo Teorema 3, $(K_{2,3}^{-fluxo})$ -SUBDIVISÃO é solucionável em tempo polinomial.

Teorema 4. $K_{2,3}^{-crash}$ -subdivisão é NP-Completo.

Demonstração. Faremos uma redução de 2-linkage em digrafos pequenos para $K_{2,3}^{-crash}$ -subdivisão.

Suponha D um digrafo pequeno, e $S = \{s_1, s_2\}, T = \{t_1, t_2\}, S \cap T = \emptyset$, uma instância de 2-linkage. Seja D' o digrafo construído a partir de D , adicionando um vértice d' , e os arcos (s_1, t_2) e (s_2, t_1) .

(\Rightarrow) Suponha que D' contém um $K_{2,3}^{-crash}$ -subdivisão. Como s_1 e s_2 são os únicos vértices grandes, logo $\{s_1, s_2\} = \{a, e\}$, S.P.G, $s_1 = a$ e $s_2 = e$. Como $d', t_2 \in N_+(s_1), d', t_1 \in N_+(s_2)$ e d', t_1, t_2 são sumidouros então $\{d', t_1, t_2\} = \{d, b, c\}$, S.P.G,

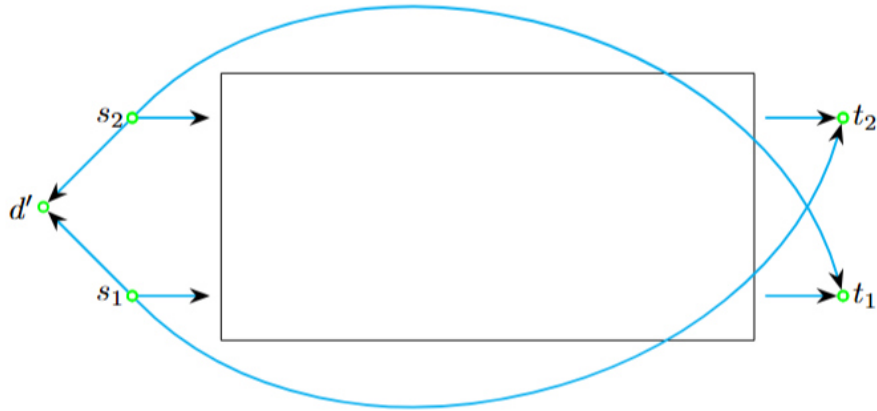


Figura 4. Digrafo construído para redução D' .

$d' = d, t_1 = b$ e $t_2 = c$. Portanto $\{a, e\}$ e $\{b, c\}$ deve ser um 2-linkage \Rightarrow em D' $\{s_1, s_2\}$ e $\{t_1, t_2\}$ é um 2-linkage em D .

(\Leftarrow) Suponha $\{s_1, s_2\}$ e $\{t_1, t_2\}$ é um 2-linkage em $D \Rightarrow \{s_1, s_2\}$ e $\{t_1, t_2\}$ é um 2-linkage em $D' \Rightarrow (s_1, t_1, t_2, d', s_2)$ é um $K_{2,3}$ -crash-subdivisão $\Rightarrow D'$ contém um $K_{2,3}$ -crash-subdivisão.

(S, T) é um 2-linkage em $D \Leftrightarrow D'$ contém um $K_{2,3}$ -crash-subdivisão.

□

5.4. Orientações do $K_{2,3}$ com exatamente um vértice grande

Teorema 5. ($K_{2,3}$ -2go1crash)-SUBDIVISÃO é solucionável em tempo polinomial.

Demonstração. Vamos executar o seguinte algoritmo que retorne verdadeiro se, e só se, há uma $K_{2,3}$ -2go1crash-subdivisão em D :

Seja o D o digrafo de entrada. Para cada par de vértices distintos (s, t) de D , será executada o seguinte procedimento:

Para cada tripla $\{(s, a_1), (s, a_2), (s, a_3)\}$ de arcos distintos de saída de s e para cada par $\{(e_1, t), (e_2, t)\}$ de arcos distintos de entrada de t , tais que $a_i \neq e_j, i \in \{2, 3\}$ e $j \in \{1, 2\}$, exclua os restantes dos arcos de s e t .

Pelo **Teorema 1**, é possível encontrar em tempo polinomial a quantidade máxima q de caminhos direcionados entre s e t sem intersecção simultânea de 3 dos tais caminhos.

Se $q = 3$ retorne verdadeiro. Se não, teste com a próxima combinação de arcos. Quando esgotar as possibilidades de arcos, passe para o próximo par de vértices. Caso todos os pares de vértices sejam esgotados, retorne falso.

O algoritmo tem complexidade $\sum_{s,t \in V} O\left(\binom{d(s)}{3} \binom{d(t)}{2}\right) \times O(|V||E|) = \sum_{s,t \in V} O\left(\binom{|V|}{3} \binom{|V|}{2}\right) \times O(|V||E|) = \sum_{s,t \in V} O(|V|^5) \times O(|V||E|) = \sum_{s,t \in V} O(|V|^6|E|) = O(|V|^8|E|)$. Resta validar a equivalência do algoritmo com encontrar uma $K_{2,3}$ -2go1crash-subdivisão.

Veja que se existe uma tupla (a, b, c, d, e) que é uma $K_{2,3}^{\vec{2}go1crash}$ -subdivisão em D , então existem 3 caminhos direcionados entre a e b sem intersecção de 3 caminhos, logo $q = 3$ para alguma combinação de arcos do par (a, b) e o algoritmo retornaria verdadeiro.

Logo, para validar o algoritmo precisamos provar que, se $q = 3$, então temos uma $K_{2,3}^{\vec{2}go1crash}$ -subdivisão.

Se $q = 3$, nomeie os tais caminhos direcionados como P, Q, R . O primeiro arco de P é (s, a_1) , de Q é (s, a_2) e de R é (s, a_3) . Além do mais, pelo princípio da casa dos pombos, dois caminhos devem compartilhar um último arco, uma vez que só há dois possíveis. O último arco de P é (e_1, t) e o último arco de Q, R é (e_2, t) .

Caso 1: Suponha que não há cruzamentos entre P e Q e nem entre P e R , excluindo s e t . Seja w o primeiro cruzamento entre Q e R , então (s, t, a_2, a_3, w) é um $K_{2,3}^{\vec{2}go1crash}$ -subdivisão.

Caso 2: P tem um primeiro cruzamento com Q ou R , S.P.G., suponha que existe um primeiro cruzamento u entre P e Q . E seja w o primeiro cruzamento entre Q e R . Veja que $w \neq u$, pois senão teríamos três caminhos se cruzando simultaneamente.

Caso 2.1: Se $w \in T(Q, u)$ então (s, u, a_2, a_3, w) é um $K_{2,3}^{\vec{2}go1crash}$ -subdivisão.

Caso 2.2: Se $u \in T(Q, w)$ então (s, w, a_2, a_3, u) é um $K_{2,3}^{\vec{2}go1crash}$ -subdivisão.

Portanto se $q = 3$ para alguma combinação de arcos para algum par (s, t) então temos uma $K_{2,3}^{\vec{2}go1crash}$ -subdivisão. □

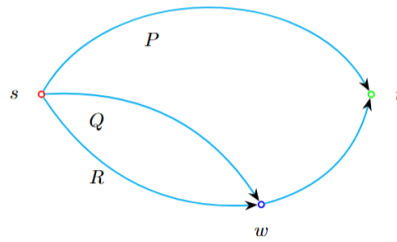


Figura 5. Caso 1: D' , se não há primeiro cruzamento entre P e Q e nem em P e R .

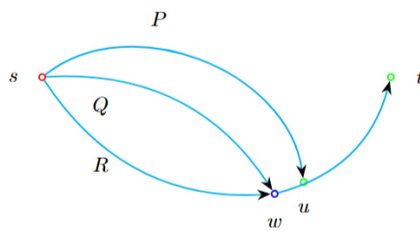


Figura 6. Caso 2.1: D' , se $w \in T(Q, u)$.

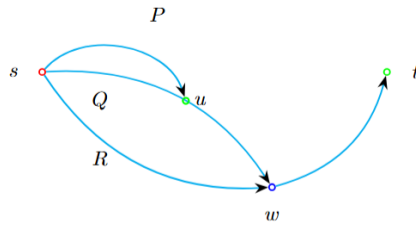


Figura 7. Caso 2.2: D' , se $u \in T(Q, w)$.

O caso $(K_{2,3}^{\vec{2}crash1go}$ -subdivisão permanece aberto.

6. Tabela resumo: resultados dos $K_{2,3}^{\vec{2}}$ -subdivisões

Orientação	Classe
$K_{2,3}^{\vec{2}p1}$	P
$K_{2,3}^{\vec{2}p2}$	P
$K_{2,3}^{\vec{2}p3}$	P
$K_{2,3}^{\vec{2}p4}$	P
$K_{2,3}^{\vec{2}fluxo}$	P^*
$K_{2,3}^{\vec{2}crash}$	NP -Completo
$K_{2,3}^{\vec{2}go1crash}$	P
$K_{2,3}^{\vec{2}crash1go}$	Aberto

(*) (Bang-Jensen, Havet Maia. 2015) $(2, 2, 2)$ – *Spindle*

Agradecimentos

A minha mãe, Prof.^a Daniela Medeiros Cedro, futura doutora, excelente profissional e uma grande mãe. Obrigado por cuidar de mim em todos os momentos, por sempre me tratar com muito amor e por ter me tornado um homem bom.

A meu pai, Prof. Dr. Antônio de Barros Serra, homem de compaixão, de luta e de paz. Obrigado pelo seu amor e carinho, por estar sempre ao meu lado e pela suas visões claras, que estão sempre a me guiar.

A Prof.^a Dr.^a Ana Karolinnia Maia. Obrigado por sua tamanha inteligência e autenticidade. Obrigado pelas nossas explorações matemáticas sempre tão interessantes e por sempre trazer apoio as minhas atividades acadêmicas.

Ao Prof. Dr. Carlos Eduardo Fisch de Brito, nossos encontros mudaram minha vida. Obrigado por me mostrar seus caminhos, por abrir meus pensamentos e pelo conhecimento inestimável que pude aprender com o senhor.

Aos professores participantes da banca examinadora Prof. Dr. Victor Almeida Campos e Prof.^a Dr.^a Ana Shirley Ferreira da Silva pelo tempo e suas excelentes contribuições à pesquisa e o ensino.

A minha falecida vó Vanda, por também ter me criado. Seu sorriso é inesquecível e você é imparável.

As minhas tias Bi, Lu e May. Obrigado por estarem comigo, brincando e cuidando de mim, da minha infância até hoje. Vamos sempre nos manter uma família.

A Laisa Luz, meu anjo, que você continue sempre iluminando os meus dias. Seu coração é enorme e você será uma grande médica. Te amo, obrigado por fazer parte de mim e da minha vida.

Ao meu irmão, Christian Serra. Passamos por muitas coisas juntos e fico feliz que hoje tenhamos paz. Que você encontre sucesso e felicidade em seus caminhos.

Aos meus irmãos Astolpho Wagner e Alessandra Brasil. É muito bom ver vocês e fico muito feliz em ver a família crescer.

Aos meus primos, Gabriel, Dante e Igor. Quero ver vocês crescendo e escolhendo seus caminhos. Ao meu primo João Paulo Rocha, pelas nossas lembranças de infância e pelos os momentos que podemos ainda criar juntos.

Ao meu amigo Antônio Cauã Melo, obrigado por ser meu irmão por todo este tempo. Te amo amigo, você é muito especial e uma inspiração para mim, que continuemos perto pelo o tempo que teremos.

Ao meu amigo João Victor Dourado, agradeço muito pelas nossas longas conversas, sua sinceridade e por sempre apoiar até as minhas ideias mais malucas. Você tem um grande futuro, irmão, eu acredito em você.

Ao meu amigo Max Costa, por sua naturalidade e também por acompanhar os meus projetos. Não há pessoa melhor que você para apontar os meus enganos e me ajudar a melhorar.

Ao meu amigo Felipe Maia, a pessoa mais virtuosa que eu já conheci. Obrigado por sua eterna simpátia e por ter sido minha companhia em meus momentos mais solitários.

Ao meu amigo Gabriel Silva Ribeiro, obrigado por acompanhar essa minha jornada acadêmica, me apoiar em trabalhos e por ser, de fato, um amigo. Agradeço pelas nossas brincadeiras e pela nossa parceria.

Ao meu amigo Rafael Porto, por sua amizade leve e divertida. Continue sendo sempre essa pessoa incrível e empática e que possamos fazer mais receitas.

Ao meu amigo Theo Araújo, pelas nossas conversas críticas e interessantes. Obrigado por sempre trazer novos pontos de vistas e trazer mais valor as minhas visões.

Referências

- Bang-Jensen, J., Havet, F., and Maia, A. K. (2015). Finding a subdivision of a digraph. *Theoretical Computer Science*, 562:283 – 303.
- Chudnovsky, M., Robertson, N., Seymour, P., and Thomas, R. (2006). The strong perfect graph theorem. *Ann. of Math. (2)*, 164(1):51–229.
- Chudnovsky, M. and Seymour, P. (2007). Excluding induced subgraphs. In *Surveys in combinatorics 2007*, volume 346 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 99–119. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- Chudnovsky, M. and Seymour, P. (2010). The three-in-a-tree problem. *Combinatorica*, 30(4):387–417.
- Fortune, S., Hopcroft, J., and Wyllie, J. (1980). The directed subgraph homeomorphism problem. *Theoretical Computer Science*, 10(2):111 – 121.
- Granot, D., Granot, F., and Zhu, W. R. (2000). Naturally submodular digraphs and forbidden digraph configurations. *Discrete Appl. Math.*, 100(1-2):67–84.
- Johnson, T., Robertson, N., Seymour, P. D., and Thomas, R. (2001). Directed tree-width. *J. Combin. Theory Ser. B*, 82(1):138–154.
- Kawarabayashi, K.-i. and Kreutzer, S. (2015). The directed grid theorem. In *Proceedings of the 47th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*.

Lévêque, B., Lin, D. Y., Maffray, F., and Trotignon, N. (2009). Detecting induced subgraphs. *Discrete Appl. Math.*, 157(17):3540–3551.

Menger, K. (1927). Zur allgemeinen kurventheorie. *Fundamenta Mathematicae*, 10(1):96–115.

Robertson, N. and Seymour, P. D. (1995). Graph minors. XIII. The disjoint paths problem. *J. Combin. Theory Ser. B*, 63(1):65–110.