



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
DOUTORADO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA

FRANCISCO JACKSON LOPES DE ALMEIDA

APLICAÇÕES DA DISENTROPIA DA AUTOCORRELAÇÃO E DA FUNÇÃO W_q
DE LAMBERT-TSALLIS EM ASTRONOMIA

FORTALEZA

2025

FRANCISCO JACKSON LOPES DE ALMEIDA

APLICAÇÕES DA DISENTROPIA DA AUTOCORRELAÇÃO E DA FUNÇÃO WQ DE
LAMBERT-TSALLIS EM ASTRONOMIA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como parte integrante dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia de Teleinformática. Área de Concentração: Eletromagnetismo Aplicado.

Orientador: Prof. Dr. Rubens Viana Ramos.

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A446a Almeida, Francisco Jackson Lopes de.
Aplicações da disentropia da autocorrelação e da função Wq de Lambert-Tsallis em astronomia / Francisco Jackson Lopes de Almeida. – 2025.
52 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática, Fortaleza, 2025.
Orientação: Prof. Dr. Rubens Viana Ramos.

1. Disentropia. 2. Função Wq de Lambert-Tsallis. 3. Pulsar. 4. Aleatoriedade. I. Título.

CDD 621.38

À minha esposa Rosangela, à minha filha Gabi e, principalmente, a meu pai, senhor Hélio Dantas (*in memoriam*), e à minha mãe, dona Elizabeth, que sempre foram a luz e a inspiração para a minha educação.

AGRADECIMENTOS

Aos professores que marcaram minha formação acadêmica, graduação, mestrado e doutorado, pelo conhecimento transmitido e pelas valiosas orientações que enriqueceram meu crescimento profissional.

Aos meus professores do Grupo de Informação Quântica (GIQ), Professora Hilma, Professores João Batista e Kleber Zuza.

Aos meus amigos do Grupo de Informação Quântica (GIQ), pelo apoio nos momentos de dificuldades.

A todos os servidores, pelo competente trabalho.

Aos meus pais, Elizabeth e Hélio, pelo amor incondicional e pelo constante incentivo que me permitiram superar os desafios e alcançar meus objetivos. Suas presenças foram fundamentais em minha trajetória.

À minha esposa Rosangela e à minha filha Gabriela, pelo apoio, compreensão e motivação durante todo esse período de dedicação aos estudos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Rubens Viana Ramos, pela paciência, sabedoria e dedicação incansável. Sua orientação, muitas vezes realizada além do horário de trabalho, foi essencial para a conclusão desta pesquisa.

Esse é o principal ponto da tecnologia. Por um lado, ela cria um apetite por imortalidade e, por outro, ameaça extinção universal. Tecnologia é a luxúria removida da natureza (DELLILLO, 1985, p. 285)

RESUMO

A presente tese trata de algumas aplicações da disentropia da autocorrelação e da função W_q de Lambert-Tsallis em astronomia. Inicialmente, a disentropia da autocorrelação, que é uma medida de aleatoriedade, é usada em três problemas: I) Cálculo da aleatoriedade de mapas da radiação cósmica de fundo (CMB). II) No apagamento de estrelas de fundo em imagens astronômicas. III) No cálculo da aleatoriedade do sinal real de um pulsar utilizado como gerador de números aleatórios. No primeiro problema é mostrado que a aleatoriedade nos mapas da CMB é alta e atinge seu valor máximo quando os sinais provenientes da via Láctea são apagados do mapa. No segundo problema, o algoritmo proposto apaga regiões da imagem astronômica que possuam alta aleatoriedade, deixando em destaque na imagem as grandes estruturas. Por fim, no terceiro problema é mostrado que a aleatoriedade do sinal proveniente do pulsar PSR J0437-4715 cresce quando o intervalo entre os pulsos considerados aumenta. O valor máximo da aleatoriedade é alcançado quando os pulsos são coletados em lotes 6. Na segunda parte da tese a função W_q de Lambert-Tsallis é utilizada em dois problemas: I) Na análise da frequência de rotação do pulsar a partir da frequência da onda gravitacional emitida por esse mesmo pulsar. II) Na aproximação da solução da equação de Kepler. No primeiro caso, o ponto de ramificação da função W_q é utilizado na obtenção de uma relação entre os coeficientes da equação da frequência de rotação, a frequência da onda gravitacional emitida e a frequência Kepleriana de ruptura. No segundo caso, é apresentado um algoritmo numérico usando W_q que calcula a solução da equação de Kepler da mecânica celeste com erro menor que 10^{-4} quando a excentricidade da elipse da órbita for menor ou igual a 0,3.

Palavras-chave: disentropia; função W_q de Lambert-Tsallis; pulsar; aleatoriedade.

ABSTRACT

This thesis addresses some applications of the disentropy of the autocorrelation and the Lambert-Tsallis W_q function in astronomy. Initially, the disentropy of the autocorrelation, which is a measure of randomness, is used in three problems: I) Calculating the randomness of cosmic microwave background (CMB) maps. II) Erasing background stars in astronomical images. III) Calculating the randomness of the actual signal from a pulsar used as a random number generator. The first problem shows that the randomness in CMB maps is high and reaches its maximum value when signals from the Milky Way are erased from the map. In the second problem, the proposed algorithm erases regions of the astronomical image that have high randomness, highlighting large structures. Finally, the third problem shows that the randomness of the signal coming from the pulsar PSR J0437-4715 increases as the interval between the pulses considered increases. The maximum randomness is achieved when pulses are collected in batches of 6. In the second part of the thesis, the Lambert-Tsallis W_q function is used in two problems: I) In the analysis of the pulsar's rotation frequency from the frequency of the gravitational wave emitted by that same pulsar; II) In the approximation of the solution to Kepler's equation. In the first case, the branch point of the W_q function is used to obtain a relationship between the coefficients of the rotation frequency equation, the frequency of the emitted gravitational wave, and the Keplerian breakup frequency. In the second case, a numerical algorithm using W_q is presented that calculates the solution to Kepler's equation of celestial mechanics with an error of less than 10^{-4} when the eccentricity of the orbital ellipse is less than or equal to 0.3.

Keywords: disentropy; Lambert-Tsallis W_q function; pulsar; randomness.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
2 A FUNÇÃO W_q DE LAMBERT-TSALLIS E A DISENTROPIA	12
2.1 A função W_q de Lambert-Tsallis	12
2.2 Disentropia e Medida de Aleatoriedade	15
3 PULSARES	19
3.1 Definição e Propriedades de Pulsares	19
3.1.1 <i>Deslocamento para o vermelho (red-shift) gravitacional</i>	20
3.1.2 <i>Rápida rotação</i>	20
3.1.3 <i>Campo magnético extremo que leva à emissão de ondas eletromagnéticas</i>	21
3.1.4 <i>Alta densidade</i>	22
3.2 Detecção de Pulsares	25
3.3 Aplicações de Pulsares	26
4 APLICAÇÕES DA DISENTROPIA NA ASTRONOMIA	29
4.1 Exemplos de Cálculo da Disentropia da Autocorrelação	30
4.2 Aleatoriedade dos Mapas CMB	32
4.3 Um Algoritmo Baseado em Disentropia para Remover Estrelas de Fundo de Imagens Astronômicas	34
4.4 Cálculo da Aleatoriedade de um Pulsar com a Disentropia	36
5 APLICAÇÕES DA FUNÇÃO W_q DE LAMBERT-TSALLIS NA ASTRONOMIA ..	40
5.1 Cálculo da Frequência de Rotação de um Pulsar a Partir da Frequência da Onda Gravitacional Emitida	40
5.2 Cálculo da solução da equação de Kepler	41
6 CONCLUSÃO	45
REFERÊNCIAS	47
ANEXO A – ARTIGO DECORRENTE DA TESE	51

1 INTRODUÇÃO

A astronomia é uma das áreas mais complexas e fascinantes da física. Ela nos mostra estruturas fantásticas e intrigantes como os diferentes tipos de estrelas, nebulosas e buracos negros, propiciando um laboratório natural para o estudo dos aspectos mais fundamentais da física (Zielke, 2012; Carroll; Ostlie, 2017). Por outro lado, o estudo experimental da astronomia faz uso de recursos abundantes da engenharia, como antenas e receptores de micro-ondas, receptores ópticos, técnicas de processamento digital de sinais e imagens, dentre outros (Lena, 2012; Wilson; Rohlf; Hüttemeister, 2013). Mais recentemente, aplicações da astronomia mais ligadas ao cotidiano têm surgido, principalmente ligadas à geração de números aleatórios. Por exemplo, pulsares e a radiação cósmica de fundo são fontes de aleatoriedade que podem ser utilizadas na geração de bits aleatórios (Lee; Cleaver, 2017). Nesses casos, uma boa medida de aleatoriedade é interessante para quantificar a aleatoriedade e identificar algum viés ou efeitos de memória que os sistemas físicos reais apresentam. Além disso, muito comumente, a medida de alguma propriedade de um objeto astronômico é feita de forma direta e indireta, o que permite testar modelos. Por exemplo, pode-se medir a frequência de rotação de um pulsar de forma direta a partir do sinal por ele emitido, ou medir de forma indireta a partir da medição da frequência da onda gravitacional por ele emitida. A comparação desses resultados permite testar o modelo que faz o elo entre a frequência de rotação do pulsar e a frequência da onda gravitacional por ele emitida.

Procurando aproximar mais ainda a astronomia da engenharia, a presente tese discute aplicações da disentropia da autocorrelação, uma medida de aleatoriedade, e da função W_q de Lambert-Tsallis em astronomia. Ambas são ferramentas matemáticas provenientes da engenharia. Basicamente, a disentropia da autocorrelação é utilizada para calcular a aleatoriedade em mapas da radiação cósmica de fundo, em imagens astronômicas poluídas com excesso de estrelas de fundo, e do sinal emitido por um pulsar. Por outro lado, a função W_q de Lambert-Tsallis, que além de ser utilizada na definição da disentropia tem sido usada para prover soluções analíticas em física de semicondutores, óptica quântica, aprendizado de máquina e informação quântica, dentre outras áreas, aqui é utilizada para estudar a relação entre a frequência de rotação do pulsar e a frequência da onda gravitacional por ele emitida, e para aproximar a solução da equação de Kepler quando a excentricidade da órbita elíptica é pequena.

Diante do acima exposto, a presente tese tem como principal novidade a aplicação dessas novas ferramentas matemáticas (função W_q de Lambert-Tsallis e disentropia) em

astronomia, abrindo caminho para o desenvolvimento de novos algoritmos para uso em astronomia que, de alguma forma, precisem quantificar a aleatoriedade de sinais ou imagens astronômicas, bem como o desenvolvimento de soluções analíticas de problemas em astronomia cujas variáveis estejam relacionadas por leis de potência.

O resto desta tese está dividido da seguinte forma: o capítulo 2 faz uma revisão da função W_q de Lambert-Tsallis e da disentropia. O capítulo 3 traz conceitos básicos de pulsares e suas aplicações. O capítulo 4 mostra três aplicações da disentropia da autocorrelação em astronomia. O capítulo 5 mostra duas aplicações da função W_q de Lambert-Tsallis em astronomia. Por fim, na conclusão, as perspectivas de trabalhos futuros são discutidas.

2 A FUNÇÃO W_q DE LAMBERT-TSALLIS E A DISENTROPIA

Funções matemáticas especiais como as funções de Bessel, Airy, Lambert e as funções hipergeométricas, dentre outras, possuem vasta gama de aplicações na engenharia e na física. Mais recentemente, uma nova função especial, chamada função W_q de Lambert-Tsallis, uma generalização da função W de Lambert, vem apresentando uma série de aplicações importantes. Em particular, ela pode ser usada para construir a disentropia que, em uma definição mais básica, pode ser entendida como o oposto da entropia. Entretanto, como será discutido nesse capítulo, a disentropia possui aplicações que a entropia não possui. Uma dessas aplicações é como medida de aleatoriedade. Portanto, este capítulo traz uma revisão da função W_q de Lambert-Tsallis, da disentropia e da medida de aleatoriedade baseada na disentropia.

2.1 A função W_q de Lambert-Tsallis

A função W_q de Lambert-Tsallis (Silva; Ramos, 2019) é uma generalização versátil da função W de Lambert (Corless *et al.*, 1996) que tem sido usada para fornecer soluções analíticas em diferentes áreas da física e da engenharia (Silva; Mendes; Ramos, 2019; Andrade; Nobrega; Ramos, 2022; Ramos, 2022). É importante notar que, enquanto a função W de Lambert é útil na solução de problemas nos quais as variáveis dependente e independente são relacionadas por uma lei exponencial, a função W_q de Lambert-Tsallis é útil na solução de problemas nos quais as variáveis dependente e independente são relacionadas por uma lei de potência. A função de Lambert-Tsallis é definida como a solução da equação (Andrade; Nobrega; Ramos, 2022).

$$W_q(z)e_q^{W_q(z)} = z. \quad (2.1)$$

As soluções de (2.1) são as funções W_q de Lambert-Tsallis introduzida no artigo (Silva; Ramos, 2019). Em (2.1) tem-se que

$$e_q^z =: \begin{cases} e^z & \text{se } q = 1 \\ [1 + (1 - q)z]^{1/(1-q)} & \text{se } q \neq 1 \end{cases}. \quad (2.2)$$

é a função q -exponencial de Tsallis e o parâmetro q é um número real, chamado de parâmetro de não extensividade de Tsallis. As duas propriedades importantes de e_q^z que são bastante utilizadas são as seguintes

$$\left(e_q^z\right)^\alpha = \left\{ \left[1 + (1-q)z\right]^{1/(1-q)} \right\}^\alpha = \left[1 + (1-q)z\right]^{\alpha/(1-q)} = \left[1 + \frac{(1-q)}{\alpha} \alpha z\right]^{\alpha/(1-q)} = e_{1-(1-q)/\alpha}^{\alpha z}. \quad (2.3.a)$$

$$e_0^z = 1 + z. \quad (2.3.b)$$

Além disso, a função inversa da q -exponencial é a função q -logaritmo de Tsallis, $\log_q(z)$, definido como sendo

$$\ln_q(x) = \begin{cases} \ln(x) & x > 0 \text{ \& } q = 1 \\ \frac{x^{(1-q)} - 1}{1-q} & x > 0 \text{ \& } q \neq 1 \\ \text{não definido} & x \leq 0 \end{cases}. \quad (2.4)$$

Assim,

$$e_q^{\ln_q(x)} = x \text{ para } x > 0 \quad (2.5)$$

$$\ln_q(e_q^x) = x \text{ para } 0 < e_q^x < \infty. \quad (2.6)$$

Pode-se mostrar que $\lim_{q \rightarrow 1} e_q^z = e^z$ e $\lim_{q \rightarrow 1} W_q(z) = W(z)$. Assim, quando q tende ao valor 1 a equação de Lambert, $W(z)e^{W(z)} = z$, é recuperada. Usando a definição da função q -exponencial descrita em (2.2) em (2.1) pode-se encontrar uma expressão analítica de $W_q(z)$ para alguns valores especiais de q :

$$W_q^{(1-q)} + (1-q)W_q^{(2-q)} - z^{(1-q)} = 0. \quad (2.7)$$

Por exemplo, no caso mais simples e o único usado nesta tese, $q = 2$, tem-se

$$W_2(z)e_2^{W_2(z)} = z \Rightarrow W_2(z) \left[1 + (1-2)W_2(z)\right]^{\frac{1}{1-2}} = z \Rightarrow \frac{W_2(z)}{1-W_2(z)} = z \Rightarrow W_2(z) = \frac{z}{1+z}. \quad (2.8)$$

para $z \in (-1, +\infty)$. Outro exemplo que pode ser analiticamente encontrado é para $q = 3/2$. Neste caso tem-se

$$W_{\frac{3}{2}}^{\pm}(z) = \frac{2(z+1) \pm 2\sqrt{2z+1}}{z}. \quad (2.9)$$

A função $W_{3/2}^{+}(z)$ satisfaz a equação (2.1) no intervalo $z \in [-1/2, \infty)$, enquanto que a função $W_{3/2}^{-}(z)$ satisfaz a equação (2.1) no intervalo $z \in [-1/2, 0)$. É fácil mostrar que o ponto de *branch* da função de Lambert-Tsallis W_q é ($z_b = \exp_q(1/(q-2))/(q-2)$, $W_q(z_b) = 1/(q-2)$), para $q \neq 2$. Não há ponto de *branch* com z_b finito para $q = 2$. Assim, por exemplo, o ponto de *branch* para $q = 3/2$ tem $z_b = -1/2$. De forma geral, a solução no intervalo $[z_b, 0)$ é $W_q^{-}(z)$ enquanto a solução no intervalo $[z_b, \infty)$ é $W_q^{+}(z)$. Embora não seja relevante para esse trabalho, foi demonstrado que, diferentemente da função W de Lambert que possui apenas dois ramos, a função W_q pode possuir três ramos.

Pode-se demonstrar que a função $W_q(z)$ está intimamente ligada à solução de trinômios. Em outras palavras, qualquer trinômio pode ser escrito na forma da equação (2.1). Seja o trinômio $ax^{\alpha} + bx^{\beta} + c = 0$, então usando as equações (2.3.a) e (2.3.b) tem-se que

$$ax^{\alpha} + bx^{\beta} = -c \quad (2.10.a)$$

$$ax^{\alpha} \left(1 + \frac{b}{a} x^{\beta-\alpha} \right) = -c \Rightarrow x^{\alpha} e_0^{\frac{b}{a} x^{\beta-\alpha}} = -\frac{c}{a} \quad (2.10.b)$$

$$\left(x^{\alpha} e_0^{\frac{b}{a} x^{\beta-\alpha}} \right)^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} = \left(-\frac{c}{a} \right)^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \Rightarrow x^{\beta-\alpha} e^{\frac{b}{a} \frac{\beta-\alpha}{\alpha} x^{\beta-\alpha}} = \left(-\frac{c}{a} \right)^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \quad (2.10.c)$$

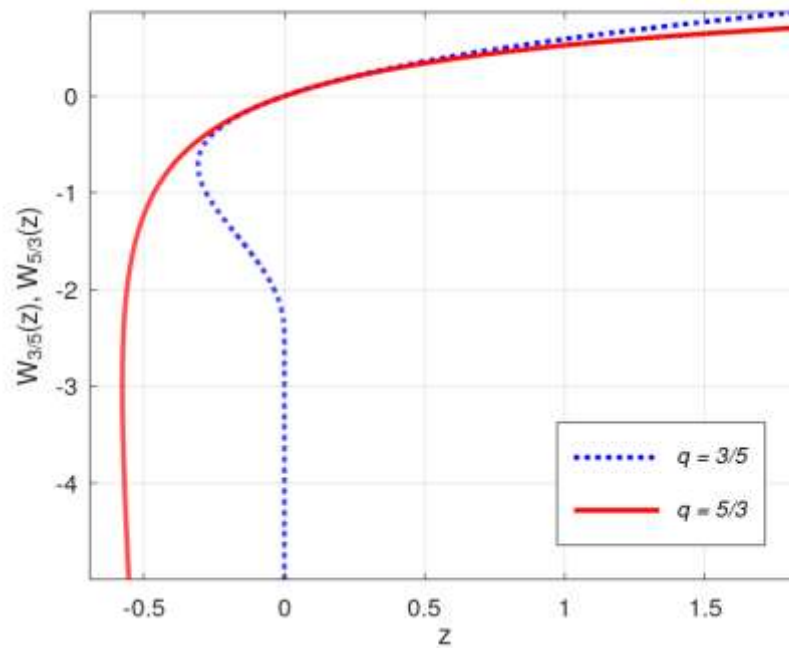
$$\frac{b}{a} \frac{\beta-\alpha}{\alpha} x^{\beta-\alpha} e^{\frac{b}{a} \frac{\beta-\alpha}{\alpha} x^{\beta-\alpha}} = \frac{b}{a} \frac{\beta-\alpha}{\alpha} \left(-\frac{c}{a} \right)^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \Rightarrow \frac{b}{a} \frac{\beta-\alpha}{\alpha} x^{\beta-\alpha} = W_{1-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}} \left[\frac{b}{a} \frac{\beta-\alpha}{\alpha} \left(-\frac{c}{a} \right)^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \right] \quad (2.10.d)$$

$$x = \left\{ \frac{a}{b} \frac{\alpha}{\beta-\alpha} W_{1-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}} \left[\frac{b}{a} \frac{\beta-\alpha}{\alpha} \left(-\frac{c}{a} \right)^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \right] \right\}^{1/(\beta-\alpha)}. \quad (2.10.e)$$

A equação (2.10.e) é válida para quaisquer valores reais de a , b , c , α e β . Portanto, a função W_q é uma função multivalorada e que pode assumir valores reais ou complexos.

De uma forma geral, a fórmula analítica de $W_q(z)$ não é conhecida e o valor de $W_q(z)$ precisa ser calculado numericamente (Silva; Mendes; Ramos, 2019; Andrade; Nobrega; Ramos, 2022; Ramos, 2022). Por exemplo, na Figura 1 pode-se ver as curvas de $W_{3/5}(z)$ e $W_{5/3}(z)$ versus z .

Figura 1 – $W_{3/5}(z)$ e $W_{5/3}(z)$ versus z



Fonte: Elaborada pelo autor.

2.2 Disentropia e Medida de Aleatoriedade

Um conceito muito importante na física e com aplicações que vão da mecânica quântica à astrofísica, passando pelo processamento digital de imagens e pelo estudo da dinâmica da bolsa de valores é a entropia. Do ponto de vista da termodinâmica a entropia é uma medida do número de diferentes microestados que resultam no mesmo macroestado. Do ponto de vista da estatística, a entropia é uma medida de largura da distribuição de probabilidade. Por exemplo, a famosa relação de incerteza de Heisenberg da mecânica quântica, comumente escrita como uma relação entre desvios padrões, também pode ser escrita como uma relação entre entropias. Entretanto, para um entendimento mais amplo das pessoas, é comum dizer que a entropia é uma medida de desordem ou de incerteza de um sistema. Por outro lado, pode-se entender que um sistema que não está completamente “desordenado” apresenta alguma ordem. Surgindo a necessidade de uma “medida de ordem”. Em um primeiro momento, pode-se

imaginar que essa medida de ordem, que será chamada de disentropia (D), deva ser simplesmente algo do tipo uma constante menos a entropia (S): $D = C - S$. Entretanto, essa não é uma boa definição pois ela não enriquece em nada o conhecimento nem define uma estrutura interna da entropia, por exemplo. Como será visto adiante, a definição matemática da disentropia é feita usando a relação entre as funções \log_q (\log) e W_q (W).

Seja a variável aleatória discreta $X = \{x_k \mid k = 1, 2, N\}$ representando os possíveis resultados de um evento (como uma medição em um experimento). O resultado x_k aparece com probabilidade p_k sendo $p_k \geq 0$ e $\sum_{k=1}^N p_k = 1$. Neste caso, a entropia de Shannon $S(X)$ associada à distribuição $P(X) = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$, sendo $p_i = p(x_i)$, é dada por $S(X)$.

$$S(X) = -\sum_{k=1}^N p_k \log(p_k). \quad (2.11)$$

Utilizando a relação $\log(z) = W(z) + \log(W(z))$ em (2.11), obtém-se

$$S(X) = -\sum_{k=1}^N p_k \left[\log_N(W(p_k)) + W(p_k) \right] = -\sum_{k=1}^N p_k \log_N(W(p_k)) - \sum_{k=1}^N p_k W(p_k). \quad (2.12)$$

O termo

$$D(X) = \sum_{k=1}^N p_k W(p_k) \quad (2.13)$$

é chamado de disentropia (Silva; Ramos, 2019). De forma semelhante, a q -entropia de Tsallis (Tsallis, 1988) pode ser escrita como:

$$S_T = -\sum_i p_i^q \log_q(p_i) = -\sum_i p_i^q W_q(p_i) - \sum_i p_i^q \log_q[W_q(p_i)] - (1-q) \sum_i p_i^q W_q(p_i) \log_q[W_q(p_i)], \quad (2.14)$$

sendo que o termo

$$D_q = \sum_i p_i^q W_q(p_i) \quad (2.15)$$

é a disentropia relacionada à q -entropia de Tsallis.

Para uma distribuição do tipo delta (uma das probabilidades vale 1 enquanto todas as outras são nulas) tem-se $D = W_q(1)$, seu valor máximo, enquanto para uma distribuição uniforme (todas as probabilidades possuem o mesmo valor) $D = W_q(N^{-1})$, seu valor mínimo, portanto, $W_q(N^{-1}) \leq D(X) \leq W_q(1)$. Portanto, a entropia é máxima para uma distribuição uniforme discreta e mínima para uma distribuição delta, enquanto a disentropia é máxima para uma distribuição delta e mínima para uma distribuição uniforme.

Assim, por dualidade, a disentropia pode ser empregada onde quer que a entropia seja empregada (Castro; Ramos, 2022; Mendes; Lima; Ramos, 2022; Silva; Mendes; Ramos, 2022), ou seja um problema que é resolvido maximizando (minimizando) a entropia também pode ser resolvido minimizando (maximizando) a disentropia. Além disso, a entropia e a disentropia são propriedades opostas do mesmo fenômeno. Por exemplo, enquanto a entropia mede o quanto uma distribuição é aleatória, a disentropia mede o quanto ela é determinística, ou seja, o quanto ela não é aleatória a entropia é côncava e a disentropia é convexa. Entretanto, existem algumas situações onde apenas a disentropia pode ser usada. Por exemplo, nas medidas de *quantumness* e aleatoriedade propostas em Ramos (2019) e Ramos (2021), respectivamente. Nesta tese o foco é na medida de aleatoriedade baseada na disentropia e apenas a disentropia calculada com $W_{q=2}(z)$, equação (2.8), é considerada.

Uma ferramenta matemática importante na análise de sinais e sequências numéricas aleatórias é a função de autocorrelação. Basicamente, a função de autocorrelação mostra o grau pelo qual seu valor em um momento ou posição é semelhante ao seu valor em um determinado momento posição posterior ou anterior, portanto, é comum usar a autocorrelação para avaliar a aleatoriedade contida em um sinal ou sequência numérica: quanto maior a aleatoriedade, menor é a semelhança. Entretanto, o resultado da autocorrelação de uma função é outra função e não um número, como se faz necessário em uma medida. Na medida de aleatoriedade usando a disentropia, esta última mapeia a função de autocorrelação para um número real, fornecendo um valor numérico para a aleatoriedade. Assim, a aleatoriedade de um sinal discreto s_t , usando as equações (2.8) e (2.15) é dada por (Ramos, 2021):

$$D_2 = \sum_{n=1}^N \frac{r_n^3}{r_n + 1} \quad (2.16)$$

$$r_n = \frac{E[(s_t - \bar{s})(s_{t+n} - \bar{s})]}{\sigma_s^2} = \frac{1}{N} \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (s_t - \bar{s})(s_{t+n} - \bar{s})}{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (s_t - \bar{s})^2}, \quad (2.17)$$

na qual r_n é o n -ésimo valor da função de autocorrelação discreta do sinal s_t , \bar{s} e σ_s^2 são, respectivamente, a média e a variância de s_t . O símbolo E denota o valor esperado. Se o sinal s_t é maximamente aleatório, sua função de autocorrelação é uma função delta com magnitude igual a um, portanto, de acordo com a equação (2.16), o valor de disentropia de um sinal discreto maximamente aleatório é $D_2 = 0,5$. Portanto, quanto menor o valor de $|D_2 - 0,5|$ maior será a aleatoriedade. Este valor numérico para a aleatoriedade é importante pois permite a comparação da aleatoriedade de dois sinais ou sequências diferentes. A disentropia da autocorrelação é, portanto, uma medida de aleatoriedade fundamentalmente diferente dos testes estatísticos de aleatoriedade, por exemplo, os testes do NIST. Se, por um lado, estes testes estatísticos afirmam, dentro de um intervalo de confiança, se uma determinada sequência binária é aleatória ou não, eles não medem o quanto a sequência binária considerada é aleatória. Portanto, não está claro como usar esses testes estatísticos para fazer uma comparação direta entre sequências. Adicionalmente, é bom lembrar que enquanto os testes estatísticos testam a aleatoriedade apenas de sequências binárias, a disentropia da autocorrelação pode ser usada em qualquer tipo de sinal (Gkouliaras *et al.*, 2024; Jiménez *et al.*; 2024), como áudio, vídeo, foto e sequências numéricas como o número π ou outros números irracionais ou ainda sequências binárias.

Por fim, embora não seja discutido nesta tese, a disentropia da autocorrelação também pode ser definida para distribuições de probabilidade contínuas.

3 PULSARES

Este capítulo é fortemente baseado no vídeo *The Dead Star That Outshines 200,000 Suns* (2025) e no trabalho *Unlocking the hidden potential of pulsar astronomy*, de Kaur *et al.* (2025), bem como nas referências citadas nessas fontes. Sem nenhuma pretensão na área de astrofísica, este capítulo traz uma breve revisão, da física de pulsares e da aplicação destes como fonte de aleatoriedade.

3.1 Definição e Propriedades de Pulsares

De uma forma simples e direta pode-se dizer que pulsares são estrelas de nêutrons que emitem feixes de radiação eletromagnética, os quais podem ser observados como uma sequência regular de pulsos. Até o presente momento existem cerca de 3000 pulsares catalogados. Os eventos que levam à formação de um pulsar começam quando o núcleo de uma estrela muito massiva é comprimido durante uma supernova, formando uma estrela composta principalmente de nêutrons, com uma fina atmosfera com núcleos atômicos ordinários e traços de elementos pesados, como o ferro. Essa estrela é chamada de estrela de nêutrons.

Estrelas de nêutrons podem possuir temperatura de superfície a ordem de $T \sim 10^6 \text{K}$ e raio a ordem de poucas dezenas de quilômetros. Usando a lei de Stefan-Boltzmann, a intensidade da radiação emitida é aproximadamente $I = \sigma T^4$, sendo $\sigma \approx 5,67 \cdot 10^8 \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ a constante de Stefan-Boltzmann (Shapiro; Teukolsky, 1983; Glendenning, 2000). A luminosidade, por sua vez é dada por $l = I \cdot A$, sendo A a área de emissão. Portanto, para uma área esférica tem-se $l = A \sigma T^4 = 4\pi R^2 \sigma T^4$. Usando $T \sim 10^6 \text{K}$ e $R = 1,3 \cdot 10^4 \text{km}$, chega-se a $l \approx 1,2 \cdot 10^{26} \text{W}$. Por outro lado, de acordo com a lei de Wien, o comprimento de onda de pico dessa emissão é dado por $\lambda_{max} = 2,8977685 \cdot 10^{-3} \text{mK}/T$. Considerando a mesma temperatura anterior tem-se $\lambda_{max} = 2,8977685 \cdot 10^{-3} \text{mK}/10^6 \text{K} = 2,8977685 \cdot 10^{-9} \text{m}$ que, no espectro eletromagnético, está na faixa dos raios X (Longair, 2006; Trümper, 2009; NASA/GSFC, [2025]). Ou seja, a maior parte da potência emitida pela estrela de nêutrons está na faixa dos raios X. É bom lembrar que a porção do espectro eletromagnético que contém raios γ , raios X e ultravioleta é bloqueada pela camada superior da atmosfera, portanto, é melhor observada com telescópios espaciais. Emissões de objetos astronômicos no visível, isto é, entre ultravioleta e infravermelho, são observados na Terra, mas com distorções causadas pela atmosfera. A radiação infravermelha é absorvida pelos gases da atmosfera sendo, portanto, mais bem observada por telescópios espaciais como o James Webb. Emissões em microondas e ondas de

rádios podem ser observadas da terra com os radiotelescópios (Longair, 2006; Trümper, 2009; NASA/GSFC, [2025]).

As estrelas de nêutrons possuem as seguintes propriedades:

- a) Deslocamento para o vermelho (red-shift) gravitacional;
- b) Rápida rotação;
- c) Campo magnético extremo que leva à emissão de ondas eletromagnéticas, e;
- d) Alta densidade.

3.1.1 Deslocamento para o vermelho (*red-shift*) gravitacional

Próximo à superfície de uma estrela de nêutrons a gravidade é tão intensa que ela “puxa” a radiação eletromagnética que ela própria emite. Neste caso, de acordo com a relatividade geral, a onda eletromagnética tem o comprimento de onda alongado, ou seja, o comprimento de onda aumenta e a frequência diminui, o que implica em dizer que os fótons perdem energia. Esse deslocamento para o vermelho recebe o nome de *red-shift*. O fator de z é dado por

$$z = \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right)^{-1/2} - 1, \quad (3.1)$$

na qual $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ é a constante universal de gravitação, M é a massa do objeto, R é o raio do objeto e $c \sim 3 \cdot 10^8 \text{m/s}$ é a velocidade da luz no vácuo. Para uma estrela de nêutrons com $M = 1,4m_0 \approx 2,785 \cdot 10^{30} \text{kg}$ sendo m_0 a massa do sol, e $R \approx 13 \text{km}$, tem-se $z \approx 0.21$. Isso implica que, neste caso, o comprimento de onda aumenta de $\sim 21\%$ devido ao deslocamento para o vermelho gravitacional.

3.1.2 Rápida rotação

O colapso da estrela é a diminuição de seu raio. Devido à conservação do momento angular na ausência de torque externo atuando na estrela, deve-se ter o momento angular final (após o colapso) igual ao momento angular inicial (antes do colapso): $L_f = L_i$. O momento angular é dado pelo produto do momento de inércia pela velocidade angular, $L = I\omega$. Para uma esfera sólida e com densidade uniforme o momento de inércia é $I = (2/5)MR^2$, portanto $L = (2/5)MR^2\omega$. Se o raio e a velocidade angular antes do colapso são R_i e ω_i e após o colapso da

estrela assumem os valores R_f e ω_f , a conservação do momento angular implica na equação (3.2).

$$L_f = L_i \Rightarrow \frac{2}{5}MR_f^2\omega_f = \frac{2}{5}MR_i^2\omega_i \Rightarrow \omega_f = \left(\frac{R_i^2}{R_f^2}\right)\omega_i. \quad (3.2)$$

Por exemplo, se o período de rotação de uma estrela e seu raio antes do colapso são $T_i = 100$ dias ($8,64 \cdot 10^6$ s) e $R_i = 10^9$ m, a velocidade angular de rotação da estrela colapsada, considerando um raio de 13km é $\omega_f = (2\pi/8,64 \cdot 10^6 \text{s}) \cdot (10^9/1,3 \cdot 10^4)^2 = 4,29 \cdot 10^3$ rad/s, ou seja, uma frequência aproximada de 685Hz (seiscentas e oitenta e cinco voltas em um segundo). A velocidade linear no equador da estrela seria $v = \omega R = 4,29 \cdot 10^3 \text{rad/s} \cdot 13 \text{km} \approx 5,58 \cdot 10^7 \text{m/s} = 0,186c$, isto é, aproximadamente 19% a velocidade da luz. Existe um limite para a máxima velocidade angular da estrela colapsada. A estrela começa a se desfazer quando a gravidade não pode mais prover a aceleração centrípeta requerida, ou seja, o limite ocorre quando a aceleração centrípeta é igual à aceleração gravitacional:

$$\omega_{\max}^2 R = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow \omega_{\max} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}. \quad (3.3)$$

Usando $M = 2,785 \cdot 10^{30}$ kg e $R = 13 \text{km}$ chega-se a $\omega_{\max} = 9,2 \cdot 10^3$ rad/s ou $f_{\max} = 1465$ Hz.

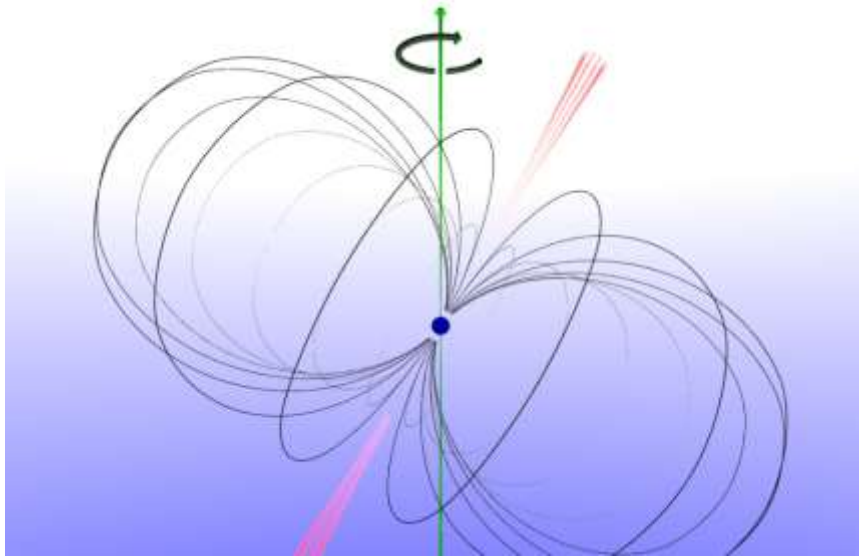
3.1.3 Campo magnético extremo que leva à emissão de ondas eletromagnéticas

A maioria das estrelas possui um campo magnético parecido com um dipolo magnético, com polos norte e sul. Quando uma estrela colapsa para formar uma estrela de nêutrons, seu campo magnético se intensifica. Isso é explicado pelo princípio da conservação do fluxo magnético. O fluxo magnético é dado por $\vec{\Phi} = \vec{B} \times \vec{A}$, sendo \vec{B} o campo magnético e \vec{A} o vetor normal à superfície com módulo igual à área. O valor máximo do fluxo, considerando um campo magnético uniforme, é $\Phi = BA$. Nesse caso, o fluxo antes e após o colapso devem se igualar: $B_i A_i = B_f A_f$, portanto $B_f = B_i (A_i/A_f)$. Assumindo uma estrela esférica antes e após o colapso, com raios $R_i = 10^9$ m e $R_f = 1,3 \cdot 10^4$ m, e campo magnético antes do colapso igual à $B_i = 0,001$ T, obtém-se para a magnitude do campo após o colapso o valor $B_f = 5,92 \cdot 10^6$ T, um valor bilhões de vezes maior que o campo magnético da Terra. À medida que a estrela colapsada gira, seu intenso campo magnético induz um forte campo elétrico em sua superfície. Este campo

elétrico, por sua vez, arranca partículas carregadas da superfície, principalmente elétrons, que fluem para a magnetosfera e são acelerados. Estes elétrons acelerados emitem radiação síncrotron em um feixe estreito ao longo das linhas do campo magnético. Se ao girar, o eixo do campo magnético ficar na linha de visada da terra, ou do telescópio espacial, pulsos de radiação eletromagnética são detectados. Daí surge o nome pulsar.

A Figura 2 mostra um pulsar apresentando as linhas de campo magnético e o feixe de radiação escapando pelos polos magnéticos.

Figura 2 – Pulsar apresentando as linhas de campo magnético e o feixe de radiação escapando pelos polos magnéticos



Fonte: Smits (2007).

3.1.4 Alta densidade

Para estimar a densidade de uma estrela de nêutrons pode-se começar com a máxima velocidade angular de rotação $\omega_{max} = (GM/R^3)^{1/2}$. Considerando a estrela esférica e com densidade uniforme, tem-se $\omega = (G\rho V/R^3)^{1/2} = (G\rho(4/3)\pi R^3/R^3)^{1/2} = (G\rho(4/3))^{1/2}$. Agora, considerando o período $T = 2\pi/\omega$, uma variável facilmente mensurável, pode-se obter a densidade em função do período: $\rho = 3\pi/(GT^2)$. Por exemplo, para $T = 1$ s tem-se $\rho \approx 1,41 \cdot 10^{11} \text{kg/m}^3$ e para $T = 30$ ms tem-se $\rho \approx 1,57 \cdot 10^{14} \text{kg/m}^3$.

A emissão contínua de radiação pela estrela de nêutrons faz com que ela perca energia e desacelere sua rotação. Para estimar quanta energia o pulsar perde em uma rotação devido à emissão eletromagnética, pode-se proceder da seguinte forma: Considerando a estrela um

sólido esférico com densidade uniforme, seu momento de inércia é dado por: $I = (2/5)MR^2$. A energia cinética, por sua vez, é dada por $K = (1/2)I\omega^2 = (1/5)MR^2\omega^2$. A velocidade linear na superfície da estrela é $v = \omega R$, portanto, $K = (1/5)Mv^2$. Usando os valores do pulsar no centro da Nebulosa do Caranguejo, $M = 1,4m_0 \approx 2.8 \cdot 10^{30}$ kg, $R = 13$ km, $T = 0.033$ s, tem-se para o valor da velocidade linear na superfície $v = 2\pi R/T = 2,47 \cdot 10^6$ m/s, o que resulta em uma energia cinética rotacional total igual a $K = 3,42 \cdot 10^{42}$ J. Entretanto, uma variação Δv na velocidade e a variação ΔK na energia cinética estão relacionadas da seguinte forma

$$K + \Delta K = \frac{1}{5}M(v + \Delta v)^2 \Rightarrow \Delta K = \frac{1}{5}M(v + \Delta v)^2 - K = \frac{1}{5}M \left[2v\Delta v + (\Delta v)^2 \right]. \quad (3.4)$$

Dividindo os dois lados de (3.4) por K , obtém-se

$$\frac{\Delta K}{K} = \left[2 \frac{\Delta v}{v} + \left(\frac{\Delta v}{v} \right)^2 \right]. \quad (3.5)$$

Desconsiderando o termo de grau dois em (3.5) chega-se, finalmente, a

$$\Delta K = 2 \frac{\Delta v}{v} K. \quad (3.5.a)$$

O pulsar no centro da Nebulosa do Caranguejo apresentou uma queda de 0,5 Hz em um período de 45 anos (Lyne *et al.*, 2015). Neste caso, tem-se $\Delta v/v \approx -4 \cdot 10^{-13}$. Logo, usando a equação (3.5), $\Delta K = 2(\Delta v/v)K \approx 2 \cdot 3,42 \cdot 10^{42}(-4 \cdot 10^{-13}) = -2,7 \cdot 10^{30}$ J. Como cada rotação demora 0.033 s, a potência emitida pelo pulsar é $P = \Delta K/T \approx 2,7 \cdot 10^{30} \text{J}/0.033 \text{s} = 8 \cdot 10^{31}$ W. Esse valor é cerca de 200.000 vezes a energia radiada pelo sol a cada segundo.

Um modelo ainda simples, mas bastante usado, é o que considera a variação da frequência de rotação proporcional a uma potência dessa mesma frequência (Lia *et al.*, 2025; Ramos *et al.*, 2025):

$$\frac{d\omega}{dt} = -k\omega^n. \quad (3.6)$$

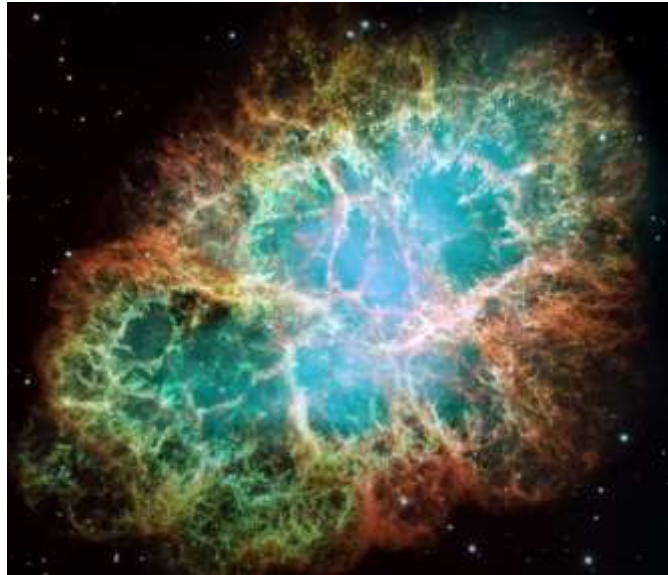
Em (3.6), o índice n é chamado de índice de frenagem. Na prática, o valor do período de um pulsar é medido ao longo do tempo e essa série histórica permite o cálculo experimental das derivadas primeira e segunda do período. Com isso é possível medir n :

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = -kn\omega^{n-1} \frac{d\omega}{dt} = n \frac{-k\omega^n}{dt} \frac{d\omega}{dt} = \frac{n}{\omega} \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 \Rightarrow n = \frac{\omega \ddot{\omega}}{\dot{\omega}^2} = 2 - \frac{P\dot{P}}{P^2}. \quad (3.7)$$

Em (3.7) $P = 2\pi/\omega$ é o período de rotação do pulsar. Quando apenas a emissão de radiação eletromagnética é levada em consideração (modelo de dipolo magnético), cálculos clássicos levam ao valor de $n = 3$ (Ramos *et al.*, 2025). Entretanto, os valores reais medidos são diferentes de 3, o que mostra que outros processos físicos também estão envolvidos na frenagem do pulsar, por exemplo, vento de partículas e emissão de ondas gravitacionais também causam a desaceleração do pulsar. Portanto, um modelo mais completo deve levar em conta esses fenômenos também (Lia *et al.*, 2025).

A Figura 3 mostra a nebulosa do Caranguejo, que possui um pulsar em seu centro.

Figura 3 - Nebulosa do Caranguejo com um pulsar em seu centro



Fonte: NASA, ESA, Hester e Loll (2005)

A Figura 4 mostra o pulsar da nebulosa do Caranguejo. A imagem combina a informação óptica (parte avermelhada) obtida pelo telescópio espacial Hubble e a informação na faixa de raios X (parte azul) obtida pelo telescópio espacial Chandra.

Figura 4 – Pulsar da Nebulosa do Caranguejo



Fonte: NASA, HST, ASU e Hester *et al.* (2003)

3.2 Detecção de Pulsares

Em radioastronomia, para avaliar o brilho de um objeto astronômico é comum usar como medida a densidade espectral de fluxo, isto é, a quantidade de potência recebida por unidade de área por unidade de frequência do sinal proveniente da fonte radiante. A unidade é o Jansky, Jy. Em termos de unidades do sistema SI, tem-se $1\text{Jy} = 10^{-26} \text{Wm}^{-2}\text{Hz}^{-1}$. Os pulsos provenientes de pulsares, em geral, têm uma baixa densidade de fluxo, por exemplo $\lesssim 5\text{mJy}$ em 1,4 GHz, o que torna a detecção uma tarefa complexa. Além disso, a propagação do sinal do pulsar até a antena receptora, através do meio interestelar, interplanetário e na atmosfera, sofre distorções, cintilações e espalhamento, além de sinais de outras fontes astronômicas e terrestres que são captadas pela antena simultaneamente ao sinal do pulsar.

Os radiotelescópios atuais observam pulsares na faixa de frequência de 50MHz (Murchison Widefield Array – MWA e Low Frequency Array – LOFAR) a 4 GHz (Murriyang, CSIRO's Parkes Radio telescope). Embora a maioria dos pulsares possuam uma distribuição espectral com uma queda acentuada nas altas frequências (baixa densidade de fluxo em altas frequências), pulsares também foram detectados na faixa de ondas milimétricas $\sim 100\text{-}200$ GHz com os radiotelescópios ALMA - Atacama Large Millimeter/submillimeter Array, e IRAM - Institut de Radioastronomie Millimetrique 30 m. Por fim, astrônomos amadores têm usado

rádios definidos por software e antenas com pratos pequenos para detectar pulsares mais brilhantes como o Pulsar de Vela (PSR J0835-4510).

A sensibilidade de um radiotelescópio pode ser determinada pela equação radiométrica que relaciona a mínima densidade de fluxo detectável para uma relação sinal-ruído (S/N) predefinida (Kaur *et al.*, 2025):

$$S_{\min} = \frac{2k_B T_{\text{sys}}}{A_{\text{eff}} \sqrt{n_p \Delta \nu \tau}} \sqrt{\frac{\delta}{1-\delta}} (S/N). \quad (3.6)$$

Em (3.6) k_B é a constante de Boltzmann, T_{sys} é a temperatura do sistema, A_{eff} é a área de coleta efetiva, n_p é o número de polarizações independentes do campo eletromagnético gravado, $\Delta \nu$ é a largura de banda observada, τ é o tempo de duração da observação, δ é o ciclo de trabalho do pulso, isto é, a razão entre a largura do pulso e o período do pulso. Por fim, S/N é a mínima razão sinal-ruído desejada. Por exemplo, para detectar os quatro pulsares mais brilhantes no céu em 700 MHz (densidade de fluxo limitante de 540 mJy para uma S/N de 8), com uma largura de banda de 10MHz e temperatura do sistema de 300K, seria necessária uma antena de 3.8m de diâmetro.

3.3 Aplicações de Pulsares

Pulsares são objetos astronômicos importantes para o estudo científico de fundamentos da astronomia e da física. Por exemplo, a sequência regular de pulsos emitida por um pulsar pode ser usada para estudar o meio interestelar, para testar teorias de gravidade ou ainda na busca de ondas gravitacionais com frequências na faixa de nHz. Outras aplicações mais tecnológicas têm surgido, como aplicações em posicionamento e navegação, temporização e sincronização (através da medição do tempo de chegada dos pulsos do pulsar), monitoramento do “clima” espacial e da ionosfera (através da medição das distorções, como a rotação da polarização, causadas pela propagação do sinal pelo meios interestelar, interplanetário e ionosfera), em técnicas de calibração de antenas, teste de algoritmos quânticos de classificação e na geração de números aleatórios, dentre outras. Neste trabalho, o foco é apenas no uso de pulsares para a geração de números aleatórios.

Quando os sinais provenientes de um pulsar são integrados, isto é, quando uma média é feita levando em consideração milhares de pulsos individuais, o perfil desse *ensemble* é

bastante estável. Entretanto, pulsos individuais apresentam variações na amplitude e forma devido à processos intrínsecos de emissão não inteiramente entendidos e efeitos de propagação (o canal de propagação varia com o tempo). Isto torna a densidade de fluxo medida dos pulsos observados uma variável aleatória (Mickaliger *et al.*, 2018). Portanto, o pulsar pode ser usado em aplicações onde a aleatoriedade é importante, como em protocolos criptográficos e jogos, por exemplo (Dawson *et al.*, 2022).

Existem outras fontes de aleatoriedade astronômicas além de pulsares, entretanto, algumas propriedades tornam os pulsares fontes de aleatoriedade atraentes:

- a) Há um grande número de pulsares disponíveis e observáveis durante dia e noite.
- b) São fontes de banda larga, isto é, emitem em diferentes frequências.
- c) O volume de dados do pulsar requeridos para que os participantes legítimos de uma comunicação criptografada possam extrair aleatoriedade não é grande.
- d) Pulsares podem produzir aleatoriedade na velocidade de bits aleatório por milissegundo.

Em aplicações criptográficas, como a descrita no trabalho de Dawson *et al.* (2022), na qual duas estações radiotelescópicas medem a radiação proveniente do mesmo pulsar, as quatro propriedades requeridas para uma comunicação segura são satisfeitas:

- a) Acessibilidade: a única limitação é a localização geográfica dos observadores;
- b) Não previsibilidade: os valores medidos pelos radiotelescópios são realmente aleatórios, certificados por testes de aleatoriedade, e não há modelos físicos para prevê-los com exatidão;
- c) Não maleabilidade: não é possível influenciar o comportamento de um pulsar que está localizado a muitos (milhões) anos-luz de distância da terra;
- d) Verificação pública: quando dois observadores, sincronizados no tempo, observam o mesmo pulsar e aplicam o mesmo algoritmo de extração de bits aleatórios, o resultado obtido (sequência de bits aleatória) é o mesmo para ambos, observadores em radiotelescópios em locais distintos (Dawson *et al.*, 2022).

Também existem desafios no uso de pulsares como fonte de aleatoriedade. Primeiramente, a medição da densidade de fluxo exige um telescópio relativamente grande e sensível. Além disso, uma estrela é um sistema físico com memória, isto é, a energia de pulsos “vizinhos” é correlatada. Essa correlação deve ser apagada para não gerar um viés na sequência binária aleatória a ser produzida. Esse processo que elimina a correlação reduz a taxa de geração de bits aleatórios. Embora a variável utilizada do pulsar para gerar bits aleatórios seja aleatória, ela não é uniformemente distribuída, o que acaba por gerar sequências binárias que também

não são uniformemente distribuídas. Em particular, para a maioria dos pulsares a densidade de fluxo de energia segue uma distribuição log-normal (Mickaliger *et al.*, 2018). Assim, faz-se necessário um pós-processamento para que a sequência binária produzida a partir dos valores do fluxo de energia apresente uma distribuição uniforme. Por fim, quando dois telescópios observam o mesmo pulsar, para que ambos obtenham a mesma sequência aleatória de bits, os telescópios devem estar sincronizados no tempo com uma precisão menor que o período do pulso.

É importante frisar que, embora o fluxo de energia de pulsos individuais seja a variável aleatória mais óbvia de um pulsar, ela não é a única. Outras propriedades de um pulsar poderiam ser usadas como fonte de aleatoriedade. Por exemplo, o intervalo temporal entre *glitches* (eventos de aceleração repentina da rotação cujos tempos de evento podem seguir um processo Poissoniano) (Espinoza *et al.*, 2014), *nulling* (apagamento de um ou mais pulsos emitidos pelo pulsar) (Redman; Rankin, 2009; Ai-Yuan; Jinlin; Na, 2014), *moding* (uma mudança repentina na forma da média temporal dos pulsos emitidos pelo pulsar), ou ainda entre eventos de pulsos gigantes (pulsos individuais emitidos por alguns pulsares que excedem o fluxo de densidade média por um fator de dez ou mais) que também seguem uma distribuição Poissoniana. A escolha da melhor propriedade leva em consideração a facilidade de dois telescópios geograficamente distantes medirem a mesma coisa e a taxa de variação do parâmetro escolhido, quanto mais rápido o parâmetro variar, maior a taxa de geração de bits aleatórios.

4 APLICAÇÕES DA DISENTRÓPIA NA ASTRONOMIA

Um equipamento muito útil em diversos setores da vida moderna é o gerador de números aleatórios (GNA). Por exemplo, um GNA pode ser utilizado em protocolos criptográficos, jogos digitais, loterias e jogos de azar, simulações de Monte-Carlo, dentre outras aplicações. Um bom GNA deve produzir uma sequência de números realmente aleatória. Isto significa que não é possível prever qual será o próximo número a ser gerado com probabilidade maior que $1/N$, sendo N o tamanho do conjunto de números que o gerador pode gerar. Por exemplo, um GNA binário tem $N = 2$, pois os números gerados são ‘0’, com probabilidade p , e ‘1’ com probabilidade $1-p$. Por exemplo, o lançamento de uma moeda para a qual o evento ‘cara’ representa o número ‘0’ enquanto o evento ‘coroa’ representa o número 1. O GNA binário é maximamente aleatório quando $p = \frac{1}{2}$ (cara e coroa têm a mesma probabilidade de ocorrer). Se $p \neq \frac{1}{2}$ diz-se que o gerador é viciado ou enviesado. Observando-se a Tabela 1, nota-se que para $p = \frac{1}{2}$ a entropia é máxima e a disentropia é mínima. Portanto, uma GNA de máxima aleatoriedade possui entropia máxima e disentropia mínima. Por outro lado, um GNA determinístico, ou seja, que gera sempre o mesmo número, possui entropia nula e máxima disentropia. Seja um GNA binário com os seguintes valores de $p = \{0.25, 0.5, 0.75\}$. Dez mil números (pseudo) aleatórios foram gerados através de um software. O número de ‘1’s obtidos em cada caso estão mostrados na Tabela 1.

Tabela 1 – Resultados da utilização de um GNA com três diferentes valores de p .

p	Nº de 1’s	Entropia	Disentropia
0.25	7495	0.8112	0.2372
0.5	5028	1	0
0.75	2471	0.8112	0.2372

Fonte: Elaborada pelo autor.

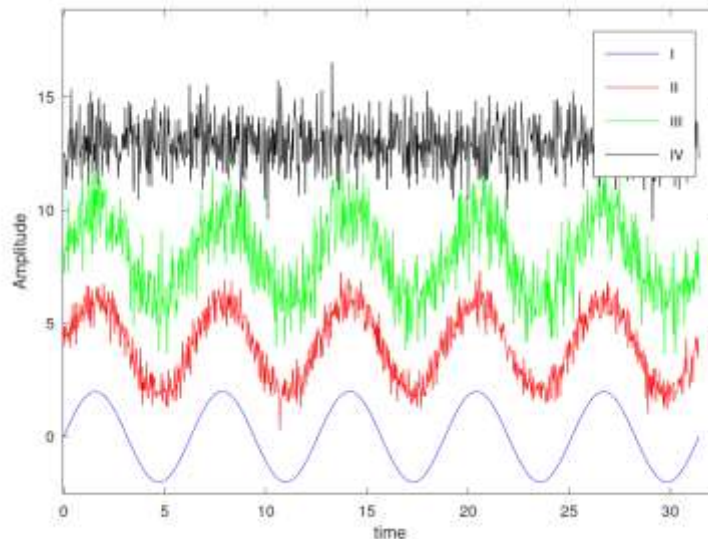
Como pode ser observado na Tabela 1, se $p < 0.5$, a entropia não é máxima (a disentropia não é mínima) e o número de 1’s é maior que o número de 0’s. Se $p > 0.5$, novamente a entropia e a disentropia não alcançam seus valores extremos e o número de 0’s é maior que o número de 1’s. Por fim, se $p = \frac{1}{2}$, a entropia é máxima, a disentropia é mínima e o número de 1’s e 0’s são aproximadamente iguais, como ocorreria em uma longa sequência de lançamentos

de uma moeda não viciada. Os exemplos da Tabela 1 mostram a importância de garantir a máxima aleatoriedade da fonte considerada.

4.1 Exemplos de Cálculo da Disentropia da Autocorrelação

Inicialmente, a Figura 5 e a Tabela 2 mostram, através de cálculos numéricos, um exemplo do decréscimo do valor da disentropia da autocorrelação na medida em que a intensidade do ruído é amplificada.

Figura 5 – Sinal senoidal com diferentes níveis de ruído



Fonte: Elaborada pelo autor.

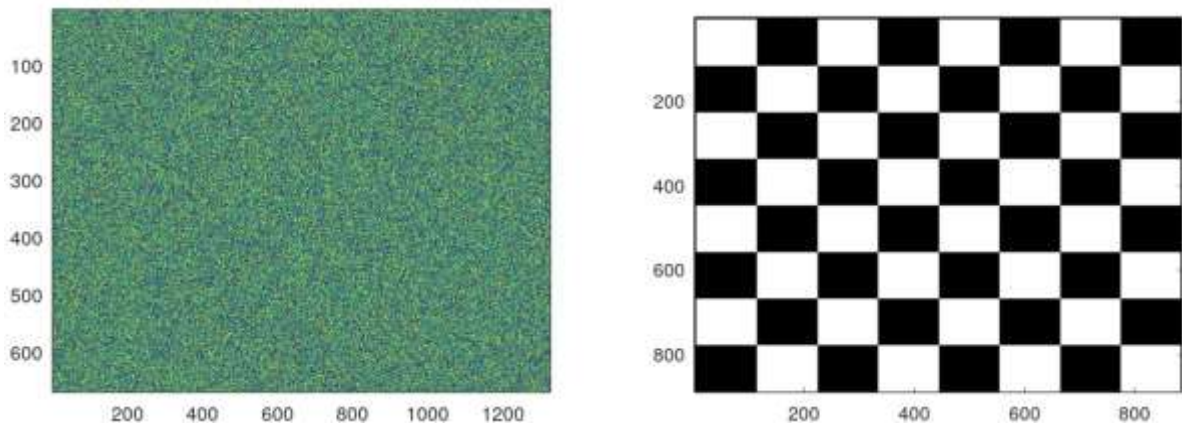
Tabela 2 – Sinais com diferentes níveis de ruído e sua aleatoriedade medida por D_2 . $N(x,y)$ – ruído Gaussiano com valor médio igual a x e variância igual a y

	$s(t)$	Aleatoriedade ($D_2(s(t))$)
I	$2\sin(t)$	427.5291
II	$2\sin(t) + 4 + N(0,0.25)$	174.3615
III	$2\sin(t) + 8 + N(0,1)$	30.2728
IV	$13 + N(0,1)$	0.4917

Fonte: Elaborada pelo autor.

Consideremos por um momento $d_2(s(t)) = |D_2(s(t)) - 0.5|$ como uma medida de aleatoriedade. Como se pode notar, $d_2(s(t)) \geq 0$ mede a distância entre $s(t)$ e um ruído branco medindo a distância entre suas funções de autocorrelação. Como a diferença entre d_2 e D_2 é apenas o valor de referência (0.5), usaremos apenas D_2 ao longo deste trabalho. Nos exemplos mostrados na Figura 5, os sinais $s(t)$ considerados foram sinais unidimensionais. No entanto, pode-se também usar D_2 para calcular a aleatoriedade de um sinal bidimensional. Por exemplo, a Figura 6 mostra uma imagem aleatória (esquerda) e uma imagem periódica (direita). Seus valores de disentropia são, respectivamente, $D_2 = 0.5$ e $D_2 = -2.6643 \cdot 10^4$.

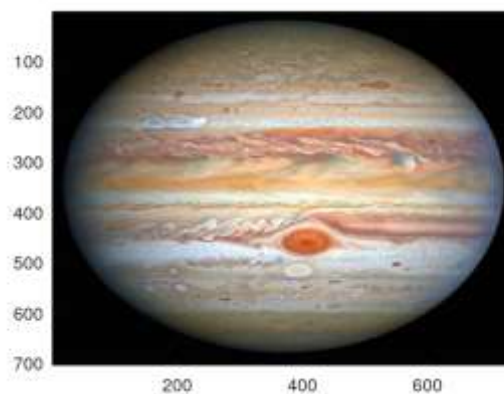
Figura 6 – Imagem aleatória (esquerda) e imagem periódica (direita). Os eixos mostram o número de pixels.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 7, por sua vez, mostra a imagem de Júpiter cuja aleatoriedade medida pela disentropia da autocorrelação é $D_2 = 4158.4$.

Figura 7 – Júpiter



Fonte: Nasa, ESA, Simon, Wong e OPAL (2020).

Inicialmente as imagens coloridas foram transformadas em imagens em tons de cinza. A seguir, as matrizes que representam as imagens foram transformadas em vetores pela concatenação de suas linhas. A autocorrelação de cada vetor foi calculada usando o comando ‘*xcorr()*’ do software OCTAVE. Por fim, a disentropia foi calculada usando a equação (2.16). O programa em OCTAVE que calcula a aleatoriedade de uma dada matriz M é o seguinte:

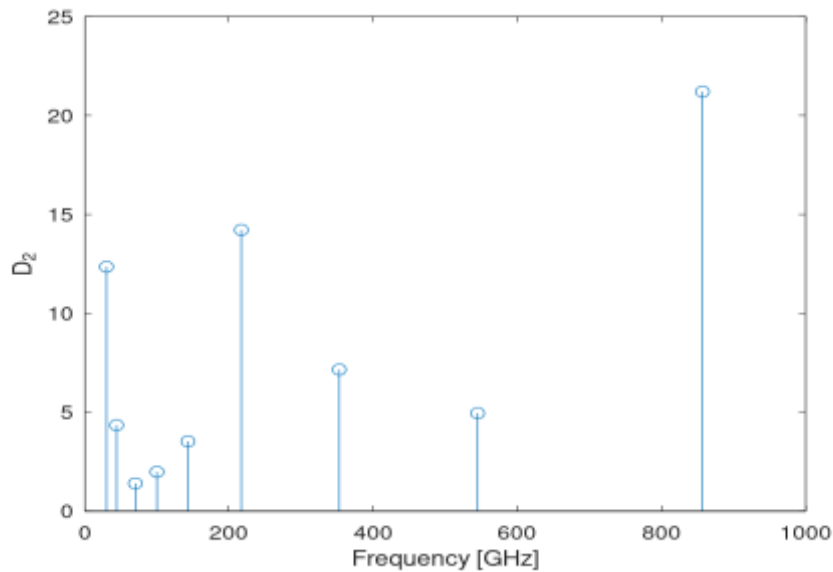
```
function [D2] = Randomness(M)
aux=reshape (M,1, []);
AC=xcorr(aux-mean(aux),'coeff');
D2=(sum((AC.^3)./(1+AC)));
```

4.2 Aleatoriedade dos Mapas CMB

Desde que foi apresentada à comunidade científica, a radiação cósmica de fundo (CMB) medida pelo satélite Planck tem sido usada para testar modelos cosmológicos melhorando a precisão dos parâmetros que foram inicialmente calculados usando os mapas medidos pelos satélites COBE e WMAP. Em geral, esses trabalhos tratam dos multipolos, que são os coeficientes de uma decomposição esférica harmônica. Além dos multipolos, outra propriedade importante dos mapas CMB é a aleatoriedade dos dados medidos. Nos trabalhos de Gurzadyan e Kocharyan (2008) e Gurzadyan *et al.* (2011), o parâmetro de estocasticidade de Kolmogorov (KSP) foi usado para criar um mapa do céu representando o grau de aleatoriedade na temperatura cósmica de fundo em microondas. Este mapa (estimado) de Kolmogorov pode distinguir a contribuição do disco galáctico da CMB, bem como pode revelar regiões com diferentes graus de aleatoriedade, o que pode ser entendido como heterogeneidades no Universo. Além disso, também foi usado para detectar vazios cósmicos nos mapas da CMB que foram confirmados logo em seguida. Outra aplicação notável da técnica KSP foi na análise dos dados residuais de dois satélites LAGEOS sobre o efeito relativístico de formação de lentes. Esses exemplos mostram que o KSP é capaz de detectar efeitos físicos reais. No entanto, o uso do parâmetro de estocasticidade de Kolmogorov requer alguns cuidados quando são considerados sinais correlacionados e de tamanho finito. Além disso, não um parâmetro fácil de calcular numericamente. Neste trabalho, também fazemos uma análise da aleatoriedade do universo primordial usando os mapas da CMB, porém, ao invés de criar um mapa de

aleatoriedade, calculamos a aleatoriedade de cada mapa da CMB usando a disentropia da função de autocorrelação. A Figura 8 mostra a aleatoriedade dos mapas de intensidade da CMB versus frequência. Os valores numéricos da aleatoriedade para intensidade (I) e parâmetros de Stokes (Q , U e P) podem ser vistos na Tabela 3.

Figura 8 - Disentropia da autocorrelação versus frequência [30, 44, 70, 100, 143, 217, 353, 545, 857] GHz



Fonte: Elaborada pelo autor.

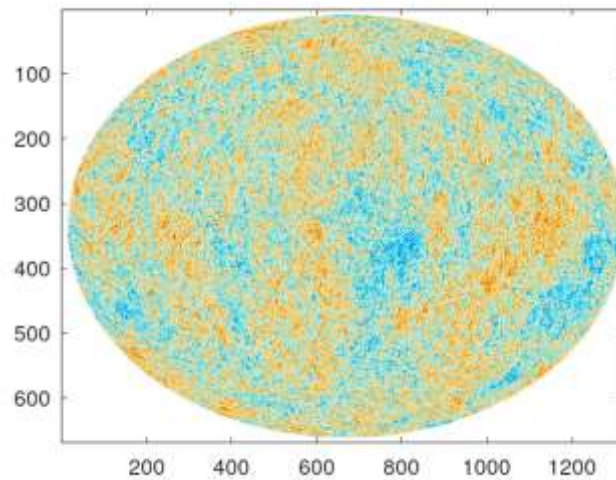
Tabela 3 - Disentropia da autocorrelação *versus* frequência para a intensidade (I) e parâmetros Stokes (Q , U e P)

F [GHz]	$D_2(I)$	$D_2(Q)$	$D_2(U)$	$D_2(P)$
30	12.3521	46.4387	88.4071	4.4331
44	4.3486	13.7528	23.3896	2.1172
70	1.4071	3.5712	2.8815	2.0049
100	1.9875	8.0732	14.0864	7.8726
143	3.5308	16.113	38.214	11.730
217	14.2136	33.8731	59.2607	4.1811
353	7.1598	30.683	27.728	15.641
545	4.9531			
857	21.2023			

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como pode ser visto na Figura 8 e na Tabela 3, quanto menor a contribuição da Via Láctea, maior a aleatoriedade, como esperado. Por exemplo, 70 GHz é a frequência cujos sinais da Via Láctea são mais fracos e, portanto, a aleatoriedade é máxima para intensidade e para todos os parâmetros de Stokes. Quando a contribuição da Via Láctea está ausente, como na imagem SMICA mostrada na Figura 9, a aleatoriedade é $D_2 = 0.8054$, portanto, é muito grande.

Figura 9 – Mapa de temperatura SMICA. Os eixos mostram o número de pixels.

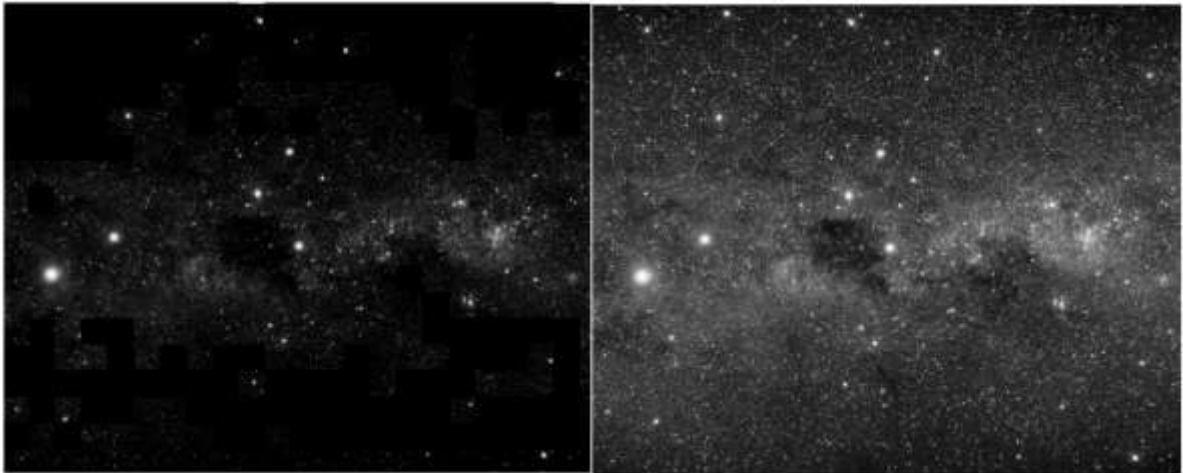


Fonte: ESA, Planck Collaboration I (2013).

4.3 Um Algoritmo Baseado em Disentropia para Remover Estrelas de Fundo de Imagens Astronômicas

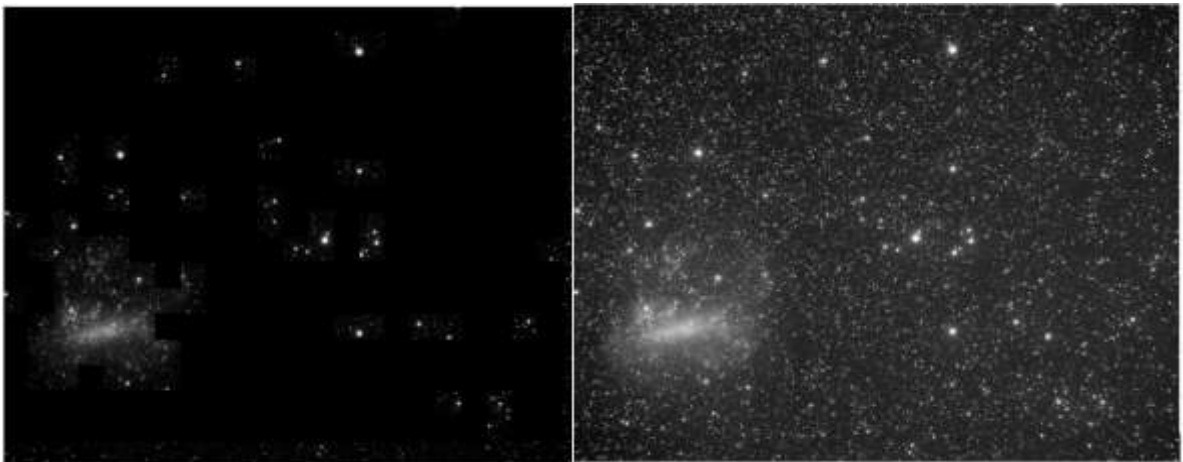
A importância de algoritmos de processamento de imagens para remover estrelas de fundo em imagens astronômicas foi discutida no trabalho de Cohen e Lu (2021), no qual um método baseado em difusão foi proposto. Nesta sessão, usando a disentropia da autocorrelação, propomos um algoritmo muito simples capaz de chegar a um resultado semelhante. Basicamente, como as estrelas parecem estar colocadas em posições aleatórias em uma imagem astronômica, o algoritmo varre a imagem procurando por áreas com aleatoriedade maior que um valor limite predefinido. Quando tal área é encontrada, seus pixels são apagados (eles assumem o valor zero). Similarmente ao algoritmo proposto no trabalho de Cohen e Lu (2021) as imagens são primeiramente convertidas para imagens em escala de cinza. Três exemplos podem ser vistos nas Figuras 10, 11 e 12. As fotos foram obtidas em www.davidmalin.com e no site da NASA.

Figura 10 – Constelações de Musca com Crux. Esquerda: imagem processada. Direita: imagem original.



Fonte: Malin, Fujii ([2008])

Figura 11 – Constelações de Reticulum e Dorado. Esquerda: imagem processada. Direita: imagem original.



Fonte: Malin, Fujii (2008)

Figura 12 – Grupo de galáxias quinteto de Stephan. Esquerda: imagem processada. Direita: imagem original.



Fonte: NASA, ESA, CSA e STScI (2022).

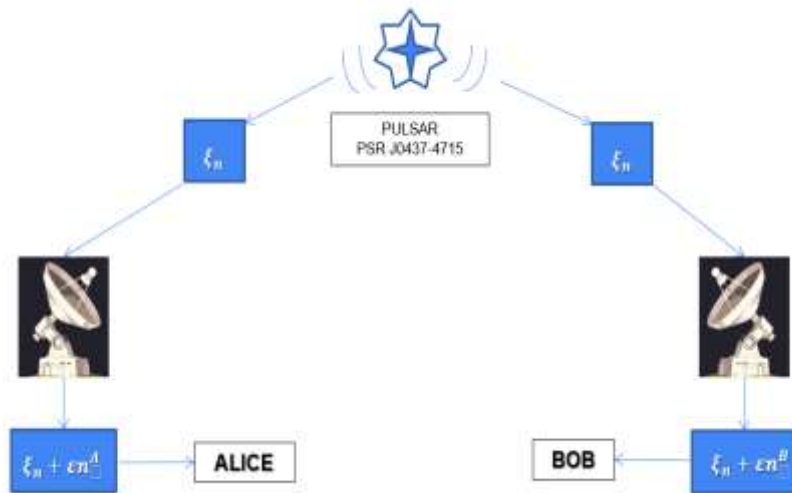
Como se pode ver nas Figuras 10, 11 e 12, estruturas homogêneas como estrelas muito brilhantes são preservadas.

4.4 Cálculo da Aleatoriedade de um Pulsar com a Disentropia

A distribuição de densidade de fluxo da maioria dos pulsares é conhecida por seguir a distribuição log-normal (Mickaliger *et al.*, 2018). Em Dawson *et al.* (2022), essa aleatoriedade da densidade de fluxo do pulsar PSR J0437-4715 foi usada para gerar uma sequência de bits aleatórios que funcionou como chave criptográfica em uma comunicação entre a Austrália, radiotelescópio Parkes, e a China, radiotelescópio FAST, mostrado esquematicamente na Figura 13. Além disso, foi verificada uma correlação pulso a pulso nos valores da densidade de fluxo, o que diminui a aleatoriedade do sinal do pulsar. Verificou-se que para o pulsar PSR J0437-4715, esta correlação cai para quase zero para separações iguais ou maiores que cinco pulsos. Portanto, apenas um a cada 5 valores foi usado para extrair os bits aleatórios. Três métodos diferentes foram usados para extrair bits do valor contínuo da densidade de fluxo. Por fim, a aleatoriedade da sequência de bits obtida foi verificada usando o conjunto de testes estatísticos do NIST. No entanto, a aleatoriedade dos próprios dados do pulsar não foi analisada em Dawson *et al.* (2022). Nesta seção, mostramos a aleatoriedade dos dados do PSR J0437-4715 para diferentes valores de separação de tempo (medida em número de pulsos) entre os

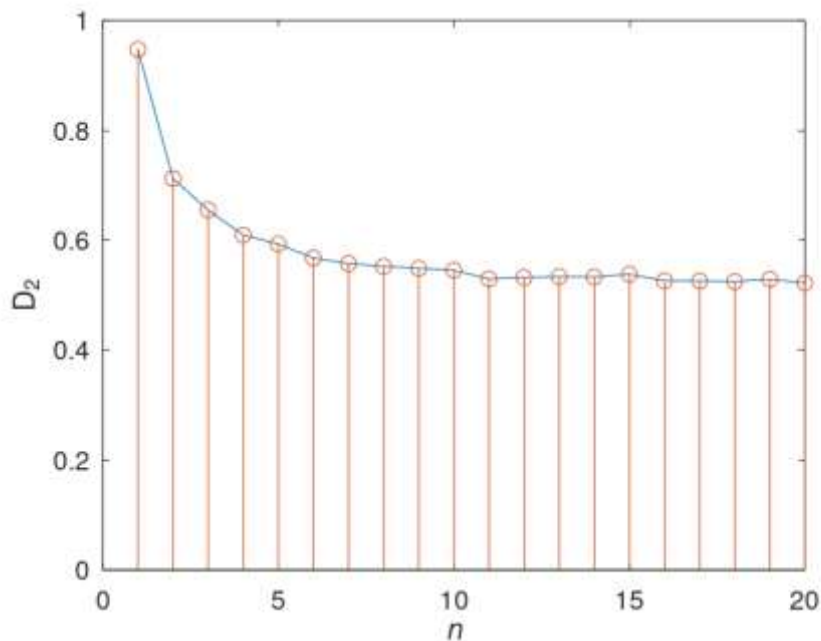
pulsos considerados para formar a sequência de bits aleatórios. O resultado é mostrado na Figura 14 (Dados reais obtidos o portal de acesso CSIRO Data (data.csiro.au)).

Figura 13 – Esquema para geração de chave criptográfica usando um pulsar. ξ_n – valor da densidade de fluxo do n -ésimo pulso recebido. ε_n – ruído Gaussiano do radiotelescópio (A – transmissor, B - receptor).



Fonte: Elaborada pelo autor.

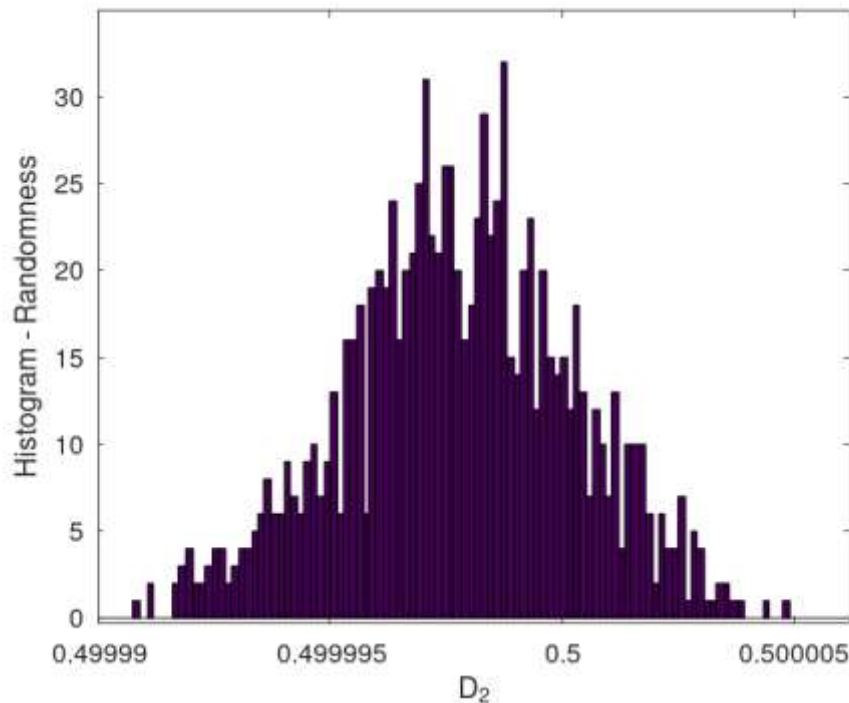
Figura 14 – Disentropia da autocorrelação dos valores medidos da densidade de fluxo do pulsar PSR J0437-4715 versus separação temporal em termos do número de pulsos



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como a correlação entre pulsos vizinhos diminui a aleatoriedade, pode-se ver claramente na Figura 14 o aumento da aleatoriedade em direção ao seu valor máximo ($D_2 \rightarrow 0.5$) quando o intervalo de tempo entre os pulsos considerados aumenta. Assim, para aumentar a aleatoriedade, o experimento realizado em Dawson *et al.* (2022) utilizou apenas um a cada 5 valores, diminuindo a taxa de bits por um fator de 5 (são 1.060.000 pulsos, mas a chave final tinha apenas 200.000 bits). No entanto, isso não é necessário. Uma permutação aleatória da sequência de densidades de fluxo fornecerá uma sequência com $D_2 \sim 0.5$ e, portanto, nenhum pulso precisa ser descartado. A Figura 15 mostra o histograma da disentropia para mil permutações aleatórias dos dados da densidade de fluxo do PSR J0437-4715. Neste caso, deve-se observar que ambos os usuários legítimos (equipes Parkes e FAST em Dawson *et al.*, 2022) devem aplicar a mesma permutação aleatória que não precisa ser secreta, pois não vaza nenhuma informação sobre a sequência de bits obtida. Como pode ser visto na Figura 15, a permutação aleatória destrói a correlação e torna o sinal do pulsar maximamente aleatório.

Figura 15 - Histograma da disentropia da autocorrelação de mil permutações aleatórias dos dados do pulsar PSR J0437-4715



Fonte: Elaborada pelo autor.

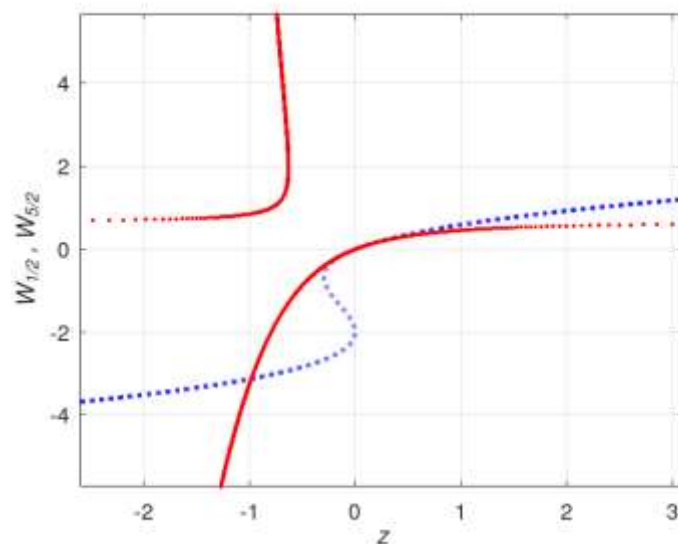
5 APLICAÇÕES DA FUNÇÃO W_q DE LAMBERT-TSALLIS NA ASTRONOMIA

Neste capítulo o objetivo é discutir aplicações da função W_q de Lambert-Tsallis em astronomia. Embora possa haver muitas aplicações, esta tese se restringe a dois problemas:

- Cálculo da frequência de rotação de um pulsar a partir da frequência da onda gravitacional emitida, e ;
- Aproximação da solução da equação de Kepler para pequenos valores da excentricidade. Em ambos os problemas surgem polinômios cúbicos, cujas raízes podem ser obtidas analiticamente usando as funções W_q com $q = 1/2$ ou $q = 5/2$.

Os gráficos de $W_{1/2}$ e $W_{5/2}$ são mostrados na Figura 16.

Figura 16 - $W_{1/2}$ (azul) e $W_{5/2}(z)$ (vermelho) versus z



Fonte: Elaborada pelo autor.

Se $q < 1$, então o primeiro ramo inferior deve tocar o eixo y em $W_q(0) = 1/(q-1)$. De fato, para $q = 1/2$, o primeiro ramo inferior toca o eixo y em $W_{1/2}(0) = -2$. Por outro lado, se $q > 1$, o ramo superior tende para a assíntota $\lim_{z \rightarrow \infty} W_q(z) = 1/(q-1)$. De fato, para $q = 5/2$ tem-se $\lim_{z \rightarrow \infty} W_{5/2}(z) = 2/3$. Além disso, como as soluções de um polinômio cúbico podem ser obtidas através de $W_{1/2}$ ou $W_{5/2}$, ambas precisam apresentar uma região onde seja possível encontrar três valores reais. Isto também está mostrado na Figura 16.

5.1 Cálculo da Frequência de Rotação de um Pulsar a Partir da Frequência da Onda Gravitacional Emitida

A relação entre a frequência da onda gravitacional emitida por pulsar que está girando e a frequência de rotação desse pulsar (Lia *et al.*, 2025) é dada por

$$f_{gw} = Av - \frac{B}{v_k^2} v^3 \Rightarrow v^3 - \frac{Av_k^2}{B} v + \frac{v_k^2 f_{gw}}{B} = 0. \quad (5.1)$$

Em (5.1) v é a frequência de rotação (Hz) da estrela, v_k é a frequência Kepleriana de ruptura, isto é, o limite superior de rotação estável do pulsar. Um valor típico de v_k para uma estrela de nêutrons é 506 Hz. Por fim, os parâmetros A e B estão nos intervalos $1.39 \leq A \leq 1.57$ e $0 \leq B \leq 0.195$ [18]. O parâmetro A leva em consideração o arrasto e a curvatura do espaço-tempo em estrelas de rotação lenta, enquanto o parâmetro B leva em consideração o achatamento e efeitos rotacionais não lineares.

Como mostrado em Lia *et al.* (2025), a equação (5.1) pode ser invertida para se calcular v a partir de f_{gw} . As soluções são

$$v_1 = \left\{ -\frac{A}{2B} v_k^2 W_{1/2} \left(-\frac{2B}{Av_k^2} \left(\frac{f_{gw}}{A} \right)^2 \right) \right\}^{1/2} \quad (5.2)$$

$$v_2 = \left\{ -\frac{3B}{2Av_k^2} W_{5/2} \left(\frac{2Av_k^2}{3B} \left(-\frac{B}{f_{gw} v_k^2} \right)^{2/3} \right) \right\}^{-1/2} = \left\{ -\frac{3B}{2Av_k^2} W_{5/2} \left((-1)^{2/3} \frac{2Av_k^2}{3B} \left(\frac{B}{f_{gw} v_k^2} \right)^{2/3} \right) \right\}^{-1/2}. \quad (5.3)$$

As equações (5.2) e (5.3) levam aos mesmos resultados, mas a equação (5.2) é mais fácil de calcular numericamente. Por exemplo, usando $A = 1.39$, $B = 0.195$, $f_{gw} = 86$ Hz e $v_k = 506$ Hz (Lia *et al.*, 2025), obtém-se $v_1 = v_2 = 62.1$ Hz.

Pode-se mostrar que o ponto de ramificação da função W_q de Lambert-Tsallis (ponto onde dois ramos diferentes se encontram e onde $dW_q(z)/dz = \infty$) é o ponto ($z_b = \exp_q(1/(q-2))/(q-2)$, $W_q(z_b) = 1/(q-2)$), para $q \neq 2$. Isso quer dizer que soluções complexas de $W_q(z)$ começam a aparecer quando $z < z_b$. Usando essa condição em (5.2) obtém-se

$$-\frac{2B}{Av_k^2} \left(\frac{f_{gw}}{A} \right)^2 > -\frac{8}{27} \Rightarrow \frac{B}{A^3} < \frac{4}{27} \left(\frac{v_k}{f_{gw}} \right)^2. \quad (5.4)$$

A equação (5.4) é a condição que os parâmetros A e B devem obedecer para que (5.2) forneça uma solução real. Fisicamente, ela relaciona efeitos de curvatura do espaço-tempo, arrasto, achatamento e efeitos rotacionais não lineares com as frequências da onda gravitacional emitida e a frequência de ruptura da estrela.

5.2 Cálculo da solução da equação de Kepler

Um segundo exemplo de aplicação da função W_q em astronomia é em mecânica celeste, na solução numérica da equação transcendental de Kepler (Boyd, 2007; Perovich *et al.*, 2016)

$$M = E - e \sin(E). \quad (5.5)$$

A equação (5.5) descreve, por exemplo, uma órbita elíptica de um planeta ao redor de uma estrela. A elipse da órbita possui excentricidade e , M é a anomalia média e E é a excentricidade anômala do movimento elíptico. Até o presente momento não há solução analítica para a equação (5.5). Há vários métodos numéricos para resolvê-la (Boyd, 2007; Perovich *et al.*, 2016). Nesta seção é apresentado um novo método de aproximar a solução de (5.5), usando W_q , no regime de pequenos valores da excentricidade e .

Se o valor de e for muito pequeno, a aproximação da função seno por um polinômio de grau 3 pode ser suficientemente boa. Usando a aproximação por série de Taylor, a equação (5.5) pode ser aproximada por

$$M = E - e \left(E - \frac{E^3}{3!} \right) \Rightarrow E^3 + \frac{6(1-e)}{e} E - \frac{6M}{e} = 0, \quad (5.6)$$

cuja solução analítica é

$$E = \left[\frac{3(1-e)}{e} W_{1/2} \left(\frac{eM^2}{3(1-e)^3} \right) \right]^{1/2}. \quad (5.7)$$

Outra aproximação melhor pode ser obtida se usarmos a aproximação de Padé ao invés da série de Taylor. Neste caso tem-se,

$$M = E - e \left(\frac{E - \frac{7}{60} E^3}{\frac{1}{20} E^2 + 1} \right) \Rightarrow E^3 - \left(\frac{3M}{3+7e} \right) E^2 + \left(\frac{60(1-e)}{3+7e} \right) E - \left(\frac{60M}{3+7e} \right) = 0. \quad (5.8)$$

A solução analítica de (5.8) é a seguinte:

$$E = \sqrt{\frac{p}{2} W_{1/2} \left(\frac{2q^2}{p^3} \right)} + \left(\frac{M}{3+7e} \right) \quad (5.9.a)$$

$$p = \left(\frac{60(1-e)}{3+7e} \right) - 3 \left(\frac{M}{3+7e} \right)^2 \quad (5.9.b)$$

$$q = -2 \left(\frac{M}{3+7e} \right)^3 - 120 \left(\frac{M}{3+7e} \right) \left(\frac{1+4e}{3+7e} \right). \quad (5.9.c)$$

Ou seja,

$$E = \sqrt{\frac{\left[\left(\frac{60(1-e)}{3+7e} \right) - 3 \left(\frac{M}{3+7e} \right)^2 \right]}{2} W_{1/2} \left(\frac{2 \left[-2 \left(\frac{M}{3+7e} \right)^3 - 120 \left(\frac{M}{3+7e} \right) \left(\frac{1+4e}{3+7e} \right) \right]^2}{\left[\left(\frac{60(1-e)}{3+7e} \right) - 3 \left(\frac{M}{3+7e} \right)^2 \right]^3} \right)} + \left(\frac{M}{3+7e} \right)}. \quad (5.10)$$

Uma aproximação melhor para a solução da equação (5.5) é obtida se a função seno for aproximada por um polinômio de ordem cinco. Como a aproximação de Padé tem melhor convergência que a aproximação por série de Taylor, esta é a única que será considerada. Assim, tem-se a seguinte aproximação de quinta ordem para a equação (5.5):

$$M = E - e \frac{\frac{551}{166320} E^5 - \frac{53}{396} E^3 + E}{\frac{5}{11088} E^4 + \frac{13}{396} E^2 + 1} \Rightarrow \quad (5.11.a)$$

$$\left(\frac{5}{11088} - \frac{551e}{166320}\right)E^5 - \frac{5M}{11088}E^4 + \left(\frac{13}{396} + \frac{53e}{396}\right)E^3 - \frac{13M}{396}E^2 + (1-e)E - M = 0.$$

(5.11.b)

É possível chegar a uma solução analítica da equação (5.11.b). Todo polinômio de grau cinco $a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ pode ser escrito na forma de Bring-Jerrard, $x^5 + b_1x + b_0 = 0$, que é um trinômio e, portanto, suas raízes podem ser escritas em função de W_q . Entretanto, essa solução analítica é enorme, difícil de manipular e de entender o papel das variáveis na solução. Desta forma, optamos por uma solução numérica, mas que usa W_q . Basicamente, a equação (5.11.b) é escrita como um mapa $E_{n+1} = g(E_n)$ cujo ponto de convergência, $E_{n+1} = E_n = E$, é uma das raízes de (5.11.b). O primeiro passo é escrever (5.11.b) da seguinte forma:

$$\left(\frac{5}{11088} - \frac{551e}{166320}\right)E_{n+1}^5 + (1-e)E_{n+1} - M = E_n^2 \left[\frac{5M}{11088}E_n^2 - \left(\frac{13}{396} + \frac{53e}{396}\right)E_n + \frac{13M}{396} \right], \quad (5.13)$$

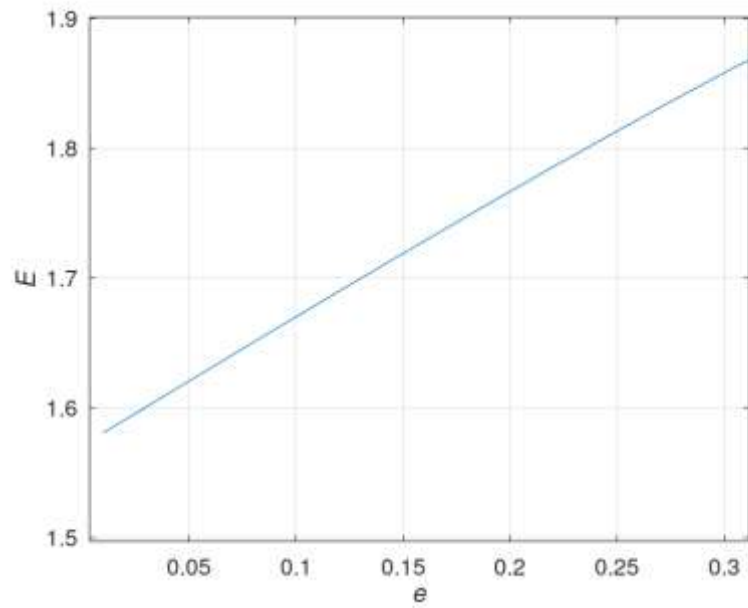
cuja solução usando a função de Lambert-Tsallis é

$$E_{n+1} = \left\{ \frac{(1-e)}{4 \left(\frac{5}{11088} - \frac{551e}{166320}\right)} W_{3/4} \left(\frac{4 \left(\frac{5}{11088} - \frac{551e}{166320}\right) \left[f(E_n) + M \right]^4}{(1-e)^5} \right) \right\}^{1/4} \quad (5.14)$$

$$f(E_n) = E_n^2 \left[\frac{5M}{11088}E_n^2 - \left(\frac{13}{396} + \frac{53e}{396}\right)E_n + \frac{13M}{396} \right]. \quad (5.15)$$

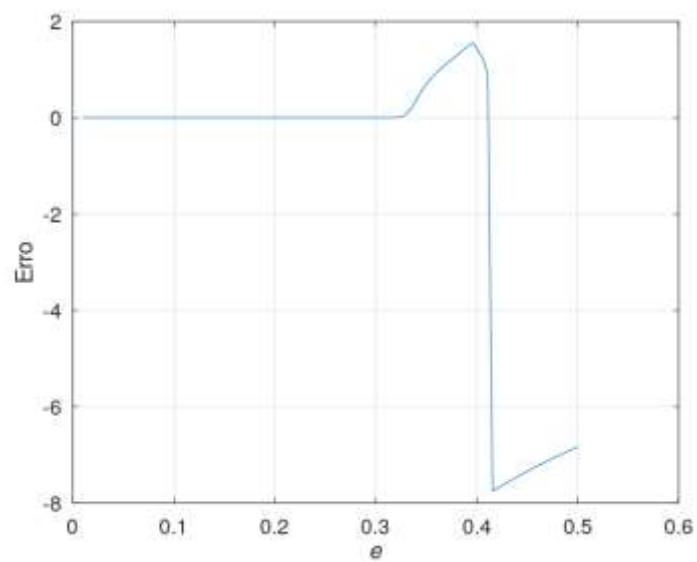
As Figuras 17 e 18 a seguir mostram, respectivamente, o cálculo numérico de E dado em (5.5) usando o mapa (5.14)-(5.15), com $M = \pi/2$ e $e \in [0.01, 0.5]$, e o erro $\pi/2 - [E - e \cdot \sin(E)]$ com o valor de E obtido após 50 iterações do mapa (5.14)-(5.15). O erro é da ordem de 10^{-4} para $e = 0.3$.

Figura 17 – E versus e



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 18 – Erro ($M - (E - e \cdot \sin(E))$) versus e , com $M = \pi/2$



Fonte: Elaborada pelo autor.

6 CONCLUSÃO

Inicialmente, esta tese descreveu três aplicações da medida de aleatoriedade baseada na disentropia da autocorrelação em astronomia:

- a) Cálculo da aleatoriedade de mapas CMB gerados pelo satélite Planck: De uma forma geral, mesmo com a presença dos dados da via Láctea, esses mapas apresentam uma aleatoriedade significativa, em média cerca de 200 vezes mais aleatórios que a imagem de Júpiter. Quando a contribuição da via Láctea é retirada, a aleatoriedade aumenta ($D_2 \sim 0.8$) e fica bem próxima do valor máximo ($D_2 = 0.5$). Essa aleatoriedade nos mapas da CMB reflete a aleatoriedade da densidade no universo primitivo, o que pode ser uma importante contribuição para explicar a homogeneidade do universo que é percebida hoje;
- b) Foi proposto um simples algoritmo que remove estrelas de imagens astronômicas mostrando que a disentropia é uma ferramenta matemática útil no processamento de imagens astronômicas;
- c) A disentropia foi usada no cálculo da aleatoriedade da densidade de fluxo do pulsar PSR J0437-4715. Foi mostrado a queda da correlação nas medidas (aumento da aleatoriedade) quando o intervalo de tempo entre os pulsos medidos aumenta, evidenciando o efeito de memória da dinâmica da estrela.

Em seguida, foram resolvidos dois problemas matemáticos em astronomia usando a função de Lambert-Tsallis:

- a) Foi utilizado o ponto de ramificação da função $W_{1/2}$ para encontrar uma relação entre os coeficientes A (relatividade geral) e B (achatamento e efeitos não lineares) e as frequências de rotação de ruptura do pulsar e da onda gravitacional emitida por ele, equação (5.4);
- b) Para valores muito pequenos da excentricidade e onde uma aproximação de terceira ordem é razoável, foram fornecidas duas soluções analíticas para a equação de Kepler. Para uma solução aproximada de quinta ordem, foi apresentado um algoritmo numérico que utiliza $W_{3/4}$, que converge rapidamente para a resposta correta, com erro menor que 10^{-4} , quando $e < 0.3$.

Como perspectivas de trabalhos futuros, pode-se citar:

- a) Usar a disentropia para ordenar pulsares de acordo com a aleatoriedade, o que pode permitir a escolha de melhores pulsares, isto é, que possam gerar taxas mais altas

de geração de bits aleatórios, para serem usados como geradores de números aleatórios.

- b) Desenvolver novos algoritmos de processamento de imagens astronômicas baseados na disentropia da autocorrelação e comparar com outros algoritmos existentes.
- c) Verificar a relação física proveniente da desigualdade (5.4).

REFERÊNCIAS

- ADSUARA, G. B.; RAMOS, R. V. The Lambert–Tsallis W_q function. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Amsterdam, v. 525, p. 164–170, 2019.
- AI-YUAN, Y.; JINLIN, H.; NA, W. A new method to analyze pulsar nulling phenomenon. **Science China: Physics, Mechanics & Astronomy**, China, v. 57, n. 8, p. 1600–1606, 2014. DOI: 10.1007/s11433-014-5534-x. Disponível em: <chrome-extension://efaidnbmninnibpcajpegclclefindmkaj/https://arxiv.org/pdf/1310.6610>. Acesso em: 01 jul. 2025.
- ANDRADE, J. S. de; NOBREGA, K. Z.; RAMOS, R. V. Analytical Solution of the Current-Voltage Characteristics of Circuits with Power-Law Dependence of the Current on the Applied Voltage Using the Lambert-Tsallis W_q Function. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs**, v. 69, n. 3, p. 769 – 773, 2022. DOI: 10.1109/TCSII.2021.3110407. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9530244>. Acesso em: 31 jul. 2025.
- BOYD, J. P. Rootfinding for a transcendental equation without a first guess: Polynomialization of Kepler’s equation through Chebyshev polynomial expansion of the sine. **Applied Numerical Mathematics**, Netherlands, v. 57, p. 12–18, 2007.
- CARROLL, B. W.; OSTLIE, D. A. **An Introduction to Modern Astrophysics**. 2. ed. London: Pearson, 2017. ISBN: 9781108422161.
- CASTRO, G. S.; RAMOS, R. V. Enhancing eavesdropping detection in quantum key distribution using disentropy measure of randomness. **Quantum Information Processing**, New York, v. 21, n. 2, p. 1-10, 2022. Disponível em: <https://link.springer.com/10.1007/s11128-022-03422-y>. Acesso em: 23 jul. 2025.
- COHEN, M.; LU, W. A diffusion-based method for removing background stars from astronomical images. **Astronomy and Computing**, Netherlands, v. 37, e100507, p. 1-8, 2021.
- CORLESS, R. M.; GONNET, G. H.; LEBRE, D. E. G.; JEFFREY, D. J.; KNUTH, D. E. On the Lambert W function. **Advances in Computational Mathematics**, Netherlands, v. 5, n. 1, p. 329–359, 1996. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/BF02124750>. Acesso em: 25 jul. 2025.
- DAWSON, J. R.; HOBBS, G.; GAO, Y.; CAMTEPE, S.; PIEPRZYK, J.; FENG, Y.; TRANFA, L.; BRADBURY, S.; ZHU, W.; LI, D. Physical publicly verifiable randomness from pulsars. **Astronomy and Computing**, Netherlands, v. 38, e100549, p. 1-10, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ascom.2022.100549>. Acesso em: 26 jul. 2025.
- EUROPEAN SPACE AGENCY; PLANCK COLLABORATION. **Fundo cósmico de microondas visto por Planck**. 20 mar. 2013. Disponível em: <https://sci.esa.int/web/planck/-/51553-cosmic-microwave-background-seen-by-planck>. Acesso em: 26 jul. 2025.

ESPINOZA, C. M.; ANTONOPOULOU, D.; STAPPERS, B. W.; WATTS, A.; LYNE, A. G. Neutron star glitches have a substantial minimum size. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford, v. 440, n. 3, p. 2755–2762, 2014. DOI: 10.1093/mnras/stu395. Disponível em: <https://academic.oup.com/mnras/article/440/3/2755/1079566>. Acesso em: 26 jul. 2025.

GKOULIARAS, K.; THEOS, V.; DAHM, Z.; RICHARDS, W. False data injection detection in nuclear systems using dynamic noise analysis. *IEEE Access*, New Jersey, v. 12, e94936, p. 94936-94949, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2024.3425270>. Acesso em: 25 jul. 2025.

GLENDENNING, N. K. **Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity**. 2. ed. Berlim: Springer, 2000. ISBN 978-1-4684-0493-7.

GURZADYAN, V. G.; KOCHARYAN, A. A. Kolmogorov stochasticity parameter measuring the randomness in the cosmic microwave background. *Astronomy & Astrophysics*, [S.l.], v. 492, n. 2, p. L33–L34, 2008. DOI: 10.1051/0004-6361:200811188. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/2211949_Kolmogorov_stochasticity_parameter_measuring_the_randomness_in_Cosmic_Microwave_Background. Acesso em: 25 jul. 2025.

GURZADYAN, V. G.; GRAHRAMANYAN, T.; SARGSYAN, S. Degree of randomness: Numerical experiments for astrophysical signals. *EPL*, Bristol, v. 95, n. 1, e19001, p. 1-6, 2011. DOI: 10.1209/0295-5075/95/19001. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1209/0295-5075/95/19001>. Acesso em: 26 jul. 2025.

JENNEWEIN, T.; ACHLEITNER, U.; WEIHS, G. WEINFURTER, H.; ZEILINGER, A. A fast and compact quantum random number generator. *Review of Scientific Instruments*, Melville, v. 71, n. 4, p. 1675–1680, 2000. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.1150518>. Acesso em: 24 jul. 2025.

JIMÉNEZ, P.; CARDOSO, R.; QUEIROZ, M. G.; ABDALLA, M.; MARCHAND, C.; LETARTRE, X.; PAVANELLO, F. Complexity assessment of analog security primitives using the disentropy of autocorrelation. *arXiv preprint*, [S.l.], p. 1-11, 2024. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2402.17488>. Acesso em: 30 jul. 2025.

KAUR, D.; HOBBS, G.; ZIC, A.; DAWSON, J. R.; MORGAN, J.; LING, W.; CAMTEPE, S.; PIEPRZYK, J.; CHEUNG, M. C. M. Unlocking the hidden potential of pulsar astronomy. *New Astronomy*, Netherlands, v. 121, e102460, p. 1-15, 2025. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.newast.2025.102460>. Acesso em: 28 jul. 2025.

LEE, J. S.; CLEAVER, G. B. The cosmic microwave background radiation power spectrum as a random bit generator for symmetric- and asymmetric-key cryptography. *Heliyon*, London, v. 3, n. 10, e00422, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2017.e00422>. Acesso em: 05 jul. 2025.

LENA, P.; ROUAN, D.; LEBRUN, F.; MIGNARD, F.; PELAT, D. **Observational Astrophysics**. 3. ed. Berlim: Springer, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-21815-6>. Acesso em: 27 jul. 2025.

LIA, X.; ABBASSIA, S.; UPADHYAYAD, V.; ZHANG, X.; VALLURI, S. R. The role of r-modes in pulsar spin-down, pulsar timing, and gravitational waves. **Journal of High Energy Astrophysics**, Amsterdam, v. 49, e100446, p. 1-11, 2025. Disponível em: <chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://arxiv.org/pdf/2307.11270>. Acesso em: 10 ago. 2025.

LONGAIR, M. S. **The Cosmic Century: A History of Astrophysics and Cosmology**. Cambridge University Press: Cambridge, 2006. ISBN 9780521474368.

LYNE, A. G.; JORDAN, C. A.; GRAHAM-SMITH, F.; ESPINOZA, C. M.; GRAMPEADORES BW; WELTEVREDE, P. 45 years of rotation of the Crab pulsar. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, London, v. 446, p. 857–864, 2015. DOI: 10.1093/mnras/stu2118. Disponível em: <chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://arxiv.org/pdf/1410.0886>. Acesso em: 10 jun. 2025.

MALIN, D.; FUJII, A. **Constelações de Retículo e Dorado**. 2008. Disponível em: <https://www.davidmalin.com/fujii/source/Ret.html>. Acesso em: 30 jul. 2025.

_____; _____. **AF1-02. The Southern Milky Way, from the Pointers to the Carina nebula, centred on alpha Crux in the Southern Cross**. [2008?]. Disponível em: https://www.davidmalin.com/fujii/source/af1-02_72.html. Acesso em: 30 jul. 2025.

MENDES, F. V.; LIMA, C.; RAMOS, R. V. Applications of the Lambert–Tsallis W_q function in quantum photonic Gaussian boson sampling. **Quantum Information Processing**, New York, v. 21, e215, p. 1-11, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11128-022-03559-w>. Acesso em: 02 jun. 2025.

MICKALIGER, M. B.; McEVEN, A. E; McLAUGHLIN, M.; LORIMER, Dr. A study of single pulses in the Parkes Multibeam Pulsar Survey. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, London, v. 479, n. 4, p. 5413–5422, 2018. Disponível em: <https://academic.oup.com/mnras/article/479/4/5413/5050061>. Acesso em: 16 jul. 2025.

NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION; HUBBLE SPACE TELESCOPE; APPALACHIAN STATE UNIVERSITY; HESTER, J. *et al.* **Imagens combinadas de raios X e ópticas da Nebulosa do Caranguejo**. 2003. Disponível em: <https://science.nasa.gov/asset/hubble/combined-x-ray-and-optical-images-of-the-crab-nebula/>. Acesso em: 23 jul. 2025.

_____; EUROPEAN SPACE AGENCY; HESTER, J.; LOLL, A. **Nebulosa do Caranguejo**. 2005. Disponível em: <https://esahubble.org/media/archives/images/screen/heic0515a.jpg>. Acesso em: 01 ago. 2025.

_____; _____; SIMON, A.; WONG, M. H.; OPAL. **Visão de Júpiter e Europa pelo Hubble em agosto de 2020**. 2020. Disponível em: <https://esahubble.org/images/heic2017a/>. Acesso em: 17 ago. 2025.

_____; _____; CANADIAN SPACE AGENCY; SPACE TELESCOPE SCIENCE INSTITUTE (STScI). **Quinteto de Stephan (Imagem Composta NIRC*am* e MIRI)**. 2022.

Disponível em: <https://science.nasa.gov/asset/webb/stephans-quintet-nircam-and-miri-composite-image/>. Acesso em: 14 jun. 2025.

_____; GODDARD SPACE FLIGHT CENTER. *The High Energy Astrophysics Science Archive Research Center (HEASARC)*. [2025]. Disponível em: <https://heasarc.gsfc.nasa.gov/>. Acesso em: 23 jun. 2025.

PEROVICH, S. M.; CALASAN, M.; KOVAC, D.; TOSIC, I. Concerning an analytical solution of some families of Kepler's transcendental equation. *AIP Advances*, Melville, v. 6, e035016, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.4944836>. Acesso em: 04 jul. 2025.

PULSARES. A estrela morta que ofusca 10000 sóis. *Physics Explained*, 2025. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=yNN9Cu7K-nk&t=2000s>. Acesso em: 30 jun. 2025.

RAMOS, D. L.; PEROVANO, M. M. F.; SPALENZA, W.; COELHO, J. G. Uma revisão sobre o índice de frenagem de pulsares. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Brasília, v. 47, e20240317, 2025. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2024-0317>. Acesso em: 30 jun. 2025.

RAMOS, R. V. Analytical solutions of cubic and quintic polynomials in micro and nanoelectronics using the Lambert-Tsallis W_q function. *Journal of Computational Electronics*, Netherlands, v. 21, p. 396-400, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10825-022-01852-6>. Acesso em: 15 jul. 2025.

RAMOS, R. V. Disentropy of the Wigner function. *Journal of the Optical Society of America B*, Washington, v. 36, n. 8, p. 2244, 2019. Disponível em: <https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=josab-36-8-2244>. Acesso em: 16 jun. 2025.

RAMOS, R. V. Estimation of the randomness of continuous and discrete signals using the disentropy of the autocorrelation. *SN Computer Science*, Berlim, v. 2, n. 4, p. 3-9, 2021. Disponível em: <https://link.springer.com/10.1007/s42979-021-00666-w>. Acesso em: 23 jul. 2025.

REDMAN, S. L.; RANKIN, J. M. On the randomness of pulsar nulls. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, London, v. 395, p. 1529–1532, 2009. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2009.14632.x. Disponível em: <chrome-extension://efaidnbnmnibpcjpcglclefindmkaj/https://scispace.com/pdf/on-the-randomness-of-pulsar-nulls-1lpkyef8cj.pdf>. Acesso em: 30 jul. 2025.

SHAPIRO, S. L.; TEUKOLSKY, S. A. **Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects**. Weinheim: Wiley-VCH, 1983. ISBN 978-3-527-41450-5.

SILVA, J. L. M. da; MENDES, F. V.; RAMOS, R. V. Radial basis function network using Lambert-Tsallis W_q function. *Physica A*, Amsterdam, v. 534, e122168, p. 1-9, 2019.

SILVA, G. B. da; RAMOS, R. V. The Lambert–Tsallis W_q function. *Physica A*, Amsterdam, v. 525 p. 164–170, 2019.

SMITS, J.M. Esquema de um pulsar, apresentando as linhas de campo magnético e o feixe de radiação escapando pelos polos magnéticos. *In: WIKIPEDIA*. 2007. Disponível em:

https://pt.wikipedia.org/wiki/Pulsar#/media/Ficheiro:Pulsar_schematic.jp. Acesso em: 29 jun. 2025.

STIPČEVIĆ, M.; ROGINA, B. M. Quantum random number generator based on photonic emission in semiconductors. **Review of Scientific Instruments**, Melville, v. 78, n. 4, e045104, p. 1-7, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.2720728>. Acesso em: 07 jun. 2025.

TRÜMPER, J. X-ray astronomy. *In: ASTROPHYSICS and Space Science Library*. Berlim: Springer, 2009. v. 356. ISBN 9783540824350.

TSALLIS, C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. **Journal of Statistical Physics**, New York, v. 52, n. 1–2, p. 479–487, 1988.

WILSON, T. L.; ROHLFS, K.; HÜTTEMEISTER, S. **Tools of Radio Astronomy**. 6. ed. Berlim: Springer, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-39950-3>. Acesso em: 13 jul. 2025.

ZIELKE, G. **Astrophysics for Physicists**. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

F. J. L. de Almeida, R. V. Ramos, Disentropy in astronomy, *Eur. Phys. J. Plus*, 138, 20 (2023).
<https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-022-03640-4>

Eur. Phys. J. Plus (2023) 138:20
<https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-022-03640-4>

THE EUROPEAN
PHYSICAL JOURNAL PLUS

Regular Article



Disentropy in astronomy

F. J. L. de Almeida^a, R. V. Ramos^b 

Laboratory of Quantum Information Technology, Department of Teleinformatic Engineering, DETI/UFC, Federal University of Ceará, Campus do Pici, C.P. 6007, Fortaleza, CE 60455-970, Brazil

Received: 7 December 2022 / Accepted: 28 December 2022

© The Author(s), under exclusive licence to Società Italiana di Fisica and Springer-Verlag GmbH Germany, part of Springer Nature 2023