UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

CAIO ADLER SCALSER COIMBRA

SÓLITONS DE RICCI GRADIENTE SHRINKING DE DIMENSÃO 4 COM CURVATURA ISOTRÓPICA POSITIVA

FORTALEZA

2022

CAIO ADLER SCALSER COIMBRA

SÓLITONS DE RICCI GRADIENTE SHRINKING DE DIMENSÃO 4 COM CURVATURA ISOTRÓPICA POSITIVA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C633s Coimbra, Caio Adler Scalser.
Sólitons de Ricci gradiente shrinking de dimensão 4 com curvatura isotrópica positiva / Caio Adler Scalser Coimbra. – 2025.
75 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2025.
Orientação: Prof. Dr. Ernani de Souza Ribeiro Júnior.

1. Variedade Riemannianas. 2. Sólitons de Ricci. 3. Fluxo de Ricci. 4. Curvatura isotrópica. 5. Tensor de Weyl. I. Título.

CDD 510

CAIO ADLER SCALSER COIMBRA

SÓLITONS DE RICCI GRADIENTE SHRINKING DE DIMENSÃO 4 COM CURVATURA ISOTRÓPICA POSITIVA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 21/02/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diogenes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente ao meu pai Osorio e minha mãe Neila, que durante toda minha caminhada sempre me deram muito amor, suporte e incentivo para alcançar meus objetivos. Sem vocês nada disso seria possível.

Aos meus irmãos Jamille, Breno e Talitha, pelo carinho, apoio, amor e amizade incondicional. Vocês são fundamentais.

Aos meus professores da UFC e da UFES. Em especial ao professor Apoenã Passos Passamani, que foi a primeira pessoa a me apresentar aos fascínios da geometria diferencial.

Aos meus grandes amigos Hiago e Lucas que, apesar da distância, foram muito importantes nesse processo. A falta de vocês é notada.

Agradeço imensamente ao professor Ernani de Sousa Ribeiro Júnior pela orientação que foi sempre muito assertiva. Foi uma grande satisfação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

“O conhecimento emerge apenas através da invenção e da reinvenção, através da inquietante, impaciente, contínua e esperançosa investigação que os seres humanos buscam no mundo, com o mundo e uns com os outros.”

(Paulo Freire)

RESUMO

O objetivo deste trabalho é provar um teorema de classificação, provado por Li, Ni e Wang, que diz que todo sóliton de Ricci gradiente shrinking de dimensão 4 com curvatura isotrópica positiva, é quociente finito de $\mathbb{S}^4$ ou $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$. Para fazê-lo, apresentaremos alguns resultados sobre a geometria dos sólitons e estudaremos a evolução do tensor curvatura de Riemann no fluxo de Ricci.

Palavras-chave: variedades riemannianas; sólitons de Ricci; fluxo de Ricci; curvatura isotrópica; Tensor de Weyl.

ABSTRACT

The main purpose of this work is to demonstrate a classification theorem, proved by Li, Ni and Wang, that states that any four dimensional gradient shrinking Ricci soliton with positive isotropic curvature is a finite quotient of either $\mathbb{S}^4$ or $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$. To do so, we shall present some results regarding the geometry of the Ricci soliton and analyse the evolution of the Riemann tensor under the Ricci flow.

Keywords: riemannian manifolds; Ricci solitons; Ricci flow, isotropic curvature; Weyl tensor;

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O fluxo de Ricci foi introduzido no início da década de 80 por Hamilton em [15] e consiste no estudo do sistema de equações diferenciais parciais não lineares

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric(g(t)), \\ g(0) = g_0, \end{cases}$$

onde $g(t)$ é uma família a 1-parâmetro de métricas numa variedade fixada.

Desde sua apresentação, o fluxo de Ricci tem se mostrado uma ferramenta poderosa para estudar certos problemas de geometria e topologia. Em particular, podemos destacar o trabalho de Perelman que resultou na prova da conjectura de geometrização de Thurston e, por consequência, a conjectura de Poincaré. Além disso, também usando técnicas do fluxo de Ricci, Brendle e Schoen, foram capazes de resolver o famoso problema das variedades $\frac{1}{4}$-pinçadas.

Estabelecida a importância do fluxo de Ricci, é natural que muitos trabalhos se dediquem a compreender o comportamento das soluções do fluxo, bem como de suas singularidades. Nesse sentido, os sólitons de Ricci desempenham papel fundamental. Estes foram introduzidos por Hamilton em [16] e são definidos, em termos gerais, como métricas Riemannianas completas, tais que existe um campo X satisfazendo a equação

$$Ric + \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g = \lambda g.$$

Também dos trabalhos de Hamilton e Perelman, resulta que todo sóliton de Ricci compacto é gradiente, i.e., existe uma função suave f tal que:

$$Ric + Hess f = \lambda g.$$

A relevância do estudo dos sólitons de Ricci se dá, entre outras coisas, pelo fato dos sólitons serem precisamente as solução auto-similares do fluxo. Além disso, esses aparacem como modelos de singularidades do fluxo de Ricci.

A partir da sua introdução, muito foi feito para tentar entender a geometria e classificar os sólitons de Ricci gradiente, em particular o caso shrinking (i.e., $\lambda > 0$). Em dimensão 2, Hamilton mostrou em [17] que todo sóliton de Ricci gradiente shrinking é isométrico ao $\mathbb{R}^2$ ou a um quociente finito de $\mathbb{S}^2$. Já no caso de dimensão 3, resulta dos trabalhos [5], [19], [22], [28] e [30] que todo sóliton de Ricci gradiente shrinking é isométrico ao quociente finito de $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Nos últimos anos, houve muito avanço nos resultados de classificação dos sóliton em dimensões maiores.

Um caso muito especial, não só de sólitons, mas também de variedades Riemannianas, é o das variedades de dimensão 4, isso porque tais variedades apresentam algumas propriedades específicas que nos permitem aplicar técnicas exclusivas para o caso de dimensão 4. Muitas dessas peculiaridades provém do fato de que nessa situação, o operador $\star$ estrela de Hodge produz uma decomposição no fibrado das 2-formas

$$\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-,$$

onde $\Lambda^2_\pm$ corresponde ao (± 1)-autoespaço de $\star$. Diferente do que acontece em dimensão 2 e 3, devido ao exemplo construído por Feldman, Ilmanen e Knopf em [13], sabemos que em dimensão 4, os sólitons de Ricci gradiente shrinking não precisam ter curvatura não negativa. Por conta disso, muitos trabalhos se dedicam a tentar classificar os sólitons impondo condições mais fracas, a saber, condições sobre o tensor de Weyl, tensor de Ricci, curvatura escalar, entre outros. Em [8] Chen provou que todo sóliton de Ricci gradiente shrinking possui curvatura escalar não negativa, e no caso em que se anula em algum ponto, então deve ser identicamente nula. Além disso, dos trabalhos [3], [12], [22], [27], [32] e [34] sabemos que todo sóliton de Ricci gradiente shrinking de dimensão 4 e localmente conformemente flat (i.e., $W = 0$) é quociente finito de $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{S}^4$ ou $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$. Mais tarde foi provado por Chen e Wang em [10] que no caso half conformally flat (i.e., $W^+ = 0$ ou $W^- = 0$) devemos ter quociente finito de $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{S}^4$, $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{CP}^2$. O caso Bach flat (i.e., $B = 0$) foi coberto em [6], onde Cao e Chen provaram que nessas condições temos que o sóliton de Ricci gradiente shrinking deve ser Einstein ou quociente finito de $\mathbb{R}^4$ ou $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$. Recentemente em 2021, Cao, Ribeiro e Zhou foram capazes de provar em [7] que, sob algumas condições em $|W^+|$ ou $|W^-|$, todo sóliton de Ricci gradiente shrinking de dimensão 4 é Einstein ou quociente finito de $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Outra noção que podemos explorar é a da curvatura isotrópica. Introduzida por Micallef e Moore em [26], desempenha papel intermediário no sentido que hipóteses sobre a curvatura isotrópica são mais fracas do que as sobre a curvatura de Riemann. É razoável relacionar a curvatura isotrópica com os sólitons de Ricci gradiente shrinking, uma vez que foi provado por Hamilton em dimensão 4, por Brendle e Schoen em [2] e Nguyen em [29] para dimensões maiores, que o fluxo de Ricci preserva a curvatura isotrópica positiva. Além disso, como veremos, não é difícil concluir que toda variedade de dimensão 4 com curvatura isotrópica positiva possui curvatura escalar positiva, portanto, impor curvatura isotrópica positiva não contradiz a restrição obtida por Chen. Nesse sentido Li, Ni e Wang provaram o seguinte teorema em [23]

Teorema 1. *Seja (M^4, g) um sóliton de Ricci gradiente shrinking completo com curvatura isotrópica positiva. Então o recobrimento universal de M^4 é $\mathbb{S}^4$ ou $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$.*

Este trabalho se dedica, essencialmente, a demonstrar o resultado enunciado acima.

2 PRELIMINARES

O primeiro capítulo deste trabalho consiste, basicamente, em apresentar alguns conceitos fundamentais para o bom entendimento dos objetos aos quais se referem os resultados principais.

2.1 Variedades Riemannianas

Tudo o que segue se passa no contexto das variedade Riemannianas, portanto é natural iniciarmos com definições e propriedades que permeiam o universo dessas variedades.

Definição 1. *Uma variedade topológica M^n de dimensão n é um conjunto topológico com base enumerável de abertos e que é localmente euclidiano, ou seja, para cada ponto $p \in M$ existe uma vizinhança U_p de p, que chamamos de vizinhança coordenada, e um homeomorfismo de abertos $\varphi_U : U \to \varphi_U(U) \subset \mathbb{R}^n$. Ao par (U, φ_U) damos o nome de carta de coordenadas.*

Para passarmos de variedades topológicas à variedades diferenciáveis, precisamos ter claro a noção de compatibilidade entre as cartas.

Definição 2. *Sejam M uma variedade suave de dimensão n e (U, φ_U), (V, φ_V) duas carta tais que $U \cap V \neq \emptyset$, dizemos que as duas cartas são C^r-compatíveis se a aplicação*

$$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1} : \varphi_U(U \cap V) \to \varphi_V(U \cap V)$$

for de classe C^r no sentido clássico de abertos em $\mathbb{R}^n$. A tal aplicação damos o nome de mudança de coordenadas ou aplicação de transição.

Com isso em mãos podemos entender o que é uma estrutura diferenciável numa variedade.

Definição 3. *Seja M uma variedade topológica de dimensão n. Uma estrutura C^r-diferenciável em M é um conjunto de pares $\mathscr{A} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ satisfazendo:*

(i) *Para cada $\lambda \in \Lambda$, U_λ é vizinhança aberta de M e $\varphi_\lambda : U_\lambda \to \varphi_\lambda(U_\lambda) \subset \mathbb{R}^n$ é homeomorfismo de abertos;*

(ii) *$M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$;*

(iii) *Quaisquer duas cartas em $\mathscr{A}$ são C^r-compatíveis;*

(iv) *$\mathscr{A}$ é maximal, i.e., se (U, φ_U) é C^r-compatível com todas as cartas em $\mathscr{A}$ então $(U, \varphi_U) \in \mathscr{A}$.*

Podemos finalmente definir o que são variedades diferenciáveis.

Definição 4. *Uma variedade topológica munida de uma estrutura C^r-diferenciável é chamada de variedade C^r-diferenciável. No caso particular em que a estrutura for C^∞-diferenciável chamamos M^n de variedade suave ou simplesmente variedade diferenciável.*

No que segue estaremos sempre lidando com variedades suaves.

Observação 1. *O item* (iv) *na Definição 3 é uma tecnicalidade. Sempre que tivermos um conjunto de cartas satisfazendo* (i)*,* (ii) *e* (iii) *existirá uma única estrtura contendo tal conjunto. Sendo assim, no que segue estaremos sempre supondo que o conjunto de cartas considerado é maximal.*

Seguimos com a noção de diferenciabilidade de funções definidas em variedades.

Definição 5. *Sejam M e N variedade suaves de dimensão m e n, respectivamente. Uma aplicação $f : M \to N$ é dita suave se dadas quaisquer cartas (U, φ_U) e (V, ψ_V) com $p \in U$ e $f(p) \in V$ a aplicação*

$$\psi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

for de classe C^∞ no sentido clássico de aplicações entre abertos de espaços euclidianos. Denotaremos por $C^\infty(M)$ o coinjunto de todas as funções suaves no caso particular em que $N = \mathbb{R}$.

Observação 2. *A compatibilidade das cartas garante que a existência de duas cartas (U, φ_U) e (V, ψ_V) é suficiente para que uma função f seja suave, ou seja, não precisamos analisar a suavidade em todas as cartas contendo os pontos $p \in M$ e $f(p) \in N$.*

No geral, quando formos trabalhar com cartas lideramos com as funções coordenadas associadas ao homeomorfismo, ou seja, se (U, φ_U) é uma carta em M, escreveremos $\varphi_U(p) = (x_1(p), ..., x_n(p))$ e vamos denotar a carta por (U, x_i). As funções $x_1, ..., x_n$ são chamadas de sistema de coordenadas locais de p.

Seja (U, x_i) um sistema de coordenadas locais em M, as funções x_i induzem bases para os espaços tangente e cotangente em cada ponto $p \in U$, denotaremos, respectivamente, como

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), ..., \frac{\partial}{\partial x_n}(p) \right\} \subset T_pM \quad e \quad \{dx_1(p), ..., dx_n(p)\} \subset (T_pM)^*.$$

Definição 6. *Seja M uma variedade suave. Um campo de vetores X em M é uma aplicação que associa a cada ponto $p \in M$ um vetor $X(p) \in T_pM$. Dado um sistema de coordenadas locais em M, podemos sempre escrever um campo X na vizinhança em termos da base induzida no espaço tangente*

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Dizemos que o campo X é suave se para qualquer sistema de coordenadas locais, as funções coordenadas de X definidas como acima forem funções suaves como na Definição 5. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de todos os campos de vetores suaves em M.

Agora definiremos uma métrica Riemanniana.

Definição 7. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma métrica Riemanniana em M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle , \rangle_p$ em T_pM que varia suavemente no sentido que se (U, x_i) for um sistema de coordenadas locais, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$ é uma função suave em U.*

Observação 3. *No que segue, se (U, x_i) é um sistema de coordenadas locais, denotaremos por*

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle.$$

Chamaremos tais funções de expressão da métrica g no sistema de coordenadas x_i.

Podemos, por fim, definir nosso principal objeto de estudo.

Definição 8. *Uma variedade Riemanniana é o par (M, g) onde M é uma variedade diferenciável e g uma métrica Riemanniana.*

Agora segue um resultado importante que garante uma vastidão de exemplos de variedades Riemannianas.

Proposição 1. *Toda variedade diferenciável M admite métrica Riemanniana.*

Para uma demonstração deste fato veja o Capítulo 1 de [11]. Com o objetivo de construir uma ideia análoga a de derivação covariante das superfície de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$ introduzimos a noção de conexão afim.

Definição 9. *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M *é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $\nabla_{fX+hY}Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z$;

(ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

(iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$;

onde $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f,h \in C^\infty(M)$.

A proposição a seguir deixa claro a relação entre conexão afim e a diferenciabilidade de campos ao longo de curvas na variedade.

Proposição 2. *Seja* M *uma variedade diferenciável e* ∇ *uma conexão em* M. *Então existe uma única correnpondência que associa a um campo vetorial* V *ao longo da curva diferenciável* $\gamma : I \to M$ *um outro campo vetorial* $\frac{DV}{dt}$ *ao longo de* γ, *denomidado derivada covariante de* V *ao longo de* γ, *tal que:*

(i) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$;

(ii) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, *onde* f *é uma função diferenciável em* I;

(iii) *Se existe um campo* $Y \in \mathfrak{X}(M)$ *que estende o campo* V, *ou seja,* $V(t) = Y(\gamma(t))$, *então* $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} Y$.

Para uma prova da proposição veja o Capítulo 2 de [11].

Observação 4. *Note que o item* (iii) *faz sentido pois a conexão* ∇ *tem a propriedade tensorial na primeira entrada e na segunda entrada só depende do valor do campo ao longo de uma curva suave arbitrária passando pelo ponto.*

Uma vez que a métrica desempenha, em algum sentido, o papel de um produto interno nos espaços tangentes, é natural esperarmos que a regra abaixo seja satisfeita pelas conexões, entretanto isso não é sempre verdade.

Definição 10. *Seja* (M,g) *Uma variedade Riemanniana. Dizemos que uma conexão afim* ∇ *é compatível com a métrica quando*

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{2.1}$$

para quaiquer que sejam $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Outra propriedade muito interessante que a conexão pode satisfazer é a de ser simétrica.

Definição 11. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma conexão ∇ em M é simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y], \tag{2.2}$$

onde X,Y são campos em $\mathfrak{X}(M)$ e $[,]$ é o colchete de Lie de dois campos.

Observação 5. *Se (U,x_i) é um sistema de coordenadas locais em M e $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ é o referencial induzido por x_i, i.e., $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, então*

$$\nabla_{X_i} X_j = \nabla_{X_j} X_i.$$

O teorema que segue é fundamental na construção de toda a teoria de variedades Riemannianas e, por conseqência, para que tudo que será aprensentado neste trabalho.

Teorema 2 (Levi-Civita)**.** *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana. Existe uma única conexão ∇ satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) *∇ é simétrica;*

(ii) *∇ é compatível com a métrica g.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que existe tal conexão. Sendo assim, valem as equações

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \tag{2.3}$$

$$Yg((Z,X)) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X), \tag{2.4}$$

$$Zg((X,Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y). \tag{2.5}$$

Agora, se somarmos (2.3) e (2.4), subtrairmos (2.5) e usarmos a simetria de ∇, obtemos

$$Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) = g([X,Z],Y) + g([Y,Z],X) + g([X,Y],Z) + 2g(Z, \nabla_Y X).$$

Reorganizando essa equação, encontramos

$$\begin{aligned} g(Z,\nabla_Y X) = \frac{1}{2}\Big\{ & Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ & - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X) - g([X,Y],Z) \Big\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

A equação (2.6), conhecida como fórmula de Koszul, garante que se tal conexão ∇ existe, então é definida unicamente pela métrica. Por fim, para a existência basta definir a conexão como em (2.6) e verificar que assim ∇ fica bem definida e satisfaz as condições do enunciado. $\square$

Observação 6. *A conexão definida pelo Teorema 2 é chamda de conexão de Levi-Civita. No que segue estaremos sempre lidando com a conexão de Levi-Civita.*

Definição 12. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana de dimensão n e $p \in M$. Um referencial ortonormal em torno de p é uma n-upla $X_1,...X_n$ definida numa vizinhança aberta U de p tal que para qualquer que seja $q \in U$ se tenha $g(X_i,X_j)(q) = 0$ sempre que $i \neq j$ e $g(X_i,X_i) = 1$, $i = 1,...,n$ e também $\{X_1(q),...,X_n(q)\}$ é base de T_qM.*

Existem outros tipos de referênciais que podem ser definidos nas variedades e que desempenham papel importante, por exemplo

Definição 13. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana de dimensão n e $p \in M$. Um referencial geodésico em torno de p é um referencial ortonormal em torno de p satisfazendo $\nabla_{X_i}X_j(p) = 0$.*

Seguimos com uma proposição que possibilita uma série de manipulações algébricas interessantes nas variedades Riemannianas.

Proposição 3. *Dada uma variedade Riemanniana (M,g) e um ponto $p \in M$ sempre é possível construir um referencial geodésico em torno de p.*

Antes de começar a demonstração, indicamos a leitura do Cápitulo 3 de [11] para entender todos os detalhes do que seguirá.

Demonstração. Tome $p \in M$. Considere $U \in M$ uma vizinhança normal de p, i.e.,

$$\exp_p : V \to U$$

é difeomorfismo entre uma vizinhança aberta $V \in T_pM$ contendo o vetor nulo e U. Dado $q \in U \backslash \{p\}$ existe uma única geodésica

$$\gamma_{pq} : [0,1] \to U$$

ligando p à q.

Considere $E_1(p),...,E_n(p)$ uma base ortonormal de T_pM. Para cada $q \in U \backslash \{p\}$ definimos os campos $\{E_i(q)\}_{i=1}^n$ como sendo o transporte paralelo dos campos $\{E_i(p)\}_{i=1}^n$ ao longo da geodésica γ_{pq}. Como o transporte paralelo ao longo de geodésicas preserva a métrica avaliada em campos, segue que $\{E_i(q)\}_{i=1}^n$ é um referencial ortonormal em U. Resta provar que

$$\nabla_{E_i} E_j(p) = 0.$$

Em coordenadas normais toda geodésica passando por p é da forma

$$\gamma(t) = t.v,$$

onde $v \in T_pM$ é o vetor ligando a origem ao ponto $\exp^{-1}(q)$ em T_pM. Isso garante que, para qualquer geodésica passando por p, vale

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0.$$

A equação das geodésicas é dada por

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} = 0,$$

donde segue que

$$\Gamma_{ij}^k \frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} = 0.$$

Como o resultado vale para qualquer geodésica passando por p, temos

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0,$$

ou seja,

$$\nabla_{E_i} E_j(p) = 0.$$

Note que isso não garante que $\nabla_{E_i} E_j = 0$ em U, uma vez que dado um ponto $q \in U \backslash \{p\}$ não é possível garantir que em toda geodésica passando por q se tenha $\frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0$.

$\square$

Para mais detalhes e resultados sobre variedades Riemannianas indicamos [11], [25] e [31].

2.2 Tensores

Ficará claro nas próximas seções a impossibilidade de estudar as variedades Riemannianas sem passar pelos tensores. A própria métrica Riemanniana é, como veremos, um tensor. Seguimos com algumas propriedades básicas.

Definição 14. *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita e E^* o espaço dual. Um (r,s)-tensor é uma aplicação multilinear*

$$\phi : \underbrace{E^* \times \cdots \times E^*}_{r} \times \underbrace{E \times \cdots \times E}_{s} \to \mathbb{R}.$$

Denotamos por $T_s^r(E)$ o conjunto de todos os (r,s)-tensores. Com as operações usuais $T_s^r(E)$ é um espaço vetorial de dimensão finita.

Agora uma proposição que nos permite relacionar tensores e aplicações multilineares. Essa proposição se faz muito útil no tratamento algébrico de objetos tensoriais nas variedades.

Proposição 4. *Seja E um espaço de dimensão finita. Existe um isomorfismo entre $T_s^{r+1}(E)$ e o espaço das aplicações multilineares*

$$\underbrace{E^* \times \cdots \times E^*}_{r} \times \underbrace{E \times \cdots \times E}_{s} \to E$$

Note que os tensores foram definidos em espaços vetoriais. Os fibrados tensoriais nos permitem enxergar os tensores como objetos nas variedades.

Definição 15. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana e para cada $p \in M$ considere o espaço vetorial $T_s^r(T_pM)$. Definimos o (r,s) fibrado tensorial de M, que denotaremos por T_s^rM, como sendo*

$$T_s^rM := \bigcup_{p \in M} T_s^r(T_pM).$$

Observação 7. *Note que alguns casos particulares são bastante conhecidos, por exemplo,*

(i) $T_0^1M = \mathfrak{X}(M)$;

(ii) $T_1^0M = \mathfrak{X}(M)^*$;

(iii) $T_0^0M = C^\infty(M)$.

Como foi apontado antes da definição anterior, podemos definir tensores em variedades Riemannianas.

Definição 16. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana. Um (r,s)-tensor em M é uma aplicação $\phi : M \to T_s^rM$ tal que $\phi(p) \in T_s^r(T_pM)$ para qualquer que seja $p \in M$. Além disso, ϕ define uma aplicação multilinear sobre $C^\infty(M)$*

$$\phi : \underbrace{\mathfrak{X}(M)^* \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)^*}_{r} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{s} \to C^\infty(M),$$

tal que se $\omega^1, ..., \omega^r \in \mathfrak{X}(M)^*$ *e* $X_1, ..., X_s \in \mathfrak{X}(M)$ *então*

$$\phi(\omega^1, ..., \omega^r, X_1, ..., X_s)(p) = \phi(p)(\omega^1(p), ..., \omega^r(p), X_1(p), ..., X_s(p)).$$

Fica claro a partir dessa definição que tensores são objetos pontuais, i.e., dependem dos valores dos campos avaliados no ponto, não é necessário conhecer os campos em vizinhanças. Isso, juntamente com a Proposição 4 nos permite associar $T_s^{r+1}M$ com o conjunto das aplicações multilineares sobre $C^\infty(M)$

$$\underbrace{\mathfrak{X}(M)^* \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)^*}_{r} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{s} \to \mathfrak{X}(M).$$

Seguiremos apresentando, de forma breve, como podemos manipular a ordem dos tensores nas variedades Riemannianas, i.e., se (M, g) é variedade Riemanniana e $T \in T_s^r M$, então T pode ser visto como um tensor $T \in T_{s+k}^{r-k} M$, onde $k \in \mathbb{Z}$, $r - k \geq 0$ e $s + k \geq 0$.

Primeiramente lembre que para cada $p \in M$ existe um isomorfismo natural entre T_pM e T_pM^* que associa cada $v \in T_pM$ com a aplicação linear $\{w \mapsto g_p(v, w)\}$. Com isso podemos associar cada campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ com a aplicação $\{W \mapsto g(X, W)\}$.

Usaremos agora e em tudo que segue no texto a convenção de Einstein, que consiste em omitir o símbolo de somatório quando temos índices cruzados repetidos.

Seja $\{E_1, ..., E_n\}$ um referencial móvel em M e $\{\theta^1, ..., \theta^n\}$ o referencial dual. Tome um campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$, escreva $Y = Y^k E_k$ e note que o dual de E_i é um $\sigma \in \mathfrak{X}(M)^*$ dado por

$$\begin{aligned} \sigma(Y) &= g(E_i, Y) \\ &= g(E_i, Y^k E_k) \\ &= Y^k g_{ik} \\ &= g^{ik} \theta^k(Y). \end{aligned}$$

Portanto o dual de E_i é o covetor $g_{ij}\theta^j$. Por outro lado, dado uma seção θ^j o seu dual é um campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\theta^j(W) = g(V, W)$. Escreva $V = V^k E_k$ e note que

$$g(V, E_i) = \theta^j(E_i) = \delta_i^j,$$

então

$$g(V^k E_k, E_i) = V^k g_{ki} = \delta_i^j.$$

Multiplicando os dois lados g^{ki}, onde g^{ik} é a inversa de g_{ik}, obtemos

$$V^k = g^{jk},$$

e portanto o dual de θ^j é o campo $g^{jk}E_k$.

Com isso poderemos manipular a ordem dos tensores como for conveniente. Por fim, definiremos uma operação entre $(0,2)$-tensores que será bastante útil adiante.

Definição 17. *Sejam α e ω $(0,2)$-tensores e $X_1,...,X_4 \in \mathfrak{X}(M)$. O produto de Kulkarni-Nomizu de α por ω é o $(0,4)$-tensor, dado por*

$$\begin{aligned}\alpha \owedge \omega(X_1,...,X_4) = {} & \alpha(X_1,X_3)\omega(X_2,X_4) + \alpha(X_2,X_4)\omega(X_1,X_3) \\ & - \alpha(X_1,X_4)\omega(X_2,X_3) - \alpha(X_2,X_3)\omega(X_1,X_4).\end{aligned}$$

Para mais detalhes sobre tensores em variedades e análise tensorial, veja [24] e [1].

2.3 Operadores diferenciais

O objetivo principal dessa seção é apresentar alguns operadores já conhecidos da teoria de derivação em espaços euclidianos, que são definidos a partir da métrica Riemanniana e da noção de derivação induzida pela conexão afim.

Definição 18. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. O gradiente de f é um campo $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ definido pela lei*

$$df(X) = X(f) = \nabla_X f = g(\nabla f, X),$$

para qualquer que seja $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Agora uma proposição sobre propriedades do gradiente que é, naturalmente, esperada pelo leitor familiarizado com a noção de gradiente de funções reais em espaços euclidianos.

Proposição 5. *Sejam $f,g \in C^\infty(M)$, então:*

(i) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;

(ii) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

A demonstração segue imediatamente das propriedades da derivada covariante. A proposição que segue deixa claro a relação entre o gradiente de funções em variedades Riemannianas e em espaços euclidianos.

Proposição 6. *Sejam $f \in C^\infty(M)$, $p \in M$ e $v \in T_pM$. Se $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é uma curva tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, então*

$$g(\nabla f, v)_p = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \gamma)(t).$$

Em particular, se p é um ponto de máximo ou mínimo local de f, então $\nabla f(p) = 0$.

Demonstração. Seja V uma extensão local de $\gamma'(t)$ a algum aberto contendo $p \in M$, então

$$g(\nabla f, v)_p = (\nabla_V f)(p) = \gamma'(t) f\bigg|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \gamma)(t)$$

Agora, seja p um ponto de máximo (ou mínimo) local. Seja $b \in T_pM$ arbitrário, existe uma curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ satisfazendo $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.
Como p é máximo (ou mínimo) local para f, então 0 é um ponto de máximo (ou mínimo) local para $f \circ \gamma$, donde segue que

$$g(\nabla f, v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \gamma) = 0.$$

Levando em conta que $v \in T_pM$ é tomado arbitrariamente, temos $\nabla f(p) = 0$. □

Segue daí o seguinte corolário.

Corolário 1. *Se $f \in C^\infty(M)$ e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável, então*

$$\nabla(\phi \circ f) = \phi'(f) \nabla f$$

Assim como nos espaços euclidianos, é interessante estudar os pontos nos quais o gradiente de uma função se anula.

Definição 19. *Seja $f \in C^\infty(M)$. Um ponto $p \in M$ é chamado de ponto crítico de f se $\nabla f(p) = 0$.*

Note que segue da Proposição 6 que se p é ponto de máximo ou mínimo local, então p é um ponto crítico. Além disso, também da Proposição 6 segue o corolário.

Corolário 2. *Se (M, g) é uma variedade Riemanniana conexa e $f \in C^\infty(M)$ é tal que $\nabla f \equiv 0$, então f é constante.*

Agora, seja (U, x_i) um sistema de coordenadas locais em M com os respectivos campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ em U. Como $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$, podemos escrever, em U,

$$\nabla f = a^i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Note que

$$\begin{aligned}\partial_j f &= g\left(\nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\\ &= g\left(a^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\\ &= a^i g_{ij},\end{aligned}$$

donde segue

$$g^{kj}\partial_j f = g^{kj}a^i g_{ij} = a^i g^{kj} g_{ji} = a^i \delta_i^k = a^k.$$

Portanto, depois de reorganizar os índices, obtemos

$$\nabla f = g^{ij}(\partial_i f)\frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{2.7}$$

Além disso, também podemos obter uma expressão para $|\nabla f|^2$ em termos de coordenadas locais

$$\begin{aligned}|\nabla f|^2 &= g\left(g^{ij}(\partial_i f)\frac{\partial}{\partial x_j}, g^{mn}(\partial_m f)\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\\ &= g^{ij}(\partial_i f) g^{mn}(\partial_m f) g_{jn}\\ &= g^{ij}(\partial_i f)(\partial_m f)\delta_j^m\\ &= g^{ij}(\partial_i f)(\partial_j f).\end{aligned}$$

Definição 20. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. A divergência de X é a função $divX \in C^\infty(M)$ definida por*

$$divX(p) = tr\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\}.$$

Agora segue uma propoisção que nos dá uma expressão para a divergência de um campo em termos de coordenadas locais.

Proposição 7. *Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é dado por $X^i\partial_i$ onde $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ representa a base induzida pelas coordenadas locais. Então*

$$divX = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}X^i) \tag{2.8}$$

Demonstração. Primeiramente, da definição de divergência de um campo, temos

$$\begin{aligned}divX &= g(\partial_j, \nabla_{\partial_k} X^i \partial_i) g^{jk}\\ &= g(\partial_j, (\partial_k X^i)\partial_i + X^i \nabla_{\partial_k}\partial_i) g^{jk}\\ &= g(\partial_j, (\partial_k X^i)\partial_i + X^i \Gamma_{ik}^l \partial_l) g^{jk}\\ &= (\partial_k X^i) g_{ij} g^{jk} + X^i \Gamma_{ik}^l g_{lj} g^{jk},\end{aligned}$$

ou seja,

$$divX = \partial_i X^i + X^i \Gamma^k_{ik}. \tag{2.9}$$

Além disso, a compatibilidade de ∇ se exprime, em coordenadas locais, por

$$\partial_i(g_{jk}) = \Gamma^l_{ik} g_{lj} + \Gamma^l_{ij} g_{kl}. \tag{2.10}$$

Precisaremos também da expressão da derivada do determinante de uma matriz invertível, que é dada por

$$\partial_i(detA) = (detA)tr(A^{-1}\partial_i(A)). \tag{2.11}$$

Com essas três equações em mãos podemos prosseguir com a demonstração da proposição. Partiremos do lado direito da igualdade

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}X^i) &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}(\sqrt{|g|}\partial_i X^i + \partial_i(\sqrt{|g|})X^i) \\
&= \partial_i X^i + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|})X^i \\
&= \partial_i X^i + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{1}{2\sqrt{|g|}}\partial_i(|g|)X^i \\
&= \partial_i X^i + \frac{1}{2|g|}\partial_i(|g|)X^i.
\end{aligned}$$

Da equação (2.11), segue

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}X^i) &= \partial_i X^i + \frac{1}{2|g|}(|g|tr(g^{-1}\partial_i(g))X^i \\
&= \partial_i X^i + \frac{1}{2}tr(g^{jk}\partial_i g_{kl})X^i \\
&= \partial_i X^i + \frac{1}{2}(g^{jk}\partial_i g_{kj})X^i.
\end{aligned}$$

Agora, substituindo a equação (2.10) na igualdade obtida acima, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}X^i) &= \partial_i X^i + \frac{1}{2}(g^{jk}(\Gamma^l_{ik} g_{lj} + \Gamma^l_{ij} g_{kl}))X^i \\
&= \partial_i X^i + \frac{1}{2}(\Gamma^k_{ik} + \Gamma^j_{ij})X^i \\
&= \partial_i X^i + \Gamma^k_{ik} X^i.
\end{aligned}$$

Por fim, segue da equação (2.9) que

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}X^i) = divX.$$

□

Com as noções de divergência de um campo e de gradiante de uma função, podemos definir um operador muito relevante, o Laplaciano.

Definição 21. *Seja $f \in C^\infty(M)$. O Laplaciano de f é a função $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f(p) = div \nabla f(p).$$

Se levarmos em conta as equações (2.7) e (2.8), podemos concluir que

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_j (\sqrt{|g|} g^{ij} (\partial_i f)). \tag{2.12}$$

Agora apresentamremos um operador que, como veremos mais adiante, está diretamente relacionado com o que chamaremos de Sólitons de Ricci Gradiente.

Definição 22. *Seja $f \in C^\infty(M)$. O Hessiano de f é a aplicação que associa a cada $p \in M$ um operador linear $(Hess f)_p : T_pM \to T_pM$ dado por*

$$(Hess f)_p v = \nabla_v \nabla f(p),$$

para qualquer que seja $v \in T_pM$.

Note que, se $v \in T_pM$ e V é uma extensão qualquer de v a um aberto contendo p, então

$$(Hess f)_p v = \nabla_V \nabla f(p).$$

Agora uma propriedade muito útil do operador Hessiano.

Proposição 8. *Sejam $f \in C^\infty(M)$ e $p \in M$, então $(Hess f)_p : T_pM \to T_pM$ é um operador linear auto-adjunto.*

Demonstração. Tome $u, v \in T_pM$ quaisquer, e duas extensões U, V a algum aberto de M contendo

p.

$$\begin{aligned}
g((Hessf)_p u,v) &= g(\nabla_U \nabla f, V) \\
&= Ug(\nabla f, V) - g(\nabla f, \nabla_U V) \\
&= U(\nabla_V f) - g(\nabla f, [U,V] + \nabla_V U) \\
&= \nabla_U \nabla_V f - g(\nabla f, \nabla_V U) - g(\nabla f, [U,V]) \\
&= \nabla_V \nabla_U f + \nabla_{[U,V]} f - g(\nabla f, \nabla_V U) - g(\nabla f, [U,V]) \\
&= \nabla_V \nabla_U f - g(\nabla f, \nabla_V U) \\
&= \nabla_V (g(U, \nabla f)) - g(\nabla f, \nabla_V U) \\
&= g(\nabla_V \nabla f, U) \\
&= g(u, (Hessf)_p v)).
\end{aligned}$$

□

A próxima proposição relaciona o Hessiano de uma função com seu Laplaciano.

Proposição 9. *Seja $f \in C^\infty(M)$, então*

$$\Delta f = tr(Hessf).$$

Demonstração. Vamos mostrar que a igualdade se verifica para qualquer ponto. Tome $p \in M$, e considere um referencial ortonormal $E_1, ..., E_n$ em algum aberto $U \subset M$ contendo p. Então

$$tr(Hessf)_p = \sum_{i=1}^{n} g((Hessf)E_i, E_i)(p) = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i} \nabla f, E_i)(p) = div(\nabla f)(p).$$

Segue, por fim, da Definição 20 que $\Delta f(p) = tr(Hessf)_p$. A arbitrariedade de $p \in M$ garante o resultado. □

Lançando mão das identificações feitas na Seção 2.2 podemos interpretar a hessiana de uma função como o $(1,1)$-tensor dado por $Hessf(X) = \nabla_X \nabla f$ onde $X \in \mathfrak{X}(M)$. Além disso, também podemos enxergar como um $(0,2)$-tensor, que é simétrico uma vez que a hessiana é auto-adjunta, definida por

$$Hessf(X,Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y), \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.13}$$

Agora estenderemos alguns desses operadores diferenciais para tensores mais gerais.

Definição 23. *Seja $T \in T_s^1(M)$, definimos a derivada covariante de T como sendo o $(1,(s+1))$-tensor, $\nabla T : \mathfrak{X}(M)^{s+1} \to \mathfrak{X}(M)$ dado por*

$$\begin{aligned}\nabla T(X,Y_1,...,Y_s) &= (\nabla_X T)(Y_1,...,Y_s) \\ &= \nabla_X(T(Y_1,...,Y_s)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{s} T(Y_1,...,\nabla_X Y_i,...,Y_s).\end{aligned}$$

Além da derivada covariante, podemos estender aos tensores a noção de divergência.

Definição 24. *Seja $S \in T_s^1(M)$, a divergência de S é o $(0,s)$-tensor, $divS : \mathfrak{X}(M)^s \to C^\infty(M)$, dado por*

$$divS(Y_1,...,Y_s) = tr\{X \mapsto (\nabla_X S)(Y_1,...,Y_s)\}.$$

Por fim, apresentaremos um operador diferencial que desempenha papel importante na teoria de Sólitons a ser tratada mais adiante no texto.

Definição 25. *Seja α um tensor em M e $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo completo (i.e. X define um grupo a 1-parâmetro de difeomorfismos). A derivade de Lie de α com respeito ao campo X é dada por*

$$\mathscr{L}_X \alpha = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\varphi_t^* \alpha - \alpha) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t^* \alpha,$$

onde φ_t^* é o pullback induzido por φ_t.

Algumas propriedade interessantes da derivada de Lie.

Proposição 10. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. A derivada de Lie com respeito à X satisfaz as seguintes propriedades*

(i) *Se $f \in C^\infty(M)$, então*

$$\mathscr{L}_X f = X(f) = \nabla_X f.$$

(ii) *Se $Y \in \mathfrak{X}(M)$, então*

$$\mathscr{L}_X Y = [X,Y].$$

(iii) *Se α e β são tensores, então*

$$\mathscr{L}_X(\alpha \otimes \beta) = (\mathscr{L}_X \alpha) \otimes \beta + \alpha \otimes (\mathscr{L}_X \beta).$$

(iv) *Se* $\alpha \in T_s^0(M)$*, então, para quaisquer que sejam* $Y_1,...,Y_s \in \mathfrak{X}(M)$*,*

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}_X\alpha)(Y_1,...,Y_s) = \mathscr{L}_X(\alpha(Y_1,...,Y_s))\\ -\sum_{i=1}^{s}\alpha(Y_1,...,\mathscr{L}_XY_i,...,Y_s).\end{aligned}$$

Para uma demostração dessa proposição, veja o Capítulo 12 de [24].

Antes de prosseguir para a próxima seção, apresentaremos alguns resultados que relacionam a derivada de Lie e o pull-back de algum difeomorfismo.

Proposição 11. *Sejam* $\varphi : M \to M$ *um difeomorfismo e* $X \in \mathfrak{X}(M)$*. Então*

(i) *Se* α *é um tensor, então*

$$\varphi^*(\mathscr{L}_X\alpha) = \mathscr{L}_{\varphi^*X}(\varphi^*\alpha).$$

(ii) *Se* $f \in C^\infty(M)$*, então*

$$\varphi^*(\nabla_g f) = \nabla_{\varphi^*g}(f\circ\varphi).$$

Além disso, se $\varphi_t : M \to M$ é uma família a 1-parâmetro de difeomorfismos e α é um tensor, então

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\alpha) = \mathscr{L}_{X(t)}(\varphi_t^*\alpha),$$

onde

$$X(t_0) := \frac{d}{dt}(\varphi_{t_0}^{-1}\circ\varphi_t)\bigg|_{t=t_0} = \left(\varphi_{t_0}^{-1}\right)_*\left(\frac{d}{dt}\varphi_t\bigg|_{t=t_0}\right).$$

Definição 26. *Sejam* (M,g) *uma variedade Riemmaniana e* $X \in \mathfrak{X}(M)$*. Dizemos que* X *é um campo de Killing se*

$$\mathscr{L}_X g = 0.$$

2.4 Noções básicas de curvatura

Assim como em objetos geométricos mais simples, como curvas e superfícies, nas variedades Riemannianas muitas propriedades interessantes são obtidas por condições em alguma noção de curvatura. Nessa seção nos dedicaremos a apresentar noções clássicas de curvatura, bem como algumas propriedades destas. É importante lembrar que existem outras noções interessantes de curvaturas a serem estudadas, veja a Seção 2.6.

Definição 27. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. O tensor de curvatura Riemanniano é um $(1,3)$-tensor $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M^n)$ dado por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n)$.

Como foi visto na Seção 2.2 podemos enxegar o tensor de curvatura como um $(0,4)$-tensor $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ dado por

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W).$$

Seja (U, x_i) um sistema local de coordenadas em M^n. Sabemos que dado esse sistema, obtemos bases para os espaços tangente e cotangente para qualquer que seja $p \in U$, à saber $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ é base do espaço tangente e $\{dx_1, ..., dx_n\}$ é base do espaço cotangente. Essas bases, por sua vez, induzem bases para os fibrados tensoriais, e as coordenadas de R na base induzida são

$$R_{ijkl} = R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right).$$

Note que podemos usar essa notação para qualquer referencial em M^n, não somente em sistemas de coordenadas. Algumas propriedades algébricas interessantes do tensor curvatura de Riemann são explícitadas pela proposição abaixo.

Proposição 12. *O tensor de curvatura possui as seguintes propriedades:*

(i) $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W) = R(Y,X,W,Z)$;

(ii) $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$;

(iii) *Primeira identidade de Bianchi*

$$R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0.$$

Para uma demonstração veja o Capítulo 4 de [11]. A partir do tensor curvatura de Riemann podemos dar luz a uma outra noção de curvatura, a curvatura seccional.

Definição 28. *Seja $\sigma \subset T_p(M^n)$ um subespaço vetorial de dimensão 2. Definimos a curvatura seccional do plano σ por*

$$K(\sigma) = K(x,y) = \frac{R(X,Y,X,Y)}{|X|^2|Y|^2 - g(X,Y)^2},$$

onde $\{x, y\}$ é um conjunto linearmente independente em $T_p(M)$ e X, Y são quaisquer extensões à $\mathfrak{X}(M)$.

A boa definição da curvatura seccional é garantida pela proposição que segue.

Proposição 13. *$K(\sigma)$ não depende da escolha da base $\{x,y\} \subset \sigma$.*

Para uma demonstração desse fato veja também o Capítulo 4 de [11]. Note que, por conta dessa proposição, podemos considerar bases ortonormais de σ, nesse caso, se $\{e_1,e_2\}$ é uma base ortonormal de σ, então

$$K(\sigma) = R(E_1,E_2,E_1,E_2)(p),$$

onde E_1,E_2 são extensões de e_1,e_2 a algum aberto $U \subset M$ contendo p. Seguimos com a curvatura de Ricci que, como ficará claro adiante no texto, desempenha papel central nos resultados a serem discutidos neste trabalho.

Definição 29. *O tensor curvatura de Ricci é definido como o traço do tensor de curvatura*

$$Ric(X,Y) = tr\{Z \mapsto R(X,Z)Y\}, \qquad X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Seja (U,x_i) um sistema de coordenadas locais em M, em termos de coordenadas, temos

$$Ric_{ik} = g^{jl}R_{ijkl}.$$

Pela propriedade tensorial, de depender apenas dos valores dos campos no ponto à ser avaliado, dado $p \in M$ podemos considerar uma base $\{e_1,...,e_n\}$ de T_pM. Sendo assim, dados $u,v \in T_pM$, temos

$$Ric(u,v) = Ric(U,V)(p) = \sum_{i=1}^{n} R(U,E_i,V,E_i)(p),$$

onde $U,V,E_1,...,E_n$ são extensões dos vetores em T_pM à $\mathfrak{X}(M)$. Segue da Proposição 12 (ii) que o tensor de Ricci é uma forma bilinear simétrica.

Com as devidas identificações entre os espaços tangentes e seus duais, podemos enxergar o tensor de Ricci como um $(1,1)$-tensor definido pela lei

$$Ric(v) = \sum_{i=1}^{n} R(V,E_i,.,E_i).$$

Outra noção de curvatura bastante relevante no contexto das variedade Riemannianas e também no que seguirá neste trabalho é a de cuvatura escalar.

Definição 30. *A curvatura escalar é uma função $S \in C^{\infty}(M)$ definida por*

$$S(p) = trRic(p).$$

Em termos de coordenadas locais, temos

$$S = g^{ij}Ric_{ij}.$$

Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM. Podemos calcular a curvatura escalar usando essa base, donde segue que

$$\begin{aligned} S(p) &= \sum_{j=1}^{n} Ric_{jj}(p) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} R_{ijij}(p) \\ &= 2\sum_{i<j} R_{ijij}(p) \\ &= 2\sum_{i<j} K(e_i, e_j). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Outro objeto importante, que aparecerá explicitamente nos resultados principais, é o tensor curvatura de Weyl.

Definição 31. *A partir do tensor curvatura de Riemann podemos definir o $(0,4)$-tensor curvatura de Weyl, dado por*

$$W = R - \frac{1}{n-2}\mathring{Ric} \owedge g - \frac{S}{2n(n-1)} g \owedge g,$$

onde $\owedge$ é o produto de Kulkarni-Nomizu dado pela Definição 17.

Observação 8. *O tenrso de Weyl é exatamente a parte sem traço do tensor curvatura de Riemann, ou seja, $\mathring{R} = W$.*

Definição 32. *Uma variedade Riemanniana (M, g) é dita localmente conformemente flat se para cada ponto $p \in M$ existe uma vizinhança e uma tranformação conforme entre a métrica g e uma métrica flat, i.e., $R \equiv 0$.*

Em dimensão maior ou igual a 4 podemos encontrar uma relação entre as métricas localmente conformemente flat e o tensor de Weyl.

Proposição 14. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 4$. Então (M^n, g) é localmente conformemente flat se, e somente se, $W \equiv 0$.*

Demonstração. Da definição, sabemos que (M,g) é localmente conformemente flat se, e somente se, para cada ponto $p \in M$ existe vizinhança coordenada (U,φ) e uma função positiva $f \in C^{\infty}(U)$ tal que

$$g(X,Y)(p) = f(p)\delta(d\varphi(X), d\varphi(Y))(\varphi(p),$$

onde X e Y são campos em U e δ é a métrica canônica de $\mathbb{R}^n$.

Fica claro da Definição 31 que em $\mathbb{R}^n$ temos $W \equiv 0$. Por outro lado, o tensor de Weyl é preservado por transformações conformes. Segue portanto que (M^n,g) é localmente conformemente flat se, e somente se, $W \equiv 0$. □

Vejamos alguns resultados sobre as curvaturas que serão úteis no decorrer deste trabalho.

Proposição 15. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana. Então as seguintes afirmações ocorrem:*

(1) *Segunda identidade de Bianchi*

$$(\nabla_Z R)(X,Y,W,T) + (\nabla_X R)(Y,Z,W,T) + (\nabla_Y R)(Z,X,W,T) = 0.$$

(2) *Segunda identidade de Bianchi contraída duas vezes*

$$\frac{1}{2}\nabla S = divRic.$$

(3) *Se $n = 2$, então*

$$Ric = \frac{S}{2}g.$$

Demonstração. Para uma demonstração do item (1) veja [31]. Para o item (2), considere um referencial geodésico $\{E_i\}_{i=1}^{n}$. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo qualquer

$$\begin{aligned}\nabla S(X) &= \nabla_X S \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \nabla_X (R_(E_i, E_j, E_i, E_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} (\nabla_X R)_(E_i, E_j, E_i, E_j,\end{aligned}$$

onde a última igualdade vale pois estes objetos são tensoriais e o referencial tomado é geodésico. Agora, pela 2ª identidade de Bianchi

$$\begin{aligned}
\nabla S(X) &= -\sum_{i,j=1}^{n}(\nabla_i R)(E_j,X,E_i,E_j) \\
&\quad -\sum_{i,j=1}^{n}(\nabla_j R)(X,E_i,E_i,E_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}(\nabla_i R)(E_j,X,E_j,E_i) \\
&\quad +\sum_{i,j=1}^{n}(\nabla_j R)(E_i,X,E_i,E_j) \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n}(\nabla_i R)(E_j,X,E_j,E_i) \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n}\nabla_i(R(E_j,X,E_j,E_i)).
\end{aligned}$$

Note que o somátorio no índice j é o traço do tensor de curvatura, portanto

$$\begin{aligned}
\nabla S(X) &= 2\sum_{i=1}^{n}\nabla_i(Ric(X,E_i)) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\nabla_i(Ric(X,E_i)) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\nabla_i g(Ric(X),E_i)) \\
&= 2divRic(X).
\end{aligned}$$

Como o campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ é tomado arbitrariamente, o resultado segue.

Por fim, provemos (3). Para fazê-lo considere o referencial ortonormal $\{E_1,E_2\}$. Tome $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ e escreva $X = X^iE_i$ e $Y = Y^iE_i$. Além disso, note que

$$Ric(E_1,E_2) = Ric(E_2,E_1) = 0$$

Portanto

$$\begin{aligned}
Ric(X,Y) &= X^iY^iRic_{ii} \\
&= X^iY^i\sum_{j=1}^{2}R_{ijij} \\
&= \sum_{i\neq j}X^iY^iK(\{E_i,E_j\}) \\
&= \big(\sum_{i=1}^{2}X^iY^i\big)K(\{E_1,E_2\}),
\end{aligned}$$

onde $K(\{E_1,E_2\})(p)$ é a curvatura seccional do plano em T_pM gerados pelos vetores $\{E_1(p),E_2(p)\}$. Segue da equação (2.14)

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \big(\sum_{i=1}^{2} X^iY^i\big)\frac{S}{2} \\ &= \frac{S}{2}g(X,Y). \end{aligned}$$

A arbitrariedade dos campos X,Y garante o resultado. □

Por fim, eExiste uma classe de variedades Riemannianas, chamadas de Variedades de Einstein, cuja curvatura de Ricci satisfaz uma condição muito interessante sob o ponto de vista geométrico.

Definição 33. *Dizemos que uma variedade (M,g) é Einstein se existe uma função $\lambda \in C^\infty(M)$ tal que*

$$Ric(X,Y) = \lambda g(X,Y),$$

para quaiquer que sejam $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 16. *Se (M^n,g) é uma variedade Einstein com $n \geq 3$, então λ é constante.*

Demonstração. Primeiramente a segunda identidade de Bianchi contrída duas vezes, item (2) da Proposição 15, garante que

$$divRic = \frac{1}{2}\nabla S,$$

ou seja,

$$div\lambda g = \frac{1}{2}\nabla S. \tag{2.15}$$

Por outro lado, em termos de coordenadas locais temos

$$\begin{aligned} (div\lambda g)_i &= g^{lk}((\nabla_l \lambda g)(\partial_i,\partial_k)) \\ &= g^{lk}(\nabla_l \lambda)g(\partial_i,\partial_k) \\ &= g^{lk}g_{ik}\nabla_l \lambda \\ &= \delta_i^l \nabla_l \lambda \\ &= \nabla_i \lambda, \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue da métrica ser paralela. Acabamos de mostrar que $div\lambda g = \nabla\lambda$. Agora tomando o traço da equação das variedades Einstein e substituindo na equação (2.15) encontramos

$$\nabla\lambda = \frac{1}{2}\nabla(\lambda n),$$

em outras palavras,

$$\left(1 - \frac{n}{2}\right)\nabla\lambda = 0.$$

Portanto se $n \geq 3$, então $\nabla\lambda = 0$, i.e., λ é constante em M^n. □

2.5 Variedades de dimensão 4

As variedades de dimensão 4 são objetos de muito interesse na geometria, muito disso devido à propriedades peculiares que apresentam, provenientes da decomposição do tensor de curvatura induzida pela decomposição do espaço das 2-formas em M^4 como veremos a seguir.

Definição 34. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. A estrela de hodge é um operador sobre a algebra exterior de M^n, $\star : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{n-k}(M)$, $0 \leq k \leq n$, definido pela lei*

$$\alpha \wedge (\star\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle \omega_g,$$

onde $\omega_g = \sqrt{|g|}dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, e $\langle\, , \rangle$ é o produto interno induzido em $\Lambda^k(M)$.

No caso particular em que $n = 4$ e $k = 2$, o operador

$$\star : \Lambda^2(M) \to \Lambda^2(M)$$

é uma involução, portanto seus autovalores são ± 1 e o espaço $\Lambda^2(M)$ é decomposto na soma direta dos autoespaços associados.

$$\Lambda^2(M) = \Lambda^2_+(M) \oplus \Lambda^2_-(M).$$

Agora, pelo que foi argumentado na Seção 2.2 podemos enxergar o tensor de curvatura como um operador no espaço das 2-formas

$$R : \Lambda^2(M) \to \Lambda^2(M)$$

definido num referencial ortonormal $\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$ em M por

$$\begin{aligned} R(X_i\wedge X_j) &= \sum_{k<l}^{4} R(X_i,X_j,X_k,X_l)X_k\wedge X_l \\ &= \sum_{k<l}^{4} R_{ijkl}X_k\wedge X_l. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Isso produz uma decomposição do operador de curvatura em uma matriz em blocos

$$R=\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^t & C \end{array}\right).$$

Essa decomposição induz naturalmente uma decomposição do tensor de Weyl, onde $\mathring{A}=W^+$ e $\mathring{C}=W^-$ são as componentes de W. A proposição abaixo nos ajuda a entender a relação entre a decomposição do tensor de Riemann e a curvatura escalar.

Proposição 17. *As matrizes A e C que aparecem na decomposição do tensor de curvatura são simétricas e vale* $tr(A)=tr(C)=\frac{S}{4}$.

Demonstração. Seja $\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$ um frame ortonormal em M. Considere a base ortonormal de autovetores do operador de hodge

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1\wedge X_2+X_3\wedge X_4), & \eta_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1\wedge X_2-X_3\wedge X_4), \\ \xi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1\wedge X_3-X_2\wedge X_4), & \eta_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1\wedge X_3+X_2\wedge X_4), \\ \xi_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1\wedge X_4+X_2\wedge X_3), & \eta_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1\wedge X_4-X_2\wedge X_3), \end{aligned}$$

onde $\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$ é base ortonormal de $\Lambda^2_+(M)$ e $\{\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$ é base ortonormal de $\Lambda^2_-(M)$. Note que

$$A=(\langle R(\xi_i),\xi_j\rangle)_{i,j} \quad \text{e} \quad C=(\langle R(\eta_i),\eta_j\rangle)_{i,j}.$$

Segue diretamente da equação (2.16) e do item (ii) da Proposição 12 que

$$\begin{aligned} \langle R(\xi_1),\xi_2\rangle &= \frac{1}{2}(R_{1213}+R_{3413}-R_{1224}-R_{3424}) = \langle R(\xi_2),\xi_1\rangle, \\ \langle R(\xi_1),\xi_3\rangle &= \frac{1}{2}(R_{1214}+R_{1223}+R_{3414}+R_{3423}) = \langle R(\xi_3),\xi_1\rangle, \\ \langle R(\xi_2),\xi_3\rangle &= \frac{1}{2}(R_{1314}+R_{1323}-R_{2414}-R_{2423}) = \langle R(\xi_3),\xi_2\rangle \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} \langle R(\eta_1),\eta_2\rangle &= \frac{1}{2}(R_{1213}-R_{3413}+R_{1224}-R_{3424}) = \langle R(\eta_2),\eta_1\rangle, \\ \langle R(\eta_1),\eta_3\rangle &= \frac{1}{2}(R_{1214}-R_{1223}-R_{3414}+R_{3423}) = \langle R(\eta_3),\eta_1\rangle, \\ \langle R(\eta_2),\eta_3\rangle &= \frac{1}{2}(R_{1314}-R_{1323}+R_{2414}-R_{2423}) = \langle R(\eta_3),\eta_2\rangle. \end{aligned}$$

Como as bases são ortonormais, segue que A e C são simétricas. Agora, note que

$$\begin{aligned}
\langle R(\xi_1),\xi_1\rangle &= \frac{1}{2}(R_{1212}+R_{3434}+2R_{1234}), &\quad \langle R(\eta_1),\eta_1\rangle &= \frac{1}{2}(R_{1212}+R_{3434}-2R_{1234}),\\
\langle R(\xi_2),\xi_2\rangle &= \frac{1}{2}(R_{1313}+R_{2424}-2R_{1324}), &\quad \langle R(\eta_2),\eta_2\rangle &= \frac{1}{2}(R_{1313}+R_{2424}+2R_{1324}),\\
\langle R(\xi_3),\xi_3\rangle &= \frac{1}{2}(R_{1414}+R_{2323}+2R_{2314}), &\quad \langle R(\eta_3),\eta_3\rangle &= \frac{1}{2}(R_{1414}+R_{2323}-2R_{2314}).
\end{aligned}$$

Por fim, a 2ª identidade de Bianchi e o item (i) da Proposição 12 juntamente com

$$S=\sum_{i<j}K(X_i,X_j)=\sum_{i<j}R_{ijij},$$

garantem que $tr(A)=tr(C)=\frac{S}{4}$. □

Em [21] Lei Ni e Wallach mostraram que é possível relacionar as componentes da matriz B com as da matriz que representa $\overset{\circ}{Ric}$, quando exergamos o tensor de Ricci como um operador no espaço das 1-formas. Dessa relação podemos concluir $4\|B\|^2=|\overset{\circ}{Ric}|^2$ e também $\sum_{i=1}^4\lambda_i^3=24\det B$, onde λ_i são os autovalores de $\overset{\circ}{Ric}$. Para mais informações sobre variedades de dimensão 4 e decomposição do tensor de curvatura, recomendamos a leitura de [17] e [14].

2.6 Curvatura isotrópica

Nesta seção vamos abordar uma noção de curvatura introduzida por Micallef e Moore em [26], a curvatura isotrópica. Antes de seguir com a definição precisamos entender o ambiente onde esta será definida.

Seja E um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Vamos considerar a complexificação de E

$$E^{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}E\cong E\oplus iE.$$

Em termos práticos estamos permitindo a multiplicação por escalares complexos em E.

Seja $\langle,\rangle$ o produto interno em E. Vamos considerar duas extensões desse produto interno para $\mathbb{C}$. A primeira, que ainda denotaremos por $\langle,\rangle$ é um produto interno hermitiano, a segunda, denotada por $(,)$ é uma forma bilinear em $\mathbb{C}$. As extensões se relacionam pela lei

$$\langle U,V\rangle=(U,\overline{V}),\qquad U,V\in E^{\mathbb{C}}.$$

Seguimos com as definições necessárias para entendermos a curvatura isotrópica.

Definição 35. *Dizemos que um vetor $Z=X+iY$ é isotrópico se $(Z,Z)=0$.*

Observação 9. *É imediato verificar que* $(Z,Z) = 0$ *se, e somente se,* $\langle X,X\rangle = \langle Y,Y\rangle$ *e* $\langle X,Y\rangle = 0$ *em* E.

Com isso podemos, de forma natural, definir o que é um subespaço de dimensão 2, isotrópico, de $E^{\mathbb{C}}$.

Definição 36. *Um 2-plano complexo é isotrópico se todo vetor nele contido for isotrópico.*

Para seguir é importante destacar a seguinte proposição, que facilitará algumas operações algébricas sobre tais 2-planos.

Proposição 18. *Todo 2-plano complexo isotrópico é gerado por vetores* $Z = X + iY$ *e* $W = U + iV$*, onde* $\{X,Y,U,V\}$ *formam um conjunto ortonormal em* E*. A esse tipo de base damos o nome de base canônica.*

Demonstração. Seja P um 2-plano complexo isotrópico. Considere uma base $\{Z,W\}$ de P, onde $Z = X + iY$ e $W = U + iV$ com $\langle Z,W\rangle = 0$.
Como $Z + W \in P$ é isotrópico, temos

$$\begin{cases} (X+U, X+U) = (Y+V, Y+V) \\ (X+U, Y+V) = 0 \end{cases}$$

e portanto

$$\begin{cases} \langle X,U\rangle = \langle Y,V\rangle \\ \langle X,V\rangle = -\langle Y,U\rangle. \end{cases} \tag{2.17}$$

Por outro lado, como $\langle Z,W\rangle = 0$, segue que

$$(Z,\overline{W}) = \langle X,U\rangle - i\langle X,V\rangle + i\langle Y,U\rangle + \langle Y,V\rangle = 0,$$

com isso

$$\begin{cases} \langle X,U\rangle = -\langle Y,V\rangle \\ \langle Y,U\rangle = +\langle X,V\rangle. \end{cases} \tag{2.18}$$

Combinando as equações (2.17) e (2.18) e, se necessário, normalizarmos os vetores X,Y,U,V obtemos a base desejada. □

Voltando ao contexto das variedades Riemannianas, podemos estender a métrica aos espaços tangentes complexificados. Da mesma forma também podemos complexificar o espaço das 2-formas $\Lambda^2(M)$ e estender a métrica induzida em $\Lambda^2(M)$ a um produto hermitiano e o tensor de curvatura à um tensor complexo-linear. Feito isso podemos definir a curvatura isotrópica.

Definição 37. *Seja P um 2-plano complexo isotrópico. Definimos a curvtura isotrópica de P por*

$$\overline{K}(P) = \overline{K}(\{Z,W\}) = \frac{\langle R(Z\wedge W),(Z\wedge W)\rangle}{\|Z\wedge W\|^2},$$

onde $\{Z,W\}$ é uma base qualquer de P.

O mesmo argumento usado em [11] para provar a Proposição 13 garante que a curvatura isotrópica não depende da base escolhida.

Observação 10. *Note que a definição de curvatura isotrópica só faz sentido em variedades de dimensão maior ou igual a 4.*

Agora uma definição natural, apenas para fixar nomeclatura.

Definição 38. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana. Dizemos que M tem curvatura isotrópica positiva se $\overline{K}(P) > 0$ para qualquer que seja o 2-plano complexo isotrópico P.*

Focaremos agora em estudar a curvatura isotrópica em variedades de dimensão 4. Seja X_1, X_2, X_3, X_4 um referencial ortonormal em M. Considere o 2-plano isotrópico P gerado pelos vetores $Z = X_1 + iX_2$ e $W = X_3 + iX_4$, observe que

$$\overline{K}(\{Z,W\}) = \frac{\langle R((X_1+iX_2)\wedge(X_3+iX_4)),((X_1+iX_2)\wedge(X_3+iX_4))\rangle}{\|(X_1+iX_2)\wedge(X_3+iX_4)\|^2}.$$

Agora, usando o produto interno induzido no espaço das 2-formas, o fato do tensor de Riemann ter sido estendido para ser complexo-linear em cada entrada e as identificações já apresentadas, encontramos

$$\overline{K}(P) = \frac{1}{4}(R_{1313}+R_{1414}+R_{2323}+R_{2424}+2R_{2314}+2R_{3124}),$$

segue da primeira identidade de Bianchi que

$$\overline{K}(P) = \frac{1}{4}(R_{1313}+R_{1414}+R_{2323}+R_{2424}-2R_{1234}).$$

Considerando a decomposição do tensor de curvatura aprensentada na Seção 2.5 e também as bases $\{\xi_i\}_{i=1}^3$ e $\{\eta_i\}_{i=1}^3$, porém sem normalizar, temos

$$\begin{aligned} A_{22}+A_{33} &= \langle R(\sqrt{2}\xi_2),\sqrt{2}\xi_2\rangle + \langle R(\sqrt{2}\xi_3),\sqrt{2}\xi_3\rangle \\ &= R_{1313}+R_{1414}+R_{2323}+R_{2424}+2R_{3124}+2R_{2314} \\ &= 4\overline{K}(P). \end{aligned}$$

A menos de mudar a orientação das bases, podemos obter

$$C_{22}+C_{33}=4\overline{K}(P).$$

A seguinte proposição, que segue do que foi feito acima, será muito útil no segmento deste trabalho.

Proposição 19. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana de dimensão 4. M tem curvatura isotrópica positiva se, e somente se,*

$$A_1+A_2>0 \quad e \quad C_1+C_2>0,$$

onde A_1,A_2 são os menores autovalores de A e C_1,C_2 os menores autovalores de C.

Demonstração. Inicialmente, foi provado em [9] que se $\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}$ e $\{\psi_1,\psi_2,\psi_3\}$ são bases ortogonais $\Lambda^2_+(M)$ e $\Lambda^2_-(M)$, respectivamente, e cada vetor de norma $\sqrt{2}$, então existe referencial ortonormal $X_1,...,X_4$ tal que

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= (X_1\wedge X_2+X_3\wedge X_4), & \psi_1 &= (X_1\wedge X_2-X_3\wedge X_4),\\
\varphi_2 &= (X_1\wedge X_3-X_2\wedge X_4), & \psi_2 &= (X_1\wedge X_3+X_2\wedge X_4),\\
\varphi_3 &= (X_1\wedge X_4+X_2\wedge X_3), & \psi_3 &= (X_1\wedge X_4-X_2\wedge X_3).
\end{aligned}$$

Agora, como A é simétrica podemos tomar $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ base de autovetores de A tais que $\|\varphi_i\|=\sqrt{2}$, $A(\varphi_i)=A_i\varphi_i$ e $A_1\leq A_2\leq A_3$. Reordenando essa base podemos encontrar referencial ortonormal $X_1,...,X_4$ tal que

$$\begin{aligned}
\varphi_3 &= (X_1\wedge X_2+X_3\wedge X_4),\\
\varphi_2 &= (X_1\wedge X_3-X_2\wedge X_4),\\
\varphi_1 &= (X_1\wedge X_4+X_2\wedge X_3).
\end{aligned}$$

Como já foi feito anteriormente, nessa base temos

$$\begin{aligned}
\overline{K}(P) &= \frac{1}{4}(A_{22}+A_{33})\\
&= \frac{1}{4}(A_1+A_2).
\end{aligned}$$

Segue dessa argumentação que $\overline{K}(P)>0$ se, e somente se, $A_1+A_2>0$. A argumentação para C_1+C_2 é completamente análoga e o resultado segue. □

Segue imediatamente o corolário.

Corolário 3. *Seja (M,g) um variedade Riemanniana de dimensão 4 com curvatura isotrópica positiva. Então a curvatura escalar é positiva $S > 0$.*

Indicamos a leitura de [26], [33] e [18] para mais detalhes sobre curvatura isotrópica.

3 SÓLITONS E O FLUXO DE RICCI

Neste capítulo apresentaremos o objeto de estudo principal deste trabalho, os sólitons de Ricci Gradiente Shrinking. Provaremos algumas propriedades de sólitons que serão úteis, não só para o bom entendimento dos mesmos, mas também nas demonstrações dos resultados que seguirão. Primeiramente, temos a seguinte definição.

Definição 39. *Um sóliton de Ricci é uma quadra (M^n, g, X, λ), onde (M^n, g) é uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 2$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$Ric + \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g = \lambda g. \tag{3.1}$$

Se $\lambda < 0$, dizemos que o soliton é expanding;
Se $\lambda = 0$, dizemos que o soliton é steady;
Se $\lambda > 0$, dizemos que o soliton é shrinking.

No caso particular em que $X = \nabla f$ para alguma função $f \in C^\infty(M)$, dizemos que (M, g, f, λ) é um sóliton de Ricci gradiente. Nesse caso f é chamada de função potencial. Além disso, a menos de reescalar a métrica podemos supor, quando $\lambda \neq 0$, que $|\lambda| = \frac{1}{2}$. Neste trabalho lidaremos sempre o com o sóliton normalizado, i.e., $|\lambda| = \frac{1}{2}$ e com o caso gradiente.

Observação 11. *Seja (M, g, f, λ) um sóliton de Ricci gradiente shrinking. Sabemos de resultados clássicos de geometria Riemanniana que, se $\tilde{g} = \alpha g$, então*

$$Ric_{\tilde{g}} = Ric_g \quad e \quad Hessf_{\tilde{g}} = Hessf_g.$$

Sendo assim, sempre que $\lambda \neq 0$, podemos escalar a métrica g a fim de obter $|\lambda| = \frac{1}{2}$. No que segue, salvo menção contrária, estaremos considerando o sóliton de Ricci normalizado, i.e., $|\lambda| = \frac{1}{2}$.

É fácil ver de (3.1) que os sólitons de Ricci são generalizações naturais das variedades Einstein, todavia não são motivados apenas por isso. Umas das principais razões de estudá-los é que estes desempenham papel importante no estudo das soluções e singularidades do fluxo de Ricci. O fluxo de Ricci foi introduzido por Richard Hamilton em 1982 e desde então tem se mostrado uma ferramenta de extrema relevância dentro da geometria, tendo sido empregado, inclusive, por Grigori Perelman na famosa demonstração da Conjectura de Geometrização, que resultou na solução da Conjectura de Poincaré.

O fluxo de Ricci é uma evolução de uma família à 1-parâmetro de métricas numa variedade dada, tal que sejam satisfeitas as seguintes condições

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}g(t) = -2Ric(g(t)), \\ g(0) = g_0, \end{cases}$$

onde g_0 é uma métrica inicial conhecida.

Uma das formas com que os sólitons aparecem no fluxo de Ricci fica evidenciada na seguinte proposição, que garante que estes são precisamente as soluções auto-similares do fluxo.

Proposição 20. *Seja (M, g_0, X_0, λ) um sóliton de Ricci completo. Existe uma solução $g(t)$ do fluxo de Ricci, definida em todo $t > 0$ com*

$$\sigma(t) = 1 - 2\lambda t > 0,$$

difeomorfismos φ_t com $\varphi_0 = Id_M$ e $g(0) = g_0$ tais que

(i) *$\varphi_t : M \to M$ é uma família à 1-parâmetro de difeomorfismos gerados pelos campos $X_t = \frac{1}{\sigma(t)}X_0$, ou seja,*

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x) = \frac{1}{\sigma(t)}X_0(\varphi_t(x)).$$

(ii)

$$g(t) = \sigma(t)\varphi *_t g_0.$$

(iii)

$$Ric(g_t) + \frac{1}{2}\mathscr{L}_{\varphi_t^* X_t} g(t) = \frac{\lambda}{\sigma(t)}g(t).$$

(iv) *Além disso, se $X_0 = \nabla f_0$ para alguma função potencial, então definimos $f_t = \varphi_t^*(f_0)$ e vale que $(M, g(t), f_t)$ é sóliton de Ricci gradiente em todo tempo de definição.*

Demonstração. Considere a função $\sigma(t)$ como no enunciado e a família de campos $X_t = \frac{1}{\sigma(t)}X_0$. Como X_0 é um campo completo, então a família X_t gera uma família à 1-parâmetro de difeomorfismos $\varphi_t : M \to M$ definida em todo t tal que $\sigma(t) > 0$. Defina $g(t) = \sigma(t)\varphi_t^* g_0$, vamos mostrar $g(t)$ é de fato uma solução do fluxo, e em todo t essa solução ainda é um sóliton.

Primeiramente, note que

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = \sigma'(t)\varphi_t^*(g_0) + \sigma(t)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^*(g_0).$$

A Proposição 11 garante que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^*(g_0) &= \mathscr{L}_{(\varphi_t^{-1})_*(\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t)}\varphi_t^*(g_0)\\ &= \mathscr{L}_{\varphi_t^*(\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t)}\varphi_t^*(g_0)\\ &= \mathscr{L}_{(\varphi_t^*(\frac{1}{\sigma(t)}X_0))}\varphi_t^*(g_0).\end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = \sigma'(t)\varphi_t^*(g_0) + \sigma(t)\mathscr{L}_{(\varphi_t^*(\frac{1}{\sigma(t)}X_0))}\varphi_t^*(g_0).$$

Por outro lado, como (M, g_0, X_0) é um sóliton de Ricci, vale que

$$\begin{aligned}-2Ric(g(t)) = -2Ric(\sigma(t)\varphi_t^*(g_0)) &= -2Ric(\varphi_t^*(g_0)) = -2\varphi_t^*(Ric(g_0))\\ &= -2\varphi_t^*(\lambda g_0 - \frac{1}{2}\mathscr{L}_{X_0}g_0) = -2\lambda\varphi_t^*(g_0) + \varphi_t^*\mathscr{L}_{X_0}g_0\\ &= \sigma'(t)\varphi_t^*(g_0) + \mathscr{L}_{(\varphi_t^*X_0)}\varphi_t^*(g_0)\\ &= \sigma'(t)\varphi_t^*(g_0) + \sigma(t)\mathscr{L}_{(\varphi_t^*(\frac{1}{\sigma(t)}X_0))}\varphi_t^*(g_0).\end{aligned}$$

Isso prova que $g(t)$ é, de fato, uma solução auto-similar do fluxo de Ricci. Agora, note que para qualquer t no intervalo de definição da solução, vale

$$Ric(g(t)) = -\frac{\sigma'(t)}{2}\varphi_t^*(g_0) - \frac{1}{2}\mathscr{L}_{(\varphi_t^*(\frac{1}{\sigma(t)}X_0))}\sigma(t)\varphi_t^*(g_0),$$

donde segue que

$$Ric(g(t)) + \frac{1}{2}\mathscr{L}_{\varphi_t^*X_t}g(t) = -\frac{\sigma'(t)}{2\sigma(t)}g(t) = \frac{\lambda}{\sigma(t)}g(t).$$

Por fim, no caso particular em que $X_0 = \nabla_{g_0}f_0$ basta notar que

$$\nabla_{g(t)}f_t = \varphi_t^*\left(\frac{1}{\sigma(t)}\nabla_{g_0}f_0\right).$$

□

Seguiremos com exemplos de sólitons e por fim apresentaremos alguns resultados que dizem respeito aos sólitons de Ricci gradiente shrinking

Exemplo 1. *Variedades Einstein: Se (M, g) é tal que*

$$Ric = \lambda g$$

Então (M, g) é trivialmente um sóliton, basta tomar qualquer função constante em M (caso gradiente) ou tomar um campo de killing em M (caso geral).

(1.1) *Considere* $(\mathbb{S}^n, g_{round})$.

$$Ric_{\mathbb{S}^n} = (n-1)\mathring{g},$$

onde $\mathring{g}$ *é a métrica redonda de* $\mathbb{S}^n$. *Como* $(n-1) > 0$, *segue que* (S^n, g_{round}) *é um sóliton de Ricci shrinking.*

(1.2) *Considere* $(\mathbb{R}^n, \delta_{ij})$. *Como nessa métrica* $\mathbb{R}^n$ *é Ricci flat, podemos ver* $(\mathbb{R}^n, \delta_{ij})$ *como um sóliton de Ricci steady.*

(1.3) *Seja* $(\mathbb{H}^n, g)$ *onde* g *é a métrica standard de* $\mathbb{H}^n$, *ou seja,*

$$g_{ij}(x_1, ..., x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}.$$

Com essa métrica, vale

$$Ric(g) = -(n-1)g$$

e portanto $(\mathbb{H}^n, g)$ *é um sóliton de Ricci expanding.*

Exemplo 2. *Sóliton Gaussiano: Considere a variedade Riemanniana* $(\mathbb{R}^n, \delta_{ij})$, *onde* δ_{ij} *é a mértica canônica de* $\mathbb{R}^n$. *Dado* $\lambda \in \mathbb{R}$ *considere a função pontencial* $f = \lambda \frac{|x|^2}{2}$. *Note que*

$$f(x) = \frac{\lambda}{2}\langle x, x\rangle,$$

consequentemente,

$$\nabla f = \lambda x$$

e

$$Hess f = \lambda \delta_{ij}.$$

Esse exemplo garante que existem variedades Einstein que são sólitons não triviais.

Até agora só foram apresentados exemplos de sólitons que são variedades Einstein. Os dois exemplos que seguem são sólitons que não são Einstein.

Exemplo 3. *Sóliton cilíndrico: para* $n \geq 2$ *considere o cilindro generalizado* $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^k$, *e defina, para* $t \in (0, \infty)$ *a família de métricas*

$$g_t = 2(n-1)t\mathring{g} + \delta,$$

onde $\mathring{g}$ é a métrica redonda de $\mathbb{S}^n$ e δ a métrica canônica de $\mathbb{R}^k$. Além disso, considere a função

$$f_t(\theta,x) = \frac{|x|^2}{4t}, \qquad \theta \in \mathbb{S}^n,\ x \in \mathbb{R}^k,\ t > 0.$$

Observe que

$$\begin{aligned} Ric_{g_t} &= Ric(2(n-1)t\mathring{g}) + Ric_{\mathbb{R}^k} \\ &= Ric_{\mathbb{S}^n} \\ &= (n-1)\mathring{g}. \end{aligned}$$

Donde segue que

$$Ric_{g_t} = \frac{1}{2t}g_t - \frac{1}{2t}\delta,$$

ou seja,

$$Ric_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2t}g_t - \frac{1}{2t}\delta_{ij} & \text{se } i,j > n; \\ \frac{1}{2t}g_t & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora, é imediato verificar que

$$Hessf_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2t}\delta_{ij} & \text{se } i,j > n; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo

$$Ric_{g_t} + Hessf_t = \frac{1}{2t}g_t.$$

Portanto $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^k, g_t, f_t)$ é um sóliton de Ricci gradiente shrinking para qualquer que seja $t > 0$. Os sólitons cilíndricos modelam as singularidade do tipo pescoço do fluxo de Ricci.

Exemplo 4. *Sóliton Charuto: Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ com a métrica*

$$g_\Sigma = \frac{g_0}{1+x^2+y^2},$$

onde g_0 é a métrica canônica de $\mathbb{R}^2$. Vamos mostrar que existe uma função $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $(\mathbb{R}^2, g_\Sigma, f)$ é um sóliton de Ricci steady. Inicialmente, vamos calcular o tensor de Ricci nessa métrica, para tal, considere a função

$$u(t) = \frac{1}{e^{4t}+x^2+y^2}.$$

Afirmamos que se definirmos a família à 1-parâmetro de métricas $g(t) = u(t)g_0$ então $g(t)$ é solução do fluxo de Ricci com $g(0) = g_\Sigma$.
Já sabemos que a curvatura escalar da métrica $g(t)$ satisfaz

$$S_{g(t)} = \frac{1}{u(t)}(S_{g_0} - \Delta_{g_0} \log u)$$

e também, pelo item (iii) *da Proposição 15, a curvatura de Ricci satisfaz* $Ric_{ij} = \frac{S}{2} g_{ij}$*. Segue portando que* $g(t) = u(t)g_0$ *é solução do fluxo de Ricci se, e somente se,*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{g_0} \log u - S_{g_0}.$$

De fato, se $g(t)$ é solução do fluxo então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g(t)}{\partial t} =& -2Ric(g(t)) \\
=& -2\left(\frac{S_{g(t)}}{2} g(t)\right) \\
=& -\frac{1}{u(t)}(S_{g_0} - \Delta_{g_0} \log u) g(t) \\
=& (\Delta_{g_0} \log u - S_{g_0}) g_0.
\end{aligned}$$

Donde segue que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{g_0} \log u - S_{g_0}.$$

Reciprocamente, se vale a igualdade, então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g(t)}{\partial t} =& \frac{\partial u}{\partial t} g_0 \\
=& (\Delta_{g_0} \log u - S_{g_0}) g_0 \\
=& -u(t) S_{g(t)} g_0 \\
=& -S_{g(t)} g(t) \\
=& -2Ric(g(t)),
\end{aligned}$$

o que finaliza a afirmação. Com essas informações podemos calcular a curvatura de Ricci na métrica g_Σ. Note que

$$\begin{aligned}
Ric(g_\Sigma) &= -\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} g_0 \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}\right) g_0 \\
&= \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} g_0.
\end{aligned}$$

Considere agora a função $f = -\log(1+x^2+y^2)$ *vamos mostrar que essa função satisfaz a equação*

$$Ric(g_\Sigma) + Hessf = 0.$$

De fato, podemos calcular os símbolos de Christoffel da métrica g_Σ *à fim de obter*

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = -\dfrac{x}{1+x^2+y^2}, \\ \Gamma_{22}^1 = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}, \\ \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\dfrac{y}{1+x^2+y^2}, \\ \Gamma_{11}^2 = \dfrac{y}{1+x^2+y^2}, \\ \Gamma_{22}^2 = -\dfrac{y}{1+x^2+y^2}, \\ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\dfrac{x}{1+x^2+y^2}. \end{cases}$$

Por fim, usando as expressões acima e a igualdade

$$Hessf(e_i, e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Obtemos então que

$$Ric(e_i, e_j) = -Hessf(e_i, e_j),$$

para quaisquer pares de índices $i, j \in \{1, 2\}$. *Donde segue que* $(\mathbb{R}^2, g_\Sigma, f)$ *é um sóliton de Ricci steady.*

Seguiremos agora para os resultados. Começamos com o lema abaixo, devido à R. Hamilton, que trata de algumas igualdades satisfeitas pelos sólitons.

Lema 1. *Seja* (M^n, g, f) *um sóliton de Ricci gradiente shrinking, então as seguintes equações ocorrem:*

(i) $S + \Delta f = \frac{n}{2}$;

(ii) $\nabla S = 2Ric(\nabla f)$;

(iii) $S + |\nabla f|^2 - f = C_0$;

(iv) $\Delta S = \langle \nabla S, \nabla f \rangle + S - 2|Ric|^2$.

Demonstração. Primeiramente, para (i) basta tomarmos o traço da equação de sóliton

$$tr(Ric + Hessf) = tr\left(\frac{1}{2}g\right),$$

isto é,

$$S + \Delta f = \frac{n}{2}.$$

Agora, para (ii) vamos tomar o divergente da equação do sóliton, lembrando que como a métrica é paralela, vale que $div(g) = 0$, donde segue que

$$div(Ric) + div(\nabla^2 f) = 0,$$

e usando a 2ª identidade de Bianchi contraída duas vezes

$$\frac{1}{2}\nabla S + div(\nabla^2 f) = 0.$$

Isto juntamente com a fórmula de Bochner, que pode ser encontrada no Capítulo 1 de [20], garante que

$$div(\nabla^2 f) = Ric(\nabla f) + \nabla \Delta f,$$

consequentemente

$$\frac{1}{2}\nabla S + Ric(\nabla f) + \nabla \Delta f = 0.$$

Por outro lado, calculando o gradiente da equação do item (i) obtemos

$$\nabla S + \nabla \Delta f = 0,$$

então

$$\nabla S - \frac{1}{2}\nabla S + Ric(\nabla f) = 0,$$

ou seja,

$$\nabla S = 2Ric(\nabla f).$$

Provaremos agora o item (iii). Para isso, vamos calcular o gradiente da expressão $S + |\nabla f|^2 - f$ e mostrar que esse deve ser identicamente nulo. Primeiramente,

$$\nabla(S + |\nabla f|^2 - f) = \nabla S + \nabla|\nabla f|^2 - \nabla f$$

Agora note que dado um campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ qualquer

$$Y(|\nabla f|^2) = \langle Y, \nabla|\nabla f|^2 \rangle = \nabla|\nabla f|^2(Y).$$

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned} Y(|\nabla f|^2) &= Y\langle \nabla f, \nabla f\rangle = 2\langle \nabla_Y \nabla f, \nabla f\rangle \\ &= 2Hessf(Y, \nabla f) = 2Hessf(\nabla f, Y) = 2\langle \nabla_{\nabla f}\nabla f, Y\rangle \\ &= 2Hessf(\nabla f)(Y). \end{aligned}$$

Como o campo Y é tomado arbitrariamente, segue que

$$\nabla|\nabla f|^2 = 2Hess(\nabla f).$$

Agora, lançando mão do resultado obtido em (ii), deduzimos

$$\nabla(S+|\nabla f|^2 - f) = 2Ric(\nabla f) + 2Hessf(\nabla f) - \nabla f,$$

mas a equação de sóliton nos diz que

$$2Ric(\nabla f) + 2Hessf(\nabla f) = g(\nabla f),$$

donde segue

$$\nabla(S+|\nabla f|^2 - f) = g(\nabla f) - \nabla f = 0.$$

Isso garante que $\nabla(S+|\nabla f|^2 - f)$ é constante.

É importante ressaltar que não há perda de generalidade em supor $C_0 = 0$ uma vez que podemos adicionar uma constante a f e a função transladada satisfaz a mesma equação de sóliton.

Por fim provaremos (iv). Inicialmente vamos tomar o divergente da igualdade obtida em (ii)

$$\begin{aligned} \Delta S &= 2div(Ric(\nabla f)) \\ &= 2(div(Ric))(\nabla f) + 2\langle Hessf, Ric\rangle. \end{aligned}$$

A equação do sóliton combinada com a igualdade acima garante que

$$\begin{aligned} \Delta S &= 2(div(Ric))(\nabla f) + 2\langle \frac{1}{2}g - Ric, Ric\rangle \\ &= 2(div(Ric))(\nabla f) + \langle g, Ric\rangle - 2|Ric|^2 \\ &= 2(div(Ric))(\nabla f) + S - |Ric|^2. \end{aligned}$$

A 2ª identidade de Bianchi contraída duas vezes garante que

$$\Delta S = \langle \nabla S, \nabla f\rangle + S - |Ric|^2.$$

O que finaliza a prova de (iv) e, por consequência, do lema. $\square$

A próxima proposição, provada por Monteanu e Sesum em [27], como veremos no próximo capítulo, desempenhará um papel central na demonstração do teorema principal e das proposições auxiliares.

Proposição 21. *Seja (M,g,f) um sóliton de Ricci grandiente shrinking completo de dimensão n. Então para todo $\lambda > 0$, vale*

$$\int_M |Ric|^2 e^{-\lambda f} dV < \infty$$

Demonstração. Fixemos $p \in M$. Para qualquer que seja $r > 0$ podemos considerar função cut-off ϕ tal que

$$supp(\phi) \subseteq \{x \in M; d(x,p) \leq r\} \quad \text{e} \quad |\nabla\phi| \leq \frac{K}{r}.$$

Usando a equação dos sólitons normalizados, temos

$$\begin{aligned} \int_M |Ric|^2 e^{-\lambda f}\phi^2 &= \int_M R_{ij}\left(\frac{1}{2}g_{ij} - f_{ij}\right)e^{-\lambda f}\phi^2 \\ &= \frac{1}{2}\int_M Se^{-\lambda f}\phi^2 - \int_M R_{ij}f_{ij}e^{-\lambda f}\phi^2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Utilizando integração por partes e levando em conta a Definição 21 e a Proposição 9, encontramos

$$\int_M R_{ij}f_{ij}e^{-\lambda f}\phi^2 = \int_M \nabla_j(R_{ij}f_i e^{-\lambda f}\phi^2) - \int_M f_i\nabla_j(R_{ij}e^{-\lambda f}\phi^2).$$

Assim, segue que

$$-\int_M R_{ij}f_{ij}e^{-\lambda f}\phi^2 = \int_M f_i\nabla_j(R_{ij}e^{-\lambda f}\phi^2). \tag{3.3}$$

Além disso, todo sóliton de Ricci gradiente shrinking satisfaz

$$\nabla_j(R_{ij}e^{-f}) = 0,$$

donde segue imediatamente

$$\nabla_j(R_{ij}) = R_{ij}f_j.$$

Expandindo o lado direito da equação (3.3) e usando a igualdade obtida acima, temos

$$\begin{aligned} -\int_M R_{ij}f_{ij}e^{-\lambda f}\phi^2 &= \int_M f_i(\nabla_j R_{ij})e^{-\lambda f}\phi^2 - \int_M f_i R_{ij}f_j\lambda e^{-\lambda f}\phi^2 \\ &\quad + \int_M f_i R_{ij}e^{-\lambda f}(\phi^2)_j \\ &= (1-\lambda)\int_M f_i f_j R_{ij}e^{-\lambda f}\phi^2 + \int_M f_i R_{ij}e^{-\lambda f}(\phi^2)_j. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Juntando as equações (3.2) e (3.4) concluímos

$$\int_M |Ric|^2 e^{-\lambda f}\phi^2 = \frac{1}{2}\int_M S e^{-\lambda f}\phi^2 + (1-\lambda)\int_M f_i f_j R_{ij} e^{-\lambda f}\phi^2 + \int_M f_i R_{ij} e^{-\lambda f}(\phi^2)_j. \quad (3.5)$$

Observe que para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, temos

$$0 \leq \left(\frac{1}{2}a - (1-\lambda)b\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 - (1-\lambda)ab + (1-\lambda)^2 b^2,$$

donde segue

$$(1-\lambda)\int_M f_i f_j R_{ij} e^{-\lambda f}\phi^2 \leq \frac{1}{4}\int_M |Ric|^2 e^{-\lambda f}\phi^2 + (1-\lambda)^2\int_M |\nabla f|^4 e^{-\lambda f}\phi^2.$$

Por outro lado, também vale

$$0 \leq \left(\frac{1}{2}a - 2b\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 - 2ab + 4b^2,$$

portanto

$$\int_M f_i R_{ij} e^{-\lambda f}(\phi^2)_j \leq \frac{1}{4}\int_M |Ric|^2 e^{-\lambda f}\phi^2 + 4\int_M |\nabla f|^2 e^{-\lambda f}|\nabla\phi|^2.$$

Substituindo as duas desigualdades na equação (3.5) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_M |Ric|^2 e^{-\lambda f}\phi^2 \leq \frac{1}{2}\int_M S e^{-\lambda f}\phi^2 &+ (1-\lambda)^2\int_M |\nabla f|^4 e^{-\lambda f}\phi^2 \\ &+ 4\int_M |\nabla f|^2 e^{-\lambda f}|\nabla\phi|^2.\end{aligned} \quad (3.6)$$

Em [4] Cao e Zhou provaram que

$$\frac{1}{4}(r(x)-c)^2 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}(r(x)+c)^2$$

e

$$Vol(B_p(r)) \leq Cr^n,$$

onde $r(x) = dist(p,x)$ é a função distância de um ponto $p \in M$. Além disso, em [8] Chen provou que a curvatura escalar em um sóliton de Ricci gradiente shrinking é não negativa. Com esses dois resultados em mãos e usando o item (iii) do Lema 1, com $C_0 = 0$, obtemos

$$0 \leq S \leq \frac{1}{4}(r(x)+c)^2,$$

da mesma forma

$$0 \leq |\nabla f|^4 \leq \frac{1}{16}(r(x)+c)^4.$$

Assim fica claro que as funções $|\nabla f|^4 e^{-\lambda f}$ e $Se^{-\lambda f}$ decaem de forma exponencial e o volume de M cresce de forma linear. Isso garante, entre outras coisas, que fazendo r tender ao infinito, as três integrais do lado esquerdo da equação (3.6) são finitas. Segue, portanto, o resultado. $\square$

Agora nos dedicaremos a apresentar alguns resultados que envolvem a evolução de certos objetos tensoriais sob a influência do Fluxo de Ricci. Primeiramente, Hamilton provou que o tensor curvatura de Riemann satisfaz a seguinte equação de evolução

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) R = 2(R^2 + R^\#), \tag{3.7}$$

onde

$$R^\# = 2\left(\begin{array}{c|c} A^\# & B^\# \\ \hline (B^t)^\# & C^\# \end{array}\right),$$

com $A^\# = detA(A^t)^{-1}$,$C^\# = detC(C^t)^{-1}$ e $B^\# = -detB(B^t)^{-1}$..

As discussões que envolvem a evolução de R são feitas com detalhes em [14]. Com a expressão (3.7) em mãos definiremos uma função que desempenha papel central na demostração do teorema principal deste trabalho. Definimos

$$P := 2(2\langle R^2 + R^\#, R\rangle)S - |Ric|^2 |R_{ijkl}|^2. \tag{3.8}$$

Mais à frente estabeleceremos uma expressão simplicada da equação (3.8) válida no contexto de dimensão 4. Antes disso vejamos algumas proposições importantes.

Proposição 22. *Seja (M, g_0) um sóliton de Ricci gradiente shrinking e $g(t) = \sigma(t)\varphi_t^* g_0$ uma solução auto-similar do fluxo de Ricci como na Proposição 20. Se $u(x,t)$ é uma função definida como o pullback de $u_0 \in C^\infty(M)$ pela família de difeomorfismo como na Proposição 20, então*

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \langle \nabla f, \nabla u \rangle.$$

Demonstração. Seja $u_t(x) = u(x,t)$ uma função em M nas condições do enunciado, então

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi_t^* u_0\right) = \mathscr{L}_{X(t)} u_t,$$

com

$$X(t) = \left(\varphi_t^{-1}\right)_* \left(\frac{1}{\sigma(t)} \nabla_{g_0} f_0\right) \left(\varphi_t(x)\right).$$

Note que o pushfoward de φ_t^{-1} agindo sobre campos coincide com o pullback de φ_t, ou seja,

$$X(t) = \varphi_t^* \left(\frac{1}{\sigma(t)} \nabla_{g_0} f_0 \right) = \frac{1}{\sigma(t)} \nabla_{\varphi_t^* g_0} f_t = \nabla_{\sigma(t)\varphi_t^* g_0} f_t,$$

onde a última igualdade segue do fato de $\nabla_{\overline{g}} f = \frac{1}{\lambda} \nabla_g f$ quando $\overline{g} = \lambda g$. Portanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) &= \mathscr{L}_{\nabla_{g(t)} f_t} u_t \\
&= \nabla_{g(t)} f_t(u_t) \\
&= \langle \nabla f_t, \nabla u_t \rangle.
\end{aligned}$$

$\square$

Outro resultado muito relevante, explicitado pela proposição que segue, trata da evolução, no fluxo de Ricci, dos autovalores e valores singulares que aparecem na decomposição do tensor curvatura de Riemann.

Proposição 23. *Sejam $(M^4, g(t))$ uma solução do fluxo de Ricci, A_i, C_i e B_i os autovalores e valores singulares das componentes da decomposição de R apresentada na Seção 2.5. Então*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) (A_1 + A_2) \geq A_1^2 + A_2^2 + 2A_3(A_1 + A_2) + B_1^2 + B_2^2.$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) (C_1 + C_2) \geq C_1^2 + C_2^2 + 2C_3(C_1 + C_2) + B_1^2 + B_2^2.$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) B_3 \leq A_3 B_3 + C_3 B_3 + 2B_1 B_2.$$

Essas desigualdades valem no sentido das distribuições.

Demonstração. Para provar as desigualdades vamos usar um método semelhante ao empregado por Hamilton em [14] na demonstração do Lema 6.1. Vamos analisar a evolução do tensor de curvatura

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) = R^2 + R^\#.$$

Observe que a constante 2 foi removida, para fazê-lo basta reparametrizar a variável tempo. Perceba que isso não vai influenciar na validades das desigualdades. Fixado um ponto (x_0, t_0) considere um referencial ortonormal no qual A e C são matrizes diagonais em x_0. Como

$$A_3 = sup\{\langle Ax, x \rangle; |x| = 1\},$$

temos

$$\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij} g^{ij} \geq A_1 + A_2,$$

com a igualdade valendo em x_0. Além disso, também em x_0, vale $\sum_{i,j=1}^{2}(BB^t)_{ij}g^{ij} \geq B_1^2 + B_2^2$ e $\sum_{i,j=1}^{2} A^{\#}_{ij}g^{ij} \geq (A_1 + A_2)A_3$, onde a última segue pois em x_0 a matriz $A^{\#}$ é diagonal com autovalores A_1A_3 e A_2A_3. Combinando essas desigualdades e usando a expressão da evolução da curvatura escalar no fluxo de Ricci, encontramos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\left(\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}g^{ij}\right) &= \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)A_{ij} \\
&= \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}(A^2 + BB^t + 2A^{\#})_{ij} \\
&\geq A_1^2 + A_2^2 + 2(A_1 + A_2)A_3 + B_1^2 + B_2^2.
\end{aligned}$$

Isso garante que a desigualdade é válida no sentido de barreira. Analogamente provamos a segunda desigualdade.

Para a última desigualdade, num ponto x_0 fixado, considere bases ortonormais $\{y_1^+, y_2^+, y_3^+\}$ de $\Lambda^2_+(M^4)$ e $\{y_1^-, y_2^-, y_3^-\}$ de $\Lambda^2_-(M^4)$ que diagonalizam BB^t. Essas bases são tais que $B(y_3^-) = B_3y_3^+$. Além disso, temos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)B = AB + BC + 2B^{\#}.$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
AB(y_3^+, y_3^-) &= \langle A(y_3^+), B(y_3^-)\rangle \\
&= \langle A(y_3^+), B_3y_3^+\rangle \\
&\leq A_3B_3.
\end{aligned}$$

Da mesma forma podemos mostrar que $BC(y_3^+, y_3^-) \leq B_3C_3$. Por fim temos, $B^{\#}(y_3^+, y_3^-) = 2B_1B_2$. Juntando essas equações obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)g^{33}B_{33} &= g^{33}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)B_{33} \\
&= g^{33}(AB + BC + 2B^{\#})_{33} \\
&\leq A_3B_3 + C_3B_3 + 2B_1B_2,
\end{aligned}$$

com a igualdade valendo em x_0. Com isso mostramos que as três desigualdades são válidas no sentido de barreira. Para finalizar basta observar que as 3 funções envolvidas são côncavas e portanto tais desigualdades são válidas no sentido das distribuições. □

As duas proposições que seguem, apresentadas por Lei Ni e Nolan Wallach em [22], tratam da evolução, também sob influência do fluxo de Ricci, do tensor de Riemann em termos de coordenadas locais e também da sua razão com a curvatura escalar. O segundo aparecerá explicitamente nos resultados principais deste trabalho.

Proposição 24. *Seja* (M^4, g) *um sóliton de Ricci gradiente shrinking, então*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)|R_{ijkl}|^2 = 16\langle(R^2 + R^\#), R\rangle - 2|\nabla R_{ijkl}|^2.$$

Proposição 25. *Seja* (M^4, g) *um sóliton de Ricci gradiente shrinking tal que* $S > 0$*, então*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\frac{|R_{ijkl}|^2}{S^2} = \frac{4P}{S^3} - \frac{2}{S^4}|S\nabla_p R_{ijkl} - R_{ijkl}\nabla_p S|^2 + \left\langle \nabla\left(\frac{|R_{ijkl}|^2}{S^2}\right), \nabla \log S^2\right\rangle$$

Como foi comentado acima, a função P desempenha um papel importante nas demonstrações que segue, mas antes de usá-la vamos encontrar uma expressão em termos das componentes A, B, C da decomposição de R. Direcionaremos agora nossa atenção a encontrar tal expressão.

Primeiramente, lembre que $4\langle R, R\rangle = |R_{ijkl}|^2$ e $|Ric|^2 = |\mathring{Ric}|^2 + \frac{S^2}{n}$. Substituindo essas igualdades em (3.8), encontramos

$$P = 4\left\langle S(R^2 + R^\#) - \left(\frac{S^2}{n} + |\mathring{Ric}|^2\right)R, R\right\rangle. \tag{3.9}$$

Em dimesão 4, temos

$$\langle R^2 + R^\#, R\rangle = tr\big((R^2 + R^\#)R^t\big).$$

Segue da decomposição em blocos de R, apresentada no Capítulo 2 Seção 2.5, que

$$R^2 = \left(\begin{array}{c|c} A^2 + BB^t & AB + BC \\ \hline B^tA + CB^t & B^tB + C^2 \end{array}\right).$$

Como A e C são simétricas, temos

$$R^t = \left(\begin{array}{c|c} A^t & (B^t)^t \\ \hline B^t & C^t \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^t & C \end{array}\right) = R.$$

Consequentemente,

$$\langle R^2, R\rangle = tr(R^2R) = tr(R^3),$$

ou seja,

$$\langle R^2, R\rangle = tr\left(\begin{array}{c|c} A^3 + BB^tA + ABB^t + +BCB^t & A^2B + BB^tB + ABC + BC^2 \\ \hline B^tA^2 + CB^tA + B^tBB^t + C(B^t)^2 & B^tAB + CB^tB + B^tBC + C^3 \end{array}\right).$$

Utilizando as propriedades da função traço, concluímos

$$
\begin{aligned}
\langle R^2, R\rangle &= tr(A^3) + tr(BB^tA) + tr(ABB^t) + tr(BCB^t) \\
&\quad + tr(B^tAB) + tr(CB^tB) + tr(B^tBC) + tr(C^3) \\
&= tr(A^3) + tr(C^3) + 3tr(ABB^t) + 3tr(CBB^t).
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

Por outro lado

$$
\langle R^\#, R\rangle = 2\left(\begin{array}{c|c} A^\#A + B^\#B^t & A^\#B + B^\#C \\ \hline (B^t)^\#A + C^\#B^t & (B^t)^\#B + C^\#C \end{array}\right),
$$

isto é,

$$
\langle R^\#, R\rangle = 2tr(A^\#A) + 2tr(C^\#C) + 2tr((B^t)^\#B) + 2tr(B^\#B^t). \tag{3.11}
$$

Usando as equações (3.10) e (3.11), encontramos

$$
\begin{aligned}
\langle R^2 + R^\#, R\rangle &= tr(A^3) + tr(C^3) + 2tr(A^\#A) + 2tr((B^t)^\#B) \\
&\quad + 2tr(B^\#B^t) + 2tr(C^\#C) + 3tr(ABB^t) + 3tr(CB^tB).
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\langle R, R\rangle &= tr(R^2) \\
&= tr(A^2) + tr(C^2) + 2tr(BB^t) \\
&= tr(A^2) + tr(C^2) + 2\|B\|^2.
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

Organizando as equações (3.9), (3.12) e (3.13) concluímos que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}P &= S(tr(A^3) + tr(C^3) + 2tr(A^\#A) + 2tr((B^t)^\#B) \\
&\quad + 2tr(B^\#B^t) + 2tr(C^\#C) + 3tr(ABB^t) + 3tr(CB^tB)) \\
&\quad - \left(\frac{S^2}{n} + |\overset{\circ}{Ric}|^2\right)(tr(A^2) + tr(C^2) + 2\|B\|^2).
\end{aligned}
$$

O traço é sabidamente um obejto que não depende da base na qual a matriz está representado. A Proposição 17 diz que A e C são simétricas, o teorema espectral garante a existência de uma base ortonormal de autovetores, tal que nessa base

$$
A = \begin{pmatrix} a_1 + \frac{S}{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_2 + \frac{S}{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_3 + \frac{S}{12} \end{pmatrix} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} c_1 + \frac{S}{12} & 0 & 0 \\ 0 & c_2 + \frac{S}{12} & 0 \\ 0 & 0 & c_3 + \frac{S}{12} \end{pmatrix}.
$$

Aqui e no que segue no texto denotaremos por $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ os autovalores de $\overset{\circ}{A} = W^+$ e por $c_1 \leq c_2 \leq c_3$ os autovalores de $\overset{\circ}{C} = W^-$. Fazendo as manipulações algébricas necessárias, obtemos

$$\begin{aligned} P = &-S^2\left(\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^2 + \sum_{i=1}^{3}a_i^2 + \sum_{i=1}^{3}c_i^2\right) \\ &+4S\left(\sum_{i=1}^{3}(a_i^3 + c_i^3) + 6a_1a_2a_3 + 6c_1c_2c_3 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^3\right) \\ &+12S(a_1b_1^2 + a_2b_2^2 + a_3b_3^2 + c_1\tilde{b}_1^2 + c_2\tilde{b}_2^2 + c_3\tilde{b}_3^2) \\ &-2\left(\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^2\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{3}(a_i^2 + c_i^2)\right). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Com $\sum a_i = \sum c_i = \sum \lambda_i = 0$. Além disso $b_i^2 = \sum_{j=1}^{3} B_{ij}^2$ e $\tilde{b}_i^2 = \sum_{j=1}^{3} B_{ji}^2$. Note que vale a igualdade $\sum_{i=1}^{3} b_i^2 = \sum_{i=1}^{3} \tilde{b}_i^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^2$. Com isso finalizamos este capítulo.

4 SÓLITONS DE RICCI GRADIENTE SHRINKING DE DIMENSÃO 4 COM CURVATURA ISOTRÓPICA POSITIVA

Nosso objetivo a partir de agora será provar o teorema principal enunciado e provado em [23] por Li, Ni e Wang.

Teorema 3. *Seja (M^4, g) um sóliton de Ricci gradiente shrinking completo com curvatura isotrópica positiva. Então o recobrimento universal de M^4 é $\mathbb{S}^4$ ou $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$.*

Para fazê-lo vamos precisar de quatro resultados auxiliares, mas antes disso, à fim de facilitar as notações, definimos algumas funções. No que segue, consideramos

$$\psi_1 = A_1 + A_2,$$

$$\psi_2 = C_1 + C_2,$$

$$\varphi = B_3.$$

Lembrando que $A_1 \leq A_2 \leq A_3$ são autovalores de A, $C_1 \leq C_2 \leq C_3$ de C e $0 \leq B_1 \leq B_2 \leq B_3$ são os valores singulares de B. Definimos também

$$\begin{aligned} E = & \frac{4B_1(B_3 - B_2)}{B_3} + \frac{(A_1 - B_1)^2 + (A_2 - B_2)^2 + 2A_2(B_2 - B_1)}{A_1 + A_2} \\ & + \frac{(C_1 - B_1)^2 + (C_2 - B_2)^2 + 2C_2(B_2 - B_1)}{C_1 + C_2}. \end{aligned}$$

Note que $E \geq 0$ com igualdade se, e somente se $A_1 = C_1 = B_1 = B_2 = A_2 = C_2 = B_3$. Em particular, se $E = 0$, então $BB^t = b^2 Id$ para algum $b \in \mathbb{R}$. Além disso, se M tem curvatura isotrópica positiva, então $\psi_1 > 0$ e $\psi_2 > 0$. Primeiramente vamos demonstrar a validade de uma desigualdade envolvendo autovalores e valores singulares evoluindo no fluxo de Ricci, que será bastante útil mais à frente.

Proposição 26. *Seja $(M^4, g(t))$ uma solução do fluxo de Ricci, então a seguinte desigualdade é válida no sentido das distribuições.*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1 \psi_2}} \leq -\frac{1}{2} \frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1 \psi_2}} E - \frac{1}{4} \frac{\varphi |\psi_1 \nabla \psi_2 - \psi_2 \nabla \psi_1|}{(\psi_1 \psi_2)^{\frac{5}{2}}} + \left\langle \nabla \left(\frac{\varphi}{\psi_1 \psi_2}\right), \nabla \log \psi_1 \psi_2 \right\rangle \tag{4.1}$$

Demonstração. Inicialmente, note que

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1 \psi_2}} = \frac{(\psi_1 \psi_2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \varphi - \varphi \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\psi_1 \psi_2})}{\psi_1 \psi_2} = \frac{1}{(\psi_1 \psi_2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial t} \varphi - \frac{1}{2} \frac{\varphi}{(\psi_1 \psi_2)^{\frac{3}{2}}} \left(\psi_1 \frac{\partial}{\partial t} \psi_2 + \psi_2 \frac{\partial}{\partial t} \psi_1\right).$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_j\left(g^{ij}\sqrt{|g|}\partial_i\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_j\left(g^{ij}\sqrt{|g|}\left(\frac{1}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{1}{2}}}\partial_i\varphi-\frac{1}{2}\frac{\varphi}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{3}{2}}}(\psi_1\partial_i\psi_2+\psi_2\partial_i\psi_1)\right)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_j\left(g^{ij}\sqrt{|g|}\frac{1}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{1}{2}}}\partial_i\varphi\right)-\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_j\left(g^{ij}\sqrt{|g|}\frac{1}{2}\frac{\varphi}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{3}{2}}}(\psi_1\partial_i\psi_2+\psi_2\partial_i\psi_1)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\frac{\partial_j(g^{ij}\sqrt{|g|}\partial_i\varphi)}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2}\frac{g^{ij}\sqrt{|g|}\partial_i\varphi}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{3}{2}}}(\psi_1\partial_j\psi_2+\psi_2\partial_j\psi_1)\right)\\
&\quad-\frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\frac{2(\psi_1\psi_2)^{\frac{3}{2}}\partial_j(g^{ij}\sqrt{|g|}\varphi(\psi_1\partial_i\psi_2+\psi_2\partial_i\psi_1))}{4(\psi_1\psi_2)^3}\right)\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\frac{3(\psi_1\psi_2)^{\frac{1}{2}}(\psi_1\partial_j\psi_2+\psi_2\partial_j\psi_1)g^{ij}\sqrt{|g|}\varphi(\psi_1\partial_i\psi_2+\psi_2\partial_i\psi_1)}{4(\psi_1\psi_2)^3}\right),
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right) &= \frac{\Delta\varphi}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2}\frac{g^{ij}\partial_i\varphi}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{3}{2}}}(\psi_1\partial_j\psi_2+\psi_2\partial_j\psi_1)\\
&\quad-\frac{1}{2\sqrt{|g|}}\frac{1}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{1}{2}}}\partial_j(g^{ij}\sqrt{|g|}\varphi(\psi_1\partial_i\psi_2+\psi_2\partial_i\psi_1))\\
&\quad+\frac{3}{4}\frac{g^{ij}}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{5}{2}}}\varphi(\psi_1\partial_j\psi_2+\psi_2\partial_j\psi_1)(\psi_1\partial_i\psi_2+\psi_2\partial_i\psi_1)\\
&= \frac{\Delta\varphi}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2}\frac{g^{ij}\partial_i\varphi}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{3}{2}}}(\psi_1\partial_j\psi_2+\psi_2\partial_j\psi_1)\\
&\quad-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{|g|}(\psi_1\psi_2)^{\frac{3}{2}}}(\partial_j(g^{ij}\sqrt{|g|}\varphi\psi_1\partial_i\psi_2)+\partial_j(g^{ij}\sqrt{|g|}\varphi\psi_2\partial_i\psi_1))\\
&\quad+\frac{3}{4}\frac{1}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{5}{2}}}\varphi(|\psi_1\nabla\psi_2+\psi_2\nabla\psi_1|^2).
\end{aligned}
$$

Além disso, também vale

$$
\begin{aligned}
\partial_j(g^{ij}\sqrt{|g|}\varphi\psi_l\partial_i\psi_k) &= \partial_j(\varphi\psi_l)g^{ij}\sqrt{|g|}\partial_i\psi_k+\varphi\psi_l\partial_j(g^{ij}\sqrt{|g|}\partial_i\psi_k)\\
&= \varphi\partial_j\psi_l g^{ij}\sqrt{|g|}\partial_i\psi_k+\psi_l\partial_j\varphi g^{ij}\sqrt{|g|}\partial_i\psi_k+\varphi\psi_l\partial_j(g^{ij}\sqrt{|g|}\partial_i\psi_k).
\end{aligned}
$$

Voltando a igualdade anterior, temos

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right) &= \frac{\Delta\varphi}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}\frac{g^{ij}}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{3}{2}}}(\psi_1\partial_i\varphi\partial_j\psi_2 + \psi_2\partial_i\varphi\partial_j\psi_1) \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{g^{ij}}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{3}{2}}}(\varphi\partial_j\psi_1\partial_i\psi_2 + \psi_1\partial_j\varphi\partial_i\psi_2 + \varphi\partial_j\psi_2\partial_i\psi_1 + \psi_2\partial_j\varphi\partial_i\psi_1) \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{\varphi(\psi_2\Delta\psi_1 + \psi_1\Delta\psi_2)}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{4}\frac{\varphi|\psi_1\nabla\psi_2 + \psi_2\nabla\psi_1|^2}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{\Delta\varphi}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{g^{ij}}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{3}{2}}}(\psi_1\partial_i\varphi\partial_j\psi_2 + \psi_2\partial_i\varphi\partial_j\psi_1) - \frac{g^{ij}}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{3}{2}}}(\varphi\partial_i\psi_1\partial_j\psi_2) \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{\varphi(\psi_2\Delta\psi_1 + \psi_1\Delta\psi_2)}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{4}\frac{\varphi|\psi_1\nabla\psi_2 + \psi_2\nabla\psi_1|^2}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{5}{2}}}.\end{aligned}$$

Agora vamos provar uma igualdade auxiliar

$$\begin{aligned}&\left\langle\nabla\left(\frac{\varphi}{\psi_1\psi_2}\right), \nabla\log\psi_1\psi_2\right\rangle = \left\langle g^{ij}\partial_i\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)\partial_j, g^{mn}\partial_m(\log\psi_1\psi_2)\partial_n\right\rangle \\ =&\left\langle g^{ij}\left(\frac{\partial_i\varphi}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}\frac{\varphi}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{1}{2}}}((\psi_1\partial_i\psi_2 + \psi_2\partial_i\psi_1)\right)\partial_j, \frac{g^{mn}}{(\psi_1\psi_2)}(\psi_1\partial_m\psi_2 + \psi_2\partial_m\psi_1)\partial_n\right\rangle \\ =&\frac{1}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{3}{2}}}\langle g^{ij}\partial_i\varphi\partial_j, g^{mn}\psi_2\partial_m\psi_1\partial_n\rangle + \frac{1}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{3}{2}}}\langle g^{ij}\partial_i\varphi\partial_j, g^{mn}\psi_1\partial_m\psi_2\partial_n\rangle \\ &-\frac{1}{2}\frac{\varphi}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{5}{2}}}\langle g^{ij}(\psi_1\partial_i\psi_2 + \psi_2\partial_i\psi_1)\partial_j, g^{mn}(\psi_1\partial_m\psi_2 + \psi_2\partial_m\psi_1)\partial_n\rangle \\ =&\frac{\psi_2}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{3}{2}}}g^{ij}\partial_i\varphi\partial_j\psi_1 + \frac{\psi_1}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{3}{2}}}g^{ij}\partial_i\varphi\partial_j\psi_2 - \frac{1}{2}\frac{\varphi}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{5}{2}}}|\psi_1\nabla\psi_2 + \psi_2\nabla\psi_1|^2.\end{aligned}$$

Voltando novamente à igualdade inicial, obtemos

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right) &= \frac{\Delta\varphi}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}\frac{\varphi}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{3}{2}}}(\psi_2\Delta\psi_1 + \psi_1\Delta\psi_2) - \frac{\varphi}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{3}{2}}}\langle\nabla\psi_1, \nabla\psi_2\rangle \\ &\quad + \frac{1}{4}\frac{\varphi}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{5}{2}}}|\psi_1\nabla\psi_2 + \psi_2\nabla\psi_1|^2 - \left\langle\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right), \nabla\log\psi_1\psi_2\right\rangle \\ &= \frac{\Delta\varphi}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}\frac{\varphi}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{3}{2}}}(\psi_2\Delta\psi_1 + \psi_1\Delta\psi_2) + \frac{1}{4}\frac{\varphi}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{5}{2}}}|\psi_1\nabla\psi_2 - \psi_2\nabla\psi_1|^2 \\ &\quad - \left\langle\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right), \nabla\log\psi_1\psi_2\right\rangle,\end{aligned}$$

donde segue que

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}} &= \frac{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}} - \frac{1}{2}\frac{\varphi\psi_1\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\psi_2 + \varphi\psi_2\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\psi_1}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{1}{4}\frac{\varphi|\psi_1\nabla\psi_2 - \psi_2\nabla\psi_1|^2}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{5}{2}}} + \left\langle\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right), \nabla\log\psi_1\psi_2\right\rangle.\end{aligned}$$

Agora podemos usar as desigualdades apresentadas na Proposição 23 para concluir que

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}} - \frac{1}{2}\frac{\varphi\psi_1\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)\psi_2+\varphi\psi_2\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)\psi_1}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{3}{2}}} &\leq \frac{A_3B_3+C_3B_3+2B_1B_2}{\sqrt{\psi_1\psi_2}} \\
&- \frac{1}{2}\frac{\varphi\psi_1}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{3}{2}}}(C_1^2+C_2^2+2(C_1+C_2)C_3+B_1^2+B_2^2) \\
&- \frac{1}{2}\frac{\varphi\psi_2}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{3}{2}}}(A_1^2+A_2^2+2(A_1+A_2)A_3+B_1^2+B_2^2) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\varphi}{(\sqrt{\psi_1\psi_2}}\left(\frac{2A_3B_3+2C_3B_3+4B_1B_2}{B_3}-\frac{C_1^2+C_2^2+2(C_1+C_2)C_3+B_1^2+B_2^2}{C_1+C_2}\right) \\
&- \frac{1}{2}\frac{\varphi}{(\sqrt{\psi_1\psi_2}}\left(\frac{A_1^2+A_2^2+2(A_1+A_2)A_3+B_1^2+B_2^2}{A_1+A_2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\left(2A_3+2C_3+\frac{4B_1B_2}{B_3}\right) \\
&- \frac{1}{2}\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\left(\frac{(C_1-B_1)^2+(C_2+B_2)^2+2(C_1+C_2)C_3+2C_1B_1+2C_2B_2}{C_1+C_2}\right) \\
&- \frac{1}{2}\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\left(\frac{(A_1-B_1)^2+(A_2+B_2)^2+2(A_1+A_2)A_3+2A_1B_1+2A_2B_2}{A_1+A_2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\left(\frac{4B_1B_2-4B_1B_3}{B_3}-\frac{(C_1-B_1)^2+(C_2-B_2)^2+2C_2(B_2-B_1)}{C_1+C_2}\right) \\
&- \frac{1}{2}\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\left(\frac{(A_1-B_1)^2+(A_2-B_2)^2+2A_2(B_2-B_1)}{A_1+A_2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}(-E).
\end{aligned}
$$

Segue daí o resultado desejado. □

Agora uma proposição que nos ajuda entender melhor o comportamento da matriz B que aparece na decomposição do operador curvatura de Riemann.

Proposição 27. *Seja (M^4, g, f) um sóliton de Ricci gradiente shrinking com curvatura isotrópica positiva. Então $BB^t = b^2 Id$ para algum $b \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Primeiramente, a Proposição 22 garante que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right) = \left\langle \nabla f, \nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)\right\rangle. \tag{4.2}$$

Fixemos $x_0 \in M$. Para qualquer que seja $r > 0$ podemos considerar função de corte η tal que

$$supp(\eta) \subseteq \{x \in M; d(x,x_0) \leq r\} \quad \text{e} \quad |\nabla\eta| \leq \frac{C}{r}.$$

Agora vamos multiplicar a desigualdade provada na Proposição 26 por

$$\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}e^{-f+\log\psi_1\psi_2}\eta^2.$$

Feito isso, podemos considerar a integral em M da desigualdade obtida

$$\begin{aligned}\int_M\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}e^{-f+\log\psi_1\psi_2}\eta^2 &\leq \int_M\left(-\frac{1}{2}\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}E\right)\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}e^{-f+\log\psi_1\psi_2}\eta^2\\ &-\int_M\left(\frac{1}{4}\frac{\varphi|\psi_1\nabla\psi_2-\psi_2\nabla\psi_1|}{(\psi_1\psi_2)^{\frac{5}{2}}}\right)\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}e^{-f+\log\psi_1\psi_2}\eta^2\\ &+\int_M\left\langle\nabla\left(\frac{\varphi}{\psi_1\psi_2}\right),\nabla\log\psi_1\psi_2\right\rangle\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}e^{-f+\log\psi_1\psi_2}\eta^2.\end{aligned}$$

Reorganizando essa expressão e usando a igualdade (4.2), encontramos

$$\begin{aligned}&\int_M\left(\left\langle\nabla f,\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)\right\rangle-\Delta\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)\right)\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}e^{-f+\log\psi_1\psi_2}\eta^2\\ &\leq-\frac{1}{2}\int_M\varphi^2Ee^{-f}\eta^2+\int_M\left\langle\nabla\left(\frac{\varphi}{\psi_1\psi_2}\right),\nabla\log\psi_1\psi_2\right\rangle\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}e^{-f+\log\psi_1\psi_2}\eta^2.\end{aligned}$$

Agora lembre que, se $h\in C^\infty(M)$, $X\in\mathfrak{X}(M)$ e M é variedade sem bordo, vale a seguinte regra de integração por partes

$$\int_M\langle\nabla h,X\rangle=-\int_M hdivX,$$

e portanto, obtemos

$$\begin{aligned}&-\int_M\Delta\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}e^{-f+\log\psi_1\psi_2}\eta^2=\int_M\left\langle\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}e^{-f+\log\psi_1\psi_2}\eta^2\right),\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)\right\rangle\\ &=\int_M\left\langle e^{-f+\log\psi_1\psi_2}\eta^2\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)+\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\nabla(e^{-f+\log\psi_1\psi_2}\eta^2),\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)\right\rangle\\ &=\int_M e^{-f+\log\psi_1\psi_2}\left|\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)\right|^2\\ &\quad+\int_M\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\left\langle e^{\log\psi_1\psi_2}\eta^2\nabla e^{-f}+e^{-f}\nabla(e^{\log\psi_1\psi_2}\eta^2),\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)\right\rangle\\ &=\int_M e^{-f+\log\psi_1\psi_2}\left|\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)\right|^2-\int_M\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}e^{-f+\log\psi_1\psi_2}\eta^2\left\langle\nabla f,\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)\right\rangle\\ &\quad+\int_M e^{-f}\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\left\langle\eta^2\nabla(e^{\log\psi_1\psi_2})+e^{\log\psi_1\psi_2}\nabla(\eta^2),\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)\right\rangle\\ &=\int_M e^{-f+\log\psi_1\psi_2}\left|\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)\right|^2-\int_M\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}e^{-f+\log\psi_1\psi_2}\eta^2\left\langle\nabla f,\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)\right\rangle\\ &\quad+\int_M e^{-f+\log\psi_1\psi_2}\eta^2\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\left\langle\nabla(\log\psi_1\psi_2),\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)\right\rangle\\ &\quad+2\int_M\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}e^{-e+\log\psi_1\psi_2}\eta\left\langle\nabla\eta,\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)\right\rangle.\end{aligned}$$

Substituindo essa igualdade na desigualdade inicial deduzimos que

$$\int_M e^{-f+\log\psi_1\psi_2}\eta^2\left|\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)\right|^2+2\int_M e^{-f+\log\psi_1\psi_2}\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\eta\left\langle\nabla\eta,\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)\right\rangle \\ \leq -\int_M\frac{\varphi^2Ee^{-f}\eta^2}{2}, \tag{4.3}$$

equivalentemente,

$$0\leq -\frac{1}{2}\int_M\varphi^2Ee^{-f}\eta^2-\int_M e^{-f+\log\psi_1\psi_2}\eta^2\left|\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)\right|^2 \\ -2\int_M e^{-f+\log\psi_1\psi_2}\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\eta\left\langle\nabla\eta,\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)\right\rangle.$$

Além disso, note que

$$0\leq\left\langle\eta\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)+\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\nabla\eta,\eta\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)+\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\nabla\eta\right\rangle \\ =\eta^2\left|\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)\right|^2+2\frac{\eta\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\left\langle\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right),\nabla\eta\right\rangle+\frac{\varphi^2}{\psi_1\psi_2}|\nabla\eta|^2,$$

donde segue que

$$-e^{-f+\log\psi_1\psi_2}\left(\eta^2\left|\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right)\right|^2+2\frac{\eta\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\left\langle\nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}\right),\nabla\eta\right\rangle\right)\leq e^{-f}\varphi^2|\nabla\eta|^2.$$

Voltando para a desigualdade (4.3) juntamente com a desigualdade obtida acima, encontramos

$$0\leq-\frac{1}{2}\int_M\varphi^2Ee^{-f}\eta^2+\int_M e^{-f}\varphi^2|\nabla\eta|^2\leq-\frac{1}{2}\int_M\varphi^2Ee^{-f}\eta^2+\frac{C^2}{r^2}\int_M e^{-f}\varphi^2.$$

Agora, lembre que

$$4\varphi^2=4B_3^2\leq 4\|B\|^2=|\mathring{Ric}|^2=|Ric|^2-\frac{S^2}{4},$$

com isso

$$0\leq\int_M\varphi^2e^{-f}\leq\frac{1}{4}\int_M\left(|Ric|^2-\frac{S^2}{4}\right)e^{-f}.$$

A Proposição 21 garante, portanto, que $C^2\int_M\varphi^2e^{-f}$ é limitada e segue que

$$\lim_{r\to\infty}\frac{C^2}{r^2}\int_M\varphi^2e^{-f}=0.$$

Sendo assim, se fizermos $r\to\infty$, obtemos

$$0\leq-\frac{1}{2}\int_M\varphi^2Ee^{-f}\eta^2.$$

Como $-E \leq 0$ essa desigualdade só se verifica na igualdade, ou seja,

$$\int_M \varphi^2 E e^{-f} = 0.$$

Estamos integrando termos não negativos. A nulidade da integral garante que $\varphi = 0$ ou $E = 0$. Por fim, temos $0 \leq B_1 \leq B_2 \leq B_3 = \varphi$, e assim se $\varphi = 0$, então $BB^t = b^2 Id$ com $b = 0$. Portanto o resultado segue em ambos os casos, lembrando que $E = 0$ foi abordado no início deste capítulo.

□

Com esses resultados em mãos podemos provar um fato muito importante sobre P definido no Capítulo 3.

Proposição 28. *Seja (M^4, g, f) um sóliton de Ricci gradiente shrinking com curvatura isotrópica positiva. Então $P \leq 0$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que

$$P \leq -S\left(S\sum_{i=1}^{3} a_i^2 - 12\sum_{i=1}^{3} a_i^3\right) - S\left(S\sum_{i=1}^{3} c_i^2 - 12\sum_{i=1}^{3} c_i^3\right).$$

Já sabemos que

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{i=1}^{3} c_i = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 0,$$

segue daí

$$\begin{aligned}
0 = (a_1+a_2+a_3)^3 &= a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + 6a_1a_2a_3 + 3a_1^2a_2 + 3a_1a_2^2 \\
&\quad + 3a_2^2a_3 + 3a_2a_3^2 + 3a_1^2a_3 + 3a_1a_3^2 \\
&= 2\sum_{i=1}^{3} a_i^3 + 18a_1a_2a_3 - 6a_1a_2a_3 + 6a_1^2a_2 + 6a_1a_2^2 + 6a_2^2a_3 \\
&\quad + 6a_2a_3^2 + 6a_1^2a_3 + 6a_1a_3^2 \\
&= 2\sum_{i=1}^{3} a_i^3 - 6a_1a_2a_3 + 6a_1a_2(a_1+a_2+a_3) + 6a_1a_3(a_1+a_2+a_3) \\
&\quad + 6a_2a_3(a_1+a_2+a_3).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$3\sum_{i=1}^{3} a_i^3 = \sum_{i=1}^{3} a_i^3 + 6a_1a_2a_3.$$

A igualdade também se verifica para os coeficientes c_i e a demonstração é a mesma. Pelo que foi apresentado na Seção 2.5 já sabemos que

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i^3 = 24detB = 24\sqrt{detBB^t} = 24b^3,$$

onde a última igual segue da Proposição 27.

Também da Proposição 27 temos $BB^t = B^tB$. Além disso, note que b_i^2 é o i-ésimo termo da diagonal de BB^t e $\tilde{b}_i^2$ é o i-ésimo termo da diagonal de B^tB. Segue que $b_i^2 = \tilde{b}_i^2 = b^2$, $i = 1,2,3$. Além disso

$$3b^2 = \sum_{i=1}^{3} b_i^2 = \sum_{i=1}^{3} \tilde{b}_i^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} \lambda_i^2.$$

Substituindo essas igualdades na expressão inicial de P, obtemos

$$\begin{aligned} P = &-S^2\left(2b^2 + \sum_{i=1}^{3}(a_i^2 + c_i^2)\right) + 4S\left(3\sum_{i=1}^{3}(a_i^3 + c_i^3) - 12b^3\right) \\ &+ 12S(a_1b_1^2 + a_2b_2^2 + a_3b_3^2 + c_1b_1'^2 + c_2b_2'^2 + c_3b_3'^2) \\ &- 288b^4 - 48b^2\left(\sum_{i=1}^{3}(a_i^2 + c_i^2)\right) \\ = &-S^2\left(2b^2 + \sum_{i=1}^{3}(a_i^2 + c_i^2)\right) + 4S\left(3\sum_{i=1}^{3}(a_i^3 + c_i^3) - 12b^3\right) \\ &- 288b^4 - 48b^2\left(\sum_{i=1}^{3}(a_i^2 + c_i^2)\right). \end{aligned}$$

Segue daí

$$\begin{aligned} P = &- S^2\left(\sum_{i=1}^{3}(a_i^2 + c_i^2)\right) + 12S\left(\sum_{i=1}^{3}(a_i^3 + c_i^3)\right) - 48b\left(\sum_{i=1}^{3}(a_i^2 + c_i^2)\right) \\ &- 2(S^2b^2 + 144b^4 + 24Sb^3) \\ = &- S^2\left(\sum_{i=1}^{3}(a_i^2 + c_i^2)\right) + 12S\left(\sum_{i=1}^{3}(a_i^3 + c_i^3)\right) - 48b\left(\sum_{i=1}^{3}(a_i^2 + c_i^2)\right) \\ &- 2(Sb + 12b^2)^2 \\ \leq &- S^2\left(\sum_{i=1}^{3}(a_i^2 + c_i^2)\right) + 12S\left(\sum_{i=1}^{3}(a_i^3 + c_i^3)\right) \\ = &- S\left(S\sum_{i=1}^{3} a_i^2 - 12\sum_{i=1}^{3} a_i^3\right) - S\left(S\sum_{i=1}^{3} c_i^2 - 12\sum_{i=1}^{3} c_i^3\right). \end{aligned}$$

Agora nos resta provar que $P \leq 0$. Para tal, vamos mostrar que

$$S\sum_{i=1}^{3} a_i^2 - 12\sum_{i=1}^{3} a_i^3 \geq 0,$$

e, por consequência,

$$S\sum_{i=1}^{3} c_i^2 - 12\sum_{i=1}^{3} c_i^3 \geq 0.$$

Para provar a desigualdade tome uma base de $\Lambda_+^2(M)$ composta por autovetores da parte positiva do tensor de Weyl, i.e., W^+. Assim, se a_i são os autovalores de W^+, então os autovalores de A são $A_i = a_i + \frac{S}{12}$. Como a variedade tem curvatura isotrópica positiva, então $A_i + A_j = a_i + a_j + \frac{S}{6} > 0$ sempre que $i \neq j$. Considere a seguinte mudança de variáveis $x_i = 1 - \frac{6}{S}a_i$ e note que $\sum_{i=1}^{3} x_i = 3$ e também $0 < x_3 \leq x_2 \leq x_1$.

De fato, suponha por contradição que $x_3 \leq 0$, nesse caso temos

$$x_1 + x_2 \geq 3,$$

ou seja,

$$\left(1 - \frac{6}{S}a_1\right) + \left(1 - \frac{6}{S}a_2\right) \geq 3.$$

Em outras palavras,

$$-\frac{6}{S}(a_1 + a_2) \geq 1,$$

donde segue

$$a_1 + a_2 + \frac{S}{6} \leq 0.$$

Mas isso contradiz a condição de M^4 ter curvatura isotrópica positiva.

Seguiremos compondo a função que queremos analisar com a mudança de variáveis. Feito isso o trabalho se resume a analisar a seguinte função

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) =& S\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{S}{6}(1-x_i)\right)^2 - 12\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{S}{6}(1-x_i)\right)^3 \\ =& \frac{S^3}{36}\left(\sum_{i=1}^{3}(1-x_i)^2 - 2\sum_{i=1}^{3}(1-x_i)^3\right) \\ =& \frac{S^3}{36}\left(-3 + \sum_{i=1}^{3} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{3}(1 - 3x_i + 3x_i^2 - x_i^3)\right) \\ =& \frac{S^3}{36}\left(-5\sum_{i=1}^{3} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{3} x_i^3 + 9\right). \end{aligned}$$

Aplicando o método dos multiplicadores de lagrange, vamos provar que sob as restrições anteriores, vale $f(x_1,x_2,x_3) \geq 0$. Para isso, considere a subvariedade fechada $C \subset \mathbb{R}^3$

$$C = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 3\}$$

Note ainda, que o subconjunto de C satisfazendo $0 < x_3 \leq x_2 \leq x_1$ está contido no bloco $B = [0,3] \times [0,3] \times [0,3]$,ou seja, a fim de analisar a positividade de f com as condições impostas, podemos analisar o comportamento de f em $C' = C \cap B$. Como f é contínua e C' é compacto, então f necessariamente atingirá seu minímo em C'. Se f atinge seu mínimo num ponto $(x_1, x_2, x_3) \in C'$ com $x_3 > 0$, então o método dos multiplicadores de lagrange garante a exitência de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} 6x_1^2 + 10x_1 = \dfrac{36\lambda}{S^3}, \\ 6x_2^2 + 10x_2 = \dfrac{36\lambda}{S^3}, \\ 6x_3^2 + 10x_3 = \dfrac{36\lambda}{S^3}, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Observe que as três primeiras equações acima só podem ser satisfeitas simultaneamente se existirem ao menos 2 índices i, j distintos com $x_i = x_j$.

No caso em que $x_1 = x_2 = x_3$ só podemos ter $p_1 = (1,1,1)$. Se $x_i = x_j \neq x_k$, então

$$\begin{cases} 6x_i^2 + 10x_i = 6x_k^2 + 10x_k, \\ 2x_i + x_k = 3, \end{cases}$$

e portanto, $x_i = x_j = \frac{4}{3}$ e $x_k = \frac{1}{3}$. Como $x_3 \leq x_2 \leq x_1$ segue que o candidato à ponto de minímo nesse caso deve ser $p_2 = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$. É imediato verificar que $f(p_1) = 0$ e $f(p_2) = \frac{S^3}{162}$ donde segue que em ambos os casos $f \geq 0$.

Por outro lado, se f atinge seu mínimo em C' com $x_3 = 0$ então podemos escrever $x_2 = 3 - x_1$, sendo assim

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{S^3}{36}(2(x_1^3 + (3 - x_1)^3) - 5(x_1^2 + (3 - x_1)^2) + 9) \\ &= \frac{S^3}{36}(18_1^2 - 54x_1 + 54 - 10x_1^2 - 45 + 30x_1 + 9) \\ &= \frac{S^3}{18}(4x_1^2 - 12x_1 + 9) \\ &= \frac{S^3}{18}(2x_1 - 3)^2, \end{aligned}$$

o que garante que nesse caso também temos $f \geq 0$. Provamos que, quando $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ é tal que $0 < x_3 \leq x_2 \leq x_1$ e $\sum_{i=1}^{3} x_i = 3$, então $f(x_1, x_2, x_3) \geq 0$.

Concluímos daí que, sob as restrições $\sum_{i=1}^{3} a_i = 0$ e $\frac{S}{6} + a_i + a_j > 0$, vale

$$S \sum_{i=1}^{3} a_i^2 - 12 \sum_{i=1}^{3} a_i^3 \geq 0$$

O processo pode ser repetido, de maneira análoga, a fim de mostrar que

$$S\sum_{i=1}^{3} c_i^2 - 12\sum_{i=1}^{3} c_i^3 \geq 0.$$

O resultado segue imediatamente de $S > 0$. $\square$

O lema a seguir pode ser visto, com algumas ressalvas importantes, como um corolário da demonstração da Proposição 28.

Lema 2. *Seja (M^4, g) um sóliton de Ricci gradiente shrinking com curvatura isotrópica posisitiva. Se $P = 0$, então M^4 é localmente conformemente flat.*

Demonstração. Para provar este fato, vamo analizar novamente as função usada na demonstração da Proposição 28, mas agora com a condição $P = 0$.

Com o que foi argumentado na proposição anterior, juntamente com a nova condição imposta sobre P, temos

$$0 = P \leq -S\left(S\sum_{i=1}^{3} a_i^2 - 12\sum_{i=1}^{3} a_i^3\right) - S\left(S\sum_{i=1}^{3} c_i^2 - 12\sum_{i=1}^{3} c_i^3\right) \leq 0,$$

donde segue,

$$S\sum_{i=1}^{3} a_i^2 - 12\sum_{i=1}^{3} a_i^3 = S\sum_{i=1}^{3} c_i^2 - 12\sum_{i=1}^{3} c_i^3 = 0.$$

Fazendo a mesma mudança de variáveis feita anteriormente, estamos sob a condição $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. Já foi mostrado na Proposição 28 que $f(x_1, x_2, x_3) \geq 0$, portanto todo ponto $p \in \mathbb{R}^3 \cap C'$ (i.e todo ponto $p \in \mathbb{R}^3$ satisfazendo as condições impostas pela curvatura isotrópica positiva) tal que $f(p) = 0$ deve ser um ponto de mínimo local.

Também já foi mostrado que se $x_i > 0, i = 1, 2, 3$ então a única possibilidade para mínimo local com $f(p) = 0$ é $p = (1, 1, 1)$. Por outro lado, se algum $x_i = 0$, então

$$\begin{cases} x_i = 0, \\ x_k = 3 - x_j. \end{cases}$$

E vale que

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{S^3}{18}(2x_j - 3)^2.$$

Logo, sob essas condições, temos

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \Longleftrightarrow x_j = \frac{3}{2}.$$

Portanto, os pontos que vão satisfazer essa possibilidade são $x_i = 0, x_j = x_k = \frac{3}{2}$. Como nossas condições implicam $x_3 \leq x_2 \leq x_1$, concluímos que a outra possibilidade de ponto q, com $f(q) = 0$, é o ponto $q = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$.

Lembrando que fizemos a seguinte mudança de variáveis $x_i = 1 - \frac{6}{S}a_i$. Se voltarmos as variáveis iniciais com os pontos p, q, obteremos os pontos candidatos

$$p' = (0,0,0),$$
$$q' = \left(-\frac{S}{12}, -\frac{S}{12}, \frac{S}{6}\right).$$

Note que as coordenadas de p' e q' são as possibilidades para os autovalores de W^+.
Por fim, analisamos os pontos usando a igualdade $A_i = a_i + \frac{S}{12}$ tendo em mente que A_1, A_2, A_3 são os autovalores da matriz A.
Em q' teríamos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{S}{4} \end{pmatrix}.$$

Mas isso não pode acontecer pois é uma contradição com o fato de M^4 ter curvatura isotrópica positiva.
Em p', vale

$$A = \begin{pmatrix} \frac{S}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{S}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{S}{12} \end{pmatrix}.$$

Concluímos assim que a única possibilidade é que se tenha $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ o que garante que $W^+ \equiv 0$. Análogamente prova-se que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ e portanto $W^- \equiv 0$.
Logo $W \equiv 0$ e portanto, M^4 é localmente conformemente flat. $\square$

Com esses resultados em mãos podemos nos concentrar na demonstração do teorema principal.

Teorema 4 (Teorema 1)**.** *Seja (M^4, g) um sóliton de Ricci gradiente shrinking completo com curvatura isotrópica positiva. Então o recobrimento universal de M^4 é $\mathbb{S}^4$ ou $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$.*

Demonstração. Já sabemos da Proposição 25 que, como $S \neq 0$, vale a seguinte equação de evolução

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\frac{|R_{ijkl}|^2}{S^2} = \frac{4P}{S^3} - \frac{2}{S^4}|S\nabla_p R_{ijkl} - R_{ijkl}\nabla_p S|^2 + \left\langle \nabla\left(\frac{|R_{ijkl}|^2}{S^2}\right), \nabla \log S^2 \right\rangle.$$

Vamos empregar uma técnica semelhante a usada na Proposição 27, mas nesse caso vamos analisar a equação de evolução das funções $u = \frac{|R_{ijkl}|}{S}$ e $T = \frac{R_{ijkl}}{S}$. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)u^2 &= 2u\frac{\partial}{\partial t}u - \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_j(\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_i(u^2)) \\
&= 2u\frac{\partial}{\partial t}u - \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_j(\sqrt{|g|}g^{ij}2u\partial_i u) \\
&= 2u\frac{\partial}{\partial t}u - \frac{1}{\sqrt{|g|}}(2u\partial_j(\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_i u) + 2g^{ij}\sqrt{|g|}\partial_j u\partial_i u) \\
&= 2u\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)u - 2|\nabla u|^2
\end{aligned}$$

reorganizando

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)u = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)u^2}{2u} + \frac{|\nabla u|^2}{u}.$$

Além disso, também vale

$$\begin{aligned}
\langle \nabla T, \nabla T\rangle &= \left\langle g^{st}\partial_s\left(\frac{R_{ijkl}}{S}\right)\partial_t, g^{mn}\partial_m\left(\frac{R_{ijkl}}{S}\right)\partial_n \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{S^2}(Sg^{st}\partial_s R_{ijkl}\partial_t - R_{ijkl}g^{st}\partial_s S\partial_t), \frac{1}{S^2}(Sg^{mn}\partial_m R_{ijkl}\partial_n - R_{ijkl}g^{mn}\partial_m S\partial_n) \right\rangle \\
&= \frac{1}{S^4}|S\nabla_p R_{ijkl} - R_{ijkl}\nabla_p S|^2
\end{aligned}$$

e

$$\langle \nabla u^2, \nabla \log S^2\rangle = 2u\langle \nabla u, \nabla \log S^2\rangle.$$

Organizando todas as equações, obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)u &= \frac{2P}{uS^3} - \frac{1}{uS^4}|S\nabla_p R_{ijkl} - R_{ijkl}\nabla_p S|^2 + \frac{1}{2u}\langle \nabla u^2, \nabla \log S^2\rangle + \frac{|\nabla u|^2}{u} \\
&= \frac{2P}{uS^3} + \frac{|\nabla u|^2 - |\nabla T|^2}{u} + \langle \nabla u, \nabla \log S^2\rangle
\end{aligned}$$

Note que $|T| = u$, a desigualdade de Kato garante que $|\nabla|T||^2 \leq |\nabla T|^2$, portanto

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)u \leq \frac{2P}{uS^3} + \langle \nabla u, \nabla \log S^2\rangle.$$

Assim como foi feito na Proposição 27, fixado um ponto $x_0 \in M$ vamos tomar uma função de corte η tal que

$$supp\eta \subseteq \{x \in M; d(x,x_0) \leq r\} \text{ e } |\nabla\eta| \leq \frac{C}{r}$$

Multiplicando a desigualdade na evolução da função u no fluco de Ricci por $ue^{-f+\log S^2}\eta^2$ e integrando sobre M obtemos

$$\int_M ue^{-f+\log S^2}\eta^2\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)u \leq \int_M ue^{-f+\log S^2}\eta^2\frac{2P}{uS^3}+\int_M ue^{-f+\log S^2}\eta^2\langle\nabla u,\nabla\log S^2\rangle.$$

Lançando mão da Proposição 22 e da fórmula de integração por partes em variedades sem bordo, encontramos

$$\begin{aligned}&\int_M ue^{-f+\log S^2}\eta^2\langle\nabla f,\nabla u\rangle+\int_M\langle\nabla u,\nabla(ue^{-f+\log S^2}\eta^2)\rangle\\&\quad\leq\int_M e^{-f+\log S^2}\eta^2\frac{2P}{S^3}+\int_M ue^{-f+\log S^2}\eta^2\langle u,\nabla\log S^2\rangle.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Note que

$$\begin{aligned}\langle\nabla u,\nabla(ue^{-f+\log S^2}\eta^2)\rangle &= e^{-f+\log S^2}\eta^2\langle\nabla u,\nabla u\rangle+u\langle\nabla(e^{-f+\log S^2}\eta^2),\nabla u\rangle\\&= e^{-f+\log S^2}\eta^2|\nabla u|^2+ue^{\log S^2}\eta^2\langle\nabla e^{-f},\nabla u\rangle+ue^{-f}\langle\nabla(e^{\log S^2}\eta^2),\nabla u\rangle\\&= e^{-f+\log S^2}\eta^2|\nabla u|^2-ue^{-f+\log S^2}\eta^2\langle\nabla f,\nabla u\rangle\\&\quad+ue^{-f+\log S^2}\eta^2\langle\nabla\log S^2,\nabla u\rangle+2ue^{-f+\log S^2}\eta\langle\nabla\eta,\nabla u\rangle.\end{aligned}$$

Com essa expressão em mão podemos voltar a desigualdade (4.4) a fim de obter

$$\int_M e^{-f+\log S^2}\eta^2|\nabla u|^2+2\int_M ue^{-f+\log S^2}\eta\langle\nabla\eta,\nabla u\rangle \leq \int_M\frac{2P}{S^3}e^{-f+\log S^2}\eta^2 \leq \int_M\frac{2P}{S^3}e^{-f+\log S^2},$$

e portanto

$$\frac{1}{2}\int_M e^{-f+\log S^2}\eta^2|\nabla u|^2-2\int_M\frac{P}{S}e^{-f} \leq -\frac{1}{2}\int_M e^{-f+\log S^2}\eta^2|\nabla u|^2-2\int_M ue^{-f+\log S^2}\eta\langle\nabla\eta,\nabla u\rangle.$$

Agora, novamente como na Proposição 27

$$0 \leq \left\langle\frac{1}{2}\eta\nabla u+u\nabla\eta,\frac{1}{2}\eta\nabla u+u\nabla\eta\right\rangle=\frac{1}{4}\eta^2|\nabla u|^2+u\eta\langle\nabla u\nabla\eta\rangle+u^2|\nabla\eta|^2,$$

reorganizando a desigualdade, obtemos

$$2u^2|\nabla\eta|^2 \geq -\frac{1}{2}\eta^2|\nabla u|^2-2u\eta\langle\nabla u,\nabla\eta\rangle.$$

Voltando a integral, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_M e^{-f+\log S^2}\eta^2|\nabla u|^2 - 2\int_M \frac{P}{S}e^{-f} &\leq \int_M 2u^2|\nabla\eta|^2 e^{-f+\log S^2}\\ &\leq 2\frac{C^2}{r^2}\int_M u^2 e^{-f+\log S^2}\\ &= \frac{2C^2}{r^2}\int_M |R_{ijkl}|^2 e^{-f}.\end{aligned}$$

Para prosseguir, vamos comparar $|R_{ijkl}|^2$ com $|Ric|^2$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}|R_{ijkl}|^2 = \frac{1}{2}\langle R,R\rangle = \frac{1}{2}tr(R^tR) &= \frac{1}{2}(tr(A^tA)+2tr(B^tB)+tr(C^tC))\\ &= \frac{1}{2}(\|A\|^2+2\|B\|^2+\|C\|^2).\end{aligned}$$

Segue da curvatura isotrópica ser positiva e da Proposição 17 que

$$\begin{aligned}-\frac{S}{4} \leq A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \frac{S}{4}\\ -\frac{S}{4} \leq C_1 \leq C_2 \leq C_3 \leq \frac{S}{4},\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}|R_{ijkl}|^2 &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{3S^2}{16}+\frac{3S^2}{16}\right)+\|B\|^2 \leq \frac{3S^2}{16}+4\|B\|^2\\ &= |Ric_0|^2+\frac{S^2}{4}-\frac{S^2}{4}+\frac{3S^2}{16}\\ &= |Ric|^2-\frac{S^2}{16}\\ &\leq |Ric|^2.\end{aligned}$$

Segue daí, que

$$0 \leq \frac{C^2}{r^2}\int_M 2|R_{ijkl}|^2 e^{-f} \leq \frac{C^2}{r^2}\int_M 16|Ric|^2 e^{-f} < \infty.$$

Logo, fazendo $r \to \infty$ concluímos que

$$\frac{1}{2}\int_M e^{-f+\log S^2}\eta^2|\nabla u|^2 - 2\int_M \frac{P}{S}e^{-f} \leq 0.$$

Observe que a primeira integral é não negativa e a segunda é não positiva, portanto a subtração dessas integrais, sendo não positiva só pode ser zero, ou seja,

$$\frac{1}{2}\int_M e^{-f+\log S^2}\eta^2|\nabla u|^2 - 2\int_M \frac{P}{S}e^{-f} = 0$$

e também

$$\frac{1}{2}\int_M e^{-f+\log S^2}\eta^2|\nabla u|^2 = 2\int_M \frac{P}{S}e^{-f} = 0,$$

o que garante que $P = 0$ e a função u é constante. Segue do Lema 2 que M^4 é localmente conformemente flat. Para concluir, segue dos resultados de [3], [12], [22], [27], [32] e [34] que se (M^n, g, f) é um sóliton de Ricci gradiente shrinking completo com $W \equiv 0$, então o recobrimento universal de M^n é $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Como PIC implica em $S > 0$, não podemos ter $\mathbb{R}^4$ e o resultado segue. $\square$

REFERÊNCIAS

[1] BISHOP, R. L.; GOLDBERG, S. I. **Tensor analysis on manifolds**. Dover Publications: New York, 1980. (Dover Books on Mathematics).

[2] BRENDLE, S.; SCHOEN, R. Manifolds with 1/4-pinched curvature are space forms. **Journal of the American Mathematical Society**, United States, v. 22, n. 1, p. 287–307, 2009.

[3] CAO, X.; WANG, B.; ZHANG, Z. On locally conformally flat gradient shrinking Ricci solitons. **Communications in Contemporary Mathematics**, Singapore, v. 13, n. 2, p. 269–282, 2011.

[4] CAO, H.-D.; ZHOU, D. On complete gradient shrinking Ricci solitons. **Journal of Differential Geometry**, United States, v. 85, n. 2, p. 175–186, 2010.

[5] CAO, H.-D.; CHEN, B.-L.; ZHU, X.-P. Recent developments on the Hamilton's Ricci Flow. **Surveys in Differential Geometry**, United States, v. 12, n. 1, p. 47–112, 2007.

[6] CAO, H.-D.; CHEN, Q. On Bach-flat gradient shrinking Ricci solitons. **Duke Mathematical Journal**, United States, v. 162, n. 6, p. 1149–1169, 2013.

[7] CAO, H.-D.; RIBEIRO JR., E.; ZHOU, D. Four-dimensional complete gradient shrinking Ricci solitons. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Germany, 2021.

[8] CHEN, B.-L. Strong uniqueness of the Ricci flow. **Journal of Differential Geometry**, United States, v. 82, n. 2, p. 363–382, 2009.

[9] CHEN, H. Pointwise 1/4-pinched 4-manifolds. **Annals of Global Analysis and Geometry**, Germany, v. 9, n. 2, p. 161–176, 1991.

[10] CHEN, X.; WANG, Y. On four-dimensional anti-self-dual gradient Ricci solitons. **The Journal of Geometric Analysis**, United States, v. 25, n. 2, p. 1335–1343, 2015.

[11] DO CARMO, M. P. **Geometria Riemanniana**. IMPA: Rio de Janeiro, 2015. (Projeto Euclides).

[12] EMINENTI, M.; LA NAVE, G.; MANTEGAZza, C. Ricci solitons: the equation point of view. **Manuscripta Mathematica**, Germany, v. 127, n. 3, p. 345–367, 2008.

[13] FELDMAN, M.; ILMANEN, T.; KNOPF, D. Rotationally symmetric shrinking and expanding gradient Kähler-Ricci solitons. **Journal of Differential Geometry**, United States, v. 65, n. 2, p. 169–209, 2003.

[14] HAMILTON, R. S. Four-manifolds with positive curvature operator. **Journal of Differential Geometry**, United States, v. 24, p. 153–179, 1986.

[15] HAMILTON, R. S. Three-manifolds with positive Ricci curvature. **Journal of Differential Geometry**, United States, v. 17, n. 2, p. 255–306, 1982.

[16] HAMILTON, R. S. The Ricci flow on surfaces, mathematics and general relativity. **Contemporary Mathematics**, Singapore, v. 71, p. 237–261, 1988.

[17] HAMILTON, R. S. The formation of singularities in the Ricci flow. **Surveys in Differential Geometry**, United States, v. 2, n. 1, p. 7–136, 1993.

[18] HAMILTON, R. S. Four-manifolds with positive isotropic curvature. **Communications in Analysis and Geometry**, United States, v. 5, n. 1, p. 1–92, 1997.

[19] IVEY, T. New examples of complete Ricci solitons. **Proceedings of the American Mathematical Society**, United States, v. 122, n. 1, p. 241–245, 1994.

[20] CHOW, B.; LU, P.; NI, L. **Hamilton's Ricci flow**. American Mathematical Society: United States, 2006. (Graduate Studies in Mathematics).

[21] NI, L.; WALLACH, N. On four-dimensional gradient shrinking solitons. **International Mathematics Research Notices**, United States, v. 2008, p. 13, 2008.

[22] NI, L.; WALLACH, N. On a classification of the gradient shrinking solitons. **Mathematical Research Letters**, United States, v. 15, p. 13, 2008.

[23] LI, X.; NI, L.; WANG, K. Four-dimensional gradient shrinking solitons with positive isotropic curvature. **International Mathematics Research Notices**, United States, v. 2018, n. 3, p. 949–959, 2016.

[24] LEE, J. M. **Introduction to smooth manifolds**. Springer: New York, 2012. (Graduate Texts in Mathematics 218).

[25] LEE, J. M. **Riemannian manifolds: an introduction to curvature**. Springer: New York, 1997. (Graduate Texts in Mathematics 176).

[26] MICALLEF, M. J.; MOORE, J. D. Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes. **Annals of Mathematics**, United States, v. 127, n. 1, p. 199–227, 1988.

[27] MUNTEANU, O.; SESUM, N. On Gradient Ricci solitons. **Journal of Geometric Analysis**, United States, v. 23, p. 539–561, 2011.

[28] NABER, A. Noncompact shrinking four solitons with nonnegative curvature. Germany: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2010.

[29] NGUYEN, H. T. Isotropic curvature and the Ricci flow. **International Mathematics Research Notices**, United States, v. 2010, n. 3, p. 536–558, 2010.

[30] PERELMAN, G. Ricci flow with surgery on three-manifolds. **arXiv preprint math/0303109**, 2003.

[31] PETERSEN, P. **Riemannian geometry**. Springer: New York, 1998. (Graduate Texts in Mathematics 171).

[32] PETERSEN, P.; WYLIE, W. On the classification of gradient Ricci solitons. **Geometry & Topology**, United Kingdom, v. 14, n. 4, p. 2277–2300, 2010.

[33] SESHADRI, H. Isotropic curvature: a survey. **Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie**, France, v. 26, p. 139–144, 2007.

[34] ZHANG, Z.-H. Gradient Shrinking Solitons with Vanishing Weyl Tensor. **Pacific Journal of Mathematics**, United States, v. 242, n. 1, p. 11, 2009.