UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Ulisses Lima Parente

ALGUNS RESULTADOS TIPO-BERNSTEIN EM VARIEDADES SEMI-RIEMANNIANAS

Fortaleza
2011

Ulisses Lima Parente

ALGUNS RESULTADOS TIPO-BERNSTEIN EM VARIEDADES SEMI-RIEMANNIANAS

Tese submetida à coordenação da Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração:
Geometria Diferencial.

Orientador:
Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto.

Fortaleza
2011

Parente, Ulisses Lima

P252a Alguns resultados tipo-Berstein em variedades semi-Rieman nianas/Ulisses Lima Parente. – Fortaleza:2011.
76f.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto
Co-orientador: Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima
Área de concentração: Matemática
Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Fortaleza, 2011

1. Geometria Diferencial. I. Muniz Neto, Antonio Caminha (Orientador) II. Lima, Henrique Fernandes de (Co-orientador)

CDD 516.36

Dedico este trabalho aos meus pais Leônidas e Dulce,
à minha esposa Virgínia e ao meu filho Fernando.

AGRADECIMENTOS

A Deus;

Aos meus pais Leônidas e Dulce. Me faltam palavras para agradecê-los;

À minha esposa Virgínia e ao meu filho Fernando, pela força, pelo companheirismo e pelo cuidado que tiveram comigo nestes últimos cinco anos que foram tão difíceis em minha vida;

Aos meus irmãos Leila, Pierre, Roberto, Júlio e Neto;

Ao amigo e orientador prof. Antonio Caminha Muniz Neto, pela orientação, pela amizade, e sobretudo por ter acreditado que seria possível realizar esta tarefa em tão pouco tempo;

Ao também amigo e co-orientador prof. Henrique Fernandes de Lima, cuja colaboração foi crucial na elaboração desta tese;

À profa. Fernanda Camargo pelo apoio, pela parceria e pelo olho cirúrgico nas correções deste trabalho;

Ao prof. Luiz Amancio Souza, por ter aceitado o convite para participar da banca e pelas sugestões;

Aos professores da Pós-graduação em Matemática da UFC. Em especial aos professores Levi de Lima e Gervásio Colares por terem apoiado de maneira decisiva meu retorno ao doutorado;

Aos amigos Alexandre Fernandes e Tiago Caúla pelas longas e agradáveis conversas sobre matemática e outros assuntos menos relevantes;

Ao prof. José Válter Lopes Nunes pelo incentivo desde os tempos da graduação;

Aos colegas Jonatan Floriano, Flávio França, Gleydson Ricarte, Cícero Aquino, Marco Antonio Velasquez, Jobson de Queiroz, Nazareno e Válber Márcio;

À secretária da Pós-graduação em Matemática da UFC, Andrea Costa Dantas;

Aos colegas da Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central pelo apoio. Em particular, gostaria de agradecer aos colegas do colegiado do curso de Matemática Luzeilton de Oliveira e Manoel Pereira pelo grande incentivo;

Finalmente, à Funcap, pelo apoio financeiro com a concessão da bolsa.

RESUMO

Nesta tese, estudamos hipersuperfícies de tipo-espaço completas imersas em variedades semi-Riemannianas, satisfazendo alguma condição sobre suas curvaturas de ordem superior, a fim de obtermos resultados tipo-Bernstein. As ferramentas analíticas que utilizamos são algumas versões do princípio do máximo. No caso em que o ambiente é um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado satisfazendo a condição forte de convergência nula, obtemos novas caracterizações de hipersuperfícies tipo-espaço totalmente geodésicas. Além disso, obtemos uma estimativa inferior do índice mínimo de nulidade relativa quando a hipersuperfície tipo-espaço é $r-$ máxima ou quando existem duas curvaturas médias de ordem superior consecutivas que não mudam de sinal. Também obtemos resultados de rigidez e novas caracterizações de hipersuperfícies totalmente umbílicas, supondo que estas possuem alguma curvatura de ordem superior constante e que o ambiente é um espaço-tempo de Robertson-Walker satisfazendo a condição de convergência nula. Aplicamos tais resultados aos espaço de de Sitter e anti-de Sitter. Finalmente, provamos um teorema tipo-Bernstein para hipersuperfícies completas, com curvatura média constante, imersas em um produto Riemanniano.

ABSTRACT

In this thesis, we study complete space-like hypersurfaces immersed in semi-Riemannian manifolds, satisfying some conditions on their higher-order mean curvatures in order to get Bernstein-type results. Analytical tools we use are some versions of the maximum principle. When the ambient space is a generalized Robertson-Walker spacetime which is supposed to obey the strong null convergence condition, we establish new characterizations of totally geodesic spacelike hypersurfaces. Furthermore, we obtain a lower estimate the minimum index of relative nullity when the space-like hypersurface is r-maximal, or when there are two consecutive higher-order mean curvatures that do not change sign. We also obtain rigidity results and new characterizations of totally umbilical hypersurfaces, assuming they have some constant higher-order mean curvature, and that the ambient space is a spacetime Robertson-Walker obeying the null convergence condition. These results are applied to the de Sitter and anti-de Sitter spaces. Finally, we prove a Bernstein-type theorem for constant mean curvature complete hypersurfaces immersed in a Riemannian product.

Sumário

Introdução

Nos últimos anos, o estudo de hipersuperfícies com curvatura média constante imersas em variedades semi-Riemannianas tem despertado bastante interesse, tanto do ponto de vista matemático quanto do físico, este último quando o ambiente em questão é um espaço-tempo[1]. Do ponto de vista físico, esse interesse pode ser justificado pelo papel que estas hipersuperfícies desempenham no tratamento de diversos problemas em relatividade geral (veja, por exemplo, [28] e [34]). Já do ponto de vista matemático, o estudo de tais hipersuperfícies é motivado pelo fato delas apresentarem interessantes propriedades tipo-Bernstein. Nesse contexto, questões básicas estão relacionadas à existência e unicidade de tais hipersuperfícies.

No caso em que o ambiente é uma variedade Riemanniana, as hipersuperfícies mínimas, que são hipersuperfícies com curvatura média identicamente nula, foram alvo de diversos trabalhos de pesquisa, iniciados em 1915, quando S. N. Bernstein [8] provou que os únicos gráficos inteiros e mínimos do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ são os planos. Posteriormente, J. Simons [38] generalizou o resultado de Bernstein para gráficos inteiros e mínimos imersos em $\mathbb{R}^{n+1}$, quando $n \leq 7$, e, em seguida, E. Bombieri, E. De Giorgi e E. Giusti [10] mostraram que o resultado não é verdadeiro para $n > 7$.

Quando o ambiente é uma variedade de Lorentz, uma hipersuperfície é dita tipo-espaço se a métrica induzida pelo ambiente é positiva definida, e é dita máxima quando possui curvatura média identicamente nula. O resultado de Bernstein admite uma extensão natural para o espaço de Minkowski $\mathbb{L}^3$, que é o chamado teorema de Calabi-Bernstein. Em tal resultado, E. Calabi [14] estabeleceu que as únicas superfícies tipo-espaço, completas e máximas, imersas em $\mathbb{L}^3$, são os planos tipo-espaço.

O teorema de Calabi-Bernstein foi o ponto de partida para uma série de

[1]Em física, a terminologia espaço-tempo é reservada às soluções exatas da equação de Einstein (cf. [39]). Aqui adotamos tal nomenclatura seguindo o jargão usual.

trabalhos de pesquisa em geometria diferencial no contexto das variedades de Lorentz. Destacamos inicialmente sua extensão a hipersuperfícies tipo-espaço máximas de dimensão arbitrária n. De fato, E. Calabi [14], para $n \leq 4$, e S. Y. Cheng e S. T. Yau [23], para n arbitrário, mostraram que as únicas hipersuperfícies tipo-espaço, completas e máximas, imersas no espaço de Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$, são os hiperplanos tipo-espaço.

Em [29], T. Ishihara generalizou o teorema de Calabi-Bernstein mostrando que as únicas hipersuperfícies tipo-espaço, completas e máximas, imersas em uma variedade de Lorentz com curvatura seccional constante e não negativa são as totalmente geodésicas. Para o caso em que o ambiente é um espaço-tempo com curvatura seccional constante negativa, Ishihara obteve uma estimativa "sharp"para a norma da segunda forma fundamental de uma hipersuperfície tipo-espaço máxima. Lembramos que as variedades de Lorentz com curvatura seccional constante são, essencialmente, o espaço de Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$, o espaço de de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$ e o espaço anti-de Sitter $\mathbb{H}_1^{n+1}$, conforme a curvatura seccional seja 0, 1 ou -1, respectivamente.

Mais recentemente, F. E. C. Camargo e H. F. de Lima [16] obtiveram resultados de rigidez para hipersuperfícies tipo-espaço, completas e máximas, imersas no espaço anti-de Sitter $\mathbb{H}_1^{n+1}$, impondo condições adequadas na norma da segunda forma fundamental e na função altura da hipersuperfície.

Muitos outros autores abordaram problemas tipo-Bernstein. Por exemplo, em [12], [13] e [35], M. Caballero, A. Romero e R. M. Rubio obtiveram resultados de rigidez e unicidade para os slices tipo-espaço e superfícies completas máximas imersas em espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados tridimensionais, satisfazendo a condição de convergência nula ou a condição de convergência temporal. Satisfazer a condição de convergência nula (condição de convergência temporal) significa que a curvatura de Ricci da fibra Riemanniana M é não negativa em direções nulas (tipo-tempo).

No contexto de hipersuperfícies de curvatura média constante, A. Caminha [20] provou que as únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas, com curvatura média constante positiva e curvatura escalar não negativa, imersas no espaço de Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$, são os cilindros sobre uma curva plana, generalizando, portanto, o teorema de Calabi-Bernstein para esse contexto.

Um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado (GRW) é um produto warped $-I \times_f M^n$, com fibra Riemanniana M^n e função warping f. Em particular, quando a fibra Riemanniana M tem curvatura seccional constante, $-I \times_f M^n$ é classicamente chamado espaço-tempo de Robertson-Walker (RW) (para detalhes, veja a seção 1.3). S. Montiel [32] estudou o problema de unicidade para hipersuperfícies tipo-espaço compactas, com curvatura média constante imersas em espaços-tempo GRW, utilizando fórmulas tipo-Minkowski. Posteriormente, L. J. Alías e A. G. Colares [3], além de re-obterem o resultado de Montiel utilizando uma fórmula para o Laplaciano da função suporte e o princípio do máximo de Hopf, estudaram também o problema de unicidade para hipersuperfícies tipo-espaço compactas, com alguma curvatura média de ordem superior constante, imersas em espaços-tempo GRW. Para estabelecer um de seus principais resultados (cf. teorema 9.2 de [3]), Alías e Colares assumiram que o ambiente satisfaz a condição forte de convergência nula, que significa

$$K_M \geq \sup_I (f^2(\log f)''),$$

onde K_M é a curvatura seccional da fibra Riemanniana M. Aqui assumiremos por vezes a condição de convergência nula

$$\mathrm{Ric}_M \geq (n-1) \sup_I (f^2(\log f)'')\langle\ ,\ \rangle_M,$$

onde Ric_M e $\langle\ ,\ \rangle_M$ são, respectivamente, o tensor de Ricci e a métrica Riemanniana de M induzida pela métrica Lorentziana de $\overline{M}$, que é uma condição mais fraca que a condição forte de convergência nula, como o próprio nome já sugere.

Descrevemos agora brevemente os capítulos que compõem esta tese. No capítulo 1, estabelecemos as notações e os pré-requisitos necessários ao desenvolvimento dos capítulos que o seguem. Já no capítulo 2, fazemos um estudo das curvaturas médias de ordem superior, bem como das transformações de Newton e dos operadores L_r de hipersuperfícies imersas em produtos warped semi-Riemannianos. Mais precisamente, apresentamos fórmulas para o operador L_r atuando na função suporte e na função altura. Ainda neste capítulo, destacamos as versões do princípio do máximo que utilizamos ao longo de nosso trabalho, a saber, o princípio do máximo de Omori-Yau e sua generalização devida a A. Caminha e H. F. de Lima (cf. lemas 2.16 e 2.17), e um princípio do máximo tipo-Hopf de S. T. Yau, bem como uma extensão deste devida a A. Caminha, P. Sousa e F. Camargo (cf. lemas 2.13 e 2.15).

No capítulo 3, abordamos o caso de hipersuperfícies tipo-espaço, completas, não compactas e máximas, imersas em espaços-tempo GRW que satisfazem a condição forte de convergência nula. Com efeito, utilizando a fórmula para o Laplaciano da função suporte devida a L. J. Alías e A. G.

Colares (cf. corolário 2.8) e o princípio do máximo de Omori-Yau, obtemos a seguinte generalização do teorema 3.1 de [16], sobre caracterização de hipersuperfícies tipo-espaço totalmente geodésicas imersas em tais ambientes (cf. teorema 3.4).

Teorema. *Sejam* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ *um espaço-tempo GRW que satizfaz a condição forte de convergência nula* (3.2)*, e* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço, completa e máxima, contida em uma região temporalmente limitada de* $\overline{M}$*. Se* $|\nabla h|$ *é limitada em* Σ*, então existe uma sequência de pontos* $(p_k)_{k\geq 1}$ *em* Σ *tal que* $\lim_{k\to\infty} |A|(p_k) = 0$*. Em particular, se* H_2 *é constante, então* Σ *é totalmente geodésica.*

Substituindo o lema de Omori-Yau pelo princípio do máximo tipo-Hopf de Yau, generalizamos agora o teorema 3.2 de [16], também sobre caracterização de hipersuperfícies tipo-espaço totalmente geodésicas imersas em ambientes GRW (cf. teorema 3.5).

Teorema. *Sejam* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ *um espaço-tempo GRW que satizfaz a condição forte de convergência nula, e* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço, completa e máxima, contida em uma região temporalmente limitada de* $\overline{M}$*. Suponha que a norma da segunda forma fundamental de* ψ *é limitada. Se* $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$*, então* Σ *é totalmente geodésica.*

Com relação ao caso de curvaturas médias de ordem superior, agora utilizando a fórmula para o operador L_r da função altura também devida a L. J. Alías e A. G. Colares (cf. lema 2.11), obtemos uma estimativa do índice mínimo de nulidade relativa ν_0 para hipersuperfícies tipo-espaço, completas e $r-$máximas (isto é, com $(r+1)-$ésima curvatura média identicamente nula), imersas em espaços-tempo RW (cf. teorema 3.6).

Teorema. *Seja* $\psi : \Sigma^n \to -I \times_f M^n$ *uma hipersuperfície tipo-espaço, completa e* r*-máxima, contida em uma região temporalmente limitada de um espaço-tempo RW de curvatura seccional constante. Suponha que a segunda forma fundamental de* ψ *é limitada e que* H_{r+2} *não muda de sinal em* Σ*. Se* $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$*, então* $\nu_0 \geq n - r$*.*

Um espaço-tempo RW $-I \times_f M^n$ é estático quando a função warping

f é constante. Neste caso, podemos supor, sem perda de generalidade, que $f \equiv 1$. Seguindo as ideias de A. Caminha em [19] e usando o modelo RW estático do espaço de Minkowski

$$\mathbb{L}^{n+1} \simeq -\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

obtemos também a seguinte extensão fraca do teorema de Calabi-Bernstein (cf. 3.10).

Teorema. *Seja $\psi : \Sigma^n \to -I \times M^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa, imersa em um espaço-tempo RW estático de curvatura seccional constante, com segunda forma fundamental limitada. Suponha que, para algum $r = 0, \ldots, n-2$, H_{r+1} e H_{r+2} não mudam de sinal, e H_r não se anula em Σ. Se $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então $\nu_0 \geq n - r$. Além disso, se o espaço ambiente é $\mathbb{L}^{n+1}$, então em todo ponto de Σ existe um hiperplano $(n-r)-$dimensional de $\mathbb{L}^{n+1}$ contido em Σ.*

Como consequência obtemos o seguinte

Corolário. *Seja $\psi : \Sigma^n \to -I \times M^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa, imersa em um espaço-tempo RW estático de curvatura seccional constante $\overline{\kappa}$, com segunda forma fundamental limitada. Suponha que a curvatura média H não muda de sinal e que a curvatura escalar S satisfaz $S \leq \overline{\kappa}$ ou $S \geq \overline{\kappa}$. Se $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então Σ é totalmente geodésica. Além disso, se o ambiente é o espaço de Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$, então Σ é um hiperplano.*

Já no capítulo 4, utilizando a generalização do princípio do máximo de Omori-Yau devida a A. Caminha e H. F. de Lima, estendemos o teorema 3.3 de [1], fazendo hipóteses adequadas sobre as curvaturas médias de ordem superior. De fato, o seguinte resultado é provado (cf. 4.7).

Teorema. *Sejam $\overline{M}^n = -I \times_f M^n$ um espaço-tempo RW que satisfaz a condição de convergência nula (3.1), e $\psi : \Sigma^n \to -I \times_f M^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço, completa e com curvatura seccional $K_\Sigma \geq 0$, contida em uma região temporalmente limitada $[t_1, t_2] \times M^n$. Suponha que $H_{r+1} > 0$ é constante e que H_r é limitada superiormente em Σ. Suponha ainda que $f(h)$ atinge um mínimo local em um ponto $p \in \Sigma$ tal que $f'(h(p)) \neq 0$,*

$$H_{r+1}^{1/(r+1)} \geq \frac{|f'|}{f}(h)$$

e

$$|\nabla h| \leq \inf_{\Sigma}\left(H_{r+1}^{1/(r+1)} - \frac{|f'|}{f}(h)\right).$$

Então Σ é um slice.

Obtemos assim uma espécie de extensão do teorema 4.5 de [22] (cf. corolário 4.8).

Corolário. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa, com curvatura seccional não negativa e tal que*

$$\psi(\Sigma) \subset \{(t,x) \in -\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n; t \leq \bar{t}\}.$$

Suponha que $H_{r+1} \geq 1$ é constante, H_r é limitada e que h atinge um mínimo em Σ. Se

$$|\nabla h| \leq H_{r+1}^{1/(r+1)} - 1,$$

então Σ é isométrico a $\mathbb{R}^n$.

Na seção 4.2, seguindo as ideias de Alías e Colares na demonstração do teorema 9.1 de [3], provamos uma extensão do teoremas 6 de [32] para o caso não compacto utilizando o princípio do máximo tipo-Hopf de Yau (cf. teorema 4.9).

Teorema. *Sejam $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW satisfazendo a condição de convergêcia nula, e $\psi : \Sigma \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa, com curvatura média constante e segunda forma fundamental limitada, tal que $f(h)$ é limitada em Σ e $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$. Então Σ é totalmente umbílica.*

Decorre do resultado acima a seguinte extensão do teorema 3.2 de [16].

Corolário. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}_1^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa, com curvatura média constante e curvatura escalar limitada. Se $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então Σ é totalmente umbílica.*

Também estendemos o teorema 9.2 de [3] para o caso não compacto utilizando a extensão do princípio do máximo tipo-Hopf de Yau devida a Caminha, Sousa e Camargo (cf. teorema 4.12).

Teorema. *Sejam $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ um espaço-tempo RW de curvatura seccional constante, e $\psi : \Sigma \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa, contida em uma região temporalmente limitada $[t_1, t_2] \times M^n$ na qual $f' \neq 0$, com segunda forma fundamental limitada e $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$. Suponha que H_{r+1} é constante para algum $1 \leq r \leq n-1$, e que $f(h)$ atinge um mínimo local em um ponto $p \in \Sigma$. Então Σ é totalmente umbílica.*

Segue do teorema anterior e da classificação das hipersuperfícies totalmente umbílicas do espaço de de Sitter (cf. exemplo 1 de [31]) o seguinte

Corolário. *Seja $\psi : \Sigma \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa, contida em uma região temporalmente limitada e com segunda forma fundamental limitada. Suponha que para algum $1 \leq r \leq n-1$, H_{r+1} é constante. Se h atinge um mínimo local em algum ponto $p \in \Sigma$ e $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então $H_{r+1} = 1$ e Σ é isométrica a $\mathbb{R}^n$.*

Finalmente, no capítulo 5, estudamos hipersuperfícies com curvatura média constante imersas no produto Riemanniano $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$. Quando as hipersuperfícies são gráficos inteiros, vários autores têm abordado tal problema. Por exemplo, em [37], H. Rosenberg provou uma extensão do teorema de Bernstein. De fato, Rosenberg provou que se M^2 é uma superfície com curvatura Gaussiana não negativa, um gráfico mínimo inteiro em $\mathbb{R} \times M^2$ é totalmente geodésico. Neste caso, ou o gráfico é um slice ou M é isométrica a $\mathbb{R}^2$ e o gráfico é um plano. Em [4], L. J. Alías, M. Dajczer e J. Ripoll generalizaram o resultado de Rosenberg para gráficos inteiros, com curvatura média constante, imersos em ambientes Riemannianos que têm curvatura de Ricci não negativa e um campo de Killing globalmente definido. Em [7], P. Bérard e R. Sa Earp descreveram as hipersuperfícies de rotação com curvatura média constante imersas em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$, usaram-nas como barreiras para provar a existência e caracterização de alguns gráficos verticais com curvatura média constante, e daí provaram resultados de simetria e unicidade de hipersuperfícies compactas, com curvatura média constante, cujo bordo é formado por uma ou duas subvariedades contidas em slices.

Mais recentemente, J. M. Espinar e H. Rosenberg, em [25], estudaram superfícies com curvatura média constante num produto $\mathbb{R} \times M^2$, onde M^2

é uma variedade Riemanniana completa. Assumindo que a função suporte não muda de sinal, eles classificaram tais superfícies de acordo com o ínfimo da curvatura Gaussiana de suas projeções horizontais.

Motivados pelos trabalhos descritos acima, obtemos teoremas tipo-Bernstein em $\mathbb{R}\times\mathbb{H}^n$. Na nossa abordagem, utilizamos mais uma vez o princípio do máximo de Omori-Yau. Mais precisamente, o seguinte resultado é provado.

Teorema. *Seja $\psi : \Sigma \to \mathbb{R}\times\mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície completa, com segunda forma fundamental limitada e curvatura média constante H. Suponha que o fecho da aplicação de Gauss está contido em um hemisfério aberto e que a função altura h satisfaz*

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{\alpha}{n-1}|A|^2,$$

para alguma constante $0 < \alpha < 1$, então Σ é um slice.

Aqui, de acordo com J. M. Espinar e H. Rosenberg [25], a condição do fecho da aplicação de Gauss estar contido em um hemisfério aberto significa que a função suporte tem sinal estrito. Por fim, na seção 5.2, tratamos o caso em que a hipersuperfície é um gráfico vertical no seguinte

Corolário. *Seja $\Sigma^n(u)$ um gráfico vertical completo em $\mathbb{R}\times\mathbb{H}^n$, com segunda forma fundamental A limitada e curvatura média constante H. Suponha que o fecho da aplicação de Gauss de $\Sigma(u)$ está contida em um hemisfério aberto. Se a função u satisfaz*

$$|Du|^2 \leq \frac{1}{n-1}|A|^2,$$

então $u \equiv t_0$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, estabelecemos as notações que serão utilizadas ao longo deste trabalho, bem como os fatos básicos da teoria de imersões isométricas dos quais faremos uso posteriormente. Para maiores detalhes, indicamos como referências [18], [30] e [34].

1.1 Variedades semi-Riemannianas

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma forma bilinear simétrica $b = \langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ é dita

(a) *Positiva definida*, quando $\langle v, v\rangle > 0$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$.

(b) *Negativa definida*, quando $\langle v, v\rangle < 0$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$.

(c) *Não degenerada*, quando $\langle v, w\rangle = 0$ para todo $w \in V$ implica em $v = 0$.

Se b é uma forma bilinear simétrica sobre V, um subespaço W de V é dito *não degenerado* se $b_{|W\times W} : W \times W \to \mathbb{R}$ for não degenerada.

O *índice* de uma forma bilinear simétrica b sobre V é a maior dimensão de um subespaço W de V tal que $b_{|W\times W} : W \times W \to \mathbb{R}$ seja negativa definida.

Dados uma forma bilinear simétrica b sobre V e um subespaço W de V, definimos o complemento ortogonal $W^\perp$ de W em V por

$$W^\perp = \{v \in V;\ \langle v, w\rangle = 0;\ \forall\, w \in W\}.$$

Enunciamos, agora, fatos relevantes correspondentes a uma forma bilinear simétrica (cf. [34], lemas 1.19, 1.22 e 1.23).

Lema 1.1. *Seja b uma forma bilinear simétrica sobre o espaço vetorial de dimensão finita V, e W um subespaço de V. Então*

(a) *b é não degenerada se e só se sua matriz com respeito a uma (e então a toda) base de V for invertível.*

(b) *Se W é não degenerado então $dim(W)+dim(W^{\perp}) = dim(V)$ e $(W^{\perp})^{\perp} = W$.*

(c) *W é não degenerado se e só se $V = W \oplus W^{\perp}$. Em particular, W é não degenerado se e só se $W^{\perp}$ for não degenerado.*

No que segue, supomos que $b = \langle\ ,\ \rangle$ é uma forma bilinear simétrica e não degenerada sobre o espaço vetorial real V. Em relação a b, dizemos que $v \in V \setminus \{0\}$ é

(i) *Tipo-tempo*, quando $\langle v, v\rangle < 0$;

(ii) *Tipo-luz*, quando $\langle v, v\rangle = 0$;

(iii) *Tipo-espaço*, quando $\langle v, v\rangle > 0$.

Analogamente, define-se o que significa para um subespaço não degenerado W de V ser tipo-tempo, tipo-luz ou tipo-espaço. Se $v \in V \setminus \{0\}$ não for tipo-luz, define-se o *sinal* $\epsilon_v \in \{-1, 1\}$ de v por

$$\epsilon_v = \frac{\langle v, v\rangle}{|\langle v, v\rangle|}.$$

A *norma* de $v \in V$ é $|v| = \sqrt{\epsilon_v \langle v, v\rangle}$, e v é *unitário* se $|v| = 1$. Temos que V admite uma base $\{e_i\}$ ortonormal com respeito a b, isto é, tal que $\langle e_i, e_j\rangle = \epsilon_i \delta_{ij}$, onde ϵ_i denota o sinal de e_i (cf. [34], lema 2.24). Desse modo, a expansão ortonormal de $v \in V$ com respeito a $\{e_i\}$ é dada por

$$v = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \langle v, e_i\rangle e_i.$$

Seja V um espaço vetorial no qual uma forma bilinear simétrica e não degenerada $b = \langle\ ,\ \rangle$ de índice 1 está definida, e $\mathcal{T} = \{u \in V;\ \langle u, u\rangle < 0\}$. Para cada $u \in \mathcal{T}$, definimos o *cone tipo-tempo (ou cone temporal) de V contendo u* por $C(u) = \{v \in \mathcal{T};\ \langle u, v\rangle < 0\}$.

Lema 1.2 ([30], lema 1.2.1). *Sejam $v, w \in \mathcal{T}$. Então*

(a) *O subespaço $\{v\}^{\perp}$ é tipo-espaço e $V = span\{v\} \oplus span\{v\}^{\perp}$. Assim, $\mathcal{T}$ é a união disjunta de $C(v)$ e $C(-v)$.*

(b) *$|\langle v, w\rangle| \geq |v||w|$, com igualdade se e só se v e w forem colineares.*

(c) *Se $v \in C(u)$ para algum $u \in \mathcal{T}$, então $w \in C(u) \Leftrightarrow \langle v, w\rangle < 0$. Portanto, $w \in C(v) \Leftrightarrow v \in C(w) \Leftrightarrow C(v) = C(w)$.*

A desigualdade descrita em (b) no teorema acima é conhecida como *desigualdade de Cauchy-Schwarz invertida.*

Definição 1.3. *Um tensor métrico sobre uma variedade diferenciável $\overline{M}$ é um $2-$tensor covariante e simétrico $\overline{g}$ sobre $\overline{M}$, tal que $\overline{g}_p$ é não degenerada para todo $p \in \overline{M}$. Uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}$ é um par $(\overline{M}, \overline{g})$, onde $\overline{M}$ é uma variedade diferenciável e $\overline{g} = \langle\ ,\ \rangle$ é um tensor métrico de índice constante sobre $\overline{M}$.*

Como o índice de $\overline{g}$ é uma função semi-contínua inferiormente de $\overline{M}$ em $\mathbb{N}$, temos que ele é constante em toda componente conexa de $\overline{M}$. No que segue, para simplificar a notação, escrevemos $\overline{M}$ para o par $(\overline{M}, \overline{g})$, $\langle\ ,\ \rangle$ para o tensor métrico $\overline{g}$ de $\overline{M}$ e ν para seu índice.

Quando $\nu = 0$, $\overline{M}$ é simplesmente uma variedade Riemanniana; quando $\nu = 1$, $\overline{M}$ é denominada uma *variedade de Lorentz*.

Sempre que $p \in \overline{M}$ e $v, w \in T_p\overline{M}$ gerarem um subespaço $2-$dimensional não degenerado de $T_p\overline{M}$, segue do item (a) do lema 1.1 que $\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2 \neq 0$.

Definição 1.4. *Sejam $\overline{M}$ uma variedade semi-Riemanniana, $p \in \overline{M}$ e $\sigma \subset T_p\overline{M}$ um subespaço $2-$dimensional não degenerado de $T_p\overline{M}$. O número*

$$K(\sigma) = \frac{\langle \overline{R}(v, w)v, w\rangle}{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2}$$

independe da base escolhida $\{v, w\}$ de σ, e é denominado curvatura seccional de $\overline{M}$ em p, segundo σ.

Definição 1.5. *A variedade semi-Riemanniana $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante quando, para cada $p \in \overline{M}$, os números $K(\sigma)$ da definição acima independerem do subespaço $2-$dimensional não degenerado σ de $T_p\overline{M}$.*

Aproximando subespaços 2−dimensionais degenerados σ de $T_p\overline{M}$ através de subespaços não degenerados, pode-se mostrar que o fato de $\overline{M}$ ter curvatura seccional constante determina seu tensor curvatura $\overline{R}$. Mais precisamente (cf. [34], corolário 3.43), se $\overline{M}$ tiver curvatura seccional constante c, então

$$\overline{R}(X,Y)Z = c\big(\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X\big), \tag{1.1}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

Definição 1.6. *Se $\overline{M}$ é uma variedade semi-Riemanniana, o tensor de Ricci de $\overline{M}$ é definido por*

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{tr}(Z \mapsto R(X,Z)Y),\ X,Y \in \mathfrak{X}(\overline{M}).$$

Se $p \in \overline{M}$ e $x \in T_p\overline{M}$, $|x| = 1$, o número $\mathrm{Ric}(x,x)$ *chama-se curvatura de Ricci em p na direção de x.*

Assim, se $\{E_1, \dots, E_n\}$ é um referencial ortonormal local em $\mathfrak{X}(\overline{M})$, temos

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \langle R(X,E_i)Y, E_i\rangle,$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, onde $\epsilon_i = \langle E_i, E_i\rangle$.

Definição 1.7. *A curvatura escalar de $\overline{M}$ é a função $\overline{S} : \overline{M} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\overline{S} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ric}(E_j,E_j) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i<j} K(E_i,E_j).$$

Definição 1.8. *Seja $\overline{M}$ uma variedade de Lorentz. Uma aplicação τ, que associa a cada $p \in \overline{M}$ um cone tipo-tempo τ_p em $T_p\overline{M}$, é suave quando, para cada $p \in \overline{M}$, existem uma vizinhança aberta U de p e $V \in \mathfrak{X}(U)$, tais que $V(q) \in \tau_q$ para todo $q \in U$. Caso uma tal aplicação τ exista, diz-se que $\overline{M}$ é* temporalmente orientável.

Proposição 1.9. *Uma variedade de Lorentz $\overline{M}$ é temporalmente orientável se, e somente se, existir um campo vetorial tipo-tempo $K \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.*

Demonstração. Se existe um campo K de vetores tipo-tempo sobre $\overline{M}$, defina $\tau(p) = C(K(p))$. Reciprocamente, seja τ uma orientação temporal de $\overline{M}$. Como τ é diferenciável, cada ponto $p \in \overline{M}$ possui uma vizinhança U em $\overline{M}$ na qual está definido um campo de vetores tipo-tempo K_U, com $K_U(q) \in \tau(q)$, para cada $q \in U$. Sejam agora $\{U_\alpha\}$ uma tal cobertura de $\overline{M}$, e $\{f_\alpha\}$ uma partição da unidade estritamente subordinada a $\{U_\alpha\}$. Então o campo

$$K = \sum_\alpha f_\alpha K_{U_\alpha}$$

está bem definido sobre $\overline{M}$; além disso, pelo lema 1.2, temos que K é tipo-tempo. $\square$

A proposição acima diz que não importa se nos referimos à função suave τ ou ao campo vetorial tipo-tempo K. Assim, sempre que $\overline{M}$ for temporalmente orientável, a escolha de uma aplicação τ como acima, ou de um campo vetorial tipo-tempo K a ela correspondente, será denominada uma *orientação temporal* para $\overline{M}$.

Sejam τ uma orientação temporal para $\overline{M}$, e $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Se $V(q) \in \tau_q$ ($-V(q) \in \tau_q$) para todo $q \in \overline{M}$, diz-se que V *aponta para o futuro* (*aponta para o passado*). Pelo item (c) do lema 1.2, sendo K uma orientação temporal para $\overline{M}$, temos que um campo vetorial tipo-tempo V sobre $\overline{M}$ aponta para o futuro (passado) se, e somente se, $\langle V, K\rangle < 0$ ($\langle V, K\rangle > 0$).

1.2 Imersões isométricas

Sejam (Σ^n, g) uma variedade Riemanniana e $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ uma variedade semi-Riemanniana. Uma imersão isométrica $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ é uma imersão tal que $\psi^*\overline{g} = g$. Neste caso, é costume denotar (e assim o faremos) os tensores métricos de Σ e $\overline{M}$ pelo mesmo símbolo $\langle\ ,\ \rangle$.

Dada $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ imersão isométrica, dizemos que Σ é uma *hipersuperfície* de $\overline{M}$. Se $\overline{M}$ é de Lorentz, Σ é dita uma hipersuperfície *tipo-espaço* de $\overline{M}$.

Proposição 1.10. *Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço de uma variedade de Lorentz temporalmente orientada $\overline{M}^{n+1}$. Então Σ admite um campo vetorial normal unitário (suave) N apontando para o futuro. Em particular, Σ é orientável.*

Demonstração. Fixe um campo $K \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ que dá a orientação temporal de $\overline{M}$, e observe que, para todo $p \in \Sigma$, o conjunto de todos os vetores tipo-tempo $v \in T_p\overline{M}$ é a união disjunta de $C(K(p))$ e $C(-K(p))$.

Tome, em cada $p \in \Sigma$, um vetor unitário $N(p) \in T_p\Sigma^{\perp}$. Desde que $N(p)$ é tipo-tempo, trocando $N(p)$ por $-N(p)$ se necessário, podemos supor que $N(p) \in C(K(p))$. Deste modo, definimos unicamente um campo vetorial normal unitário N sobre Σ apontando para o futuro. Resta-nos mostrar que tal campo N é suave.

Para isso, fixe $p \in \Sigma$ e tome um referencial móvel $\{e_i\}$ sobre uma vizinhança aberta e conexa U de p em Σ. Então $\tilde{N} = K - \sum_{i=1}^{n}\langle K, e_i\rangle e_i$ é suave e normal a Σ em U, com

$$\langle \tilde{N}, \tilde{N}\rangle = \langle \tilde{N}, K\rangle = \langle K, K\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle K, e_i\rangle^2.$$

Mas $\langle K, K\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle K, e_i\rangle^2 - \langle K, N\rangle^2$, de modo que $\langle \tilde{N}, \tilde{N}\rangle = -\langle K, N\rangle^2 < 0$. Portanto, $\tilde{N}(q) \in C(K(q))$ para cada $q \in U$, e $N = \frac{\tilde{N}}{|\tilde{N}|}$, suave. $\square$

Daqui por diante, $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ sempre denotará uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana $n-$dimensional em uma variedade Riemanniana orientada ou de Lorentz temporalmente orientada, $(n+1)-$dimensional, estando o caso considerado em cada situação sempre claro no contexto. Ainda com relação a notações, utilizamos $\mathcal{D}(\Sigma)$ para denotar o anel das funções de classe C^∞ (ou suaves) em Σ.

Quando $\overline{M}^{n+1}$ for Riemanniana, Σ será sempre assumida orientável. Como a proposição acima torna essa hipótese desnecessária no caso de ambiente Lorentziano temporalmente orientado, em qualquer caso Σ é orientada pela escolha de um campo vetorial normal unitário N sobre a mesma.

Com relação a notação correspondente a uma imersão isométrica $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$, exceto pela métrica, objetos sem barra farão referência a Σ, enquanto objetos com barra farão referência a $\overline{M}$. Em particular, ∇ e $\overline{\nabla}$ denotarão as conexões de Levi-Civita, e R e $\overline{R}$ os tensores de curvatura de Σ e $\overline{M}$, respectivamente.

Para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, tem-se $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^{\top}$, onde $Z^{\top}$ denota a componente tangente de $Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Assim,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y),$$

onde $\alpha : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}^{\perp}(\Sigma)$ é a *segunda forma fundamental* da imersão ψ. Desde que α é $\mathcal{D}(\Sigma)-$bilinear e simétrica, definindo

$$\langle AX, Y\rangle = \langle \alpha(X, Y), N\rangle$$

obtemos um campo $A : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ de operadores lineares auto-adjuntos $A_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$ $(p \in \Sigma)$, também denominados *segundas formas fundamentais* (ou *operadores de forma*) de ψ. é imediato verificar que

$$AX = -\overline{\nabla}_X N \quad \text{e} \quad \alpha(X, Y) = \epsilon_N \langle AX, Y\rangle N.$$

A proposição a seguir estabelece as equações fundamentais que relacionam os tensores curvatura de Σ e $\overline{M}$, e a segunda forma fundamental (para a sua demonstração, veja [30] ou [34]).

Proposição 1.11. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Então, para quaisquer campos de vetores $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, temos*

(a) *Equação de Gauss*

$$R(X, Y)Z = (\overline{R}(X, Y)Z)^{\top} + \epsilon_N\big(\langle AX, Z\rangle AY - \langle AY, Z\rangle AX\big). \tag{1.2}$$

(b) *Equação de Codazzi*

$$(\overline{R}(X, Y)N)^{\top} = (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X. \tag{1.3}$$

Para ambientes de curvatura seccional constante tem-se o seguinte

Corolário 1.12. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de Σ^n em um ambiente $\overline{M}^{n+1}$ de curvatura seccional constante c, e $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Então*

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W\rangle = c\big(&\langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle - \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle\big) \\ &+ \epsilon_N\big(\langle AX, Z\rangle\langle AY, W\rangle - \langle AX, W\rangle\langle AY, Z\rangle\big). \end{aligned} \tag{1.4}$$

e

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X. \tag{1.5}$$

1.3 Produtos warped semi-Riemannianos

Sejam M^n uma variedade Riemanniana conexa orientada $n-$dimensional, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função suave positiva. Dada a variedade produto $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$, denotemos por π_I e π_M as projeções canônicas sobre os fatores I e M, respectivamente. Munindo $\overline{M}$ com a métrica

$$\langle v, w\rangle_p = \epsilon\langle(\pi_I)_*v, (\pi_I)_*w\rangle + (f \circ \pi_I(p))^2 \langle(\pi_M)_*v, (\pi_M)_*w\rangle,$$

onde $\epsilon = 1$ ou $\epsilon = -1$, para todo $p \in \overline{M}$ e para quaisquer $v, w \in T_p\overline{M}$, obtemos uma classe importante de variedades semi-Riemanniannas denominadas *produtos warped*, e escrevemos $\overline{M}^{n+1} = \epsilon I \times_f M^n$ para denotá-los. O campo

$$K = f\partial_t = (f \circ \pi_I)\partial_t \tag{1.6}$$

é conforme fechado (no sentido que sua 1-forma dual é fechada), pois

$$\nabla_X K = f'X,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

Quando $\epsilon = 1$, $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ é uma variedade Riemanniana que é denominada simplesmente *produto warped Riemanniano*.

Já no caso $\epsilon = -1$, $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ é uma variedade de Lorentz que é denominada (seguindo a terminologia introduzida em [5]) *espaço-tempo de Robertson-Walker Generalizado* (GRW). Em particular, quando M tem curvatura seccional constante, $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ é denominado classicamente *espaço-tempo de Robertson-Walker* (RW) (para maiores detalhes veja [5], [2], ou ainda [34]). Os exemplos de espaços-tempo GRW listados abaixo podem ser encontrados na seção 4 de [32].

1. O espaço de Minkowski.
   Seja $\mathbb{R}^{n+1}$ munido com a métrica Lorentziana

   $$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i - v_{n+1}w_{n+1}.$$

   Tal variedade é chamada *espaço de Minkowski*, e é denotada por $\mathbb{L}^{n+1}$. é claro que $\mathbb{L}^{n+1}$ pode ser dada pelo produto warped $-\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^n$, onde $f \equiv 1$. Pode-se ver que $\mathbb{L}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante e igual a zero, sendo assim, um espaço-tempo RW.

2. O espaço de de Sitter.
Seja $\mathbb{S}_1^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ definido por
$$\mathbb{S}_1^{n+1} = \{p \in \mathbb{L}^{n+2} | \langle p, p\rangle = 1\}.$$
Utilizando a equação de Gauss, pode-se mostrar que $\mathbb{S}_1^{n+1}$, com a métrica induzida pela inclusão $i : \mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$, é uma variedade de Lorentz com curvatura seccional constante e igual a 1. $\mathbb{S}_1^{n+1}$ é chamado *espaço de de Sitter*. Agora, seja $a \in \mathbb{L}^{n+1}$ tal que $\langle a, a\rangle = -1$. Sejam também $\pi : \mathbb{S}_1^{n+1} \to \mathbb{R}$ a projeção dada por $\pi(p) = \langle p, a\rangle$ e $X(p) = \nabla\pi(p) = a - \langle p, a\rangle p$. O campo X é tipo-tempo e conforme fechado. Assim, integrando a distribuição normal a X, garantimos a existência de uma folheação de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ cujas folhas são as esferas umbílicas dadas por $\langle p, a\rangle = \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, com raio $\sqrt{1+\tau^2}$. Então $\mathbb{S}_1^{n+1}$ é isométrico a $-\mathbb{R} \times_{\cosh t} \mathbb{S}^n$, onde $\mathbb{S}^n$ é a esfera euclidiana unitária.

Agora, sejam $a \in \mathbb{L}^{n+1}$ tal que $\langle a, a\rangle = 0$, $\pi : \mathbb{S}_1^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por $\pi(p) = \langle p, a\rangle$, e $Y(p) = \nabla\pi(p) = a - \langle p, a\rangle p$. O campo Y é tipo-tempo e conforme fechado em
$$\mathcal{O} = \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1} | \langle p, a\rangle \neq 0\}.$$
O *steady state space* é a componente conexa (aberta) de $\mathcal{O}$ dada por
$$\mathcal{H}^{n+1} = \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1} | \langle p, a\rangle > 0\}.$$
Novamente, integrando a distribuição normal a Y, garantimos a existência de uma folheação de $\mathcal{H}^{n+1}$ cujas folhas são as hipersuperfícies de nível dadas por $\langle p, a\rangle = \tau$, $\tau \in \mathbb{R}_+^*$. Portanto, $\mathcal{H}^{n+1}$ é isométrico a $-\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$. Analogamente, se tomamos $a \in \mathbb{S}_1^{n+1}$ tal que $\langle a, a\rangle = 1$, obtemos que o subconjunto aberto de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ dado por
$$\{p \in \mathbb{S}_1^{n+1} | \langle p, a\rangle > 1\}$$
é isométrico ao produto warped $(0, +\infty) \times_{\operatorname{senh} t} \mathbb{H}^n$.

3. O espaço anti-de Sitter.
Munindo $\mathbb{R}^{n+2}$ com a métrica
$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i - v_{n+1}w_{n+1} - v_{n+2}w_{n+2},$$

obtemos a variedade semi-Riemanniana $\mathbb{R}_2^{n+2}$. O espaço-tempo dado por

$$\mathbb{H}_1^{n+1} = \{p \in \mathbb{H}_1^{n+1} | \langle p, p\rangle = -1\}$$

munido com a métrica induzida pela inclusão $i : \mathbb{H}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}_2^{n+2}$ é chamado espaço *anti-de Sitter*, e tem curvatura seccional constante e igual a -1. Seja $a \in \mathbb{H}_1^{n+1}$ tal que $\langle a, a\rangle = -1$. Pode-se mostrar que $Z(p) = a + \langle p, a\rangle p$ é um campo tipo-tempo e conforme fechado no subconjunto aberto de $\mathbb{H}_1^{n+1}$ dado por

$$\mathcal{O} = \{p \in \mathbb{H}_1^{n+1} | \langle p, a\rangle^2 < 1\}.$$

O conjunto $\mathcal{O}$ definido acima tem duas componentes conexas. Integrando a distribuição normal a Z, o conjunto aberto $\mathcal{O}$ pode ser folheado por meio das hipersuperfícies tipo-espaço totalmente umbílicas $\langle p, a\rangle = \tau$, $-1 < \tau < 1$, ou seja, isométricas a duas cópias de espaços hiperbólicos $\mathbb{H}^n$ com curvatura constante $-\frac{1}{1+\tau^2}$. Daí obtemos que cada componente conexa é isométrica a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times_{\cos t} \mathbb{H}^n$.

Segue da proposição 7.42 de [34] que um espaço-tempo GRW $-I \times_f M^n$ tem curvatura seccional constante $\overline{\kappa}$ se, e somente se, a fibra Riemanniana M tem curvatura seccional constante κ (isto é, $-I \times_f M^n$ é de fato um espaço-tempo RW) e a função warping f satisfaz as equações diferenciais

$$\frac{f''}{f} = \overline{\kappa} = \frac{(f')^2 + \kappa}{f^2}. \tag{1.7}$$

Se $\psi : \Sigma^n \to -I \times_f M^n$ é uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW, desde que

$$\partial_t = (\partial/\partial_t)_{(t,x)}, \quad (t, x) \in -I \times_f M^n,$$

é um campo vetorial tipo-tempo globalmente definido em $\overline{M}$, então existe um único campo normal tipo-tempo N globalmente definido em Σ que está na mesma orientação temporal de ∂_t. Do item (b) do lema 1.2 (desigualdade de Cauchy-Schwarz invertida) temos

$$\langle N, \partial_t\rangle \leq -1 < 0 \text{ em } \Sigma. \tag{1.8}$$

Dizemos que o campo normal N acima é a aplicação de Gauss da hipersuperfície tipo-espaço Σ que aponta para o futuro.

Agora, seja $\psi : \Sigma^n \to \epsilon I \times_f M^n$ uma imersão isométrica, com campo normal N e função altura h. é claro que $\epsilon = \epsilon_N = \langle N, N\rangle = \epsilon_{\partial_t} = \langle \partial_t, \partial_t\rangle$. Sejam também $\overline{\nabla}$ e ∇ os gradientes com respeito às métricas de $\overline{M}$ e Σ respectivamente, e $h = (\pi_I)|_\Sigma$ a função altura de Σ. Cálculos simples podem mostrar que o gradiente de π_I em $\overline{M}$ é dado por

$$\overline{\nabla}\pi_I = \epsilon\langle\overline{\nabla}\pi_I, \partial_t\rangle = \epsilon\partial_t.$$

Daí obtemos o gradiente de h em Σ

$$\nabla h = (\overline{\nabla}\pi_I)^\top = \epsilon\partial_t^\top = \epsilon\partial_t - \langle N, \partial_t\rangle N, \tag{1.9}$$

e, portanto,

$$|\nabla h|^2 = \epsilon\big(1 - \langle N, \partial_t\rangle^2\big), \tag{1.10}$$

onde $|\,|$ denota a norma de um campo vetorial em Σ.

Capítulo 2

Curvaturas médias de ordem superior

2.1 Transformações de Newton

Dada uma imersão isométrica $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$, seja A o operador de forma de ψ relativo à escolha um campo normal unitário $N \in \mathfrak{X}^{\perp}(\Sigma)$ que determina a orientação de Σ.

Associados a A temos os n invariantes algébricos S_r, $1 \leq r \leq n$, dados pela igualdade

$$\det(tI - A) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_r t^{n-r},$$

onde $S_0 = 0$ por definição. Quando $\{e_k\}$ é uma base de $T_p\Sigma$ formada por autovetores de A_p, com autovalores respectivamente iguais a $\{\lambda_k\}$, vê-se facilmente que

$$S_r = \sigma_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

onde $\sigma_r \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ é o r-ésimo polinômio simétrico elementar nas n indeterminadas $X_1, \ldots, X_n$.

A r-ésima curvatura média H_r da hipersuperfície tipo-espaço Σ é então definida por

$$\binom{n}{r} H_r = \epsilon_N^r S_r = \sigma_r(\epsilon_N \lambda_1, \ldots, \epsilon_N \lambda_n).$$

Em particular, quando $r = 1$,

$$H_1 = \epsilon_N \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \epsilon_N \frac{1}{n} \operatorname{tr}(A) = H$$

é a curvatura média extrínseca de Σ.

As funções definidas acima satisfazem desigualdades algébricas que serão muito úteis ao longo deste trabalho, denominadas desigualdades de Newton. Uma prova das mesmas para números reais positivos pode ser encontrada em [27]. Em [18], A. Caminha provou uma versão mais geral das mesmas, juntamente com uma condição suficiente para a ocorrência da igualdade. Por uma questão de completude, apresentamos aqui tal prova.

Lema 2.1. *Se um polinômio $f \in \mathbb{R}[X]$ possui $k \geq 1$ raízes reais, então sua derivada f' possui pelo menos $k-1$ raízes reais. Em particular, se todas as raízes de f forem reais, então todas as raízes de f' também serão reais.*

Demonstração. Podemos supor $k > 1$. Sejam $x_1 < \cdots < x_l$ raízes reais de f, com multiplicidades respectivamente $m_1, \ldots, m_l$ tais que $m_1 + \cdots m_l = k$. Então cada x_i é raiz de f' com multiplicidade $m_i - 1$. Por outro lado, entre x_i e x_{i+1} há, pelo teorema de Rôlle, ao menos uma outra raiz de f', de modo que contabilizamos pelo menos

$$(m_1 - 1) + \cdots + (m_l - 1) + (l - 1) = k - 1$$

raízes reais para f'. O resto é imediato. $\square$

Proposição 2.2 ([18], proposição 3.2)**.** *Sejam $n > 1$ inteiro, e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ números reais. Defina, para $0 \leq r \leq n$, $S_r = \sigma_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ como acima, e $H_r = \binom{n}{r}^{-1} S_r$.*

(a) *Para $1 \leq r < n$, tem-se $H_r^2 \geq H_{r-1}H_{r+1}$. Ademais, se a igualdade ocorrer para $r = 1$, ou para $1 < r < n$, com $H_{r+1} \neq 0$ neste último caso, então $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$.*

(b) *Se $H_1, H_2, \ldots, H_r > 0$ para algum $1 < r \leq n$, então $H_1 \geq \sqrt{H_2} \geq \ldots \geq \sqrt[r]{H_r}$. Ademais, se a igualdade ocorrer para algum $1 \leq j < r$, então $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$.*

(c) *Se, para algum $1 \leq r < n$, tivermos $H_r = H_{r+1} = 0$, então $H_j = 0$, para todo $r \leq j \leq n$. Em particular, no máximo $r-1$ dos λ_i serão não nulos neste caso.*

Demonstração. Para provar (a) nós usamos indução sobre o número $n > 1$ de reais. Para $n = 2$, a desigualdade $H_1^2 \geq H_0 H_2$ equivale a $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \geq 0$, com igualdade se e só se $\lambda_1 = \lambda_2$. Suponha agora as desigualdades verdadeiras para $n - 1$ números reais, com igualdade quando $H_{r+1} \neq 0$ se e só se todos eles forem iguais. Dados $n \geq 3$ reais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, seja

$$f(x) = (x + \lambda_1) \ldots (x + \lambda_n) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} H_r(\lambda_i) x^{n-r}.$$

Então

$$f'(x) = \sum_{r=0}^{n-1} (n - r) \binom{n}{r} H_r(\lambda_i) x^{n-r-1}.$$

Por outro lado, pelo lema 2.1, existem números reais $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ tais que

$$\begin{aligned} f'(x) &= n(x + \gamma_1) \cdots (x + \gamma_{n-1}) = n \sum_{r=0}^{n-1} S_r(\gamma_i) x^{n-1-r} \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} n \binom{n-1}{r} H_r(\gamma_i) x^{n-1-r}. \end{aligned}$$

Como $(n - r)\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r}$, comparando coeficientes correspondentes nós obtemos $H_r(\lambda_i) = H_r(\gamma_i)$ para $0 \leq r \leq n - 1$. Assim, segue da hipótese de indução que, para $1 \leq r \leq n - 2$,

$$H_r^2(\lambda_i) = H_r^2(\gamma_i) \geq H_{r-1}(\gamma_i) H_{r+1}(\gamma_i) = H_{r-1}(\lambda_i) H_{r+1}(\lambda_i).$$

Além disso, se tivermos a igualdade para os λ_i, com $H_{r+1}(\lambda_i) \neq 0$, então também a teremos para os γ_i, com $H_{r+1}(\gamma_i) \neq 0$. Novamente pela hipótese de indução, segue que $\gamma_1 = \cdots = \gamma_{n-1}$, e assim $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.

Para terminar, é suficiente provarmos que $H_{n-1}^2(\lambda_i) \geq H_{n-2}(\lambda_i) H_n(\lambda_i)$, com igualdade para $H_n \neq 0$ se e só se todos os λ_i forem iguais. Se $\lambda_i = 0$ para algum $1 \leq i \leq n$, a igualdade é óbvia. Senão, $H_n \neq 0$ e

$$\begin{aligned} H_{n-1}^2 \geq H_{n-2} H_n \quad &\Leftrightarrow \quad \left[\binom{n}{n-1}^{-1} \sum_i \frac{H_n}{\lambda_i} \right]^2 \geq \left[\binom{n}{n-2}^{-1} \sum_{i<j} \frac{H_n}{\lambda_i \lambda_j} \right] H_n \\ &\Leftrightarrow \quad (n - 1) \left(\sum_i \frac{1}{\lambda_i} \right)^2 \geq 2n \sum_{i<j} \frac{1}{\lambda_i \lambda_j}. \end{aligned}$$

Denotando $\alpha_i = 1/\lambda_i$, concluímos que a última desigualdade acima é equivalente a
$$(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2 \geq 2n\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j.$$
Fazendo $T(\alpha_i) = (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2 - 2n\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j$, segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned}
T(\alpha_i) &= n\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2 - 2n\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j \\
&= n\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2 - 2\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j\right] - \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2 \\
&= n\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Também, temos igualdade nesse caso se e só se todos os α_i (e então todos os λ_i) forem iguais. Note que o argumento acima também prova que $H_1^2 = H_2$ se e só se todos os λ_i forem iguais, uma vez que $T(\lambda_i) = n^2(n-1)[H_1^2(\lambda_i) - H_2(\lambda_i)]$.

Quanto a (b), observe que $H_1 \geq H_2^{1/2}$ segue de (a). Por outro lado, se $H_1 \geq H_2^{1/2} \geq \cdots \geq H_k^{1/k}$ para algum $2 \leq k < r$, então
$$H_k^2 \geq H_{k-1}H_{k+1} \geq H_k^{\frac{k-1}{k}}H_{k+1},$$
ou ainda $H_k^{1/k} \geq H_{k+1}^{1/(k+1)}$. Segue agora imediatamente que, se $H_k^{1/k} = H_{k+1}^{1/(k+1)}$ para algum $1 \leq k < r$, então $H_k^2 = H_{k-1}H_{k+1}$. Portanto, o item (a) fornece $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.

Finalmente, para provar (c) suponha, sem perda de generalidade, que $r < n-1$. Desde que $H_r = H_{r+1} = 0$, temos a igualdade na desigualdade de Newton
$$H_{r+1}^2 \geq H_rH_{r+2}.$$
Se $H_{r+2} \neq 0$, segue de (a) que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda$. Assim, $H_r = 0 \Rightarrow \lambda = 0$, donde segue que $H_{r+2} = 0$, uma contradição. Logo, $H_{r+2} = 0$ e,

analogamente, $H_j = 0$ para $r \leq j \leq n$. Resta agora notar que o polinômio $f(x)$ do item (a) é, nesse caso, simplesmente

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} S_j x^{n-j} = \sum_{j=0}^{r-1} S_j x^{n-j}.$$

$\square$

Para $0 \leq r \leq n$ definimos o r-ésimo operador de Newton P_r em Σ^n por $P_0 = I$ (operador identidade) e, para $1 \leq r \leq n$, pela recorrência

$$P_r = \epsilon_N^r S_r I - \epsilon_N A P_{r-1}.$$

Uma indução trivial mostra que

$$P_r = \epsilon_N^r (S_r I - S_{r-1} A + S_{r-2} A^2 - \cdots + (-1)^r A^r), \tag{2.1}$$

donde o teorema de Cayley-Hamilton nos dá $P_n = 0$. Além disso, desde que P_r é um polinômio em A para todo r, ele é também auto-adjunto e comuta com A. Portanto, toda base que diagonaliza A em $p \in \Sigma$ também diagonaliza todos os P_r em p. Sendo $\{e_i\}$ uma tal base e denotando por A_i a restrição de A a $\langle e_i \rangle^\perp \subset T_p\Sigma$, pode-se mostrar que

$$\det(tI - A_i) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k S_k(A_i) t^{n-1-k},$$

onde

$$S_k(A_i) = \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n \\ j_1, \ldots, j_k \neq i}} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_k}.$$

Quando $r = 2$, H_2 define uma quantidade geométrica que está relacionada com a curvatura escalar S da hipersuperfície. Por exemplo, se o ambiente $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante $\overline{\kappa}$, segue da equação (1.4) que

$$S = \overline{\kappa} + \epsilon H_2. \tag{2.2}$$

Com as notações acima, é ainda imediato verificar que $P_r e_i = \epsilon_N^r S_r(A_i) e_i$, e também que (cf. lema 2.1 de [6])

$$S_r(A_i) = S_r - \lambda_i S_{r-1}(A_i); \tag{2.3}$$

$$\mathrm{tr}(P_r) = \epsilon_N^r \sum_{i=1}^{n} S_r(A_i) = \epsilon_N^r (n-r) S_r; \tag{2.4}$$

$$\mathrm{tr}(AP_r) = \epsilon_N^r \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_r(A_i) = \epsilon_N^r (r+1) S_{r+1}; \tag{2.5}$$

$$\mathrm{tr}(A^2 P_r) = \epsilon_N^r \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 S_r(A_i) = \epsilon_N^r (S_1 S_{r+1} - (r+2) S_{r+2}). \tag{2.6}$$

Para $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $1 \leq r \leq n-1$ vale ainda (cf. fórmula (3.6) de [2])

$$\sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_X A)(E_i), P_r E_i \rangle = \mathrm{tr}\big(P_r \circ \nabla_X A\big) = \epsilon \binom{n}{r+1} \langle \nabla H_{r+1}, X \rangle. \tag{2.7}$$

Um ponto $p \in \Sigma$ é dito *elíptico* se os autovalores λ_k de A_p forem todos positivos ou todos negativos.

O lema abaixo, que é devido a L. J. Alías, A. Brasil Jr. e A. G. Colares, versa sobre a existência de pontos elípticos em espaços-tempo GRW.

Lema 2.3 ([2], lema 5.4)**.** *Sejam $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW e $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço, com campo normal N e função altura h. Suponha que $f'(h(p)) \neq 0$, onde $p \in \Sigma$ é um mínimo local de $f \circ h$. Então p é um ponto elíptico de Σ.*

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que N aponta para o futuro, isto é, $\langle N, \partial_t \rangle \leq -1$. Seja $u = f^2 \circ h$. é claro que o ponto p também é um mínimo local para u. Então

$$\nabla u(p) = 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{Hess}\, u_p(v,v) \geq 0,$$

para todo $v \in T_p\Sigma$. Como consequência de (1.9) temos

$$\nabla u = 2ff'\nabla h = -2f'K^{\top}. \tag{2.8}$$

Além disso, para todo $V \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, temos

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_V K^{\top} &= \overline{\nabla}_V \big(K + \langle N, K \rangle N\big) = \overline{\nabla}_V K + \overline{\nabla}_V \big(\langle N, K \rangle N\big) \\
&= f'V + \langle N, K \rangle \overline{\nabla}_V N + V\langle N, K \rangle N \\
&= f'V - \langle N, K \rangle AV + V\langle N, K \rangle N,
\end{aligned}$$

donde obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{Hess} u(V,V) &= \langle \nabla_V(\nabla u), V\rangle = -2V(f')\langle V, K^\top\rangle - 2f'\langle \nabla_V K^\top, V\rangle \\ &= -2V(f')\langle V, K^\top\rangle - 2f'\langle f'V - \langle N,K\rangle AV, V\rangle \\ &= -2V(f')\langle V, K^\top\rangle - 2f'^2|V|^2 + 2f'\langle N,K\rangle\langle AV, V\rangle.\end{aligned}$$

Mas de (2.8) segue que $K^\top(p) = 0$, e de (1.10) temos $\langle N, K\rangle(p) = -f(h(p))$. Assim,

$$0 \leq \frac{1}{2}\operatorname{Hess} u_p(v,v) = -f'^2(h(p))|v|^2 - f'(h(p))f(h(p))\langle A_p v, v\rangle \qquad (2.9)$$

Agora, se $f'(h(p)) > 0$ e $\{e_k\}$ é uma base de $T_p\Sigma$ formada por autovetores de A_p, com autovalores respectivamente iguais a $\{\lambda_k\}$, podemos concluir de (2.9) que

$$\lambda_k \leq \frac{-f'}{f}(h(p)) < 0.$$

Quando $f'(h(p)) < 0$ obtemos, de modo análogo,

$$\lambda_k \geq \frac{-f'}{f}(h(p)) > 0.$$

Portanto, p é um ponto elíptico. □

Os lemas seguintes serão de grande importância ao longo deste trabalho. O primeiro é devido a J. L. Alías e A. G. Colares, e o segundo a J. L. M. Barbosa e A. G. Colares.

Lema 2.4 ([3], lema 3.2). *Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW. Se $H_2 > 0$, então P_1 é positivo definido (para uma escolha apropriada de N).*

Demonstração. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos $H^2 \geq H_2 > 0$. Podemos supor então $H > 0$ com uma escolha apropriada de N. Mas $n^2H^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + n(n-1)H_2 > \lambda_j^2$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Daí $S_1(A_j) = nH + \lambda_j > 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$, ou seja, P_1 é positivo definido. □

Lema 2.5 ([6], proposição 3.2). *Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um um ambiente Lorentziano $\overline{M}^{n+1}$. Suponha que existe um ponto elíptico $p \in \Sigma$. Se H_{r+1} é positivo em Σ, para algum $r \in \{1, \ldots, n-1\}$, então*

P_j é positivo definido em Σ, para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$ (para uma escolha apropriada de N). Em particular, $H_j > 0$ em Σ, para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$. Além disso, valem

$$H_{j-1} \geq H_j^{(j-1)/j} \tag{2.10}$$

e

$$H \geq H_j^{1/j}, \tag{2.11}$$

para todo $j = 1, \ldots, r+1$. Se $j \geq 2$, então ocorre a igualdade nas desigualdades (2.10) *e* (2.11) *somente nos pontos umbílicos, ou seja, quando $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$.*

Demonstração. é suficiente mostrar que H_j é positivo para $j = 1, \ldots, r-1$, desde que o restante é consequência imediata da proposição 2.2.

Não há perda de generalidade em supor $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n < 0$. Por continuidade, a negatividade dos autovalores se estende a um aberto $\mathcal{U} \subset \Sigma$ contendo p. Em particular, $H_j > 0$ e $H_j(A_i) = \binom{n}{j}^{-1}(-1)^j S_j(A_i) > 0$ em $\mathcal{U}$, para $1 \leq i, j \leq n$. Agora, fixe $1 \leq i \leq n$ e seja $\mathcal{U}_j$ o maior subconjunto conexo de Σ, contendo $\mathcal{U}$ e no qual $H_j(A_i) > 0$. Afirmamos que $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{n-1} \subset \cdots \subset \mathcal{U}_1$. De fato, definindo $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{U}_k$, é suficiente provarmos que $\mathcal{V} = \mathcal{U}_k$, para $1 \leq k \leq n$. Como $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}_k$ é aberto, e $\mathcal{U}_k$ é aberto e conexo, basta provarmos que $\partial\mathcal{V} \subset \partial\mathcal{U}_k$. Mas, em decorrência do item (b) da proposição 2.2, temos

$$H_1(A_i) \geq H_2(A_i)^{1/2} \geq \cdots \geq H_k(A_i)^{1/k} \tag{2.12}$$

em $\mathcal{V}$, e tais desigualdades continuam válidas em $\partial\mathcal{V}$ por continuidade. Se $q \in \partial V \cap \mathcal{U}_k$, segue daí que $H_j(A_i) > 0$ em q, para $1 \leq j \leq k$. Portanto, $q \in \mathcal{V}$, o que é uma contradição.

Para provar que $\mathcal{U}_j = \Sigma$, para $1 \leq j \leq r$, é suficiente então provarmos que $\mathcal{U}_r = \Sigma$. Uma vez que $\mathcal{U}_r$ é aberto e conexo, basta provarmos que $\partial\mathcal{U}_r = \varnothing$. Suponha o contrário, isto é, considere $q \in \partial\mathcal{U}_r$. Então $H_r(A_i) = 0$ em q, e segue de (2.12) que $H_j(A_i) \geq 0$, para $1 \leq j \leq r$. Por outro lado, tem-se em q

$$S_{r+1} = \lambda_i S_r(A_i) + S_{r+1}(A_i) = S_{r+1}(A_i),$$

de modo que $H_{r+1}(A_i) = H_{r+1} > 0$ em q. Do item (a) da proposição 2.2 obtemos, em q,

$$0 = H_r(A_i)^2 \geq H_{r-1}H_{r+1},$$

donde $H_{r-1}(A_i) = 0$ em q. Portanto, agora pelo item (c) da proposição 2.2, temos $H_j(A_i) = 0$, para $r-1 \leq j \leq n$, o que entra em contradição com o fato de $H_{r+1}(A_i)$ ser positivo em q. Como i foi fixado arbitrariamente, a proposição está demonstrada. $\square$

Associado a cada P_r temos o operador diferencial linear de segunda ordem $L_r : \mathcal{D}(\Sigma) \to \mathcal{D}(\Sigma)$, dado por

$$L_r(u) = \mathrm{tr}(P_r \circ \mathrm{Hess}\, u).$$

Em particular, $L_0(u) = \mathrm{tr}(\text{Hess u}) = \Delta u$. Quando $\overline{M}$ é uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante, H. Rosenberg provou em [36] que

$$L_r(u) = \mathrm{div}(P_r \nabla u)$$

onde div denota a divergência de um campo vetorial sobre Σ^n. Apresentamos aqui a prova dada por H. Rosenberg, notando que a mesma também é válida quando $\overline{M}$ é de Lorentz.

Proposição 2.6. *Sejam $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica, com campo normal unitário N e $\epsilon = \langle N, N\rangle$, onde $\overline{M}$ tem índice $\nu \leq 1$. Se $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, então $L_r(u) = \mathrm{div}(P_r \nabla u)$, para qualquer $u \in \mathcal{D}(\Sigma)$.*

Demonstração. é suficiente provar que

$$\mathrm{tr}(X \mapsto \nabla_{P_r X} Y) = \mathrm{tr}(X \mapsto \nabla_X P_r Y), \tag{2.13}$$

para todo $Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Com efeito, sendo $p \in \Sigma$ e β uma base de $T_p\Sigma$, temos

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Hess}\, u \circ P_r) = \sum_{X \in \beta} \mathrm{Hess}\, u(P_r X, X) = \sum_{X\in\beta} \langle \nabla_{P_r X} \nabla u, X\rangle$$

e

$$\mathrm{div}(P_r \nabla u) = \mathrm{tr}(X \mapsto \nabla_X P_r \nabla u) = \sum_{X\in\beta} \langle \nabla_X P_r \nabla u, X\rangle.$$

Afirmamos agora que se (2.13) for válida para um campo Y, então também será válida para o campo ϕY, qualquer que seja $\phi \in \mathcal{D}(\Sigma)$. De fato, sendo

$p \in \Sigma$ e $\{v_i\}$ uma base de $T_p\Sigma$ formada por autovetores de P_r com autovalores λ_i, então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{P_r v_i} \phi Y, v_i \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \left(\phi \langle \nabla_{P_r v_i} Y, v_i \rangle + (P_r v_i)(\phi) \langle Y, v_i \rangle \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\phi \langle \nabla_{P_r v_i} Y, v_i \rangle + (\lambda_i v_i)(\phi) \langle Y, v_i \rangle \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\phi \langle \nabla_{P_r v_i} Y, v_i \rangle + v_i(\phi) \langle Y, \lambda_i v_i \rangle \right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{v_i} P_r \phi Y, v_i \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \left(\phi \langle \nabla_{v_i} P_r Y, v_i \rangle + v_i(\phi) \langle P_r Y, v_i \rangle \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\phi \langle \nabla_{v_i} P_r Y, v_i \rangle + v_i(\phi) \langle Y, P_r v_i \rangle \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\phi \langle \nabla_{v_i} P_r Y, v_i \rangle + v_i(\phi) \langle Y, \lambda_i v_i \rangle \right).
\end{aligned}$$

Assim, basta provarmos que (2.13) é válida para $Y = e_1$, onde $\{e_i\}$ é um referencial ortonormal em uma vizinhança U de $p \in \Sigma$, geodésico em p e que diagonaliza A em p.

Por indução, suponha (2.13) válida para $r-1$. Como os e_i diagonalizam também P_{r-1}, digamos $P_{r-1} e_i = \mu_i e_i$, temos em p

$$\operatorname{tr}(X \mapsto \nabla_{P_r X} e_1) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{P_r e_i} e_1, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{\mu_i e_i} e_1, e_i \rangle = 0,$$

donde basta mostrar que $\operatorname{tr}(X \mapsto \nabla_X P_r e_1) = 0$ em p. Mas $P_r = \epsilon^r S_r I - \epsilon A P_{r-1}$, daí

$$\operatorname{tr}(X \mapsto \nabla_X P_r e_1) = \epsilon^r \operatorname{tr}(X \mapsto \nabla_X S_r e_1) - \epsilon \operatorname{tr}(X \mapsto \nabla_X P_{r-1} A e_1),$$

e basta mostrar que, em p, vale

$$\epsilon^r \operatorname{tr}(X \mapsto \nabla_X S_r e_1) = \epsilon \operatorname{tr}(X \mapsto \nabla_X P_{r-1} A e_1).$$

Usando a hipótese de indução obtém-se

$$\begin{aligned}
\epsilon\,\mathrm{tr}(X \mapsto \nabla_X P_{r-1} A e_1) &= \epsilon \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} P_{r-1} A e_i, e_i \rangle = \epsilon \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{P_{r-1} e_i} A e_1, e_i \rangle \\
&= \epsilon \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{\mu_i e_i} A e_1, e_i \rangle = \epsilon \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} A e_1, \mu_i e_i \rangle \\
&= \epsilon \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} A e_1, P_{r-1} e_i \rangle = \epsilon \sum_{i=1}^{n} \langle P_{r-1} \nabla_{e_i} A e_1, e_i \rangle.
\end{aligned}$$

Agora, como $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, a equação de Codazzi (1.5) nos dá, em p,

$$\nabla_{e_i} A e_1 = (\nabla_{e_i} A)\, e_1 = (\nabla_{e_1} A)\, e_i = \nabla_{e_1} A e_i,$$

pois o referencial, neste ponto, é geodésico. Então, utilizando (2.7), obtemos, em p,

$$\begin{aligned}
\epsilon\,\mathrm{tr}(X \mapsto \nabla_X P_{r-1} A e_1) &= \epsilon \sum_{i=1}^{n} \langle P_{r-1} \nabla_{e_1} A e_i, e_i \rangle \\
&= \epsilon\,\mathrm{tr}(P_{r-1} \nabla_{e_1} A) = \epsilon \cdot \epsilon^{r+1} \langle \nabla S_r, e_1 \rangle = \epsilon^r \langle \nabla S_r, e_1 \rangle.
\end{aligned}$$

Por outro lado, em p,

$$\begin{aligned}
\epsilon^r\,\mathrm{tr}(X \mapsto \nabla_X S_r e_1) &= \epsilon^r \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} S_r e_1, e_i \rangle = \epsilon^r \sum_{i=1}^{n} e_i \langle S_r e_1, e_i \rangle \\
&= \epsilon^r e_1(S_r) = \epsilon^r \langle \nabla S_r, e_1 \rangle.
\end{aligned}$$

Para concluir a indução, falta o caso $r = 1$. Como $P_1 = \epsilon(S_1 I - A)$, precisamos mostrar que

$$\mathrm{tr}(X \mapsto \nabla_X A e_1) = \mathrm{tr}(X \mapsto \nabla_X S_1 e_1).$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(X \mapsto \nabla_X A e_1) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} A e_1, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_1} A e_i, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_1 \langle \nabla_A e_i, e_i \rangle = e_1 \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_A e_i, e_i \rangle = e_1(S_1)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(X \mapsto \nabla_X S_1 e_1) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} S_1 e_1, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} e_i \langle S_1 e_1, e_i\rangle \\ &= e_1\langle S_1 e_1, e_1\rangle = e_1(S_1),\end{aligned}$$

o que completa a demonstração. □

2.2 As fórmulas para $L_r(\langle N, K\rangle)$

O caso Lorentziano do lema abaixo é devido a L. J. Alías e A. G. Colares (cf. lema 8.1 de [3]). Seguindo os mesmos passos da prova dada pelos autores supracitados, contemplamos também o caso Riemanniano, que será utilizado no último capítulo deste trabalho.

Lema 2.7. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \epsilon I \times_f M^n$ uma imersão isométrica, com campo normal unitário N e função altura h. Considere o campo $K = f\partial_t$. Então, para cada $r = 0, \ldots, n-1$, temos*

$$\begin{aligned}L_r(\langle N, K\rangle) = -\epsilon\Bigg\{ &\binom{n}{r+1}\langle \nabla H_{r+1}, K\rangle + f'(h) c_r H_{r+1} \\ &+ \binom{n}{r+1}\langle N, K\rangle(nH_1H_{r+1} - (n-r-1)H_{r+2}) \\ &+ \langle N, K\rangle\left(\mathrm{tr}(P_r \circ \overline{R}_N) + \frac{f''}{f}(h) c_r H_r\right)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

onde $\overline{R}_N : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ é o operador definido por

$$\overline{R}_N(X) = (\overline{R}_N(N, X)N)^\top$$

e

$$c_r = (n-r)\binom{n}{r} = (r+1)\binom{n}{r+1}$$

Demonstração. Seja $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial ortonormal local em Σ. Como P_r é simétrico, segue da definição de L_r que

$$L_r(\langle N, K\rangle) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \nabla \langle N, K\rangle, P_r E_i\rangle.$$

Para $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ temos

$$\begin{aligned} X\langle N, K\rangle &= \langle \overline{\nabla}_X N, K\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_X K\rangle \\ &= \langle -AX, K\rangle + \langle N, f'(h)X\rangle \\ &= \langle -AX, K\rangle, \end{aligned}$$

donde

$$\nabla\langle N, K\rangle = -A(K^\top),$$

onde $K^\top = K - \epsilon\langle N, K\rangle N$ é a componente tangencial do campo K. Daí segue que

$$\nabla_X \nabla\langle N, K\rangle = -\nabla_X A(K^\top).$$

Por outro lado

$$(\nabla_X A)(K^\top) = \nabla_X A(K^\top) - A(\nabla_X K^\top),$$

logo

$$\nabla_X \nabla\langle N, K\rangle = -(\nabla_X A)(K^\top) - A(\nabla_X K^\top).$$

Agora, pela equação de Codazzi temos

$$(\overline{R}(X, K^\top)N)^\top = (\nabla_X A)(K^\top) - (\nabla_{K^\top} A)(X)$$

de modo que

$$\nabla_X \nabla\langle N, K\rangle = -(\overline{R}(X, K^\top)N)^\top - (\nabla_{K^\top} A)(X) - A(\nabla_X K^\top).$$

Mas

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X K^\top &= \overline{\nabla}_X\big(K - \epsilon\langle N, K\rangle N\big) = \overline{\nabla}_X K - \epsilon\overline{\nabla}_X\big(\langle N, K\rangle N\big) \\ &= f'(h)X - \epsilon\langle N, K\rangle\overline{\nabla}_X N - \epsilon X\langle N, K\rangle N \\ &= f'(h)X + \epsilon\langle N, K\rangle AX - \epsilon X\langle N, K\rangle N, \end{aligned}$$

o que acarreta

$$\nabla_X K^\top = f'(h)X + \epsilon\langle N, K\rangle AX. \tag{2.15}$$

Assim

$$\nabla_X \nabla\langle N, K\rangle = -(\overline{R}(X, K^\top)N)^\top - (\nabla_{K^\top} A)(X) - f'(h)AX - \epsilon\langle N, K\rangle A^2 X,$$

e portanto,

$$\begin{aligned} L_r(\langle N, K\rangle) = &-\sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(E_i, K^\top)N, P_rE_i\rangle \\ &-\sum_{i=1}^{n}\langle (\nabla_{K^\top}A)(E_i), P_rE_i\rangle \\ &- f'(h)\sum_{i=1}^{n}\langle AE_i, P_rE_i\rangle \\ &- \epsilon\langle N, K\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle A^2E_i, P_rE_i\rangle. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ademais, de (2.5) e (2.6) obtém-se

$$\mathrm{tr}(AP_r) = \epsilon c_r H_{r+1} \tag{2.17}$$

e

$$\mathrm{tr}(A^2P_r) = \binom{n}{r+1}\big(nH_1H_{r+1} - (n-r-1)H_{r+2}\big). \tag{2.18}$$

Agora, substituindo (2.7), (2.17) e (2.18) em (2.16) chegamos a

$$\begin{aligned} L_r(\langle N, K\rangle) = &-\sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(E_i, K)N, P_rE_i\rangle - \epsilon\binom{n}{r+1}\langle \nabla H_{r+1}, K\rangle \\ &- \epsilon f'(h)c_rH_{r+1} - \epsilon\binom{n}{r+1}\langle N, K\rangle\cdot \\ &\cdot\big(nH_1H_{r+1} - (n-r-1)H_{r+2}\big). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Para $U \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, podemos escrever

$$U = U^* + \epsilon\langle U, \partial_t\rangle\partial_t$$

onde $U^* = (\pi_M)_*U$ é a projeção do campo U sobre a fibra M. Então

$$\begin{aligned} \overline{R}(U,V)W \;=\; &\overline{R}(U^*, V^*)W^* + \epsilon\big\{\langle U, \partial_t\rangle\overline{R}(\partial_t, V^*)W^* + \langle V, \partial_t\rangle\overline{R}(U^*, \partial_t)W^* \\ &+\langle W, \partial_t\rangle\overline{R}(U^*, V^*)\partial_t + \langle U, \partial_t\rangle\langle V, \partial_t\rangle\langle W, \partial_t\rangle\overline{R}(\partial_t, \partial_t)\partial_t\big\} \\ &+\langle U, \partial_t\rangle\langle V, \partial_t\rangle\overline{R}(\partial_t, \partial_t)W^* \\ &+\langle V, \partial_t\rangle\langle W, \partial_t\rangle\overline{R}(U^*, \partial_t)\partial_t \\ &+\langle U, \partial_t\rangle\langle W, \partial_t\rangle\overline{R}(\partial_t, V^*)\partial_t. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Por outro lado, para $U, V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ temos

$$\begin{aligned}\langle U^*, V^*\rangle &= \langle U - \epsilon\langle U, \partial_t\rangle\partial_t, V - \epsilon\langle V, \partial_t\rangle\partial_t\rangle\\ &= \langle U, V\rangle - \epsilon\langle U, \partial_t\rangle\langle V, \partial_t\rangle.\end{aligned}$$

Assim, utilizando a proposição 7.42 de [34], obtém-se

$\overline{R}(U^*, V^*)\partial_t = 0;$

$\overline{R}(U^*, \partial_t)W^* = -\epsilon\langle U^*, W^*\rangle\frac{f''}{f}(h)\partial_t = -\epsilon\big(\langle U, W\rangle - \epsilon\langle U, \partial_t\rangle\langle W, \partial_t\rangle\big)\frac{f''}{f}(h)\partial_t;$

$\overline{R}(\partial_t, V^*)W^* = \epsilon\langle V^*, W^*\rangle\frac{f''}{f}(h)\partial_t = \epsilon\big(\langle V, W\rangle - \epsilon\langle V, \partial_t\rangle\langle W, \partial_t\rangle\big)\frac{f''}{f}(h)\partial_t;$

$\overline{R}(U^*, \partial_t)\partial_t = \epsilon\frac{f''}{f}(h)U^* = \epsilon\frac{f''}{f}(h)\big(U - \epsilon\langle U, \partial_t\rangle\partial_t\big);$

$\overline{R}(\partial_t, V^*)\partial_t = -\epsilon\frac{f''}{f}(h)V^* = -\epsilon\frac{f''}{f}(h)(V - \epsilon\langle V, \partial_t\rangle\partial_t);$

$\overline{R}(\partial_t, \partial_t) = 0;$

$$\begin{aligned}\overline{R}(U^*, V^*)W^* \;&=\; R_M(U^*, V^*)W^* - \epsilon\left(\frac{f'}{f}(h)\right)^2\big\{\big(\langle U, W\rangle - \epsilon\langle U, \partial_t\rangle\langle W, \partial_t\rangle\big)\cdot\\ &\quad\cdot V^* - \big(\langle V, W\rangle - \epsilon\langle V, \partial_t\rangle\langle W, \partial_t\rangle\big)U^*\big\}.\end{aligned}$$

Substituindo as equações acima em (2.20) e fazendo os devidos cancelamentos chegamos a

$$\begin{aligned}\overline{R}(U, V)W \;&=\; R_M(U^*, V^*)W^* - \epsilon\left((\log f)'(h)\right)^2\left(\langle U, W\rangle V - \langle V, W\rangle U\right)\\ &\quad -(\log f)''(h)\langle W, \partial_t\rangle\left(\langle U, \partial_t\rangle V - \langle V, \partial_t\rangle U\right)\\ &\quad -(\log f)''(h)\left(\langle U, W\rangle\langle V, \partial_t\rangle - \langle U, \partial_t\rangle\langle V, W\rangle\right)\partial_t. \qquad (2.21)\end{aligned}$$

Daí, uma vez que $K^* = 0$ e $\langle N, X\rangle = 0$, segue que

$$\begin{aligned}\overline{R}(X, K)N = \epsilon&\big((\log f)'(h)\big)^2\langle N, K\rangle X\\ &- (\log f)''(h)\langle N, \partial_t\rangle\big(\langle X, \partial_t\rangle K - \langle K, \partial_t\rangle X\big)\\ &+ (\log f)''(h)\langle X, \partial_t\rangle\langle N, K\rangle\partial_t.\end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}\langle X, \partial_t\rangle\langle K, N\rangle\partial_t &= \langle X, \partial_t\rangle\langle f(h)\partial_t, N\rangle\partial_t\\ &= \langle X, \partial_t\rangle\langle N, \partial_t\rangle f(h)\partial_t\\ &= \langle X, \partial_t\rangle\langle N, \partial_t\rangle K,\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}\langle N,\partial_t\rangle\langle K,\partial_t\rangle X &= \langle N,\partial_t\rangle\langle f(h)\partial_t,\partial_t\rangle X\\ &= \langle N, f(h)\partial_t\rangle\langle\partial_t,\partial_t\rangle X\\ &= \epsilon\langle N,K\rangle X.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,K)N = \epsilon\big(&(\log f)'(h)\big)^2\langle N,K\rangle X\\ &+ (\log f)''(h)\big\{-\langle N,\partial_t\rangle\langle X,\partial_t\rangle K + \epsilon\langle N,K\rangle X\\ &+ \langle X,\partial_t\rangle\langle N,\partial_t\rangle K\big\},\end{aligned}$$

e daí

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,K)N &= \epsilon\big\{\big((\log f)'(h)\big)^2\langle N,K\rangle X + (\log f)''(h)\langle N,K\rangle X\big\}\\ &= \epsilon\big\{\big((\log f)'(h)\big)^2 + (\log f)''(h)\big\}\langle N,K\rangle X\\ &= \epsilon\frac{f''}{f}(h)\langle N,K\rangle X.\end{aligned}$$

Agora, como $K = K^\top + \epsilon\langle N,K\rangle N$, temos

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,K^\top)N &= \overline{R}\big(X, K-\epsilon\langle N,K\rangle N\big)N\\ &= \overline{R}(X,K)N - \epsilon\langle N,K\rangle\overline{R}(X,N)N\\ &= \overline{R}(X,K)N + \epsilon\langle N,K\rangle\overline{R}(N,X)N\\ &= \epsilon\frac{f''}{f}(h)\langle N,K\rangle X + \epsilon\langle N,K\rangle\overline{R}(N,X)N\\ &= \epsilon\langle N,K\rangle\left(\frac{f''}{f}(h)X + \overline{R}(N,X)N\right),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\langle\overline{R}(E_i,K^\top)\,N, P_rE_i\rangle = \epsilon\langle N,K\rangle\Bigg\{&\frac{f''}{f}(h)\sum_{i=1}^n\langle P_rE_i,E_i\rangle\\ &+\sum_{i=1}^n\langle\,\overline{R}(\,N\,,E_i)\,N, P_rE_i\,\rangle\Bigg\}.\end{aligned}$$

Então podemos concluir que

$$\sum_{i=1}^n\langle\overline{R}(E_i,K^\top)\,N,P_rE_i\rangle = \epsilon\langle N,K\rangle\left(\frac{f''}{f}(h)\mathrm{tr}(P_r) + \mathrm{tr}(P_r\circ\overline{R}_N)\right),$$

onde $\overline{R}_N : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ é o operador definido por

$$\overline{R}_N(X) = (\,\overline{R}_N(N, X)N\,)^{\top}.$$

Observando que $\mathrm{tr}P_r = c_r H_r$, e substituindo a identidade acima em (2.19), finalizamos a demonstração do lema. □

O caso Lorentziano do resultado abaixo é o corolário 8.2 de [3].

Corolário 2.8. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \epsilon I \times_f M^n$ uma imersão isométrica, com campo normal unitário N e função altura h. Considere o campo $K = f\partial_t$. Então*

$$\begin{aligned}\Delta(\langle N, K\rangle) = -\epsilon\big\{& n\langle\nabla H, K\rangle + nHf'(h) + \langle N, K\rangle|A|^2\\ &+ \langle N, K\rangle(\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) + \epsilon(n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2)\big\}.\end{aligned}$$

Demonstração. Observando que $\mathrm{tr}(\overline{R}_N) = \overline{\mathrm{Ric}}(N, N)$ e fazendo $r = 0$ em (2.16) obtém-se

$$\begin{aligned}\Delta\langle N, K\rangle = -\epsilon\bigg\{& n\langle\nabla H, K\rangle + nf'(h)H\\ &+ \langle N, K\rangle\big(n^2H^2 - n(n-1)H_2\big)\\ &+ \langle N, K\rangle\left(\overline{\mathrm{Ric}}(N, N) + \frac{f''}{f}(h)\right)\bigg\}.\end{aligned} \tag{2.22}$$

A fórmula seguinte relaciona os tensores de Ricci de $\overline{M}$ e M (veja corolário 7.43 de [34])

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Ric}}(X, Y) = \mathrm{Ric}_M(X^*, Y^*) &- \epsilon\big\{n\big((\log f)'(h)\big)^2 + (\log f)''(h)\big\}\langle X, Y\rangle\\ &- (n-1)(\log f)''(h)\langle X, \partial_t\rangle\langle Y, \partial_t\rangle.\end{aligned}$$

Daí segue que

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Ric}}(N, N) + n\frac{f''}{f}(h) &= \mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) - \epsilon\big\{n\big((\log f)'(h)\big)^2 + (\log f)''(h)\big\}\cdot\\ &\quad\cdot\langle N, N\rangle - (n-1)(\log f)''(h)\langle N, \partial_t\rangle^2 + n\frac{f''}{f}(h)\\ &= \mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) - \big\{n\big((\log f)'(h)\big)^2 + (\log f)''(h)\big\}\\ &\quad- (n-1)(\log f)''(h)\big(1 - \epsilon|\nabla h|^2\big) + n\frac{f''}{f}(h)\\ &= \mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) + \epsilon(n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2.\end{aligned}$$

Finalmente, desde que $n^2H^2 - n(n-1)H_2 = |A|^2$, segue o resultado. □

Observe agora que, utilizando (2.21), para $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ temos

$$\begin{aligned}
\overline{R}(N,X)N &= R_M(N^*,X^*)N^* - \epsilon\big((\log f)'(h)\big)^2\big(\langle N,N\rangle X - \langle X,N\rangle N\big)\\
&\quad - (\log f)''(h)\langle N,\partial_t\rangle\big(\langle N,\partial_t\rangle X - \langle X,\partial_t\rangle N\big)\\
&\quad - (\log f)''(h)\big(\langle N,N\rangle\langle X,\partial_t\rangle - \langle N,\partial_t\rangle\langle X,N\rangle\big)\partial_t\\
&= R_M(N^*,X^*)N^* - \big((\log f)'(h)\big)^2 X\\
&\quad - (\log f)''(h)\langle N,\partial_t\rangle\big(\langle N,\partial_t\rangle X - \langle X,\partial_t\rangle N\big)\\
&\quad - \epsilon(\log f)''(h)\langle X,\partial_t\rangle\partial_t\\
&= R_M(N^*,X^*)N^* - \Big\{\big((\log f)'(h)\big)^2 + (\log f)''(h)\langle N,\partial_t\rangle^2\Big\}X\\
&\quad + (\log f)''(h)\langle N,\partial_t\rangle\langle X,\partial_t\rangle N - \epsilon(\log f)''(h)\langle X,\partial_t\rangle\partial_t\\
&= R_M(N^*,X^*)N^* - \Big\{\big((\log f)'(h)\big)^2\\
&\quad + (\log f)''(h)(1-\epsilon|\nabla h|^2)\Big\}X - (\log f)''(h)\langle X,\nabla h\rangle\partial_t\\
&\quad + \epsilon(\log f)''(h)\langle N,\partial_t\rangle\langle X,\nabla h\rangle N\\
&= R_M(N^*,X^*)N^* - \Big\{\big((\log f)'(h)\big)^2\\
&\quad + (\log f)''(h)(1-\epsilon|\nabla h|^2)\Big\}X - \epsilon(\log f)''(h)\langle X,\nabla h\rangle\nabla h\\
&= R_M(N^*,X^*)N^* - \left(\frac{f''}{f}(h) - \epsilon(\log f)''(h)|\nabla h|^2)\right)X\\
&\quad - \epsilon(\log f)''(h)\langle X,\nabla h\rangle\nabla h.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(P_r\circ\overline{R}_N) + \frac{f''}{f}(h)c_rH_r &= \sum_{i=1}^n\langle\overline{R}_N(E_i),P_rE_i\rangle + \frac{f''}{f}(h)c_rH_r\\
&= \sum_{i=1}^n\Big\{\langle R_M(N^*,E_i^*)N^*,P_rE_i\rangle\\
&\quad - \epsilon(\log f)''(h)\big\langle\langle E_i,\nabla h\rangle\nabla h, P_rE_i\big\rangle\Big\}\\
&\quad - \sum_{i=1}^n\left(\frac{f''}{f}(h) - \epsilon(\log f)''(h)|\nabla h|^2)\right)\cdot\\
&\quad \cdot\langle E_i,P_rE_i\rangle + \frac{f''}{f}(h)c_rH_r,
\end{aligned}$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}(P_r \circ \overline{R}_N) + \frac{f''}{f}(h)c_r H_r &= \sum_{i=1}^{n} \langle R_M(N^*, E_i^*)N^*, P_r E_i\rangle \\
&\quad - \epsilon(\log f)''(h)\langle P_r \nabla h, \nabla h\rangle \\
&\quad - \left(\frac{f''}{f}(h) - \epsilon(\log f)''(h)|\nabla h|^2)\right) c_r H_r \\
&\quad + \frac{f''}{f}(h)c_r H_r \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle R_M(N^*, E_i^*)N^*, P_r E_i\rangle \\
&\quad + \epsilon(\log f)''(h)\big\{c_r H_r |\nabla h|^2 \\
&\quad - \langle P_r \nabla h, \nabla h\rangle\big\}.
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Mas, se M tem curvatura seccional constante κ ou $n = \dim M = 2$, então

$$
\big(R_M(N^*, X^*)N^*\big)^{\top} = \kappa\big(\langle N^*, N^*\rangle_M (X^*)^{\top} - \langle N^*, X^*\rangle_M (N^*)^{\top}\big).
$$

Ademais,

$$
\begin{aligned}
(N^*)^{\top} &= N^* - \epsilon\langle N^*, N\rangle N \\
&= N^* - \epsilon\langle N - \epsilon\langle N, \partial_t\rangle\partial_t, N\rangle N \\
&= N^* - N + \langle N, \partial_t\rangle^2 N \\
&= -\epsilon\langle N, \partial_t\rangle\partial_t + \langle N, \partial_t\rangle^2 N \\
&= -\langle N, \partial_t\rangle\big(\epsilon\partial_t - \langle N, \partial_t\rangle N\big) \\
&= -\langle N, \partial_t\rangle\nabla h,
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

$$
\begin{aligned}
(X^*)^{\top} &= X^* - \epsilon\langle X^*, N\rangle N \\
&= X - \epsilon\langle X, \partial_t\rangle\partial_t - \epsilon\langle X - \epsilon\langle X, \partial_t\rangle\partial_t, N\rangle N \\
&= X - \epsilon\langle X, \partial_t\rangle\partial_t + \langle X, \partial_t\rangle\langle N, \partial_t\rangle N \\
&= X - \langle X, \nabla h\rangle\partial_t + \epsilon\langle X, \nabla h\rangle\langle N, \partial_t\rangle N \\
&= X - \epsilon\langle X, \nabla h\rangle(\epsilon\partial_t - \langle N, \partial_t\rangle N) \\
&= X - \epsilon\langle X, \nabla h\rangle\nabla h,
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle N^*, N^*\rangle_M &= \frac{1}{f^2(h)}(\langle N, N\rangle - \epsilon\langle(\pi_I)_*N, (\pi_I)_*N\rangle_I) \\
&= \frac{1}{f^2(h)}(\epsilon - \epsilon\langle -\langle N, \partial_t\rangle\partial_t, -\langle N, \partial_t\rangle\partial_t\rangle_I) \\
&= \frac{1}{f^2(h)}\epsilon(1 - \langle N, \partial_t\rangle^2) \\
&= \frac{1}{f^2(h)}|\nabla h|^2
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\langle N^*, X^*\rangle &= \frac{1}{f^2(h)}(\langle N, X\rangle - \epsilon\langle(\pi_I)_*N, (\pi_I)_*N\rangle_I) \\
&= \frac{1}{f^2(h)}(-\epsilon\langle -\langle N, \partial_t\rangle\partial_t, -\langle X, \partial_t\rangle\partial_t\rangle_I) \\
&= -\frac{1}{f^2(h)}\langle N, \partial_t\rangle\langle X, \nabla h\rangle.
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\big(R_M(N^*, X^*)N^*\big)^\top &= \frac{\kappa}{f^2(h)}|\nabla h|^2(X - \epsilon\langle X, \nabla h\rangle\nabla h) \\
&\quad - \frac{\kappa}{f^2(h)}\langle N, \partial_t\rangle^2\langle X, \nabla h\rangle\nabla h \\
&= \frac{\kappa}{f^2(h)}\big\{|\nabla h|^2 X - \epsilon\langle X, \nabla h\rangle|\nabla h|^2\nabla h \\
&\quad - \langle N, \partial_t\rangle^2\langle X, \nabla h\rangle\nabla h\big\} \\
&= \frac{\kappa}{f^2(h)}\big\{|\nabla h|^2 X - \epsilon\langle X, \nabla h\rangle|\nabla h|^2\nabla h \\
&\quad - (1 - \epsilon|\nabla h|^2)\langle X, \nabla h\rangle\nabla h\big\} \\
&= \frac{\kappa}{f^2(h)}\big\{|\nabla h|^2 X - \langle X, \nabla h\rangle\nabla h\big\},
\end{aligned}
$$

e substituindo a equação acima em (2.23) obtém-se

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(P_r \circ \overline{R}_N) + \frac{f''}{f}(h)c_rH_r &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\kappa}{f^2(h)}\langle |\nabla h|^2 E_i - \langle E_i, \nabla h\rangle \nabla h, P_rE_i\rangle \\
&\quad +\epsilon(\log f)''(h)\big(c_rH_r|\nabla h|^2 - \langle P_r\nabla h, \nabla h\rangle\big) \\
&= \frac{\kappa}{f^2(h)}\big(|\nabla h|^2 \operatorname{tr}(P_r) - \langle P_r\nabla h, \nabla h\rangle\big) \qquad (2.28) \\
&\quad +\epsilon(\log f)''(h)\big(c_rH_r|\nabla h|^2 - \langle P_r\nabla h, \nabla h\rangle\big) \\
&= \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} + \epsilon(\log f)''(h)\right)\big\{c_rH_r|\nabla h|^2 \\
&\quad -\langle P_r\nabla h, \nabla h\rangle\big\}.
\end{aligned}$$

Temos então o corolário abaixo (veja corolário 8.4 de [3] para o caso Lorentziano).

Corolário 2.9. *Sejam $\epsilon I \times_f M^n$ um produto warped cuja fibra Riemanniana M^n tem curvatura seccional constante κ, e $\psi : \Sigma^n \to \epsilon I \times_f M^n$ uma imersão isométrica com campo normal unitário N e função altura h. Considere o campo $K = f\partial_t$. Então, para cada $r = 0, \ldots, n-1$, temos*

$$\begin{aligned}
L_r(\langle N, K\rangle) = -\epsilon\Bigg\{ &\binom{n}{r+1}\langle \nabla H_{r+1}, K\rangle + f'(h)c_rH_{r+1} \\
&+ \binom{n}{r+1}\langle N, K\rangle(nH_1H_{r+1} - (n-r-1)H_{r+2}) \\
&+ \langle N, K\rangle\left(\frac{\kappa}{f^2(h)} + \epsilon(\log f)''(h)\right)\cdot \\
&\cdot \big(c_rH_r|\nabla h|^2 - \langle P_r\nabla h, \nabla h\rangle\big)\Bigg\},
\end{aligned}$$

Para o caso $n = 2$ a hipótese de curvatura constante pode ser retirada, como afirma o corolário abaixo (para o caso Lorentziano veja corolário 8.3 de [3]).

Corolário 2.10. *Seja $\psi : \Sigma^2 \to \epsilon I \times_f M^2$ uma imersão isométrica com campo normal unitário N e função altura h. Então*

$$\begin{aligned}
L_1(\langle N, K\rangle) = -\epsilon\Bigg\{ &\langle \nabla H_2, K\rangle + 2f'(h)H_2 + 2\langle N, K\rangle H_1H_2 \\
&+ \langle N, K\rangle\left(\epsilon\frac{K_M \circ \pi}{f^2(h)} + (\log f)''(h)\right)\langle A\nabla h, \nabla h\rangle\Bigg\},
\end{aligned}$$

onde $\pi = \pi_M \circ \psi : \Sigma \to M^2$ e K_M é a curvatura Gaussiana da fibra Riemanniana M^2.

Demonstração. De (2.16) temos

$$\begin{aligned} L_1(\langle N, K\rangle) = -\epsilon\Big\{ & \langle \nabla H_2, K\rangle + 2f'(h)H_2 + 2\langle N, K\rangle H_1 H_2 \\ & + \langle N, K\rangle \left(\operatorname{tr}(P_1 \circ \overline{R}_N) + \frac{f''}{f}(h) c_1 H_1 \right) \Big\}. \end{aligned}$$

Substituindo (2.28) na expressão acima obtemos

$$\begin{aligned} L_1(\langle N, K\rangle) = -\epsilon\Big\{ & \langle \nabla H_2, K\rangle + 2f'(h)H_2 + 2\langle N, K\rangle H_1 H_2 + \langle N, K\rangle \cdot \\ & \cdot \left(\frac{\kappa_M \circ \pi}{f^2(h)} + \epsilon(\log f)''(h) \right) \big(c_1 H_1 |\nabla h|^2 - \langle P_1 \nabla h, \nabla h\rangle \big) \Big\}. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} c_1 H_1 |\nabla h|^2 - \langle P_1 \nabla h, \nabla h\rangle &= 2H_1 |\nabla h|^2 - \langle 2H_1 \nabla h - \epsilon A \nabla h, \nabla h\rangle \\ &= \epsilon \langle A\nabla h, \nabla h\rangle, \end{aligned}$$

donde segue o resultado. □

2.3 A fórmula para $L_r(h)$

O caso Lorentziano do lema abaixo também é devido a L. J. Alías e A. G. Colares (cf. lema 4.1 de [3]).

Lema 2.11. *Sejam $\psi : \Sigma^n \to \epsilon I \times_f M^n$ uma imersão isométrica, com campo normal unitário N e função altura h, e g uma primitiva de f. Então, para cada $r = 0, \ldots, n-1$, temos*

$$L_r(h) = \epsilon\big\{ (\log f)'(h) \big(c_r H_r - \epsilon\langle P_r \nabla h, \nabla h\rangle \big) + \langle N, \partial_t\rangle c_r H_{r+1} \big\} \tag{2.29}$$

e

$$L_r(g(h)) = \epsilon c_r \big\{ f'(h) H_r + \langle N, K\rangle H_{r+1} \big\}, \tag{2.30}$$

onde, como antes, $K = f\partial_t$.

Demonstração. Dado $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ temos

$$\langle \nabla g(h), X\rangle = d(g \circ h)X = g'(h)dhX = g'(h)\langle \nabla h, X\rangle,$$

donde, utilizando (1.9), obtemos

$$\nabla g(h) = g'(h)\nabla h = \epsilon f(h)\partial_t^\top = \epsilon K^\top.$$

Mas (2.15) nos dá

$$\nabla_X K^\top = f'(h)X + \epsilon\langle N, K\rangle AX.$$

Logo

$$\nabla_X(\nabla g(h)) = \epsilon f'(h)X + \langle N, K\rangle AX, \tag{2.31}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} L_r(g(h)) &= \mathrm{tr}\left(P_r \circ \mathrm{Hess}(g(h))\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(\mathrm{Hess}(g(h)) \circ P_r\right) \\ &= \epsilon f'(h)\,\mathrm{tr}(P_r) + \langle N, K\rangle\,\mathrm{tr}(AP_r) \\ &= \epsilon c_r\left\{f'(h)H_r + \langle N, K\rangle H_{r+1}\right\}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \nabla_X(\nabla h) &= \nabla_X\left(\frac{1}{f(h)}\nabla g(h)\right) \\ &= \frac{1}{f(h)}\left(\epsilon f'(h)X + \langle N, K\rangle AX\right) + X\left(\frac{1}{f(h)}\right)\epsilon f(h)\partial_t^\top \\ &= \epsilon\frac{f'}{f}(h)X + \langle N, \partial_t\rangle AX - \frac{f'}{f}(h)\langle \nabla h, X\rangle \nabla h \\ &= \epsilon(\log f)'(h)\left(X - \epsilon\langle \nabla h, X\rangle \nabla h\right) + \langle N, \partial_t\rangle AX, \end{aligned}$$

e daí segue que

$$\begin{aligned}
L_r(h) &= \operatorname{tr}\big(P_r \circ \operatorname{Hess}(h)\big)\\
&= \operatorname{tr}\big(\operatorname{Hess}(h) \circ P_r\big)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{P_r E_i} \nabla h, E_i\rangle\\
&= \epsilon (\log f)'(h) \Big\{ \operatorname{tr}(P_r) - \epsilon \sum_{i=1}^{n} \langle \langle \nabla h, P_r E_i\rangle \nabla h, E_i\rangle \Big\}\\
&\quad + \langle N, \partial_t\rangle \operatorname{tr}(AP_r)\\
&= \epsilon (\log f)'(h) \Big\{ \operatorname{tr}(P_r) - \epsilon \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla h, \langle P_r \nabla h, E_i\rangle E_i\rangle \Big\}\\
&\quad + \langle N, \partial_t\rangle \operatorname{tr}(AP_r)\\
&= \epsilon \big\{ (\log f)'(h) \big(c_r H_r - \epsilon \langle P_r \nabla h, \nabla h\rangle \big) + \langle N, \partial_t\rangle c_r H_{r+1} \big\}.
\end{aligned}$$

□

2.4 Algumas versões do princípio do máximo

Esta seção tem por objetivo introduzir as ferramentas analíticas que serão necessárias ao longo deste trabalho.

Daqui por diante, denotamos por $\mathcal{L}^1(\Sigma)$ o espaço das funções integráveis a Lebesgue em Σ.

Começamos com a seguinte proposição, que é uma extensão do teorema de Stokes para variedades Riemannianas completas e não compactas, devida a S. T. Yau [41].

Proposição 2.12. *Sejam Σ uma variedade Riemanniana $n-$dimensional completa, não compacta, orientada, e ω uma $(n-1)-$forma diferencial integrável definida em Σ. Então existe uma sequência de domínios $B_i \subset \Sigma$ tal que $\Sigma = \cup_{i\geq 1} B_i$, $B_i \subset B_{i+1}$ e*

$$\lim_{i\to\infty} \int_{B_i} d\omega = 0.$$

Fazendo $\omega = \iota_{\nabla g} d\Sigma$, onde $g : \Sigma \to \mathbb{R}$ é uma função suave, $\iota_{\nabla g}$ é a contração na direção do gradiente de g e $d\Sigma$ é o elemento de volume de Σ, Yau estabeleceu a seguinte extensão do teorema de Hopf

Lema 2.13. *Sejam Σ^n uma variedade Riemanniana $n-$dimensional, completa e orientada, e $u : \Sigma \to \mathbb{R}$ uma função suave. Se u é subharmônica (ou superharmônica) e $|\nabla u| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então u é harmônica.*

Seguindo as mesmas ideias utilizadas por Yau na demonstração do lema 2.13, A. Caminha, P. Sousa e F. Camargo, em [15], estenderam tal lema

Proposição 2.14. *Seja X um campo suave definido em uma variedade Riemanniana $n-$dimensional Σ completa, não compacta e orientada. Suponha que* $\operatorname{div} X$ *não muda de sinal em Σ e $|X| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$. Então* $\operatorname{div} X = 0$.

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\operatorname{div} X \geq 0$ em Σ. Seja ω a $(n-1)-$forma diferencial em Σ dada por $\omega = \iota_X d\Sigma$, isto é, a contração de $d\Sigma$ na direção do campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal em um aberto $U \subset \Sigma$, com formas duais $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, então

$$\iota_X d\Sigma = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \langle X, e_i \rangle \omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \ldots \wedge \omega_n.$$

Desde que as $(n-1)-$formas $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \ldots \wedge \omega_n$ são ortornormais em $\Omega^{n-1}(M)$, temos

$$|\omega|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle X, e_i \rangle^2 = |X|^2.$$

Daí $|\omega| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$ e $d\omega = d(\iota_X d\Sigma) = (\operatorname{div} X) d\Sigma$. Portanto, pela proposição 2.12, existe uma sequência de domínios $B_i \subset \Sigma$ tal que $\Sigma = \cup_{i \geq 1} B_i$, $B_i \subset B_{i+1}$ e

$$\int_{B_i} (\operatorname{div} X) d\Sigma = \int_{B_i} d\omega \xrightarrow{i} 0.$$

Mas desde que $\operatorname{div} X \geq 0$ em Σ, segue que $\operatorname{div} X = 0$. □

Ainda em [15], como consequência da proposição anterior, os autores citados acima provaram a seguinte extensão do lema 2.13

Lema 2.15. *Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço completa, imersa em um espaço tempo RW de curvatura seccional constante, com segunda forma fundamental limitada. Se $u : \Sigma \to \mathbb{R}$ é uma função suave tal que $|\nabla u| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$ e $L_r u$ não muda de sinal em Σ, então $L_r u = 0$ em Σ.*

Demonstração. Se A é a segunda forma fundamental de Σ, então seus autovalores são funções contínuas em Σ. Segue de (2.1) que $|P_r|$ é limitada em Σ se $|A|$ é limitada em Σ. Portanto, deve existir uma constante $c > 0$ tal que $|P_r| \leq c$ em Σ, e assim

$$|P_r \nabla u| \leq |P_r|\,|\nabla u| \leq c|\nabla u| \in \mathcal{L}^1(\Sigma).$$

Como $L_r u = \operatorname{div}(P_r \nabla u)$ não muda de sinal em Σ, a proposição 2.14 nos dá $L_r u = 0$ em Σ. $\square$

O lema abaixo é devido a H. Omori e S. T. Yau. De fato, em [33], H. Omori mostrou que tal resultado é verdadeiro quando Σ tem curvatura seccional limitada inferiormente. Posteriormente, em [40], S. T. Yau mostrou que o resultado ainda é verdadeiro substituindo a limitação inferior da curvatura seccional pela limitação inferior da curvatura de Ricci. Omitimos a demonstração do lema de Omori-Yau por ser muito extensa e fugir dos objetivos deste trabalho, mas uma demonstração detalhada do mesmo pode ser encontrada em [9].

Lema 2.16. *Sejam Σ^n uma variedade Riemanniana $n-$dimensional completa, cuja curvatura de Ricci é limitada inferiormente, e $u : \Sigma \to \mathbb{R}$ uma função suave que também é limitada inferiormente em Σ. Então existe uma sequência de pontos $\{p_k\}$ em Σ tal que*

$$\lim_{k\to\infty} u(p_k) = \inf_{\Sigma} u, \;\; \lim_{k\to\infty} |\nabla u(p_k)| = 0 \;\text{ e }\; \lim_{k\to\infty} \triangle u(p_k) \geq 0.$$

Utilizamos também a seguinte generalização do lema 2.16, devida a A. Caminha e H. F. de Lima. Também omitiremos a demonstração de tal resultado pelas mesmas razões descritas anteriormente.

Lema 2.17. (Corolário 3.4 de [21]) *Sejam Σ^n uma variedade Riemanniana $n-$dimensional, com curvatura seccional $K_\Sigma \geq 0$, imersa isometricamente em uma variedade semi-Riemanniana $(n+1)-$dimensional $\overline{M}^{n+1}$, e $u : \Sigma \to \mathbb{R}$ uma função suave limitada inferiormente. Se P_r é positivo semi-definido e H_r é limitado superiormente, então existe uma sequência de pontos $(p_k)_{k\geq 1}$ em Σ tal que*

(i) $u(p_k) < \inf_{\Sigma} u + \frac{1}{k}$;

(ii) $|\nabla u(p_k)| < \frac{1}{k}$;

(iii) $L_r(u)(p_k) > -\frac{1}{k}$.

Capítulo 3

Hipersuperfícies tipo-espaço totalmente geodésicas em espaços-tempo GRW

Em [16], F. E. C. Camargo e H. F. de Lima obtiveram teoremas de caracterização de hipersuperfícies totalmente geodésicas no espaço anti-de Sitter, impondo uma limitação no ângulo hiperbólico da imersão ou a integrabilidade da norma do gradiente da função altura. Neste capítulo, generalizamos tais teoremas para um espaço GRW satisfazendo a condição forte de convergência nula. Além disso, obtemos um teorema que estima o índice mínimo de nulidade relativa em espaços RW.

3.1 Condição de Convergência Nula

De acordo com a notação estabelecida por S. Montiel em [32], dizemos que um espaço-tempo GRW $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ satisfaz a *condição de convergência nula* se

$$\mathrm{Ric}_M \geq (n-1)\sup_I (f^2(\log f)'')\langle\ ,\ \rangle_M, \tag{3.1}$$

onde Ric_M e $\langle\ ,\ \rangle_M$ são, respectivamente, o tensor de Ricci e a métrica Riemanniana de M induzida pela métrica Lorentziana de $\overline{M}$. Se vale

$$K_M \geq \sup(f^2(\log f)''), \tag{3.2}$$

onde K_M denota a curvatura seccional de M, diz-se que $\overline{M}$ satisfaz a *condição forte de convergência nula.* é claro que se $\overline{M}$ satisfaz (3.2), então também satisfaz (3.1). Além disso, se a curvatura seccional de M é constante, então (3.2) é satisfeita se, e somente se, (3.1) é satisfeita.

Agora, sejam $\psi : \Sigma^n \to -I \times_f M^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço, $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $\{E_1, \cdots, E_n\}$ referencial ortonormal local de $\mathfrak{X}(\Sigma)$. Segue de (1.2) que a curvatura de Ricci de Σ é dada por

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X,X) &= \sum_{i=i}^{n} \langle \overline{R}(X,E_i)X, E_i\rangle + nH\langle AX, X\rangle + \langle AX, AX\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{R}(X,E_i)X, E_i\rangle + \left|AX + \frac{nH}{2}X\right|^2 - \frac{n^2H^2}{4}|X|^2.\end{aligned}$$

Daí temos

$$\mathrm{Ric}(X,X) \geq \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{R}(X,E_i)X, E_i\rangle - \frac{n^2H^2}{4}|X|^2. \tag{3.3}$$

Assim, se a curvatura média H é limitada, então $\mathrm{Ric}(X,X)$ é limitado inferiormente se, e somente se, $\sum_{i=1}^{n} \langle \overline{R}(X,E_i)X, E_i\rangle$ é limitado inferiormente.

Para simplificar a notação, omitimos as composições com a função altura h. De (2.21) temos

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,E_i)X &= R_M(X^*, E_i^*)X^* + ((\log f)')^2(|X|^2E_i - \langle X, E_i\rangle X) \\ &\quad - (\log f)''\langle X, \partial_t\rangle(\langle X, \partial_t\rangle E_i - \langle E_i, \partial_t\rangle X) \\ &\quad - (\log f)''(\langle E_i, \partial_t\rangle |X|^2 - \langle X, \partial_t\rangle\langle E_i, X\rangle)\partial_t,\end{aligned} \tag{3.4}$$

onde $E_i^* = (\pi_M)_* E_i$ e $X^* = (\pi_M)_* X$. Então

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \langle \overline{R}(X,E_i)X, E_i\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^*\rangle \\ &\quad + (n-1)((\log f)')^2|X|^2 \\ &\quad - (n-2)(\log f)''\langle X, \partial_t\rangle^2 \\ &\quad - (\log f)''|\nabla h|^2|X|^2.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Por outro lado, segue da definição de $\langle\ ,\ \rangle$ que

$$\langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^*\rangle = f^2 K_M(X^*, E_i^*)(|X^*|_M^2|E_i^*|_M^2 - \langle X^*, E_i^*\rangle_M^2). \tag{3.6}$$

Mas observe que

$$\begin{aligned}\langle X^*, X^*\rangle_M &= \frac{1}{f^2}\langle X^*, X^*\rangle \\ &= \frac{1}{f^2}\langle X + \langle X, \partial_t\rangle\partial_t, X + \langle X, \partial_t\rangle\partial_t\rangle \\ &= \frac{1}{f^2}(|X|^2 + \langle X, \partial_t\rangle^2),\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\langle X^*, E_i^*\rangle_M = \frac{1}{f^2}(\langle X, E_i\rangle + \langle X, \partial_t\rangle\langle E_i, \partial_t\rangle)$$

e

$$\langle E_i^*, E_i^*\rangle_M = \frac{1}{f^2}(1 + \langle E_i, \partial_t\rangle^2).$$

Logo

$$\begin{aligned}|X^*|_M^2|E_i^*|_M^2 - \langle X^*, E_i^*\rangle_M^2 = \frac{1}{f^4}\big\{&|X|^2 + |X|^2\langle E_i, \partial_t\rangle^2 + \langle X, \partial_t\rangle^2 \\ &- \langle X, E_i\rangle^2 - 2\langle X, E_i\rangle\langle E_i, \partial_t\rangle\langle X, \partial_t\rangle\big\}.\end{aligned}$$

Supondo que é satisfeita a condição forte de convergência nula (3.2), e substituindo a equação acima em (3.6), obtém-se

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^*\rangle \geq (\log f)''\big\{&(n-1)|X|^2 + (n-2)\langle X, \partial_t\rangle^2 \\ &+ |X|^2|\nabla h|^2\big\}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Portanto, agora substituindo (3.7) em (3.5), chegamos a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i\rangle \geq\ & (\log f)''\big\{(n-1)|X|^2 + (n-2)\langle X, \partial_t\rangle^2 \\ & + |X|^2|\nabla h|^2\big\} + (n-1)((\log f)')^2|X|^2 \\ & - (n-2)(\log f)''\langle X, \partial_t\rangle^2 - (\log f)''|\nabla h|^2|X|^2 \\ =\ & (n-1)\frac{f''}{f}|X|^2.\end{aligned}$$

Então segue a proposição abaixo.

Proposição 3.1. *Sejam* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ *um espaço-tempo GRW satisfazendo a condição forte de convergência nula* (3.2)*, e* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço completa, com curvatura média* H *limitada. Se* $\frac{f''}{f}$ *é limitada inferiormente em* Σ*, então a curvatura de Ricci de* Σ *também é limitada inferiormente.*

Observação 3.2. Pela equação (1.7) podemos ver facilmente que espaços-tempo GRW com curvatura seccional constante satisfazem a condição forte de convergência nula (3.2) e, dessa forma, a proposição 3.1 garante que toda hipersuperfície tipo-espaço com curvatura média limitada em tais espaços tem curvatura de Ricci limitada inferiormente.

3.2 Caracterização de hipersuperfícies totalmente geodésicas

Para o que segue, uma região do tipo

$$[t_1, t_2] \times M^n = \{(t, q) \in -I \times_f M^n : t_1 \leq t \leq t_2\}$$

contida em um espaço tempo GRW $-I \times_f M^n$ será denominada *região temporalmente limitada.*

Observação 3.3. Se a hipersuperfície completa com curvatura média limitada $\psi : \Sigma^n \to -I \times_f M^n$ está contida em uma região temporalmente limitada, então é claro que $\frac{f''}{f}$ é limitada. Ademais, se o espaço-tempo GRW satisfaz (3.2), então segue da proposição 3.1 que a curvatura de Ricci de Σ é limitada inferiormente.

Teorema 3.4. *Sejam* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ *um espaço-tempo GRW que satizfaz a condição forte de convergência nula* (3.2)*, e* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço, completa e máxima, contida em uma região temporalmente limitada de* $\overline{M}$*. Se* $|\nabla h|$ *é limitada em* Σ*, então existe uma sequência de pontos* $(p_k)_{k\geq 1}$ *em* Σ *tal que* $\lim_{k\to\infty} |A|(p_k) = 0$*. Em particular, se* H_2 *é constante, então* Σ *é totalmente geodésica.*

Demonstração. Suponha que Σ está orientada pela aplicação de Gauss N que aponta para o futuro, isto é, $\langle N, \partial_t \rangle \leq -1$. Seja $\eta = f(h)\langle N, \partial_t\rangle$. Pelo corolário 2.8 temos

$$\Delta\eta = \eta \left(\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) - (n-1)(\log f)''|\nabla h|^2 + |A|^2\right).$$

Da condição forte de convergência nula segue que

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}_M(N^*,N^*) &\geq (n-1)f^2(\log f)''\langle N^*,N^*\rangle_M\\ &= (n-1)(\log f)''|\nabla h|^2,\end{aligned}$$

onde na última igualdade utilizamos a equação (2.26). Assim,

$$\Delta\eta \leq \eta|A|^2 \leq 0.$$

Temos também

$$|\eta| = f|\langle N,\partial_t\rangle| \leq f\langle N,\partial_t\rangle^2 = f(1+|\nabla h|^2). \tag{3.8}$$

Como f é limitada em Σ, pois a hipersuperfície está contida em uma região temporalmente limitada, e $|\nabla h|$ é limitada em Σ, a equação (3.8) acarreta η também limitada em Σ. Dessa forma, estamos em condições de aplicar o lema 2.16 à função η, o que garante a existência de uma sequência de pontos (p_k) em Σ tal que

$$\lim_{k\to\infty}\eta(p_k) = \inf_{\Sigma}\eta,\ \ \lim_{k\to\infty}|\nabla\eta(p_k)| = 0 \ \text{ e } \lim_{k\to\infty}\triangle\eta(p_k) \geq 0.$$

Consequentemente, temos

$$0 \leq \lim_{k\to\infty}\Delta\eta(p_k) \leq \lim_{k\to\infty}\left(\eta|A|^2\right)(p_k) \leq 0.$$

Agora, desde que $\lim\limits_{k\to\infty}\eta(p_k) = \inf\limits_{\Sigma}\eta < 0$, chegamos a

$$\lim_{k\to\infty}|A|^2(p_k) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\eta}(p_k)\cdot\lim_{k\to\infty}\left(\eta|A|^2\right)(p_k) = 0.$$

Além disso, temos

$$|A|^2 = n^2H^2 - n(n-1)H_2.$$

Assim, na presença da hipótese $H \equiv 0$, H_2 constante torna $|A|$ também constante. Portanto, $|A| \equiv 0$, ou seja, Σ é totalmente geodésica. □

Teorema 3.5. *Sejam* $\overline{M}^{n+1} = -I\times_f M^n$ *um espaço-tempo GRW que satizfaz a condição forte de convergência nula* (3.2), *e* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço, completa e máxima, contida em uma região temporalmente limitada de* $\overline{M}$. *Suponha que a norma da segunda forma fundamental* A *de* ψ *é limitada. Se* $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, *então* Σ *é totalmente geodésica.*

Demonstração. Mais uma vez, seja N a aplicação de Gauss de Σ que aponta para o futuro. Considere $X = \nabla(f\langle N, \partial_t\rangle)$. Uma vez que o campo $K = f\partial_t$ é conforme fechado, para qualquer $Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla\langle N, K\rangle, Y\rangle &= Y(\langle N, K\rangle) \\ &= \langle \overline{\nabla}_Y N, K\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_Y K\rangle \\ &= -\langle K, AY\rangle + f'\langle Y, N\rangle \\ &= -f\langle A(\partial_t^\top), Y\rangle. \end{aligned}$$

Logo

$$|X| = |fA(\partial_t^\top)| \leq f|A||\nabla h|.$$

Consequentemente, desde que f e $|A|$ são limitados, e $|\nabla h|$ é integrável a Lebesgue em Σ, concluímos que X tem norma integrável a Lebesgue em Σ.

Por outro lado, do corolário 2.8 e utilizando a condição forte de convergência nula (3.2), obtém-se

$$\begin{aligned} \Delta\left(f\langle N, \partial_t\rangle\right) &= f\langle N, \partial_t\rangle\left(\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) - (n-1)(\log f)''|\nabla h|^2 + |A|^2\right) \\ &\leq f\langle N, \partial_t\rangle|A|^2 \leq 0, \end{aligned}$$

Logo, pelo lema 2.13, podemos concluir que $\Delta\left(f\langle N, \partial_t\rangle\right) = 0$. Daí $|A| \equiv 0$, ou seja, Σ é totalmente geodésica. $\square$

3.3 Estimando a nulidade relativa em espaços-tempo RW

Seja $\psi : \Sigma^n \to -I \times_f M^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço, com segunda forma fundamental A. De acordo com a notação estabelecida em [24], para $p \in \Sigma$, o *espaço de nulidade relativa* de Σ em p, que será denotado por $\Delta(p)$, é o conjunto

$$\Delta(p) = \{v \in T_p\Sigma; v \in \ker(A_p)\},$$

onde $\ker(A_p)$ denota o núcleo de A_p. O *índice de nulidade relativa* de Σ em p, denotado por $\nu(p)$, é a dimensão de $\Delta(p)$, isto é,

$$\nu(p) = \dim\left(\Delta(p)\right),$$

e o *índice mínimo de nulidade relativa* ν_0 de Σ é definido por

$$\nu_0 = \min_{p\in\Sigma} \nu(p).$$

Nosso próximo resultado estabelece uma estimativa para o índice mínimo de nulidade relativa no caso de hipersuperfícies tipo-espaço completas r-máximas, isto é, com $H_{r+1} = 0$, em um espaço tempo RW.

Teorema 3.6. *Seja $\psi : \Sigma^n \to -I \times_f M^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço, completa e r-máxima, contida em uma região temporalmente limitada de um espaço-tempo RW de curvatura seccional constante. Suponha que a segunda forma fundamental de ψ é limitada e que H_{r+2} não muda de sinal em Σ. Se $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então $\nu_0 \geq n - r$.*

Demonstração. Como estamos supondo que o espaço-tempo RW ambiente $-I \times_f M^n$ tem curvatura seccional constante, as equações (1.7) verificam

$$\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \equiv 0,$$

onde κ é a curvatura seccional da fibra Riemanniana M^n. Daí, pelo corolário 2.9, temos

$$L_r\left(f(h)\langle N, \partial_t\rangle\right) = -(n-r)\binom{n}{r} H_{r+2} f(h)\langle N, \partial_t\rangle.$$

Assim, o fato de H_{r+2} não mudar de sinal em Σ assegura que $L_r\left(f(h)\langle N, \partial_t\rangle\right)$ também não muda de sinal em Σ. Consequentemente, desde que por hipótese temos $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, o lema 2.15 nos dá $L_r\left(f(h)\langle N, \partial_t\rangle\right) = 0$ em Σ, e daí obtemos $H_{r+2} = 0$ em Σ.

Por outro lado, uma vez que Σ é r-máxima, temos $H_{r+1} = 0$ em Σ. Então segue do item (c) da proposição 2.2 que $H_j = 0$ para todo $j \geq r+1$. Portanto, $\nu_0 \geq n - r$. □

Observação 3.7. O caso $r = 0$ do teorema 3.6 corresponde ao teorema 3.5 quando o ambiente é um espaço-tempo RW de curvatura seccional constante. Neste sentido, o teorema 3.6 pode ser visto como uma extensão natural do teorema 3.5 para o contexto de curvaturas médias de ordem superior.

Para o próximo corolário, necessitamos da seguinte proposição (veja proposição 1.2 de [11]).

Proposição 3.8. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{S}_1^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço, com curvatura média constante, e duas curvaturas principais distintas com multiplicidades constantes e iguais a 1 e $n-1$. Então Σ é uma hipersuperfície de rotação.*

Corolário 3.9. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{S}_1^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço, completa e 1-máxima, contida em uma região temporalmente limitada. Suponha que Σ tem curvatura média constante $H \neq 0$ e que H_3 não muda de sinal em Σ. Se $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então Σ é uma hipersuperfície de rotação.*

Demonstração. Pelo teorema 3.6 temos $\nu_0 \geq n-1$. Desde que $|A|^2 = n^2H^2$ e $H \neq 0$, devemos ter, de fato, $\nu_0 = n-1$. Portanto, o operador de forma A possui dois autovalores distintos com multiplicidades iguais a $n-1$ e 1. Então segue da proposição 3.8 que Σ é uma hipersuperfície de rotação. $\square$

Um espaço-tempo RW $-I \times_f M^n$ é *estático* quando a função warping f é constante. Neste caso, podemos supor, sem perda de generalidade, que $f \equiv 1$. Seguindo as ideias de A. Caminha [19] e usando o modelo RW estático do espaço de Minkowski

$$\mathbb{L}^{n+1} \simeq -\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

obtemos a seguinte extensão fraca do teorema de Calabi-Bernstein (veja [14], para $n \leq 4$, e [23], para n qualquer)

Teorema 3.10. *Seja $\psi : \Sigma^n \to -I \times M^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa, imersa em um espaço-tempo RW estático de curvatura seccional constante, com segunda forma fundamental limitada. Suponha que, para algum $r = 0, \ldots, n-2$, H_{r+1} e H_{r+2} não mudam de sinal. Se $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então $\nu_0 \geq n-r$. Além disso, se o espaço ambiente é $\mathbb{L}^{n+1}$ e H_r não se anula em Σ, então por todo ponto de Σ passa um hiperplano $(n-r)-$dimensional de $\mathbb{L}^{n+1}$ contido em Σ.*

Demonstração. Pelo lema 2.11 temos

$$L_r h = -(n-r)\binom{n}{r} H_{r+1}\langle N, \partial_t\rangle.$$

Daí, a hipótese que H_{r+1} não muda de sinal em Σ garante que $L_r h$ também não muda de sinal em Σ. Consequentemente, como estamos mais uma vez supondo $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, o lema 2.15 implica $H_{r+1} = 0$ em Σ. De modo análogo $H_{r+2} = 0$ em Σ. Novamente utilizando o item (c) da proposição 2.2, concluímos que $H_j = 0$ para todo $j \geq r+1$, e daí $\nu_0 \geq n-r$.

Agora, suponha que o espaço-tempo RW é o espaço de Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$. Invocando o teorema 5.3 de [24] (veja também [26]), que é devido a D. Ferus, a distribuição de nulidade relativa $p \mapsto \Delta(p)$ é suave e integrável, com folhas completas e totalmente geodésicas em Σ e em $\mathbb{L}^{n+1}$. Portanto, o resultado segue da caracterização das subvariedades completas e totalmente geodésicas de $\mathbb{L}^{n+1}$ como hiperplanos tipo-espaço. $\square$

Corolário 3.11. *Seja $\psi : \Sigma^n \to -I \times M^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa, imersa em um espaço-tempo RW estático de curvatura seccional constante $\overline{\kappa}$, com segunda forma fundamental limitada. Suponha que a curvatura média H não muda de sinal e que a curvatura escalar S satisfaz $S \leq \overline{\kappa}$ ou $S \geq \overline{\kappa}$. Se $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então Σ é totalmente geodésica. Além disso, se o ambiente é o espaço de Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$, então Σ é um hiperplano.*

Demonstração. Segue da equação (2.2) que $H_2 = \overline{\kappa} - S$ não muda de sinal em Σ. Como estamos supondo que H também não muda de sinal em Σ, do teorema 3.10 obtemos $\nu_0 \geq n$. Como por definição temos $\nu_0 \leq n$, segue que $\nu_0 = n$, e assim Σ é totalmente geodésica. Para o que falta, basta repetir os argumentos utilizados na demonstração do teorema 3.10. $\square$

Capítulo 4

Teoremas tipo-Bernstein em espaços-tempo GRW

Neste capítulo provamos resultados tipo-Bernstein que generalizam um teorema de A. L. Albujer, F. E. C. Camargo e H. F. de Lima (cf. teorema 3.3 de [1]). Seguindo as ideias de A. G. Colares e J. L. Alías, também provamos teoremas que abordam o caso não compacto do teorema 6 de [32], e sua extensão que trata o caso das curvaturas médias de ordem superior H_r (cf. teorema 9.3 de [3]).

4.1 Teoremas de rigidez em espaços-tempo GRW

Em um trabalho de A. L. Albujer, F. E. C. Camargo e H. F. de Lima foi provada uma versão do teorema abaixo (cf. teorema 3.3 de [1]) para espaços-tempo RW $-I \times_f M^n$ satisfazendo a condição de convergência nula (3.1). Aqui, utilizando a proposição 3.1, generalizamos o resultado para espaços-tempo GRW satisfazendo a condição forte de convergência nula. Além disso, fazendo uso da generalização do princípio do máximo de Omori-Yau devida a A. Caminha e H. F. de Lima (cf. lema 2.17), estendemos tal resultado, impondo hipóteses adequadas sobre as curvaturas médias de ordem superior

Teorema 4.1. *Sejam $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW que satisfaz a condição forte de convergência nula* (3.2), *e $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço, completa e com curvatura média constante $H \neq 0$,* *contida em uma região temporalmente limitada. Suponha que*

$$0 \leq H \sup_{\Sigma} \frac{f'}{f}(h) \leq H^2 \tag{4.1}$$

e

$$|\nabla h|^2 \leq \alpha \left| H - \sup_{\Sigma} \frac{f'}{f}(h) \right|^{\beta}, \tag{4.2}$$

onde α e β são constantes positivas. Então Σ é um slice.

Demonstração. Orientemos Σ de modo que $H > 0$, e suponhamos, sem perda de generalidade, que em tal orientação a aplicação de Gauss N aponta para o futuro, isto é, $\langle N, \partial_t \rangle \leq -1$. Pelo corolário 2.8 temos

$$\begin{aligned}
\Delta(f(h)\langle N, \partial_t\rangle) &= nHf'(h) + f(h)\langle N, \partial_t\rangle |A|^2 \\
&\quad + f(h)\langle N, \partial_t\rangle(\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) \\
&\quad - (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2) \\
&\leq f(h)\langle N, \partial_t\rangle(|A|^2 - nH \sup_{\Sigma} \frac{f'}{f}(h)) \\
&\quad + f(h)\langle N, \partial_t\rangle\big\{ \mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) \\
&\quad - (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2\big\} \\
&\leq f(h)\langle N, \partial_t\rangle(|A|^2 - nH^2) \\
&\quad + f(h)\langle N, \partial_t\rangle(nH^2 - nH \sup_{\Sigma} \frac{f'}{f}(h)) \\
&\quad + f(h)\langle N, \partial_t\rangle\big\{ \mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) \\
&\quad - (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2\big\}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Mas da desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que

$$|A|^2 \geq nH^2, \tag{4.4}$$

e da condição (3.2) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) &\geq (n-1)f^2(\log f)''(h)\langle N^*, N^*\rangle_M \\
&= (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Assim, substituindo (4.1), (4.4) e (4.5) em (4.3), concluímos que

$$\begin{aligned}
\Delta(f(h))\langle N, \partial_t\rangle &\leq f(h)\langle N, \partial_t\rangle(|A|^2 - nH^2) \\
&\quad + nf(h)\langle N, \partial_t\rangle(H^2 - H \sup_{\Sigma} \frac{f'}{f}(h)) \leq 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Desde que $\langle N, \partial_t\rangle^2 = 1 + |\nabla h|^2$ e, além disso, Σ está contida em uma região temporalmente limitada, segue de (4.2) que

$$\inf_{\Sigma} f(h)\langle N, \partial_t\rangle$$

existe e é um número negativo.

Por outro lado, da proposição 3.1 temos que a curvatura de Ricci de Σ é limitada inferiormente. Daí, podemos aplicar o lema 2.16 à função $f(h)\langle N, \partial_t\rangle$ para obtermos uma sequência $p_k \in \Sigma$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \Delta(f(h(p_k))\langle N, \partial_t\rangle(p_k)) \geq 0$$

e

$$\lim_{k\to\infty} \langle N, \partial_t\rangle(p_k) = \inf_{\Sigma} f(h)\langle N, \partial_t\rangle.$$

Consequentemente, desde que $H \neq 0$, obtemos de (4.6)

$$H = \sup_{p\in\Sigma} \frac{f'}{f}(h(p)).$$

Portanto, novamente utilizando a hipótese (4.2), podemos concluir que $|\nabla h| \equiv 0$, ou seja, Σ é um slice. $\square$

Se consideramos o aberto $(0, +\infty) \times_{\operatorname{senh} t} \mathbb{H}^n \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ e o modelo de produto warped para o espaço anti-de Sitter, ambos definidos na seção 1.3, seguem os corolários

Corolário 4.2. *Seja $\psi : \Sigma^n \to -(0, +\infty) \times_{\sinh t} \mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa, com curvatura média constante $H \neq 0$ e tal que*

$$\psi(\Sigma) \subset \{(t, x) \in -(0, +\infty) \times_{\sinh t} \mathbb{H}^n; t \leq \bar{t}\}, \tag{4.7}$$

para alguma constante $\bar{t} > 0$. Se

$$0 \leq H \sup_{p\in\Sigma} \operatorname{cotgh}(h(p)) \leq H^2$$

e

$$|\nabla h|^2 \leq \alpha \left| H - \sup_{p\in\Sigma} \operatorname{cotgh}(h(p)) \right|^{\beta},$$

para algum par de constantes positivas α e β, então Σ é isométrico a $\mathbb{H}^n$.

Demonstração. Segue de (3.3) que a curvatura de Ricci de Σ é tal que

$$\mathrm{Ric}(X,X) \geq \left((n-1) - \frac{n^2H^2}{4}\right)|X|^2,$$

para todo campo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Usando a observação 3.2 e notando que na demonstração do teorema 4.1, exceto pela limitação inferior da curvatura de Ricci, o fato da hipersuperfície estar contida em uma região temporalmente limitada é usado apenas para garantir que o número $\inf_\Sigma f(h)\langle N, \partial_t\rangle$ existe e é negativo, o corolário está provado, pois, neste caso, a existência e negatividade de tal número são consequências de (4.7). $\square$

Corolário 4.3. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}_1^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço do espaço anti-de Sitter, completa e com curvatura média constante $H \neq 0$. Se*

$$0 \leq -H \sup_{p\in\Sigma} \mathrm{tg}(h(p)) \leq H^2$$

e

$$|\nabla h|^2 \leq \alpha \left| H + \sup_{p\in\Sigma} \mathrm{tg}(h(p)) \right|^\beta$$

para algum par de constantes positivas α e β, então Σ é isométrico a $\mathbb{H}^n$.

Demonstração. Considere o modelo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times_{\cos t} \mathbb{H}^n$ do espaço anti-de Sitter. Usando (3.3), obtemos que a curvatura de Ricci em Σ satisfaz

$$\mathrm{Ric}(X,X) \geq \left(-(n-1) - \frac{n^2H^2}{4}\right)|X|^2,$$

para todo campo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Consequentemente, se Σ tem curvatura média constante, sua curvatura de Ricci é limitada inferiormente. Portanto, da prova do teorema 4.1 e da observação 3.2, segue o resultado. $\square$

Agora, obtemos resultados análogos ao teorema 4.1 para o caso H_r constante, $r \geq 2$.

Teorema 4.4. *Sejam $\overline{M}^3 = -I \times_f M^2$ um espaço-tempo GRW que satisfaz a condição de convergência nula (3.1), e $\psi : \Sigma^2 \to -I \times_f M^2$ uma superfície tipo-espaço completa, com curvatura Gaussiana $K_\Sigma \geq 0$ e contida em uma* *região temporalmente limitada* $[t_1, t_2] \times M^2$*. Suponha que* $H_2 > 0$ *é constante e que* H *é limitada superiormente em* Σ*. Se*

$$H^2 \geq \left(\frac{f'}{f}(h)\right)^2 \tag{4.8}$$

e

$$|\nabla h| \leq \inf_\Sigma \left| H - \frac{|f'|}{f}(h) \right|, \tag{4.9}$$

então Σ^2 *é um slice.*

Demonstração. De acordo com o lema 2.4, podemos escolher N para que se tenha $H > 0$, obtendo assim P_1 positivo definido. Podemos supor que em tal escolha N aponta para o futuro, isto é, $\langle N, \partial_t \rangle \leq -1$. A condição de convergência nula (3.1) e o fato de $A = P_1 - 2HI = P_1 - (\operatorname{tr} P_1)I$ ser negativo definido implicam

$$-f(h)\langle N, \partial_t \rangle \left(\frac{K_M}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) \langle A\nabla h, \nabla h \rangle \leq 0,$$

onde K_M é a curvatura seccional da fibra Riemanniana M. Além disso, uma vez que $H_2 > 0$ em Σ, temos

$$f'(h)H_2 \leq -\frac{|f'|}{f}(h)H_2 f(h)\langle N, \partial_t \rangle.$$

Assim, do corolário 2.10 e de (4.8), segue que

$$\begin{aligned} L_1(f(h)\langle N, \partial_t \rangle) &\leq 2f'(h)H_2 + 2HH_2 f(h)\langle N, \partial_t \rangle \\ &\leq 2H_2 f(h)\langle N, \partial_t \rangle \left(H - \frac{|f'|}{f}(h) \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, desde que $\langle N, \partial_t \rangle^2 = 1 + |\nabla h|^2$, segue de (4.9) e do fato de $f(h)$ ser limitada na região $[t_1, t_2] \times M^2$ que $f(h)\langle N, \partial_t \rangle$ é limitado em Σ. Como P_1 é positivo definido e, por hipótese, H é limitada superiormente, estamos em condições de utilizar o lema 2.17 e, consequentemente, garantir a existência de uma sequência de pontos $(p_k)_{k \geq 1}$ em Σ tal que

$$f(h)\langle N, \partial_t \rangle(p_k) < \inf_\Sigma f(h)\langle N, \partial_t \rangle + \frac{1}{k} \ \text{ e } \ L_1(f(h)\langle N, \partial_t \rangle)(p_k) > -\frac{1}{k}.$$

Passando a subsequências, se necessário, obtém-se

$$\lim_{k\to\infty} f(h)\langle N,\partial_t\rangle(p_k) < 0 \text{ e } \lim_{k\to\infty} L_1(f(h)\langle N,\partial_t\rangle)(p_k) = 0.$$

Daí,

$$\lim_{k\to\infty}\left(H - \frac{|f'|}{f}(h)\right)(p_k) = 0,$$

e juntando-se a isto a hipótese (4.9), chegamos a $\nabla h \equiv 0$. Portanto, Σ é um slice. □

Observação 4.5. Com a mesma argumentação, o teorema 4.4 ainda vale com a substituição das hipóteses (4.8) e (4.9), respectivamente, por

$$H_2^{1/2} \geq \frac{|f'|}{f}(h)$$

e

$$|\nabla h| \leq \inf_{\Sigma} |H_2^{1/2} - \frac{|f'|}{f}(h)|.$$

Teorema 4.6. *Sejam $\overline{M}^n = -I \times_f M^n$ um espaço-tempo RW que satisfaz a condição de convergência nula (3.1), e $\psi : \Sigma^n \to -I \times_f M^n$ uma hiper-superfície tipo-espaço, completa e com curvatura seccional $K_\Sigma \geq 0$, contida em uma região temporalmente limitada $[t_1, t_2] \times M^n$. Suponha que $H_2 > 0$ é constante e que H é limitada em Σ. Se*

$$H_2^{1/2} \geq \frac{|f'|}{f}(h) \tag{4.10}$$

e

$$|\nabla h| \leq \inf_{\Sigma}\left(H_2^{1/2} - \frac{|f'|}{f}(h)\right), \tag{4.11}$$

então Σ é um slice.

Demonstração. Como no teorema anterior, podemos escolher N de modo que $H > 0$ e P_1 seja positivo definido, e supomos que nesta escolha N aponta para o futuro. Desde que H_2 é constante, o corolário 2.9 nos dá

$$\begin{aligned} L_1(f(h)\langle N,\partial_t\rangle) &= n(n-1)H_2 f'(h) \\ &+ \binom{n}{2} f(h)\langle N,\partial_t\rangle\left(nHH_2 - (n-2)H_3\right) \\ &+ f(h)\langle N,\partial_t\rangle\left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\ln f)''(h)\right)\cdot \\ &\cdot\left(n(n-1)H|\nabla h|^2 - \langle P_1\nabla h, \nabla h\rangle\right), \end{aligned}$$

onde κ é a curvatura seccional da fibra Riemanniana M. Uma vez que $\operatorname{tr} P_1 = n(n-1)H$ e P_1 é positivo definido, temos

$$n(n-1)H|\nabla h|^2 - \langle P_1 \nabla h, \nabla h\rangle \geq 0,$$

e juntando-se a isto a condição de convergência nula (3.1), obtemos

$$\begin{aligned} L_1(f(h)\langle N, \partial_t\rangle) &\leq n(n-1)H_2 f'(h) \\ &\quad + \binom{n}{2} f(h)\langle N, \partial_t\rangle \left(nHH_2 - (n-2)H_3\right). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Mas do item (a) da proposição 2.2 segue que

$$H_3 \leq \frac{H_2^2}{H},$$

e quando combinamos $H^2 \geq H_2$ com a desigualdade acima, obtemos

$$HH_2 - H_3 \geq \frac{H_2}{H}(H^2 - H_2) \geq 0,$$

de modo que

$$\binom{n}{2}(nHH_2 - (n-2)H_3) \geq n(n-1)HH_2 \geq n(n-1)H_2^{3/2}. \tag{4.13}$$

Substituindo (4.13) em (4.12) obtém-se

$$L_1(f(h)\langle N, \partial_t\rangle) \leq n(n-1)H_2 f(h)\langle N, \partial_t\rangle \left(H_2^{1/2} - \frac{|f'|}{f}(h)\right) \leq 0.$$

Por argumentos análogos aos utilizados na demonstração do teorema 4.4, trocando (4.9) por (4.11), estamos em condições de aplicar o lema 2.17. Então existe uma sequência de pontos $(p_k)_{k\geq 1}$ em Σ tal que, passando a subsequências se necessário,

$$\lim_{k\to\infty} f(h)\langle N, \partial_t\rangle(p_k) < 0 \ \text{ e } \ \lim_{k\to\infty} L_1(f(h)\langle N, \partial_t\rangle)(p_k) = 0.$$

Daí,

$$\lim_{k\to\infty} \left(H_2^{1/2} - \frac{|f'|}{f}(h)\right)(p_k) = 0,$$

e assim, utilizando a hipótese (4.11), chegamos a $|\nabla h| \equiv 0$, ou seja, Σ é um slice. $\square$

Teorema 4.7. *Sejam* $\overline{M}^n = -I \times_f M^n$ *um espaço-tempo RW que satisfaz a condição de convergência nula* (3.1), *e* $\psi : \Sigma^n \to -I \times_f M^n$ *uma hipersuperfície tipo-espaço, completa e com curvatura seccional* $K_\Sigma \geq 0$, *contida em uma região temporalmente limitada* $[t_1, t_2] \times M^n$. *Suponha que* $H_{r+1} > 0$ *é constante e que* H_r *é limitada superiormente em* Σ. *Suponha ainda que* $f(h)$ *atinge um mínimo local em um ponto* $p \in \Sigma$ *tal que* $f'(h(p)) \neq 0$,

$$H_{r+1}^{1/(r+1)} \geq \frac{|f'|}{f}(h) \tag{4.14}$$

e

$$|\nabla h| \leq \inf_\Sigma \left(H_{r+1}^{1/(r+1)} - \frac{|f'|}{f}(h) \right). \tag{4.15}$$

Então Σ *é um slice.*

Demonstração. Combinando os lemas 2.3 e 2.5, temos P_r positivo definido e $H_r > 0$ para uma escolha adequada de N. Supomos mais uma vez que em tal escolha N aponta para o futuro. Uma vez que H_{r+1} é constante, o corolário 2.9 nos dá

$$\begin{aligned} L_r(f(h)\langle N, \partial_t \rangle) = {} & (n-r)\binom{n}{r} H_{r+1} f'(h) \\ & + \binom{n}{r+1} f(h)\langle N, \partial_t \rangle \left(nHH_{r+1} - (n-r-1)H_{r+2}\right) \\ & + f(h)\langle N, \partial_t \rangle \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) \cdot \\ & \cdot \left((n-r)\binom{n}{r} H_r |\nabla h|^2 - \langle P_r \nabla h, \nabla h \rangle \right), \end{aligned}$$

onde κ é a curvatura seccional da fibra Riemanniana M. Da condição de convergência nula (3.1) e da positividade de P_r obtemos

$$\begin{aligned} L_r(f(h)\langle N, \partial_t \rangle) \leq {} & (n-r)\binom{n}{r} H_{r+1} f'(h) \\ & + \binom{n}{r+1} f(h)\langle N, \partial_t \rangle \cdot \\ & \cdot \big(nHH_{r+1} - (n-r-1)H_{r+2}\big). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Por outro lado, segue do item (a) da proposição 2.2 que

$$H_{r+2} \leq \frac{H_{r+1}^2}{H_r}.$$

Agora, desde que $H_{r+1} > 0$ em Σ e o lema 2.3 garante a existência de um ponto elíptico em Σ, então o lema 2.5 nos dá $H_1, H_2, \ldots, H_r, H_{r+1} > 0$. Daí o item (b) da proposição 2.2 implica

$$H_1 \geq \sqrt{H_2} \geq \ldots \geq \sqrt[r]{H_r} \geq \sqrt[r+1]{H_{r+1}} > 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} HH_{r+1} - H_{r+2} &\geq \frac{H_{r+1}}{H_r}\big(HH_r - H_{r+1}\big) \\ &\geq \frac{H_{r+1}}{H_r}\big(HH_r - H_r^{(r+1)/r}\big) \\ &= H_{r+1}\big(H - H_r^{1/r}\big) \geq 0, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\binom{n}{r+1}(nHH_{r+1} - (n-r-1)H_{r+2}) \geq (r+1)\binom{n}{r+1}H_{r+1}^{(r+2)/(r+1)}.$$

Aplicando a última desigualdade a (4.16) obtém-se

$$\begin{aligned} L_r(f(h)\langle N, \partial_t\rangle) \leq (n-r)\binom{n}{r} f(h)\langle N, \partial_t\rangle H_{r+1}\cdot \\ \cdot\left(H_{r+1}^{1/(r+1)} - \frac{|f'|}{f}(h)\right) \leq 0. \end{aligned}$$

Como P_r é positivo definido e H_r é limitada superiormente, argumentos análogos aos utilizados na demonstração do teorema 4.6 garantem a existência de uma sequência de pontos $(p_k)_{k\geq 1}$ em Σ tal que

$$\lim_{k\to\infty}\left(H_{r+1}^{1/(r+1)} - \frac{|f'|}{f}(h)\right)(p_k) = 0.$$

Concluímos de (4.15) que Σ é um slice. $\square$

Considere o modelo de produto warped para o steady state space $\mathcal{H}^{n+1} = -\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$. Pelo teorema 4.7 e pela observação 3.2, obtemos uma espécie de extensão do teorema 4.5 de [22].

Corolário 4.8. *Seja* $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^n$ *uma hipersuperfície tipo-espaço completa, com curvatura seccional não negativa, e tal que* $\psi(\Sigma) \subset \{(t,x) \in -\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n; t \leq \bar{t}\}$*, onde* $\bar{t}$ *é um número real positivo. Suponha que* $H_{r+1} \geq 1$ *é constante,* H_r *é limitada e que* h *atinge um mínimo em* Σ*. Se*

$$|\nabla h| \leq H_{r+1}^{1/(r+1)} - 1,$$

então Σ *é isométrico a* $\mathbb{R}^n$.

4.2 Umbilicidade de hipersuperfícies em espaços-tempo GRW

S. Montiel [32] provou, utilizando fórmulas tipo-Minkowski, que as únicas hipersuperfícies tipo-espaço compactas, com curvatura média constante, imersas em um espaço-tempo GRW que satisfaz a condição de convergência nula (3.1) são os slices, a menos do caso onde o espaço-tempo GRW é isométrico ao espaço de de Sitter em uma vizinhança da hipersuperfície. Em [3], L. J. Alías e A. G. Colares reobtiveram tal resultado utilizando o princípio do máximo de Hopf. Nesta seção, provamos teoremas análogos para hipersuperfícies completas não necessariamente compactas imersas em ambientes GRW utilizando a versão do princípio do máximo tipo-Hopf, já utilizada neste trabalho, devida a S. T. Yau, bem como sua extensão a operadores L_r de A. Caminha, P. Sousa e F. E. C. Camargo.

Teorema 4.9. *Sejam* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ *um espaço-tempo GRW satisfazendo a condição de convergêcia nula* (3.1)*, e* $\psi : \Sigma \to \overline{M}^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço completa, com curvatura média constante e segunda forma fundamental limitada, tal que* $f(h)$ *é limitada em* Σ*. Se* $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$*, então* Σ *é totalmente umbílica. Se a desigualdade em* (3.1) *é estrita, então* Σ *é um slice.*

Demonstração. Sejam N a aplicação de Gauss em Σ apontando para o futuro e $\phi = Hg(h) + f(h)\langle N, \partial_t\rangle \in \mathcal{D}(\Sigma)$, onde g é uma primitiva da função warping f. Desde que H é constante, segue do corolário 2.8 e do lema 2.11 que

$$\begin{aligned}\Delta\phi = f(h)\langle N, \partial_t\rangle(|A|^2 - nH^2 + \mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) \\ - (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2).\end{aligned} \tag{4.17}$$

Mas, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos $|A|^2 - nH^2 \geq 0$ em Σ, com igualdade nos pontos umbílicos. Além disso, da condição de convergência nula (3.1), temos também

$$\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) - (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2 \geq 0,$$

e desde que $\langle N, \partial_t \rangle < 0$ em Σ, (4.17) acarreta $\Delta\phi \geq 0$ em Σ.

Agora, o gradiente de ϕ é dado por

$$\nabla\phi = Hf(h)\nabla h + \nabla\left(f(h)\langle N, \partial_t\rangle\right).$$

Ademais, o cálculo do gradiente de $\langle N, K\rangle$, onde $K = f\partial_t$, feito na prova do teorema 3.5, nos dá

$$\langle \nabla\langle N, K\rangle, Y\rangle = -f\langle A(\partial_t^\top), Y\rangle,$$

para todo $Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Consequentemente

$$|\nabla\langle N, K\rangle| = |fA(\partial_t^\top)| \leq f|A||\nabla h|,$$

e assim $\nabla\phi \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$. Logo, podemos aplicar o lema 2.13 e concluir que ϕ é harmônica. Então $|A|^2 - nH^2 = 0$, ou seja, Σ é totalmente umbílica. Também temos

$$\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) - (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2 = 0, \tag{4.18}$$

e se a desigualdade (3.1) é estrita, então (4.19) é equivalente a $N^* \equiv 0$ em Σ. Daí $|\nabla h| \equiv 0$, ou seja, Σ é um slice. $\square$

Segue do teorema 4.9 a seguinte extensão do teorema 3.2 de [16]

Corolário 4.10. *Seja $\psi : \Sigma^n \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times_{\cos t} \mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa, com curvatura média constante e curvatura escalar limitada. Se $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então Σ é totalmente umbílica.*

Observação 4.11. Em [29], T. Ishihara provou que uma hipersuperfície tipo-espaço, completa e máxima, imersa em $\mathbb{H}_1^{n+1}$, deve ter o quadrado da segunda forma fundamental limitado superiormente por n. Ademais, as únicas hipersuperfícies para as quais vale a igualdade são os cilindros hiperbólicos. Um cilindro hiperbólico no espaço anti-de Sitter é isométrico ao produto $\mathbb{H}^m\left(-\frac{n}{m}\right) \times \mathbb{H}^{n-m}\left(-\frac{n}{n-m}\right)$, $1 \leq m \leq n-1$.

Teorema 4.12. *Sejam $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$ um espaço-tempo RW de curvatura seccional constante, e $\psi : \Sigma \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa, contida em uma região temporalmente limitada $[t_1, t_2] \times M^n$ na qual $f' \neq 0$, com segunda forma fundamental limitada. Suponha que H_{r+1} é constante para algum $1 \leq r \leq n-1$, e que $f(h)$ atinge um mínimo local em um ponto $p \in \Sigma$. Se $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então Σ é totalmente umbílica.*

Demonstração. Escolhemos N apontando para o futuro e supomos, sem perda de generalidade, $f'(h) > 0$ em Σ. O lema 2.3 garante a existência de um ponto elíptico com curvaturas principais negativas. Daí temos também $H_{r+1} > 0$, e então podemos definir $\phi = H_{r+1}^{1/(r+1)} g(h) + f(h)\langle N, \partial_t\rangle \in \mathcal{D}(\Sigma)$, onde g é uma primitiva da função warping f. Desde que H_{r+1} é constante e a curvatura da fibra Riemanniana κ satisfaz (1.7), utilizando o corolário 2.9 e o lema 2.11 obtém-se

$$\begin{aligned} L_r\phi = {} & (r+1)\binom{n}{r+1} f'(h)(H_{r+1} - H_{r+1}^{1/(r+1)} H_r) \\ & + \binom{n}{r+1} f(h)\langle N, \partial_t\rangle \cdot \\ & \cdot \Big(nHH_{r+1} - (n-r-1)H_{r+2} - (r+1)H_{r+1}^{(r+2)/(r+1)}\Big) \end{aligned} \tag{4.19}$$

Agora, da demonstração do teorema 4.7 obtemos

$$H_1 \geq \sqrt{H_2} \geq \ldots \geq \sqrt[r]{H_r} \geq \sqrt[r+1]{H_{r+1}} > 0,$$

de modo que

$$H_{r+1} - H_{r+1}^{1/(r+1)} H_r = H_{r+1}^{1/(r+1)}(H_{r+1}^{r/(r+1)} - H_r) \leq 0. \tag{4.20}$$

Também decorre da demonstração do teorema supracitado que

$$nHH_{r+1} - (n-r-1)H_{r+2} - (r+1)H_{r+1}^{(r+2)/(r+1)} \geq 0. \tag{4.21}$$

As desigualdades (4.20) e (4.21), juntamente com $\langle N, \partial_t\rangle < 0$ e $f'(h) > 0$ em Σ, acarretam $L_r\phi \leq 0$ em Σ.

Por outro lado, como no teorema 4.9, pode-se verificar que $|\nabla\phi| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$. Então o lema 2.15 implica $L_r\phi = 0$ em Σ, e daí vale a igualdade em (4.20). Portanto, novamente pelo item (a) da proposição 2.2, segue a umbilicidade de Σ. □

Segue do teorema 4.12, da classificação das hipersuperfícies totalmente umbílicas do espaço de de Sitter (cf. [31], Example 1) e do teorema 3.1 de [17] o seguinte

Corolário 4.13. *Seja $\psi : \Sigma \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa, contida em uma região temporalmente limitada e com segunda forma fundamental limitada. Suponha que para algum $1 \leq r \leq n-1$, H_{r+1} é constante. Se h atinge um mínimo local em algum ponto $p \in \Sigma$ e $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então $H_{r+1} = 1$ e Σ é isométrica a $\mathbb{R}^n$.*

Capítulo 5

Teoremas tipo-Bernstein em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$

5.1 Rigidez de hipersuperfícies em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$

Nesta seção, consideramos $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície com curvatura média constante e o modelo do semi-espaço superior para o espaço hiperbólico $n-$dimensional, isto é,

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$$

munido da métrica completa

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{H}^n} = \frac{1}{x_n^2}(dx_1^2 + \cdots + dx_n^2).$$

Apresentamos agora o principal resultado deste capítulo.

Teorema 5.1. *Seja $\psi : \Sigma \to \mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície completa, com segunda forma fundamental limitada e curvatura média constante H. Suponha que o fecho da aplicação de Gauss está contido em um hemisfério aberto e que a função altura h satisfaz*

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{\alpha}{n-1}|A|^2, \tag{5.1}$$

para alguma constante $0 < \alpha < 1$. Então Σ é um slice.

Demonstração. Desde que o fecho da imagem da aplicação de Gauss de Σ está contido em um hemisfério aberto, podemos escolher N tal que $\langle N, \partial_t \rangle \geq \delta > 0$. Daí segue que

$$\inf_{p \in \Sigma} \langle N, \partial_t \rangle(p)$$

existe e é um número positivo.

Por outro lado, desde que

$$\begin{aligned}\langle N^*, N^* \rangle &= \langle N - \langle N, \partial_t \rangle \partial_t, N - \langle N, \partial_t \rangle \partial_t \rangle \\ &= 1 - \langle N, \partial_t \rangle^2,\end{aligned}$$

segue do corolário 2.8 e da equação (1.10) que

$$\begin{aligned}\Delta \langle N, \partial_t \rangle &= -\left(\mathrm{Ric}_{\mathbb{H}^n}(N^*, N^*) + |A|^2\right) \langle N, \partial_t \rangle \\ &= -\left(-(n-1)|\nabla h|^2 + |A|^2\right) \langle N, \partial_t \rangle \\ &\leq -(1-\alpha)|A|^2 \langle N, \partial_t \rangle \leq 0,\end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue da hipótese (5.1).

Agora, afirmamos que a curvatura de Ricci de Σ é limitada inferiormente. De fato, se $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $\{E_1, \cdots, E_n\}$ é um referencial ortonormal local de $\mathfrak{X}(\Sigma)$, então segue de (1.2) que

$$\mathrm{Ric}_\Sigma(X, X) = \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i \rangle + nH \langle AX, X \rangle - \langle AX, AX \rangle.$$

Assim,

$$\mathrm{Ric}_\Sigma(X, X) \geq \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i \rangle - \left(n|H||A| + |A|^2\right) |X|^2.$$

Mas

$$\langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i \rangle = -(\langle X^*, X^* \rangle_{\mathbb{H}^n} \langle E_i^*, E_i^* \rangle_{\mathbb{H}^n} - \langle X^*, E_i^* \rangle^2_{\mathbb{H}^n}),$$

onde $X^* = X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t$ e $E_i^* = E_i - \langle E_i, \partial_t \rangle \partial_t$ são as são as projeções dos campos X e E_i sobre $\mathbb{H}^n$ respectivamente. Então, utilizando que $\nabla h = \partial_t^\top$, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i \rangle &= -(n-1)|X|^2 + |\nabla h|^2 |X|^2 + (n-2)\langle X, \nabla h \rangle^2 \\ &\geq -(n-1)|X|^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathrm{Ric}_\Sigma(X, X) \geq -\left((n-1) + n|H||A| + |A|^2\right)|X|^2, \tag{5.2}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, e desde que estamos supondo que H é constante e que a norma da segunda forma fundamental é limitada, nossa afirmação está provada.

Podemos então aplicar o lema 2.16 à função suporte $\langle N, \partial_t \rangle$, e assim garantir a existência de uma sequência de pontos $p_k \in \Sigma$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \Delta\langle N, \partial_t\rangle(p_k) \geq 0 \;\text{ e }\; \lim_{k\to\infty} \langle N, \partial_t\rangle(p_k) = \inf_{p\in\Sigma} \langle N, \partial_t\rangle.$$

Consequentemente

$$\lim_{k\to\infty} \langle N, \partial_t\rangle^2(p_k) = \inf_{p\in\Sigma} \langle N, \partial_t\rangle^2,$$

e de (5.2) segue que

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \Delta\langle N, \partial_t\rangle(p_k) \leq -(1-\alpha) \lim_{k\to\infty} |A|^2(p_k) \inf_{p\in\Sigma} \langle N, \partial_t\rangle \leq 0.$$

Daí, desde que $\inf_{p\in\Sigma}\langle N, \partial_t\rangle > 0$, segue que

$$\lim_{k\to\infty} |A|^2(p_k) = 0.$$

Agora, mais uma vez utilizando a hipótese (5.1), obtemos

$$\lim_{k\to\infty} |\nabla h|^2(p_k) = 0,$$

e novamente utilizando (1.10)

$$\inf_{p\in\Sigma} \langle N, \partial_t\rangle^2 = \lim_{k\to\infty} \langle N, \partial_t\rangle^2(p_k) = 1.$$

Mas $\langle N, \partial_t\rangle^2 \leq 1$, e então $\langle N, \partial_t\rangle^2 \equiv 1$. Portanto, Σ é um slice. $\square$

Observando que da desigualdade de Cauchy-Schwarz temos $|A|^2 \geq nH^2$, obtemos o seguinte corolário do teorema 5.1

Corolário 5.2. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R}\times\mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície completa, com segunda forma fundamental limitada e curvatura média constante H. Suponha que uma das seguintes condições é satisfeita* *(a) O fecho da aplicação normal de Gauss está contido em um hemisfério fechado*

(b) $H^2 \leq \frac{n-1}{n}$

Se a função altura h de Σ satisfaz

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{n\alpha}{n-1} H^2,$$

para alguma constante $0 < \alpha < 1$, então Σ é um slice.

5.2 Gráficos verticais completos em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$

Seja $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ um domínio conexo do espaço hiperbólico $n-$dimensiaonal. Um *gráfico vertical* sobre Ω é dado por

$$\Sigma^n(u) = \{(u(x), x); x \in \Omega\},$$

onde $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. A métrica induzida em Ω pela métrica produto via $\Sigma(u)$ é dada por

$$\langle \, , \, \rangle = du^2 + \langle \, , \, \rangle_{\mathbb{H}^n}.$$

Agora, seja $\Sigma^n(u) = \{(u(x), x); x \in \mathbb{H}^n\} \hookrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ um gráfico vertical completo. Temos que a função $g : \mathbb{R} \times \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$, dada por $g(t, x) = t - u(x)$, é tal que $\Sigma(u) = g^{-1}(0)$. Além disso, para todo campo X tangente a $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$, temos

$$\begin{aligned} X(g) &= \langle X, \partial_t \rangle \partial_t(g) + X^*(g) \\ &= \langle \partial_t - Du, X \rangle, \end{aligned}$$

onde $X^* = X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t$ é a projeção de X em $\mathbb{H}^n$ e Du é o gradiente de u em $\mathbb{H}^n$. Assim,

$$\overline{\nabla} g(u(x), x) = \partial_t|_{(u(x),x)} - Du(x), \;\; \forall x \in \mathbb{H}^n.$$

Portanto, o campo

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |Du|^2}} (\partial_t|_{(u(x),x)} - Du(x)), \;\; x \in \mathbb{H}^n,$$

onde $|Du|$ é a norma com respeito à métrica hiperbólica $\langle\, , \rangle_{\mathbb{H}^n}$, define a aplicação de Gauss de $\Sigma(u)$ tal que $\langle N, \partial_t \rangle > 0$. Consequentemente, usando a equação (1.10), obtém-se

$$|\nabla h|^2 = \frac{|Du|^2}{1 + |Du|^2}. \tag{5.3}$$

Do teorema 5.1 e da equação (5.3), temos os corolários seguintes.

Corolário 5.3. *Seja $\Sigma^n(u)$ um gráfico vertical completo em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$, com segunda forma fundamental limitada e curvatura média constante H. Suponha que o fecho da aplicação de Gauss de $\Sigma(u)$ está contida em um hemisfério aberto. Se a função u satisfaz*

$$|Du|^2 \leq \frac{1}{n-1}|A|^2,$$

então $u \equiv t_0$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.

Corolário 5.4. *Seja $\Sigma^n(u)$ um gráfico vertical completo em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$, com segunda forma fundamental limitada e curvatura média constante H. Suponha que uma das seguintes condições é satisfeita*

(a) O fecho da aplicação de Gauss de $\Sigma(u)$ está contido em um hemisfério aberto;

(b) $H^2 \leq \frac{n-1}{n}$.

Se $|Du|^2 \leq \frac{n}{n-1}H^2$, então $u \equiv t_0$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.

Referências Bibliográficas

[1] ALBUJER, A. L.; CAMARGO, F. E.; LIMA, H. F. de. Complete spacelike hypersurfaces in a RW spacetime. To appear at the *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*

[2] ALÍAS, L. J. A.; BRASIL JR ; COLARES, A. G. Integral formulae for spacelike hypersurfaces in conformally stationary spacetimes and applications. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, v. 46, p. 465488, 2003.

[3] ALÍAS, L. J.; COLARES, A. G. Uniqueness of spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in generalized Robertson-Walker spacetimes. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, v. 143, p. 703729, 2007.

[4] ALÍAS, L. J.; DAJCZER, M.; RIPOLL, J. A Bernstein-type theorem for Riemannian manifolds with a Killing field. *Ann. Glob. Anal. Geom.*, v. 31, p. 363373, 2007.

[5] ALÍAS, L. J.; ROMERO, A.; SÁNCHEZ, M. Uniqueness of complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in generalized Robertson-Walker spacetimes. *Gen. Relativity Gravitation*, v. 27, p. 7184, 1995.

[6] BARBOSA, J. L. M.; COLARES, A. G. Stability of hypersurfaces with constant r-mean curvature. *Ann. Global Anal. Geom.*, v. 15, p. 277297, 1997.

[7] BÉRARD, P.; EARP, R. SA. Examples of H-hypersurfaces in $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ and geometric applications. *Mat. Contemp.*, v. 34, p. 19-51, 2008.

[8] BERNSTEIN, S. N. Sur une théorme de géometrie et ses applications aux derives partielles du type elliptique. *Comm. Inst. Sci. Math. Mech. Univ. Kharkov*, v. 15, p. 38-45, 1915-17.

[9] BEZERRA, K. S. *Um teorema de rigidez para hipersuperfícies CMC completas em variedades lorentz.* 2009. 79 f .Dissertação(Mestrado em Matemática)- Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.

[10] BOMBIERI, E.; GIORGI, E. de; GIUSTI, E. Minimal cones and the Bernstein problem. *Invent. Math.*, v. 7, p. 243-268, 1969.

[11] BRASIL JR., A.; COLARES, A. G.; PALMAS, O. Complete spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space: a gap theorem. *Illinois J. Math.*, v. 47, p. 847-866, 2003.

[12] CABALLERO, M.; ROMERO, A.; RUBIO, R. M. Constant mean curvature spacelike surfaces in three-dimensional generalized Robertson-Walker spacetimes. *Lett. Math. Phys.*, v. 93, p. 85-105, 2010.

[13] CABALLERO, M.; ROMERO, A.; RUBIO, R. M. Uniqueness of maximal surfaces in generalized Robertson-Walker spacetimes and Calabi-Bernstein type problems. *J. Geom. Phys.*, v. 60, p. 394-402, 2010.

[14] CALABI, E. Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations. *Proc. Sympos. Pure Math.*, v. 15, p. 223-230, 1970.

[15] CAMINHA, A.; SOUSA, P.; CAMARGO, F. E. C. Complete foliations of space forms by hypersurfaces. *Bull. Braz. Math. Soc.*, v. 41, n. 3, p. 339-353, 2010.

[16] F. E. C. CAMARGO, F. E. C.; LIMA, H. F. de. New characterizations of totally geodesic hypersurfaces in the anti-de Sitter space $\mathbb{H}_1^{n+1}$. *J. Geom. Phys.*, v. 60, p. 1326-1332, 2010.

[17] CAMINHA, A.; CAMARGO, F. E. C.; LIMA, H. F. de. Bernstein-type theorems in semi-Riemannian warped products. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 139, p. 1841-1850, 2011.

[18] CAMINHA, A. *Sobre hipersuperfícies em espaços de curvatura seccional constante.* 2004. 67 f. Tese (Doutorado em Matemática)- Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.

[19] CAMINHA, A. On spacelike hypersurfaces of constant sectional curvature Lorentz manifolds. *J. Geom. Phys.*, v. 56, p. 1144-1174, 2006.

[20] CAMINHA, A. A rigidity theorem for complete CMC hypersurfaces in Lorentz manifolds. *Differential Geom. Appl.*, v. 24, p. 652-659, 2006.

[21] CAMINHA, A.; LIMA, H. F. Complete spacelike hypersurfaces in conformally stationary Lorentz manifolds. *Gen. Relativity Gravitation*, v. 41, p. 173-189, 2009.

[22] CAMINHA, A.; LIMA, H. F. Complete vertical graphs with constant mean curvature in semi- Riemannian warped products. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, v. 16, p. 91- 105, 2009.

[23] CHENG, S. Y.; YAU, S. T. Maximal spacelike hypersurfaces in the Lorentz- Minkowski space. *Ann. of Math.*, v. 104, p. 407-419, 1976.

[24] DAJCZER, M. Dajczer et al. *Submanifolds and isometric immersions.* Houston : Publish or Perish, 1990.

[25] ESPINAR, J. M.; ROSENBERG, H. Complete constant mean curvature surfaces and Bernstein type theorems in $M^2 \times \mathbb{R}$. *J. Diff. Geom.*, v. 82, p. 611-628, 2009.

[26] FERUS, D. On the completeness of nullity foliations. *Michigan Math. J.*, v. 18, p. 61-64, 1971.

[27] HARDY, G.; LITTLEWOOD, J. E.; PÓLYA, G. *Inequalities.* Cambridge ; Cambridge University, 1989.

[28] HAWKING, S. W.; ELLIS, G. R. *The Large scale structure of spacetime.* Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1973.

[29] ISHIHARA, T. Maximal spacelike submanifolds of a pseudoriemannian space of constant curvature. *Michigan Math. J.*, v. 35, p.345-352, 1988.

[30] LIMA, H. F. de. *Fórmulas integrais tipo-Minkowski para hipersuperfícies tipo-espaço em variedades de Lorentz conformemente estacionárias e aplicações.* 2002. 58 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.

[31] MONTIEL, S. An integral inequality for compact spacelike hypersurfaces in de Sitter space and applications to the case of constant mean curvature. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 37, p. 909-917, 1988.

[32] MONTIEL, S. Uniqueness of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in folieted spacetimes. *Math. Annalen*, v. 314, p. 529-553, 1999.

[33] OMORI, H. Isometric immersions of Riemannian manifolds. *J. Math. Soc. Japan,* v. 19, p. 205-214, 1967.

[34] ONEILL, B. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity.* London : Academic Press,1983.

[35] ROMERO, A.; RUBIO, R. M. On the mean curvature of spacelike surfaces in certain three-dimensional Robertson-Walker spacetimes and Calabi-Bernstein type problems. *J. Geom. Phys.*, v.60, p. 394-402, 2010.

[36] ROSENBERG, H. Hypersurfaces of constant curvature in space forms. *Bull. Sc. Math.*, v. 117, p. 217-239, 1993.

[37] ROSENBERG, H. Minimal surfaces in $M^2 \times \mathbb{R}$. *Illinois J. Math.*, v.46, p. 1177-1195, 2002.

[38] SIMONS, J. Minimals varieties in Riemannian manifolds. *Ann. of Math.*, v. 88, p. 62-105, 1968.

[39] WALD, R. M. *General relativity.* Chicago : University of Chicago, 1984.

[40] YAU, S. T. Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. *Comm. Pure Appl. Math.*, v. 28, p. 201-228, 1975.

[41] YAU, S. T. Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 25, p. 659-670, 1976.