UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Jonatan Floriano da Silva

# Curvaturas Médias Anisotrópicas: Estabilidade e Resultados para Hipersuperfícies Não-Convexas

Fortaleza
2011

**Jonatan Floriano da Silva**

# Curvaturas Médias Anisotrópicas: Estabilidade e Resultados para Hipersuperfícies Não-Convexas

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Antonio Gervásio Colares.

Fortaleza
2011

Silva, Jonatan Floriano da
S58c Curvaturas médias anisotrópicas: estabilidade e resultados para hipersuperfícies não-convexas / Jonatan Floriano da Silva. – Fortaleza : 2011.
75 f.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Gervásio Colares
Área de concentração: Matemática
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Fortaleza, 2011.

1.Geometria diferencial. I. Colares, Antonio Gervásio (Orient.)

CDD 516.36

*Dedico este trabalho a minha esposa Stefanie e aos meus pais Afonso Xavier e Maria Inêz.*

# AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus, por sua infinita graça e misericórdia;

Aos meus pais Afonso Xavier e Maria Inêz, por toda assistência e orações (sem eles não estaria aqui);

À minha querida e amada esposa Stefanie Cavalcanti, pelo amor, carinho, companhia e compreensão; e a sua família pela consideração demonstrada e aos nossos amigos;

Ao professor Gervásio Colares, por todo apoio, incentivo e orientação competente, além da escolha deste belo tema o qual tive o privilégio de estudar;

Agradeço aos professores Jorge Herbert, Abdênago Alves, Paolo Piccione e Oscar Palmas por terem aceitado o convite de participar da banca examinadora e pelas contribuições dadas a este trabalho através de sugestões e correções.

Aos meus colegas e ex-colegas de pós-graduação Flávio França, Cícero de Aquino, Ulisses Parente, Marco Velásquez, Jobson de Queiroz, Tiago Caúla, Damião Júnio, Michel Pinho, Luiz Fernando, Valber Marcio e a todos que contribuiram direta e indiretamente até aqui;

Aos secretários da pós-graduação Andréa Dantas, Adriano Neves e Catarina Gomes, pela simpatia e ajuda em resolver assuntos de natureza administrativa e aos bibliotecários Rocilda Cavalcante, Fernanda Freitas e Erivan Carneiro, pelo eficiente desempenho de suas atividades;

Finalmente, ao CNPq, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

*Do SENHOR é a terra e a sua plenitude, o mundo e aqueles que nele habitam.*

*Porque ele a fundou sobre os mares e a firmou sobre os rios.*

*Quem subirá ao monte do SENHOR ou quem estará no seu lugar santo?*

*Aquele que é limpo de mãos e puro de coração, que não entrega a sua alma à vaidade, nem jura enganosamente.*

*Este receberá a bênção do SENHOR e a justiça do Deus da sua salvação.*

*Esta é a geração daqueles que buscam, daqueles que buscam a tua face, ó Deus de Jacó.*

*Levantai, ó portas, as vossas cabeças; levantai-vos, ó entradas eternas, e entrará o Rei da Glória.*

*Quem é este Rei da Glória? O SENHOR forte e poderoso, o SENHOR poderoso na guerra.*

*Levantai, ó portas, as vossas cabeças; levantai-vos, ó entradas eternas, e entrará o Rei da Glória.*

*Quem é este Rei da Glória? O SENHOR dos Exércitos; ele é o Rei da Glória.*

*Sl.* 24

# RESUMO

Este trabalho consiste em duas partes.

Na primeira parte, estudaremos hipersuperfícies compactas sem bordo imersas no espaço Euclidiano com o quociente das curvaturas médias anisotrópicas $\frac{(r+1)C_n^{r+1}H_{r+1}^F}{a(k+1)C_n^{k+1}H_{k+1}^F-b} =$ constante. Provaremos que tais hipersuperfícies são pontos críticos para um problema variacional de preservar uma combinação linear da $(k, F)$-área e do $(n+1)$-volume determinado por $M$. Demostraremos que a hipersuperfície é $(r, k, a, b)$-estável se, e somente se, a menos de translação e homotetia, ela é a Wulff shape de $F$ (veja Seção 2.1), sob algumas condições acerca de $a, b \in R$.

Na segunda parte desse trabalho, obtemos outras caracterizações para a Wulff shape envolvendo as curvaturas médias anisotrópicas de ordem superior de uma hipersuperfície $M$ em $R^{n+1}$ e o conjunto $\mathfrak{W} = R^{n+1} - \bigcup_{p\in M} T_p$. Os resultados são obtidos para hipersuperfícies compactas não convexas satisfazendo $\mathfrak{W} \neq \emptyset$.

# ABSTRACT

This work consists of two parts.

In the first part we deal with a compact hypersurface without boundary immersed in to the Euclidean space with the quotient of anisotropic mean curvatures $\frac{(r+1)C_n^{r+1}H_{r+1}^F}{a(k+1)C_n^{k+1}H_{k+1}^F-b} = constant$. Such a hypersurface is a critical point for the variational problem preserving a linear combination of the $(k, F)$-area and $(n+1)$-volume enclosed by $M$. We show that it is $(r, k, a, b)$-stable if, and only if, up to translations and homotheties, it is the Wulff shape, under some assumptions on $a, b \in R$.

In the second part we obtain further characterizations for the Wulff shape involving the anisotropic mean curvatures of higher order of a hypersurface $M$ in $R^{n+1}$ and the set $\mathfrak{W} = R^{n+1} - \bigcup_{p\in M} T_p$. Results are obtained for non-convex compact hypersurfaces satisfying $\mathfrak{W} \neq \emptyset$.

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

Este trabalho consiste em duas partes.

Na primeira parte, estudaremos hipersuperfícies compactas sem bordo imersas no espaço Euclidiano com o quociente das curvaturas médias anisotrópicas $\frac{(r+1)C_n^{r+1}H_{r+1}^F}{a(k+1)C_n^{k+1}H_{k+1}^F-b} =$ constante. Provaremos que tais hipersuperfícies são pontos críticos para um problema variacional de preservar uma combinação linear da $(k, F)$-área e do $(n+1)$-volume determinado por $M$. Demostraremos que a hipersuperfície é $(r, k, a, b)$-estável se, e somente se, a menos de translação e homotetia, ela é a Wulff shape de $F$, onde $F : S^n \longrightarrow R^+$ é uma função positiva (veja Seção 2.1), sob algumas condições acerca de $a, b \in R$.

Dado uma imersão $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ de uma variedade $M$ compacta, sem bordo e orientada, para cada $r$, $0 \leq r \leq n$, definimos a $(r, F)$-*função área* $\mathfrak{A}_{r,F} : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow R$ associada a variação $X : M \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow R^{n+1}$ (veja Seção 3.1) de $x$ por

$$\mathfrak{A}_{r,F}(t) = \int_M F(N_t)S_r dM_t.$$

O $(n+1)$-volume algébrico determinado por $M$ é dado por

$$V(t) = \frac{1}{n+1}\int_M \langle X_t, N_t\rangle\, dM_t. \tag{1.1}$$

O problema variacional anisotrópico preservando o volume tem sido estudado por vários autores (veja [27], [29], [19]). Para um tal problema variacional, eles chamaram uma imersão crítica $x$ do funcional $\mathfrak{A}_{r,F}$ (isto é, uma hipersuperfície com $H_{r+1}^F =$ constante) estável se, e somente se, a segunda variação de $\mathfrak{A}_{r,F}$ é não negativa para toda variação de $x$ preservando o $(n+1)$-volume $V$.

Historicamente, a referência clássica é o artigo de G. Wulff [30] motivado por aplicações em Cristalografia. Propriedades físicas de um simples cristal diferem com a direção, isto é, eles são anisotrópicos. Mais recentemente, B. Andrews [3] tratou da evolução pela curvatura média anisotrópica, uma formulação geral dos fluxos cristalinos conhecida como modelos de crescimento de cristais [6].

Em 1998, Palmer em [27] (veja também Winklmann em [29]) considerou o caso $r = 0$ e provou:

**Teorema A ( [27] )** Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada com $H_1^F =$ constante. Então $x$ é estável se, e somente se, a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$.

Em 2008, He e Li em [19] estudaram o caso de imersões de hipersuperfícies em $R^{n+1}$ com a $(r+1)$-ésima curvatura média anisotrópica constante e provaram:

**Teorema B ( [19] )** Suponha $0 \leq r \leq n-1$. Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada com $H_{r+1}^F =$ constante. Então, $x$ é estável se, e somente se, a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$.

Em 2008, He e Li em [16] consideraram o caso de imersões de hipersuperfícies em $R^{n+1}$ com o quociente constante entre a $(r+1)$-ésima curvatura média anisotrópica e a $r$-ésima curvatura média anisotrópica, que são pontos críticos para um problema variacional de minimizar o funcional $\mathfrak{A}_{r,F}$, preservando a $(r-1)$-área, $\mathfrak{A}_{(r-1),F}$, da hipersuperfície em vez do $(n+1)$-volume. Para tal problema variacional, eles chamaram uma imersão crítica $x$ do funcional $\mathfrak{A}_{r,F}$ (isto é, uma hipersuperfície com $\frac{H_{r+1}^F}{H_r^F} =$ constante) ponto crítico estável de $\mathfrak{A}_{r,F}$ se, e somente se, a segunda variação de $\mathfrak{A}_{r,F}$ é não negativa para toda variação de $x$ preservando a $(r-1)$-área da hipersuperfície. Eles provaram:

**Teorema C ( [16] )** Seja $M$ uma variedade Riemanniana $n$-dimensional, orientável, conexa e compacta sem bordo. Uma imersão isométrica $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ é ponto crítico estável de $\mathfrak{A}_{r,F}$ se, e somente se, a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$, $1 \leq r \leq n-1$.

Resultados similares foram provados em [18] pelos mesmos autores para formas espaciais quando $F = 1$.

Consideramos nessa primeira parte hipersuperfícies em $R^{n+1}$ que são pontos críticos para o problema variacional de minimizar o funcional $\mathfrak{A}_{r,F}$ preservando uma combinação linear da $(k, F)$-área, $\mathfrak{A}_{k,F}$, e do volume $V$ de $M$, onde $0 \leq k < r \leq n-1$, denotada por

$\mathfrak{C}_{a,b;k}$. Por um argumento padrão envolvendo multiplicadores de Lagrange, isto significa que estamos considerando os pontos críticos do funcional

$$\mathfrak{J}_{r,k,a,b}(t) = \mathfrak{A}_{r,F}(t) + \lambda\mathfrak{C}_{a,b;k}(t),$$

onde $\mathfrak{C}_{a,b;k}(t) = a\mathfrak{A}_{k,F}(t) + bV(t)$, $\lambda$ é uma constante a ser determinada e $a, b \in R$ são ambos não nulos. Mostraremos que a equação de Euler-Lagrange de $\mathfrak{J}_{r,k,a,b}$ é (veja Proposição 3.4):

$$(r+1)S_{r+1} + \lambda\left[a(k+1)S_{k+1} - b\right] = 0.$$

Assim os pontos críticos são exatamente as hipersuperfícies com

$$\frac{(r+1)C_n^{r+1}H_{r+1}^F}{a(k+1)C_n^{k+1}H_{k+1}^F - b} = \frac{(r+1)S_{r+1}}{a(k+1)S_{k+1} - b} = constante.$$

Introduzimos o conceito de $(r, k, a, b)$-estabilidade que para o caso $k = b = 0$, $a = 1$ e $F \equiv 1$ coincide com o dado em [18], para o caso do espaço Euclidiano. Para um tal problema variacional, chamamos uma imersão crítica $x$ do funcional $\mathfrak{A}_{r,F}$ (isto é, uma hipersuperfície com $\frac{(r+1)C_n^{r+1}H_{r+1}^F}{a(k+1)C_n^{k+1}H_{k+1}^F-b} = \text{constante}$) $(r, k, a, b)$-estável se, e somente se, a segunda variação de $\mathfrak{A}_{r,F}$ é não negativa para toda variação de $x$ preservando $\mathfrak{C}_{a,b;k}$. Também, para $a = 0$ e $b = 1$ nosso conceito coincide com o dado em [19] para estabilidade. Em particular, para $a = 0, b = 1$ e $F = 1$, obtemos a $r$-estabilidade de hipersuperfícies em $R^{n+1}$ como definido em [4].

Provamos então o seguinte.

**Teorema 3.8** Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma imersão de uma hipersuperfície suave, fechada e orientada. Se $x(M)$ é, a menos de translação e homotetia, a Wulff shape de $F$, então $x$ é $(r, k, a, b)$-estável para

$$\begin{cases} a = 0 & \text{e} \quad b \neq 0; \\ a \neq 0 & \text{e} \quad b = 0; \\ a, b \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} \notin \left[\frac{k!(n-k-1)!}{n!}, \frac{r+1}{r-k}.\frac{k!(n-k-1)!}{n!}\right). \end{cases}$$

O Teorema 3.8 generaliza resultados em [27], [19], [18] e [1].

O próximo resultado é uma caracterização da Wulff shape como ponto crítico para o problema variacional no caso onde $b = 0$.

**Theorem 3.10** Suponha $0 \leq k < r \leq n-1$. Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma hipersuperfície suave, fechada e orientada. Então, $x$ é ponto crítico do funcional $\mathfrak{F}_{r,k,a,0}$ se, e somente se, a menos de translação de homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$.

O próximo resultado, sob certas condições acerca de $a, b \in R$, apresenta uma recíproca do Teorema 3.8.

**Teorema 3.13** Suponha $0 \leq k < r \leq n-1$. Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma hipersuperfície suave, fechada e orientada. Se $x$ é $(r, k, a, b)$-estável para $a, b \in R$ não nulos, tal que $\lambda_{a,b} \leq 0$, então a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$, onde $\lambda_{a,b}$ é dado por (3.12).

Finalmente, apresentamos uma caracterização da Wulff shape de $F$ como ponto crítico para um problema variacional de minimizar o funcional $\mathfrak{A}_{r,F}$ preservando uma certa combinação linear da $(k, F)$-área, $\mathfrak{A}_{k,F}$, e do volume de $M$, $V$, onde $0 \leq k < r \leq n-1$. Neste resultado obtemos uma nova caracterização da Wulff shape, além de recuperar o Teorema $A$, o Teorema $B$ e generalizar o Teorema $C$ para o quociente das curvaturas médias anisotrópicas.

**Teorema 3.15** Suponha $0 \leq k < r \leq n-1$. Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma hipersuperfície suave, fechada e orientada para qual $\frac{(r+1)S_{r+1}}{a(k+1)S_{k+1}-b}$ é uma constante, onde $a = 0$ ou $b = 0$ ou $a, b \in R$ não nulos tal que $\lambda_{a,b} < 0$. Então, $x$ é $(r, k, a, b)$-estável se, e somente se, a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$.

Observamos que para $k = r = a = 0$ e $b = 1$, o Teorema 3.15 corresponde ao Teorema 1 em [27]. Para $a = 0$ e $b = 1$, obtemos o Teorema 1.3 em [19]. Em particular, se além de $a = 0$ e $b = 1$, fizermos $F = 1$, obteremos o teorema de $r$-estabilidade para hipersuperfícies compactas em $R^{n+1}$ provado por Alencar, Do Carmo e Rosenberg em [1].

Concluímos então que nossos resultados e métodos, apresentados nessa primeira parte, generalizam e unificam alguns teoremas e tratamentos de provas sobre a estabilidade de hipersuperfícies compactas em $R^{n+1}$ nos casos anisotrópicos e euclidianos.

Na segunda parte desse trabalho, obtemos outras caracterizações para a Wulff shape envolvendo as curvaturas médias anisotrópicas de ordem superior de uma hipersuperfície $M$ em $R^{n+1}$ e o conjunto $\mathfrak{W} = R^{n+1} - \bigcup_{p \in M} T_p$. Os resultados são obtidos para hipersuperfícies compactas não convexas satisfazendo $\mathfrak{W} \neq \emptyset$.

Inicialmente demostramos a seguinte fórmula integral do tipo Minkowski para hipersuperfícies compactas em $R^{n+1}$, para o caso anisotrópico, que generaliza a fórmula integral provada por He e Li em [17], como apresentada abaixo (veja Teorema 4.2 na Seçao 4.1):

*Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada e orientável $M^n$, $F : S^n \longrightarrow R^+$ satisfazendo a condição (2.1) e $1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq n$ inteiros. Então, para $0 \leq r \leq n-1$, temos a seguinte fórmula integral do tipo Minkowski:*

$$\begin{aligned}
\int_M \quad \{ & \left[ q\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1} - p\,\langle x, N\rangle^{p-1}\right] \left\langle AP_r(\nabla_{S^n}F), x^T\right\rangle + \qquad (1.2)\\
+ & \left(F\,\langle x, N\rangle^{p-1} - Fq\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1}\right)\left(div(P_r x^T) - (n-r)\begin{pmatrix} n \\ r\end{pmatrix} H_r^F\right) - \\
- & \; Fq(q-1)\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-2}\left\langle P_r x^T, x^T\right\rangle - \\
- & \; (n-r)\begin{pmatrix} n \\ r\end{pmatrix}\left(Fq\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1} H_r^F + H_{r+1}^F\,\langle x, N\rangle^p\right)\}dM = 0.
\end{aligned}$$

De fato, se $p = q = 1$ no Teorema 4.2, obtemos que

$$\int_{M^n} \left(F(N)H_r^F + H_{r+1}^F\,\langle x, N\rangle\right) dM = 0,$$

resultado provado em [17].

Na Seção 4.2, obtemos resultados envolvendo uma combinação linear das curvaturas médias anisotrópicas de ordem superior, como em [2], resultando numa caracterização da Wulff shape, como apresentado abaixo. A expressão de um $H_s^F$ como combinação linear dos outros $H_r^F$'s (com coeficientes constantes) foram consideradas por muitos autores (veja, por exemplo, [9], [8]). No primeiro resultado dessa seção, os coeficientes da combinação linear são funções, como segue (veja Teorema 4.5 na Seção 4.2):

*Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada e orientável $M^n$ e $F : S^n \longrightarrow R^+$ satisfazendo a condição (2.1). Assuma que para inteiros $r$ e $s$, com $0 < r < s-1 \leq n-1$, as curvaturas médias anisotrópicas de ordem superior são linearmente relacionadas por*

$$H_s^F = a_r H_r^F + ... + a_{s-1} H_{s-1}^F, \qquad (1.3)$$

*para funções contínuas não negativas $a_r, ..., a_{s-1} : M \longrightarrow R$ satisfazendo $\beta_i \leq \alpha_{i+2}, \forall r \leq i \leq s-3$, $\beta_{s-1} \leq \eta, \beta_{s-2} \leq \eta, \alpha_r \geq \xi, \alpha_{r+1} \geq \xi$, onde $\alpha_i := inf_M\{a_i\}$, $\beta_i := sup_M\{a_i\}$ e $\eta, \xi$ são constantes positivas tais que $H_{s-1}^F \leq \frac{\xi}{\eta} H_{r-1}^F$ e $H_{s-1}^F \leq H_{s+1}^F$. Então, a menos de translação de homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$.*

No Teorema 4.5, observe que se $a_l > 0$ para algum $l \in \{r, ..., s-1\}$ as constantes $\xi$ e $\eta$ sempre existem. Por exemplo, basta tomar $\frac{\eta}{\xi} = inf_M \left\{ \frac{H^F_{r-1}}{H^F_{s-1}} \right\} > 0$ (veja Lema 4.4 na Seção 4.2).

Definimos o conjunto $\mathfrak{W} = R^{n+1} - \bigcup_{p \in M} T_p$, onde $T_p$ é o hiperplano de $R^{n+1}$ em $x(p)$, dado pelo espaço tangente a $x(M)$ em $x(p)$ (veja Definição 4.7 na Seção 4.2).

Podemos remover a hipótese $H^F_{s-1} \leq H^F_{s+1}$ no Teorema 4.5 e ainda obtermos o resultado. Para isto necessitamos que as fuñções $a_i$'s sejam constantes. Nossa outra alternativa para se livrar da hipótese $H^F_{s-1} \leq H^F_{s+1}$ é supor que o conjunto $\mathfrak{W} \subset R^{n+1}$ é não vazio (e melhorar a variação de $r$ e $s$) como segue (veja Teorema 4.9 na Seção 4.2):

*Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada e orientável $M^n$ e $F : S^n \longrightarrow R^+$ satisfazendo a condição (2.1). Suponha que uma das opções abaixo acorre.*

1. *Existem inteiros $r$ e $s$, com $0 < r < s < n$, tais que as curvaturas médias anisotrópicas de ordem superior são linearmente relacionadas por*
$$H^F_s = a_r H^F_r + ... + a_{s-1} H^F_{s-1} \tag{1.4}$$
*para números não negativos $a_r, ..., a_{s-1}$;*

2. *$\mathfrak{W} \neq \emptyset$ e existem inteiros $r$ e $s$, com $0 \leq r < s < n$ ou $0 < r < s \leq n$, tais que as curvaturas médias anisotrópicas de ordem superior são linearmente relacionadas por*
$$H^F_s = a_r H^F_r + ... + a_{s-1} H^F_{s-1} \tag{1.5}$$
*para números não negativos $a_r, ..., a_{s-1}$.*

*Então, a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$.*

Para provar o resultado acima usamos a fórmula integral tipo Minkowski.

Note que $\mathfrak{W}$ não vazio é uma hipótese mais fraca que a hipótese de convexidade para uma hipersuperfície $x(M)$. De fato, para $M$ conexo e fechado, a hipótese "$\mathfrak{W}$ não vazio" é equivalente a hipótese "$x(M)$ ser o bordo de um (único) domínio estrelado aberto $V$ em $R^{n+1}$" ([14]). Além disso, neste caso $\mathfrak{W}$ é o interior do subconjunto dado pelos pontos de $V$ que podem ser conectados a qualquer outro ponto de $V$ por um segmento de reta contido em $V$. Portanto, quando $x(M)$ é convexo, então também $V$ é convexo e $\mathfrak{W}$ coincide com o interior de $V$ (veja Observação 3.14 na Secão 4.2).

Como uma aplicação do Teorema 4.9 provamos o seguinte resultado (veja Corolário 4.10 na Seção 4.3):

*Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada e orientável $M^n$, $F : S^n \longrightarrow R^+$ satisfazendo a condição (2.1) e $\mathfrak{W} \neq \emptyset$. Se $\frac{H_s^F}{H_r^F}$ = constante para $0 \leq r < s < n$ ou $0 < r < s \leq n$, então, a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$.*

Provamos mais duas aplicações do Teorema 4.9. Abaixo a primeira aplicação (veja Corolário 4.11 na Seção 4.3):

*Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada e orientável $M^n$ e $F : S^n \longrightarrow R^+$ satisfazendo a condição (2.1), com $(r+1)$-ésima curvatura média anisotrópica $H_{r+1}^F$ constante, $0 \leq r \leq n-1$. Então, o conjunto de pontos $\mathfrak{W}$ é não vazio se, e somente se, a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$.*

No corolário acima, obtemos o Corolário 1.1 em [17], com a condiçao $\mathfrak{W}$ não vazio em vez da convexidade da hipersuperfície.

A outra aplicação segue abaixo (veja Teorema 4.12 na Seção 4.3):

*Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada e orientável $M^n$ e $F : S^n \longrightarrow R^+$ satisfazendo a condição (2.1). Se $\frac{H_s^F}{H_r^F}$ = constante para $1 \leq r < s \leq n$, então a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$.*

O Teorema 4.12, generaliza para a o caso anisotrópico o teorema obtido por [22] para o caso Euclidiano.

Também, no Teorema 4.12, reobtemos o Teorema 1.3, (para $k \geq 1$) o Teorema 1.5 e (para $k \geq 1$) o Teorema 1.4, em [17], sem a hipótese de convexidade.

Ainda na Seção 4.3, provamos (veja Teorema 4.13):

*Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada e orientável $M^n$ e $F : S^n \longrightarrow R^+$ satisfazendo a condição (2.1), com a $r$-ésima curvatura média anisotrópica $H_{r+1}^F$ constante, $0 \leq r \leq n-1$. Então, o conjunto de pontos $\mathfrak{W}$ é não vazio se, e somente se, a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é $r$-estável.*

Aqui, $r$-estável significa o seguinte: $M^n$ é ponto crítico do funcional

$$\mathfrak{F}_{r,F;\Lambda} = \int_M F(N) H_r^F C_n^r dM + \Lambda V(x),$$

onde $\Lambda$ é uma constante e $V = \frac{1}{n+1}\int_M \langle x, N\rangle\, dM$ é o $(n+1)$-volume determinado por $M$, e a segunda variação de $\mathfrak{F}_{r,F;\Lambda}$,

$$\mathfrak{F}''_{r,F;\Lambda} = -(r+1)\int_M \psi\{L_r\psi + \psi\,\langle T_r \circ dN, dN\rangle\}dM,$$

é não negativa para todo $\psi$ com $\int_M \psi dM = 0$ (veja [19]).

O resultado acima mostra que assumindo que a hipersuperfície é compacta com $H^F_{r+1} = constante$, a hipótese $\mathfrak{W}$ não vazio é equivalente a $r$-stabilidade.

Também provamos na Seção 4.3 que se o integrando da fórmula tipo Minkowski dado no Corolário 2.3 não muda de sinal, então $x(M)$ é a Wulff shape de $F$ (veja Teorema 4.15):

> *Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada e orientável $M^n$, $F : S^n \longrightarrow R^+$ satisfazendo a condição (2.1) e tal que*
>
> $$FH^F_r + H^F_{r+1}\,\langle x, N\rangle$$
>
> *não muda de sinal para algum $0 \le r \le n-1$. Então, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$.*

Finalmente, nosso último resultado mostra que em hipersuperfícies compactas a hipótese $\mathfrak{W}$ não vazio caracteriza a Wulff shape a menos de difeomorfismos. De fato, se $\mathfrak{W}$ é não vazio, obtemos que $M$ é difeomorfa a Wulff shape de $F$ e $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ é de fato um mergulho (veja Teorema 4.16 na Seção 4.3):

> *Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada e orientável $M^n$ e $F : S^n \longrightarrow R^+$ satisfazendo a condição (2.1). Se $\mathfrak{W} \neq \emptyset$, então $M$ é difeomorfa a Wulff shape de $F$ e $x$ é de fato um mergulho.*

Na prova do Teorema 4.16 exibimos o difeomorfismo.

# Capítulo 2

# Preliminares

Este capítulo objetiva estabelecer as notações que serão utilizadas nos demais capítulos deste trabalho, bem como os fatos básicos da teoria que faremos uso posteriormente.

## 2.1 A Wulff Shape de $F$

Seja $F : S^n \longrightarrow R^+$ uma função suave positiva que satisfaz a seguinte condição de convexidade:

$$(D^2F + FI)_x > 0,\ \forall x \in S^n, \tag{2.1}$$

onde $D^2F$ denota o Hessiano intrínseco de $F$ na $n$-esfera $S^n \subset R^{n+1}$, I denota a identidade em $T_xS^n$ e $> 0$ significa que a matriz é positiva definida. Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : S^n &\longrightarrow R^{n+1}, \\ x &\longrightarrow F(x)x + (grad_{S^n}F)_x, \end{aligned} \tag{2.2}$$

cuja imagem $W_F = \phi(S^n)$ é uma hipersuperfície suave, convexa em $R^{n+1}$ chamada a Wulff shape de $F$(veja [10], [17], [16], [23], [27], [28], [29]). No caso em que $F = 1$ temos que a Wulff shape de $F$ é a $n$-esfera $S^n \subset R^{n+1}$.

Agora seja

$$x : M^n \longrightarrow R^{n+1}$$

uma imersão suave de uma hipersuperfície fechada e orientada e

$$N : M^n \longrightarrow S^n$$

sua aplicação de Gauss, isto é, $N$ é o vetor normal unitário de $M$.

Definimos

$$A_F := D^2F + FI \tag{2.3}$$

e

$$N_F : M \longrightarrow W_F,\ N_F := \phi \circ N$$

a aplicação de Gauss generalizada da Wulff shape. Então

$$S_F := -dN_F = -A_F \circ dN$$

é chamado o operador $F$-Weingarten, e os autovalores de $S_F$ são chamados de curvaturas principais anisotrópicas. Veremos no Lema 2.2 a seguir que, as raizes do polinômio característico de $S_F$ são todas reais.

Veja que, em cada ponto $p \in M^n$, $S_F(p) : T_pM \longrightarrow T_pM$ é um operador linear. Para cada $1 \leq r \leq n$, seja $S_r(p)$ a $r$-ésima função simétrica elementar nos autovalores de $S_F(p)$, assim obtemos $n$ funções suaves $S_r : M^n \longrightarrow R$, tal que

$$det(tI - S_F) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k t^{n-k}, \tag{2.4}$$

onde $S_0 = 1$ por definição. Se $p \in M^n$ e $\{\lambda_k\}$ são os autovalores com respeito ao operador $S_F(p)$, temos que

$$S_r = \sigma_r(\lambda_1, ..., \lambda_n) := \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_r \leq n} \lambda_{i_1} ... \lambda_{i_r},$$

onde $\sigma_r \in R[X_1, ..., X_n]$ é o $r$-ésimo polinômio simétrico elementar nas identidades $X_1, ..., X_n$.

Para $1 \leq r \leq n$, definimos a $r$-ésima curvatura média anisotrópica $H_r^F$ de $x$ por

$$C_n^r H_r^F = \sigma_r(\lambda_1, ..., \lambda_n), \tag{2.5}$$

onde $C_n^r = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$.

Uma *variação* de uma imersão suave $x : M^n \longrightarrow R^{n+1}$ é uma aplicação suave

$$X : M^n \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow R^{n+1}$$

satisfazendo a seguinte condição:

1. Para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, a aplicação $X_t : M^n \longrightarrow R^{n+1}$ dada por $X_t(p) = X(t,p)$ é uma imersão suave tal que $X_0 = x$,

2. $X_t|_{\partial M} = x|_{\partial M}$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma hipersuperfície suave, fechada e orientada com aplicação de Gauss $N : M \longrightarrow S^n$, isto é, $N$ é um campo vetorial normal unitário. Seja $X_t$ uma variação de $x$, e $N_t : M \longrightarrow S^n$ a aplicação de Gauss de $X_t$.

O *campo variacional* associado a variação $X$ é o campo vetorial $\frac{\partial X}{\partial t}$. Denotando por $f = \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}, N_t \right\rangle$, obtemos

$$\frac{\partial X}{\partial t} = f N_t + \left( \frac{\partial X}{\partial t} \right)^{\top}, \tag{2.6}$$

onde $\top$ representa a componente tangente. Definimos

$$g = \left( \frac{\partial X}{\partial t} \right)^{\top}. \tag{2.7}$$

A primeira variação correspondente ao vetor normal unitário é dada por (veja [23], [27], [29])

$$\partial_t N_t = -gradf + dN_t(g), \tag{2.8}$$

a primeira variação do elemento de volume é

$$\partial_t dM_t = (divg - nHf) dM_t \tag{2.9}$$

e a primeira variação do volume $V$ é

$$V'(t) = \int_M f dM_t, \tag{2.10}$$

onde *grad*, *div* e $H$ representam o gradiente, o divergente e a curvatura média com respeito a $X_t$, respectivamente.

Sejam $\{E_1, \cdots, E_n\}$ um referencial ortogonal local em $S^n$, $e_i = e_i(t) = E_i \circ N_t$, onde $i = 1, \cdots, n$. Temos que $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é um referencial ortogonal local de $x : M \longrightarrow R^{n+1}$.

As equações estruturais da imersão canônica $y : S^n \longrightarrow R^{n+1}$ são:

$$\begin{cases} dy = \sum_i \theta_i E_i; \\ dE_i = \sum_j \theta_{ij} E_j - \theta_i y; \\ d\theta_i = \sum_j \theta_{ij} \wedge \theta_j; \\ d\theta_{ij} - \sum_k \theta_{ik} \wedge \theta_{kj} = -\frac{1}{2} \sum_{kl} \bar{R}_{ijkl} \theta_k \wedge \theta_l = -\theta_i \wedge \theta_j. \end{cases} \tag{2.11}$$

onde $\theta_{ij} + \theta_{ji} = 0$ e $\bar{R}_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$.

As equações estruturais de $X_t$ são (veja [25], [24])

$$\begin{cases} dX_t = \sum_i \omega_i e_i; \\ dN_t = -\sum_{ij} h_{ij}\omega_j e_i; \\ de_i = \sum_j \omega_{ij} e_j + \sum_j h_{ij}\omega_j N_t; \\ d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j; \\ d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = -\frac{1}{2}\sum_{kl} R_{ijkl}\theta_k \wedge \theta_l, \end{cases} \tag{2.12}$$

onde $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$, $R_{ijkl} + R_{ijlk} = 0$, e $R_{ijkl}$ são os componentes do tensor curvatura Riemanniano de $M$ com respeito a métrica induzida por $X_t$. Aqui omitimos a variável $t$ de algumas quantidades geométricas.

Denotemos por $s_{ij}$ os coeficientes de $S_F$ com respeito ao referencial $\{e_1, ..., e_n\}$, isto é,

$$S_F := -dN_F = -d(\phi \circ N) = -A_F \circ dN = \sum_{i,j} s_{ij}\omega_j e_j, \tag{2.13}$$

onde $\phi$ é definido em (2.2).

Pela definição acima, note que embora $A_F$ e $dN$ sejam simétricos, $S_F$ é simétrico se, e somente se, $A_F$ e $dN$ comutam, o que não ocorre em geral

Agora iremos demonstrar que, em qualquer caso, todas as raizes do polinômio característico de $S_F$ são reais. Antes, vejamos o seguinte lema.

**Lema 2.1.** *Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno $\langle , \rangle$ e $T$ um operador linear em $V$. Então $T$ é positivo se, e somente se, existe um operador linear invertível $L$ em $V$ tal que $T = L^*L$, onde $L^*$ é o operador linear adjunto de $L$.*

*Demonstração.* Suponha $T = L^*L$, onde $L$ é um operador linear invertível. Então $T^* = (L^*L)^* = L^*L = T$, donde $T$ é simétrico. Além disso, $\langle Tv, v\rangle = \langle L^*Lv, v\rangle = \langle Lv, Lv\rangle \geq 0$. Visto que $L$ é invertível, para $v \neq 0$, temos $Lv \neq 0$ e $\langle Tv, v\rangle > 0$. Assim, $T$ é positivo.

Por outro lado, se $T$ é positivo, então $(v, w) = \langle Tv, w\rangle$ é um produto interno em $V$. Sejam $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ e $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$ bases ortonormais de $V$ com respeito a $\langle , \rangle$ e $( , )$, respectivamente. Então,

$$(\beta_i, \beta_j) = \delta_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle .$$

Definimos $L$ como o único operador em $V$ tal que $L\beta_i = \alpha_i$, onde $i \in \{1, \cdots, n\}$. Como $L$ leva base em base, temos que $L$ é invertível. Note que, dados $v = \sum a_i\beta_i$ e $w = \sum b_j\beta_j$

vetores quaisquer em $V$ temos,

$$\begin{aligned}(v,w) &= \left(\sum_i a_i\beta_i, \sum_j b_j\beta_j\right) = \sum_{i,j} a_ib_j(\beta_i,\beta_j) = \sum_{i,j} a_ib_j\left\langle \alpha_i,\alpha_j\right\rangle = \\ &= \sum_{i,j} a_ib_j\left\langle L\beta_i, L\beta_j\right\rangle = \left\langle \sum a_iL\beta_i, \sum b_jL\beta_j\right\rangle = \left\langle Lv, Lw\right\rangle.\end{aligned}$$

Assim,

$$\langle Tv, w\rangle =: (v,w) = \langle Lv, Lw\rangle = \langle L^*Lv, w\rangle\,,$$

para todo $v, w \in V$. Portanto, $T = L^*L$. □

**Lema 2.2.** *Todas as raizes do polinômio característico de $S_F$ são reais. Além disso, se as curvaturas principais de $x$ são positivas, o mesmo ocorre com as curvaturas principais anisotrópicas.*

*Demonstração.* De (2.13) temos que $S_F = -A_F \circ dN$. Denotemos as matrizes dos coeficientes de $A_F$ e $-dN$ por $A = (A_{ij})$ e $B = (h_{ij})$, respectivamente. Pelo fato de $A$ ser positivo e pelo Lema 2.1 (em sua forma matricial), existe uma matriz invertível $C$ tal que $A = C^tC$. Assim, segue de $|\lambda I - S_F| = |\lambda I - AB| = |\lambda I - C^tCB| = |C^t(\lambda I - CBC^t)(C^t)^{-1}| = |\lambda I - CBC^t|$, que $S_F$ tem os mesmos autovalores da matriz simétrica $CBC^t$, cujos autovalores (como sabemos) são todos reais. Além disso, se as curvaturas principais são positivas, temos que $B$ é positivo definido. Tomando um autovalor $\lambda$ de $S_F$, donde também autovalor de $CBC^t$, e $v$ um autovetor associado a $\lambda$, temos que

$$\lambda\langle v, v\rangle = \left\langle CBC^tv, v\right\rangle = \left\langle BC^tv, C^tv\right\rangle > 0,$$

visto que $C^tv \neq 0$ e $B$ é positivo definido. Assim, $\lambda > 0$. □

Os autovalores de $S_F$ são chamados de curvaturas principais anisotrópicas e denotados por $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Temos que $S_F(e_j) = \sum_i s_{ij}e_i$. $S_F$ é chamado o operador $F$-Weingarten.

Observe que, de (2.4), temos

$$S_k = \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\cdots,i_k;j_1,\cdots,j_k} \delta^{j_1,\cdots,j_k}_{i_1,\cdots,i_k} s_{i_1j_1}.\cdots.s_{i_kj_k}, \tag{2.14}$$

onde $\delta^{j_1,\cdots,j_k}_{i_1,\cdots,i_k}$ é o símbolo de Kronecker generalizado usual, isto é, $\delta^{j_1,\cdots,j_k}_{i_1,\cdots,i_k}$ é igual a $+1$ (resp. $-1$) se $i_1,\cdots,i_k$ são distintos e $(j_1,\cdots,j_k)$ é uma permutação par (resp. ímpar) de $(i_1, \cdots, i_k)$ e nos demais casos é igual a zero.

Citaremos três lemas que serão necessários para as provas dos próximos teoremas.

**Lema 2.3** ([17], [16]). *Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada e orientável $M^n$ e $F : S^n \longrightarrow R^+$ satisfazendo a condição (2.1). Para cada $r = 0, 1, \cdots, n-1$, a seguinte fórmula do tipo Minkowski ocorre:*

$$\int_M H_r^F F(N) + H_{r+1}^F \langle x, N\rangle \, dM = 0. \tag{2.15}$$

**Lema 2.4** ([17], [16], [27]). *Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada e orientável $M^n$ e $F : S^n \longrightarrow R^+$ satisfazendo a condição (2.1). Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = constante \neq 0$, então a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$.*

**Lema 2.5** ([11]). *Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada e orientável $M^n$ e $F : S^n \longrightarrow R^+$ satisfazendo a condição (2.1). Assuma que para algum $0 \leq r \leq n-1$, $H_{r+1}^F > 0$ em cada ponto de $M$. Então $H_k^F > 0$ em cada ponto de $M$, para cada $k = 1, \cdots, r$.*

## 2.2 Os Operadores $P_r$, $T_r$ e $L_r$

Sejam $x : M^n \longrightarrow R^{n+1}$ uma imersão suave de uma hipersuperfície fechada e orientável e $S_F$ o operador $F$-Weingarten como na Seção 2.1. Iremos introduzir as transformações

$$P_k : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \; 0 \leq k \leq n,$$

associadas ao operador $F$-Weingarten $S_F$ (veja [17], [16]). Segundo a nossa definição da $r$-ésima curvatura média anisotrópica, estas transformações são definidas indutivamente a partir de $S_F$ por

$$P_0 = I \text{ e } P_k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} H_k^F I - P_{k-1} \circ S_F, \tag{2.16}$$

para cada $k = 1, ..., n$, onde $I$ denota a identidade em $\mathfrak{X}(M)$. Equivalentemente,

$$P_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \begin{pmatrix} n \\ k-j \end{pmatrix} H_{k-j}^F S_F^j. \tag{2.17}$$

Note que cada $P_k(p)$ é também um operador linear em cada espaço tangente $T_pM$ que comuta com $S_F(p)$. Para casos onde $S_F(p)$, e portanto $P_k(p)$, é diagonalizável (por exemplo quando $F$ é constante), eles podem ser simultaneamente diagonalizáveis. Além disso, nesses casos, se $\{e_1, ..., e_n\}$ é um referencial ortonormal em $T_pM$ que diagonaliza $S_F$, $S_F(p)e_i = \lambda_i e_i$, então

$$(P_r)_p(e_i) = \lambda_{i,r}(p)e_i, \tag{2.18}$$

onde

$$\lambda_{i,r} = \sum_{i_1<...<i_r,\ i_j\neq i} \lambda_{i_1}...\lambda_{i_r}, \tag{2.19}$$

para cada $1 \leq r \leq n$ e $\lambda_{i,0} := 1$. De fato , sendo $j \in \{1, ..., n\}$, por indução em $r$ temos que

$$P_0e_i = Ie_i = e_i = \lambda_{i,0}e_i.$$

Agora suponha

$$P_{r-1}e_i = \lambda_{i,r-1}(p)e_i,$$

onde

$$\lambda_{i,r-1} = \sum_{i_1<...<i_{r-1},\ i_j\neq i} \lambda_{i_1}...\lambda_{i_{r-1}}.$$

Assim, de (2.16)

$$\begin{aligned}
P_re_i &= \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} H_r^F e_i - (S_F \circ P_{r-1})\, e_i = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} H_r^F e_i - S_F(\lambda_{i,r-1}e_i) \\
&= \left(\sum_{i_1<\cdots<i_r} \lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_r}\right) e_i - \lambda_{i,r-1}S_Fe_i \\
&= \left(\sum_{i_1<\cdots<i_r} \lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_r} - \sum_{i_1<\cdots<i_{r-1}\ i_j\neq i} \lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_{r-1}}\lambda_i\right) e_i \\
&= \left(\sum_{i_1<\cdots<i_r\ i_j\neq i} \lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_r}\right) e_i = \lambda_{i,r}e_i.
\end{aligned}$$

O operador $T_k : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M),\ 0 \leq k \leq n$, é definido por

$$T_k = P_k \circ A_F. \tag{2.20}$$

Note que os operadores $T_k$ são todos operadores autoadjuntos. De fato, dados $X$ e $Y$ em $TM$, por (2.17), temos

$$\begin{aligned}
\langle T_k X, Y \rangle &= \langle (P_k \circ A_F) X, Y \rangle \\
&= \left\langle \left( \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \begin{pmatrix} n \\ k-j \end{pmatrix} H_{k-j}^F S_F^j \circ A_F \right) X, Y \right\rangle \\
&= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \begin{pmatrix} n \\ k-j \end{pmatrix} H_{k-j}^F \left\langle \left( S_F^j \circ A_F \right) X, Y \right\rangle \\
&= -\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \begin{pmatrix} n \\ k-j \end{pmatrix} H_{k-j}^F \left\langle (A_F \circ dN \circ A_F) X, Y \right\rangle \\
&= -\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \begin{pmatrix} n \\ k-j \end{pmatrix} H_{k-j}^F \left\langle X, (A_F \circ dN \circ A_F) Y \right\rangle \\
&= \langle X, (P_k \circ A_F) Y \rangle = \langle X, T_k Y \rangle,
\end{aligned}$$

onde a quinta igualdade ocorre devido $A_F$ e $dN$ serem simétricos. Da mesma forma $S_F \circ AF$, $dN \circ S_F$ e $dN \circ P_k$ são simétricos. Além disso, como

$$T_{k-1} \circ dN = P_{k-1} \circ A_F \circ dN = -P_{k-1} \circ S_F,$$

temos que

$$P_k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} H_k^F I - P_{k-1} \circ S_F = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} H_k^F I + T_{k-1} \circ dN. \tag{2.21}$$

A seguir, apresentamos um lema que será utilizado posteriormente (veja [16]).

**Lema 2.6.** *A matriz de $P_k$ é dada por:*

$$(P_k)_{ij} = \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \cdots, i_k; j_1, \cdots, j_k} \delta_{i_1, \cdots, i_k j}^{j_1, \cdots, j_k i} s_{i_1 j_1} . \cdots . s_{i_k j_k}. \tag{2.22}$$

*Demonstração.* Provaremos por indução em $k$. Para $k=0$, é fácil verificar que (2.22) é verdadeira. Suponha que o resultado é verdadeiro para $k=r$. Vamos mostrar que é verdadeiro para $k=r+1$. De (2.21), (2.5) e (2.14), temos que

$$\begin{aligned}
(P_{r+1})_{ij} &= S_{r+1}\delta^i_j - (P_rS_F)_{ij} = S_{r+1}\delta^i_j - \sum_l (P_r)_{il}s_{lj} \\
&= \frac{1}{(r+1)!}\sum_{i_1,\cdots,i_{r+1};j_1,\cdots,j_{r+1}} \delta^{j_1,\cdots,j_{r+1}}_{i_1,\cdots,i_{r+l}} s_{i_1j_1}.\cdots.s_{i_{r+1}j_{r+1}}\delta^i_j \\
&- \frac{1}{r!}\sum_{i_1,\cdots,i_r;j_1,\cdots,j_r;l} \delta^{j_1,\cdots,j_ri}_{i_1,\cdots,i_rl} s_{i_1j_1}.\cdots.s_{i_rj_r}s_{lj} \\
&= \frac{1}{(r+1)!}\sum(\delta^{j_1,\cdots,j_{r+1}}_{i_1,\cdots,i_{r+l}}\delta^i_j - \sum_l \delta^{j_1,\cdots,j_{l-1},i,j_{l+1},\cdots,j_{r+1}}_{i_1,\cdots,i_{l-l},i_l,i_{l+1},\cdots,i_{r+1}})s_{i_1j_1}.\cdots.s_{i_{r+1}j_{r+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(r+1)!}\sum det\begin{pmatrix} \delta^{j_1}_{i_1} & \delta^{j_2}_{i_1} & \cdots & \delta^{j_{r+1}}_{i_1} & \delta^i_{i_1} \\ \delta^{j_1}_{i_2} & \delta^{j_2}_{i_2} & \cdots & \delta^{j_{r+1}}_{i_2} & \delta^i_{i_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta^{j_1}_{i_{r+1}} & \delta^{j_2}_{i_{r+1}} & \cdots & \delta^{j_{r+1}}_{i_{r+1}} & \delta^i_{i_{r+1}} \\ \delta^{j_1}_j & \delta^{j_2}_j & \cdots & \delta^{j_{r+1}}_j & \delta^i_j \end{pmatrix} s_{i_1j_1}.\cdots.s_{i_{r+1}j_{r+1}} \\
&= \frac{1}{(r+1)!}\sum_{i_1,\cdots,i_{r+1};j_1,\cdots,j_{r+1}} \delta^{j_1,\cdots,j_{r+1}i}_{i_1,\cdots,i_{r+l}j} s_{i_1j_1}.\cdots.s_{i_{r+1}j_{r+1}},
\end{aligned}$$

devido

$$\delta^{j_1,\cdots,j_l}_{i_1,\cdots,i_l} = det\begin{pmatrix} \delta^{j_1}_{i_1} & \delta^{j_2}_{i_1} & \cdots & \delta^{j_{l-1}}_{i_1} & \delta^{j_l}_{i_1} \\ \delta^{j_1}_{i_2} & \delta^{j_2}_{i_2} & \cdots & \delta^{j_{l-1}}_{i_2} & \delta^{j_l}_{i_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta^{j_1}_{i_{l-1}} & \delta^{j_2}_{i_{l-1}} & \cdots & \delta^{j_{l-1}}_{i_{l-1}} & \delta^{j_l}_{i_{l-1}} \\ \delta^{j_1}_{i_l} & \delta^{j_2}_{i_l} & \cdots & \delta^{j_{l-1}}_{i_l} & \delta^{j_l}_{i_l} \end{pmatrix}.$$

□

Agora definimos o operador $L_k : \mathfrak{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathfrak{C}^\infty(M)$ por

$$L_k(f) = div\left(T_k(gradf)\right). \tag{2.23}$$

Equivalentemente,

$$L_k(f) = \sum_{i,j}\left[(T_k)_{ij}\, f_j\right]_i, \tag{2.24}$$

onde denotamos os coeficientes da diferencial covariante de $f$ e $T_k$ com respeito a $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ por $f_i$ e $(T_k)_{ij}$, respectivamente.

# Capítulo 3

# Estabilidade de Hipersuperfícies com Quociente Constante das Curvaturas Médias Anisotrópicas Preservando uma Combinação da Área e do Volume

## 3.1 O Problema Variacional

Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma hipersuperfície suave, fechada e orientada e $X$ uma variação de $x$. Para cada $r$, $0 \leq r \leq n$, definimos a $(r, F)$-*função area* $\mathfrak{A}_{r,F} : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow R$ associada a variação $X$ por

$$\mathfrak{A}_{r,F}(t) = \int_M F(N_t) S_r dM_t, \tag{3.1}$$

onde $dM_t$ denota o elemento de volume induzido pela métrica em $M$ por $X_t$. Note que para $F = 1$ e $r = 0$, $\mathfrak{A}_{r,F}$ é a área de $M$. Também definimos a função $\mathfrak{C}_{a,b;k} : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow R$ associada a variação $X$ de $x$ por

$$\mathfrak{C}_{a,b;k}(t) = a\mathfrak{A}_{k,F}(t) + bV(t), \tag{3.2}$$

onde $a, b \in R$ são não ambos nulos e $k$ um inteiro, $0 \leq k \leq n-2$.

Uma variação $X$ é dita preservar $\mathfrak{C}_{a,b;k}$, se para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, tivermos $\mathfrak{C}_{a,b;k}(t) = \mathfrak{C}_{a,b;k}(0)$.

Considere o problema variacional de minimizar $\mathfrak{A}_{r,F}$ preservando $\mathfrak{C}_{a,b;k}$, onde $0 \leq k < r \leq n-1$. O caso $F = 1$, $k = b = 0$, e $a = 1$ foi estudado em [18]. Por argumentos padrões envolvendo multiplicadores de Lagrange, isto significa que estamos considerando os pontos críticos do funcional

$$\mathfrak{J}_{r,k,a,b}(t) = \mathfrak{A}_{r,F}(t) + \lambda \mathfrak{C}_{a,b;k}(t), \tag{3.3}$$

onde $\lambda$ é uma constante a ser determinada, e queremos calcular $\mathfrak{J}'_{r,k,a,b}(0) = 0$, com respeito a uma variação geral de $x$, a fim de determinar a equação de Euler correspondente. Para isso, precisamos determinar a derivada de $S_r(t)$ com respeito a $t$.

Temos os seguintes lemas (veja [19] para Lema 3.1 e Lema 3.2):

**Lema 3.1.**

$$S'_r(t) = L_{r-1}f + f\langle T_{r-1} \circ dN_t, dN_t\rangle + \langle gradS_r, g\rangle\,, \tag{3.4}$$

*onde $f$ e $g$ são definidos em (2.6) e (2.7), respectivamente.*

**Lema 3.2** (Fórmula da Primeira Variacão de $\mathfrak{A}_{l,F}$)**.**

$$\mathfrak{A}'_{l,F}(t) = -(l+1)\int_M fS_{l+1}dM_t, \tag{3.5}$$

*onde $f$ é definido em (2.6).*

**Lema 3.3** (Fórmula da Primeira Variação de $\mathfrak{C}_{a,b;k}$)**.**

$$\mathfrak{C}'_{a,b;k}(t) = -\int_M f[a(k+1)S_{k+1} - b]dM_t. \tag{3.6}$$

*Demonstração.* Temos do Lema 3.2 e (2.10) que,

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}'_{a,b;k}(t) &= a\mathfrak{A}'_{k,F} + bV'(t) = -a(k+1)\int_M fS_{k+1}dM_t + b\int_M f dM_t \\ &= -\int_M f\left[a(k+1)S_{k+1} - b\right]dM_t. \end{aligned}$$

□

Do Lema 3.2 e Lema 3.3, obtemos a fórmula para a primeira variação de $\mathfrak{J}_{r,k,a,b}$.

**Proposição 3.4** (Fórmula da Primeira Variação de $\mathfrak{J}_{r,k,a,b}$)**.** *Para qualquer variação $X$ de $x$, temos que*

$$\mathfrak{J}'_{r,k,a,b}(t) = -\int_M f\left\{(r+1)S_{r+1} + \lambda\left[a(k+1)S_{k+1} - b\right]\right\}dM_t. \tag{3.7}$$

*Demonstração.* Temos de (3.3), Lema 3.2 e Lema 3.3,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}'_{r,k,a,b}(t) &= \mathfrak{A}'_{r,F}(t) + \lambda\mathfrak{C}'_{a,b;k}(t) = -(r+1)\int_M fS_{r+1}dM_t \\
&+ \lambda\left(-\int_M f\left[a(k+1)S_{k+1} - b\right]dM_t\right) \\
&= -\int_M f\left\{(r+1)S_{r+1} + \lambda\left[a(k+1)S_{k+1} - b\right]\right\}dM_t.
\end{aligned}$$

□

Da Proposição 3.4 sabemos que os pontos críticos do problema variacional acima são as imersões $x$ para as quais

$$\begin{aligned}
&(r+1)S_{r+1} + \lambda\left[a(k+1)S_{k+1} - b\right] \equiv 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{(r+1)S_{r+1}}{a(k+1)S_{k+1} - b} = -\lambda = \mathit{constante},
\end{aligned} \tag{3.8}$$

onde $a(k+1)S_{k+1} - b \neq 0$.

Para decidirmos se $x$ é ou não mínimo local, nos restringimos a variações preservando $\mathfrak{C}_{a,b;k}$ e calculamos a segunda variação de $\mathfrak{A}_{r,F}$ em $t = 0$. Como $\mathfrak{C}_{a,b;k}(t) \equiv \mathfrak{C}_{a,b;k}(0)$, temos que $\mathfrak{A}''_{r,F}(0) = \mathfrak{J}''_{r,k,a,b}(0)$.

Agora, obteremos a fórmula para a segunda variação de $\mathfrak{J}_{r,k,a,b}$.

**Proposição 3.5** (Fórmula da Segunda Variação)**.** *Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma hipersuperfície suave, fechada e orientada para a qual $a(k+1)S_{k+1} - b \neq 0$ e $\frac{(r+1)S_{r+1}}{a(k+1)S_{k+1}-b} = constante$, onde $0 \leq k < r \leq n-1$. Para variações preservando $\mathfrak{C}_{a,b;k}$, a segunda variação de $\mathfrak{A}_{r,F}$ em $t = 0$ é dada por*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}''_{r,F}(0) &= \mathfrak{J}''_{r,k,a,b}(0) \\
&= -(r+1)\int_M f\{L_r f - \lambda_{a,b}L_k f + f[\langle T_r \circ dN, dN\rangle \\
&- \lambda_{a,b}\langle T_k \circ dN, dN\rangle]\}dM,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

*onde $\lambda_{a,b} = \left(\frac{a(k+1)S_{r+1}}{a(k+1)S_{k+1}-b}\right) = constante.$*

*Demonstração.* Como $\mathfrak{C}_{a,b;k}(t) \equiv \mathfrak{C}_{a,b;k}(0)$, temos pela Proposição 3.4, e equação (3.8), Lema 3.1 e devido $\frac{(r+1)S_{r+1}}{a(k+1)S_{k+1}-b} = constante$ que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}''_{r,F}(0) &= \mathfrak{J}''_{r,k,a,b}(0) = -\int_M \frac{\partial}{\partial t}\left[(r+1)S_{r+1} + \lambda(a(k+1)S_{k+1} - b)\right]|_{t=0} f dM_t \\
&+ \left[(r+1)S_{r+1} + \lambda(a(k+1)S_{k+1} - b)\right]|_{t=0} \frac{\partial}{\partial t}(f dM_t)|_{t=0} \\
&= -\int_M \left[(r+1)\frac{\partial}{\partial t}\left(S_{r+1}\right)|_{t=0} + \lambda a(k+1)\frac{\partial}{\partial t}\left(S_{k+1}\right)|_{t=0}\right] f dM \\
&= -\int_M f[(r+1)\{L_r f + f\left\langle T_r \circ dN, dN\right\rangle + \left\langle gradS_{r+1}, g\right\rangle\} \\
&- \left(\frac{(r+1)S_{r+1}}{a(k+1)S_{k+1} - b}\right) a(k+1)\left\{L_k f + f\left\langle T_k \circ dN, dN\right\rangle + \left\langle gradS_{k+1}, g\right\rangle\}\right] dM \\
&= -\int_M f\{(r+1)\left[L_r f + f\left\langle T_r \circ dN, dN\right\rangle + \left\langle gradS_{r+1}, g\right\rangle\right] \\
&- (r+1)\left(\frac{S_{r+1}}{S_{k+1} - \frac{b}{a(k+1)}}\right)\left[L_k f + f\left\langle T_k \circ dN, dN\right\rangle\right. \\
&+ \left.\left\langle grad\left(S_{k+1} - \frac{b}{a(k+1)}\right), g\right\rangle\right]\} dM \\
&= -(r+1)\int_M f\{L_r f - \left(\frac{S_{r+1}}{S_{k+1} - \frac{b}{a(k+1)}}\right) L_k f + f[\left\langle T_r \circ dN, dN\right\rangle \\
&- \left(\frac{S_{r+1}}{S_{k+1} - \frac{b}{a(k+1)}}\right)\left\langle T_k \circ dN, dN\right\rangle]\} dM.
\end{aligned}$$

□

Uma variação $X$ de uma imersão $x$ é chamada uma variação normal se seu campo variacional é paralelo a $N$.

Provaremos a seguir um lema que garante a existência de variações normais que preservam $\mathfrak{C}_{a,b;k}$.

**Lema 3.6.** *Para qualquer função $f : M \longrightarrow R$ satisfazendo*

$$\int_M f\left[a\left(k+1\right)S_{k+1} - b\right] dM = 0, \tag{3.10}$$

*com $a(k+1)S_{k+1} - b$ não identicamente nulo, existe uma variação normal $X$ da imersão $x$, preservando $\mathfrak{C}_{a,b;k}$ tal que o campo variacional é $fN$.*

*Demonstração.* Seja $\rho : M \longrightarrow R$ uma função suave tal que $\int_M \rho[a(k+1)S_{k+1} - b]dM \neq 0$. Definimos a variação de dois parâmetros

$$X(t, s, p) = x(p) + (tf + s\rho)N.$$

Denote por $\mathfrak{C}_{a,b;k}(t, s)$ a combinação linear da $(k, F)$-área $\mathfrak{A}_{k,F}(t, s)$ e do volume $V(t, s)$ de $M$ sob a métrica induzida a partir da imersão $X(t, s, p)$. Note que

$$\frac{\partial X}{\partial t}|_{t=s=0} = fN,$$
$$\frac{\partial X}{\partial s}|_{t=s=0} = \rho N.$$

Do Lema 3.2 e devido $\mathfrak{C}_{a,b;k}(t, s) = a\mathfrak{A}_{k,F}(t, s) + bV(t, s)$, temos que

$$\frac{\partial \mathfrak{C}_{a,b;k}(t, s)}{\partial t}|_{t=s=0} = -\int_M f[a(k+1)S_{k+1} - b]dM = 0$$

e

$$\frac{\partial \mathfrak{C}_{a,b;k}(t, s)}{\partial s}|_{t=s=0} = -\int_M \rho[a(k+1)S_{k+1} - b]dM \neq 0.$$

Assim, do Teorema da Função Implícita aplicado para $\mathfrak{C}_{a,b;k}(t, s) = \textit{constante}$, obtemos a existência de uma função $s = \varphi(t)$ definida em uma vizinhança de $t = 0$, tal que

$$\mathfrak{C}_{a,b;k}(t, \varphi(t)) = \textit{constante} \ \text{ e } \ \varphi(0) = 0.$$

Assim obtemos uma variação preservando $\mathfrak{C}_{a,b;k}$ dada por

$$Y(t, p) = x(p) + (tf + \varphi(t)\rho)N.$$

Além disso,

$$\varphi'(0) = \left(\frac{\frac{\partial \mathfrak{C}_{a,b;k}}{\partial_t}}{\frac{\partial \mathfrak{C}_{a,b;k}}{\partial_s}}\right)|_{t=s=0} = \frac{-\int_M f[a(k+1)S_{k+1} - b]dM}{-\int_M \rho[a(k+1)S_{k+1} - b]dM} = 0,$$

logo temos que o campo variacional de $Y(t)$ é dado por

$$\frac{\partial Y(t, p)}{\partial_t}|_{t=0} = (f + \varphi'(0)\rho)N = fN.$$

$\square$

## 3.2 $(r, k, a, b)$-Estabilidade de Hipersuperfícies

Pelo Lema 3.3, a expressão obtida para $\mathfrak{A}''_{r,F}(0)$ na Proposição 3.5 depende apenas da imersão $x$ e da função $f$ que, por sua vez, pode ser qualquer função diferenciável satisfazendo $\int_M f[a(k+1)S_{k+1} - b]dM = 0$, com $a(k+1)S_{k+1} - b \neq 0$.

Fixemos a sequinte notação:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{r,k,a,b}(f) &= -\int_M f\{L_r f - \lambda_{a,b} L_k f + f[\langle T_r \circ dN, dN\rangle \\ &- \lambda_{a,b} \langle T_k \circ dN, dN\rangle]\} dM, \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde

$$\lambda_{a,b} = \left(\frac{a(k+1)S_{r+1}}{a(k+1)S_{k+1} - b}\right) \quad e \quad a, b \in R. \tag{3.12}$$

**Definição 3.7.** *Dizemos que uma imersão $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ de uma hipersuperfície suave, fechada e orientável com $a(k+1)S_{k+1} - b \neq 0$ e $\left(\frac{(r+1)S_{r+1}}{a(k+1)S_{k+1}-b}\right) =$ constante é $(r, k, a, b)$-estável, com $a, b \in R$, se $\mathfrak{G}_{r,k,a,b}(f) \geq 0$ para qualquer função com suporte compacto $f : M^n \longrightarrow R^{n+1}$ que satisfaz (3.10), $0 \leq k < r \leq n-1$.*

**Teorema 3.8.** *Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma imersão de uma hipersuperfície suave, fechada e orientável. Se $x(M)$ é, a menos de translação e homotetia, a Wulff shape de $F$, então $x$ é $(r, k, a, b)$-estável para*

$$\begin{cases} a = 0 & e \quad b \neq 0; \\ a \neq 0 & e \quad b = 0; \\ a, b \neq 0 \quad e \quad \frac{a}{b} \notin \left[\frac{k!(n-k-1)!}{n!}, \frac{r+1}{r-k}.\frac{k!(n-k-1)!}{n!}\right). \end{cases}$$

*Demonstração.* Visto que $x(M)$ é a Wulff shape de $F$, temos de

$$d\phi = (D^2F + FI) \circ dy \tag{3.13}$$

que $d\phi$ é perpendicular a $y$ e $N = -y$ é o vetor normal unitário. Portanto, por (3.13) e (2.12) temos que

$$d\phi = -A_F \circ dN = \sum_{ijk} A_{jk} h_{ki} \omega_i e_j. \tag{3.14}$$

Por outro lado, sendo $x(M)$ a Wulff shape e por (2.12), temos que

$$d\phi = \sum_i \omega_i e_i. \tag{3.15}$$

Assim por (3.14) e (3.15), temos por (2.13), que $s_{ij} = \sum_k A_{ik}h_{kj} = \delta_{ij}$. A partir daí, obtemos facilmente por (2.14) que $S_r = C_n^r$, onde $C_n^r = \left(\begin{array}{c} n \\ r \end{array}\right)$, assim $\frac{(r+1)S_{r+1}}{a(k+1)S_{k+1}-b} =$ *constante* $\forall a, b \in R$, com $a(k+1)S_{k+1} - b \neq 0$. Mostraremos que $\mathfrak{G}_{r,k,a,b}(f) \geq 0$, para qualquer função com suporte compacto $f : M^n \longrightarrow R$ que satisfaz

$$\int_M f(a(k+1)S_{k+1} - b)dM = 0.$$

Temos de (2.20) que $T_i = P_i \circ A_F$, onde do Lema 2.6 e (2.14) temos que

$$\begin{aligned}
(P_k)_{ij} &= \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\cdots,i_k;j_1,\cdots,j_k} \delta^{j_1,\cdots,j_k i}_{i_1,\cdots,i_k j} s_{i_1 j_1}.\cdots.s_{i_k j_k} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\cdots,i_k;j_1,\cdots,j_k} \delta^{j_1,\cdots,j_k i}_{i_1,\cdots,i_k j} \delta_{i_1 j_1}.\cdots.\delta_{i_k j_k} = \frac{1}{k!} \sum_{1\leq i_1,\cdots,i_k \leq n} \delta^{i_1,\cdots,i_k i}_{i_1,\cdots,i_k j} \\
&= \begin{cases} 0, \quad if \quad i \neq j; \\ \frac{1}{k!} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n; i_r \neq i} \delta^{i_1,\cdots,i_k i}_{i_1,\cdots,i_k i} = \frac{1}{k!} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} = C^k_{n-1}, \quad se \quad i = j \end{cases} \\
&= C^k_{n-1} I.
\end{aligned}$$

Assim,

$$T_i = \left(C^i_{n-1} \circ I\right) \circ A_F = C^i_{n-1} A_F. \tag{3.16}$$

Definimos a seguinte notação:

$$\Delta_F \varphi := div(A_F(grad\varphi)). \tag{3.17}$$

De (3.11), (3.16) e (2.23) temos que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}_{r,k,a,b}(f) &= -\int_M f\{L_r f - \lambda_{a,b} L_k f + f[\langle T_r \circ dN, dN\rangle - \lambda_{a,b}\langle T_k \circ dN, dN\rangle]\} dM \\
&= -\int_M f\{L_r f - \lambda_{a,b} L_k f + f[\langle T_r \circ dN, dN\rangle - \lambda_{a,b}\langle T_k \circ dN, dN\rangle]\} dM \\
&= -\int_M f\{div(C^r_{n-1} A_F(gradf)) - \lambda_{a,b} div(C^k_{n-1} A_F(gradf)) \\
&+ f\left[\left\langle C^r_{n-1} A_F dN, dN\right\rangle - \lambda_{a,b}\left\langle C^k_{n-1} A_F dN, dN\right\rangle\right]\} dM \\
&= -\int_M f\{C^r_{n-1} div(A_F(gradf)) - \lambda_{a,b} C^k_{n-1} div(A_F(gradf)) \\
&+ f\left[C^r_{n-1}\langle A_F dN, dN\rangle - \lambda_{a,b} C^k_{n-1}\langle A_F dN, dN\rangle\right]\} dM \\
&= -\int_M f\{\left(C^r_{n-1} - \lambda_{a,b} C^k_{n-1}\right)\Delta_F f + f\left[\left(C^r_{n-1} - \lambda_{a,b} C^k_{n-1}\right)\langle A_F dN, dN\rangle\right]\} dM \\
&= -\left(C^r_{n-1} - \lambda_{a,b} C^k_{n-1}\right)\int_M f\left[\Delta_F f + f\langle A_F dN, dN\rangle\right] dM,
\end{aligned}$$

onde $\lambda_{a,b} = \left(\frac{a(k+1)S_{r+1}}{a(k+1)S_{k+1}-b}\right)$.

Foi provado por Palmer [27] (veja também Winklmann [29]) que,

$$-\int_M f\left[\Delta_F f + f\langle A_F dN, dN\rangle\right] dM \geq 0,$$

para qualquer função com suporte compacto $f : M^n \longrightarrow R^{n+1}$ que satisfaz

$$\int_M f dM = 0.$$

Em particular, no caso em que $\int_M f(a(k+1)S_{k+1} - b)dM = 0$, temos que

$$\int_M f(a(k+1)S_{k+1} - b)dM = 0 \Leftrightarrow (a(k+1)S_{k+1} - b)\int_M f dM = 0 \Leftrightarrow \int_M f dM = 0,$$

visto que $S_{k+1} = constante$ e $a(k+1)S_{k+1} - b \neq 0$. Assim, para provar que $\mathfrak{G}_{r,k,a,b} \geq 0$, precisamos apenas mostrar que

$$\left(C^r_{n-1} - \lambda_{a,b} C^k_{n-1}\right) \geq 0. \tag{3.18}$$

Veja que

$$\begin{aligned}
C^r_{n-1} - \lambda_{a,b} C^k_{n-1} &= \\
&= C^r_{n-1} - \frac{a(k+1)S_{r+1}}{a(k+1)S_{k+1} - b} C^k_{n-1} \\
&= C^r_{n-1} - \frac{a(k+1)C^{r+1}_n}{a(k+1)C^{k+1}_n - b} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= C^r_{n-1} - \left( \frac{\frac{a(k+1)n!}{(r+1)!(n-r-1)!}}{\frac{a(k+1)n!}{(k+1)!(n-k-1)!} - b} \right) \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= C^r_{n-1} - \left( \frac{\frac{a(k+1)n!}{(r+1)!(n-r-1)!}}{\frac{a(k+1)n! - b(k+1)!(n-k-1)!}{(k+1)!(n-k-1)!} - b} \right) \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= C^r_{n-1} - \frac{a(k+1)n!}{(r+1)!(n-r-1)!} \\
&\cdot \frac{(k+1)!(n-k-1)!}{a(k+1)n! - b(k+1)!(n-k-1)!} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} - \frac{an!(k+1)(n-1)!}{(r+1)!(n-r-1)!(an! - bk!(n-k-1)!)} \\
&= \frac{(r+1)(an! - bk!(n-k-1)!)(n-1)! - an!(k+1)(n-1)!}{(an! - bk!(n-k-1)!)(r+1)r!(n-r-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!(an!(r+1) - bk!(r+1)(n-k-1)! - an!(k+1))}{(an! - bk!(n-k-1)!)(r+1)r!(n-r-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!(an!(r-k) - bk!(r+1)(n-k-1)!)}{(an! - bk!(n-k-1)!)(r+1)!(n-r-1)!}.
\end{aligned}$$

Assim, $C^r_{n-1} - \lambda_{a,b} C^k_{n-1} \geq 0$ se, e somente se, $\xi := \frac{an!(r-k) - bk!(r+1)(n-k-1)!}{an! - bk!(n-k-1)!} \geq 0$.

Assim, basta provar que $\xi \geq 0$. Consideremos os seguintes casos.

1. Se $a = 0$ e $b \neq 0$; temos então $\xi = (r+1) \geq 0$;

2. Se $a \neq 0$ e $b = 0$; temos então $\xi = (r-k) \geq 0$;

3. Caso $a \neq 0 \neq b$; como $\frac{a}{b} \notin \left[ \frac{k!(n-k-1)!}{n!}, \frac{r+1}{r-k} . \frac{k!(n-k-1)!}{n!} \right)$, temos que:

   - $\frac{a}{b} < \frac{k!(n-k-1)!}{n!}$: Se $b < 0$, temos que

$$an! > bk!(n-k-1)! \Rightarrow an! - bk!(n-k-1)! > 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &< \frac{k!(n-k-1)!}{n!} < \frac{k!(n-k-1)!}{n!}\frac{r+1}{r-k} \\ &\Rightarrow an!(r-k) > bk!(n-k-1)!(r+1) \\ &\Rightarrow an!(r-k) - bk!(n-k-1)!(r+1) > 0. \end{aligned}$$

Logo, $\xi \geq 0$. Caso $b > 0$, temos que $an! - bk!(n-k-1)! < 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &< \frac{k!(n-k-1)!}{n!} < \frac{k!(n-k-1)!}{n!}\frac{r+1}{r-k} \\ &\Rightarrow an!(r-k) < bk!(n-k-1)!(r+1) \\ &\Rightarrow an!(r-k) - bk!(n-k-1)!(r+1) < 0. \end{aligned}$$

Logo, $\xi \geq 0$.

- $\frac{a}{b} \geq \frac{r+1}{r-k}\frac{k!(n-k-1)!}{n!}$: Temos que,

$$\frac{a}{b} \geq \frac{r+1}{r-k}\frac{k!(n-k-1)!}{n!} > \frac{k!(n-k-1)!}{n!}.$$

Se $b > 0$, temos que $(an! - bk!(n-k-1)!) > 0$. Por outro lado,

$$(a(r-k)n! - bk!(n-k-1)!) \geq 0.$$

Assim, $\xi \geq 0$. Caso $b < 0$, temos que $(an! - bk!(n-k-1)!) < 0$. Por outro lado,

$$(an!(r-k) - b(r+1)k!(n-k-1)!) \leq 0.$$

Assim, $\xi \geq 0$.

Em qualquer caso, temos $\xi \geq 0$. Logo $\mathfrak{G}_{r,k,a,b}(f) \geq 0$ para qualquer função com suporte compacto $f : M^n \longrightarrow R^{n+1}$ que satisfaz (3.10). Portanto, por definição, $x$ é $(r, k, a, b)$-estável. □

**Observação 3.9.** *Observe que, por (3.18), para $a, b \in R$ tal que $\lambda_{a,b} \leq 0$, temos que o Teorema 3.8 é verdadeiro. Preferimos deixar o Teorema 3.8 com as condições sobre a e b por ser mais gerais que pedir $\lambda_{a,b} \leq 0$.*

O próximo resultado é uma caracterização da Wulff shape de $F$ como um ponto crítico para o problema variacional no caso onde $b = 0$.

**Teorema 3.10.** *Suponha* $0 \leq k < r \leq n-1$. *Seja* $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ *uma hipersuperfície suave, fechada e orientável. Então,* $x$ *é ponto crítico do funcional* $\mathfrak{F}_{r,k,a,0}$ *se, e somente se, a menos de translação e homotetia,* $x(M)$ *é a Wulff shape de* $F$.

*Demonstração.* De acordo com Teorema (3.8), a condição é necessária. Provaremos que é também suficiente. De $\frac{S_{r+1}}{S_{k+1}} = constante$, temos por (2.5) que $\frac{H^F_{r+1}}{H^F_{k+1}} = constante$. Visto que $M$ é fechada e orientável em $R^{n+1}$, existe um ponto $p_0 \in M$ tal que as curvaturas principais são todas positivas em $p_0$ para uma escolha da orientação de $M$, assim as curvaturas principais anisotrópicas $\lambda_i(p_0) > 0$, $1 \leq i \leq n$ (pelo Lema 2.2). Portanto,

$$\frac{H^F_{r+1}}{H^F_{k+1}} \equiv \frac{H^F_{r+1}}{H^F_{k+1}}(p_0) =: \theta > 0.$$

Visto que $H^F_{k+1} \neq 0$ e $H^F_{k+1}(p_0) > 0$, pela continuidade temos que $H^F_{k+1} > 0$ em $M$, donde $H^F_{r+1} \equiv \theta H^F_{k+1} > 0$. Assim, do Lema 2.5 temos $H^F_1, ..., H^F_r > 0$ em $M$. Além disso, pelo Lema 2.3 temos que,

$$\int_M H^F_k F(N) + H^F_{k+1} \langle x, N \rangle \, dM = 0 \ (*)$$

e

$$\int_M H^F_r F(N) + H^F_{r+1} \langle x, N \rangle \, dM = 0 \ (**).$$

Sendo $\frac{H^F_{r+1}}{H^F_{k+1}} = constante$, multiplicando o lado esquerdo de $(*)$ por $\frac{H^F_{r+1}}{H^F_{k+1}}$ e subtraindo do lado esquerdo de $(**)$ obtemos

$$\begin{aligned} &\int_M H^F_k F(N) \frac{H^F_{r+1}}{H^F_{k+1}} + \frac{H^F_{r+1}}{H^F_{k+1}} H^F_{k+1} \langle x, N \rangle \, dM \\ &\qquad - \int_M H^F_r F(N) + H^F_{r+1} \langle x, N \rangle \, dM = 0 \\ \Leftrightarrow &\int_M F(N) \left( H^F_{r+1} \frac{H^F_k}{H^F_{k+1}} - H^F_r \right) dM = 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Por outro lado, é conhecido que a seguinte generalização da desigualdade tipo Cauchy-Schwarz é verdadeira (veja, por exemplo, [15], Teorema 51, p. 52, Teorema 144, p. 104) para qualquer $1 \leq i \leq n-1$:

$$(H^F_i)^2 - H^F_{i-1} H^F_{i+1} \geq 0, \tag{3.20}$$

a igualdade ocorre para algum $i$ se, e somente se, nesse ponto as curvaturas principais anisotrópicas são iguais. Como $H_i^F > 0$ para qualquer $0 \le i \le r+1$ podemos escrever a desigualdade (3.20) da forma

$$\frac{H_i^F}{H_{i-1}^F} \ge \frac{H_{i+1}^F}{H_i^F}, \tag{3.21}$$

para qualquer $1 \le i \le r$, ocorrendo igualdade para algum $i$ se, e somente se, nesse ponto as curvaturas principais anisotrópicas são iguais. Temos então as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} H_1^F \ge \frac{H_2^F}{H_1^F} \ge \frac{H_3^F}{H_2^F} \ge \dots \ge \frac{H_{k+1}^F}{H_k^F} \ge \dots \ge \frac{H_{r+1}^F}{H_r^F} \\ \Rightarrow \frac{H_{k+1}^F}{H_k^F} \ge \frac{H_{r+1}^F}{H_r^F} \Leftrightarrow H_r^F \ge \frac{H_k^F H_{r+1}^F}{H_{k+1}^F}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

para todo $0 \le k < r \le n-1$, ocorrendo igualdade em (3.22) se, e somente se, as curvaturas principais anisotrópicas são iguais. Finalmente, como a função $F : S^n \longrightarrow R^+$ é positiva, temos por (3.19) que

$$H_r^F = \frac{H_k^F H_{r+1}^F}{H_{k+1}^F}.$$

Portanto, ocorre igualdade em (3.22) e assim $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = constante \neq 0$. Pelo Lema 2.4, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$. $\square$

Agora, impondo algumas condições adicionais, obtemos uma recíproca do Teorema 3.8. Primeiramente, estabeleceremos dois lemas.

Dado $f : M \longrightarrow R$ função suave, definimos:

$$I_r[f] := L_r f + f \langle T_r dN, dN \rangle ; \tag{3.23}$$

$$J_{r,k}[f] := I_r[f] - \lambda_{a,b} I_k[f]. \tag{3.24}$$

Com a notação acima temos, por (3.11), que $\mathfrak{G}_{r,k,a,b} = -\int_M f J_{r,k}[f] dM$. Apresentamos a seguir dois lemas. O primeiro foi estabelecido em [16] e o segundo provamos.

**Lema 3.11.** *Para cada $0 \le r \le n-1$, temos que*

$$I_r[F(N)] = -\langle gradS_{r+1}, grad_{S^n} F \rangle + S_1 S_{r+1} - (r+2) S_{r+2}; \tag{3.25}$$

$$I_r[\langle x, N \rangle] = -\left\langle gradS_{r+1}, grad\left(\frac{|x|^2}{2}\right)\right\rangle - (r+1) S_{r+1}; \tag{3.26}$$

*Demonstração.* Veja Lema 5.3 em [16]. □

**Lema 3.12.** *Para cada $0 \leq k < r \leq n-1$, se $\lambda_{a,b} =$ constante, temos que*

$$J_{r,k}[F(N)] = S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2} - \lambda_{a,b}(S_1 S_{k+1} - (k+2)S_{k+2}); \quad (3.27)$$

$$J_{r,k}[\langle x, N\rangle] = -(r+1)S_{r+1} + \lambda_{a,b}(k+1)S_{k+1}; \quad (3.28)$$

$$\int_M \langle x, N\rangle\, J_{r,k}[f]dM = \int_M f J_{r,k}[\langle x, N\rangle]dM. \quad (3.29)$$

*Demonstração.* Pelo Lema 3.11, temos que

$$\begin{aligned} J_{r,k}[F(N)] &= I_r[F(N)] - \lambda_{a,b} I_k[F(N)] = -\langle gradS_{r+1}, grad_{S^n}F\rangle + S_1 S_{r+1} \\ &- (r+2)S_{r+2} - \lambda_{a,b}\left(-\langle gradS_{k+1}, grad_{S^n}F\rangle + S_1 S_{k+1} - (k+2)S_{k+2}\right). \end{aligned}$$

Se $a = 0$ e $b \neq 0$, temos que $\lambda_{a,b} = 0$ e $S_{r+1} =$ constante, onde

$$J_{r,k}[F(N)] = S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2},$$

provando (3.27).

Caso $a \neq 0$, temos que

$$\begin{aligned} J_{r,k}[F(N)] &= -\langle gradS_{r+1}, grad_{S^n}F\rangle + S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2} \\ &- \left(\frac{S_{r+1}}{S_{k+1} - \frac{b}{a(k+1)}}\right)[-\left\langle grad\left(S_{k+1} - \frac{b}{a(k+1)}\right), grad_{S^n}F\right\rangle + S_1 S_{k+1} \\ &- (k+2)S_{k+2}] = S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2} - \lambda_{a,b}[S_1 S_{k+1} - (k+2)S_{k+2}]. \end{aligned}$$

Agora provaremos (3.28). Temos que

$$\begin{aligned} J_{r,k}[\langle x, N\rangle] &= I_r[\langle x, N\rangle] - \lambda_{a,b} I_k[\langle x, N\rangle] = -\left\langle gradS_{r+1}, grad\left(\frac{|x|^2}{2}\right)\right\rangle - (r+1)S_{r+1} \\ &- \lambda_{a,b}\left(-\left\langle gradS_{k+1}, grad\left(\frac{|x|^2}{2}\right)\right\rangle - (k+1)S_{k+1}\right). \end{aligned}$$

Se $a = 0$ e $b \neq 0$, temos $\lambda_{a,b} = 0$ e $S_{r+1} =$ constante, onde

$$J_{r,k}[\langle x, N\rangle] = -(r+1)S_{r+1}.$$

Caso $a \neq 0$, temos que

$$\begin{aligned} J_{r,k}[\langle x, N\rangle] &= -\left\langle gradS_{r+1}, grad\left(\frac{|x|^2}{2}\right)\right\rangle - (r+1)S_{r+1} \\ &- \left(\frac{S_{r+1}}{S_{k+1} - \frac{b}{a(k+1)}}\right)[-\left\langle grad\left(S_{k+1} - \frac{b}{a(k+1)}\right), grad\left(\frac{|x|^2}{2}\right)\right\rangle \\ &- (k+1)S_{k+1}] = -(r+1)S_{r+1} + \lambda_{a,b}(k+1)S_{k+1}, \end{aligned}$$

provando (3.28).

Finalmente, provaremos (3.29). Temos que

$$\int_M \langle x, N\rangle J_{r,k}[f]dM = \int_M \langle x, N\rangle \left(I_r[f] - \lambda_{a,b} I_k[f]\right) dM \tag{3.30}$$

$$= \int_M \langle x, N\rangle I_r[f]dM - \lambda_{a,b}\int_M \langle x, N\rangle I_k[f]dM.$$

Pelo Teorema de Stokes e da simetria de $T_l$, temos que

$$\begin{aligned} \textstyle\int_M \quad & \langle x, N\rangle L_l[f]dM = \int_M \langle x, N\rangle\, div(T_l gradf)dM \\ = \quad & -\int_M \langle T_l gradf, grad\,\langle x, N\rangle\rangle\, dM = -\int_M \langle gradf, T_l grad\,\langle x, N\rangle\rangle\, dM \\ = \quad & \int_M f div(T_l grad\,\langle x, N\rangle)dM = \int_M f L_l[\langle x, N\rangle]dM. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Assim, por (3.31)

$$\begin{aligned} \textstyle\int_M \quad & \langle x, N\rangle I_l[f]dM = \int_M \langle x, N\rangle\, (L_l[f] + f\,\langle T_l dN, dN\rangle)dM \\ = \quad & \int_M \langle x, N\rangle L_l[f]dM + \int_M f\,\langle x, N\rangle \langle T_l dN, dN\rangle\, dM = \int_M f L_l[\langle x, N\rangle]dM \\ + \quad & \int_M f\,\langle x, N\rangle \langle T_l dN, dN\rangle\, dM = \int_M f\left(L_l[\langle x, N\rangle] + \langle x, N\rangle \langle T_l dN, dN\rangle\right) dM \\ = \quad & \int_M f I_l[\langle x, N\rangle]dM. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Portanto, por (3.30) e (3.32), temos

$$\int_M \langle x, N\rangle J_{r,k}[f]dM = \int_M f\left(I_r[\langle x, N\rangle] - \lambda_{a,b} I_k[\langle x, N\rangle]\right) dM = \int_M f J_{r,k}[\langle x, N\rangle]dM.$$

$\square$

No próximo resultado, sob certas condições acerca de $a, b \in R$, apresentaremos uma recíproca do Teorema 3.8.

**Teorema 3.13.** *Suponha $0 \leq k < r \leq n-1$. Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma hipersuperfície suave, fechada e orientável. Se $x$ é $(r,k,a,b)$-estável para $a, b \in R$ não nulos, tal que $\lambda_{a,b} \leq 0$, então a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$, onde $\lambda_{a,b}$ é dado por (3.12).*

*Demonstração.* Visto que $x$ é $(r,k,a,b)$-estável, temos que $\frac{(r+1)S_{r+1}}{a(k+1)S_{k+1}-b} = constante$ e $\mathfrak{G}_{r,k,a,b}(f) \geq 0$, $\forall f : M \longrightarrow R$ que satisfaz (3.10). Como $M$ é fechado e orientável em $R^{n+1}$, existe um ponto $p_0 \in M$ tal que as curvaturas principais são positivas em $p_0$ para uma escolha da orientação de $M$, assim as curvaturas principais anisotrópicas $\lambda_i(p_0) > 0$, $1 \leq i \leq n$ (pelo Lema 2.2). Denote

$$\frac{(r+1)S_{r+1}}{a(k+1)S_{k+1}-b} \equiv \frac{(r+1)H^F_{r+1}C^{r+1}_n}{a(k+1)S_{k+1}-b}(p_0) := \theta. \tag{3.33}$$

Se $(a(k+1)S_{k+1}-b) < 0$, temos $\theta = \frac{(r+1)H^F_{r+1}C^{r+1}_n}{a(k+1)S_{k+1}-b}(p_0) < 0$, onde, por (3.33), $S_{r+1} = \theta\frac{a(k+1)S_{k+1}-b}{r+1} > 0$, isto é, $H^F_{r+1} > 0$ em $M$. Por outro lado, se $(a(k+1)S_{k+1}-b) > 0$ temos $\theta = \frac{(r+1)H^F_{r+1}C^{r+1}_n}{a(k+1)S_{k+1}-b}(p_0) > 0$ onde, por (3.33), $S_{r+1} = \theta\frac{a(k+1)S_{k+1}-b}{r+1} > 0$, isto é, $H^F_{r+1} > 0$ em $M$. De qualquer modo, $H^F_{r+1} > 0$ em $M$. Assim, pelo Lema 2.5, temos que $H^F_1, ..., H^F_r > 0$ em $M$.

Do Lema 2.3 e por (3.10), podemos escolher $f = \gamma F(N) + \frac{(r+1)S_{r+1}}{a(k+1)S_{k+1}-b}\langle x, N\rangle$ como a função teste, onde

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{\int_M FS_r(n-r)dM}{\int_M F(a(k+1)S_{k+1}-b)dM} = \\
&= \begin{cases} \dfrac{\int_M FS_r(n-r)dM}{\int_M \frac{F(a(k+1)S_{k+1}-b)}{a(k+1)S_{r+1}}a(k+1)S_{r+1}dM}, & se\ a \neq 0 \\[2ex] \dfrac{\int_M FS_r(n-r)dM}{\int_M F\frac{(-b)}{S_{r+1}}S_{r+1}dM}, & se\ a = 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{\lambda_{a,b}}{a(k+1)}(n-r)\frac{\int_M FS_r dM}{\int_M FS_{r+1}dM}, & se\ a \neq 0 \\[2ex] \frac{S_{r+1}}{(-b)}(n-r)\frac{\int_M FS_r dM}{\int_M FS_{r+1}dM}, & se\ a \neq 0 \end{cases} \\
&= (n-r)\varpi_{a,b}\varsigma = constante,
\end{aligned} \tag{3.34}$$

visto que $\lambda_{a,b}$ é constante e

$$\varpi_{a,b} = \begin{cases} \frac{\lambda_{a,b}}{a(k+1)}, & se\ a \neq 0 \\ \\ \frac{S_{r+1}}{(-b)}, & se\ a = 0 \end{cases}, \quad \varsigma = \frac{\int_M FS_r dM}{\int_M FS_{r+1} dM}. \tag{3.35}$$

Assim $f = \gamma F(N) + (r+1)\varpi_{a,b}\langle x, N\rangle$ e $\mathfrak{G}_{r,k,a,b}(f) = -\int_M fJ_{r,k}[f]dM \geq 0$.

Agora iremos calcular $J_{r,k}[f]$. Por (3.27) e (3.28)

$$\begin{aligned} J_{r,k}[f] &= \gamma J_{r,k}[F] + \frac{(r+1)S_{r+1}}{a(k+1)S_{k+1} - b} J_{r,k}[\langle x, N\rangle] \\ &= \gamma[S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2} - \lambda_{a,b}(S_1 S_{k+1} - (k+2)S_{k+2})] \\ &+ (r+1)\varpi_{a,b}[-(r+1)S_{r+1} + \lambda_{a,b}(k+1)S_{k+1}]. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Por outro lado, por (3.29)

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{r,k,a,b}(f) &= -\int_M fJ_{r,k}[f]dM \\ &= -\int_M (\gamma F + (r+1)\varpi_{a,b}\langle x, N\rangle)\, J_{r,k}[f]dM \\ &= -\int_M (\gamma F J_{r,k}[f] + (r+1)\varpi_{a,b} f J_{r,k}[\langle x, N\rangle])\, dM. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Calcularemos cada fator da integral acima. Veja que

$$\begin{aligned} \gamma F J_{r,k}[f] &= \gamma F\{\gamma[S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2} - \lambda_{a,b}(S_1 S_{k+1} - (k+2)S_{k+2})] \\ &+ (r+1)\varpi_{a,b}[-(r+1)S_{r+1} + \lambda_{a,b}(k+1)S_{k+1}]\} \\ &= F\gamma^2[C_n^{r+1}(nH_1^F H_{r+1}^F - (n-r-1)H_{r+2}^F) \\ &- \lambda_{a,b}C_n^{k+1}(nH_1^F H_{k+1}^F - (n-k-1)H_{k+2}^F)] \\ &+ (r+1)\varpi_{a,b}\gamma F(\lambda_{a,b}(k+1)S_{k+1} - (r+1)S_{r+1}); \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned} (r+1)\varpi_{a,b} f J_{r,k}[\langle x, N\rangle] &= (r+1)\varpi_{a,b} f[-(r+1)S_{r+1} + \lambda_{a,b}(k+1)S_{k+1}] \\ &= (r+1)\varpi_{a,b} f[-(r+1)\varpi_{a,b}(a(k+1)S_{k+1} - b) \\ &+ \lambda_{a,b}(k+1)S_{k+1}] \\ &= -(r+1)^2\varpi_{a,b}^2 f(a(k+1)S_{k+1} - b) \\ &+ (r+1)(k+1)\varpi_{a,b}\lambda_{a,b}S_{k+1}f = \eta_1 + (r+1) \\ &. \ (k+1)\varpi_{a,b}\lambda_{a,b}S_{k+1}(\gamma F + (r+1)\varpi_{a,b}\langle x, N\rangle), \end{aligned} \tag{3.39}$$

onde

$$\eta_1 = -(r+1)^2\varpi_{a,b}^2 f(a(k+1)S_{k+1} - b). \tag{3.40}$$

Assim, por (3.38) e (3.39), temos

$$\begin{aligned}\gamma.\ \ & FJ_{r,k}[f] + (r+1)\varpi_{a,b} f J_{r,k}[\langle x, N\rangle] = \eta_1 + \eta_2 \\ + \ \ & 2(r+1)(k+1)\varpi_{a,b}\gamma\lambda_{a,b} F S_{k+1} - (r+1)^2\varpi_{a,b}\gamma F S_{r+1} \\ + \ \ & (r+1)^2(k+1)\varpi_{a,b}^2\lambda_{a,b} S_{k+1}\langle x, N\rangle,\end{aligned} \tag{3.41}$$

onde

$$\eta_2 = F\gamma^2[C_n^{r+1}(nH_1^F H_{r+1}^F - (n-r-1)H_{r+2}^F) - \lambda_{a,b}C_n^{k+1}(nH_1^F H_{k+1}^F - (n-k-1)H_{k+2})].$$

Portanto, por (3.37), (3.41), (3.40) e pelo Lema 2.3, temos

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}\ \ & _{r,k,a,b}(f) = -\int_M \eta_1 + \eta_2 + 2(r+1)(k+1)\varpi_{a,b}\gamma\lambda_{a,b}FS_{k+1} \\ - \ \ & (r+1)^2\varpi_{a,b}\gamma F S_{r+1} + (r+1)^2(k+1)\varpi_{a,b}^2\lambda_{a,b}S_{k+1}\langle x, N\rangle\, dM \\ = \ \ & -\int_M \eta_2 + 2(r+1)(k+1)\varpi_{a,b}\gamma\lambda_{a,b}FS_{k+1} - (r+1)^2\varpi_{a,b}\gamma F S_{r+1} \\ - \ \ & (r+1)^2(k+1)\varpi_{a,b}^2\lambda_{a,b}C_n^{k+1}FH_k^F dM \\ = \ \ & -\int_M F\gamma^2[C_n^{r+1}(nH_1^F H_{r+1}^F - (n-r-1)H_{r+2}^F) \\ - \ \ & \lambda_{a,b}C_n^{k+1}(nH_1^F H_{k+1}^F - (n-k-1)H_{k+2})] + \eta_3 dM \\ = \ \ & -\int_M \{F\gamma^2[C_n^{r+1}((n-r-1)H_1^F H_{r+1}^F + (r+1)H_1^F H_{r+1}^F - (n-r-1)H_{r+2}^F) \\ - \ \ & \lambda_{a,b}C_n^{k+1}((n-k-1)H_1^F H_{k+1}^F + (k+1)H_1^F H_{k+1}^F - (n-k-1)H_{k+2}^F)] \\ + \ \ & \eta_3\}dM = -\gamma^2 C_n^{r+1}(n-r-1)\int_M F(H_1^F H_{r+1}^F - H_{r+2}^F)dM \\ - \ \ & \gamma^2 C_n^{r+1}\int_M F(r+1)H_1^F H_{r+1}^F dM + \gamma^2 C_n^{k+1}\lambda_{a,b}(n-k-1) \\ . \ \ & \int_M F(H_1^F H_{k+1}^F - H_{k+2}^F)dM + \gamma^2 C_n^{k+1}\lambda_{a,b}\int_M F(k+1)H_1^F H_{k+1}^F dM - \int_M \eta_3 dM,\end{aligned} \tag{3.42}$$

onde,

$$\begin{aligned}\eta_3 \ &= \ 2(r+1)(k+1)\varpi_{a,b}\lambda_{a,b}\gamma F C_n^{k+1}H_{k+1}^F - (r+1)^2\varpi_{a,b}\gamma F C_n^{r+1}H_{r+1}^F \\ &- \ (r+1)^2(k+1)\varpi_{a,b}^2\lambda_{a,b}C_n^{k+1}FH_k^F.\end{aligned}$$

Veja que,

$$
\begin{aligned}
- &\ \gamma^2 C_n^{r+1}\int_M F(r+1)H_1^F H_{r+1}^F dM \qquad (3.43)\\
= &\ -(n-r)^2\varpi_{a,b}^2\varsigma^2 C_n^{r+1}(r+1)\int_M F H_1^F H_{r+1}^F dM\\
= &\ -\frac{(n-r)^2(r+1)C_n^{r+1}\varpi_{a,b}^4\varsigma}{\int_M FS_{r+1}dM}\{\frac{\varsigma\int_M FS_{r+1}dM}{\varpi_{a,b}^2}\int_M FH_1^F H_{r+1}^F dM\}\\
= &\ -\frac{(n-r)^2(r+1)C_n^{r+1}\varpi_{a,b}^4\varsigma}{\int_M FS_{r+1}dM}\\
. &\ \{\frac{\varsigma\int_M FS_{r+1}dM}{\varpi_{a,b}^2}\int_M \frac{\varpi_{a,b}}{C_n^{r+1}}FH_1^F(a(k+1)S_{k+1}-b)dM\}\\
= &\ -\frac{(n-r)^2(r+1)\varpi_{a,b}^4\varsigma}{\int_M FS_{r+1}dM}\{\frac{\int_M FS_r dM}{\int_M FS_{r+1}dM}\frac{\int_M FS_{r+1}dM}{\varpi_{a,b}}\\
. &\ \int_M FH_1^F(a(k+1)S_{k+1}-b)dM\}\\
= &\ -\frac{(n-r)^2(r+1)\varpi_{a,b}^4\varsigma}{\int_M FS_{r+1}dM}\{\int_M F\frac{S_r}{S_{r+1}}(a(k+1)S_{k+1}-b)dM\\
. &\ \int_M FH_1^F(a(k+1)S_{k+1}-b)dM\}\\
= &\ -\frac{(n-r)(r+1)^2\varpi_{a,b}^4\varsigma}{\int_M FS_{r+1}dM}\{\int_M F\frac{H_r^F}{H_{r+1}^F}(a(k+1)S_{k+1}-b)dM\\
. &\ \int_M FH_1^F(a(k+1)S_{k+1}-b)dM\};
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
. &\ (r+1)^2\varpi_{a,b}C_n^{r+1}\gamma\int_M FH_{r+1}^F dM \qquad (3.44)\\
= &\ (r+1)^2(n-r)C_n^{r+1}\varpi_{a,b}^2\varsigma\int_M FH_{r+1}^F dM\\
= &\ -\frac{(r+1)^2(n-r)\varpi_{a,b}^4\varsigma}{\int_M FS_{r+1dM}}\left\{-\frac{C_n^{r+1}}{\varpi_{a,b}^2}\int_M FS_{r+1}dM\int_M FH_{r+1}^F dM\right\}\\
= &\ -\frac{(r+1)^2(n-r)\varpi_{a,b}^4\varsigma}{\int_M FS_{r+1dM}}\left\{-\frac{(C_n^{r+1})^2}{\varpi_{a,b}^2}\left(\int_M FH_{r+1}^F dM\right)^2\right\}.
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\int_M FH^F_{r+1}dM &= \int_M F\frac{1}{C_n^{r+1}}\frac{S_{r+1}}{a(k+1)S_{k+1}-b}(a(k+1)S_{k+1}-b)dM \qquad (3.45)\\ &= \frac{1}{C_n^{r+1}}\int_M F\varpi_{a,b}(a(k+1)S_{k+1}-b)dM.\end{aligned}$$

Substituindo (3.45) em (3.44), obtemos

$$\begin{aligned}&+ \quad (r+1)^2\varpi_{a,b}C_n^{r+1}\gamma\int_M FH^F_{r+1}dM = -\frac{(r+1)^2(n-r)\varpi^4_{a,b}\varsigma}{\int_M FS_{r+1}dM} \qquad (3.46)\\ &. \quad \left\{-\left(\int_M F(a(k+1)S_{k+1}-b)dM\right)^2\right\}.\end{aligned}$$

Assim, usando (3.43) e (3.46), respectivamente em (3.42), obtemos

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}&\ _{r,k,a,b}(f) = -(n-r)^2\varpi^2_{a,b}C_n^{r+1}(n-r-1)\varsigma^2\int_M F(H_1^FH^F_{r+1}-H^F_{r+2})dM \quad (3.47)\\ +&\quad (n-r)^2\lambda_{a,b}\varpi^2_{a,b}C_n^{k+1}(n-k-1)\varsigma^2\int_M F(H_1^FH^F_{k+1}-H^F_{k+2})dM\\ -&\quad \frac{(n-r)(r+1)^2\varpi^4_{a,b}\varsigma}{\int_M FS_{r+1}dM}\{\int_M F\frac{H^F_r}{H^F_{r+1}}(a(k+1)S_{k+1}-b)dM\\ .&\quad \int_M FH_1^F(a(k+1)S_{k+1}-b)dM-\left(\int_M F(a(k+1)S_{k+1}-b)dM\right)^2\}\\ +&\quad \gamma^2\lambda_{a,b}C_n^{k+1}(k+1)\int_M FH_1^FH^F_{k+1}dM-2(r+1)(k+1)\lambda_{a,b}\varpi_{a,b}C_n^{k+1}\gamma\\ .&\quad \int_M FH^F_{k+1}dM+(r+1)^2(k+1)C_n^{k+1}\lambda_{a,b}\varpi^2_{a,b}\int_M FH^F_kdM.\end{aligned}$$

Por outro lado, como $H_1^F, H_2^F, \cdots, H^F_{r+1} > 0$ em $M$, é conhecido que a seguinte generalização da desigualdade tipo Cauchy- Schwarz é verdadeira (veja, por exemplo, [15], Teorema 51, p. 52, Teorema 144, p. 104) para qualquer $1 \leq i \leq n-1$:

$$(H_i^F)^2 - H^F_{i-1}H^F_{i+1} \geq 0, \qquad (3.48)$$

a igualdade ocorre para algum $i$ se, e somente se, nesse ponto as curvaturas principais anisotrópicas são iguais. Como $H_i^F > 0$ para qualquer $0 \leq i \leq r+1$ podemos escrever a desigualdade (3.48) na forma

$$\frac{H_i^F}{H^F_{i-1}} \geq \frac{H^F_{i+1}}{H_i^F}, \qquad (3.49)$$

para qualquer $1 \leq i \leq r+1 \leq n$, ocorrendo igualdade para algum $i$ se, e somente se, nesse ponto as curvaturas principais anisotrópicas são iguais. Temos então as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} H_1^F &\geq \frac{H_2^F}{H_1^F} \geq \frac{H_3^F}{H_2^F} \geq \cdots \geq \frac{H_{k+1}^F}{H_k^F} \geq \frac{H_{k+2}^F}{H_{k+1}^F} \geq \cdots \geq \frac{H_{r+1}^F}{H_r^F} \geq \frac{H_{r+2}^F}{H_{r+1}^F} \\ &\Rightarrow \frac{H_r^F}{H_{r+1}^F} \geq \frac{1}{H_1^F}, \ \frac{H_k^F}{H_{k+1}^F} \geq \frac{1}{H_1^F} \end{aligned} \tag{3.50}$$

e

$$\begin{cases} H_1^F H_{r+1}^F - H_{r+2}^F \geq 0, \\ H_1^F H_{k+1}^F - H_{k+2}^F \geq 0, \end{cases} \tag{3.51}$$

para todo $0 \leq k < r \leq n-1$, ocorrendo igualdade em (3.50) se, e somente se, as curvaturas principais anisotrópicas são iguais. Assim, para cada $1 \leq r \leq n-1$, por (3.50), temos

$$\begin{aligned} &\int_M F(a(k+1)S_{k+1}-b)\frac{H_r^F}{H_{r+1}^F}dM \int_M FH_1^F(a(k+1)S_{k+1}-b)dM \qquad (3.52) \\ &- \left(\int_M F(a(k+1)S_{k+1}-b)dM\right)^2 \geq \int_M F(a(k+1)S_{k+1}-b)\frac{1}{H_1^F}dM \\ &. \int_M FH_1^F(a(k+1)S_{k+1}-b)dM - \left(\int_M F(a(k+1)S_{k+1}-b)dM\right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Vamos estudar agora as últimos três parcelas de (3.47). Veja que, por (3.34)

$$\begin{aligned} \gamma^2 \quad & \lambda_{a,b}C_n^{k+1}(k+1)\int_M FH_1^FH_{k+1}^F dM - 2(r+1)(k+1)\lambda_{a,b}\varpi_{a,b}C_n^{k+1}\gamma \qquad (3.53) \\ . \quad & \int_M FH_{k+1}^F dM + (r+1)^2(k+1)C_n^{k+1}\lambda_{a,b}\varpi_{a,b}^2\int_M FH_k^F dM \\ = \quad & (n-r)^2(k+1)C_n^{k+1}\lambda_{a,b}\varpi_{a,b}^2\varsigma^2\int_M FH_1^FH_{k+1}^F dM - 2(r+1)(k+1)(n-r) \\ . \quad & C_n^{k+1}\lambda_{a,b}\varpi_{a,b}^2\varsigma\int_M FH_{k+1}^F dM + (r+1)^2(k+1)C_n^{k+1}\lambda_{a,b}\varpi_{a,b}^2\int_M FH_k^F dM \\ = \quad & (k+1)C_n^{k+1}\lambda_{a,b}\varpi_{a,b}^2\{\int_M F[(n-r)^2H_1^FH_{k+1}^F\varsigma^2 - 2(r+1)(n-r)H_{k+1}\varsigma \\ + \quad & (r+1)^2H_k^F]dM\}. \end{aligned}$$

Agora, para $p \in M$, considere o polinômio em $z$ dado por

$$\mathfrak{P}_z(p) = (n-r)^2 H_1^F H_{k+1}^F z^2 - 2(r+1)(n-r)H_{k+1}z + (r+1)^2 H_k^F. \tag{3.54}$$

Neste caso, temos que o discriminante de $\mathfrak{P}_z$ é

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(r+1)^2(n-r)^2\left[(H_{k+1}^F)^2 - H_1^F H_{k+1}^F H_k^F\right] \\ &= 4(r+1)^2(n-r)^2(H_{k+1}^F)^2\left(1 - \frac{H_1^F H_k^F}{H_{k+1}^F}\right) \leq 0, \end{aligned} \tag{3.55}$$

onde a última desigualdade na expressão acima é dada por (3.50). Assim, temos que $\mathfrak{P}_z(p) \geq 0, \forall p \in M$. Particularmente

$$\mathfrak{P}_\varsigma := (n-r)^2 H_1^F H_{k+1}^F \varsigma^2 - 2(r+1)(n-r)H_{k+1}\varsigma + (r+1)^2 H_k^F \geq 0, \tag{3.56}$$

em $M$.

Assim, por (3.47), (3.53), (3.56) (3.51), (3.52) e devido $\lambda_{a,b} \leq 0$, temos que

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{r,k,a,b}(f) &= -(n-r)^2\varpi_{a,b}^2 C_n^{r+1}(n-r-1)\varsigma^2\int_M F(H_1^F H_{r+1}^F - H_{r+2}^F)dM \\ &+ (n-r)^2\lambda_{a,b}\varpi_{a,b}^2 C_n^{k+1}(n-k-1)\varsigma^2\int_M F(H_1^F H_{k+1}^F - H_{k+2}^F)dM \\ &- \frac{(n-r)(r+1)^2\varpi_{a,b}^4\varsigma}{\int_M FS_{r+1}dM}\{\int_M F\frac{H_r^F}{H_{r+1}^F}(a(k+1)S_{k+1}-b)dM \\ &\cdot \int_M FH_1^F(a(k+1)S_{k+1}-b)dM - \left(\int_M F(a(k+1)S_{k+1}-b)dM\right)^2\} \\ &+ (k+1)C_n^{k+1}\lambda_{a,b}\varpi_{a,b}^2\int_M \mathfrak{P}_\varsigma dM \leq 0. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Portanto, temos que

$$0 \leq \mathfrak{G}_{r,k,a,b}(f) \leq 0,$$

logo ocorre igualdade em (3.52), donde também em (3.50). Portanto, as curvaturas principais anisotrópicas são iguais em $M$. Assim, pelo Lema 2.4, temos que, a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$. □

**Observação 3.14.** *Note que para $S_{r+1}$ e $S_{k+1}$ positivos, temos por (3.12), que $\lambda_{a,b} \leq 0$ se, e somente se, $\frac{a}{a(k+1)S_{k+1}-b} \leq 0$. Neste caso $\lambda_{a,b} = 0$ se, e somente se, $a = 0$. Se*

*$a > 0$ temos que $\lambda_{a,b} < 0$ se, e somente se, $S_{k+1} < \frac{b}{a(k+1)}$ (neste caso $b$ deve se positivo). Similarmente, se $a < 0$ temos que $\lambda_{a,b} < 0$ se, e somente se, $S_{k+1} < \frac{b}{a(k+1)}$ (neste caso $b$ deve ser negativo). Assim, $\lambda_{a,b} < 0$ é equivalente ao problema de encontrar $a, b \in R$ que limitam $S_{k+1}$. Note que esta hipótese é natural, pois tais constantes sempre existem devido $M$ ser compacta.*

Abaixo, apresentaremos uma caracterização da Wulff shape de $F$ como ponto crítico para o problema variacional de minimizar o funcional $\mathfrak{A}_{r,F}$ presenvando certas combinações lineares da $(k, F)$-area, $\mathfrak{A}_{k,F}$, e o volume de $M$, $V$, onde $0 \leq k < r \leq n-1$. Neste resultado obtemos uma nova caracterização da Wulff shape além de recuperar o Teorema $A$, o Teorema $B$ e generalizar o Teorema $C$, mencionados na página 9 desse trabalho, para o quociente das curvaturas médias anisotrópicas.

**Teorema 3.15.** *Suponha $0 \leq k < r \leq n-1$. Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma hipersuperfície suave, fechada e orientável para qual $\frac{(r+1)S_{r+1}}{a(k+1)S_{k+1}-b}$ é uma constante, onde $a = 0$ ou $b = 0$ ou $a, b \in R$ não nulos tais que $\lambda_{a,b} < 0$. Então, $x$ é $(r, k, a, b)$-estável se, e somente se, a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$.*

*Demonstração.* A prova do teorema acima é uma combinação do Teorema 3.8, Teorema 3.10, Teorema 3.13 e da Observação 3.9 depois do Teorema 3.8.

Suponha inicialmente que $x$ é $(r, k, a, b)$-estável. Se $a = 0$ e $b \neq 0$ temos que $\lambda_{a,b} = 0$ por (3.12), daí devido ao Teorema 3.8, a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$. Se $b = 0$ e $a \neq 0$ temos que $x$ é ponto crítico do funcional $\mathfrak{F}_{r,k,a,0}$ visto que $\frac{(r+1)S_{r+1}}{a(k+1)S_{k+1}}$ é constante e por (3.8), e portanto por causa do Teorema 3.10, a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$. Caso $a, b \in R$ não nulos tais que $\lambda_{a,b} < 0$ temos pelo Teorema 3.13 que, a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$.

Reciprocamente, se $x(M)$ é a Wulff shape, temos que $\frac{(r+1)S_{r+1}}{a(k+1)S_{k+1}-b}$ é uma constante, devido $S_l$ ser uma constante para $l \in \{0, ..., n\}$. Para os casos $a = 0$ e $b \neq 0$ ou $b = 0$ e $a \neq 0$ temos pelo Teorema 3.8 que $x$ é $(r, k, a, b)$-estável. Para o caso $a, b \in R$ não nulos tais que $\lambda_{a,b} < 0$ temos pela Observação 3.9 o resultado. $\square$

**Observação 3.16.** *A prova apresentada para o Teorema 3.13 não inclui o caso $b = 0$ devido o uso de $\varpi_{a,b}$ definido por (3.35), mas inclui o caso $a = 0$ que é equivalente a $\lambda_{a,b} = 0$ pela Observação 3.14. Por esta razão, apresentamos uma prova independente para a caso $b = 0$ no Teorema 3.10. Com o objetivo de obter resultados mais gerais (Teorema 3.8 e Teorema 3.13) preferimos apresentar o Teorema 3.15 como conseqüência desses teoremas.*

# Capítulo 4

# Sobre Propriedades das Curvaturas Médias Anisotrópicas de Hipersuperfícies Compactas Não-Convexas

## 4.1 Uma Fórmula Integral do Tipo Minkowski

Nesta seção apresentaremos uma fórmula integral do tipo Minkowski que generaliza a fórmula integral provada por He e Li em [17].

Iniciaremos citando um lema, cuja prova pode ser encontrada em [17], que será necessário para a prova do próximo teorema.

**Lema 4.1.** *Temos que:*

**(i)** $\langle x, N\rangle_i = -\sum_j h_{ij}\langle x, e_j\rangle$;

**(ii)** $\langle x, e_j\rangle_i = \delta_{ij} + h_{ij}\langle x, N\rangle$;

**(iii)** $(F \circ N)_i = -\sum_j h_{ij} F_j \circ N$;

**(iv)** $(F_i \circ N)_j = -\sum_k h_{jk} F_{ik} \circ N$;

**(v)** $(A_{ij} \circ N)_k = -\sum_l h_{kl} A_{ijl} \circ N$;

**(vi)** $\sum_l h_{kl}(P_r)_{lj} = \sum_l h_{jl}(P_r)_{lk}$;

**(vii)** $\sum_j (P_r)_{jij} = 0$;

**(viii)** $tr(P_r S_F) = (r+1)S_{r+1}$;

**(ix)** $tr(P_r) = (n-r)S_r$.

**Teorema 4.2.** *Seja* $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ *uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada e orientável* $M^n$, $F : S^n \longrightarrow R^+$ *satisfazendo a condição (2.1) e* $1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq n$ *inteiros. Então, para* $0 \leq r \leq n-1$, *temos a seguinte fórmula integral do tipo Minkowski:*

$$\begin{aligned}\int_M \quad \{ & \quad \left[ q\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1} - p\left\langle x, N\right\rangle^{p-1}\right] \left\langle AP_r(\nabla_{S^n}F), x^T\right\rangle \\ + & \quad \left(F\left\langle x, N\right\rangle^{p-1} - Fq\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1}\right)\left(div(P_r x^T) - (n-r)\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} H_r^F\right) \\ - & \quad Fq(q-1)\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-2}\left\langle P_r x^T, x^T\right\rangle \\ - & \quad (n-r)\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}\left(Fq\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1} H_r^F + H_{r+1}^F\left\langle x, N\right\rangle^p\right)\}dM = 0.\end{aligned} \tag{4.1}$$

*Demonstração.* Temos que

$$\begin{aligned} div \quad \{ & \quad P_r\left(\left\langle x, N\right\rangle^p \nabla_{S^n}F - F\nabla\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^q\right)\} = div\{P_r\left(\left\langle x, N\right\rangle^p \nabla_{S^n}F\right) \\ - & \quad P_r\left(F\nabla\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^q\right)\} = div\{P_r\left(\left\langle x, N\right\rangle^p \sum_i (F_i \circ N)e_i\right) \\ - & \quad P_r\left(q\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1} F\sum_i \left\langle x, e_i\right\rangle e_i\right)\} = div\{\left\langle x, N\right\rangle^p \sum_{ij}(F_i \circ N)(P_r)_{ji}e_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - & \quad Fq\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1}\sum_{ij}\left\langle x, e_i\right\rangle (P_r)_{ji}e_j\} \\ = & \quad div\left\{\sum_i\left(\left\langle x, N\right\rangle^p \sum_j (F_j \circ N)(P_r)_{ij} - Fq\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1}\sum_j \left\langle x, e_j\right\rangle (P_r)_{ij}\right)e_i\right\} \\ = & \quad \sum_{ij}\left(\left\langle x, N\right\rangle^p (F_j \circ N)(P_r)_{ij} - Fq\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1}\left\langle x, e_j\right\rangle (P_r)_{ij}\right)_i. \end{aligned}$$

Obtemos, pelos itens $(vii)$, $(iv)$, $(i)$, $(ii)$ e $(iii)$ do Lema 4.1

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{ij} \quad (\langle x, N\rangle^p (F_j \circ N)(P_r)_{ij})_i \qquad (4.2)\\
= &\quad \sum_{ij} \left[(P_r)_{iji} \langle x, N\rangle^p (F_j \circ N) + (P_r)_{ij} \left((F_j \circ N) \langle x, N\rangle^p\right)_i\right]\\
= &\quad \sum_{ij} (P_r)_{ij} \left[(F_j \circ N)_i \langle x, N\rangle^p + (F_j \circ N)(\langle x, N\rangle^p)_i\right]\\
= &\quad -\sum_{ijk} (P_r)_{ij} h_{ik} [(F_{jk} \circ N) \langle x, N\rangle^p\\
+ &\quad (F_j \circ N) p \langle x, N\rangle^{p-1} \langle x, e_k\rangle]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{ij} \quad \left(Fq \left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1} \langle x, e_j\rangle (P_r)_{ij}\right)_i \qquad (4.3)\\
= &\quad \sum_{ij} [(P_r)_{iji} Fq \left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1} \langle x, e_j\rangle + (P_r)_{ij} \left(Fq \left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1} \langle x, e_j\rangle\right)_i ]\\
= &\quad \sum_{ij} (P_r)_{ij} [(F \circ N)_i q \left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1} \langle x, e_j\rangle\\
+ &\quad (F \circ N)(q(q-1) \left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-2} \langle x, e_i\rangle \langle x, e_j\rangle\\
+ &\quad q \left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1} (\delta_{ij} + h_{ij} \langle x, N\rangle))]\\
= &\quad \sum_{ij} (P_r)_{ij} [-\sum_{k} h_{ik} (F_k \circ N) q \left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1} \langle x, e_j\rangle\\
+ &\quad (F \circ N) q(q-1) \left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-2} \langle x, e_i\rangle \langle x, e_j\rangle\\
+ &\quad (F \circ N) q \left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1} (\delta_{ij} + h_{ij} \langle x, N\rangle)].
\end{aligned}$$

Note que, pelo item $(vi)$ do Lema 4.1 temos

$$
\begin{aligned}
\textstyle\sum_{ijk} \quad & (P_r)_{ij} p h_{ik} F_j \langle x, N\rangle^{p-1} \langle x, e_k\rangle \qquad (4.4)\\
= \quad & \sum_{jk} \left( \sum_i h_{ji} (P_r)_{ik} \right) p F_k \langle x, e_j\rangle \langle x, N\rangle^{p-1}\\
= \quad & \sum_{jk} \left( \sum_i h_{ki} (P_r)_{ij} \right) p F_k \langle x, e_j\rangle \langle x, N\rangle^{p-1}\\
= \quad & \sum_{ijk} h_{ki} (P_r)_{ij} p F_k \langle x, e_j\rangle \langle x, N\rangle^{p-1} .
\end{aligned}
$$

Assim, por (4.2), (4.3) e (4.4) temos que

$$
\begin{aligned}
div \quad & \{ \quad P_r \left( \langle x, N\rangle^p \nabla_{S^n} F - F \nabla \left( \frac{|x|^2}{2} \right)^q \right) \} = - \sum_{ijk} (P_r)_{ij} h_{ik} F_{jk} \langle x, N\rangle^p\\
- \quad & \sum_{ijk} (P_r)_{ij} p h_{ik} F_j \langle x, N\rangle^{p-1} \langle x, e_k\rangle + \sum_{ijk} (P_r)_{ij} h_{ik} F_k q \left( \frac{|x|^2}{2} \right)^{q-1} \langle x, e_j\rangle\\
- \quad & \sum_{ij} (P_r)_{ij} F q (q-1) \left( \frac{|x|^2}{2} \right)^{q-2} \langle x, e_i\rangle \langle x, e_j\rangle\\
- \quad & \sum_{ij} (P_r)_{ij} F q \left( \frac{|x|^2}{2} \right)^{q-1} (\delta_{ij} + h_{ij} \langle x, N\rangle)\\
= \quad & \left( q \left( \frac{|x|^2}{2} \right)^{q-1} - p \langle x, N\rangle^{p-1} \right) \sum_{ijk} (P_r)_{ij} h_{ki} F_k \langle x, e_j\rangle - \sum_{ijk} (P_r)_{ij} h_{ik} F_{jk} \langle x, N\rangle^p\\
- \quad & \sum_{ij} (P_r)_{ij} F q (q-1) \left( \frac{|x|^2}{2} \right)^{q-2} \langle x, e_i\rangle \langle x, e_j\rangle\\
- \quad & \sum_{ij} (P_r)_{ij} F q \left( \frac{|x|^2}{2} \right)^{q-1} (\delta_{ij} + h_{ij} \langle x, N\rangle) - \sum_{ij} h_{ij} (P_r)_{ij} F \langle x, N\rangle^p\\
+ \quad & \sum_{ij} h_{ij} (P_r)_{ij} F \langle x, N\rangle^p = \left( q \left( \frac{|x|^2}{2} \right)^{q-1} - p \langle x, N\rangle^{p-1} \right) \sum_{ijk} (P_r)_{ij} h_{ki} F_k \langle x, e_j\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \quad \langle x, N\rangle^p \sum_{ijk}(P_r)_{ij}h_{ik}(F_{jk}+F\delta_{jk}) - \sum_{ij}(P_r)_{ij}Fq(q-1)\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-2}\langle x, e_i\rangle\langle x, e_j\rangle \\
&- \quad \sum_{ij}(P_r)_{ij}Fq\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1}(\delta_{ij}+h_{ij}\langle x, N\rangle) + \sum_{ij}h_{ij}(P_r)_{ij}F\langle x, N\rangle^p .
\end{aligned}
$$

Como,

$$
\sum_{ijk}(P_r)_{ij}h_{ik}(F_{jk}+F\delta_{jk}) = \sum_{ijk}(P_r)_{ij}h_{ik}A_{jk} = \sum_{ij}(P_r)_{ij}s_{ji} = \sum_{i}(P_r\circ S_F)_{ii},
$$

temos,

$$
\begin{aligned}
div \quad & \{ \quad P_r\left(\langle x, N\rangle^p \nabla_{S^n}F - F\nabla\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^q\right)\} \\
= \quad & \left(q\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1} - p\langle x, N\rangle^{p-1}\right)\sum_{ijk}(P_r)_{ij}h_{ki}F_k\langle x, e_j\rangle - \langle x, N\rangle^p\, tr(P_r\circ S_F) \\
+ \quad & \left(F\langle x, N\rangle^p - Fq\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1}\langle x, N\rangle\right)\sum_{ij}h_{ij}(P_r)_{ij} - Fq\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1} tr(P_r) \\
- \quad & Fq(q-1)\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-2}\sum_{ij}(P_r)_{ij}\langle x, e_i\rangle\langle x, e_j\rangle .
\end{aligned}
$$

Por outro lado, pelo item $(vii)$ do Lema 4.1, veja que

$$
\begin{aligned}
div\left(P_r\left(x^T\right)\right) &= div\left(P_r\left(\sum_i\langle x, e_i\rangle e_i\right)\right) = div\left(\sum_i\left(\sum_j\langle x, e_j\rangle(P_r)_{ij}\right)e_i\right) \\
&= \sum_{ij}\left(\langle x, e_j\rangle_i(P_r)_{ij} + \langle x, e_j\rangle(P_r)_{iji}\right) = \sum_{ij}\delta_{ij}(P_r)_{ij} + \sum_{ij}h_{ij}(P_r)_{ij}\langle x, N\rangle .
\end{aligned}
$$

Assim, pelo item $(ix)$ do Lema 4.1

$$
\sum_{ij}h_{ij}(P_r)_{ij}\langle x, N\rangle = div(P_rx^T) - tr(P_r) = div(P_rx^T) - (n-r)\binom{n}{r}H_r^F. \tag{4.5}
$$

Pelo item $(vi)$ do Lema 4.1

$$\begin{aligned}
\left\langle AP_r\left((\nabla_{S^n}F)\circ N\right), x^T\right\rangle &= \sum_{jk} F_j\left\langle x, e_k\right\rangle \left\langle AP_r(e_j), e_k\right\rangle \\
&= \sum_{jk} F_j\left\langle x, e_k\right\rangle \left\langle \sum_{ip}(P_r)_{ij}h_{pi}e_p, e_k\right\rangle \\
&= \left(\sum_i h_{ki}(P_r)_{ij}\right)\sum_{jk} F_j\left\langle x, e_k\right\rangle \\
&= \sum_{ijk} h_{ji}(P_r)_{ik}F_j\left\langle x, e_k\right\rangle \\
&= \sum_{ijk} h_{ki}(P_r)_{ij}F_k\left\langle x, e_j\right\rangle .
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Assim, usando (4.6), (4.5) e que $\sum_{ij}(P_r)_{ij}\left\langle x, e_i\right\rangle\left\langle x, e_j\right\rangle = \left\langle P_r\left(x^T\right), x^T\right\rangle$, temos

$$\begin{aligned}
div \quad & \left\{ \quad P_r\left(\left\langle x, N\right\rangle^p \nabla_{S^n}F - F\nabla\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^q\right)\right\} \\
= \quad & \left(q\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1} - p\left\langle x, N\right\rangle^{p-1}\right)\left\langle AP_r\left(\nabla_{S^n}F\right), x^T\right\rangle \\
- \quad & \left\langle x, N\right\rangle^p tr(P_r\circ S_F) - Fq\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1} tr(P_r) \\
+ \quad & \left(F\left\langle x, N\right\rangle^{p-1} - Fq\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1}\right)\left(div(P_r x^T) - (n-r)\binom{n}{r}H_r^F\right) \\
- \quad & Fq(q-1)\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-2}\left\langle P_r x^T, x^T\right\rangle .
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Observe que, pelos itens $(viii)$ e $(ix)$ do Lema (4.1), temos que

$$\begin{aligned}
- \quad & \left\langle x, N\right\rangle^p tr(P_r\circ S_F) - Fq\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1} tr(P_r) \\
= \quad & -\left\langle x, N\right\rangle^p (r+1)S_{r+1} - Fq\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1}(n-r)S_r \\
= \quad & -(n-r)\binom{n}{r}\left(Fq\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{q-1} H_r^F + H_{r+1}^F\left\langle x, N\right\rangle^p\right).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Substituindo (4.8) em (4.7), integrando sobre $M$ e usando o Teorems de Stokes, obtemos o resultado. □

A fórmula (4.1) generaliza a fórmula integral do tipo Minkowski provado por He e Li em [17]. De fato, se $p = 1$ e $q = 1$ em (4.1) obtemos o seguinte resultado.

**Corolário 4.3.** *Para cada $r = 0, 1, ..., n-1$, temos a seguinte fórmula integral do tipo Minkowski:*

$$\int_M \big(H_r^F F(N) + H_{r+1}^F \langle x, N\rangle \big) dM = 0. \tag{4.9}$$

## 4.2 Curvaturas Médias Anisotrópicas Linearmente Relacionadas

Apresentaremos alguns resultados assumindo que as curvaturas médias anisotrópicas de ordem superior são linearmente relacionadas. Iniciaremos provando um lema necessário para as provas dos próximos teoremas.

**Lema 4.4.** *Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada e orientável $M^n$ e $F : S^n \longrightarrow R^+$ satisfazendo a condição (2.1). Assuma que para inteiros $r$ e $s$, com $0 \leq r < s < n$ ou $0 < r < s \leq n$, as curvaturas médias anisotrópicas de ordem superior são linearmente relacionadas por*

$$H_s^F = a_r H_r^F + ... + a_{s-1} H_{s-1}^F \tag{4.10}$$

*para funções contínuas não negativas $a_r, ..., a_{s-1} : M \longrightarrow R$, com $a_l > 0$ para algum $l \in \{r, ..., s-1\}$. Então, para uma escolha apropriada da orientação de $M$, $H_i^F > 0$ em $M$, $\forall i \in \{1, \cdots, s\}$.*

*Demonstração.* Visto que $M$ é fechada e orientável em $R^{n+1}$, existe um ponto $p_0 \in M$ tal que as curvaturas principais são positivas em $p_0$, assim as curvaturas principais anisotrópicas $\lambda_i(p_0) > 0$, $1 \leq i \leq n$, para uma escolha apropriada da orientação de $M$ (veja Lema 2.2). Consequentemente, $H_j^F(p_0) > 0$ para todo $j \in \{1, \cdots, n\}$.

Demonstraremos que $H_s^F > 0$ em $M$, donde pelo Lema 2.5, $H_k > 0$ em $M$ $\forall k \in \{1, \cdots, s-1\}$.

De fato, definindo o conjunto $M_s$ como a componente conexa do conjunto $\{p \in M; H_s^F(p) > 0\}$ contendo $p_0$, mostraremos que $M_s$ é diferente de vazio, aberto e fechado em $M$. Assim, sendo $M$ conexo, teremos que $M_s = M$, donde $H_s^F > 0$ em $M$. Como $H_s^F(p_0) > 0$, temos que $p_0 \in M_s$, onde $M_s \neq \emptyset$. Pela continuidade das curvaturas, temos que $M_s$ é aberto em $M$. Vamos mostrar agora que também é fechado. Usando as desigualdades de Gårding, como em ([26], Lema 1), sabemos que em cada ponto $p \in M_s$

$$H_j^F(p)^{1/j} \geq H_s^F(p)^{1/s} > 0, (*)$$

para todo $j \in \{1, \cdots, s-1\}$ com igualdade ocorrendo para algum $j$ se, e somente se, nesse ponto as curvaturas principais anisotrópicas são iguais. Como existe $l \in \{r, \cdots, s-1\}$ tal que $a_l > 0$, por $(*)$ e devido $a_i \geq 0\ \forall i \in \{r, \cdots, s-1\}$,

$$H_s^F(p) = \sum_{i=r}^{s-1} a_i(p) H_i^F(p) \geq a_l(p) H_l^F(p) \geq \xi H_l^F(p), (**)$$

onde $\xi = inf_M\{a_l\} > 0$, visto que $a_l > 0$ e $M$ ser compacta. Se $l = 0$, temos $H_s^F \geq \xi > 0$ em $M_s$. Caso $l \geq 1$, temos $l \in \{r, \cdots, s-1\}$ e, por $(*)$ e $(**)$, que

$$H_j^F(p)^{1/j} \geq H_s^F(p)^{1/s} \geq \left(\xi H_l^F(p)\right)^{1/s}, \forall j \in \{1, \cdots, s-1\},$$

onde particularmente

$$H_l^F(p)^{s/l} \geq \xi H_l^F(p),$$

isto é

$$H_l^F(p) \geq \xi^{\frac{l}{s-l}} > 0.$$

Daí, por $(**)$

$$H_s^F(p) \geq \xi H_l^F(p) \geq \xi . \xi^{\frac{l}{s-l}} = \xi^{\frac{s}{s-l}} > 0,$$

para todo $p \in M_s$. Assim, de qualquer forma, $H_s^F(p) \geq min\{\xi, \xi^{\frac{s}{s-l}}\} > 0\ \forall p \in M_s$, donde $M_s$ é fechado em $M$ como queríamos mostrar. $\square$

Obtemos resultados envolvendo uma combinação linear das curvaturas médias anisotrópicas de ordem superior, como em [2], onde conseguimos uma caracterização da Wulff shape de $F$, como apresentada abaixo. A expressão de um $H_s^F$ como combinação linear dos outros $H_r^F$'s (com coeficientes constantes) foi considerada por alguns autores (veja [8]). Em nosso primeiro resultado, trabalhamos com os coeficientes da combinação linear sendo funções, como segue abaixo:

**Teorema 4.5.** *Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada e orientável $M^n$ e $F : S^n \longrightarrow R^+$ satisfazendo a condição (2.1). Assuma que para inteiros $r$ e $s$, com $0 < r < s-1 \leq n-1$, as curvaturas médias anisotrópicas de ordem superior são linearmente relacionadas por*

$$H_s^F = a_r H_r^F + ... + a_{s-1} H_{s-1}^F, \tag{4.11}$$

*para funções contínuas não negativas $a_r, ..., a_{s-1} : M \longrightarrow R$ satisfazendo $\beta_i \leq \alpha_{i+2}, \forall r \leq i \leq s-3$, $\beta_{s-1} \leq \eta, \beta_{s-2} \leq \eta, \alpha_r \geq \xi, \alpha_{r+1} \geq \xi$, onde $\alpha_i := inf_M\{a_i\}$, $\beta_i := sup_M\{a_i\}$ e $\eta, \xi$ são constantes positivas com $H_{s-1}^F \leq \frac{\xi}{\eta} H_{r-1}^F$ e $H_{s-1}^F \leq H_{s+1}^F$. Então, a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$.*

*Demonstração.* Sabemos pelo Lema 4.4 que $H_1^F, ..., H_s^F > 0$. Por outro lado, sabemos que a seguinte generalização da desigualdade do tipo Cauchy-Schwarz é verdadeira para qualquer $1 \leq j \leq n-1$:

$$H_j^{F^2} \geq H_{j-1}^F H_{j+1}^F, \tag{4.12}$$

a igualdade ocorre para algum $j$ se, e somente se, nesse ponto as curvaturas principais anisotrópicas são iguais. Como $H_j^F > 0$ para qualquer $0 \leq j \leq s$, podemos escrever a desigualdade (4.12) na forma

$$\frac{H_j^F}{H_{j-1}^F} \geq \frac{H_{j+1}^F}{H_j^F}, \tag{4.13}$$

para qualquer $1 \leq j \leq s$, ocorrendo igualdade para algum $j$ se, e somente se, nesse ponto as curvaturas principais anisotrópicas são iguais. Temos então as seguintes desigualdades

$$H_1^F \geq \frac{H_2^F}{H_1^F} \geq \frac{H_3^F}{H_2^F} \geq ... \geq \frac{H_s^F}{H_{s-1}^F} \geq \frac{H_{s+1}^F}{H_s^F} \tag{4.14}$$

$$\Rightarrow \frac{H_i^F}{H_{i-1}^F} \geq \frac{H_s^F}{H_{s-1}^F} \Leftrightarrow \frac{H_i^F}{H_s^F} \geq \frac{H_{i-1}^F}{H_{s-1}^F}, \tag{4.15}$$

para qualquer $1 \leq i \leq s$.

Por hipótese, $H_{s+1}^F \geq H_{s-1}^F > 0$. Portanto, por (4.14)

$$\frac{H_{i+1}^F}{H_i^F} \geq \frac{H_{s+1}^F}{H_s^F} \Rightarrow \frac{H_{i+1}^F}{H_{s+1}^F} \geq \frac{H_i^F}{H_s^F}, \tag{4.16}$$

para qualquer $0 \leq i \leq s$.

Assim, por (4.15) e (4.16) temos que

$$1 = \sum_{i=r}^{s-1} a_i \frac{H_i^F}{H_s^F} \geq \sum_{i=r}^{s-1} a_i \frac{H_{i-1}^F}{H_{s-1}^F}$$

e

$$1 = \sum_{i=r}^{s-1} a_i \frac{H_i^F}{H_s^F} \leq \sum_{i=r}^{s-1} a_i \frac{H_{i+1}^F}{H_{s+1}^F}.$$

Visto que,

$$H_{s-1}^F \geq \sum_{i=r}^{s-1} a_i H_{i-1}^F \quad \text{e} \quad H_{s+1}^F \leq \sum_{i=r}^{s-1} a_i H_{i+1}^F$$

onde,

$$H_{s-1}^F - \sum_{i=r}^{s-1} a_i H_{i-1}^F \geq 0 \quad \text{e} \quad H_{s+1}^F - \sum_{i=r}^{s-1} a_i H_{i+1}^F \leq 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
H_{s-1}^F \quad & - \quad \sum_{i=r}^{s-1} a_i H_{i-1}^F \geq H_{s+1}^F - \sum_{i=r}^{s-1} a_i H_{i+1}^F \\
& \Rightarrow \quad H_{s-1}^F - \sum_{i=r}^{s-1} \alpha_i H_{i-1}^F \geq H_{s-1}^F - \sum_{i=r}^{s-1} a_i H_{i-1}^F \\
& \geq \quad H_{s+1}^F - \sum_{i=r}^{s-1} a_i H_{i+1}^F \geq H_{s+1}^F - \sum_{i=r}^{s-1} \beta_i H_{i+1}^F \\
& \Rightarrow \quad H_{s-1}^F - H_{s+1}^F + \sum_{i=r}^{s-1} \beta_i H_{i+1}^F - \sum_{i=r}^{s-1} \alpha_i H_{i-1}^F \geq 0 \\
& \Rightarrow \quad H_{s-1}^F - H_{s+1}^F + \sum_{i+1=r+1}^{s} \beta_i H_{i+1}^F - \sum_{i-1=r-1}^{s-2} \alpha_i H_{i-1}^F \geq 0 \\
& \Rightarrow \quad H_{s-1}^F - H_{s+1}^F + \sum_{j=r+1}^{s} \beta_{j-1} H_j^F - \sum_{u=r-1}^{s-2} \alpha_{u+1} H_u^F \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ H^F_{s-1} - H^F_{s+1} + \left(\beta_{s-1}H^F_s + \beta_{s-2}H^F_{s-1} + \sum_{j=r+1}^{s-2}\beta_{j-1}H^F_j\right)\\
&-\ \left(\alpha_r H^F_{r-1} + \alpha_{r+1}H^F_r + \sum_{u=r+1}^{s-2}\beta_{u+1}H^F_u\right) \geq 0\\
&\Rightarrow\ H^F_{s-1} - H^F_{s+1} + \left(\beta_{s-1}H^F_s + \beta_{s-2}H^F_{s-1} - \alpha_r H^F_{r-1} - \alpha_{r+1}H^F_r\right) \qquad (4.17)\\
&+\ \sum_{j=r+1}^{s-2}\left(\beta_{j-1} - \alpha_{j+1}\right)H^F_j \geq 0.
\end{aligned}$$

Por hipótese, $\beta_i \leq \alpha_{i+2}, \forall r \leq i \leq s-3$, onde

$$\sum_{j=r+1}^{s-2}\left(\beta_{j-1} - \alpha_{j+1}\right)H^F_j \leq 0. \qquad (4.18)$$

Usando (4.15) e o fato que $H^F_{r-1} \geq \frac{\eta}{\xi}H^F_{s-1}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{H^F_r}{H^F_s} &\geq \frac{H^F_{r-1}}{H^F_{s-1}} \geq \frac{\eta}{\xi}\\
&\Rightarrow \frac{H^F_r}{H^F_s} \geq \frac{\eta}{\xi} \geq \frac{\beta_{s-1}}{\alpha_{r+1}} \text{ e } \frac{H^F_{r-1}}{H^F_{s-1}} \geq \frac{\eta}{\xi} \geq \frac{\beta_{s-2}}{\alpha_r} \qquad (4.19)\\
&\Leftrightarrow \beta_{s-1}H^F_s - \alpha_{r+1}H^F_r \leq 0 \text{ e } \beta_{s-2}H^F_{s-1} - \alpha_r H^F_{r-1} \leq 0, \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

visto que $\beta_{s-1} \leq \eta, \alpha_{r+1} \geq \xi$ e $\beta_{s-2} \leq \eta, \alpha_r \geq \xi$. Assim, por (4.20)

$$\begin{aligned}
\beta_{s-1}H^F_s &+ \beta_{s-2}H^F_{s-1} - \alpha_r H^F_{r-1} - \alpha_{r+1}H^F_r\\
&= \left(\beta_{s-1}H^F_s - \alpha_{r+1}H^F_r\right) + \left(\beta_{s-2}H^F_{s-1} - \alpha_r H^F_{r-1}\right) \leq 0. \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

Portanto, por (4.17), $H^F_{s-1} \leq H^F_{s+1}$, (4.21) e (4.18), temos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left(H^F_{s-1} - H^F_{s+1}\right) + \left(\beta_{s-1}H^F_s + \beta_{s-2}H^F_{s-1} - \alpha_r H^F_{r-1} - \alpha_{r+1}H^F_r\right)\\
&+ \sum_{j=r+1}^{s-2}\left(\beta_{j-1} - \alpha_{j+1}\right)H^F_j \leq 0
\end{aligned}$$

Assim, $\left(\beta_{s-1}H^F_s + \beta_{s-2}H^F_{s-1} - \alpha_r H^F_{r-1} - \alpha_{r+1}H^F_r\right) = 0$. Portanto, ocorre igualdade em (4.20), e também em (4.19), isto é, $\frac{H^F_r}{H^F_s} = \frac{\eta}{\xi} = \frac{\beta_{s-1}}{\alpha_{r+1}}$ e $\frac{H^F_{r-1}}{H^F_{s-1}} = \frac{\eta}{\xi} = \frac{\beta_{s-2}}{\alpha_r}$. Assim, $\frac{H^F_{r-1}}{H^F_{s-1}} = \frac{H^F_r}{H^F_s}$, isto é, ocorrendo igualdade (4.15), donde em (4.13), e portanto todas as curvaturas principais anisotrópicas são iguais. Pelo Lema 2.4 obtemos o resultado esperado. □

Se as funções $a_i$'s são constantes, obtemos o seguinte corolário.

**Corolário 4.6.** *Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada e orientável $M^n$ e $F : S^n \longrightarrow R^+$ satisfazendo a condição (2.1). Assuma que para inteiros $r$ e $s$, com $0 < r < s-1 \leq n-1$, as curvaturas médias anisotrópicas de ordem superior são linearmente relacionadas por*

$$H_s^F = a_r H_r^F + ... + a_{s-1} H_{s-1}^F,$$

*para constantes não negativas $a_r, ..., a_{s-1} \in R$ satisfazendo $a_i \leq a_{i+2}, \forall r \leq i \leq s-3$, $a_{s-1} \leq \eta, a_{s-2} \leq \eta, a_r \geq \xi, a_{r+1} \geq \xi$ onde $\eta, \xi$ são constantes positivas tais que $H_{s-1}^F \leq \frac{\xi}{\eta} H_{r-1}^F$ e $H_{s-1}^F \leq H_{s+1}^F$. Então, a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$.*

**Definição 4.7.** *Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana $M^n$. Definimos o conjunto $\mathfrak{W} = R^{n+1} - \bigcup_{p \in M} T_p$ onde $T_p$ é o hiperplano de $R^{n+1}$ em $x(p)$, dado pelo espaço tangente de $x(M)$ em $x(p)$.*

**Observação 4.8.** *B. Halpern provou em [14] que para $M$ compacta, fechada e conexa a hipotese "$\mathfrak{W}$ não vazio" é equivalente a existência de um único conjunto estrelado aberto $V$ contido em $R^{n+1}$ tal que o bordo de $V$ é $x(M)$, e $\mathfrak{W}$ é o interior do kernel de $V$ dado por*

$$ker(V) = \{p \in V; (1-t)p + tq \in V, \forall q \in V, \text{ e } \forall t \in [0,1]\}.$$

*Aqui, o conjunto $V$ em $R^{n+1}$ é dito ser estrelado se existe um ponto $p \in V$ tal que para cada ponto $q \in V$ o segmento de reta ligando $p$ e $q$ está contido em $V$. Domínios estrelados não convexos em $R^{n+1}$ são tipos especiais de domínios onde equações diferenciais parciais totalmente não lineares foram primeiramente estudados por Caffarelli-Nirenberg e Spruck em [5]. Os resultados foram usados para estender a domínios não convexos estudos do fluxo pela curvatura média por Gerhardt [12] e Alexandrov-Frenchel (desigualdades de quermassintegral) [13].*

*Observe que $ker(V)$ é o maior subconjunto convexo contido em $V$. Daí, quando $x(M)$ é convexo, ele coincide com o bordo do $ker(V)$. Devido $\mathfrak{W}$ ser aberto ([14], p. 183), temos que $x(M)$ é convexo se, e somente se, ele coincide com o bordo de $\mathfrak{W}$.*

*Condição mais forte em uma hipersuperfície compacta que ser estrelado é ser estrelado com curvatura média positiva e mais geralmente, estrelado com a $k$-ésima curvatura média $H_k > 0$, chamada $k$-convexa, $k = 1, \cdots, n$. Observe que uma hipersuperfície estrelada, $n$-convexa é uma hipersuperfície convexa usual e uma 1-convexa é conhecida como média convexa.*

Note que $\mathfrak{W} \neq \emptyset$ se, e somente se, existe um ponto $p_0 \in R^{n+1}$ tal que, a menos de uma translação por $p_0$ de $x(M)$, $\langle x, N \rangle$ não se anula em $M$.

No Teorema 4.5, observe que se $a_l > 0$ para algum $l \in \{r, ..., s-1\}$ as constantes $\xi$ e $\eta$ sempre existem. Por exemplo, basta tomar $\frac{\eta}{\xi} = inf_M \left\{ \frac{H^F_{r-1}}{H^F_{s-1}} \right\} > 0$ (veja Lema 4.4). Podemos remover a hipótese $H^F_{s-1} \leq H^F_{s+1}$ no teorema e ainda obtermos o resultado. Para isso necessitamos que as funções $a_i$'s sejam constantes ou para casos mais gerais, assumir que $\mathfrak{W}$ é não vazio, como mostraremos no próximo resultado. Observe que na prova do Teorema 4.9 abaixo, usamos a fórmula integral do tipo Minkowski do Corolário 4.3.

**Teorema 4.9.** *Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada e orientável $M^n$ e $F : S^n \longrightarrow R^+$ satisfazendo a condição (2.1). Suponha que uma das opções abaixo acorre.*

1. *Existem inteiros $r$ e $s$, com $0 < r < s < n$, tais que as curvaturas médias anisotrópicas de ordem superior são linearmente relacionadas por*
$$H^F_s = a_r H^F_r + \ldots + a_{s-1} H^F_{s-1} \tag{4.22}$$
*para números não negativos $a_r, \ldots, a_{s-1}$;*

2. *$\mathfrak{W} \neq \emptyset$ e existem inteiros $r$ e $s$, com $0 \leq r < s < n$ ou $0 < r < s \leq n$, tais que as curvaturas médias anisotrópicas de ordem superior são linearmente relacionadas por*
$$H^F_s = a_r H^F_r + \ldots + a_{s-1} H^F_{s-1} \tag{4.23}$$
*para números não negativos $a_r, \ldots, a_{s-1}$.*

*Então, a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$.*

*Demonstração.* Visto que $M$ é fechada e orientável em $R^{n+1}$, existe um ponto $p_0 \in M$ tal que as curvaturas principais são positivas em $p_0$, assim as curvaturas principais anisotrópicas $\lambda_i(p_0) > 0$, $1 \leq i \leq n$, para uma escolha apropriada da orientação de $M$ (veja Lema 2.2). Consequentemente $H^F_j(p_0) > 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Como
$$0 < H^F_s(p_0) = \sum_{i=r}^{s-1} a_i H^F_i(p_0),$$
com $H^F_i(p_0) > 0$ e $a_i \geq 0$, $r \leq i \leq s-1$, existe $l \in \{r, \ldots, s-1\}$ tal que $a_l > 0$. Pelo Lema 4.4, $H^F_i > 0$ em $M$, $\forall i \in \{1, \ldots, s\}$.

Por outro lado, sabemos que a seguinte generalização da desigualdade tipo Cauchy-Schwarz é verdadeira (veja, por exemplo, [[15], Teorema 51, p. 52, Teorema 144, p. 104]) para qualquer $1 \leq j \leq n-1$:

$$H_j^{F^2} \geq H_{j-1}^F H_{j+1}^F, \tag{4.24}$$

a igualdade ocorre para algum $j$ se, e somente se, nesse ponto as curvaturas principais anisotrópicas são iguais. Como $H_j^F > 0$ para qualquer $0 \leq j \leq s$, podemos escrever a desigualdade (4.24) na forma

$$\frac{H_j^F}{H_{j-1}^F} \geq \frac{H_{j+1}^F}{H_j^F}, \tag{4.25}$$

para qualquer $1 \leq j \leq s$, ocorrendo igualdade para algum $j$ se, e somente se, nesse ponto as curvaturas principais anisotrópicas são iguais. Temos então as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} H_1^F &\geq \frac{H_2^F}{H_1^F} \geq \frac{H_3^F}{H_2^F} \geq \ldots \geq \frac{H_s^F}{H_{s-1}^F} \geq \frac{H_{s+1}^F}{H_s^F} \\ &\Rightarrow \frac{H_i^F}{H_{i-1}^F} \geq \frac{H_s^F}{H_{s-1}^F} \Leftrightarrow \frac{H_i^F}{H_s^F} \geq \frac{H_{i-1}^F}{H_{s-1}^F}, \end{aligned} \tag{4.26}$$

para qualquer $1 \leq i \leq s$.

Suponha que a opção (1) ocorre, isto é, $0 < r < s < n$. Por (4.26),

$$\begin{aligned} H_s^F &= \sum_{i=r}^{s-1} a_i H_i^F \\ &\Leftrightarrow 1 = \sum_{i=r}^{s-1} a_i \frac{H_i^F}{H_s^F} \geq \sum_{i=r}^{s-1} a_i \frac{H_{i-1}^F}{H_{s-1}^F} && (4.27) \\ &\Rightarrow H_{s-1}^F \geq \sum_{i=r}^{s-1} a_i H_{i-1}^F \\ &\Leftrightarrow H_{s-1}^F - \sum_{i=r}^{s-1} a_i H_{i-1}^F \geq 0. && (4.28) \end{aligned}$$

Note que se ocorre igualdade ocorre em (4.28), temos que

$$H_{s-1}^F = \sum_{i=r}^{s-1} a_i H_{i-1}^F \Leftrightarrow 1 = \sum_{i=r}^{s-1} a_i \frac{H_{i-1}^F}{H_{s-1}^F}. \tag{4.29}$$

Por outro lado, (4.27) dá-nos

$$1 = \sum_{i=r}^{s-1} a_i \frac{H_i^F}{H_s^F} \geq \sum_{i=r}^{s-1} a_i \frac{H_{i-1}^F}{H_{s-1}^F}, \tag{4.30}$$

onde por (4.29) e (4.30), obtemos que

$$\sum_{i=r}^{s-1} a_i \frac{H_i^F}{H_s^F} = \sum_{i=r}^{s-1} a_i \frac{H_{i-1}^F}{H_{s-1}^F},$$

isto é,

$$\sum_{i=r}^{s-1} a_i \left( \frac{H_i^F}{H_s^F} - \frac{H_{i-1}^F}{H_{s-1}^F} \right) = 0.$$

Portanto, como $a_i \geq 0$ e $\left(\frac{H_i^F}{H_s^F} - \frac{H_{i-1}^F}{H_{s-1}^F}\right) \geq 0$ em $M$, $\forall i \in \{r, ..., s-1\}$, temos que $a_i\left(\frac{H_i^F}{H_s^F} - \frac{H_{i-1}^F}{H_{s-1}^F}\right) = 0$ $\forall i \in \{r, ..., s-1\}$. Como $a_l > 0$ ($l \in \{r, ..., s-1\}$), temos $\left(\frac{H_l^F}{H_s^F} - \frac{H_{l-1}^F}{H_{s-1}^F}\right) = 0$ em $M$, donde por (4.25) todas as curvaturas principais anisotrópicas são iguais.

Agora, como $F : M \longrightarrow R^+$, temos que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_M F \left( H_{s-1}^F - \sum_{i=r}^{s-1} a_i H_{i-1}^F \right) dM \\
&= \int_M F H_{s-1}^H - \sum_{i=r}^{s-1} a_i F H_{i-1}^F dM \\
&= \int_M -H_s^F \langle x, N \rangle + \sum_{i=r}^{s-1} a_i H_i^F \langle x, N \rangle \, dM \\
&= \int_M \left( -H_s^F + \sum_{i=r}^{s-1} a_i H_i^F \right) \langle x, N \rangle \, dM = 0,
\end{aligned}$$

onde a segunda e quarta igualdades acima foram obtidas por (4.9) e (4.22), respectivamente. Assim,

$$0 \leq \int_M F \left( H_{s-1}^F - \sum_{i=r}^{s-1} a_i H_{i-1}^F \right) dM = 0,$$

onde, visto que $F > 0$,

$$H_{s-1}^F - \sum_{i=r}^{s-1} a_i H_{i-1}^F = 0,$$

donde ocorre igualdade em (4.28), implicando que as curvaturas principais anisotrópicas são todas iguais. Portanto, a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$.

Agora, suponha que a opção (2) ocorre.
Dividiremos a prova em dois casos:

Caso 1: $0 \leq r < s < n$.
Por (4.26) e (4.23)

$$\frac{H_{s+1}^F}{H_s^F} \leq \frac{H_s^F}{H_{s-1}^F} = \sum_{i=r}^{s-1} a_i \frac{H_i^F}{H_{s-1}^F} \leq \sum_{i=r}^{s-1} a_i \frac{H_{i+1}^F}{H_s^F}, \tag{4.31}$$

onde,

$$H_{s+1}^F \leq \sum_{i=r}^{s-1} a_i H_{i+1}^F. \tag{4.32}$$

Por outro lado, por (4.9) e (4.22)

$$\begin{aligned} \int_M H_{s+1}^F \langle x, N \rangle \, dM &= -\int_M F H_s^F dM = \\ &= -\sum_{i=r}^{s-1} a_i \int_M F H_i^F dM = \sum_{i=r}^{s-1} a_i \int_M H_{i+1}^F \langle x, N \rangle \, dM, \end{aligned}$$

onde

$$\int_M \left( H_{s+1}^F - \sum_{i=r}^{s-1} a_i H_{i+1}^F \right) \langle x, N \rangle \, dM = 0. \tag{4.33}$$

Assim, por (4.32), (4.33) e o fato que $\mathfrak{W} \neq \emptyset$ (que é equivalente a $\langle x, N \rangle \neq 0$ em $M$), temos que

$$H_{s+1}^F - \sum_{i=r}^{s-1} a_i H_{i+1}^F = 0,$$

donde ocorre igualdade em (4.32). Note que se essa igualdade ocorre, devemos ter

$$\frac{H^F_{s+1}}{H^F_s} = \sum_{i=r}^{s-1} a_i \frac{H^F_{i+1}}{H^F_s},$$

donde por (4.31)

$$\frac{H^F_{s+1}}{H^F_s} = \frac{H^F_s}{H^F_{s-1}},$$

e as curvaturas principais anisotrópicas são todas iguais, terminando a prova do Caso 1.

Caso 2: $0 < r < s \leq n$.

Basta considerarmos o caso $s = n$ e $r > 0$. Por (4.9), temos que

$$\int_M (FH^F_{n-1} + H^F_n \langle x, N\rangle) dM = 0. \tag{4.34}$$

Por hipótese,

$$H_n = \sum_{i=r}^{n-1} a_i H^F_i.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_M FH^F_{n-1} dM &= -\int_M H^F_n \langle x, N\rangle\, dM = -\int_M \left(\sum_{i=r}^{n-1} a_i H^F_i\right) \langle x, N\rangle\, dM \\ &= -\sum_{i=r}^{n-1} a_i \int_M H_i \langle x, N\rangle\, dM = \sum_{i=r}^{n-1} a_i \int_M FH^F_{i-1}, \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre de (4.9). Assim,

$$\int_M F\left(H^F_{n-1} - \sum_{i=r}^{n-1} a_i H^F_{i-1}\right) dM = 0. \tag{4.35}$$

Demostraremos agora que

$$H^F_{n-1} - \sum_{i=r}^{n-1} a_i H^F_{i-1} \geq 0$$

em $M$.

Veja que

$$\begin{aligned} H_n^F &= \sum_{i=r}^{n-1} a_i H_i^F \\ &\Rightarrow \ 1 = \sum_{i=r}^{n-1} a_i \frac{H_i^F}{H_n^F} \geq \sum_{i=r}^{n-1} a_i \frac{H_{i-1}^F}{H_{n-1}^F} \qquad (4.36) \\ &\Rightarrow \ H_{n-1}^F \geq \sum_{i=r}^{n-1} a_i H_{i-1}^F \\ &\Leftrightarrow \ H_{n-1}^F - \sum_{i=r}^{n-1} a_i H_{i-1}^F \geq 0, \qquad (4.37) \end{aligned}$$

onde (4.36) deriva de (4.26). Observe que ocorre igualdade em (4.37) se, e somente se, ocorre igualdade em (4.36). Por (4.35), (4.37) e o mesmo argumento usado na opção (1), temos que todas as curvaturas principais anisotrópicas são iguais.

Portanto, em qualquer caso, a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$. □

## 4.3 Aplicações

As duas primeiras aplicações apresentadas aqui são de fato, corolários do Teorema 4.9.

**Corolário 4.10.** *Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada e orientável $M^n$, $F : S^n \longrightarrow R^+$ satisfazendo a condição (2.1) e $\mathfrak{W} \neq \emptyset$. Se $\frac{H_s^F}{H_r^F}$ = constante para $0 \leq r < s < n$ ou $0 < r < s \leq n$, então, a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$.*

*Demonstração.* Visto que $M$ é fechada e orientável em $R^{n+1}$, existe um ponto $p_0 \in M$ tal que as curvaturas principais são positivas em $p_0$, assim as curvaturas principais anisotrópicas $\lambda_i(p_0) > 0$, $1 \leq i \leq n$, para uma escolha apropriada da orientação de $M$ (veja Lema 2.2). Assim $H_j^F(p_0) > 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, onde $\frac{H_s^F}{H_r^F} \equiv \frac{H_s^F}{H_r^F}(p_0) > 0$. Assim,

$$H_s^F = \frac{H_s^F}{H_r^F}(p_0) H_r^F,$$

com $\frac{H_s^F}{H_r^F}(p_0) > 0$. Pelo Teorema 4.9, temos o resultado. $\square$

**Corolário 4.11.** *Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada e orientável $M^n$ e $F : S^n \longrightarrow R^+$ satisfazendo a condição (2.1), com $(r+1)$-ésima curvatura média anistrópica $H_{r+1}^F$ constante, $0 \leq r \leq n-1$. Então, o conjunto de pontos $\mathfrak{W}$ é não vazio se, e somente se, a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$.*

*Demonstração.* Suponha que o conjunto $\mathfrak{W} \neq \emptyset$. Se $0 \leq r \leq n-2$, visto que $H_{r+1}^F$ é constante, para uma escolha apropriada da orientação de $M$, temos que $H_{r+1}^F$ é positivo. Assim, temos que

$$H_{r+1}^F = \xi H_0^F,$$

onde $\xi = H_{r+1}^F > 0$. Logo, pelo Teorema 4.9, temos o resultado. Se $r = n-1$, temos $H_n^F = constante > 0$, onde $H_i^F > 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Assim

$$H_1^F \geq H_2^{F^{1/2}} \geq \ldots \geq H_{n-1}^{F^{\;1/(n-1)}} \geq H_n^{F^{1/n}} > 0 \text{ em } M, \tag{4.38}$$

ocorrendo igualdade para alguma desigualdade acima se, e somente se, nesse ponto as curvaturas principais anisotrópicas são iguais. Portanto, usando (4.9) e (4.38), temos que

$$\begin{aligned} H_n^F \int_M \langle x, N\rangle \, dM &= -\int_M F H_{n-1}^F dM \leq -H_n^{F^{(n-1)/n}} \int_M F dM \\ &= H_n^{F^{(n-1)/n}} \int_M \langle x, N\rangle \, H_1^F dM. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\int_M (H_1^F - H_n^{F^{1/n}}) \langle x, N\rangle \, dM \geq 0. \tag{4.39}$$

Note que, por (4.38), temos $(H_1^F - H_n^{F^{1/n}}) \geq 0$. Como $\mathfrak{W} \neq \emptyset$, temos que $\langle x, N\rangle \neq 0$ em $M$. Por outro lado, veja que para a escolha inicial da orientação de $M$, temos $\langle x, N\rangle < 0$, porque de outra forma teríamos, por (4.38) e (4.9)

$$0 < \int_M F H_{n-1}^F dM = -\int_M H_n^F \langle x, N\rangle \, dM < 0,$$

um absurdo. Daí, sendo $\langle x, N\rangle < 0$ em $M$, por (4.39) temos $H_1^F = {H_n^F}^{1/n}$, donde, por (4.38) todas as curvaturas principais anisotrópicas são iguais. Pelo Lema 2.4, segue o resultado.

Reciprocamente, se $x(M)$ é a Wulff shape de $F$, por definição, $x(M)$ é uma hipersuperfície convexa de $R^{n+1}$, onde $\mathfrak{W} \neq \emptyset$. $\square$

O corolário acima generaliza o Corolário 1 em [17], provado para hipersuperfícies convexas.

O próximo resultado (Teorema 4.12) generaliza o Corolário 4.10, visto que está provado também sob a hipótese $\frac{H_n^F}{H_1^F}$ = constante, mas sem condições sobre $\mathfrak{W}$. Também do Teorema 4.12 são obtidos o Teorema 1.3, (para $k \geq 1$) o Teorema 1.5 e (para $k \geq 1$) o Teorema 1.4 em [17], sem a hipótese de convexidade para a hipersuperfície.

**Teorema 4.12.** *Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada e orientável $M^n$ e $F : S^n \longrightarrow R^+$ satisfazendo a condição (2.1). Se $\frac{H_s^F}{H_r^F}$ = constante para $1 \leq r < s \leq n$, então a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$.*

*Demonstração.* Visto que $M$ é fechada e orientável em $R^{n+1}$, existe um ponto $p_0 \in M$ tal que as curvaturas principais são positivas em $p_0$, assim as curvaturas principais anisotrópicas $\lambda_i(p_0) > 0$, $1 \leq i \leq n$, para uma escolha apropriada da orientação de $M$ (veja Lema 2.2). Consequentemente, $H_j^F(p_0) > 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Assim, $\frac{H_s^F}{H_r^F} \equiv \frac{H_s^F}{H_r^F}(p_0) = \xi = constante > 0$, isto é, $H_s^F = \xi H_r^F$ com $\xi > 0$.

Se $1 \leq r < s \leq n-1$, pelo Teorema 4.9 item (1), a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$.

Agora considere $1 \leq r < s = n$. Visto que $H_r^F \neq 0$ e $H_r^F(p_0) > 0$, por continuidade temos que $H_r^F > 0$ em $M$, devido $H_n^F \equiv \xi H_r^F > 0$. Assim, do Lema 2.5, temos $H_1^F, ..., H_n^F > 0$ em $M$. Além disso, pelo Corolário 4.3 temos que

$$\int_M H_{r-1}^F F(N) + H_r^F \langle x, N\rangle \, dM = 0 \ (*)$$

e

$$\int_M H_{n-1}^F F(N) + H_n^F \langle x, N\rangle \, dM = 0 \ (**).$$

Visto que $\frac{H_n^F}{H_r^F} = constante$, multiplicando o lado esquerdo de $(*)$ por $\frac{H_n^F}{H_r^F}$ e subtraindo do lado esquerdo de $(**)$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_M H_{r-1}^F F(N)\frac{H_n^F}{H_r^F} + \frac{H_n^F}{H_r^F} H_r^F \langle x, N\rangle \, dM \\
&- \int_M H_{n-1}^F F(N) + H_n^F \langle x, N\rangle \, dM = 0 \\
\Leftrightarrow &\int_M F(N)\left(H_n^F \frac{H_{r-1}^F}{H_r^F} - H_{n-1}^F\right) dM = 0. \qquad (4.40)
\end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que a seguinte generalização da desigualdade tipo Cauchy-Schwarz é verdadeira (veja, por exemplo, [15], Teorema 51, p. 52, Teorema 144, p. 104) para qualquer $1 \leq i \leq n$:

$$(H_i^F)^2 - H_{i-1}^F H_{i+1}^F \geq 0, \qquad (4.41)$$

a igualdade ocorre em um ponto para algum $i$ se, e somente se, nesse ponto as curvaturas principais anisotrópicas são iguais. Como $H_i^F > 0$ para qualquer $0 \leq i \leq n$, podemos escrever a desigualdade (4.41) na forma

$$\frac{H_i^F}{H_{i-1}^F} \geq \frac{H_{i+1}^F}{H_i^F}, \qquad (4.42)$$

para qualquer $1 \leq i \leq n-1$, ocorrendo igualdade para algum $i$ se, e somente se, as curvaturas principais anisotrópicas são todas iguais. Temos então as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}
H_1^F \quad &\geq \quad \frac{H_2^F}{H_1^F} \geq \frac{H_3^F}{H_2^F} \geq ... \geq \frac{H_r^F}{H_{r-1}^F} \geq ... \geq \frac{H_n^F}{H_{n-1}^F} \\
&\Rightarrow \quad \frac{H_r^F}{H_{r-1}^F} \geq \frac{H_n^F}{H_{n-1}^F} \Leftrightarrow H_{n-1}^F \geq \frac{H_{r-1}^F H_n^F}{H_r^F}, \qquad (4.43)
\end{aligned}$$

para todo $1 \leq r \leq n-1$, ocorrendo igualdade em (4.43) se, e somente se, as curvaturas principais anisotrópicas são iguais. Finalmente, como a função $F : S^n \longrightarrow R^+$ é positiva, obtemos por (4.40) que

$$H_{n-1}^F = \frac{H_{r-1}^F H_n^F}{H_r^F}.$$

Portanto, ocorre igualdade em (4.43) e assim $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \mathit{constante} \neq 0$. Pelo Lema 2.4, a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$.

□

**Teorema 4.13.** *Seja* $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ *uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada e orientável* $M^n$ *e* $F : S^n \longrightarrow R^+$ *satisfazendo a condição (2.1), com a r-ésima curvatura média anisotrópica* $H_{r+1}^F$ *constante,* $0 \leq r \leq n-1$*. Então, o conjunto de pontos* $\mathfrak{W}$ *é não vazio se, e somente se, a menos de translação e homotetia,* $x(M)$ *é r-estável.*

Aqui, $r$-estável significa o seguinte: $M^n$ é ponto crítico do funcional

$$\mathfrak{F}_{r,F;\Lambda} = \int_M F(N) H_r^F C_n^r dM + \Lambda V(x),$$

onde $\Lambda$ é uma constante e $V = \frac{1}{n+1} \int_M \langle x, N \rangle \, dM$ é o $(n+1)$-volume determinado por $M$, e a segunda variação de $\mathfrak{F}_{r,F;\Lambda}$,

$$\mathfrak{F}''_{r,F;\Lambda} = -(r+1) \int_M \psi \{ L_r \psi + \psi \langle T_r \circ dN, dN \rangle \} dM,$$

é não negativa para todo $\psi$ com $\int_M \psi dM = 0$ (veja [19]).

*Demonstração.* Pelo Teorema 1.3 em [19], $x$ é $r$-estável se, e somente se, a menos de translação e homotetia, $x(M)$ é a Wulff shape de $F$. Pelo Corolário 4.11 acima, temos que $x(M)$ é, a menos de translação e homotetia, a Wulff shape de $F$ se, e somente se, $\mathfrak{W}$ é não vazio, provando assim o Teorema 4.13. □

O próximo resultado é uma caracterização da Wulff shape como o ponto crítico para um problema variacional sob a hipótese de $\mathfrak{W}$ é não vazio.

**Teorema 4.14.** *Seja* $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ *uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada e orientável* $M^n$*,* $F : S^n \longrightarrow R^+$ *satisfazendo a condição (2.1) e* $\mathfrak{W} \neq \emptyset$*. Então,* $x$ *é ponto crítico do funcional* $\mathfrak{F}_{r,F;\Lambda}$ *se, e somente se, a menos e translação e homotetia,* $x(M)$ *é a Wulff shape de* $F$*.*

*Demonstração.* Temos que $x$ é ponto crítico de $\mathfrak{F}_{r,F;\Lambda}$ se, e somente se, $H_{r+1}^F$ é constante (veja [19]). Portanto, pelo Corolário 4.11 temos o resultado. □

No próximo teorema assumiremos que na fórmula integral do tipo Minkowski, o integrando $FH_r^F + H_{r+1}^F \langle x, N \rangle$ não muda de sinal.

**Teorema 4.15.** *Seja* $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ *uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada e orientável* $M^n$*,* $F : S^n \longrightarrow R^+$ *satisfazendo a condição (2.1) e tal que*

$$FH_r^F + H_{r+1}^F \langle x, N \rangle$$

*não muda de sinal para algum* $0 \leq r \leq n-1$*. Então,* $x(M)$ *é a Wulff shape de* $F$*.*

*Demonstração.* Visto que $FH_r + H_{r+1}\langle x, N\rangle$ não muda de sinal em $M$ para algum $r \in \{0, \ldots, n-1\}$, por (4.9), temos que

$$FH_r^F + H_{r+1}^F \langle x, N\rangle \equiv 0. \tag{4.44}$$

Sendo $M$ fechada e orientável em $R^{n+1}$, existe um ponto $p_0 \in M$ tal que as curvaturas principais são positivas em $p_0$, assim as curvaturas principais anisotrópicas $\lambda_i(p_0) > 0$, $1 \leq i \leq n$, para uma escolha apropriada da orientação de $M$ (veja Lema 2.2). Consequentemente, $H_j^F(p_0) > 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Assim, por (4.44)

$$H_{r+1}^F(p_0)\langle x, N\rangle (p_0) = -F(p_0)H_r^F(p_0),$$

onde $F(p_0)H_r^F(p_0) > 0$ e $H_{r+1}^F(p_0) > 0$, donde concluimos que $\langle x, N\rangle (p_0) < 0$ para a escolha feita para a orientação de $M$. Considere $\mathfrak{A}$ como sendo a componente conexa de $\{p \in M : H_{r+1}^F(p) > 0\}$ contendo $p_0$. Note que $\mathfrak{A} \neq \emptyset$, visto que $p_0 \in \mathfrak{A}$. Além disso, por continuidade de $H_{r+1}^F$, temos que $\mathfrak{A}$ é um subconjunto aberto de $M$. Demonstraremos que esse conjunto também é fechado em $M$, donde $\mathfrak{A} = M$, visto que $M$ é conexo. De fato, dado $p \in \mathfrak{A}$, por (4.38) e (4.44), temos

$$\begin{aligned} 0 &= (FH_r^F + H_{r+1}^F \langle x, N\rangle)(p) \\ &\geq (F{H_{r+1}^F}^{r/r+1} + H_{r+1}^F \langle x, N\rangle)(p) \\ &= {H_{r+1}^F}^{r/r+1}(p)(F + {H_{r+1}^F}^{1/r+1}\langle x, N\rangle)(p). \end{aligned}$$

Assim,

$$(F + {H_{r+1}^F}^{1/r+1}\langle x, N\rangle)(p) \leq 0.$$

Portanto, por continuidade, no fecho $\bar{\mathfrak{A}}$ de $\mathfrak{A}$ em $M$, temos que

$${H_{r+1}^F}^{1/r+1}\langle x, N\rangle < F + {H_{r+1}^F}^{1/r+1}\langle x, N\rangle \leq 0, \tag{4.45}$$

donde $H_{r+1}^F \geq 0$. Assim, por (4.45), $H_{r+1}^F > 0$ em $\bar{\mathfrak{A}}$, donde $\mathfrak{A} = \bar{\mathfrak{A}}$ . Portanto, sendo $M$ conexo, temos $\mathfrak{A} = M$. Daí por (4.44), temos que $\langle x, N\rangle < 0$ em $M$. Além disso, usando (4.45) e (4.9), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_M F + {H_{r+1}^F}^{1/r+1}\langle x, N\rangle \, dM \qquad (4.46) \\ &= \int_M F dM + \int_M {H_{r+1}^F}^{1/r+1}\langle x, N\rangle \, dM \\ &= -\int_M H_1^F \langle x, N\rangle \, dM + \int_M {H_{r+1}^F}^{1/r+1}\langle x, N\rangle \, dM \\ &= \int_M ({H_{r+1}^F}^{1/r+1} - H_1^F)\langle x, N\rangle \, dM. \end{aligned}$$

Visto que $H_{r+1}^F > 0$ em $M$, temos por (4.38) que $({H_{r+1}^F}^{1/r+1} - H_1^F) \leq 0$ em $M$. Assim, como $\langle x, N \rangle < 0$ em $M$, temos por (4.47) que

$$0 \geq \int_M ({H_{r+1}^F}^{1/r+1} - H_1^F) \langle x, N \rangle \, dM \geq 0.$$

Portanto, $(H_{r+1}^{1/r+1} - H_1^F) \equiv 0$. Daí, por (4.38), todas as curvaturas principais anisotrópicas são iguais , donde pelo Lema 2.4 segue o resultado. □

**Teorema 4.16.** *Seja $x : M \longrightarrow R^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada e orientável $M^n$, $F : S^n \longrightarrow R^+$ satisfazendo a condição (2.1). Se $\mathfrak{W} \neq \emptyset$, então $M$ é difeomorfa a Wulff shape de $F$ e $x$ é de fato um mergulho.*

*Demonstração.* Como $\mathfrak{W} \neq \emptyset$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $0 \in \mathfrak{W}$. Note que $0 \notin x(M)$, devido $x(p) \in T_p$, $\forall p \in M$.

Considere a função $\pi : R^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow S^n$ definida por $\pi(y) = \frac{y}{\|y\|}$. Demostraremos que $(\phi \circ \pi \circ \ x) : M \longrightarrow W_F$ é um difeomorfismo, onde $\phi$ é definido em (2.2).

De fato, visto que

$$d\pi_y v = \frac{v}{\| y \|} - \frac{y \langle v, v \rangle}{\| y \|^3} = \frac{\| y \|^2 \, v - \langle v, y \rangle \, y}{\| y \|^3},$$

temos que,

$$d\pi_y v = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in R : v = \lambda y. \tag{4.47}$$

Agora considere $(\pi \circ \ x) : M \longrightarrow S^n$. Dado $p \in M$ e $v \in T_pM \setminus \{0\}$, veja que

$$\begin{aligned} d(\pi \circ x)_p(v) \ &= \ 0 \Leftrightarrow d\pi_{x(p)}(dx_p(v)) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ \exists \lambda \in R : dx_p(v) = \lambda x(p) \ (por \ (4.47)). \end{aligned} \tag{4.48}$$

Além disso, como $x : M^n \longrightarrow R^{n+1}$ é uma imersão, temos que $dx_p(v) \neq 0$, visto que $v \in T_pM \setminus \{0\}$, donde $\lambda \neq 0$ em (4.48). Assim, por (4.48), temos que

$$-x(p) = -\lambda^{-1} dx_p(v) \ \in \ dx_p(T_pM) = T_p - x(p),$$

isto é,

$$-x(p) = \xi - x(p),$$

para algum $\xi \in T_p$, e assim $\xi = 0$, isto é, $0 = \xi \in T_p$, donde $0 \notin \mathfrak{W}$, contradizendo a suposição inicial.

Assim dado $p \in M$ e $v \in T_pM \setminus \{0\}$, temos $d(\pi \circ x)_p v \neq 0$, isto é, $d(\pi \circ x)_p$ é injetivo $\forall p \in M$. Agora, visto que $\phi$ satisfaz a condição de convexidade, isto é, $d\phi_x = (D^2F+FI)_x$ e $(D^2F+FI)_x > 0$, temos que $d(\phi \circ \pi \circ\ x)_p$ é injetiva $\forall p \in M$. Pelo Teorema da Função Inversa, temos que $(\phi \circ \pi \circ x) : M \longrightarrow W_F$ é um difeomorfismo local. Como $M$ é compacta e $W_F$ é conexa, temos que $(\phi \circ \pi \circ x) : M \longrightarrow W_F$ é uma aplicação de recobrimento. Além disso, sendo $M$ compacta e $W_F$ simplesmente conexa (devido $W_F$, por definição, ser uma hipersuperfície convexa de $R^{n+1}$, donde difeomorfa a $S^n$, e em particular sendo $S^n$ simplesmente conexa ($n \geq 2$), temos que $W_F$ é simplesmente conexa), obtemos que $(\phi \circ \pi \circ x)$ é um difeomorfismo. Assim $M$ é difeomorfa a $W_F$.

Para finalizar a prova, é suficiente observar que como $(\phi \circ \pi \circ x)$ é injetiva, temos que $x$ é injetiva. Portanto $x$ é um mergulho.

□

# Referências Bibliográficas

[1] ALENCAR, H.; CARMO, M. do; ROSENBERG, H. On the first eigenvalue of linearized operator of the r mean curvature of a hypersurfaces. *Ann. Global Anal. Geom.*, v. 11, p. 387-395, 1993.

[2] ALIAS, L. J.; BRASIL, A.; COLARES, A. G. Integral formulae for spacelike hypersurfaces in conformally stationary spacetimes and applications. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, v. 46, p. 465-488, 2003.

[3] ANDREWS, B. Volume-preserving anisotropic mean curvature flow. *Indiana University Math. J.*, v. 50, n. 2, p. 783-828, 2001.

[4] BARBOSA, J. L. M.; COLARES, A. G. Stability of hypersurfaces with constant r-mean curvature. *Ann. Global Anal. Geom.*, v. 15, p. 277-297, 1997.

[5] CAFFARELLI, L.; NIRENBERG, L.; SPRUCK, J. Nonlinear second order elliptic equations. IV. Starshaped compact Weingarten hypersurfaces. In: *Current topics in partial differential equations*, Kinokuniya, Tokyo, p. 1-26, 1986.

[6] CAHN, J. W.; HANDVERKER, C. A.; TAYLOR, J. E. Geometric Models of Crystal Growth. *Ata Metall.*, v. 40, p. 1443-1474, 1992.

[7] CAO, L. F.; LI, H. r-minimal submanifolds in space forms. *Ann. Global Anal. Geom.*, v. 32, p. 311-341, 2007.

[8] CHEN, B. Y.; YANO, K. Integral formulas for submanifolds and their applications. *J. Differential Geometry*, v. 5, p. 467-477, 1971.

[9] CHERN, S. S. Some New Characterization of the Sphere. *Duke Math. J.*, v. 12, p. 279-290, 1945.

[10] CLARENZ, U. The Wulff-shape minimizes an anisotropic Willmore functional. *Interfaces and Free Boundaries*, v. 6, p. 351-359, 2004.

[11] GARDING, L. An inequality for hyperbolic polynomials. *J. Math. Mech.*, v. 8, p. 957-965, 1959.

[12] GERHARDT, C. Flow of nonconvex Hypersurfaces into Spheres. *J. Diff. Geom.*, v. 32, p. 299-314, 1990.

[13] GUAN, P.; Li, J. The Quermassintegral Inequality for k-convex Starshaped Domains. *Advances in Math.*, v. 221, no. 5, p. 1725-1732, 2009.

[14] HALPERN, B. On the Immersion of an n-Dimensional Manifold in n+1-Dimensional Euclidean Space. *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, v. 30, no.1, p. 181-184, 1971.

[15] HARDY, G.; LITTLEWOOD, J. E.; POLYA, G. *Inequalities*, 2nd ed, Cambridge: Cambridge University, 1983.

[16] HE, Y. J.; LI, H. A new variational characterization of the Wulff shape. *Diff. Geom. App.*, v. 26, p. 377-390, 2008.

[17] __________. Integral formulae of Minkowski type and new characterization of the Wulff shape. *Acta Math. Sinica*, v. 24, p. 697-704, 2008.

[18] __________. Stability of area-preserving variations in space forms. *Ann. Global Anal. Geom.*, v. 34, p. 55-68, 2008.

[19] __________. Stability of hypersurfaces with constant $r$-th anisotropic mean curvature. *Illinois J. Math.*, v. 52, no 4, p. 1301-1314, 2008.

[20] HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Linear Algebra.* Englewood cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1961.

[21] Hu, Z. J.; LI, H. Willmore submanifolds in Riemannian manifolds. *Proceedings of the Workshop, Contem. Geom. and Related Topics, World Scientific*, p. 251-275, 2002.

[22] KOH, S. E.; LEE, S. W. Addendum to the paper: Sphere theorem by means of the ratio of mean curvature functions. *Glasgow Math. J.*, v. 43, p. 275-276, 2001.

[23] KOISO, M.; PALMER, B. Geometry and stability of surfaces with constant anisotropic mean curvature. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 54, no. 6, p. 1817-1852, 2005.

[24] LI, H. Global rigidity theorems of hypersurfaces. *Ark. Math.*, v. 35, p. 327-351, 1997.

[25] __________. Hypersurfaces with constant scalar curvature in space forms. *Math. Ann.*, v. 305, p. 665-672, 1996.

[26] MONTIEL, S.; ROS, A. Compact hypersurfaces: The Alexandrov theorem for higher order mean curvatures. *Differential Geometry*, p. 279-296, 1991. (Pitman monogr. surveys pure appl. math., 52)

[27] PALMER, B. Stability of the Wulff shape. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 126, p. 3661-3667, 1998.

[28] TAYLOR, J. Crystalline variational problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 84, p. 568-588, 1978.

[29] WINKLMANN, S. A note on the stability of the Wulff shape. *Arch. Math.*, v. 87, p. 272-279, 2006.

[30] WULFF, G. Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachsthums und der Alflösung der Kristallflachen. *Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie*, v. 34, p. 449-530, 1901.