



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA**

**CARLOS HENRIQUE LIMA DE MOURA**

**REGULARIDADE DE CONJUNTOS LIPSCHITZ NORMALMENTE  
MERGULHADOS**

**FORTALEZA**

**2023**

CARLOS HENRIQUE LIMA DE MOURA

REGULARIDADE DE CONJUNTOS LIPSCHITZ NORMALMENTE  
MERGULHADOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Singularidades.

Orientador: Prof. Dr. José Edson Sampaio.  
Coorientador: Prof. Dr. Eurípedes Carvalho da Silva.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- M885r Moura, Carlos Henrique Lima de.  
Regularidade de conjuntos Lipschitz normalmente mergulhados / Carlos Henrique Lima de Moura. –  
2023.  
47 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação  
em Matemática, Fortaleza, 2023.  
Orientação: Prof. Dr. José Edson da Silva.  
Coorientação: Prof. Dr. Eurípedes Carvalho da Silva.
1. Geometria Lipschitz. 2. Conjuntos Lipschitz normalmente mergulhados. 3. Cones tangentes no  
infinito. I. Título.

CDD 510

---

CARLOS HENRIQUE LIMA DE MOURA

REGULARIDADE DE CONJUNTOS LIPSCHITZ NORMALMENTE  
MERGULHADOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Singularidades.

Aprovada em: 29/11/2023.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. José Edson Sampaio (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Eurípedes Carvalho da Silva (Coorientador)  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - *Campus* Maracanaú  
(IFCE - *Campus* Maracanaú)

---

Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva  
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

À minha esposa e filhos, por sua capacidade de acreditar e investir em mim. Mãe, seu cuidado e dedicação foi que deram, em alguns momentos, a esperança para seguir. Pai, sua presença significou segurança e certeza de que não estou sozinho nessa caminhada.

## AGRADECIMENTOS

Esta é, sem dúvida a seção mais difícil deste trabalho e estará em constante mudança, algumas vezes pela memória que já não me é tão boa, outras pela felicidade constante em ser ajudado e conseqüentemente, a necessidade em aumentar as linhas escritas. Nenhuma palavra abaixo será suficiente para igualar meu verdadeiro sentimento de gratidão. Dessa forma, comecemos.

À Deus, meu refúgio e fortaleza. Toda honra e toda glória sejam dedicados ao seu nome. Ele que tantas vezes me resgatou da boca do leão trazendo-me de volta ao seu convívio. Mesmo indigno merecedor de todas as graças, sua misericórdia conduziu-me ao sonho que a muito havia deixado de lado e me mostrou que sempre houve um plano D'ele maior em minha vida. Bendito o que vem em nome do Senhor.

Aos meus pais, José Lima de Moura e Maria das Graças Lima de Moura que nunca mediram esforços para que eu tivesse todas as condições de vida que fossem necessárias, sendo sempre meus guias, exemplos de caráter e vida. Seu amor incondicional, sua atenção e seu exemplo guiam os meus passos. O suor dos seus rostos nunca foi em vão.

À minha esposa Ana Exnária Angelo Cordeiro, minha outra metade que me acompanha nesta jornada a mais de uma década. Mulher batalhadora e fiel companheira principalmente nos momentos mais difíceis, por muitas vezes a espinha dorsal do nosso lar. Mãe dos nossos filhos, Ananda Eloíze e Miguel Francisco. A vocês dedico a minha vida e entrego todo o meu amor. Todas as conquistas sempre serão nossas.

Aos meus irmãos, Diego, Caroline e João Pedro com quem compartilhei os maravilhosos anos de infância e juventude e cujo laço de fraternidade supera o laço consanguíneo.

Ao Prof. Dr. José Edson Sampaio e Prof. Dr. Eurípedes Carvalho da Silva que aceitaram a árdua missão de orientar-me neste trabalho e aos professores Dr. Alexandre Fernandes, Dr. Joserlan Perote por avaliarem este trabalho. Aos doutores Renato Targino e Lev Birbrair por todas as conversas e direcionamentos recebidos. Todos são verdadeiros ícones da Geometria Lipschitz, área de pesquisa principal deste trabalho e a qual pretendo seguir minha trajetória como pesquisador.

A todos jovens colegas do mestrado e doutorado em matemática, com quem tive a imensa satisfação de conhecer. Em especial, Breno, Alysson, Samuel, Karen, Vinicius, Rayanne, Diego Ponciano e Carlos Sérgio. Todos tem um futuro brilhante pela frente, seja na pesquisa em matemática ou nas áreas que desejem atuar profissionalmente.

Aos colegas da graduação em Matemática que viraram amigos e que embora não nos vejamos muito, possuem um lugar especial no meu coração: Paulo Ítalo, Diego Marques, Onézimo Cardoso, Thiago do Carmo, Régis Lopes, Lívia Santiago, Justino Cartaxo e Ridley Gadelha. A saudade dos bons tempos de juventude ainda permeiam

minhas lembranças com imenso saudosismo.

Aos colegas de IFCE que nestes 13 anos de instituição tive a grande honra de compartilhar o ambiente de trabalho e onde criamos laços de forte amizade, compartilhando momentos inesquecíveis: Luis Farias, João Henrique, Adriano Freitas, Wágner Sousa, Nonato Furtado, Moesio Sales, João Nunes, Lee Marx, Marcel Alves, Marcio Cordulino, Marcelo Parente, Herlânio Sousa, Luciano Costa, Marcel Ribeiro, Rodrigo Freitas, Jefferson Lima, Joelia, Marcus Túlio, Cícero Maia, Róbson Pontes, Tarcízio Filho, Milton Colares, Francisco Glauco, Clodomir Neto e Emanuel Mendonça (os dois últimos, amigos desde os tempos de faculdade) e a todos os outros que porventura tenha esquecido. Muito obrigado por tudo.

Finalizo por agradecer aos parentes e amigos que não estão mais neste mundo. *In memoriam* a minhas avós Carmelita e Josefa que cuidaram e me orientaram, foram suportes em todos os momentos. Aos meus avôs José e Francisco. Aos tios José e Onofre. Ao amigo de IFCE João Tércio. Ao professor Nelson do departamento de Estatística. O homem que além de profundo conhecedor da matemática me fez perceber sua veia cômica ao dizer que embora o espaço fosse de probabilidades, eu nunca encontraria uma probabilidade andando por aí, fato que deveras, nunca aconteceu.

A todos os alunos e ex-alunos de todos os lugares onde lecionei.

A todos os outros que porventura não estejam nessas folhas mas que estenderam-me a mão nos momentos difíceis ou agradáveis desta caminhada.

A todos vocês, meu muito obrigado.

*“Yo no creo en brujas. Pero que las hay, las hay”* (antigo ditado espanhol).



## RESUMO

Dizemos que um subconjunto  $X \subset \mathbb{C}^n$  é Lipschitz normalmente mergulhado no infinito, ou simplesmente, LNE no infinito, quando a métrica intrínseca é equivalente a métrica euclidiana, fora de conjuntos compactos. O objetivo deste trabalho é mostrar que sendo  $X$  subconjunto de  $\mathbb{C}^n$  analítico, fechado, com dimensão  $d$  pura, tal que o cone tangente no infinito de  $X$  é subespaço linear de dimensão  $d$  de  $\mathbb{C}^n$ . Então, se  $X$  é LNE no infinito temos que  $X$  é um subespaço linear afim de  $\mathbb{C}^n$ .

**Palavras-chave:** geometria Lipschitz; Lipschitz normalmente mergulhado; cones tangentes no infinito.

## ABSTRACT

We say a subset  $X \subset \mathbb{C}^n$  is Lipschitz normally embedded at infinity, or simply, LNE at infinity, when the inner metric is equivalent to euclidian metric, outer compact sets. The goal of this work is show that being  $X$  analytic, closed, pure  $d$ -dimensional subset of  $\mathbb{C}^n$ , such that the tangent cone at infinity of  $X$  is a  $d$ -dimensional linear subspace of  $\mathbb{C}^n$ . Then, if  $X$  is LNE at infinity we have  $X$  is an affine linear subspace of  $\mathbb{C}^n$ .

**Keywords:** Lipschitz geometry; Lipschitz normally embedded at infinity; tangent cones at infinity.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – $\beta$ -corneta . . . . .	18
Figura 2 – Cúspide real . . . . .	19
Figura 3 – Desigualdade triangular . . . . .	22
Figura 4 – Estimativa da métrica intrínseca . . . . .	24
Figura 5 – LNE . . . . .	27
Figura 6 – Link compacto LNE . . . . .	28
Figura 7 – Cones tangentes da cúspide complexa na origem e no infinito . . . . .	31

## LISTA DE SÍMBOLOS E NOTAÇÕES

$d_{in}^X$	Métrica intrínseca ao conjunto $X$
$d_{ext}^X$	Métrica exterior ao conjunto $X$
$C(X, p)$	Cone tangente a $X$ em $p$
$C(X, \infty)$	Cone tangente a $X$ no infinito
LNE	Conjunto Lipschitz normalmente mergulhado
$m(Z, p)$	Multiplicidade algébrica de $Z$ em $p$

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	12
2	PRELIMINARES . . . . .	13
2.1	Conjuntos analíticos complexos . . . . .	13
2.2	Aplicações Lipschitz . . . . .	14
2.3	Conjuntos Lipschitz normalmente mergulhados . . . . .	16
2.4	Cone tangente no infinito . . . . .	30
2.5	Multiplicidade relativa e grau de um conjunto analítico com- plexo . . . . .	37
3	RESULTADO PRINCIPAL . . . . .	39
3.1	Demonstração do resultado principal . . . . .	39
3.2	Aplicações a conjuntos algébricos complexos . . . . .	41
4	CONCLUSÃO . . . . .	43
	REFERÊNCIAS . . . . .	44

# 1 INTRODUÇÃO

Dizemos que um conjunto é Lipschitz normalmente mergulhado quando a métrica intrínseca é equivalente à métrica extrínseca. Esta terminologia foi inicialmente utilizada por [2]. Este trabalho desempenhou um papel fundamental na investigação da geometria Lipschitz.

Em 2016 [1] mostraram um resultado de regularidade de conjuntos analíticos complexos. Mais precisamente, os autores mostraram que se  $X$  é um subconjunto analítico complexo  $\mathbb{C}^n$  e  $X$  é subanaliticamente Lipschitz regular então  $X$  é um subvariedade suave. Em seguida Sampaio em [18] generaliza o resultado acima para conjuntos Lipschitz regular.

Em 2020 Fernandes e Sampaio em [9] fazem uma versão global(no infinito) de regularidade de conjuntos analíticos complexos. Eles mostram que se  $X \subset \mathbb{C}^n$  é um conjunto analítico complexo que possui um único cone tangente no infinito que é um plano e  $X$  é Lipschitz regular no infinito, então  $X$  é um subespaço linear de  $\mathbb{C}^n$ .

Em 2020 o estudo de conjuntos Lipschitz normalmente mergulhados vem se mostrando um tema quente em toda a comunidade matemática, destacamos [22], [19], [15],[11], [8], e [7]. Na direção de compreender os conjuntos LNE, Mendes e Sampaio em [15] apresentam um critério para determinar se um conjunto é LNE. Eles definiram a noção de conjuntos link Lipschitz normalmente mergulhado ou simplesmente LLNE e determinam que dado um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é LLNE se, e somente se,  $X$  é LNE.

Ainda na direção de apresentar resultados de regularidade Sampaio e Silva em [22] apresentaram um resultado tipo Bernstein para conjuntos conjunto algébrico complexo que são blow-esférico regulares no infinito.

O principal objetivo deste estudo consiste na análise detalhada e descritiva de resultados de regularidade de conjuntos Lipschitz normalmente mergulhados. Para alcançar tal propósito, empregaremos uma metodologia que abrangerá uma pesquisa bibliográfica quanto de exploração conceitual. A exposição do texto seguirá a abordagem adotada em [9].

Este trabalho esta dividido em três partes: No Capítulo 2 apresentaremos a linguagem e notação básica para a compreensão do texto, bem como definições e propriedades de geometria algébrica real e complexa. No Capítulo 3 será destinado ao resultado principal dessa dissertação, onde enunciaremos e demonstraremos nosso resultado de regularidade no infinito. Finalmente, no Capítulo 4 apresentaremos a conclusão do nosso trabalho.

## 2 PRELIMINARES

Apresentaremos nesta seção introdutória algumas ferramentas e resultados que vão servir de norte para o que vamos discutir ao longo do texto.

### 2.1 Conjuntos analíticos complexos

Um subconjunto  $Y$  de  $\mathbb{R}^n$  é chamado de subanalítico se para todo ponto  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  tem uma vizinhança  $U$  tal que  $U \cap Y$  é imagem de um conjunto semianalítica relativamente compacto de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  pela projeção canônica de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  sobre  $\mathbb{R}^n$ . Vejamos algumas definições elementares e suas propriedades:

**Definição 2.1.** Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é chamado semialgébrico, se existem polinômios  $f_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $i \in \{0, 1, \dots, N\}$  e  $j \in \{1, \dots, l\}$ , tais que

$$X = \bigcup_{i=1}^N \{x \in \mathbb{R}^n; f_{i0} = 0, f_{i1} > 0, \dots, f_{il} > 0\}.$$

**Definição 2.2.** Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é chamado semianalítico, se para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  existem um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  contendo  $x$ , e  $N \in \mathbb{N}$  e funções analíticas  $f_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $i \in \{0, 1, \dots, N\}$  e  $j \in \{1, \dots, l\}$ , tais que

$$X \cap U = \bigcup_{i=1}^N \{x \in \mathbb{R}^n; f_{i0} = 0, f_{i1} > 0, \dots, f_{il} > 0\}.$$

**Definição 2.3.** Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é chamado subanalítico, se para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  existe um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  contendo  $x$  tal que  $X \cap U$  é a projeção linear e própria de um conjunto semianalítico relativamente compacto  $Y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Uma função  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dita subanalítica, se  $\text{Graf}(f) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  é um conjunto subanalítico.

Os resultados apresentados a seguir valem para uma classe mais geral de conjuntos, ditos definíveis, no entanto iremos nos reduzir a categoria dos conjuntos semialgebricos. Alguns exemplos de conjuntos definíveis são os conjunto semialgebricos e semianalíticos.

**Proposição 2.1.** A imagem de um conjunto semialgébrico por uma aplicação semialgébrica é um conjunto semialgébrico.

*Prova.* Ver [4, p. 29] □

**Proposição 2.2.** A composição finita de aplicações semialgébricas é uma aplicação semialgébrica.

*Prova.* Ver [4, p. 28] □

**Corolário 2.1.** *Seja  $f := (f_1, \dots, f_n) : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é semialgebrica se e somente se, cada  $f_i : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  é semialgebrica para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .*

**Proposição 2.3.** *O fecho e o interior de um conjunto semialgebrico é um conjunto semialgebrico.*

*Prova.* Ver [4, p. 27] □

**Lema 2.1** (Lema de Monotonicidade). *Seja  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função semialgébrica. Então existem  $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k = b$  tais que, para cada  $i = 0, \dots, k-1$ , a restrição  $f|_{(a_i, a_{i+1})}$  é analítica e acontece algum dos casos a seguir:  $f|_{(a_i, a_{i+1})}$  é Constante, estritamente crescente ou estritamente decrescente.*

*Prova.* Ver [6, p. 15] □

**Lema 2.2** (Lema de Seleção da Curva). *Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  semialgébrico e  $x \in \mathbb{R}^n$  um ponto não isolado de  $\overline{X}$ . Então, existe uma aplicação semialgébrica contínua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\gamma(0) = x$  e  $\gamma((0, 1]) \subset X$ .*

*Prova.* Ver [4, p. 38] □

## 2.2 Aplicações Lipschitz

Dado um subconjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$ , temos que  $X$  pode ser visto, naturalmente, como um espaço métrico com a métrica induzida pela métrica Euclidiana de  $\mathbb{R}^n$ . Contudo, se quaisquer dois pontos de  $X$  podem ser conectados por um caminho em  $X$  que tem comprimento finito (neste caso, dizemos que  $X$  é um conjunto retificável por caminhos), então podemos munir  $X$  com a métrica geodésica (ou métrica intrínseca) dada por

$$d_{in}(x, y) = \inf \{l(\gamma); \gamma : [0, 1] \rightarrow X \text{ é um caminho conectando } x \text{ e } y\}.$$

Com isso, sendo  $f : X \rightarrow Y$  um homeomorfismo com  $X \subset \mathbb{R}^n$  e  $Y \subset \mathbb{R}^m$ , dizemos que  $f$  é um homeomorfismo bilipschitz extrínseco (com respeito a métrica Euclidiana) se existe  $K \geq 1$  tal que

$$\frac{1}{K} \|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq K \|x - y\|,$$

para todo  $x, y \in X$ .

Dizemos que  $f$  é um homeomorfismo bilipschitz intrínseco (com respeito a métrica geodésica) se  $X$  e  $Y$  são conjuntos retificáveis por caminhos e existe uma constante  $K \geq 1$  tal que

$$\frac{1}{K} d_{in}(x, y) \leq d_{in}(f(x), f(y)) \leq K d_{in}(x, y),$$



para todo  $x, y \in X$ .

**Proposição 2.4.** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}^n$  e  $Y \subset \mathbb{R}^m$  conjuntos retificáveis por caminhos. Se  $f : X \rightarrow Y$  é bilipschitz extrínseco, então  $f$  é bilipschitz intrínseco.*

*Prova.* Por definição, temos que  $d_{in}(x, y) = \inf \{l(\gamma); \gamma : [0, 1] \rightarrow X; \gamma(0) = x \text{ e } \gamma(1) = y\}$ . Por outro lado, seja  $P$  uma partição de  $[0, 1]$  e o comprimento de  $\gamma$  sobre a partição é  $l_P(\gamma) := l(\gamma; P) = \sum_{i=1}^k \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$ . Assim,

$$l(\gamma) = \sup_P \left\{ \sum_{i=1}^k \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|; P \in \mathcal{P} \right\}$$

onde  $\mathcal{P}$  é o conjunto de todas as partições de  $[0, 1]$ . Por hipótese, temos que:

$$\frac{1}{k} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leq \|f(\gamma(t_i)) - f(\gamma(t_{i-1}))\|.$$

Então,

$$\begin{aligned} \sup_P \left\{ \sum_i \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|; P \in \mathcal{P} \right\} &\leq \sup_P \left\{ \sum_{i=1}^n k \|f(\gamma(t_i)) - f(\gamma(t_{i-1}))\| \right\} \\ &= k \sup_P \left\{ \sum_i \|f(\gamma(t_i)) - f(\gamma(t_{i-1}))\| \right\} \end{aligned}$$

tomando o ínfimo em ambos os membros, temos

$$\inf_P \sup \left\{ \sum_i \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \right\} \leq k \inf_P \sup \left\{ \sum_i \|f(\gamma(t_i)) - f(\gamma(t_{i-1}))\| \right\}$$

isto é,  $d_{in}(x, y) \leq k d_{in}(f(x), f(y))$ . A desigualdade contrária é análoga.  $\square$

Agora iremos definir o conjuntos de todas as curvas de classe  $C^1$  por partes conectando  $x$  a  $y$  em  $\Omega$ . Denotamos tal conjunto por:

$$\Omega(x, y) := \{\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega; \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \text{ e } \gamma \text{ de classe } C^1 \text{ por partes}\}.$$

**Lema 2.3.** *Seja  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação de classe  $C^1$  definida no aberto e conexo  $\Omega$ . Então  $\Omega(f(x), f(y)) = f(\Omega(x, y))$ , onde  $f(\Omega(x, y)) = \{f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow f(\Omega); \gamma \in \Omega(x, y)\}$*

*Prova.* É obvio que  $f(\Omega(x, y)) \subset \Omega(f(x), f(y))$ .  $\square$

**Proposição 2.5.** *Seja  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação de classe  $C^1$  definida no conjunto conexo e aberto  $\Omega$ . Se  $\|f'(x)\| \leq M$  para todo  $x \in \Omega$ , então  $f$  é uma aplicação Lipschitz com respeito a métrica intrínseca.*

*Prova.* Sejam  $x, y \in \Omega$  dois pontos quaisquer. Segue do Teorema 36 em [14] que  $\Omega$  é conexo por caminhos. Sendo  $f$  uma aplicação continua, segue que  $f(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$  é conexo por caminhos. Assim, seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  um caminho ligando  $x$  à  $y$  tal que  $l(\gamma) =$

$\int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt$ . Defina  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  um caminho ligando  $f(x)$  à  $f(y)$  dado por  $\alpha(t) = f(\gamma(t))$ , assim temos que

$$\begin{aligned}
 d_{in}(f(x), f(y)) &= \inf_{\alpha \in \Omega(f(x), f(y))} \int_c^d \|\alpha'(t)\| dt \\
 &= \inf_{\gamma \in \Omega(x, y)} \int_0^1 \|(f \circ \gamma)'(t)\| dt \\
 &= \inf_{\gamma \in \Omega(x, y)} \int_0^1 \|f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\| dt \\
 &\leq \inf_{\gamma \in \Omega(x, y)} \int_0^1 \|f'(\gamma(t))\| \|\gamma'(t)\| dt \\
 &\leq M \inf_{\gamma \in \Omega(x, y)} \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt \\
 &= M d_{in}(x, y).
 \end{aligned}$$

Provando que  $f$  é uma aplicação Lipschitz com respeito a métrica intrínseca. □

### 2.3 Conjuntos Lipschitz normalmente mergulhados

A seguir, apresentaremos uma classe de subconjuntos do espaço Euclidiano comumente referidos como conjuntos Lipschitz normalmente mergulhados. Essa classe de conjuntos foi inicialmente introduzida em [2]. Esta temática tem sido objeto de estudo por vários grupos de pesquisa em todo o mundo, como evidenciado por trabalhos recentes, tais como [19], [15] e [9].

**Definição 2.4.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $X$  é Lipschitz normalmente mergulhado, simplesmente LNE, se existe uma constante  $K \geq 1$  tal que para todo  $p, q \in X$ ,*

$$d_{in}(p, q) \leq K d_{ext}(p, q).$$

Vejamos alguns exemplos de subconjuntos que são Lipschitz normalmente mergulhados.

**Exemplo 2.1.** *Qualquer subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$  é Lipschitz normalmente mergulhado. Pois  $d_{in}(p, q) = d_{ext}(p, q)$ .*

**Exemplo 2.2.** *Ao considerarmos as mesmas hipóteses de 2.5, se  $\Omega$  é LNE então  $f$  é Lipschitz com respeito a métrica extrínseca. De fato, como já vimos, sendo  $\Omega$  conjunto Lipschitz normalmente mergulhado, temos que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq d_{in}(f(x), f(y)) \leq M d_{in}^X(x, y) \leq MC \|x - y\|.$$

**Exemplo 2.3.** *Toda superfície regular compacta em  $\mathbb{R}^3$  é Lipschitz normalmente mergulhada.*

*Prova.* Veja a Proposição 2.7 a seguir. □

**Exemplo 2.4.** *Seja  $H_\beta := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z^{2\beta}; 1 \leq \beta \in \mathbb{Q}\}$  uma superfície singular de  $\mathbb{R}^3$ . Essa superfície é chamada de  $\beta$ -corneta.  $H_\beta$  é Lipschitz normalmente mergulhado para todo  $\beta \in \mathbb{Q}$ . Veja a figura 1.*

*De fato, dados  $p, q \in H_\beta$  separemos a demonstração em 3 casos:*

- *Caso 1:  $p, q \in H_\beta \cap \mathbb{S}_t^2$  para algum  $t > 0$ , onde  $\mathbb{S}_t^2 = \{w \in \mathbb{R}^3; \|w\| = t\}$ .*

*Neste caso, observe que*

$$d_{in}^{H_\beta}(p, q) \leq \pi \|p - q\| = \pi d_{ext}^{H_\beta}(p, q).$$

*Logo para  $p, q \in H_\beta \cap \mathbb{S}_t^2$  vale a equivalência das métricas.*

- *Caso 2: Seja  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow H_\beta$  uma geodésica de  $H_\beta$  e tomemos  $p, q \in \gamma(-\varepsilon, \varepsilon)$ . Assim, também temos  $d_{in}^{H_\beta}(p, q) = \ell(\gamma) \big|_p^q \leq C \|p - q\| = C d_{ext}^{H_\beta}(p, q)$ ,  $C > 0$ . Logo, também vale a equivalência entre as métricas.*
- *Caso 3:  $p$  e  $q$  não estão no mesmo link nem na mesma geodésica.*  
*Neste caso, sejam  $t_1 > t_0 > 0$  e suponhamos que  $p \in H_\beta \cap \mathbb{S}_{t_0}$  e  $q \in H_\beta \cap \mathbb{S}_{t_1}$ . Seja também  $\gamma_p : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow H_\beta$  a geodésica de  $H_\beta$  que contém  $p$ . Agora, seja  $p' \in \gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \cap (H_\beta \cap \mathbb{S}_{t_1})$ . Assim pela desigualdade triangular,*

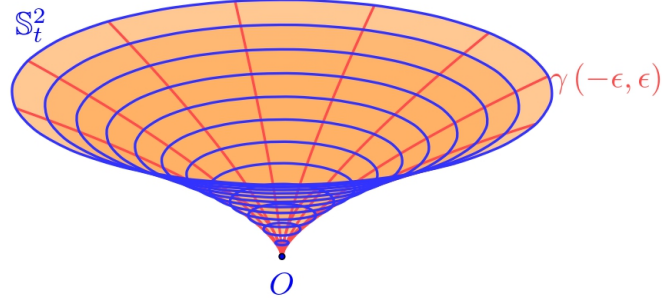
$$d_{in}^{H_\beta}(p, q) \leq d_{in}^{H_\beta}(p, p') + d_{in}^{H_\beta}(p', q)$$

*Assim, pelos Casos 1 e 2 temos,*

$$d_{in}^{H_\beta}(p, q) \leq (2\pi + C) d_{ext}^{H_\beta}(p, q).$$

*Portanto, concluímos que  $H_\beta$  é Lipschitz normalmente mergulhado.*

**Observação 2.1.** *O exemplo acima decorre imediatamente do Teorema de Mendes-Sampaio (Teorema 3.1 em [15]) haja visto que mostramos que  $H_\beta \cap \mathbb{S}_t^2$  é  $2\pi$  LNE ou seja  $H_\beta$  é LLNE em 0.*

Figura 1 –  $\beta$ -corneta

**Fonte:** Elaborada pelo autor

Para exemplos de subconjuntos que não são Lipschitz normalmente mergulhado, destacamos a cúspide.

**Exemplo 2.5.** Seja  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^3 = y^2\}$  a cúspide real.  $C$  não é Lipschitz normalmente mergulhado.

*Prova.* De fato, primeiro consideramos uma parametrização da cúspide dada por  $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ . Considere dois pontos simétricos da cúspide em relação ao eixo da abcissa,  $p = (t^2, t^3)$  e  $q = (t^2, -t^3)$ . Veja a representação na figura 2. Assim,

$$d_{ext}(p, q) = \|p - q\| = \sqrt{(t^2 - t^2)^2 + (t^3 + t^3)^2} = 2|t|^3.$$

Por outro lado,

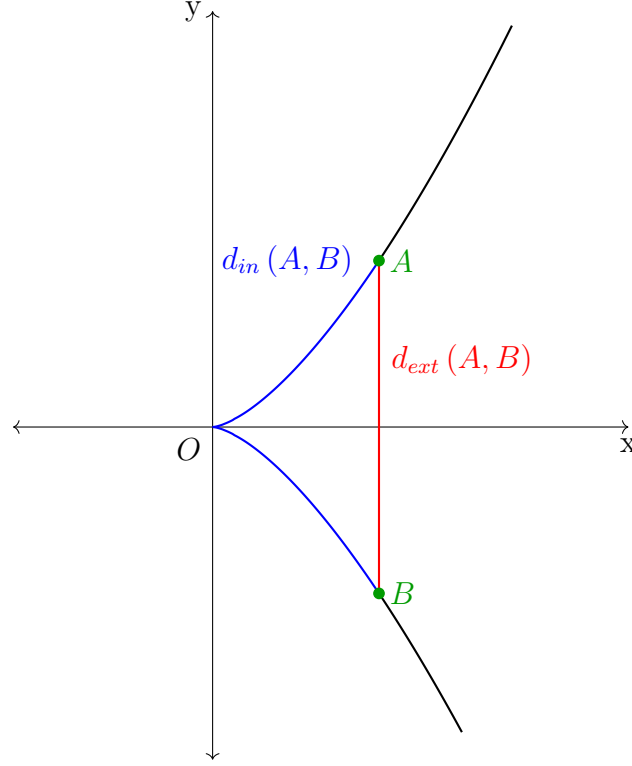
$$\begin{aligned} d_{in}(p, q) &= 2 \int_0^t \|\gamma'(s)\| ds = \int_0^t \|(2s, 3s^2)\| ds = \int_0^t \sqrt{4s^2 + 9s^4} ds \\ &= s \int_0^t \sqrt{4 + 9s^2} ds = \dots = 2|t|^2 + o(t^2). \end{aligned}$$

Assim, caso a cúspide fosse Lipschitz normalmente mergulhada, existiria uma constante  $K \geq 1$  tal que  $d_{in}(p, q) \leq K d_{ext}(p, q)$  para todo  $p, q \in C$ . Logo teríamos que o quociente  $\frac{d_{in}(p, q)}{d_{ext}(p, q)} \leq K$  seria limitado. Por outro lado,

$$\frac{d_{in}(p, q)}{d_{ext}(p, q)} = \frac{2|t|^2 + o(t^2)}{2|t|^3} \rightarrow +\infty,$$

quando  $t \rightarrow 0$ . Consequentemente, o quociente não é limitado e portanto a cúspide não é Lipschitz normalmente mergulhada.  $\square$

Figura 2 – Cúspide real



**Fonte:** Elaborada pelo autor

**Proposição 2.6.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto semialgébrico. A métrica intrínseca induz em  $X$  a mesma topologia induzida de  $\mathbb{R}^n$ .*

*Prova.* Primeiro, note que dado  $\epsilon > 0$ , temos que  $\|\cdot\| \leq d_{in}(\cdot, \cdot) < \epsilon$  implica que  $B_\epsilon^{d_{in}}(x) \subset B_\epsilon(x)$ , onde  $B_\epsilon^{d_{in}}(x)$  e  $B_\epsilon(x)$  são as bolas nas métricas  $d_{in}$  e  $d_{ext}$ , respectivamente.

Reciprocamente, seja  $y \in B_{r_0}(x_0)$ , onde  $r_0 = \frac{r}{1+\epsilon}$ , para algum  $r > 0$  dado. Assim  $\|y - x_0\| < r_0$ . Por um teorema em [12], existem subconjuntos analíticos  $X_1, \dots, X_r$  e  $\epsilon > 0$  tais que:

1.  $X = \bigcup_{i=1}^k X_i$ ;
2. Cada  $X_i$  é  $(1 + \epsilon)$ -LNE.

Assim,

$$d_{in}^X(y, x_0) \leq d_{in}^{X_j}(y, x_0) \leq (1 + \epsilon)\|y - x_0\| = r.$$

Portanto, as duas métricas intrínseca e extrínseca geram a mesma topologia, uma vez que

$$B_\epsilon^{d_{in}}(x) \subset B_\epsilon(x) \subset B_{\epsilon_0}^{d_{in}}(x).$$

Note ainda que provamos que  $d_{in}^X$  é uma função contínua. □

**Definição 2.5.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $X$  é localmente Lipschitz normalmente mergulhado em  $p \in X$ , se existe uma vizinhança  $U \subset X$  de  $p$  tal que  $U$  é Lipschitz normalmente mergulhado.*

É claro que se  $X$  é Lipschitz normalmente mergulhado implica que  $X$  é localmente Lipschitz normalmente mergulhado. A recíproca do resultado acima não é verdadeira. Por exemplo a curva complexa  $X := \{y - x^2 = 0\}$  é localmente LNE para todo  $p \in X$  mas não é globalmente LNE. O próximo resultado afirma que toda subvariedade compacta de  $\mathbb{R}^n$  é LNE.

**Proposição 2.7.** *Seja  $M^k \subset \mathbb{R}^n$  uma subvariedade conexa. Se  $M^k$  é compacta, então  $M^k$  é Lipschitz normalmente mergulhado.*

*Prova.* Nossa prova será dividida em dois passos:

**Afirmção 1:**  $M^k$  é localmente Lipschitz normalmente mergulhado.

*Demonstração da afirmação 1.* Seja  $\psi : V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U \subset M^k \subset \mathbb{R}^n$  uma parametrização local e definimos  $\varphi : U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$  a aplicação inversa de  $\psi$  (podemos escolher  $V = B(\rho, r)$ , bola aberta). Sendo  $\psi$  bilipschitz, temos

$$k d_{ext}^V(p, q) \leq d_{ext}^U(\psi(p), \psi(q)) \leq \tilde{k} d_{ext}^V(p, q).$$

Dessa desigualdade, segue que

$$k d_{in}^V(p, q) \leq d_{in}^U(\psi(p), \psi(q)) \leq \tilde{k} d_{in}^V(p, q).$$

Assim,

$$\begin{aligned} d_{in}^U(\psi(p), \psi(q)) &\leq \tilde{k} d_{in}^V(p, q) = \tilde{k} d_{ext}^V(p, q) \\ &\leq \tilde{k} d_{ext}^U(\varphi(\psi(p)), \varphi(\psi(q))) \\ &\leq \tilde{k} c d_{ext}^U(\psi(p), \psi(q)). \end{aligned}$$

□

**Afirmção 2:** Se  $M^k$  é localmente Lipschitz normalmente mergulhado, então  $M^k$  é Lipschitz normalmente mergulhado.

*Demonstração da afirmação 2.* Para cada  $p \in M^k$ , seja  $U_p$  uma vizinhança Lipschitz normalmente mergulhada de  $p$  e seja  $K_p$  a constante de Lipschitz. Seja  $\{U_p\}_{p \in M^k}$  uma cobertura de  $M^k$  por vizinhança como acima. Desde que  $M^k$  é compacto, segue do Teorema de Borel-Lebesgue (ver Teorema 23 em [14, p. 48]) que podemos extrair uma subcobertura finita  $\{U_{p_i}\}_{i=1}^n$  família. Agora tome  $K = \max_i \{K_{p_i}\}$ , daí considere a aplicação

$$f(p, q) := \frac{d_{in}(p, q)}{d_{ext}(p, q)} : (M^k \times M^k) \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R},$$

onde  $\Delta$  é o conjunto diagonal de  $M^k \times M^k$ . Agora, tome uma vizinhança  $U \subset \bigcup_{i=1}^n U_{p_i} \times U_{p_i}$

da diagonal  $\Delta$ . Então  $f$  é uma função contínua no conjunto compacto  $(M^k \times M^k) \setminus U$ , e portanto limitada no compacto  $(M^k \times M^k) \setminus U$  por uma constante  $K_1 > 0$ . Finalmente, desde que  $U \subset \bigcup_{i=1}^n U_{p_i} \times U_{p_i}$ , temos que  $f$  é limitada por  $K$  em  $U$ . Consequentemente,  $f(p, q) \leq \bar{K}$ , onde  $\bar{K} = \max\{K, K_1\}$ . Portanto,

$$d_{in}^U(p, q) \leq \bar{K} d_{ext}^U(p, q),$$

para todo  $p, q \in M^k$ . □

Finalizando a prova do teorema. □

Nessa seção, construiremos novos espaços Lipschitz normalmente mergulhado a partir de espaços Lipschitz normalmente mergulhados. O primeiro é o caso dos espaços de produto.

**Proposição 2.8** (Proposição 2.6 em [11]). *Sejam  $X \subset \mathbb{R}^n$  e  $Y \subset \mathbb{R}^m$ . Então,  $X \times Y \subset \mathbb{R}^{n+m}$  é Lipschitz normalmente mergulhado, se e somente se,  $X$  e  $Y$  são Lipschitz normalmente mergulhados.*

*Prova.* Primeiro assumimos que  $X$  e  $Y$  são Lipschitz normalmente mergulhados, isto é, existem constantes  $K_X$  e  $K_Y$  tais que

$$d_{in}^X(a, b) \leq K_X d_{ext}^X(a, b),$$

e

$$d_{in}^Y(c, d) \leq K_Y d_{ext}^Y(c, d),$$

para todo  $a, b \in X$  e  $c, d \in Y$ . Agora tomemos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  dois pontos arbitrários em  $X \times Y$ . Aplicando a desigualdade triangular a métrica  $d_{in}^{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2))$  temos que

$$d_{in}^{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq d_{in}^{X \times Y}((x_1, y_1), (x_1, y_2)) + d_{in}^{X \times Y}((x_1, y_2), (x_2, y_2)). \quad (1)$$

Agora, note que os pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_1, y_2)$  estão na mesma fibra  $\{x_1\} \times Y$ . Consequentemente,

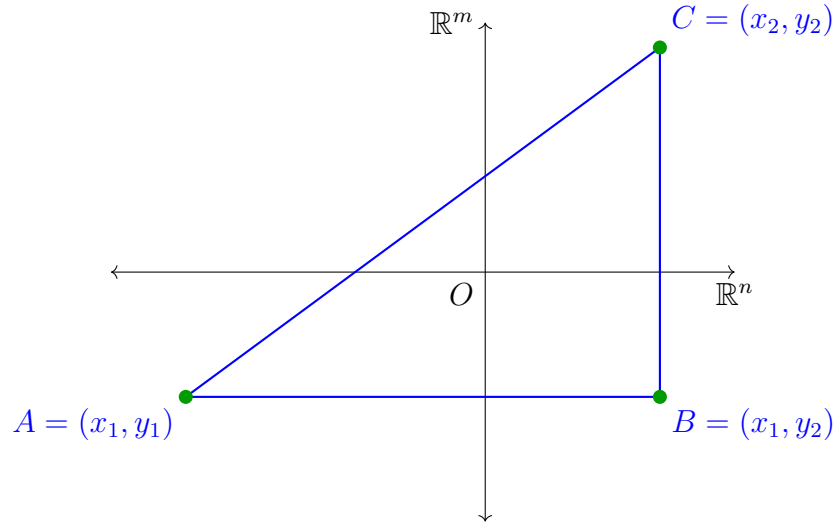
$$d_{in}^{X \times Y}((x_1, y_1), (x_1, y_2)) \leq d_{in}^Y(y_1, y_2). \quad (2)$$

Analogamente, o mesmo vale para

$$d_{in}^{X \times Y}((x_1, y_2), (x_2, y_2)) \leq d_{in}^X(x_1, x_2). \quad (3)$$

A figura 3 a seguir representa geometricamente esse argumento. Segue da definição de

Figura 3 – Desigualdade triangular



**Fonte:** Elaborada pelo autor

conjunto Lipschitz normalmente mergulhados e das desigualdades (3) e (2) que:

$$\begin{aligned} d_{in}^{X \times Y}((x_1, y_1), (x_1, y_2)) &\leq d_{in}^Y(y_1, y_2) \\ &\leq K_Y d_{ext}^Y(y_1, y_2). \end{aligned} \quad (4)$$

e

$$\begin{aligned} d_{in}^{X \times Y}((x_1, y_1), (x_1, y_2)) &\leq d_{in}^X(x_1, x_2) \\ &\leq K_X d_{ext}^X(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (5)$$

Agora é claro que (veja novamente a figura 3)

$$d_{ext}^{X \times Y}((x_1, y_1), (x_1, y_2)) = d_{ext}^Y(y_1, y_2), \quad (6)$$

e

$$d_{ext}^{X \times Y}((x_1, y_2), (x_2, y_2)) = d_{ext}^X(x_1, x_2). \quad (7)$$

Também, temos que

$$d_{ext}^{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2))^2 = d_{ext}^Y(y_1, y_2)^2 + d_{ext}^X(x_1, x_2)^2.$$

Segue da definição de métrica produto que

$$d_{ext}^{X \times Y}((x_1, y_1), (x_1, y_2)) \leq d_{ext}^{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)), \quad (8)$$

e

$$d_{ext}^{X \times Y}((x_1, y_2), (x_2, y_2)) \leq d_{ext}^{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)). \quad (9)$$



Daí segue que,

$$\begin{aligned}
d_{in}^{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\stackrel{(1)}{\leq} d_{in}^{X \times Y}((x_1, y_1), (x_1, y_2)) + d_{in}^{X \times Y}((x_1, y_2), (x_2, y_2)) \\
&\stackrel{(4)}{\leq} d_{in}^Y(y_1, y_2) + d_{in}^X(x_1, x_2) \\
&\leq K_Y d_{ext}^Y(y_1, y_2) + K_X d_{ext}^X(x_1, x_2) \\
&\stackrel{6}{=} K_Y d_{ext}^{X \times Y}((x_1, y_1), (x_1, y_2)) + K_X d_{ext}^{X \times Y}((x_1, y_2), (x_2, y_2)) \\
&\stackrel{(9)}{\leq} K_Y d_{ext}^{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + K_X d_{ext}^{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \\
&\leq (K_X + K_Y) d_{ext}^{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)).
\end{aligned}$$

Reciprocamente, assumimos que  $X \times Y$  é Lipschitz normalmente mergulhado.

Agora tomemos dois pontos  $p, q \in X$  e consideramos  $\gamma_X: [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $\gamma_X(0) = p$  e  $\gamma_X(1) = q$ . Agora considere os pontos  $(p, 0), (q, 0) \in X \times Y$  e seja  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X \times Y$  dada por  $\gamma(t) = (\gamma_X(t), \gamma_Y(t))$ , onde  $\gamma_Y: [0, 1] \rightarrow Y$  é um caminho em  $Y$ . Agora note que,  $l(\gamma) \geq l(\gamma_X)$ , consequentemente,

$$d_{in}^X(p, q) \leq d_{in}^{X \times Y}((p, 0), (q, 0)).$$

Por hipótese, temos que  $X \times Y$  é normalmente mergulhado. Logo, existe uma constante  $K$  tal que

$$d_{in}^{X \times Y}((p, q), (\bar{p}, \bar{q})) \leq K d_{ext}^{X \times Y}((p, q), (\bar{p}, \bar{q})).$$

Pela identidade (7) segue que  $d_{ext}^{X \times Y}((p, c_0), (q, c_0)) = d_{ext}^X(p, q)$ . Portanto,

$$\begin{aligned}
d_{in}^X(p, q) &\leq K d_{in}^{X \times Y}((p, 0), (q, 0)) \\
&\leq K d_{ext}^{X \times Y}((p, 0), (q, 0)) \\
&= K d_{ext}^X(p, q).
\end{aligned}$$

Provando que  $X$  é Lipschitz normalmente mergulhado. Para provar  $Y$  é análogo.  $\square$

Para o próximo resultado, consideremos as definições a seguir.

**Definição 2.6.** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}^n$  e  $Y \subset \mathbb{R}^m$ . Diremos que  $X$  e  $Y$  são bilipschitz homeomorfos (ou simplesmente, lipeomorfos) no infinito se, existem  $K \subset \mathbb{R}^n$  e  $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^m$  compactos e um homeomorfismo bilipschitz  $\phi: X \setminus K \rightarrow Y \setminus \tilde{K}$ .*

**Definição 2.7.** *Um subconjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é chamado Lipschitz regular no infinito, se  $X$  e  $\mathbb{R}^k$  são lipeomorfos no infinito, para algum  $k \in \mathbb{N}$ .*

O próximo resultado nos dá uma condição suficiente para que um conjunto seja LNE. Destacamos que a nossa demonstração é totalmente baseada em [9].

**Proposição 2.9** (Proposição 2.7 em [9]). *Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  fechado, ilimitado e Lipschitz regular no infinito. Então existe um compacto  $K \subset \mathbb{R}^n$  tal que cada componente conexa de  $X \setminus K$  é Lipschitz normalmente mergulhada.*

*Prova.* . Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  fechado, não limitado e Lipschitz regular no infinito. Logo, existem compactos  $K_1 \subset \mathbb{R}^k$ ,  $K_2 \subset \mathbb{R}^n$  e um lipeomorfismo  $\psi : \mathbb{R}^k \setminus K_1 \rightarrow X \setminus K_2$ . Sendo  $K_1$  compacto, existe uma bola fechada euclidiana de raio  $R > 0$ ,  $B_R$  centrada na origem contendo  $K_1$ , logo  $\mathbb{R}^k \setminus B_r \supset \mathbb{R}^k \setminus K_1$ , assim,  $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^k \setminus B_r \rightarrow X \setminus K_2$  seria a restrição, de  $\psi$  a  $\mathbb{R}^k \setminus B_r$ ,  $\tilde{\psi} \equiv \psi|_{\mathbb{R}^k \setminus B_r} : \mathbb{R}^k \setminus B_r \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus K_2$ . Ou seja, sem perda de generalidade, podemos supor que  $K_1 = B_r$ . Denotemos,  $Y = \mathbb{R}^k \setminus B_r$  e  $Z = X \setminus K_2$ . Separemos em dois casos:

- Caso 1:  $k > 1$ . Sendo  $\psi$  bilipschitz existem constantes positivas  $\lambda_1 < \lambda_2$  tais que,

$$\lambda_1 d_{ext}^Y(p, q) \leq d_{ext}^Z(\psi(p), \psi(q)) \leq \lambda_2 d_{ext}^Y(p, q), \forall p, q \in Y.$$

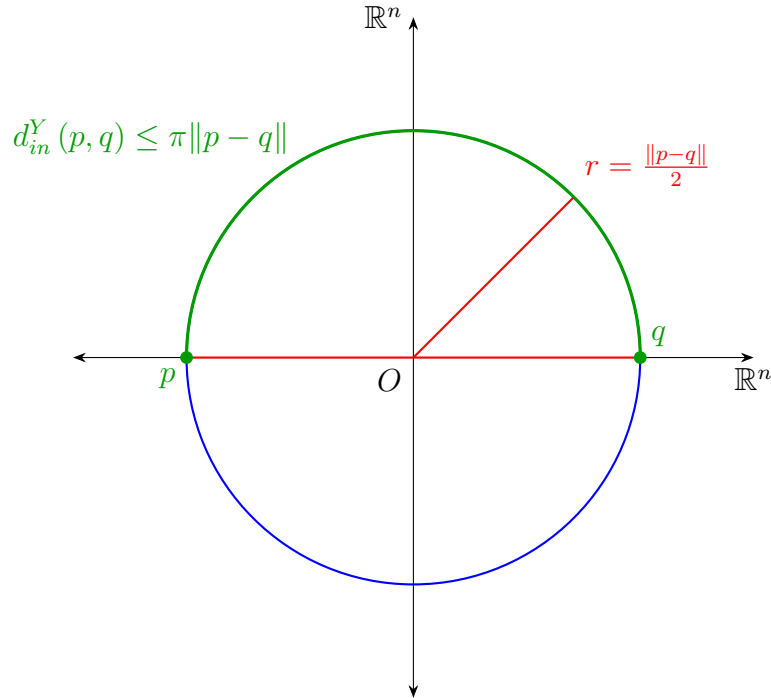
Assim,

$$\lambda_1 d_{in}^Y(p, q) \leq d_{in}^Z(\psi(p), \psi(q)) \leq \lambda_2 d_{in}^Y(p, q), \forall p, q \in Y.$$

Como  $d_Y$  é ínfimo dos comprimentos de arco de curvas que passam por  $p$  e  $q$ , em particular,  $d_{in}^Y(p, q)$  será menor que o comprimento do caminho semicircunferência de raio  $\|p - q\|/2$  ou seja,  $d_Y(p, q) \leq \pi d_{ext}^Y(p, q)$ ,  $\forall p, q \in Y$  (Veja a figura 4).

A figura a seguir representa geometricamente esse argumento.

Figura 4 – Estimativa da métrica intrínseca



**Fonte:** Elaborada pelo autor

Daí,

$$d_{in}^Z(\psi(p), \psi(q)) \leq \frac{\lambda_2 \pi}{\lambda_1} d_{ext}^Y(\psi(p), \psi(q)), \forall p, q \in Y.$$

Portanto,

$$d_{in}^Z(x, y) \leq \frac{\lambda_2 \pi}{\lambda_1} d_{ext}^Z(x, y), \quad \forall x, y \in Z.$$

Ou seja,  $Z$  é Lipschitz normalmente mergulhado. E isto mostra o primeiro caso.

- Caso 2:  $k = 1$ . Seja  $K_1 \subset \mathbb{R}$  compacto. Então  $\mathbb{R} \setminus K_1$  tem duas componente conexas  $Y_1$  e  $Y_2$ . Claramente,  $Y_1$  e  $Y_2$  são semirretas ou segmentos limitados, e portanto, para cada  $i = 1, 2$  temos,  $d_{Y_i}(p, q) \leq |p - q|$ . Do mesmo modo do feito para o caso anterior, temos,

$$d_{Z_i}(x, y) \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} |x - y|, \quad \forall x, y \in Z_i,$$

onde  $Z_1 = \psi(Y_1)$  e  $Z_2 = \psi(Y_2)$  são componentes conexas de  $Z$ .

Portanto, a proposição está provada.  $\square$

**Definição 2.8.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $X$  é Lipschitz normalmente mergulhado no infinito se existe  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto tal que  $X \setminus K$  é Lipschitz normalmente mergulhado. Ou seja, existe  $\lambda > 0$  tal que,*

$$d_{in}^{X \setminus K}(x, y) \leq \lambda d_{ext}(x, y), \quad \forall x, y \in X \setminus K$$

**Corolário 2.2** (Corolário 2.9 em [9]). *Seja  $X \subset \mathbb{C}^n$  subconjunto algébrico complexo. Se  $X$  é Lipschitz regular no infinito, então  $X$  é Lipschitz normalmente mergulhado (ou simplesmente, LNE) no infinito.*

A seguir apresentaremos outro resultado relevante na geometria Lipschitz.

**Proposição 2.10.** *Seja  $f: X \rightarrow Y$  um homeomorfismo bilipschitz extrínseco. Então,  $X$  é Lipschitz normalmente mergulhado se, e somente se,  $Y$  é Lipschitz normalmente mergulhado.*

*Prova.* Assumimos que  $Y$  é Lipschitz normalmente mergulhado. Como  $f: X \rightarrow Y$  é bilipschitz com respeito a métrica extrínseco, isto é, existe uma constante  $K > 0$  tal que

$$\frac{1}{K} d_{ext}^X(x, y) \leq d_{ext}^Y(f(x), f(y)) \leq K d_{ext}^X(x, y).$$

Pela Proposição 2.4 temos que

$$\frac{1}{K} d_{in}^X(x, y) \leq d_{in}^Y(f(x), f(y)) \leq K d_{in}^X(x, y).$$

Agora sejam  $x, y \in X$ , pela bijetividade de  $f$ , existem únicos  $z, w \in Y$  tais que  $f(x) = z$  e  $f(y) = w$ . Por hipótese, temos que  $Y$  é Lipschitz normalmente mergulhado, isto é,

$d_{in}^Y(z, w) \leq C d_{ext}^Y(z, w)$ . Assim segue as estimativas:

$$\begin{aligned} d_{in}^X(x, y) &\leq K d_{in}^Y(f(x), f(y)) \\ &\leq K C d_{ext}^Y(f(x), f(y)) \\ &\leq K^2 C d_{ext}^X(x, y). \end{aligned}$$

Provando que  $X$  é Lipschitz normalmente mergulhado. Se usarmos os mesmo argumento para  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  temos a equivalência.  $\square$

**Definição 2.9.** *Seja  $x \in \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $l \subset \mathbb{R}^n$  é uma semirreta partindo de  $x$ , se existe um vetor unitário  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , tal que  $l = \{x + tu; t \geq 0\}$ .*

**Definição 2.10.** *Dizemos que  $C \subset \mathbb{R}^n$  é um cone real se existe um ponto  $x \in C$ , tal que  $C$  é uma união de semirreta  $l$  partindo de  $x$ . Neste caso,  $x$  é dito vértice de  $C$ .*

Antes de provarmos o teorema principal dessa seção, iremos fazer um lema que afirma que a propriedade do conjuntos ser Lipschitz normalmente mergulhados é preservada por homotetias, rotação e translação no espaço  $\mathbb{R}^n$ . Lembrando que uma homotetia do conjunto  $X$  é da forma  $rX := \{rx; x \in X \text{ e } r \in \mathbb{R}_+\}$ .

**Lema 2.4.** *Seja  $X$  um conjunto Lipschitz normalmente mergulhado então  $rX$  é Lipschitz normalmente mergulhado com mesma constante.*

*Prova.* Sejam  $x, y \in X$ , e seja  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  uma curva suave por partes ligando  $x$  a  $y$ . Então,  $l(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha'(t)\| dt$ . Agora definimos a curva  $\beta : [0, 1] \rightarrow rX$  por  $\beta(t) = r\alpha(t)$ , assim, temos que  $\beta'(t) = r\alpha'(t)$ , daí

$$l(\beta) = \int_0^1 \|\beta'(t)\| dt = \int_0^1 \|r\alpha'(t)\| dt = r \int_0^1 \|\alpha'(t)\| dt = r l(\alpha).$$

Por outro lado, sabemos que  $d_{in}^X(x, y) = \inf \{l(\alpha); \alpha \in \Omega(x, y)\}$ , onde  $\Omega(x, y)$  é o conjunto de todas as curvas em  $X$  ligando  $x$  a  $y$ . Assim, note que

$$\begin{aligned} d_{in}^{rX}(rx, ry) &= \inf \{l(\beta); \beta \in \Omega(rx, ry)\} \\ &= \inf \{rl(\alpha); r\alpha \in \Omega(rx, ry)\} \\ &= r \inf \{l(\alpha); \alpha \in \Omega(x, y)\} \\ &= r d_{in}^X(x, y). \end{aligned}$$

Finalmente, usando a identidade acima e a hipótese de  $X$  ser Lipschitz normalmente mergulhado, temos que

$$d_{in}^{rX}(rx, ry) = r d_{in}^X(x, y) \leq r C \|x - y\| = C \|rx - ry\| = C d_{ext}^{rX}(rx, ry).$$

Provando que  $rX$  é Lipschitz normalmente mergulhado com mesma constante.  $\square$

O próximo resultado pode ser visto Exemplo 4.3.7 de [20] e em [11].

**Proposição 2.11** (Proposição 2.8 em [11]). *Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  um cone sobre  $L \subset \mathbb{S}^{n-1}$  com vértice na origem de  $\mathbb{R}^n$ . Então:*

1.  *$L$  é Lipschitz normalmente mergulhado, então  $X$  é Lipschitz normalmente mergulhado;*
2. *Se  $X$  é Lipschitz normalmente mergulhado e  $L$  é compacto, então cada componente conexa de  $L$  é Lipschitz normalmente mergulhado.*

*Prova.* Primeiro iremos assumir que  $L$  é Lipschitz normalmente mergulhado com constante  $K_L$ . Pelo Lema 2.4 temos que  $rL$  é Lipschitz normalmente mergulhado. Agora sejam  $x, y \in X$ . Podemos assumir que  $0 \leq \|x\| \leq \|y\|$ . Se  $x = 0$ , temos que  $d_{in}^X(x, y) = d_{ext}^X(x, y)$  uma vez que temos a semirreta  $\vec{0y} \subset X$  já que  $X$  é um cone.

Agora se  $\|x\| = \|y\| = r$ , então  $x$  e  $y$  estão em  $rL$ . Logo,

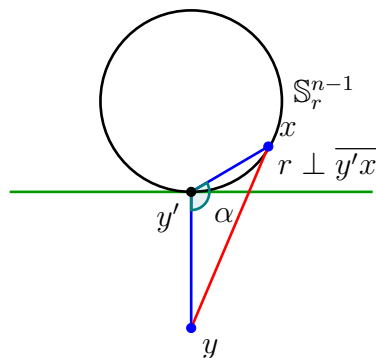
$$d_{in}^X(x, y) \leq d_{in}^{rL}(x, y) \leq K_L d_{ext}^X(x, y).$$

Finalmente, se  $0 < \|x\| < \|y\|$ . Tome  $y' = \frac{y}{\|y\|}\|x\|$ . Daí, segue que  $d_{in}^X(y', y) = d_{ext}^X(y', y)$ , desde que estão no mesmo seguimento de reta partindo da origem. Agora seja  $r = \|x\| = \|y'\|$ , então  $x, y' \in rL$ . Pela que foi vista acima, temos que  $d_{in}^X(x, y') \leq K_L d_{ext}^X(x, y')$ . Note que  $y'$  é o ponto mais próximo de  $y$  em  $rL$ , logo  $rL$  esta do outro lado do hiperplano passando por  $y'$  e ortogonal a reta  $\overline{yy'}$  de  $y$  para  $y'$ . Assim, o angulo entre  $\overline{yy'}$  e  $\overline{y'x}$  é maior que  $\frac{\pi}{2}$  (veja a figura 5). Pelo Lema 2.4, temos que  $rL$  é Lipschitz normalmente mergulhado e  $d_{in}^X(y', y) = d_{ext}^X(y', y)$  então,

$$\begin{aligned} d_{in}^X(x, y) &\leq d_{in}^X(x, y') + d_{in}^X(y', y) \\ &\leq K_L d_{ext}(x, y') + d_{ext}(y', y) \\ &\leq (K_L + 1) d_{ext}(x, y). \end{aligned}$$

Isto finaliza todos os casos.

Figura 5 – LNE

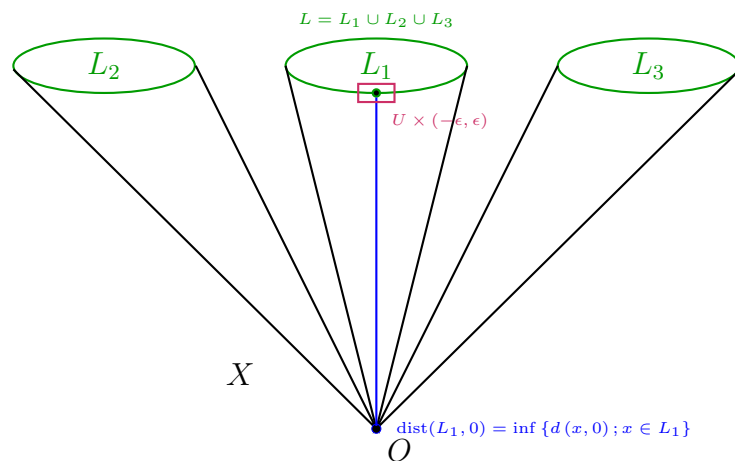


**Fonte:** Adaptada da Figura 2 de [10]

Agora iremos demonstrar o item 2. Faremos a prova por contradição. Assuma que  $X$  é Lipschitz normalmente mergulhado, mas existe uma componente conexa de  $L$ , digamos  $L_1 \subset L$  que não é Lipschitz normalmente mergulhado. Usando o fato de  $L_1$  ser compacto e conexo, segue da Afirmação 2 da prova do Teorema 2.7 que  $L$  não é localmente Lipschitz normalmente mergulhado. Logo existe um ponto  $p \in L_1$  tal que  $L_1$  não é Lipschitz normalmente mergulhado em nenhuma vizinhança  $U \subset L_1$  de  $p$ . Pela Proposição 2.8 temos que  $U \times (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$  não é Lipschitz normalmente mergulhado, para  $0 < \epsilon \ll \text{dist}(L, 0)$ . Veja a figura 6.

Definamos a aplicação quociente  $c: L \times [0, +\infty) \rightarrow X$  dada por  $f(x, t) = tx$ . Note que  $f$  é uma aplicação bi-Lipschitz com respeito a métrica extrínseca e pela Proposição 2.4 segue que é bi-Lipschitz com respeito a métrica intrínseca (ou métrica geodésica). Consequentemente, os conjuntos  $U \times (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$  e  $c(U \times (1 - \epsilon, 1 + \epsilon))$  são bi-Lipschitz equivalentes. Como  $U$  e  $\epsilon$  podem ser escolhidos arbitrariamente pequenos, temos que não existe nenhuma vizinhança aberta de  $p$  que seja Lipschitz normalmente mergulhada, mas pela Proposição 2.10, temos que  $U \times (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$  é Lipschitz normalmente mergulhado, já que  $c(U \times (1 - \epsilon, 1 + \epsilon))$  é Lipschitz normalmente mergulhado. Gerando, assim uma contradição. Portanto, as componentes conexas de  $L$  são Lipschitz normalmente mergulhadas.

Figura 6 – Link compacto LNE



**Fonte:** Elaborada pelo autor

□

O próximo resultado que diz que se  $X$  é um conjunto Lipschitz normalmente mergulhado então seu fecho é também normalmente mergulhado. Essa demonstração surgiu entre uma conversa informal na sala do café da Universidade Federal do Ceará, entre os professores José Edson Sampaio e Euripedes Carvalho da Silva. Os mesmos discutiam sobre propriedades de conjuntos Lipschitz normalmente mergulhados. E entre os problemas discutidos, surgiu o problema citado acima, que em seguida o professor Sampaio apresentou a ideia da prova, que iremos dissertá-la.

**Proposição 2.12.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto Lipschitz normalmente mergulhado, então  $\overline{X}$  é Lipschitz normalmente mergulhado.*

*Prova.* Por hipótese, temos que  $X$  é Lipschitz normalmente mergulhado, digamos com constante  $C \geq 1$ , isto é,  $d_{in}^X(\cdot, \cdot) \leq C d_{ext}^X(\cdot, \cdot)$ . Agora consideremos  $x, y \in \overline{X}$  dois pontos no fecho de  $X$ . Consideremos  $(x_n)_n, (y_n)_n \subset X$  duas seqüências de pontos em  $X$  tais que  $x_n \rightarrow x$  e  $y_n \rightarrow y$ . Assim,  $\|x_n - y_n\| \rightarrow \|x - y\|$ , logo a menos de tomarmos uma subsequência podemos assumir que

$$\|x_n - y_n\| \leq \|x - y\| + 1,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Agora para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos  $\gamma_n: [0, 1] \rightarrow X$  uma curva conectando  $x_n$  à  $y_n$  satisfazendo

$$l_n := l(\gamma_n) \leq d_{in}^X(x_n, y_n) + \frac{1}{n}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} l_n &\leq d_{in}^X(x_n, y_n) + \frac{1}{n} \\ &\leq C d_{ext}^X(x_n, y_n) + \frac{1}{n} \\ &\leq C \left( d_{ext}^{\overline{X}}(x, y) + 1 \right) + \frac{1}{n} \\ &\leq C d_{ext}^{\overline{X}}(x, y) + 2C \\ &= C \left( d_{ext}^{\overline{X}}(x, y) + 2 \right). \end{aligned}$$

Adquirindo que  $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é limitado, isto é,  $l_n \leq l := C \left( d_{ext}^{\overline{X}}(x, y) + 2 \right)$ . Finalmente, considere  $\tilde{\gamma}_n: [0, l_n] \rightarrow X$  uma reparametrização de  $\gamma_n$  pelo comprimento de arco. Agora definimos  $\beta_n: [0, l] \rightarrow \overline{X}$  uma curva dada por  $\beta_n(t) = \tilde{\gamma}_n(t)$  se  $t \in [0, l_n]$  e  $\beta_n(t) = \tilde{\gamma}_n(l_n)$  se  $t \in [l_n, l]$ . Desde que cada  $\tilde{\gamma}_n$  está reparametrizada pelo comprimento de arco, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos que

$$\|\beta_n(s) - \beta_n(t)\| \leq |s - t|,$$

para todo  $s, t \in [0, l]$ . Portanto,  $\{\beta_n\}$  é uma família equicontinua e limitada. Evocando o Teorema de Arzela-Ascoli, podemos assumir a menos de tomarmos uma subsequência que existe uma curva  $\beta: [0, l] \rightarrow \overline{X}$  para qual  $\beta_n \rightrightarrows \beta$ . Portanto, temos que

$$\begin{aligned} d_{in}^{\overline{X}}(x, y) &\leq l(\beta) \\ &= \limsup l(\beta_n) \\ &= \limsup l(\gamma_n) \\ &\leq C d_{ext}^{\overline{X}}(x, y). \end{aligned}$$

Provando assim que  $d_{in}^{\overline{X}}(x, y) \leq C d_{ext}^{\overline{X}}(x, y)$ .

□

O próximo resultado nos diz que um subconjunto semialgébrico e fechado é geodesicamente fechado. Mais precisamente:

**Proposição 2.13.** *Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto fechado. Se  $x, y \in M$  e existe uma curva retificável ligando  $x$  a  $y$  então, existe uma geodésica minimizante  $M$  ligando  $x$  a  $y$ .*

*Prova.* Sejam  $x$  e  $y$  dois pontos em  $M$ . Consideremos  $(x_n)_n, (y_n)_n \subset M$  duas sequências de pontos em  $M$  tais que  $x_n \rightarrow x$  e  $y_n \rightarrow y$ . Por hipótese existe uma curva retificável  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  ligando  $x$  a  $y$ . Assim, podemos assumir que

$$l(\alpha) \leq L,$$

onde  $L > 0$ . Agora para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos  $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow X$  uma curva conectando  $x_n$  à  $y_n$  satisfazendo

$$l_n := l(\gamma_n) \leq d_{in}^X(x_n, y_n) + \frac{1}{n} \text{ e } l_n \leq l(\alpha).$$

Assim, adquirimos que  $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é limitado, isto é,  $l_n \leq L$ . Finalmente, considere  $\tilde{\gamma}_n : [0, l_n] \rightarrow X$  uma reparametrização de  $\gamma_n$  pelo comprimento de arco. Agora definimos  $\beta_n : [0, L] \rightarrow M$  uma curva dada por  $\beta_n(t) = \tilde{\gamma}_n(t)$  se  $t \in [0, l_n]$  e  $\beta_n(t) = \tilde{\gamma}_n(l_n)$  se  $t \in [l_n, L]$ . Desde que cada  $\tilde{\gamma}_n$  está reparametrizada pelo comprimento de arco, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos que

$$\|\beta_n(s) - \beta_n(t)\| \leq l(\beta_n)|_{(s,t)} = |s - t|,$$

para todo  $s, t \in [0, l]$ . Portanto,  $\{\beta_n\}$  é uma família equicontinua e limitada. Evocando o Teorema de Arzela-Ascoli, podemos assumir a menos de tomarmos uma subsequência que existe uma curva  $\beta : [0, l] \rightarrow \overline{M}$  para qual  $\beta_n \rightrightarrows \beta$ . Portanto, temos que

$$\begin{aligned} d_{in}^M(x, y) &\leq l(\beta) \\ &= \limsup l(\beta_n) \\ &= \liminf l(\gamma_n) \\ &\leq d_{in}^{\overline{X}}(x, y). \end{aligned}$$

Provando assim que  $d_{in}^{\overline{X}}(x, y) \leq C d_{ext}^{\overline{X}}(x, y)$ .

□

## 2.4 Cone tangente no infinito

Nessa seção iremos estudar uma das ferramentas mais poderosas da geometria Lipschitz, o cone tangente. Tal cone é um invariante para tal geometria (veja [18]). Agora



iremos defini-lo e apresenta algumas de suas propriedades.

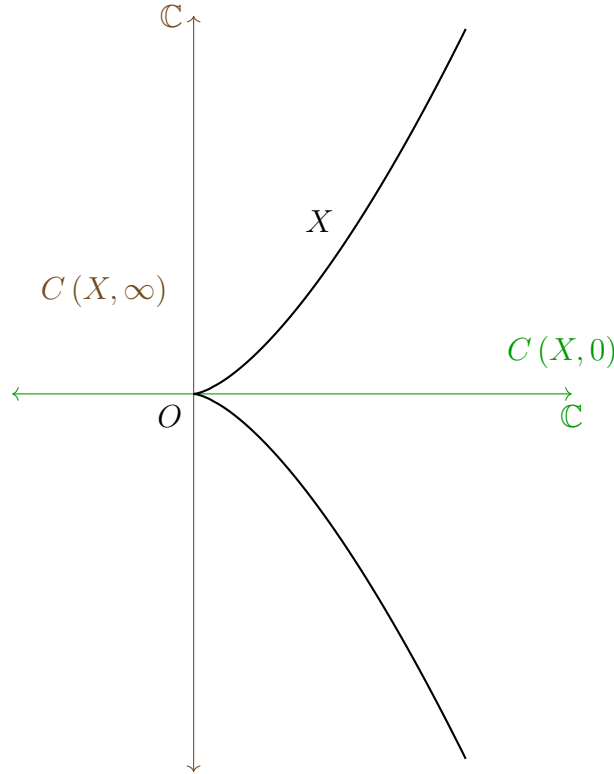
**Definição 2.11** (Cones Tangentes no Infinito). *Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto semialgébrico ilimitado (resp. conjunto subanalítico) com  $p \in \overline{X}$ . Dizemos que  $v \in \mathbb{R}^n$  é tangente a  $X$  no infinito (resp. a  $p$ ) se existem, uma sequência de pontos  $\{x_i\} \subset X$  tendendo ao infinito (resp. a  $p$ ) e uma sequência de números reais positivos  $\{t_i\}$  tais que,*

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_i} x_i = v \quad \left( \text{resp.} \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_i} (x_i - p) \right) = v$$

Agora apresentaremos alguns exemplos

**Exemplo 2.6.** *Seja  $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; x^3 = y^2\}$  a cúspide complexa. Então seus cones tangentes na origem e no infinito são respectivamente  $C(X, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; y = 0\}$  e  $C(X, \infty) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; x = 0\}$ .*

Figura 7 – Cones tangentes da cúspide complexa na origem e no infinito



**Fonte:** Elaborada pelo autor

A proposição a seguir enuncia algumas propriedades do cone tangente.

**Proposição 2.14.** *Usando a notação acima temos:*

1. *Se  $Y_1 \subset Y_2$ , então  $C(Y_1, y) \subset C(Y_2, y)$ ;*
2.  *$C(Y_1 \cup Y_2, y) = C(Y_1, y) \cup C(Y_2, y)$ ;*
3.  *$C(Y_1 \cap Y_2, y) \subset C(Y_1, y) \cap C(Y_2, y)$ ;*
4.  *$C(Y_1 \times Y_2, y) = C(Y_1, y) \times C(Y_2, y)$ ;*
5. *Se  $Y$  é uma variedade de classe  $C^1$  e  $y \in Y$ , então  $C(Y, y)$  coincide com o espaço tangente de  $Y$  no ponto  $y$ , isto é,  $C(Y, y) = T_y Y$ .*

*Prova.* Ver [5, p. 79] □

O cone tangente no infinito vale em situações bem mais gerais, isto é, o conjunto não precisar ser semialgébrico, subanalítico ou mesmo definível em uma estrutura O-minimal. Para um estudo mais geral veja [23].

A proposição a seguir nos diz que no caso de conjunto semialgébricos, podemos ver o cone tangente no infinito como a velocidade de curvas no infinito. Consequentemente não depende da sequência escolhida. Este resultado foi demonstrado por Fernandes e Sampaio (2019) em [9].

**Proposição 2.15** (Proposição 2.15 em [9]). *Seja  $Z \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto semialgébrico não limitado. Um vetor  $w \in \mathbb{R}^n$  é tangente a  $Z$  no infinito se, e somente se, existe uma curva semialgébrica contínua  $\gamma : (\varepsilon, +\infty) \rightarrow Z$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\gamma(t)| = +\infty$  e  $\gamma(t) = tw + o_\infty(t)$ , onde  $g(t) = o_\infty(t)$  significa  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{t} = 0$ .*

*Prova.* Suponha que  $w \in \mathbb{R}^n$  é tangente a  $Z$  no infinito. Consideremos a aplicação semialgébrica  $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  dada por  $\phi(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$  e denote  $X = \phi(Z \setminus \{0\})$ . Como  $Z$  é não limitado, a origem é um ponto não isolado de  $\overline{X}$ . Agora, seja  $\rho : \mathbb{S}^{n-1} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  a aplicação dada por  $\rho(x, t) = tx$ . Vemos que,  $\rho|_{\mathbb{S}^{n-1} \times (0, +\infty)} : \mathbb{S}^{n-1} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  é um homeomorfismo semialgébrico com inversa,  $\rho^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times (0, +\infty)$  dada por  $\rho^{-1}(x) = \left(\frac{x}{\|x\|}, \|x\|\right)$ . Além disso, o conjunto  $Y = \rho^{-1}(X) \subset \mathbb{S}^{n-1} \times (0, +\infty)$  e  $\overline{Y}$  são conjuntos semialgébricos.

Consideraremos dois casos:

**Caso  $w \neq 0$ .** Como  $w$  é tangente a  $Z$  no infinito, então existem  $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  e  $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset Z$  tais que,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_k\| = +\infty$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{s_k} z_k = w$ . Assim, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , definamos  $x_k = \phi(z_k)$ . Neste caso, seja  $v := \lim_{k \rightarrow \infty} s_k \cdot x_k = \frac{w}{\|w\|^2}$ . Em particular,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k}{\|x_k\|} = \frac{w}{\|w\|} = \frac{v}{\|v\|}$  e  $u = \left(\frac{v}{\|v\|}, 0\right) \in \overline{Y}$ . Assim, pelo Lema 2 (Lema de Seleção da Curva), existe uma curva semialgébrica contínua  $\beta : [0, \delta) \rightarrow \overline{Y}$  tal que  $\beta(0) = u$  e  $\beta((0, \delta)) \subset Y$ . Escrevendo  $\beta(t) = (x(t), s(t))$ , temos  $s/ : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função semialgébrica e não-constante tal que  $s(0) = 0$  e  $s(t) > 0$ , se  $t \in (0, \delta)$ . Pelo Lema 1 (Lema da Monotonicidade), podemos supor que  $s$  é analítica em  $(0, \delta)$  e estritamente crescente. Então,  $s : [0, \frac{\delta}{2}] \rightarrow [0, \delta']$  é um homeomorfismo semialgébrico, onde  $\delta' = s\left(\frac{\delta}{2}\right)$ . Definamos  $\alpha : [0, r) \rightarrow \overline{X}$  dada por,

$$\alpha(t) = \rho \circ \beta \circ s^{-1}(t\|v\|) = \rho\left(x\left(s^{-1}(t\|v\|)\right), s\left(s^{-1}(t\|v\|)\right)\right) = t\|v\|x\left(s^{-1}(t\|v\|)\right),$$

onde  $r = \min \frac{\delta'}{\|v\|}, \delta'$ . Assim,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\alpha(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t\|v\|x(s^{-1}(t\|v\|))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \|v\|x(s^{-1}(t\|v\|)) = \|v\|x(0) = v,$$

e, dessa forma,  $\alpha(t) = tv + o(t)$ . Por fim, definindo  $\gamma : (\frac{1}{r}, +\infty) \rightarrow Z$  dessa maneira,  $\gamma(t) = \phi^{-1}(\alpha(\frac{1}{t}))$ , conseguimos,

$$\gamma(t) = \frac{\frac{1}{t}v + o(\frac{1}{t})}{\|\frac{1}{t}v + o(\frac{1}{t})\|^2} = t \frac{v}{\|v\|^2} + o_\infty(t) = tw + o_\infty(t).$$

Como  $\gamma$  é composição de aplicações semialgébricas,  $\gamma$  é semialgébrica. E fica demonstrado este caso.

**Caso**  $w = 0$ . Neste caso, seja  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset Z$  sequência tal que  $\lim_{k \rightarrow +\infty}$ , observe que como  $Z$  é não limitado, podemos tomar tal sequência. Assim,  $\left\{ \frac{x_k}{\|x_k\|} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$  é, a menos de subsequência, uma sequência convergente. Seja,  $v$  o limite dessa sequência, isto é,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k}{\|x_k\|} = v$ . De modo análogo ao que fizemos no Caso  $w \neq 0$  é possível mostrar que existe curva contínua semialgébrica contínua  $\gamma : (\varepsilon, +\infty) \rightarrow Z$  tais que  $\gamma(t) = tv + o_\infty(t)$ . Definamos  $\tilde{\gamma} : (\varepsilon^2, +\infty) \rightarrow Z$  tal que  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t^{\frac{1}{2}})$ . Assim, temos  $\tilde{\gamma}(t) = o_\infty(t) = tw + o_\infty(t)$ .

Reciprocamente, suponhamos que exista curva semialgébrica contínua  $\gamma : (\varepsilon, +\infty) \rightarrow Z$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\gamma(t)| = -\infty$  e  $\gamma(t) = tw + o_\infty(t)$ , então para cada  $k \in \mathbb{N}$  definimos  $s_k = \varepsilon + k + 1$  e seja  $z_k = \gamma(s_k)$ . Agora, basta percebermos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\gamma(s_k)| = +\infty$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{s_k} z_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{s_k} \gamma(s_k) = w$ .  $\square$

Uma consequência imediata de 2.15 é o corolário a seguir.

**Corolário 2.3.** *Seja  $Z \subset \mathbb{R}^n$  conjunto semialgebrico ilimitado. Então  $Z$  tem um único tangente no infinito e, mais além,*

$$C(Z, \infty) = \{v \in \mathbb{R}^n; \exists \gamma : (\varepsilon, \infty) \rightarrow Z, \text{ contínua, semialgébrica e } \lim_{t \rightarrow \infty} \|\gamma(t)\| = +\infty, \gamma(t) = tv + o_\infty(t)\}$$

Vamos definir agora o conceito de cone tangente de um conjunto semialgébrico.

**Definição 2.12.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^m$  algébrico tal que  $0$  é um ponto não isolado de  $\overline{X}$ . Definimos o cone tangente de  $X$  nem  $0$  como sendo o conjunto  $C(X, 0) = \{v \in \mathbb{R}^m; \exists \gamma [0, \varepsilon) \rightarrow \overline{X}, \text{ contínua, semialgébrica e tal que } \gamma((0, \varepsilon)) \subset X \text{ e } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(t)}{t} = v\}$*

Assim, obtemos o seguinte resultado

**Corolário 2.4.** *Seja  $Z \subset \mathbb{R}^n$  conjunto semialgébrico ilimitado. Seja  $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  a aplicação semialgébrica dada por,  $\phi(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$  e denotemos  $X = \phi(Z \setminus \{0\})$ . Então  $C(Z, \infty)$  é um conjunto semialgébrico satisfazendo  $C(Z, \infty) = C(X, 0)$  e  $\dim_{\mathbb{R}} C(Z, \infty) \leq \dim_{\mathbb{R}} Z$ .*

*Prova.* Como  $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  é homeomorfismo semialgébrico, temos que  $X$  é semialgébrico e  $\dim_{\mathbb{R}} X = \dim_{\mathbb{R}} Z$ . Além disso, o Lema 1.2 em [12], temos que  $C(X, 0)$  é semialgébrico e  $\dim_{\mathbb{R}} C(X, 0) \leq \dim_{\mathbb{R}} X$ . Ademais, de 2.15 segue que  $C(Z, \infty) = C(X, 0)$ . Assim,  $\dim_{\mathbb{R}} C(Z, \infty) \leq \dim_{\mathbb{R}} Z$ .  $\square$

O próximo resultado é uma versão no infinito de um teorema de [18] onde o autor mostrou que conjuntos subanalíticos lipeomorfos no infinito possuem cones tangentes lipeomorfos.

**Teorema 2.1** (Teorema 2.19 em [9]). *Seja  $A \subset \mathbb{R}^m$  e  $B \subset \mathbb{R}^n$  subconjuntos semialgébricos ilimitados. Se  $A$  e  $B$  são lipeomorfos no infinito, então seus cones tangentes no infinito  $C(A, \infty)$  e  $C(B, \infty)$  são lipeomorfos.*

*Prova.* Seja  $\widetilde{K}_1 \subset \mathbb{R}^m$  e  $\widetilde{K}_2 \subset \mathbb{R}^n$  subconjuntos compactos tais que existe um homeomorfismo bilipschitz  $\phi : A \setminus \widetilde{K}_1 \rightarrow B \setminus \widetilde{K}_2$ . Denotemos  $X = A \setminus \widetilde{K}_1$  e  $Y = B \setminus \widetilde{K}_2$ . Tomando  $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  e fazendo as seguintes identificações:

$$X \leftrightarrow X \times \{0\} \text{ e } Y \leftrightarrow \{0\} \times Y$$

podemos supor que  $X, Y \subset \mathbb{R}^N$  e assim, existe um lipeomorfismo  $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  tal que  $\varphi(X) = Y$  pelo Lema 3.1 em [18]. Agora, seja  $K > 0$  uma constante tal que,

$$\frac{1}{K} \|x - y\| \leq \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq K \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , definamos aplicações  $\varphi_k, \psi_k : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , dadas por  $\varphi_k(v) = \frac{1}{k} \varphi(kv)$  e  $\psi_k(v) = \frac{1}{k} \varphi^{-1}(kv)$ . Para cada inteiro  $m \geq 1$ , definamos  $\varphi_{k,m} := \varphi|_{\overline{B}_m} : \overline{B}_m \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $\psi_{k,m} := \psi|_{\overline{B}_{mk}} : \overline{B}_{mk} \rightarrow \mathbb{R}^N$ , onde  $\overline{B}_r$ , denota a bola Euclidiana fechada de raio  $r$  e centro na origem em  $\mathbb{R}^N$ . Como,

$$\frac{1}{K} \|x - y\| \leq \|\varphi_{k,1}(x) - \varphi_{k,1}(y)\| \leq K \|x - y\|, \forall x, y \in \overline{B}_1, \forall k \in \mathbb{N}$$

e

$$\frac{1}{K} \|u - v\| \leq \|\psi_{k,1}(u) - \psi_{k,1}(v)\| \leq K \|u - v\|, \forall u, v \in \overline{B}_k, \forall k \in \mathbb{N},$$

existe uma subsequência  $\{k_{j,1}\} \subset \mathbb{N}$  e aplicações lipschitz  $d\varphi_1 : \overline{B}_1 \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $d\psi_1 : \overline{B}_K \rightarrow \mathbb{R}^N$  tais que  $\varphi_{k_{j,1},1} \rightarrow d\varphi_1$  uniformemente em  $\overline{B}_1$  e  $\psi_{k_{j,1},1} \rightarrow d\psi_1$  uniformemente em  $\overline{B}_k$  (observe que  $\{\varphi_{k,1}\}_{k \in \mathbb{N}}$  e  $\{\psi_{k,1}\}_{k \in \mathbb{N}}$  têm constantes de Lipschitz uniformes). Além disso,

$$\frac{1}{K} \|u - v\| \leq \|d\varphi_1(u) - d\varphi_1(v)\| \leq K \|u - v\|, \forall u, v \in \overline{B}_1$$

e

$$\frac{1}{K} \|z - w\| \leq \|d\psi_1(z) - d\psi_1(w)\| \leq K \|z - w\|, \forall z, w \in \overline{B}_k.$$

De modo análogo ao acima, para cada  $m > 1$  temos

$$\frac{1}{K}\|x - y\| \leq \|\varphi_{k,m}(x) - \varphi_{k,m}(y)\| \leq K\|x - y\|, \forall x, y \in \overline{B}_m, \forall k \in \mathbb{N}$$

e

$$\frac{1}{K}\|u - v\| \leq \|\psi_{k,m}(u) - \psi_{k,m}(v)\| \leq K\|u - v\|, \forall u, v \in \overline{B}_{mK}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Portanto, para cada  $m > 1$ , existe uma subsequência  $\{k_{j,m}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{k_{j,m-1}\}$  e aplicações Lipschitz  $d\varphi_m : \overline{B}_m \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $d\psi_m : \overline{B}_{mK} \rightarrow \mathbb{R}^N$  tais que  $\varphi_{k_{j,m},m} \rightarrow d\varphi_m$  uniformemente sobre  $\overline{B}_m$  e  $\psi_{k_{j,m},m} \rightarrow d\psi_m$  uniformemente sobre  $\overline{B}_{mK}$  com  $d\varphi_m|_{\overline{B}_{m-1}} = d\varphi_{m-1}$  e  $d\psi_m|_{\overline{B}_{(m-1)K}} = d\psi_{m-1}$ . Além disso,

$$\frac{1}{K}\|u - v\| \leq \|d\varphi_m(u) - d\varphi_m(v)\| \leq K\|u - v\|, \forall u, v \in \overline{B}_m \quad (10)$$

e

$$\frac{1}{K}\|z - w\| \leq \|d\psi_m(z) - d\psi_m(w)\| \leq K\|z - w\|, \forall z, w \in \overline{B}_{mK}. \quad (11)$$

Definamos  $d\varphi, d\psi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  por  $d\varphi(x) = d\varphi_m(x)$ , se  $x \in \overline{B}_m$  e  $d\psi(x) = d\psi_m(x)$ , se  $x \in \overline{B}_{mK}$  e para cada  $j \in \mathbb{N}$ , sejam  $t_j = n_j = k_{j,j}$ .

**Afirmção 2.1.**  $\varphi_{n_j} \rightarrow d\varphi$  e  $\psi_{n_j} \rightarrow d\psi$  uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^N$

*Prova da Afirmção 2.1.* Seja  $F \subset \mathbb{R}^N$  subconjunto compacto. Tomemos  $m \in \mathbb{N}$  tais que  $F \subset \overline{B}_m \subset \overline{B}_{mK}$ . Assim a sequência  $\{n_j\}_{j > m}$  é uma subsequência de  $\{k_{j,m}\}_{j \in \mathbb{N}}$  e, como  $\varphi_{k_{j,m},m} \rightarrow d\varphi_m$  uniformemente sobre  $\overline{B}_m$  e  $\psi_{k_{j,m},m} \rightarrow d\psi_m$  uniformemente sobre  $\overline{B}_{mK}$ , segue que  $\varphi_{n_j} \rightarrow d\varphi$  e  $\psi_{n_j} \rightarrow d\psi$  uniformemente sobre  $F$ .  $\square$

**Afirmção 2.2.**  $d\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  é um lipeomorfismo e  $d\psi = (d\varphi)^{-1}$ .

*Prova da Afirmção 2.2.* Segue das equações (10) e (11) que  $d\varphi, d\psi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  são aplicações Lipschitz. Portanto, é suficiente mostrar que  $d\psi = (d\varphi)^{-1}$ . Para fazê-lo, sejam  $v \in \mathbb{R}^N$  e  $w = d\varphi(v) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t_j v)}{t_j}$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\|d\psi(w) - v\| &= \left\| \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\psi(t_j w)}{t_j} - v \right\| \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \frac{\psi(t_j w)}{t_j} - \frac{t_j v}{t_j} \right\| \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{t_j} \|\psi(t_j w) - t_j v\| \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{t_j} \|\psi(t_j w) - \psi(\varphi(t_j v))\| \\
&\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{K}{t_j} \|t_j w - \varphi(t_j v)\| \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} K \left\| w - \frac{\varphi(t_j v)}{t_j} \right\|.
\end{aligned}$$

Então,  $d\psi(w) = d\psi(d\varphi(v)) = v$ , para todo  $v \in \mathbb{R}^N$ , isto é,  $d\psi \circ d\varphi = \text{id}_{\mathbb{R}^N}$ . De modo análogo, podemos mostrar que  $d\varphi \circ d\psi = \text{id}_{\mathbb{R}^N}$   $\square$

**Afirmção 2.3.**  $d\varphi(C(X, \infty)) = C(Y, \infty)$

*Prova da Afirmção 2.3.* Pela Afirmção 2.2 é suficiente verificar que  $d\varphi(C(X, \infty)) \subset C(Y, \infty)$ . Para fazê-lo, seja  $v \in C(X, \infty)$ . Então, existe um caminho  $\alpha : (\varepsilon, \infty) \rightarrow X$  tal que  $\alpha(t) = tv + o_\infty(t)$ . Assim,  $\varphi(\alpha(t)) = \varphi(tv) + o_\infty(t)$ , pois  $\varphi$  é Lipschitz. Entretanto,  $\varphi(t_j v) = t_j d\varphi(v) + o_\infty(t_j)$  e então,

$$d\varphi(v) = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{n_j}(v) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t_j v)}{t_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\alpha(t_j))}{t_j} \in C(Y, \infty).$$

$\square$

Portanto,  $d\varphi : C(X, \infty) \rightarrow C(Y, \infty)$  é um lipeomorfismo (bilipschitz homeomorfismo).

Finalizamos a prova observando que  $C(A, \infty) = C(X, \infty)$  e  $C(B, \infty) = C(Y, \infty)$   $\square$

**Corolário 2.5.** *Seja  $X \subset \mathbb{C}^n$  subconjunto algébrico complexo. Se  $X$  é Lipschitz regular no infinito, então o cone de  $X$  no infinito é Lipschitz regular no infinito.*

Seja  $X \subset \mathbb{C}^n$  subconjunto algébrico. Seja  $\mathcal{I}(X)$  o ideal de  $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  dado pelos polinômios que se anulam sobre  $X$ . Para cada  $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , denotemos  $f^*$  os polinômios homogêneos compostos pelos monômios em  $f$  de grau máximo.

**Proposição 2.16** (Teorema 1.1 em [13]). *Seja  $X \subset \mathbb{C}^n$  subconjunto algébrico complexo. Então,  $C(X, \infty)$  é a variedade afim  $V(\langle f^*; f \in \mathcal{I}(X) \rangle)$ .*

*Prova.* Veja Afirmção 1 do Teorema 3.1 de [19].  $\square$

## 2.5 Multiplicidade relativa e grau de um conjunto analítico complexo

Nessa seção iremos definir o conceito de multiplicidade relativa e grau de um conjunto analítico complexo. Para mais detalhes recomendamos [23] e [3].

**Definição 2.13.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^m$  conjunto subanalítico de dimensão  $d$  e  $p \in \mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$ . Dizemos que  $x \in \partial X'_p$  é um ponto simples de  $\partial X'_p$ , se existe um subconjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$  com  $x \in U$  tal que:*

- *As componente conexas  $X_1, X_2, \dots, X_r$  de  $(X'_p \cap U) \setminus \partial X'_p$  são variedades topológicas de  $\mathbb{R}^{m+1}$  com  $\dim X_i = \dim X$ , para todos  $i = 1, \dots, r$ ;*
- *$(X_i \cup \partial X'_p) \cap U$  são variedades topológicas com bordo, para todo  $i = 1, \dots, r$ .*

*Seja  $\text{Smp}(\partial X'_p)$  o conjunto dos pontos simples de  $\partial X'_p$  e definamos  $C_{\text{Smp}}(X, p) = \{t \cdot x; t > 0 \text{ e } x \in \text{Smp}(\partial X'_p)\}$ . Seja  $k_{X,p} : \text{Smp}(\partial X'_p) \rightarrow \mathbb{N}$  função tal que  $k_{X,p}(x)$  representa o número de componentes conexas do germe  $(\rho_p^{-1}(X \setminus \{p\}), x)$ .*

**Observação 2.2.** *Se  $\text{Smp}(\partial X'_p)$  é subconjunto aberto e denso da parte  $d-1$ -dimensional de  $\partial X'_p$  sempre que  $\partial X'_p$  é um subconjunto de dimensão  $d$ , onde  $d = \dim X$ .*

**Definição 2.14** (Definição 2.6 em [23]). *É claro que a função  $k_{X,p}$  é localmente constante. De fato,  $k_{X,p}$  é constante sobre cada componente conexa de  $\text{Smp}(\partial X'_p)$ . Então, definimos a **multiplicidade relativa de  $X$  em  $p$  (ao longo de  $C_j$ )** como sendo  $k_{X,p}(C_j) := k_{X,p}(x)$  com  $x \in C_j$ . Além disso, quando  $X$  é conjunto algébrico, existe um conjunto algébrico  $\sigma$  com  $\dim \sigma < \dim X$ , tal que  $X_j \setminus \sigma$  intersecta apenas uma componente conexa  $C_i$ , para cada componente  $X_j$  irredutível, do cone tangente  $C(X, p)$ . Então definimos,  $k_{X,p}(X_j) = k_{X,p}(C_i)$ . Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_r$  as componentes irredutíveis de  $C(X, p)$ .*

Vamos começar esta seção lembrando alguns fatos básicos sobre o grau de conjuntos algébricos complexos. Mais precisamente, vamos ver que os subespaços lineares afins de  $\mathbb{C}^n$  são caracterizados entre os subconjuntos algébricos de  $\mathbb{C}^n$  por serem aqueles de grau 1. Nessa direção, seja  $\iota : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{CP}^n$  a aplicação dada por  $\iota(x_1, \dots, x_n) = [1 : x_1 : \dots : x_n]$  e seja  $p : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{CP}^n$  a projeção dada por  $p(x_0, x_1, \dots, x_n) = [x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ .

Assim, seja  $A$  um conjunto algébrico em  $\mathbb{CP}^n$  e  $X$  um conjunto algébrico em  $\mathbb{C}^n$ . Então  $\tilde{A} = p^{-1}(A) \cup \{0\}$  é um conjunto algébrico complexo homogêneo em  $\mathbb{C}^{n+1}$  e o fecho de  $\overline{\iota(X)}$  de  $\iota(X)$  em  $\mathbb{CP}^n$  é um conjunto algébrico em  $\mathbb{CP}^n$ .

**Definição 2.15** (Definição 3.2 em [9]). *Seja  $X \subset \mathbb{C}^n$  um conjunto algébrico complexo com dimensão  $p$  pura e seja  $L \in G(n-p, n)$  tal que  $L \cap C(Y, \infty) = \{0\}$ . Seja  $\Pi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$  a projeção ortogonal tal que  $L = \Pi^{-1}(0)$ . Portanto, existe um suconjunto algébrico próprio  $\sigma \subset \mathbb{C}^p$  tal que  $d = \#(\Pi^{-1}(t) \cap X)$  não depende do  $t \in \mathbb{C}^p \setminus \sigma$ . Destacamos que  $d$  não depende também do  $L$ . Assim, definimos o **grau de  $X$**  dado por  $\deg(X) = d$ .*

**Proposição 2.17.** *Seja  $X \subset \mathbb{C}^n$  algébrico de dimensão pura. então,  $\deg(X) = 1$  se, e somente se,  $X$  é um espaço linear afim de  $\mathbb{C}^n$ .*

*Prova.* Seja  $A = \overline{\iota(X)}$  o fecho de  $\iota(X) \subset \mathbb{CP}^n$ . Por definição,

$$\deg(X) = \deg(A) = m(\tilde{A}, 0)$$

onde  $\tilde{A} = p^{-1}(A) \cup \{0\}$ . Assim,  $\deg(X) = 1 \iff m(\tilde{A}, 0) = 1$ . Entretanto, como  $\tilde{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$  é algébrico e homogêneo, temos  $m(\tilde{A}, 0) = 1$  se, e somente se,  $\tilde{A}$  é subespaço linear complexo. Contudo,  $\tilde{A}$  é subespaço linear complexo em  $\mathbb{C}^{n+1}$  se, e somente se,  $A$  é um plano projetivo complexo em  $\mathbb{CP}^n$ .

Por fim,  $A$  é plano projetivo complexo em  $\mathbb{CP}^n$  se, e só se,  $X$  é subespaço linear afim de  $\mathbb{C}^n$ .  $\square$



### 3 RESULTADO PRINCIPAL

Nessa seção iremos apresentar e demonstrar o objetivo principal deste trabalho.

**Teorema 3.1** (Teorema 1.1 em [9] e Teorema 3.1 em [19]). *Seja  $X \subset \mathbb{C}^n$  subconjunto fechado, analítico de dimensão  $d$  pura. Suponha que  $C(X, \infty)$  seja subespaço linear complexo de dimensão  $d$  de  $\mathbb{C}^n$ . Se  $X$  é LNE no infinito, então  $X$  é um espaço linear afim de  $\mathbb{C}^n$ .*

#### 3.1 Demonstração do resultado principal

**Prova do Teorema 3.1.** Como  $C(X, \infty)$  é um subespaço linear de  $\mathbb{C}^n$ , podemos considerar a projeção ortogonal,  $\pi : \mathbb{C}^n \rightarrow C(X, \infty)$ , façamos uma mudança linear de coordenadas tais que

$$C(X, \infty) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^n; y = 0\}.$$

Em particular,  $\pi^{-1}(0) \cap C(X, \infty) = \{0\}$ .

**Afirmção 3.1.** *Existem constantes positivas  $C$  e  $\rho$  tais que  $X \subset \{(x, y); \|y\| < C\|x\|\} \cup B_\rho$ .*

*Prova da Afirmção 3.1.* De fato, suponhamos que a Afirmção 3.1 não seja verdadeira. Então existe uma sequência  $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  tais que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|(x_k, y_k)\| = +\infty$  e,  $\|y_k\| \geq k\|x_k\|$ . Mas vejamos que, a sequência  $q_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$  é limitada, logo a menos de tomarmos uma subsequência, podemos supor que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_k}{\|y_k\|} = y_0$ . Como  $\frac{\|x_k\|}{\|y_k\|} \leq \frac{1}{k}$ ,  $(0, y_0) \in c(X, \infty)$ . Entretanto, este fato constitui uma contradição, haja visto que  $y_0 \neq 0$ . Logo, a Afirmção 3.1 é verdadeira.  $\square$

Pelo Teorema 2 em [5, p. 77],  $X$  é um conjunto algébrico.

**Afirmção 3.2.** *Se  $\gamma : (\varepsilon, +\infty) \rightarrow X$  é um arco tal que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\gamma(t)\| = +\infty$  e  $\pi \circ \gamma(t) = tv + o_\infty(t)$ , então  $\gamma(t) = tv + o_\infty(t)$ .*

Para esta afirmação, escrevamos  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . Como  $\gamma(t) \in X$ ,  $\forall t \in (\varepsilon, +\infty)$  temos pela Afirmção 3.1 que existe  $t_0 > 0$  tal que  $\|y(t)\| \leq C\|x(t)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$ , desde que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\gamma(t)\| = +\infty$ . Assim, como  $\frac{x(t)}{t}$  é limitada,  $\frac{y(t)}{t}$  também o é. Suponhamos  $y(t) \neq o_\infty(t)$ . Então, existe  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  e  $r > 0$  tal que  $t_k \rightarrow +\infty$  e  $\frac{\|\gamma(t_k)\|}{t_k} \geq r$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Como  $\left\{\frac{y(t_k)}{t_k}\right\}_{k \in \mathbb{N}}$  é limitada, a menos de subsequência, podemos dizer que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{y(t_k)}{t_k} =$

$y_0$ . Portanto,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(t_k)}{t_k} = (v', y_0) \in C(X, \infty)$ , onde  $v = (v', 0)$ . Entretanto, esta conclusão representa uma contradição uma vez que,  $\pi^{-1}(0) \cap C(X, \infty) = \{0\}$  implica  $y_0 = 0$  e sendo  $\|y_0\| \geq r > 0$  isto implica em  $y_0 \neq 0$ . Então,  $y(t) = o_\infty(t)$  e portanto,  $\gamma(t) = tv + o_\infty(t)$ . Isto mostra a afirmação 2.

Agora, seja  $L = \pi^{-1}(0)$ . Pela Afirmação 1, vemos que  $\overline{\iota(X)} \cap \overline{\iota(L)} \cap (\mathbb{P}^n \setminus \iota(\mathbb{C}^n)) = \emptyset$ . Portanto, segue do Corolário 1 em [5] que  $\pi|_X : X \rightarrow C(X, \infty)$  é uma cobertura ramificada com grau igual a  $\deg(X)$ . Além disso, o lócus de ramificação de  $\pi|_X$  é um subconjunto algébrico  $\Sigma$  do espaço linear  $C(X, \infty)$  de codimensão  $\geq 1$ . Suponhamos que  $\deg(X) > 1$ . Pelo Corolário 2.4,

$$\dim_{\mathbb{R}}(\Sigma, \infty) \leq \dim_{\mathbb{R}} \Sigma < \dim_{\mathbb{R}} C(X, \infty).$$

Assim, existe um vetor tangente unitário  $v_0 \in C(X, \infty) \setminus C(\Sigma, \infty)$ .

Como  $v_0$  não é tangente a  $\Sigma$  no infinito, existem números reais positivos  $\lambda$  e  $R$  tais que,

$$C_{\lambda, R} = \{v \in C(X, \infty); \|v - tv_0\| < \lambda t, \text{ para algum } t > R\}$$

não intersecta  $\Sigma$ . Como assumimos  $\deg(X) \geq 2$ , temos, pelo menos, dois levantamentos distintos,  $\gamma_1(t)$  e  $\gamma_2(t)$  da semirreta  $r(t) = tv_0$ , isto é,  $\pi(\gamma_1(t)) = \pi(\gamma_2(t)) = tv_0$ . Como  $\pi$  é a projecção ortogonal sobre  $C(X, \infty)$  e  $v_0$  é um vetor tangente unitário no infinito às imagens  $\pi \circ \gamma_1$  e  $\pi \circ \gamma_2$ , então  $v_0$  é vetor tangente no infinito aos arcos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Por construção, temos que  $\text{dist}(\gamma_i(t), (\pi|_X)^{-1}(\Sigma)) \geq \lambda t$ , para  $i = 1, 2$ , onde por *dist* nós entendemos a distância euclidiana. Por outro lado, qualquer caminho em  $X$  conectando  $\gamma_1(t)$  a  $\gamma_2(t)$  é levantamento de um *loop*, com base no ponto  $tv_0$  o qual não é contrátil em  $C(X, \infty) \setminus \Sigma$ . Assim, o comprimento deste caminho deve ser, pelo menos,  $2\lambda t$ . Isto isto implica que a distância intrínseca,  $d_X(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ , em  $X$ , entre  $\gamma_1(t)$  e  $\gamma_2(t)$  é, pelo menos,  $2\lambda t$ . Mas pela Afirmação 3.2,  $\gamma_1(t)$  e  $\gamma_2(t)$  são tangentes no infinito, que significa,

$$\frac{\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|}{t} \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty,$$

e  $\lambda > 0$ , obtemos que  $X$  não é Lipschitz normalmente mergulhado no infinito. De outra forma, existe  $\tilde{C} > 0$  e um compacto  $K \subset \mathbb{C}^n$  tais que:

$$d_X(x_1, x_2) \leq \tilde{C}\|x_1 - x_2\|, \forall x_1, x_2 \in X \setminus K,$$

Então,

$$2\lambda \leq \frac{d_X(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}{t} \leq \tilde{C} \frac{d_X(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}{t} \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty,$$

o que é uma contradição. Daí, concluímos que  $\deg(X) = 1$  e pela Proposição 2.17, segue que  $X$  é um espaço linear afim de  $\mathbb{C}^n$ .  $\square$

### 3.2 Aplicações a conjuntos algébricos complexos

O Objetivo desta seção é mostrar alguns resultados e consequências do resultado principal. Iniciamos destacando que não temos uma versão real do resultado principal. Nesse sentido vejamos o exemplo a seguir.

**Exemplo 3.1.** *Seja  $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \sin(x + y)\}$ , vejamos:*

- $X$  é LNE: De fato, vejamos que  $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \sin(x + y)\}$
- $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, \sin(x + y)) \mapsto (x, y)$  é lipeomorfismo;
- $X$  tem um único cone tangente no infinito  $C(X, \infty) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ .

*Entretanto,  $X$  não é algébrico e, em particular, não é subespaço linear de  $\mathbb{R}^3$ .*

*Ou seja, o teorema não vale no caso real para o conjunto  $X$ .*

Vejamos algumas consequências.

**Corolário 3.1.** *Seja  $X \subset \mathbb{C}^n$  algébrico de dimensão  $d$  pura tal que  $C(X, \infty)$  é um subespaço linear complexo de  $\mathbb{C}^n$ . Se  $X$  é LNE no infinito, então  $X$  é um subespaço linear afim de  $\mathbb{C}^n$ .*

O exemplo a seguir mostra que todas as hipóteses feitas no teorema principal são estritamente necessárias.

**Exemplo 3.2.** *Seja  $X$  a parábola complexa, ou seja,  $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; y = x^2\}$ . Observe o cone tangente no infinito de  $X$  é uma reta. Ademais,  $X$  não é LNE no infinito, daí  $X$  que não é um subconjunto linear afim de  $\mathbb{C}^2$*

**Exemplo 3.3.** *Seja  $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ . Vejamos que  $Z$  é LNE e  $C(X, \infty) = Z$ , mas  $Z$  não é subespaço linear de  $\mathbb{C}^3$ .*

**Lema 3.1** (Teorema em [17]). *Seja  $V \subset \mathbb{C}^n$  um cone complexo. Se  $0 \in V$  possui uma vizinhança homeomorfa a uma bola euclidiana, então  $V$  é um subespaço linear de  $\mathbb{C}^n$*

Um outro resultado segue da proposição que diz que

**Proposição 3.1** (Teorema 3.8 em [9] e Teorema 4.1 em [19]). *Seja  $X \subset \mathbb{C}^n$  suconjunto algébrico, complexo de dimensão  $p$  pura. Se  $X$  é Lipschitz regular no infinito, então  $X$  é um subespaço linear afim de  $\mathbb{C}^n$ .*

*Prova.* Seja  $X \subset \mathbb{C}^n$  algébrico complexo e Lipschitz regular no infinito. Assim, existe  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^N \setminus B$  um lipeomorfismo onde  $U$  é uma vizinhança aberta do infinito em  $X$  (i.e. o complementar de um conjunto compacto em  $X$ ) e  $B \subset \mathbb{R}^N$  a bola Euclidiana fechada centrada em  $0 \in \mathbb{R}^N$ . Seja  $C(X, \infty)$  o cone tangente no infinito de  $X$ . Ocorre do Teorema 2.1 que existe um lipeomorfismo  $dh : C(X, \infty) \rightarrow C(\mathbb{R}^N \setminus B, \infty) = \mathbb{R}^N$ . Em particular,  $C(X, \infty)$  é uma variedade topológica. Pelo Lema 3.1, segue que  $C(X, \infty)$  é um subespaço linear afim de  $\mathbb{C}^n$ . Pelo Corolário 2.2,  $X$  é LNE no infinito e, pelo Corolário 3.1 segue que

$X$  é subespaço linear afim de  $\mathbb{C}^n$ . □

Aqui vale ressaltar que [9] observou que ao removermos a hipótese de  $X \subset \mathbb{C}^n$  tem dimensão pura na Proposição 3.1, obtemos que  $X$  é uma união de subespaços lineares afins de  $\mathbb{C}^n$  com um subconjunto algébrico complexo 0-dimensional, pela forma geométrica do lema de normalização de Noether em [16, p.42], qualquer conjunto algébrico complexo de dimensão não nula é um conjunto ilimitado. Finalmente, mencionamos que o Teorema 3.1 não é válido (com as mesmas hipóteses) para conjuntos algébricos reais.

De fato, seja  $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z^3\}$ .  $X$  é algébrico,  $\dim(X) = 2$  pura, Observe que  $X$  é o gráfico da aplicação  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$  com derivada em relação a  $x$  dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{3(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}}$$

Logo  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$  temos  $\|\nabla f(x, y)\| \leq \frac{2}{3}$  portanto,  $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)} : \mathbb{R}^2 \setminus B_1(0) \rightarrow f(\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0))$  é lipeomorfismo. Daí  $X$  é Lipschitz regular no infinito, contudo  $X$  não é subespaço linear afim de  $\mathbb{R}^3$  mostrando que a Proposição 3.1 não vale para conjuntos algébricos reais.

## 4 CONCLUSÃO

Neste trabalho exploramos o Teorema de regularidade Lipschitz no infinito, um importante resultado em matemática, também conhecido como teorema tipo Bernstein que nos dar uma rigidez Geometria. Realizou-se uma análise detalhada e descritiva do Teorema e de sua demonstração, apresentando sempre que possível interpretações geométricas de forma a contribuir com a compreensão. Para cada umas das versões apresentadas exibimos uma elementar ou elegante prova que aliou diversos conhecimentos de forma simultânea. Primeiramente, trouxemos alguns resultados e definições preliminares. Em seguida, apresentamos e provamos resultados sobre conjuntos Lipschitz normalmente mergulhados e, como consequência, mostramos que toda subvariedade compacta do espaço Euclidiano é Lipschitz normalmente mergulhado. Em seguida fizemos um estudo sobre a invariância do cone tangente por lipeomorfismo e apresentamos uma prova clara e detalhada. De posse deste último resultado, demonstramos a versão no infinito do Teorema de regularidade e provamos que todo conjunto analítico complexo, com um único cone tangente no infinito plano é um subespaço linear.

Trabalhos recentes promoveram avanços no intuito de generalizar os resultados de regularidade, em especial, o Teorema 3.1, evidenciando a significância da temática. Destacamos a Proposição 3.10 de [22], o Teorema 3.1 e 4.1 em [19].

Vale frisar ainda que o estudo realizado nesse trabalho possui um caráter integrador dos conhecimentos matemáticos, tendo em vista que ao longo do texto relacionamos objetos de análise real, topologia, espaços métricos, geometria algébrica e geometria diferencial. Portanto, o Teorema de regularidade Lipschitz, além de permitir a aplicação direta de ferramentas adquiridas ao longo da pós-graduação, serve como motivação para estudos futuros uma vez que existem inúmeros problemas em aberto nessa direção. Destacamos por exemplo: É possível classificar as superfícies reais na categoria lipschitz com respeito a métrica extrínseca?

## REFERÊNCIAS

- [1] BIRBRAIR, L.; FERNANDES, A.; LÊ, D. T.; SAMPAIO, J. E. Lipschitz regular complex algebraic sets are smooth. **Proceedings of the American Mathematical Society**, [s.l], v. 144, n. 3, p.983–987, 2016.
- [2] BIRBRAIR, L.; MOSTOWSKI, T. Normal embeddings of semialgebraic sets. **Michigan Mathematical Journal**, [s.l], v. volume, n. 47, p. 125–132, 2000.
- [3] BOBADILLA, J. F.; FERNANDES, A.; SAMPAIO, J. E. Multiplicity and degree as bi-Lipschitz invariants for complex sets. **Journal of Topology**, [s.l], v. 11, n. 4, p. 958–966, 2018.
- [4] BOCHNAK, J.; COSTE, M.; ROY, M.-F. **Real Algebraic Geometry**. 1. ed. New York: Springer, 1998, v. 36.
- [5] CHIRKA, E. M. **Complex Analytic Sets**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [6] COSTE, M. **An introduction to o-minimal geometry**. Pisa: 2000, Instituti editoriali e poligrafici internazionali.
- [7] DENKOWSKI, M.; TIBAR, M. Testing Lipschitz non-normally embedded complex spaces. **Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie**, [s.l], v. 62, n. 1, p. 93–100. 2019.
- [8] DIAS, L. R.; RIBEIRO, N. R. Lipschitz normally embedded set and tangent cones at infinity. **The Journal of Geometric Analysis**, [s.l] v. 32, n. 2, p. 51, 2022.
- [9] FERNANDES, A.; SAMPAIO, J. E. On Lipschitz rigidity of complex analytic sets. **The Journal of Geometric Analysis**, [s.l], v. 30, n. 1, p. 706–718, 2020.
- [10] FERNANDES, A.; SAMPAIO, J. E. Tangent cones of Lipschitz normally embedded sets are Lipschitz normally embedded. Appendix by Anne Pichon and Walter D. Neumann. **International Mathematics Research Notices**. [s.l], nº 15. p. 4880–4897. Oxford University Press. 2019.
- [11] KERNER, D.; PEDERSEN, H. M.; RUAS, M. Lipschitz normal embeddings in the space of matrices. **Mathematische Zeitschrift**, [s.l] v. 290, n. 1-2, p. 485–507, 2018.
- [12] KURDYKA, K.; ORRO, P. Distance géodésique sur un sous-analytique. **Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid**, v. 10, n. Special Issue, suppl., p. 173–182, 1997.

- [13] LÊ, C.-T.; PHAM, T.-S. On tangent cones at infinity of algebraic varieties. **Journal of Algebra and Its Applications**,<sup>[s.l]</sup> v. 17, n. 08, 2018.
- [14] LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 14. ed. Rio de Janeiro:IMPA, 2013. (Projeto Euclides, v.2).
- [15] MENDES, R.; SAMPAIO, J. E. On the Link of Lipschitz Normally Embedded Sets. **International Mathematics Research Notices**,<sup>[s.l]</sup> p. rnad215. <https://doi.org/10.1093/imrn/rnad215>. 2023.
- [16] MUMFORD, D. **The red book of varieties and schemes: includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians**. Berlin v. 1358 of serie. Berlin: Lectures Notes in Mathematics, 2. ed., 1999. Springer.
- [17] PRILL, D. Cones in complex affine space are topologically singular. **Proc. Am. Math. Soc.**,<sup>[s.l]</sup> v. 18, p. 178–182, 1967.
- [18] SAMPAIO, J. E. Bi-Lipschitz homeomorphic subanalytic sets have bi-Lipschitz homeomorphic tangent cones. **Sel. Math.**,<sup>[s.l]</sup> v. 2, n. 22, p. 553–559, 2016.
- [19] SAMPAIO, J.E. On Lipschitz Geometry at infinity of complex analytic sets. **Calc. Var.**,<sup>[s.l]</sup>, p.62–69. <https://doi.org/10.1007/s00526-022-02410-5>.2023.
- [20] SAMPAIO, J. E. **Regularidade Lipschitz, invariancia da multiplicidade e a geometria dos cones tangentes de conjuntos analiticos**. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do Ceará - Centro de Ciências, Fortaleza, 2015.
- [21] SAMPAIO, J. E. Multiplicity, regularity and blow-spherical equivalence of complex analytic sets. **Asian Journal of Mathematics**, <sup>[s. l]</sup>, 24(5), 803–820. <https://doi.org/10.4310/AJM.2020.V24.N5.A4.2020>.
- [22] SAMPAIO, J.E., SILVA, E. C. Classification of complex algebraic curves under blow-spherical equivalence. **Rev Mat Complut** **38**,<sup>[s. l]</sup>, p. 419–443 . <https://doi.org/10.1007/s13163-024-00508-2>.2025.
- [23] SAMPAIO, J. E.; SILVA, E. C. On bi-Lipschitz invariance and the uniqueness of tangent cones. **Journal of Singularities**,<sup>[s.l]</sup>, v. 25, p. 393–402, 2022.