UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ROBERTO FERREIRA SENA FILHO

GUIA PRÁTICO NA IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON NA CALCULADORA CIENTÍFICA PARA DETERMINAÇÃO DE RAÍZES REAIS DE FUNÇÕES REAIS

MARANGUAPE – CE
2024

ROBERTO FERREIRA SENA FILHO

GUIA PRÁTICO NA IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON NA CALCULADORA CIENTÍFICA PARA DETERMINAÇÃO DE RAÍZES REAIS DE FUNÇÕES REAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Francisco do Carmo Silva.

MARANGUAPE – CEARÁ

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S477g Sena Filho, Roberto Ferreira.
Guia prático na implementação do método de Newton-Raphson na calculadora científica para determinação de raízes reais de funções reais / Roberto Ferreira Sena Filho. – 2024.
53 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Instituto UFC Virtual, Curso de Matemática, Fortaleza, 2024.
Orientação: Prof. Me. Francisco do Carmo Silva.

1. método de Newton-Raphson. 2. raízes reais de funções reais. 3. metodologia de aprendizagem ativa. 4. calculadora científica. I. Título.

CDD 510

ROBERTO FERREIRA SENA FILHO

GUIA PRÁTICO NA IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON NA CALCULADORA CIENTÍFICA PARA DETERMINAÇÃO DE RAÍZES REAIS DE FUNÇÕES REAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Matemática.

Aprovada em: 27/06/2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Francisco do Carmo Silva (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Esp. Ricardo Leandro de Sousa
Secretaria da Educação do Estado do Ceará (SEDUC)

Prof. Esp. Fernando Holanda da Silva
Faculdade do Maciço de Baturité (FMB)

Dedicado aos que tornaram essa jornada possível.

AGRADECIMENTOS

A finalização deste trabalho de conclusão de curso representa um marco significativo em minha trajetória acadêmica e pessoal. Este sucesso não seria possível sem o apoio e a colaboração de várias pessoas e instituições às quais expresso minha profunda gratidão.

Primeiramente, agradeço ao professor Me. Francisco do Carmo Silva, meu orientador, por sua orientação, paciência e apoio inestimável durante todo o processo desta atividade academicista. Sua expertise e conselhos foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Aos meus professores e colegas do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Ceará, agradeço pelos ensinamentos, debates e troca de conhecimentos que enriqueceram minha formação acadêmica e contribuíram para o desenvolvimento deste projeto.

Agradeço de forma especial à minha esposa Fabiana, por seu amor incondicional, compreensão e suporte em todas as etapas da minha vida. Você foi e é meu alicerce e minha maior fonte de motivação.

Por fim, expresso minha gratidão às instituições e aos profissionais que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho, fornecendo recursos, informações e apoio técnico.

A todos, o meu muito obrigado!

“Na Matemática, a arte de propor uma questão deve ser considerada de maior valor do que resolvê-la.” (CANTOR, 1874).

RESUMO

Esta produção acadêmica aborda a implementação do método de Newton-Raphson para a determinação de raízes reais em calculadoras científicas, oferecendo uma abordagem mais eficaz em comparação com os métodos tradicionais. A pesquisa se posiciona como um guia de referência prático, visando aprofundar a compreensão da aplicabilidade do método e das estratégias envolvidas. Ao examinar as limitações do método, os estudantes podem desenvolver uma visão crítica sobre suas condições de uso e suas vantagens. O aspecto educacional deste trabalho concentra-se na exploração do algoritmo de resolução da técnica da tangente em uma ferramenta eletrônica acessível, a calculadora científica, potencializando o processo de ensino-aprendizagem, tornando-o mais dinâmico e significativo para os alunos. Esta abordagem prepara os estudantes para enfrentarem desafios práticos em seus respectivos campos de atuação. Além disso, o estudo ressalta a necessidade de pesquisas adicionais em diversas configurações contextuais e propõe modificações nas metodologias de ensino da Matemática para mitigar obstáculos cognitivos identificados.

Palavras-chave: calculadora científica; Newton-Raphson; metodologia de aprendizagem ativa.

ABSTRACT

This academic production addresses the implementation of the Newton-Raphson method for determining real roots on scientific calculators, presenting a more effective approach compared to traditional methods. Positioned as a practical reference guide, the research aims to deepen understanding of the method's applicability and involved strategies. By examining the method's limitations, students can develop a critical perspective on its conditions of use and advantages. The educational aspect of this work focuses on exploring the tangent method algorithm within an accessible electronic tool, the scientific calculator, enhancing the teaching-learning process to be more dynamic and meaningful for students. This approach prepares students to tackle practical challenges in their respective fields of study. Furthermore, the study underscores the need for further research across diverse contextual settings and proposes modifications in Mathematics teaching methodologies to mitigate identified cognitive obstacles.

Keywords: active learning methodology; Newton-Raphson; scientific calculator.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Calculadora científica CASIO fx-82MS ……….........……........……........…... 29

Figura 2 – Tanques esféricos industriais ....……............ 40

Figura 3 – Calado do navio ....……............ 42

Figura 4 – Vulcão em erupção próximo a uma aldeia ....……............ 47

Figura 5 – Descarga de poluentes em um rio ....……............ 49

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Ponto de vista gráfico do Método de Newton-Raphson 22

Gráfico 2 – Interpretação gráfica da Técnica da Tangente 24

Gráfico 3 – Análise gráfica da convergência das retas tangentes 32

Gráfico 4 – Tangente a um ponto crítico 34

Gráfico 5 – Tangente traçada próxima a um ponto crítico 36

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	13
2	**OBJETIVOS**	16
2.1	**Objetivo geral**	16
2.2	**Objetivos específicos**	16
3	**FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**	17
3.1	**Metodologias de Ensino-Aprendizagem no Ensino Superior**	17
3.2	**Método de Newton-Raphson**	21
4	**METODOLOGIA**	29
5	**RESULTADOS E DISCUSSÕES**	38
6	**CONCLUSÃO**	51
	REFERÊNCIAS	52

1 INTRODUÇÃO

Nos cursos de graduação em Matemática, Física e Engenharia, as técnicas numéricas são ferramentas fundamentais para a resolução de uma vasta gama de problemas práticos e teóricos. Tradicionalmente, o ensino dessas técnicas tem se apoiado fortemente em abordagens expositivas e no uso de software de simulação e análise. No entanto, a implementação direta e prática de métodos numéricos, como o método de Newton-Raphson, muitas vezes não é devidamente explorada, especialmente no contexto do uso de calculadoras científicas. Este Trabalho de Conclusão de Curso visa preencher essa lacuna ao focar na implementação da técnica para a determinação de raízes reais, utilizando calculadoras científicas como uma ferramenta de aprendizado ativa e interativa.

O ensino tradicional de matemática, frequentemente baseado em aulas expositivas e exercícios repetitivos, tem sido questionado por sua limitação em promover o desenvolvimento de habilidades essenciais para o aprendizado, como a autonomia, a criatividade e a capacidade de resolução de problemas. Nesse contexto, as metodologias ativas surgem como uma alternativa promissora para transformar a prática docente e promover um aprendizado mais engajador, significativo e com maior potencial de aplicação em contextos reais (Ribeiro, 2005). Os métodos tradicionais de ensino de técnicas numéricas frequentemente envolvem uma combinação de aulas teóricas, onde os conceitos matemáticos são apresentados de forma detalhada, seguidas por sessões de laboratório computacional, onde os alunos implementam esses conceitos em softwares aplicativos prontos como o Visual Cálculo Numérico ou em linguagens de programação como o Python. Esse modelo, apesar de eficaz em muitos aspectos, pode criar uma dependência excessiva das ferramentas computacionais e uma desconexão entre a teoria e a prática manual dos cálculos.

Nos cursos de Matemática, por exemplo, é comum que o foco esteja na compreensão profunda dos fundamentos teóricos. Os alunos são encorajados a deduzir fórmulas, provar teoremas e entender as derivadas e integrais subjacentes aos métodos numéricos. Embora essa abordagem desenvolva um entendimento rigoroso, indispensável na formação acadêmica, muitas vezes falta a aplicação prática que conecta a teoria à solução de problemas reais de forma manual e tangível.

Em Física, o ensino das técnicas numéricas é frequentemente direcionado para a modelagem e simulação de fenômenos físicos. Os alunos aprendem a resolver equações diferenciais, a modelar sistemas dinâmicos e a analisar dados experimentais. As aulas de laboratório, equipadas com computadores de alto desempenho, são fundamentais nesse processo. No entanto, a abordagem tradicional pode negligenciar a importância de métodos mais acessíveis e de baixo custo, como o uso de calculadoras científicas, que são ferramentas amplamente disponíveis e subutilizadas.

Os cursos de Engenharia, por sua vez, tendem a enfatizar a aplicação prática dos métodos numéricos na resolução de problemas. Os alunos aprendem a usar software especializado para realizar análises complexas e projetar sistemas. Embora essa formação prepare os alunos para o mercado de trabalho, ela pode, da mesma forma, criar uma barreira entre a teoria matemática e a aplicação prática acessível, já que muitas das ferramentas usadas são sofisticadas e requerem um conhecimento prévio significativo para serem operadas eficazmente.

A proposta central deste trabalho consiste em apresentar um guia prático para a aplicação do método de Newton-Raphson na calculadora científica, desmistificando sua utilização e tornando-o mais intuitivo para os alunos. A partir de exemplos concretos e de uma linguagem clara e objetiva, o trabalho visa demonstrar a eficácia do método na resolução de funções, explorando suas vantagens. Além disso, o trabalho analisará as limitações da técnica, discutindo suas condições de aplicabilidade e os desafios que podem surgir em sua utilização. Compreender os limites do método é crucial para o desenvolvimento de uma visão crítica sobre sua utilização. Analisar situações em que a técnica pode falhar, como a presença de pontos críticos ou a escolha inadequada do ponto inicial, é fundamental para que os alunos desenvolvam uma compreensão profunda da ferramenta e aprendam a lidar com as nuances de sua aplicação.

A relevância educacional deste trabalho reside na sua proposta de tornar o aprendizado desta técnica mais dinâmico e significativo para os alunos. Ao integrar o método em uma ferramenta eletrônica acessível, como a calculadora científica, o trabalho visa estimular o interesse e a participação dos alunos, aproximando-os da aplicação prática da matemática e preparando-os para lidar com os desafios futuros.

Este trabalho também busca contribuir para a discussão sobre as metodologias de ensino de Matemática, sugerindo a necessidade de novas pesquisas e de mudanças na forma como o método de Newton-Raphson é apresentado aos alunos. Através de uma abordagem prática e focada em exemplos concretos, o trabalho visa auxiliar na superação de obstáculos cognitivos e estimular o desenvolvimento de habilidades essenciais para a resolução de problemas.

Para a realização deste Trabalho de Conclusão de Curso será seguido um conjunto de etapas cuidadosamente planejadas para garantir a abrangência/delimitação e a eficácia do estudo. Estas etapas envolvem: na Fundamentação Teórica, a revisão bibliográfica de teóricos da Educação e a revisão da literatura de autores consagrados da Análise Matemática (Cálculo Numérico); na Metodologia, o desenvolvimento prático da implementação da técnica numérica na calculadora científica e nos Resultados e Discussões, a análise crítica do guia proposto.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é fornecer um manual de referência detalhado e prático sobre a implementação do método de Newton-Raphson em calculadoras científicas para a determinação de raízes reais de funções reais. Este manual visa servir como um recurso acessível e útil tanto para estudantes quanto para profissionais que necessitem de uma abordagem eficiente e prática para resolver equações não lineares.

2.2 Objetivos específicos

Para alcançar o objetivo geral proposto, foram delineados os seguintes objetivos específicos:

➢ Fundamentar as Metodologias Ativas de Ensino-Aprendizagem: explorar os conceitos e práticas das metodologias ativas de ensino-aprendizagem e sua relevância para o ensino de técnicas numéricas.

➢ Explicar o Método de Newton-Raphson: apresentar a fundamentação matemática, o algoritmo e as propriedades da técnica de forma clara e concisa.

➢ Descrever a Implementação em Calculadoras Científicas: demonstrar passo a passo como implementar o método em uma calculadora científica usual. Identificar e solucionar possíveis dificuldades encontradas durante a implementação, proporcionando soluções práticas e alternativas.

➢ Explorar Aplicações Práticas: ilustrar a aplicação da técnica em diversos campos da ciências físicas e das engenharias, demonstrando sua relevância para a resolução de problemas reais.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 Metodologias de ensino-aprendizagem no ensino superior

É notório que o ensino superior contemporâneo tem vivenciado uma significativa transformação na forma como se abordam os processos de aprendizagem, migrando de um modelo tradicional, centrado na memorização e reprodução de conteúdos, para metodologias ativas que colocam o aluno como protagonista de seu próprio aprendizado. Essa mudança não apenas reflete a evolução das práticas pedagógicas, mas também responde às necessidades de um mundo cada vez mais complexo e interconectado.

De acordo com Lacerda e Santos (2018, *apud* Pimenta e Anastasiou, 2008), o modelo tradicional de ensino apresenta como fundamentos a visão enciclopedista, a fragmentação do conhecimento em disciplinas, a transmissão docente e passividade do corpo discente, fundado na memorização e posterior reprodução em avaliações aplicadas periodicamente, a fim de mensurar a capacidade de memorização do aluno. Tal modelo vai de encontro aos objetivos da universidade, uma vez que não forma e nem cria pensamentos, por possuir uma visão de um saber inquestionável, destruindo a curiosidade e admiração por parte dos alunos, além de aumentar a evasão, anulando toda a pretensão de transformação histórica.

Frente a esta realidade, Lacerda e Santos (2018, *apud* Santos, 1998) faz uma crítica à situação atual das universidades e afirma que o modelo proposto, quando acorrentado a premissas alheias ao conhecimento, produz "individualidades débeis". Diante desta premissa, o autor sentencia a construção de analfabetos funcionais pela universidade atual, indivíduos que não entendem o verdadeiro propósito dos conhecimentos e como estes se correlacionam com a realidade. E é exatamente e principalmente nesse aspecto que a escola tradicional difere da escola construtivista.

É na forma como os conteúdos são trabalhados, pedagogicamente, que a escola construtivista preenche a falha da escola tradicional, no que tange ao processo formativo. Não se quer na escola construtivista que o aluno decifre e decore conteúdos, e sim que os construam sequencialmente, a partir dos já existentes, em um ciclo que Piaget denominou de assimilação e acomodação, ou desconstrução e reconstrução. Uma vez que esse processo é obrigatoriamente sequencial, ele não é puro. Depende de conhecimentos prévios bem formados e, portanto, falhas nessas estruturas básicas conceituais interferem na evolução/continuidade da aprendizagem. Segundo a teoria piagetiana, novos conhecimentos são assimilados e compreendidos na medida e dimensão do entendimento prévio que o indivíduo possui (Lacerda e Santos, 2018, *apud* Piaget, 1976).

Em contraponto ao modelo de ensino tradicional, definido por Freire (Lacerda e Santos, 2018, *apud* Freire, 2011) como bancário, fundamentado na memorização e reprodução de conteúdos disciplinares descontextualizados, os modelos não tradicionais propõem uma concepção de aula universitária mais completa e complexa, compreendida como "con(vivência)" humana e de relações pedagógicas, que visa: (1) o domínio da teoria e da técnica de forma crítica, (2) a progressiva autonomia na conquista de conhecimentos, (3) a formação continuada, (4) a pesquisa integrada ao ensino e extensão, através do estímulo e desenvolvimento do senso crítico investigativo, em um contexto atual, rompendo as fronteiras do conhecimento e gerando novas perspectivas sobre o tema, (5) a facilitação do processo de aprendizagem dos sujeitos pelos professores, motivando-os, provocando-os a questionar, mostrando-lhes a importância e o funcionamento daquele conhecimento na prática e transferindo a responsabilidade do processo de aprendizagem para o aluno (Lacerda e Santos, 2018, *apud* Castanho, 2001).

Com efeito, as metodologias de aprendizagem ativa procuram enxergar os sujeitos como protagonistas do seu processo de aprendizagem, buscando conhecer a bagagem acadêmica e os anseios do discente, para que, alunos e professores, possam ser agentes/parceiros e corresponsáveis nas ações de aprendizagem, ensinando ao aluno a olhar para si como um ser em construção em constante aprendizado, a fim de que este possa entender o seu ritmo, identificar suas próprias competências, potencialidades e limitações para, então, ser capaz de desenvolver o próprio processo de aprendizagem, ou seja, aprender a aprender (Lacerda e Santos, 2018, *apud* Castanho, 2001).

Dessa forma, a transição do ensino tradicional para metodologias ativas no ensino superior representa uma mudança paradigmática, essencial para a formação de indivíduos críticos, autônomos e capazes de interagir de maneira significativa com o conhecimento e com o mundo ao seu redor. Essa mudança é crucial para a educação do século XXI, que demanda não apenas a aquisição de conhecimentos, mas a capacidade de aplicá-los de forma inovadora e relevante na solução de problemas reais (Lacerda e Santos, 2018).

A educação progressiva, segundo John Dewey, não se resume a um conjunto de práticas opostas ao ensino tradicional, mas sim a uma filosofia educacional distinta, enraizada na experiência atual do indivíduo (BRANCO, 2014). Em sua obra "Experience and Education" de 1997, Dewey redefine algumas ideias e esclarece a visão que sustenta essa pedagogia. Para ele, a base da educação progressiva reside na relação intrínseca e necessária entre os processos da experiência atual e a aprendizagem.

Ao contrário da mera memorização de conteúdos, a educação progressiva busca promover a descoberta genuína através da reorganização da experiência do indivíduo (BRANCO, 2014, *apud* DEWEY, 1997b, p. 35). Essa reorganização se dá por meio de dois princípios: continuidade e interação.

A continuidade pressupõe que cada experiência carrega consigo elementos das experiências anteriores, modificando, assim, as experiências futuras (BRANCO, 2014, *apud* DEWEY, 1997b, p. 35). Já a interação reconhece que as condições presentes moldam a qualidade das experiências, tanto no momento quanto no futuro (BRANCO, 2014, *apud* DEWEY, 1997b, p. 35).

Dessa forma, a experiência atual não é apenas o ponto de partida da educação, mas sim o seu cerne. Através da aprendizagem, o indivíduo reinterpreta e ressignifica suas experiências, construindo novos conhecimentos e habilidades. Esse processo é subjetivo, pessoal e ativo, sempre influenciado pelas condições objetivas em que ocorre.

A educação progressiva, portanto, vai além da simples transmissão de conhecimentos. Ela busca preparar o indivíduo para lidar com as demandas de um mundo em constante mudança, desenvolvendo sua capacidade crítica, criativa e autônoma.

As metodologias ativas, como a aprendizagem baseada em problemas, a sala de aula invertida e a gamificação, são ferramentas valiosas para implementar a educação progressiva na prática. Através dessas metodologias, os alunos são protagonistas do seu processo de aprendizagem, construindo conhecimentos a partir de suas próprias experiências.

Ao romper com o modelo tradicional de ensino, a educação progressiva abre caminho para uma educação mais significativa e engajadora, preparando os indivíduos para os desafios do século XXI.

A aplicação prática da matemática na educação superior revela desafios significativos. Segundo D'Ambrosio (2021), a matemática tradicionalmente ensinada nas universidades muitas vezes permanece desconectada das realidades e necessidades sociais contemporâneas. Este autor critica o modelo tradicional de ensino de matemática, que se baseia no acúmulo de conteúdos sem considerar a aplicabilidade prática desses conhecimentos para resolver problemas reais que afetam a humanidade. Ele destaca que muitos problemas em áreas como biologia, sociologia e economia não podem ser resolvidos devido à falta de um instrumental matemático adequado.

A crítica de D'Ambrosio estende-se ao currículo universitário de matemática, que não evoluiu significativamente nos últimos cem anos. O ensino de cálculo e geometria analítica, por exemplo, segue praticamente os mesmos passos do século passado, sem incorporar de maneira significativa os avanços e as necessidades atuais. Ele argumenta que este modelo educacional falha em preparar os jovens matemáticos para os desafios do mundo moderno, pois não lhes proporciona uma compreensão profunda dos problemas sociais que determinam a estrutura social à qual pertencem.

Para mudar esse estado de coisas, D'Ambrosio sugere a necessidade de medidas corajosas e arrojadas, que rompam com os esquemas tradicionais e permitam a transformação da matemática em uma ferramenta mais imediatamente utilizável e relevante para a melhoria da qualidade de vida. Ele afirma que a realidade atual exige um ensino de matemática que esteja em sintonia com os problemas contemporâneos, permitindo que os estudantes se encontrem rapidamente em contato com questões de base e sejam capazes de aplicar seus conhecimentos de forma prática e eficaz.

Portanto, a integração das metodologias ativas no ensino superior, especialmente no campo da matemática, não apenas facilita a aquisição de conhecimentos, mas também promove o desenvolvimento de competências essenciais para a solução de problemas reais e complexos. Através dessas metodologias, os estudantes são incentivados a desenvolver uma postura crítica e investigativa, o que lhes permite compreender melhor a aplicação prática do conhecimento teórico e a sua relevância para a sociedade.

Além disso, a ludicidade pode ser uma ferramenta poderosa no ensino da matemática, como ressaltam Cunha e Silva (2012). Quando bem trabalhada, a ludicidade proporciona ao professor maior produtividade nas aulas e ao aluno um desenvolvimento ampliado de habilidades. Entre os benefícios destacados pelos autores estão a maior interação entre alunos e professores, a criação de um clima afetivo na sala de aula, e o desenvolvimento de capacidades de concentração, intuição e criatividade. Estes elementos são fundamentais para estimular as habilidades necessárias para a aprendizagem ativa e significativa (Cunha; Silva, 2012).

Assim, a integração da ludicidade nas metodologias ativas pode potencializar ainda mais o processo de ensino-aprendizagem, tornando-o mais dinâmico e engajador. Essa abordagem facilita não apenas a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também a aplicação prática desses conceitos em contextos variados, preparando os alunos para enfrentar desafios reais de forma criativa e eficiente.

A Teoria das Situações Didáticas, desenvolvida por Brousseau, oferece um framework adicional para a implementação de metodologias ativas, especialmente no ensino de cálculo diferencial e integral. Brousseau (2006) define a situação didática (SD) como todo o contexto de aprendizagem que inclui o aluno, o professor e o meio em que a aprendizagem deve acontecer. A SD é composta pela situação adidática, onde a aprendizagem ocorre através da adaptação do aluno ao meio e à resolução de problemas, sem que o aluno perceba a intervenção direta do professor (Brousseau, 2008). O papel do professor é mediar essa situação, promovendo a aprendizagem sem fornecer diretamente as respostas, estabelecendo assim um contrato didático que define os papéis do aluno e do professor (Brousseau, 2006).

A Teoria das Situações Didáticas, com foco na criação de situações desafiadoras e na autonomia do aluno, se alinha com as premissas das metodologias ativas de aprendizagem. A abordagem de Brousseau (Pommer, 2008) incentiva a participação ativa do aluno no processo de aprendizagem, valorizando a resolução de problemas e a construção do conhecimento através da interação com o meio.

As metodologias ativas de ensino, que incluem abordagens como a aprendizagem baseada em problemas, a sala de aula invertida, a aprendizagem colaborativa, dentre outras, têm ganhado destaque como formas eficazes de engajar os alunos e melhorar a compreensão e retenção de conhecimento. Essas metodologias são baseadas na ideia de que os alunos aprendem melhor quando estão ativamente envolvidos no processo de aprendizagem, ou seja, quando põem a “mão na massa” ao invés de serem meros receptores passivos de informação.

Na implementação do método de Newton-Raphson para a determinação de raízes reais utilizando calculadoras científicas, as metodologias ativas podem desempenhar um papel crucial. Por meio de atividades práticas, os alunos podem experimentar diretamente o processo iterativo de aproximação de raízes, entender as nuances do método e desenvolver habilidades de resolução de problemas que são transferíveis para outras áreas da matemática e ciências aplicadas.

Ao empregar calculadoras científicas, que são ferramentas acessíveis e familiares para a maioria dos alunos, é possível facilitar uma compreensão mais intuitiva e concreta dos métodos numéricos. Isso contrasta com o uso de software avançado, que embora poderoso, pode obscurecer a compreensão dos passos intermediários envolvidos nos cálculos.

3.2 Método de Newton-Raphson

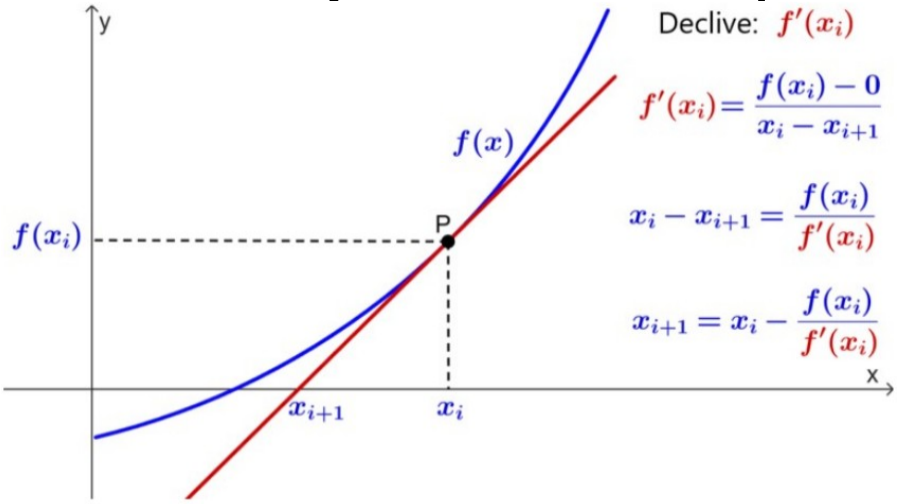
O Método de Newton-Raphson[1] é uma técnica iterativa[2] amplamente utilizada para encontrar raízes reais de funções não lineares. Desenvolvido por Isaac Newton e posteriormente aprimorado por Joseph Raphson, este método é uma das ferramentas

1 Também denominado de Método da Tangente.
2 Repetido, reiterado. Em Matemática, é um procedimento que gera uma sequência de soluções aproximadas que melhoram conforme são executadas.

numéricas mais eficazes para a resolução de equações das mais triviais quanto as mais sofisticadas. A simplicidade de sua implementação e a rapidez de sua convergência o tornam uma escolha popular em várias áreas da matemática aplicada, engenharias e ciências computacionais (BURDEN, FAIRES, 2016).

Visando determinar aproximações sucessivamente melhores para as raízes de uma função *f(x)*, a ideia central do método reside na construção da reta tangente à função no ponto x_n que representa a aproximação atual da raiz (gráfico 1). O ponto de intersecção dessa reta tangente com o eixo *x* fornece a próxima aproximação x_{n+1} (RUGGIERO, LOPES, 1996).

Gráfico 1 – Ponto de vista gráfico do Método de Newton-Raphson



Fonte: Guzmán, 2024.

Essa iteração se repete até que a convergência seja alcançada, ou seja, até que a diferença entre as aproximações sucessivas seja menor que um valor predefinido Para entender o método, consideremos uma função *f(x)* e um ponto inicial x_0. A reta tangente ao gráfico de *f(x)* em x_0 possui a equação:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0)$$

onde $f'(x_0)$ representa a derivada da função *f(x)* em x_0.

A intersecção dessa reta tangente com o eixo horizontal ($y = 0$) fornece uma nova aproximação da raiz, que chamaremos de x_1. Substituindo $y = 0$ na equação da reta tangente, temos:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0) \times (x_1 - x_0)$$

Resolvendo para x_1 temos:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Essa expressão representa o primeiro passo da iteração. Para obter aproximações cada vez mais precisas, o processo é repetido, utilizando o valor calculado x_1 como novo ponto inicial, e assim, por diante. Nesse processo é obtido uma sequência de aproximações $\{x_n\}$ da raiz procurada.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$

$$\vdots$$

Podemos observar um padrão nessas expressões, o que nos leva facilmente a generalizar a expressão matemática da técnica. Chamando de *n* o índice do ponto inicial, seu consecutivo será $n + 1$, portanto a função geradora da sequência recursiva de aproximações $\{x_n\}$ será dada por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{FUNÇÃO RECURSIVA}$$

onde:

x_n é a aproximação da raiz na enésima iteração

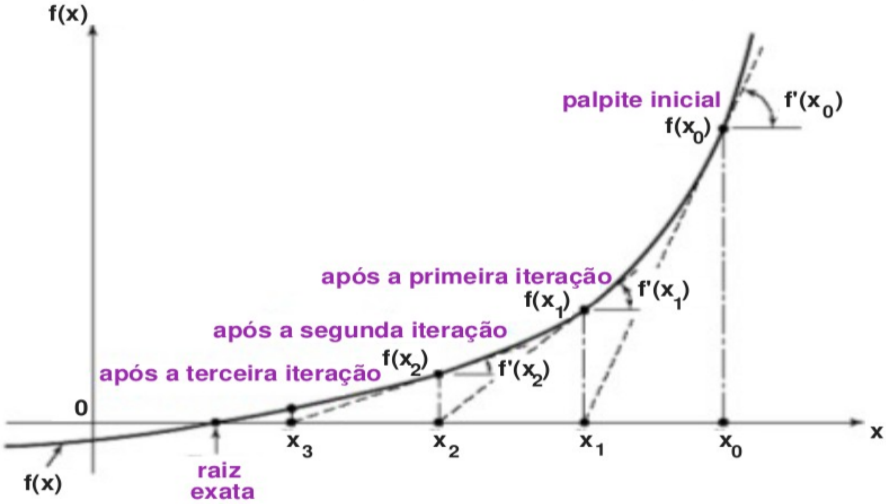
x_{n+1} é a próxima aproximação da raiz

$f(x_n)$ é o valor da função no ponto x_n

$f'(x_n)$ é o valor da derivada da função no ponto x_n

A interpretação gráfica do método é intuitiva e elucidativa. A reta tangente à curva em cada iteração representa a melhor aproximação linear da função no ponto atual. O ponto de intersecção dessa reta com o eixo *x* fornece a próxima aproximação da raiz, conforme podemos observar na gráfico 2.

Gráfico 2 – Interpretação gráfica da Técnica da Tangente



Fonte: adaptado pelo autor.

O Método de Newton-Raphson é conhecido por sua rápida convergência, especialmente quando a estimativa inicial está próxima da raiz verdadeira. A convergência é quadrática, o que significa que o erro diminui exponencialmente a cada iteração, desde que a aproximação inicial esteja suficientemente próxima da raiz e a função seja bem-comportada (BURDEN, FAIRES, 2016). No entanto, se a estimativa inicial estiver longe da raiz ou se a derivada *f'(x)* for pequena ou nula, o método pode divergir ou convergir lentamente.

A convergência da técnica é um fator crucial para sua aplicação. Em outras palavras, a sequência de aproximações $\{x_n\}$ gerada pelo método deve se aproximar da raiz real da função. Para que a convergência ocorra, algumas condições devem ser satisfeitas:

- Existência da derivada – a função *f(x)* deve ser diferenciável no intervalo que contém a raiz.

- Ponto inicial adequado – o ponto inicial x_0 deve estar suficientemente próximo da raiz. Esta escolha pode ser obtida através de outras técnicas numéricas como o Método da Bisseção.

- A derivada da função *f(x)* não deve ser nula na vizinhança da raiz e a função deve ser suficientemente suave (com derivadas contínuas).

Sendo essas condições satisfeitas, a Técnica da Tangente converge quadraticamente para a raiz, ou seja, o número de dígitos corretos da aproximação dobra a cada iteração.

Esse método numérico apresenta diversas vantagens entre as quais destacamos:

- Simplicidade – fácil de implementar em algoritmos computacionais e na calculadora científica.

- Convergência rápida – sob condições adequadas, a técnica apresenta uma taxa de convergência quadrática, o que significa que a precisão da solução dobra a cada iteração.

- Ampla aplicabilidade – o método é aplicável a uma ampla variedade de funções matemáticas como as funções algébricas, funções transcendentais e funções complexas.

- Generalização para sistemas de equações – o método pode ser generalizado para resolver sistemas de equações não lineares, ampliando seu escopo de aplicação.

No entanto, o método também apresenta algumas desvantagens nas quais pontuamos adiante:

- Dependência da derivada – o método exige o cálculo da derivada da função, o que pode ser um desafio para funções complexas.

- Convergência para mínimos locais – em alguns casos, o método pode convergir para um mínimo local da função, em vez da raiz desejada.

- Sensibilidade à estimativa inicial – a escolha do ponto inicial é crucial para a convergência do método. Um ponto inicial inadequado pode levar à divergência ou à convergência para uma raiz diferente da desejada.

- Zonas de Divergência – pode falhar em casos onde f'(x) é muito pequeno ou muda de sinal perto da raiz.

- Funções Discretas – não é aplicável diretamente a funções não contínuas ou não diferenciáveis.

A técnica é amplamente utilizado em várias áreas devido à sua eficiência em encontrar raízes de funções não lineares. A seguir, apresentamos exemplos específicos de sua aplicação em diferentes campos:

➢ Ciências Físicas

- Termodinâmica: para resolver equações de estado não lineares ou para determinar pontos críticos em transições de fase.

- Mecânica Clássica: Para determinar pontos de equilíbrio em sistemas mecânicos não lineares, como osciladores não harmônicos ou sistemas com atrito.

➢ Engenharia Civil

- Análise Estrutural: na análise de estruturas não lineares, como grandes deformações em vigas e pilares, onde as equações de equilíbrio são não lineares.

- Modelagem de Solos: na solução de equações de estado não lineares para modelar o comportamento do solo sob cargas diferentes, utilizando modelos constitutivos avançados.

➢ Engenharia Mecânica

- Dinâmica de Fluidos: na solução de equações de Navier-Stokes não lineares para modelar o comportamento de fluidos em regime turbulento.

- Análise de Vibrações: na determinação das frequências naturais e modos de vibração de sistemas mecânicos complexos, onde as equações características são não lineares.

- Engenharia Elétrica

- Análise de Circuitos: na análise de circuitos eletrônicos que contêm componentes não lineares, como diodos e transistores, onde as equações de corrente-tensão são resolvidas iterativamente.

- Sistemas de Potência: na solução das equações de fluxo de carga em redes elétricas, onde a distribuição de tensões e correntes é calculada iterativamente para otimizar o desempenho do sistema.

- Engenharia Hidráulica

- Modelagem de Fluxo em Aquíferos: na solução de equações de fluxo não lineares em meios porosos, onde o comportamento do fluxo de água em aquíferos é modelado.

- Simulação de Redes de Distribuição de Água: Na otimização de redes de distribuição de água para minimizar perdas e garantir a eficiência do sistema, onde as equações de balanço hídrico são resolvidas iterativamente.

- Economia

- Modelos de Equilíbrio Geral: na solução de modelos econômicos não lineares para encontrar equilíbrios de mercado, onde a oferta e a demanda são modeladas por funções não lineares.

- Otimização de Portfólios: na determinação das alocações ótimas de ativos financeiros para maximizar o retorno esperado e minimizar o risco, onde as funções de utilidade são não lineares.

O método de Newton-Raphson é uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas que envolvem equações complexas. Sua convergência rápida, ampla aplicabilidade e capacidade de generalização para sistemas de equações o tornam uma técnica essencial em diversos campos. No entanto, é importante ter em mente as limitações do método, como a necessidade do cálculo da derivada, a possibilidade de convergência para mínimos locais e a sensibilidade ao ponto inicial (CHAPRA, CANALE, 2016).

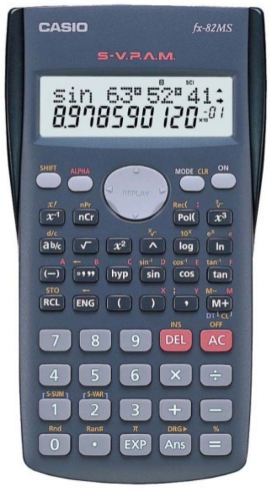
Com o entendimento dos fundamentos matemáticos da técnica, suas vantagens e desvantagens, e sua aplicação em diversos campos, os alunos podem desenvolver uma compreensão mais profunda da ferramenta e aplicá-la de forma eficiente na resolução de problemas do mundo real. Exercícios práticos e exemplos concretos podem ser úteis para facilitar a compreensão e aplicação da técnica. Isso inclui fornecer exemplos específicos de como o método pode ser usado para resolver problemas reais e estudos de caso que destacam suas aplicações e limitações.

Ao contemplar essas duas perspectivas teóricas, as metodologias do ensino-aprendizagem no Ensino Superior e o Método de Newton-Raphson, este trabalho de conclusão de curso pode servir como um guia prático da implementação do método na calculadora científica, considerando aspectos pedagógicos e cognitivos.

4 METODOLOGIA

Para a implementação da técnica, utilizaremos uma calculadora científica padrão *CASIO fx-82MS* (figura 1), equipamento eletrônico de custo acessível e facilmente encontrado no comércio. O algoritmo de resolução do método pode ser reproduzido na maioria dos demais modelos de calculadoras científicas sem prejuízo observável nos resultados.

Figura 1 – Calculadora científica CASIO fx-82MS



Fonte: Amazon, 2024.

Para a execução da técnica numérica faremos uso de uma das memórias da calculadora: a memória de resposta *ANS* (*answer* em inglês).

Quando fazemos uma conta qualquer no equipamento e apertamos a tecla “=”, o resultado do cálculo é armazenado na memória *ANS* que é volátil, ou seja, se desligarmos a calculadora, o valor armazenado é apagado.

O conteúdo da memória de resposta é atualizado sempre que se executa um novo cálculo com a tecla “=”, mas o conteúdo da memória de resposta não é atualizado se a operação realizada com o sinal “=” resultar em um erro. Para recuperar o conteúdo da memória de resposta, basta pressionar a tecla *ANS*.

Como exemplo inicial, computemos o valor de uma das raízes da função algébrica $f(x) = x^2 - 5x + 6$, através da técnica numérica tratada neste trabalho. Para isso, precisamos da função $f(x)$, da derivada da função $f'(x)$ e de um ponto de partida x_0 para gerar a sequência de aproximações, por exemplo, 4. Assim,

DADOS DA QUESTÃO

$f(x) = x^2 - 5x + 6 = 0$ $\quad\quad\quad\quad$ $x = ?$ (raiz)

$f'(x) = 2x - 5$

$x_0 = 4$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ FUNÇÃO RECURSIVA

Para $n = 0$: $$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 5x_0 + 6}{2x_0 - 5}$$

PASSO 1: armazenando o x_0 na memória de resposta *ANS*.

digita "*4*" e em seguida tecla "="

PASSO 2: escrevendo a expressão recursiva em função de x_0, ou seja, *ANS*.

ANS - ((ANS^2 – 5ANS + 6) / (2ANS – 5))

PASSO 3: tecle "=" até o display não apresentar mudança no resultado numérico.

3 RESULTADO FINAL

RESPOSTA: *3 é u*ma raiz da função $f(x) = x^2 - 3x + 6$.

Note que foi gerada uma sequência de aproximações cada vez mais precisas a medida que se aperta a tecla "=".

$x_1 = 3{,}333333333$

$x_2 = 3{,}066666667$

$x_3 = 3{,}003921569$

$x_4 = 3{,}000015259$

$x_5 = 3$

$x_6 = 3$

$x_7 = 3$

$\vdots$

E se o ponto de partida x_0 para gerar a sequência de aproximações fosse *17* ou *51,26* ou *308,49132*? O resultado final seria exatamente o mesmo, *3*. A diferença estaria no número de iterações e nos valores gerados na sequência de aproximações $\{x_k\}$ de cada ponto de partida.

Refaçamos o procedimento tomando como ponto de partida para o uso da função geradora da sequência $x_0 = 1$.

DADOS DA QUESTÃO

$f(x) = x^2 – 5x + 6 = 0$ $\qquad\qquad$ $x = ?$ *(raiz)*

$f'(x) = 2x – 5$

$x_0 = 1$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ FUNÇÃO RECURSIVA

Para $n = 0$: $$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 5x_0 + 6}{2x_0 - 5}$$

PASSO 1: armazenando o x_0 na memória de resposta *ANS*.

digita "*1*" e em seguida tecla "="

PASSO 2: escrevendo a expressão recursiva em função de x_0, ou seja, *ANS*.

ANS - ((ANS^2 – 5ANS + 6) / (2ANS – 5))

PASSO 3: tecle "=" até o display não apresentar mudança no resultado numérico.

2 RESULTADO FINAL

RESPOSTA: *2 é u*ma raiz da função *f(x) = x² – 3x + 6.*

Note que foi gerada uma outra sequência de aproximações cada vez mais precisas a medida que se aperta a tecla "=".

$$x_1 = 1{,}666666667$$

$$x_2 = 1{,}933333333$$

$$x_3 = 1{,}996078431$$

$$x_4 = 1{,}999984741$$

$$x_5 = 2$$

$$x_6 = 2$$

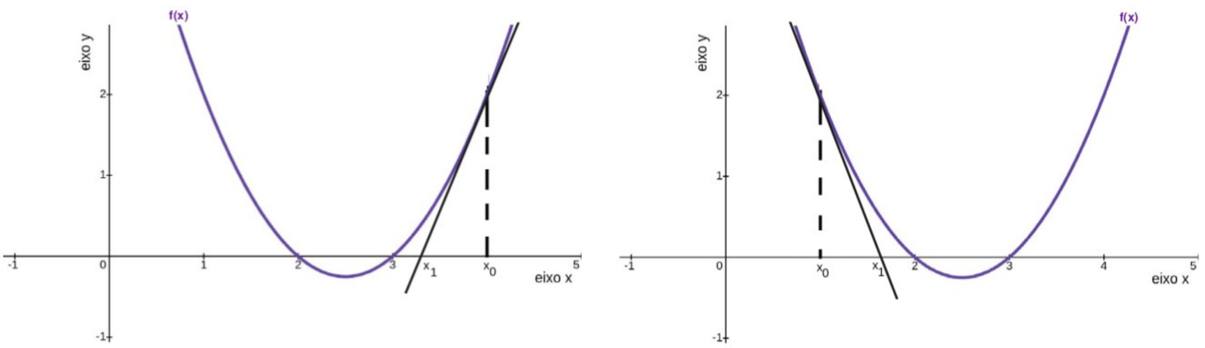
$$x_7 = 2$$

$$\vdots$$

E se o ponto de partida x_0 para gerar a sequência de aproximações fosse -28 ou *-93,07* ou *-701,50392*? O resultado final seria exatamente o mesmo, *2*. A diferença estaria no número de iterações e nos valores gerados na sequência de aproximações $\{x_k\}$ de cada ponto de partida.

Por que obtivemos uma raiz e não a outra em cada resolução feita? O que faz os resultados da função recursiva convergir para uma raiz e não para a outra? Esboçando o gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e analisando a interpretação gráfica da técnica da tangente, compreendemos o porquê da sequência de aproximações convergir para uma raiz e não para a outra a partir de um x_0 específico (gráfico 3).

Gráfico 3 – Análise gráfica da convergência das retas tangentes



Fonte: elaborado pelo autor.

Mas, atenção! Quando a escolha do valor inicial para x_0 é um ponto crítico da função (ponto de máximo, ponto de mínimo), a calculadora apresentará uma mensagem de erro. Para fazermos esta análise, refaçamos as iterações tomando como ponto de partida $x_0 = 2{,}5$ que é o ponto de mínimo da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

DADOS DA QUESTÃO

$f(x) = x^2 - 5x + 6 = 0$ $\qquad x = ?$ (raiz)

$f'(x) = 2x - 5$

$x_0 = 2{,}5$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ FUNÇÃO RECURSIVA

Para $n = 0$: $$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 5x_0 + 6}{2x_0 - 5}$$

PASSO 1: armazenando o x_0 na memória de resposta *ANS*.

Digita "*2,5*" e em seguida tecla "="

PASSO 2: escrevendo a expressão recursiva em função de x_0, ou seja, *ANS*.

ANS - ((ANS^2 – 5ANS + 6) / (2ANS – 5))

PASSO 3: tecle "=" até o display não apresentar mudança no resultado numérico.

Math ERROR MENSAGEM NO DISPLAY

Por que a calculadora mostrou no visor a mensagem "*Math ERROR*" (erro matemático)?

- Explicação algébrica – foi solicitado uma divisão por *0* (zero). Vejamos:

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 5\ x_0 + 6}{2\ x_0 - 5}$$

$$x_1 = 2{,}5 - \frac{2{,}5^2 - 5\ .\ 2{,}5 + 6}{2\ .\ 2{,}5 - 5}$$

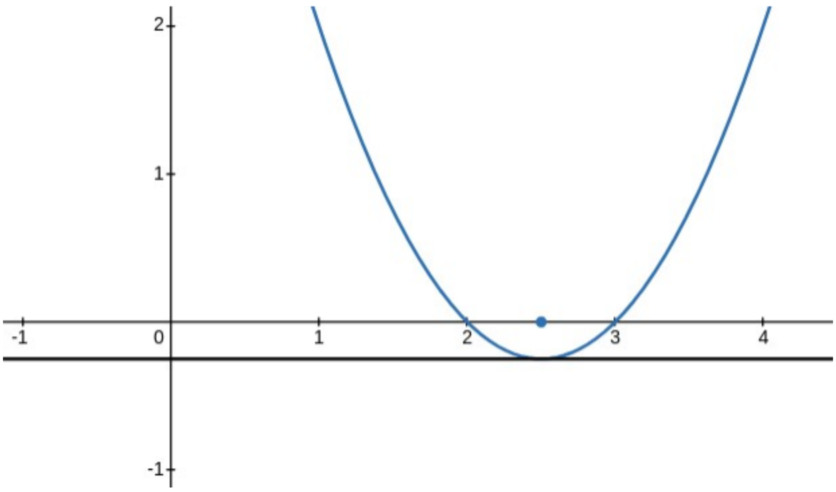
$$x_1 = 2{,}5 - \frac{2{,}5^2 - 5\ .\ 2{,}5 + 6}{5 - 5}$$

$$x_1 = 2{,}5 - \frac{2{,}5^2 - 5\ .\ 2{,}5 + 6}{0}$$

Divisão por zero!

- Explicação gráfica – a reta tangente ao ponto de mínimo da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ é paralela ao eixo horizontal, ou seja, nunca cruzará o eixo o horizontal (gráfico 4).

Gráfico 4 – Tangente a um ponto crítico



Fonte: elaborado pelo autor.

O que acontece se escolhermos o valor inicial x_0 próximo de um ponto crítico da função? Para analisarmos esta situação, refaçamos as iterações tomando como ponto de partida $x_0 = 2{,}500000001$ que é bem próximo de *2,5* (ponto crítico da função).

DADOS DA QUESTÃO

$f(x) = x^2 - 5x + 6 = 0$ $\qquad$ $x = ?$ *(raiz)*

$f'(x) = 2x - 5$

$x_0 = 2{,}500000001$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f\left(x_n\right)}{f\,'\left(x_n\right)}$$ FUNÇÃO RECURSIVA

Para $n = 0$:

$$x_1 = x_0 - \frac{f\left(x_0\right)}{f\,'\left(x_0\right)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 5\,x_0 + 6}{2\,x_0 - 5}$$

<u>PASSO 1</u>: armazenando o x_0 na memória de resposta *ANS*.

Digita "*2,500000001*" e em seguida tecla "="

<u>PASSO 2</u>: escrevendo a expressão recursiva em função de x_0, ou seja, *ANS.*

ANS - ((ANS^2 – 5ANS + 6) / (2ANS – 5))

<u>PASSO 3</u>: tecle "=" e veja o valor de x_1.

x_1 = 125.000.002,5

(cento e vinte e cinco milhões e dois vírgula cinco)

Por que o resultado da primeira iteração x_1 apresentou um valor muito distante de uma das raízes *2* ou *3* da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$?

- Explicação algébrica – foi solicitado uma divisão por um número muito próximo a *0* (zero) e, numa divisão, quanto menor for o denominador, maior o quociente. Vejamos:

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 5\,x_0 + 6}{2\,x_0 - 5}$$

$$x_1 = 2{,}500000001 - \frac{2{,}500000001^2 - 5\,.\,2{,}500000001 + 6}{2\,.\,2{,}500000001 - 5}$$

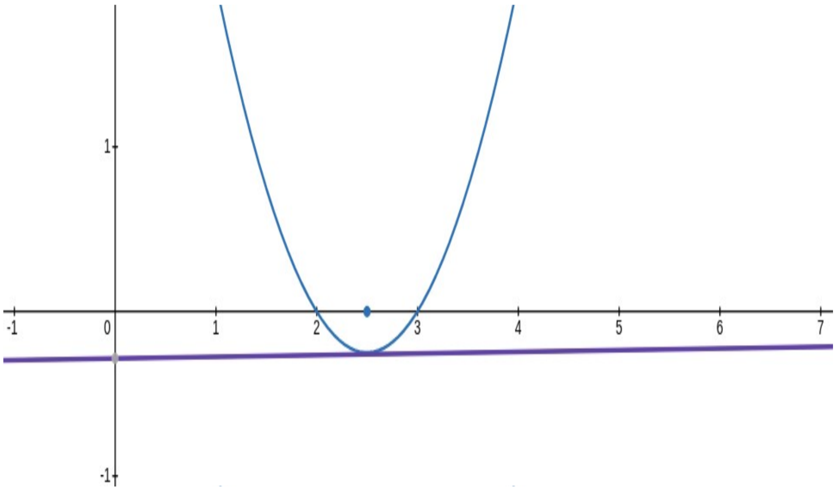
$$x_1 = 2{,}500000001 - \frac{2{,}500000001^2 - 5\,.\,2{,}500000001 + 6}{5{,}000000002 - 5}$$

$$x_1 = 2{,}500000001 - \frac{2{,}500000001^2 - 5\,.\,2{,}500000001 + 6}{0{,}000000002}$$

Divisão por um denominador próximo de 0!

- Explicação gráfica – uma reta tangente próxima a um ponto crítico da função terá uma inclinação muito pequena como mostrado no gráfico 5, consequentemente cruzará o eixo horizontal em um ponto muito distante da raiz procurada.

Gráfico 5 – Tangente traçada próxima a um ponto crítico



Fonte: elaborado pelo autor.

A Técnica da Tangente é um algoritmo poderoso para encontrar raízes de funções não-lineares. No entanto, sua eficiência depende crucialmente da escolha do ponto inicial. Um dos principais desafios do método é lidar com pontos críticos da função, como:

- Máximos – em um máximo, a derivada primeira é igual a zero, o que pode levar a uma divisão por zero no algoritmo.

- Mínimos – similarmente, em um mínimo a derivada primeira é zero, podendo causar problemas na iteração.

- Pontos de Inflexão – nesses pontos, a derivada segunda muda de sinal, o que pode confundir o algoritmo e levar à divergência.

Estratégias para escolher um bom ponto inicial e aumentar as chances de sucesso:

- Conhecimento da Função – se você tiver conhecimento sobre o comportamento da função (concavidade, pontos de inflexão, etc.), use essa informação para escolher um ponto inicial em uma região promissora.

- Métodos Gráficos – utilize gráficos da função para visualizar seu comportamento e estimar um ponto inicial próximo à raiz desejada.

- Métodos Aproximados – empregue outros métodos aproximados, como o método da bissecção, para obter uma estimativa inicial grosseira e depois refinar com o método de Newton-Raphson.

Embora o Método de Newton-Raphson seja em geral muito eficiente, há situações nas quais ele tem um desempenho insatisfatório. Como vimos, quando um dos x_k da sequência for um ponto crítico da função (ponto de máximo, ponto de mínimo ou ponto de inflexão) ou está na vizinhança destes pontos. Existem outras armadilhas como o caso de funções que apresentam raízes múltiplas, bem como as que convergem lentamente com a técnica em razão da natureza/comportamento da função.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para ilustrar a implementação desta técnica numérica na calculadora científica conforme apresentado na seção Metodologia, aplicaremos o algoritmo de resolução do método em problemas das Ciências Físicas e das Engenharias.

PROBLEMA 1: Em problemas de fluxo em tubulações é frequente precisar resolver a equação $f(D) = c_5D^5 + c_1D + c_0 = 0$. Se $c_5 = 1000$, $c_1 = -3$, $c_0 = 9{,}04$ e tomando como ponto de partida para as iterações $D_0 = -2$, compute o valor de D pela Técnica da Tangente com a maior precisão que a calculadora pode fornecer.

RESOLUÇÃO

DADOS DA QUESTÃO

$f(D) = 1000D^5 – 3D + 9{,}04 = 0$ $\qquad$ $D = ?$

$f'(D) = 5000D^4 – 3$

$D_0 = -2$

$$D_{n+1} = D_n - \frac{f\left(D_n\right)}{f'\left(D_n\right)}$$ FUNÇÃO RECURSIVA

Para $n = 0$: $$D_1 = D_0 - \frac{f\left(D_0\right)}{f'\left(D_0\right)}$$

$$D_1 = D_0 - \frac{1000\ D_0^5 - 3\ D_0 + 9{,}04}{5000\ D_0^4 - 3}$$

PASSO 1: armazenando o D_0 na memória de resposta *ANS*.

digita “*-2*” e em seguida tecla “=”

PASSO 2: escrevendo a expressão recursiva em função de D_0, ou seja, *ANS*.

ANS - ((1000ANS^5 – 3ANS + 9,04) / (5000ANS^4 – 3))

PASSO 3: tecle “=” até o display não apresentar mudança no resultado numérico.

-0,4

RESPOSTA: *D = -0,4 é u*ma solução real da função *f(D) = 1000D^5^ – 3D + 9,04 = 0.*

PROBLEMA 2: A pressão máxima P (em kg/mm^2) que um cabo metálico suporta é dado por $P(d) = 25d^2 + ln(d)$ em que d é o diâmetro do cabo em milímetros. Determine o valor do diâmetro necessário para suportar uma pressão de $3{,}5 \times 10^{-3}\ kg/mm^2$ pela técnica da tangente com a maior precisão que a calculadora pode fornecer. Use como valor inicial para as sequência de aproximações $d_0 = 1\ mm$.

RESOLUÇÃO

DADOS DA QUESTÃO

$P(d) = 25d^2 + ln(d)$

$P(d) = 3{,}5 \times 10^{-3}$

$$3{,}5 \times 10^{-3} = 25d^2 + ln(d)$$

$$0 = 25d^2 + ln(d) - 3{,}5 \times 10^{-3}$$

$$F(d) = 25d^2 + ln(d) - 3{,}5 \times 10^{-3} = 0$$

$F(d) = 25d^2 + ln(d) - 3{,}5 \times 10^{-3} = 0$ $\qquad$ $d = ?$

$F'(d) = 50d + 1/d$

$d_0 = 1$

$$d_{n+1} = d_n - \frac{F(d_n)}{F'(d_n)}$$ FUNÇÃO RECURSIVA

Para $n = 0$: $$d_1 = d_0 - \frac{F(d_0)}{F'(d_0)}$$

$$d_1 = d_0 - \frac{25\ d_0^2 + \ln(d_0) - 3{,}5 \times 10^{-3}}{50\ d_0 + \dfrac{1}{d_0}}$$

PASSO 1: armazenando o d_0 na memória de resposta *ANS*.

digita "*1*" e em seguida tecla "="

PASSO 2: escrevendo a expressão recursiva em função de d_0, ou seja, *ANS*.

ANS - ((25ANS^2 + ln ANS – 0,0035) / (50ANS + 1 / ANS))

PASSO 3: tecle “=” até o display não apresentar mudança no resultado.

0,239419228 mm

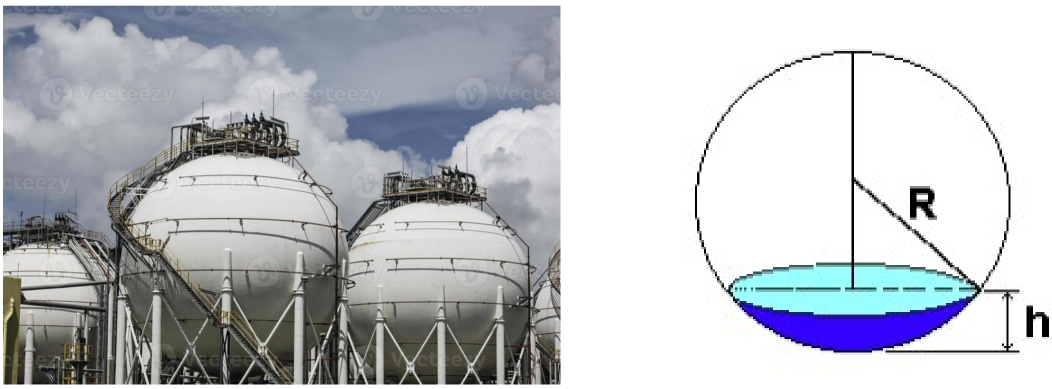
RESPOSTA: O valor aproximado do diâmetro necessário para o cabo suportar uma pressão de $3{,}5 \times 10^{-3}$ *kg/mm²* é *0,24 mm.*

PROBLEMA 3: O volume V de um líquido num tanque esférico de raio r está relacionada com a altura h do líquido pela expressão

$$V = \frac{\pi h^2 \left(3R - h\right)}{3} \quad .$$

Determine a altura h de água de um tanque esférico de raio *1,0 metro* e volume de *0,5* m^3, utilizando o Método de Newton-Raphson e ponto de partida $h_0 = 1\ m$ com a maior precisão que a calculadora fornece.

Figura 2 – Tanques esféricos industriais



Fonte: Vecteezy, 2024.

RESOLUÇÃO

DADOS DA QUESTÃO

$$V = \frac{\pi h^2 \left(3\ R - h\right)}{3} \quad \Rightarrow \quad 0{,}5 = \frac{\pi h^2 \left(3\ .\ 1 - h\right)}{3} \quad \Rightarrow \quad 1{,}5 = 3\ \pi h^2 - \pi h^3$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 3\ \pi h^2 - \pi h^3 - 1{,}5$$

$$\Rightarrow \quad f\left(h\right) = 3\ \pi h^2 - \pi h^3 - 1{,}5 = 0$$

$f\,(h) = 3\,\pi h^2 - \pi h^3 - 1{,}5 = 0$ $\qquad\qquad$ $h = ?$

$f\,'\,(h) = 6\,\pi h - 3\,\pi h^2$

$h_0 = 1$

$$h_{n+1} = h_n - \frac{f\,(h_n)}{f\,'\,(h_n)}$$ FUNÇÃO RECURSIVA

Para $n = 0$: $$h_1 = h_0 - \frac{f\,(h_0)}{f\,'\,(h_0)}$$

$$h_1 = h_0 - \frac{3\,\pi h_0^2 - \pi h_0^3 - 1{,}5}{6\,\pi h_0 - 3\,\pi h_0^2}$$

PASSO 1: armazenando o h_0 na memória de resposta *ANS*.

digita "*1*" e em seguida tecla "="

PASSO 2: escrevendo a expressão recursiva em função de h_0, ou seja, *ANS.*

ANS - ((3πANS^2 – πANS^3 – 1,5) / (6πANS – 3πANS^2))

PASSO 3: tecle "=" até o display não apresentar mudança no resultado.

0,431120665 metros

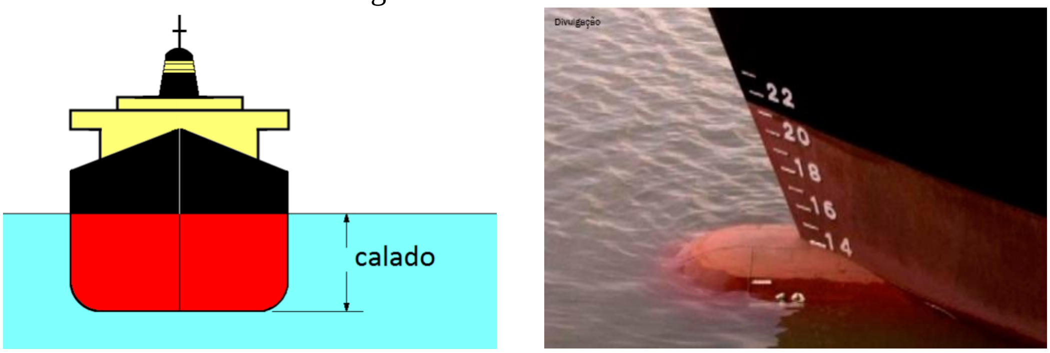
ou

43,1120665 centímetros

RESPOSTA: A altura aproximada de água nesse tanque é *43,11 cm.*

PROBLEMA 4: Para a determinação do calado do navio, isto é, da distância *h* entre a superfície da água e a parte mais funda do navio que está abaixo do nível da água, aplica-se o Princípio de Arquimedes que correspondente ao equilíbrio tal que $\rho_S V_S = \rho_L V_L(h)$, onde ρ_S é a densidade do sólido, V_S é o volume do sólido, ρ_L é a densidade do líquido e $V_L(h)$ volume do líquido deslocado.

Figura 3 – Calado do navio



Fonte: Transporta Brasil, 2024.

Sendo ρ_S = *918,35 kg/m³*, V_S = *1700 m³*, ρ_L = *1025 kg/m³*, utilize a Técnica da Tangente para calcular o valor aproximado do calado *h*, supondo $V_L(h) = h(h-40)^2$. Como aproximação inicial para as iterações considere h_0 = *140 m* e critério de parada a maior precisão que a calculadora pode fornecer.

RESOLUÇÃO

<u>DADOS DA QUESTÃO</u>

$$\rho_S V_S = \rho_L V_L(h) \quad \Rightarrow \quad 918{,}35 \,.\, 1700 = 1025 \,.\, h(h-40)^2$$

$$\Rightarrow \quad 1561195 = 1025\,h^3 - 82000\,h^2 + 1640000\,h$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 1025\,h^3 - 82000\,h^2 + 1640000\,h - 1561195 \qquad (\div 1025)$$

$$\Rightarrow \quad f(h) = h^3 - 80\,h^2 + 1600\,h - 1523{,}117073 = 0$$

$$f(h) = h^3 - 80\,h^2 + 1600\,h - 1523{,}117073 = 0 \qquad h = ?$$

$$f'(h) = 3\,h^2 - 160\,h + 1600$$

$$h_0 = 140$$

$$h_{n+1} = h_n - \frac{f(h_n)}{f'(h_n)} \qquad \text{FUNÇÃO RECURSIVA}$$

Para $n = 0$:

$$h_1 = h_0 - \frac{f(h_0)}{f'(h_0)}$$

$$h_1 = h_0 - \frac{h_0^3 - 80\,h_0^2 + 1600\,h_0 - 1523{,}117073}{3\,h_0^2 - 160\,h_0 + 1600}$$

<u>PASSO 1</u>: armazenando o h_0 na memória de resposta *ANS*.

digita "*140*" e em seguida tecla "="

<u>PASSO 2</u>: escrevendo a expressão recursiva em função de h_0, ou seja, *ANS*.

ANS - ((ANS^3 – 80ANS^2 + 1600ANS – 1523,117073) / (3ANS^2 – 160ANS + 1600))

<u>PASSO 3</u>: tecle "=" até o display não apresentar mudança no resultado.

45,76875499 metros

<u>RESPOSTA</u>: O valor aproximado do calado do navio é *45,77 metros.*

<u>PROBLEMA 5</u>: Uma loja de informática oferece um plano de financiamento para um computador top de linha cujo preço à vista (*PV*) é *R$ 18.800,00*. O plano consiste de uma entrada (*E*) de *R$ 2.800,00* mais 8 parcelas (*P*) de *R$ 2.376,86* (*PM*, prestações mensais). Calcule a taxa de juros *j* através do Método de Newton-Raphson considerando como ponto inicial para as iterações $j_0 = 1$ e sabendo que

$$\frac{1-(1+j)^{-P}}{j} = \frac{PV-E}{PM} \ .$$

RESOLUÇÃO

<u>DADOS DA QUESTÃO</u>

$$\frac{1-(1+j)^{-P}}{j} = \frac{PV-E}{PM} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-(1+j)^{-8}}{j} = \frac{18800-2800}{2376{,}86}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-(1+j)^{-8} = 6{,}731570223\ j$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-(1+j)^{-8} - 6{,}731570223\ j = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f\,(j) = 1-(1+j)^{-8} - 6{,}731570223\ j = 0$$

$f\,(j) = 1-(1+j)^{-8} - 6{,}731570223\ j = 0$ $\qquad$ $j = ?$

$f\,'\,(j) = 8\,(1+j)^{-9} - 6{,}731570223$

$j_0 = 1$

$$j_{n+1} = j_n - \frac{f\,(j_n)}{f\,'\,(j_n)}$$ FUNÇÃO RECURSIVA

Para $n = 0$: $$j_1 = j_0 - \frac{f\,(j_0)}{f\,'\,(j_0)}$$

$$j_1 = j_0 - \frac{1-(1+j_0)^{-8} - 6{,}731570223\ j_0}{8\ (1+j_0)^{-9} - 6{,}731570223}$$

PASSO 1: armazenando o j_0 na memória de resposta *ANS*.

digita "*1*" e em seguida tecla "="

PASSO 2: escrevendo a expressão recursiva em função de j_0, ou seja, *ANS*.

ANS - ((1 – (1 + ANS)^(-8) – 6,731570223ANS) / (8(1 + ANS)^(-9) - 6,731570223))

PASSO 3: tecle "=" até o display não apresentar mudança no resultado.

0,040042257 *x 100%*

ou

4,0042257%

RESPOSTA: A taxa de juros aproximada desse financiamento é *4,00%*.

PROBLEMA 6: A distribuição de temperatura em cada ponto x de um pedaço de arame de *1,80 metros* é dada por $T(x) = -8{,}12x^3 + 41{,}88x^2 – 71{,}99x + 40{,}23$. Determine o ponto no qual a temperatura é igual a *0* (zero) através da técnica da tangente. Calcule as iterações até o limite da calculadora, ou seja, a maior precisão que a calculadora poder fornecer e como ponto inicial para gerar a sequência de aproximações $x_0 = 1{,}80$ *metros*.

RESOLUÇÃO

DADOS DA QUESTÃO

$T(x) = -8{,}12x^3 + 41{,}88x^2 – 71{,}99x + 40{,}23 = 0$ $x = ?$

$T'(x) = -24{,}36x^2 + 83{,}76x – 71{,}99$

$x_0 = 1{,}8$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{T\left(x_n\right)}{T'\left(x_n\right)}$$ FUNÇÃO RECURSIVA

Para *n = 0*: $$x_1 = x_0 - \frac{T\left(x_0\right)}{T'\left(x_0\right)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{-8{,}12\ x_0^3 + 41{,}88\ x_0^2 - 71{,}99\ x_0 + 40{,}23}{-24{,}36\ x_0^2 + 83{,}76\ x_0 - 71{,}99}$$

<u>PASSO 1</u>: armazenando o x_0 na memória de resposta *ANS*.

Digita "*1,8*" e em seguida tecla "="

<u>PASSO 2</u>: escrevendo a expressão recursiva em função de D_0, ou seja, *ANS*.

$$ANS - \left(\left(-8{,}12\ ANS^3 + 41{,}88\ ANS^2 - 71{,}99\ ANS + 40{,}23\right) / \left(-24{,}36\ ANS^2 + 83{,}76\ ANS - 71{,}99\right)\right)$$

<u>PASSO 3</u>: tecle "=" até o display não apresentar mudança no resultado numérico.

1,218635185

RESPOSTA: Aproximadamente, no ponto *1,22 m* a temperatura do pedaço do arame é nula.

<u>PROBLEMA 7</u>: Em um processo estudado por um engenheiro químico, o vapor d´água é aquecido a uma temperatura suficientemente alta de modo a ocorrer dissociação da molécula de água em oxigênio e hidrogênio. Assumindo que seja a única reação envolvida no processo, a fração molar, *x*, de H_2O que se dissocia pode ser representada pela equação

$$K = \frac{x}{1-x}\sqrt{\frac{2\ P_t}{2+x}}$$

onde *K* é a constante de equilíbrio da reação e p_t é a pressão total da mistura. Se $P_t = 3\ atm$ e $K = 0{,}05$, determine o valor de *x* que satisfaz a equação acima. Utilize o Método de Newton-Raphson com $x_0 = 0{,}05$ (*5%*), considerando a maior precisão que a calculadora poder fornecer.

RESOLUÇÃO

DADOS DA QUESTÃO

$$0{,}05 = \frac{x}{1-x} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{2+x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{0{,}05 - 0{,}05\ x}{x} = \sqrt{\frac{6}{2+x}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{0{,}05 - 0{,}05\,x}{x}\right)^2 = \frac{6}{2+x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{0{,}0025 - 0{,}005\ x + 0{,}0025\ x^2}{x^2} = \frac{6}{2+x}$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}005 - 0{,}01\ x + 0{,}005\ x^2 + 0{,}0025\ x - 0{,}005\ x^2 + 0{,}0025\ x^3 = 6\ x^2$$

$$\Rightarrow \quad f\ (x) = 0{,}005 - 0{,}0075\ x - 6\ x^2 + 0{,}0025\ x^3 = 0$$

$f\ (x) = 0{,}005 - 0{,}0075\ x - 6\ x^2 + 0{,}0025\ x^3 = 0$ $\qquad\qquad$ $x = ?$

$f\ '\ (x) = -\ 0{,}0075 - 12\ x + 0{,}0075\ x^2$

$x_0 = 0{,}05$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f\ (x_n)}{f\ '\ (x_n)}$$

FUNÇÃO RECURSIVA

Para $n = 0$: $\quad x_1 = x_0 - \dfrac{f\ (x_0)}{f\ '\ (x_0)}$

$$x_1 = x_0 - \frac{0{,}005 - 0{,}0075\ x_0 - 6\ x_0^2 + 0{,}0025\ x_0^3}{-\ 0{,}0075 - 12\ x_0 + 0{,}0075\ x_0^2}$$

PASSO 1: armazenando o x_0 na memória de resposta *ANS*.

Digita "*0,05*" e em seguida tecla "="

PASSO 2: escrevendo a expressão recursiva em função de x_0, ou seja, *ANS*.

$$ANS - \left(\left(0{,}005 - 0{,}0075\ ANS - 6\ ANS^2 + 0{,}0025\ ANS^3\right) / \left(-\ 0{,}0075 - 12\ ANS + 0{,}0075\ ANS^2\right)\right)$$

<u>PASSO 3</u>: tecle “=” até o display não apresentar mudança no resultado numérico.

0,028249441 *x 100%*

ou

2,82%

RESPOSTA: A fração molar é 2,82% aproximadamente.

<u>PROBLEMA 8</u>: Uma aldeia no sopé de um vulcão está a uma distância $y = 10$ *milhas*. A relação entre a distância y (*milhas*) percorrida pela lava e o tempo t (*horas*) é dada por: $y = 7(2 - 0{,}9^t)$. O gabinete de proteção civil advertiu os moradores da aldeia de que a lava chegaria às suas casas em menos de *6 horas*. Calcule utilizando um método iterativo que recorre ao cálculo de derivadas o instante de tempo em que a lava do vulcão atinge a aldeia. Considere a maior precisão que a calculadora poder fornecer.

Figura 4 – Vulcão em erupção próximo a uma aldeia

Fonte: Reuters, 2024.

RESOLUÇÃO

DADOS DA QUESTÃO

y = 7(2 – 0,9^t)

y = 10

$$10 = 7(2 - 0{,}9^t)$$

$$0 = -10 + 14 - 7 \,.\, 0{,}9^t$$

$$f(t) = 4 - 7 \,.\, 0{,}9^t = 0$$

f(t) = 4 – 7 . 0,9^t = 0

f'(t) = – 7 . 0,9^t . ln 0,9

t_0 = 6

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f\left(t_n\right)}{f\,'\left(t_n\right)}$$ FUNÇÃO RECURSIVA

Para $n = 0$: $$t_1 = t_0 - \frac{f\left(t_0\right)}{f\,'\left(t_0\right)}$$

$$t_1 = t_0 - \frac{4 - 7 \,.\, 0{,}9^t}{-7 \,.\, 0{,}9^t \,.\, \ln 0{,}9}$$

PASSO 1: armazenando o t_0 na memória de resposta *ANS*.

digita "*6*" e em seguida tecla "="

PASSO 2: escrevendo a expressão recursiva em função de h_0, ou seja, *ANS*.

ANS – ((4 – 7 . 0,9^ANS) / (-7 . 0,9^ANS . ln 0,9))

PASSO 3: tecle "=" até o display não apresentar mudança no resultado.

5,311437444 horas

ou

5 h 19 min

RESPOSTA: O tempo em que a lava do vulcão atinge a aldeia é *5 h 19 min* aproximadamente.

PROBLEMA 9: Em engenharia ambiental, a seguinte equação pode ser usada para calcular o nível de concentração de oxigênio c num rio, em função da distância x, medida a partir do local de descarga de poluentes: $c(x) = 10 - 20(e^{-0,2x} - e^{-0,75x})$.

Figura 5 – Descarga de poluentes em um rio

Fonte: Brasil Escola, 2024.

Calcule, usando um método que recorre ao cálculo de derivada, a distância para a qual o nível de oxigênio desce para o valor 5. Utilize para aproximação inicial o valor $x_0 = 1.0$ e considere a maior precisão que a calculadora poder fornecer.

RESOLUÇÃO

DADOS DA QUESTÃO

$c(x) = 10 - 20(e^{-0,2x} - e^{-0,75x})$

$c(x) = 5$

$$5 = 10 - 20(e^{-0,2x} - e^{-0,75x})$$

$$0 = 5 - 20(e^{-0,2x} - e^{-0,75x})$$

$$f(x) = 5 - 20e^{-0,2x} + 20e^{-0,75x} = 0$$

$f(x) = 5 - 20e^{-0,2x} + 20e^{-0,75x} = 0$ $\qquad$ $x = ?$

$f'(x) = 4e^{-0,2x} - 15e^{-0,75x}$

$x_0 = 1$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f\left(x_n\right)}{f\,'\left(x_n\right)}$$ FUNÇÃO RECURSIVA

Para *n = 0*: $$x_1 = x_0 - \frac{f\left(x_0\right)}{f\,'\left(x_0\right)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{5 - 20\,e^{-0{,}2\,x_0} + 20\,e^{-0{,}75\,x_0}}{4\,e^{-0{,}2\,x_0} - 15\,e^{-0{,}75\,x_0}}$$

PASSO 1: armazenando o x_0 na memória de resposta *ANS*.

Digita "*1*" e em seguida tecla "="

PASSO 2: escrevendo a expressão recursiva em função de x_0, ou seja, *ANS.*

ANS - ((5 – 20e^(-0,2ANS) + 20e^(-0,75ANS)) / (4e^(-0,2ANS) – 15e^(-0,75ANS)))

PASSO 3: tecle "=" até o display não apresentar mudança no resultado numérico.

0,602355464

RESPOSTA: A distância para a qual o nível de oxigênio desce para o valor *5* é *0,60 unidades de comprimentos*.

6 CONCLUSÃO

O trabalho acadêmico abordou a implementação do método de Newton-Raphson em calculadoras científicas para a determinação de raízes reais de funções reais, propondo uma abordagem prática para o ensino de técnicas numéricas. A pesquisa destacou a importância de um guia de referência prático que facilite a compreensão e a aplicação do método, promovendo um aprendizado mais dinâmico e significativo.

Este estudo evidenciou a relevância das metodologias ativas de ensino-aprendizagem, enfatizando a necessidade de transformar a prática docente para promover um aprendizado mais engajador e significativo. A análise das limitações da técnica, incluindo suas condições de aplicabilidade e os desafios associados à escolha do ponto inicial, proporcionou uma visão crítica essencial para a formação dos estudantes.

O guia mostrou que o método de Newton-Raphson, quando implementado em calculadoras científicas, oferece uma alternativa eficaz aos métodos tradicionais de ensino, que frequentemente dependem de ferramentas computacionais complexas e de alto custo. Ao integrar o método em uma ferramenta acessível e amplamente disponível, como a calculadora científica, os alunos podem desenvolver habilidades práticas e uma compreensão mais profunda da matemática aplicada, sem a necessidade de recursos avançados.

REFERÊNCIAS

RIBEIRO, Luis Roberto de Camargo. **A aprendizagem baseada em problemas (PBL): uma implementação na educação em engenharia na voz dos atores**. Tese (Doutorado em Ciências Humanas) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2005. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/2353. Acesso em: 10 abr. 2024.

LACERDA, Flavia Cristina Barbosa; SANTOS, Leticia Machado dos. **Integralidade na formação do ensino superior: metodologias ativas de aprendizagem**. Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior (Campinas), v. 23, n. 3, p. 611–627, set. 2018. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S1414-40772018000300003. Acesso em: 14 abr. 2024.

BRANCO, Maria Luisa Frazão Rodrigues. **A educação progressiva na atualidade: o legado de John Dewey**. Educação e Pesquisa, v. 40, n. 3, p. 783–798, jul. 2014. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S1517-97022014005000013. Acesso em: 18 abr. 2024.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Objetivos e tendências da educação matemática em paises em via de desenvolvimento**. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, n. Especial, p. 187-197, 2021. Disponível em: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/49191/48959. Acesso em: 22 abr. 2024.

DA CUNHA, Jussileno Souza; DA SILVA, José Adgerson Victor. **A importância das atividades lúdicas no ensino da matemática**. Anais da 3ª Escola de Inverno de Educação Matemática, p. 1-12, 2012. Disponível em: https://www.ufsm.br/app/uploads/sites/534/2020/03/RE_Cunha_Jussileno.pdf. Acesso em: 28 abr. 2024.

FONTES, Liviam Santana. **As metodologias ativas de aprendizagem e sua contribuição para o ensino de cálculo diferencial e integral**. 2021. 172 f. Tese (Doutorado em Educação) — Universidade de Brasília, Brasília, 2021. Disponível em: http://repositorio2.unb.br/jspui/handle/10482/42983. Acesso em: 05 mai. 2024.

BROUSSEAU, Guy. **A etnomatemática e a teoria das situações didáticas**. Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo, v. 8, n. 2, 2007. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/458. Acesso em: 10 mai. 2024.

BROUSSEAU, Guy. **Didática e teoria das situações didáticas em matemática**. Tradução de Maria José Ferreira da Silva e Saddo Ag Almouloud. São Paulo: PUC-SP, 2006. Disponível em: https://www.pucsp.br/pensamentomatematico/TSDMF4_Brousseau_2006.pdf. Acesso em: 18 mai. 2024.

POMMER, Wagner Marcelo. **Brousseau e a idéia de situação didática**. SEMA – Seminários de Ensino de Matemática / FEUSP – 2º Semestre, 2008. Disponível em: https://www.nilsonjosemachado.net/sema20080902.pdf. Acesso em: 26 mai. 2024.

BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. **Análise numérica**. Tradução da 10ª edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning Brasil. 2016.

RUGGIERO, Maria A. Gomes; LOPES, Vera Lucia da Rocha. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2ª ed. São Paulo: Makron Books, 1996.

CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. **Métodos numéricos para engenharia**. 7ª ed. Porto Alegre: McGraw Hill Brasil, 2016.