



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DOUTORADO EM MATEMÁTICA

JOSÉ WALISSON VIEIRA DE SOUSA

ESTIMATIVA DE CARLESON PARA O g -LAPLACIANO EM DOMÍNIOS
NTA

FORTALEZA

2025

JOSÉ WALISSON VIEIRA DE SOUSA

ESTIMATIVA DE CARLESON PARA O g -LAPLACIANO EM DOMÍNIOS NTA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Matemática. Área de Concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. José Ederson Melo Braga.

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S697e Sousa, José Walisson Vieira de.
Estimativa de Carleson para o g -Laplaciano em domínios NTA / José Walisson Vieira de Sousa. – 2025.
125 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2025.

Orientação: Prof. Dr. José Ederson Melo Braga.

1. Estimativa de Carleson. 2. g -Laplaciano. 3. Domínio NTA. 4. Desigualdade de Harnack até a fronteira. I. Título.

CDD 510

JOSÉ WALISSON VIEIRA DE SOUSA

ESTIMATIVA DE CARLESON PARA O g -LAPLACIANO EM DOMÍNIOS NTA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Matemática. Área de Concentração: Análise.

Aprovada em: 19/09/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Ederson Melo Braga
(Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos
Universidade Federal de Campina Grande
(UFCG)

Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares
Universidade de São Paulo (USP)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que me sustentou e guiou nesta jornada.

À minha família. Não tem outra forma de dizer: obrigado por tudo. Por acreditarem em mim até quando eu duvidava, por todo o suporte pra eu chegar até aqui e por serem meu porto seguro de sempre. Sem vocês, nada disso faria sentido.

Em uma jornada tão longa, de mais de 10 anos desde a graduação até o doutorado, a gente coleciona muitas amizades queridas. Por isso, para não correr o risco injusto de esquecer alguém, deixo aqui minha gratidão a todos. Ao pessoal da Matemática da UFC, à turma do inglês, aos meus amigos e irmãos da igreja e a todas as amizades que surgiram pelo caminho: cada um de vocês, com seu bom humor e sua amizade, me ajudou a manter os pés no chão e a não esquecer do que realmente importa. Muito obrigado por tudo.

Ao meu orientador, Ederson Braga, meu muito obrigado. Sou grato não apenas pela orientação técnica, mas pela paciência nos momentos de dúvida e, principalmente, pela confiança que depositou em meu trabalho, me dando autonomia para crescer. Sua condução foi fundamental.

Agradeço imensamente aos professores da banca, por aceitarem o convite e pelas valiosas críticas e sugestões que certamente enriqueceram esta pesquisa. Estendo minha gratidão à Andrea, da secretaria, que foi um apoio fundamental para descomplicar a burocracia e que sempre me atendeu com gentileza para resolver qualquer dúvida.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

Esta tese investiga a Estimativa de Carleson, um resultado fundamental em Análise Harmônica, Teoria do Potencial e Teoria de Equações Diferenciais Parciais (EDPs), estabelecido inicialmente por Lennart Carleson e que se revelou essencial para diversas áreas. De maneira geral, a Estimativa de Carleson estabelece um controle superior para funções que são soluções de EDPs, positivas e que se anulam em uma parte da fronteira de um domínio. Esse controle é dado pelo valor da função em um ponto fixo, distante da fronteira, e por uma constante universal que depende apenas da geometria do domínio e dos parâmetros da EDP. Discutimos a profunda relação desse conceito com a Desigualdade de Harnack até a Fronteira (ou Princípio de Harnack até a Fronteira), um resultado que envolve o quociente de duas funções e, sob as mesmas hipóteses da Estimativa de Carleson, garante que essas funções decaem para zero na mesma velocidade à medida que nos aproximamos da fronteira do domínio. A pesquisa na área tem avançado significativamente na generalização desses resultados para operadores não lineares. Nesse contexto, nosso trabalho se concentra no g -Laplaciano, um operador que abrange uma ampla classe de EDPs elípticas não lineares. Com base em desenvolvimentos recentes que obtiveram a Estimativa de Carleson para soluções não homogêneas do g -Laplaciano em domínios tipo semibola, o principal objetivo desta tese é estender essa estimativa para domínios NTA, uma classe geométrica substancialmente mais geral, o que acarreta desafios técnicos consideráveis. Para tanto, provaremos ingredientes essenciais como um refinamento da Desigualdade de Harnack para domínios uniformes e um lema de oscilação do tipo De Giorgi até a fronteira. Adicionalmente, esta tese apresenta a Desigualdade de Harnack de Fronteira como uma aplicação da Estimativa de Carleson obtida, solidificando a relação entre os dois resultados no nosso novo contexto. Por fim, exploramos outra importante aplicação: o estabelecimento de uma estimativa de crescimento exponencial para soluções do g -Laplaciano em domínios cilíndricos ilimitados com base NTA, generalizando teoremas de crescimento análogos para outros domínios e operadores na literatura.

Palavras-chave: estimativa de Carleson; g -Laplaciano; domínio NTA; desigualdade de Harnack até a fronteira.

ABSTRACT

This thesis investigates the Carleson estimate, a fundamental result in Harmonic Analysis, Potential Theory, and the Theory of Partial Differential Equations (PDEs), initially established by Lennart Carleson and proven essential for various fields. Generally, the Carleson estimate establishes an upper bound for positive PDE solutions that vanish on a portion of a domain's boundary. This control is given by the function's value at a fixed point, distant from the boundary, and a universal constant that depends only on the domain's geometry and the PDE's parameters. We discuss the profound relationship between this concept and the Boundary Harnack Inequality (or Boundary Harnack Principle), a result involving the quotient of two functions that, under the same hypotheses as the Carleson estimate, guarantees these functions decay to zero at the same rate as we approach the domain's boundary. Research in the area has advanced significantly in generalizing these results to nonlinear operators. In this context, our work focuses on the g -Laplacian, an operator that includes a wide class of nonlinear elliptic PDEs. Building on recent developments that obtained the Carleson estimate for inhomogeneous solutions of the g -Laplacian in semi-ball type domains, the main objective of this thesis is to extend this estimate to NTA domains, a substantially more general geometric class, which involve considerable technical challenges. To this end, we will prove essential ingredients such as a refinement of the Harnack Inequality for uniform domains and a De Giorgi-type oscillation lemma up to the boundary. Additionally, this thesis presents the Boundary Harnack Inequality as an application of the obtained Carleson estimate, solidifying the relationship between the two results in our new context. Finally, we explore another important application: the establishment of an exponential growth estimate for solutions of the g -Laplacian in unbounded cylindrical domains with an NTA base, generalizing analogous growth theorems for other domains and operators in the literature.

Keywords: Carleson estimate; g -Laplacian; NTA domain; boundary Harnack inequality.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Estimativa de Carleson em termos genéricos.	9
Figura 2 – Gráficos de G e \tilde{G} a partir de g e \tilde{g}	16
Figura 3 – Visualização geométrica de $ag(a) = G(a) + \tilde{G}(g(a))$	18
Figura 4 – Esboço da condição <i>cigar</i>	35
Figura 5 – Floco de neve de Von Koch	35
Figura 6 – Cúspides externas não permitem <i>cigar</i>	36
Figura 7 – Domínios com arestas internas não satisfazem <i>bounded turning</i>	36
Figura 8 – Representação geométrica da condição <i>carrot</i>	38
Figura 9 – As três possibilidades para z	40
Figura 10 – Cadeia de Harnack de x até y	42
Figura 11 – Condição de <i>corkscrew</i>	43
Figura 12 – O Lema das quatro bolas	49
Figura 13 – Colagem $C^{1,1}$ entre f e g	51
Figura 14 – <i>Cigar</i> conectando x ao centro da bola	55
Figura 15 – Objetivo: ver que q está acima do nível $\{x_n = 2\epsilon r\}$	58
Figura 16 – Regularização da poligonal de x a y	61
Figura 17 – Disposição final dos elementos: de x a \tilde{x} temos $\tilde{\gamma}$ sendo um segmento de reta	62
Figura 18 – Construção da <i>carrot</i> a partir de <i>cigar</i>	65
Figura 19 – Construção da Harnack chain	69
Figura 20 – Bola de raio $r/4M_\Omega$ dentro de $\{V = s\}$	85
Figura 21 – Elementos da demonstração	97
Figura 22 – Representação do conjunto $\Gamma_{r,w}^+$	102
Figura 23 – Cilindro em torno de um segmento de pontos de corkscrew	104
Figura 24 – Desigualdade de Harnack de fronteira	108
Figura 25 – Cenário da Estimativa superior e o conjunto V	113
Figura 26 – Cadeia de bolas ligando ξ a $\xi_{5r'}$	114
Figura 27 – Cenário da Estimativa inferior	116

LISTA DE SÍMBOLOS

Ω	Um domínio em \mathbb{R}^n , i.e., um subconjunto de \mathbb{R}^n que é aberto e conexo
$A \Subset B$	$A \subset \bar{A} \subset B$ e \bar{A} é compacto
$B_r(x)$	Bola centrada em x com raio n
$B_r^+(x)$	No geral, $B_r^+(x) := B_r(x) \cap \Omega$.
$\delta_D(x)$	$\delta_D(x) := \text{dist}(x, \partial D)$. Apenas $\delta(x)$ quando $D = \Omega$
G	N -função ou Função de Young
g	Derivada a direita de G
\tilde{g}	$\tilde{g}(s) = \sup\{t \geq 0; g(t) \leq s\}$
\tilde{G}	N -função complementar a G
P.C.	Condição de Primitiva
Q.C.	Condição de Quociente
$\mathcal{L}_G(\Omega)$	Classe de Orlicz da função G
$L^G(\Omega)$	Espaço de Orlicz
$\ u\ _G$	Norma de Luxemburg
$W^{1,G}(\Omega)$	Espaço de Orlicz-Sobolev
$\ u\ _{W^{1,G}(\Omega)}$	$\max \left\{ \ u\ _G, \left\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\ _G, \dots, \left\ \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\ _G \right\}$
$W_{\text{loc}}^{1,G}(\Omega)$	$\{u; u \in W^{1,G}(V) \text{ para todo } V \Subset \Omega\}$
$W_c^{1,G}(\Omega)$	$\{u \in W^{1,G}(\Omega) ; \text{supp } u \Subset \Omega\}$
Δ_g	g -Laplaciano
$k_\Omega(\cdot, \cdot)$	Distância quasi hiperbólica
$l(\gamma)$	Comprimento de uma curva γ
$\gamma_{x,y}$	O subarco de γ que vai de x até y , onde $x, y \in \gamma$
$\xi_r(x_0)$	É um ponto de corkscrew associado ao ponto $x_0 \in \partial\Omega$ e ao raio $r > 0$
$K_{r,f,w}$	$rg^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \ f\ _{L^q(B_r(w))} \right)$. E $K_{r,f,w}^+$ quando olhamos a norma de f em $B_r^+(w)$
R.D.H.	Refinamento da Desigualdade de Harnack
L.O.F.	Lema da Oscilação até a fronteira

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	O OPERADOR g -LAPLACIANO	12
2.1	Sobre N -funções e Espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev	12
2.2	Sobre o g -Laplaciano	21
3	DOMÍNIOS	33
3.1	Domínio Uniforme	33
3.2	Domínio NTA	41
3.3	Domínio $C^{1,1}$	46
4	ESTIMATIVA DE CARLESON	64
4.1	Desigualdade de Harnack refinada	64
4.2	Lema de oscilação até a fronteira	74
4.3	A Estimativa de Carleson	87
5	APLICAÇÕES	100
5.1	Crescimento exponencial de soluções em domínios ilimitados	100
5.2	Desigualdade de Harnack de fronteira para domínios $C^{1,1}$	107
5.2.1	<i>Estimativa superior: uma aplicação da Estimativa de Carleson</i>	110
5.2.2	<i>Princípio de Hopf - Estimativa inferior</i>	115
5.2.3	<i>A Desigualdade de Harnack até a Fronteira</i>	118
6	CONCLUSÃO	121
	REFERÊNCIAS	123

1 INTRODUÇÃO

No início dos anos 1960, **Lennart Carleson**, ao estudar o comportamento de funções harmônicas sob a ótica da análise de valores-limite não-tangenciais, provou um resultado que, embora inicialmente considerado apenas um artefato técnico, revelou-se fundamental para o desenvolvimento de áreas como a teoria do potencial e a teoria das equações diferenciais parciais (EDPs): a Estimativa de Carleson (veja o lema da Seção 4 de (Carleson, 1962)).

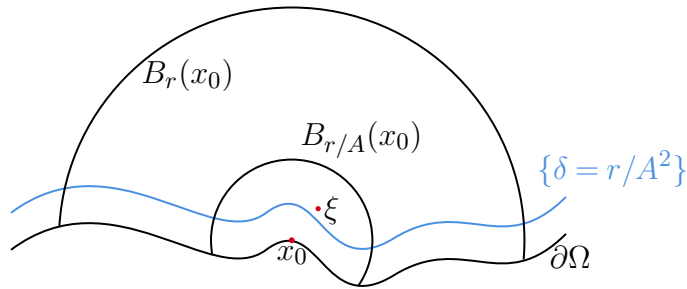
De forma geral, uma versão moderna dessa estimativa pode ser descrita assim: dado um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com certa regularidade geométrica, e uma função $u \geq 0$ que seja solução de uma EDP em uma região de Ω próxima à fronteira, com u se anulando continuamente sobre $\partial\Omega$, então é possível estabelecer, em uma sub-região de Ω , um controle superior para o valor de $\sup u$. Esse controle depende apenas do valor de u em um ponto específico do domínio (afastado da fronteira), ajustado por uma constante universal, determinada unicamente pela geometria de Ω e pelos parâmetros da EDP considerada.

Mais precisamente, para o caso de funções harmônicas, por exemplo, a Estimativa de Carleson afirma que existem um raio $R > 0$ e uma constante $A \geq 1$ tais que, para qualquer ponto $x_0 \in \partial\Omega$ e todo $r < R$, se $u \geq 0$ é harmônica em $B_r^+(x_0) := B_r(x_0) \cap \Omega$ e se anula continuamente em $B_r(x_0) \cap \partial\Omega$, então

$$\sup_{B_{\frac{r}{A}}^+(x_0)} u \leq C u(\xi),$$

onde $C \geq 1$ depende apenas de Ω (e da EDP, se esta for mais geral), e ξ é um ponto de $B_{r/A}^+(x_0)$ tal que, por exemplo, $\delta(\xi) := \text{dist}(\xi, \partial\Omega) \geq r/A^2$. Veja a Figura 1.

Figura 1 – Estimativa de Carleson em termos genéricos.



Fonte: elaborada pelo autor.

Trabalhando um pouco mais essa estimativa, obtém-se a seguinte versão:

$$\sup_{B_{\frac{r}{A}}^+(x_0)} u \leq C \inf_{\Gamma} u, \quad \text{onde} \quad \Gamma := B_{\frac{r}{A}}^+(x_0) \cap \left\{ \delta \geq \frac{r}{2A} \right\},$$

a qual se assemelha muito à Desigualdade de Harnack clássica para o interior. Essa semelhança motivou alguns autores a chamarem tal estimativa de **Princípio de Harnack até a fronteira** ou mesmo de **Desigualdade de Harnack até a fronteira**, como ocorre, por exemplo, em (Caffarelli *et al.*, 1981), cujas ideias serão reutilizadas nesta tese. No entanto, é importante notar que esse nome atualmente se refere a outro resultado: uma generalização até a fronteira de uma reformulação da Desigualdade de Harnack envolvendo duas funções positivas, e não apenas uma.

Mais precisamente, dizemos que vale a Desigualdade de Harnack de fronteira quando, sob as mesmas condições da Estimativa de Carleson, se $u, v > 0$ são funções harmônicas, então existe uma constante $C \geq 1$, dependendo apenas de Ω (e, possivelmente, da EDP), tal que

$$C^{-1} \frac{u(y)}{v(y)} \leq \frac{u(x)}{v(x)} \leq C \frac{u(y)}{v(y)}, \quad \text{para todos } x, y \in B_{r/A}^+(x_0).$$

Veja a introdução da Seção 5.2 para mais detalhes sobre a motivação e o desenvolvimento histórico desse resultado.

O fato é que ambos os resultados — a Estimativa de Carleson e a Desigualdade de Harnack de fronteira — evoluíram em conjunto ao longo das últimas décadas, e sob certas condições, pode-se inclusive demonstrar a equivalência entre eles (veja, por exemplo, (Aikawa, 2008)).

Entre os principais contribuintes para o avanço dessa teoria está **Hiroaki Aikawa**, que, além do trabalho citado, desenvolveu importantes resultados em contextos variados. Em (Aikawa, 2001) e (Aikawa, 2009), por exemplo, ele aprofunda a relação entre esses princípios e o estudo de Martin boundary e das funções de Green. Já em (Aikawa; Shanmugalingam, 2005), em colaboração com **Nageswari Shanmugalingam**, os autores obtêm a Estimativa de Carleson para o p -Laplaciano em domínios de John, utilizando uma técnica denominada “argumento de Domar”, distinta dos métodos clássicos.

Outros marcos fundamentais incluem o trabalho de **David Jerison** e **Carlos Kenig** (Jerison; Kenig, 1982), no qual são introduzidos os domínios NTA (*Non Tangentially Accessible*) e, dentro desse contexto, são estabelecidas tanto a Estimativa de Carleson

quanto a Desigualdade de Harnack de fronteira. Veja a Seção 3.2 para a definição de domínio NTA.

Em relação à generalização para operadores mais complexos, destaca-se o artigo de **Tomasz Adamowicz** e **Niklas Lundström** (Adamowicz; Lundström, 2016), no qual os autores tratam da Estimativa de Carleson para o $p(x)$ -Laplaciano em domínios NTA.

Por fim, vale destacar as contribuições mais recentes voltadas à generalização da estimativa de Carleson para operadores não lineares, como o g -Laplaciano e até mesmo para operadores totalmente não lineares. Nesse contexto, destacam-se os trabalhos de **J. Ederson Braga**, como (Braga, 2017), (Braga; Moreira, 2021) e (Braga *et al.*, 2023), sendo os dois últimos em colaboração com **Diego Moreira**, e o último contando também com a participação do autor desta tese. Nesse trabalho mais recente, é estabelecida uma versão da Estimativa de Carleson para soluções não homogêneas do g -Laplaciano, isto é, da equação $\Delta_g u = f$, com $f \in L^q$, $q > n$, em domínios do tipo semibola.

O objetivo desta tese é estender esse resultado para domínios NTA, substituindo a regularidade da semibola por uma estrutura geométrica substancialmente mais geral, o que acarreta desafios técnicos significativos. Além disso, busca-se apresentar a Desigualdade de Harnack de fronteira como aplicação da estimativa obtida, bem como estabelecer uma estimativa de crescimento exponencial para soluções do g -Laplaciano em domínios cilíndricos ilimitados com base NTA.

No Capítulo 2, discutiremos o operador Δ_g , apresentando os conceitos e resultados fundamentais. No Capítulo 3, descreveremos as principais características de domínios uniformes, NTA e $C^{1,1}$, que serão usados ao longo do texto.

Já no Capítulo 4, provaremos dois ingredientes essenciais: um refinamento da Desigualdade de Harnack para domínios uniformes, e um lema de oscilação, do tipo De Giorgi, até a fronteira. Com esses ingredientes, seremos capazes de estabelecer a Estimativa de Carleson desejada.

Por fim, no Capítulo 5, usaremos a estimativa de Carleson para provar uma estimativa de crescimento de soluções do g -Laplaciano em cilindros ilimitados com base NTA. Além disso, usaremos a Estimativa de Carleson em conjunto com uma versão quantitativa do Lema de Hopf-Oleinik para obter a Desigualdade de Harnack de fronteira.

2 O OPERADOR g -LAPLACIANO

Neste capítulo, abordaremos temas fundamentais relacionados aos **Espaços de Orlicz** e ao operador g -Laplaciano, dividindo o conteúdo em duas seções principais.

Na primeira seção, apresentaremos a teoria básica dos espaços de Orlicz, iniciando com a definição de N -**função** e explorando as propriedades essenciais dessas funções. Também discutiremos a construção dos espaços de Orlicz e dos espaços de Orlicz-Sobolev, apresentando teoremas relevantes para esta tese.

Na segunda seção, dedicaremos nossa atenção ao operador g -Laplaciano, começando pela definição da **Condição de Primitiva (PC)** e **Condição do Quociente (QC)**, que são cruciais para o estudo desse operador. Apresentaremos, em seguida, o operador g -Laplaciano propriamente dito e discutiremos várias estimativas relevantes para N -funções que satisfazem as condições (PC) e (QC). Além disso, exploraremos diversos teoremas clássicos de equações diferenciais parciais relacionados ao g -Laplaciano, incluindo a **Desigualdade de Harnack**, o **Lema de Hopf**, o **Princípio da comparação** e a existência de barreiras. Esses resultados são essenciais para os objetivos deste trabalho.

2.1 Sobre N -funções e Espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev

Definição 2.1 (N -função, Função de Young). *Uma função $G: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ é uma N -função, ou função de Young, se G é dada por*

$$G(t) = \int_0^{|t|} g(s)ds, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

para alguma $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ que satisfaz as seguintes condições:

- i) $g(0) = 0$, $g(s) > 0$ para todo $s > 0$;
- ii) g é não decrescente;
- iii) g é contínua a direita, isto é, para todo $t \geq 0$, $\lim_{s \rightarrow t^+} g(s) = g(t)$;
- iv) $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = \infty$.

Segue da definição acima que G é contínua e convexa. Na verdade, existe outra maneira bastante comum, e equivalente, de definir uma N -função partindo deste ponto de vista:

Definição 2.2. *Uma função convexa e contínua $G: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ é uma N -função se satisfaz:*

- i') G é par, isto é, $G(t) = G(-t)$;

- ii') G é crescente em $[0, \infty)$;
- iii') $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(t)}{t} = 0$;
- iv') $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G(t)}{t} = \infty$.

A função G da definição acima possui derivada à direita em cada ponto de \mathbb{R} e tem o 0 como única raiz, logo, assume a representação da primeira definição. Uma demonstração de que as definições acima são equivalentes pode ser encontrada em (Krasnosel'skii; Rutickii, 1961). Apresentamos a seguir alguns exemplos de N -funções.

Exemplo 2.3. Considere $G: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ e $1 < p < \infty$, são N -funções os seguintes exemplos:

1. $G(t) = |t|^p$, com $g(t)$ dada por $g(t) = pt^{p-1}$, ou ainda, $G(t) = \frac{|t|^p}{p}$, com $g(t) = t^{p-1}$;
2. $G(t) = e^{|t|^p} - 1$, com $g(t) = pt^{p-1}e^{|t|^p}$;
3. $G(t) = (1 + |t|)\ln(1 + |t|) - |t|$, com $g(t) = \ln(1 + |t|)$;
4. $G(t) = (|t|^p - 1)e^{|t|^p} + 1$, com $g(t) = pt^{2p-1}e^{|t|^p}$.

O último exemplo nada mais é que a composição da G do exemplo 3 com a do exemplo 2. Acontece que a composição de N -funções também é uma N -função, embora o fato mais interessante seja a recíproca deste fato, como a seguir:

Proposição 2.4. Se $G_1: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ e $G_2: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ são N -funções, então $G = G_2 \circ G_1$ é uma N -função. Reciprocamente, toda N -função $G: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ pode ser escrita como a composição de duas N -funções.

Demonstração. Veja (Krasnosel'skii; Rutickii, 1961). □

Definição 2.5 (N -função complementar). Considere G uma N -função e $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sua derivada à direita. Definindo $\tilde{g}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ por

$$\tilde{g}(s) = \sup\{t \geq 0; g(t) \leq s\},$$

a N -função complementar a G é a função $\tilde{G}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{G}(t) = \int_0^{|t|} \tilde{g}(s) ds, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Proposição 2.6. A \tilde{G} da definição acima é, de fato, uma N -função.

Demonstração. Devemos mostrar que \tilde{g} satisfaz as quatro propriedades da Definição 2.1. Primeiro, tomando $s = 0$, o conjunto $\{t \geq 0; g(t) \leq 0\}$ tem um único elemento: o 0. Logo,

$\tilde{g}(0) = 0$. Além disso, para $s > 0$, como g é contínua à direita no 0, vai existir um $t_0 > 0$ tal que $g(t_0) < s$. Logo, $\tilde{g}(s) \geq t_0 > 0$ e o primeiro item está feito.

Para o segundo item, tome $s_1 \leq s_2$. Teremos

$$\{t \geq 0; g(t) \leq s_1\} \subset \{t \geq 0; g(t) \leq s_2\},$$

daí, tomando o sup, $\tilde{g}(s_1) \leq \tilde{g}(s_2)$.

Vamos mostrar agora que \tilde{g} é contínua à direita, isto é, para todo $s_0 \in \mathbb{R}^+$, $\lim_{s \rightarrow s_0^+} \tilde{g}(s) = \tilde{g}(s_0)$. Supondo que isso seja falso, temos que existe um $\epsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe um $s_\delta \in (s_0, s_0 + \delta)$ satisfazendo $\tilde{g}(s_\delta) - \tilde{g}(s_0) \geq \epsilon_0$. Daí,

$$\tilde{g}(s_0) + \frac{\epsilon_0}{2} \leq \tilde{g}(s_\delta) - \frac{\epsilon_0}{2},$$

e, como g é não decrescente,

$$g\left(\tilde{g}(s_0) + \frac{\epsilon_0}{2}\right) \leq g\left(\tilde{g}(s_\delta) - \frac{\epsilon_0}{2}\right). \quad (2.1)$$

Pela definição de $\tilde{g}(s)$ como o supremo de um conjunto, para qualquer $\epsilon > 0$, vai existir um $t_\epsilon \geq 0$ satisfazendo $g(t_\epsilon) \leq s$ e $\tilde{g}(s) - \epsilon < t_\epsilon$. Em particular, como g é não decrescente, $g(\tilde{g}(s) - \epsilon) \leq g(t_\epsilon) \leq s$. Voltando na equação (2.1), obtemos

$$g\left(\tilde{g}(s_0) + \frac{\epsilon_0}{2}\right) \leq g\left(\tilde{g}(s_\delta) - \frac{\epsilon_0}{2}\right) \leq s_\delta.$$

Mandando $\delta \rightarrow 0$ concluímos

$$g\left(\tilde{g}(s_0) + \frac{\epsilon_0}{2}\right) \leq s_0$$

o que é um absurdo contra a definição de $\tilde{g}(s_0)$ como o supremo dos t que satisfazem $g(t) \leq s_0$. Logo,

$$\lim_{s \rightarrow s_0^+} \tilde{g}(s) = \tilde{g}(s_0).$$

Resta mostrar que $\lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{g}(s) = \infty$. Novamente, supondo falso, deveríamos ter um $M > 0$ tal que, para todo $N > 0$, existe $s_N > N$ com $\tilde{g}(s_N) \leq M$. Uma vez que g é bem definida para todos os valores em $[0, \infty)$, temos $g(M) < \infty$. Tomando $N_0 = g(M)$, existirá um $s_{N_0} > g(M)$ que satisfaz $\tilde{g}(s_{N_0}) \leq M$. Como g é não decrescente,

$$g(\tilde{g}(s_{N_0})) \leq g(M). \quad (2.2)$$

Pela definição de \tilde{g} , para todo $s > 0$, $g(\tilde{g}(s)) \geq s$. De fato, caso $g(\tilde{g}(s)) < s$, teríamos que existe um ϵ tal que $g(\tilde{g}(s)) \leq s - \epsilon < s$. Daí,

$$\tilde{g}(s) \in \{t \geq 0 ; g(t) \leq s - \epsilon\},$$

em particular,

$$\tilde{g}(s) \leq \sup\{t \geq 0 ; g(t) \leq s - \epsilon\} = \tilde{g}(s - \epsilon),$$

o que é um absurdo, pois \tilde{g} é não decrescente. Segue que para todo $s > 0$, $g(\tilde{g}(s)) \geq s$.

Voltando para (2.2), usando a observação acima, obtemos

$$s_{N_0} \leq g(\tilde{g}(s_{N_0})) \leq g(M),$$

o que é um absurdo, pois s_{N_0} foi tomado maior que $g(M)$. Logo, vale $\lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{g}(s) = \infty$. \square

Dentro da demonstração acima, usamos duas propriedades interessantes sobre g e \tilde{g} . Vimos que, para todos $s, \epsilon > 0$, vale

$$g(\tilde{g}(s)) \geq s \geq g(\tilde{g}(s) - \epsilon). \quad (2.3)$$

O interessante é que também vale, para todos $t, \epsilon > 0$,

$$\tilde{g}(g(t) - \epsilon) \leq t \leq \tilde{g}(g(t)). \quad (2.4)$$

Para a desigualdade da direita basta observar que $t \in \{s \geq 0 ; g(s) \leq g(t)\}$, logo

$$t \leq \sup\{s \geq 0 ; g(s) \leq g(t)\} = \tilde{g}(g(t)).$$

Para mostrar que $\tilde{g}(g(t) - \epsilon) \leq t$ note que, para todo $r \in \{s \geq 0 ; g(s) \leq g(t) - \epsilon\}$,

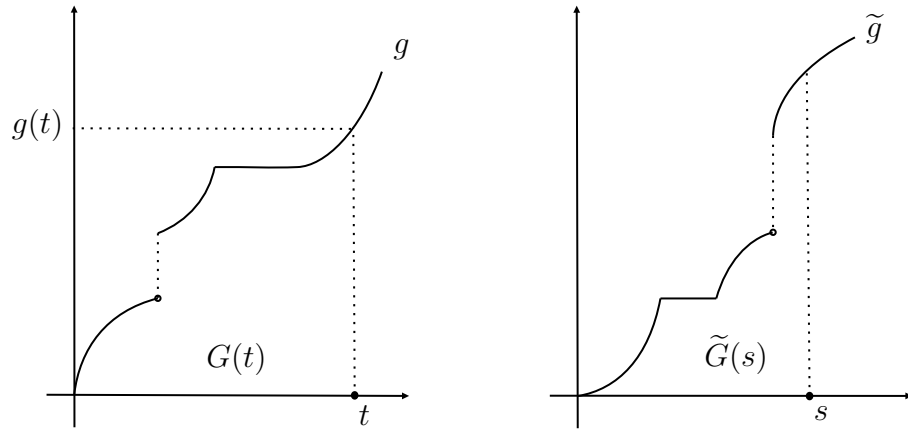
$$g(r) \leq g(t) - \epsilon < g(t)$$

o que implica que $r < t$, uma vez que g é não decrescente. Sendo assim, $\sup\{s \geq 0 ; g(s) \leq g(t) - \epsilon\} \leq t$, como queríamos demonstrar.

As equações (2.2) e (2.4) acima nos permitem provar um fato esperado pela uso da palavra “complementar” na definição anterior. Veja a proposição a seguir e a Figura 2.

Proposição 2.7. *Se \tilde{G} é complementar a G , então G é complementar a \tilde{G} . Além disso, assumindo g contínua, se g é invertível (ou crescente, de maneira equivalente), temos $\tilde{g} = g^{-1}$.*

Figura 2 – Gráficos de G e \tilde{G} a partir de g e \tilde{g} .



Fonte: adaptado de (Krasnosel'skii; Rutickii, 1961).

Demonstração. Precisamos mostrar que $g(t)$ pode ser obtida de maneira similar a definição de \tilde{g} . Mais precisamente, vamos mostrar que

$$g(t) = \sup\{s \geq 0 ; \tilde{g}(s) \leq t\}.$$

Primeiro, dado $r \in \{s \geq 0 ; \tilde{g}(s) \leq t\}$, teremos $g(\tilde{g}(r)) \leq g(t)$, pela monotonicidade de g , daí, pela equação (2.3),

$$r \leq g(\tilde{g}(r)) \leq g(t),$$

logo, $g(t)$ é uma cota superior para o conjunto $\{s \geq 0 ; \tilde{g}(s) \leq t\}$. Agora tome um $\epsilon > 0$ arbitrário, para mostrar que $g(t)$ é de fato o supremo do conjunto $\{s \geq 0 ; \tilde{g}(s) \leq t\}$ devemos mostrar que existe um s_ϵ nesse conjunto que satisfaz $g(t) - \epsilon < s_\epsilon$. Então, tomando $s_\epsilon = g(t) - \epsilon/2$ só precisamos mostrar que $s_\epsilon \in \{s \geq 0 ; \tilde{g}(s) \leq t\}$, ou seja, $\tilde{g}(s_\epsilon) \leq t$. Mas isso é exatamente o que diz a primeira desigualdade de (2.4). Portanto, $g(t)$ é o supremo de $\{s \geq 0 ; \tilde{g}(s) \leq t\}$.

Para a segunda parte do teorema, precisamos mostrar que $g(\tilde{g}(s)) = s$ e $\tilde{g}(g(t)) = t$, para quaisquer $s, t \geq 0$. Já sabemos que $g(\tilde{g}(s)) \geq s$, e, além disso, $g(\tilde{g}(s) - \epsilon) \leq s$. Como g é contínua, mandando $\epsilon \rightarrow 0$, $g(\tilde{g}(s) - \epsilon) \rightarrow g(\tilde{g}(s))$, daí $g(\tilde{g}(s)) \leq s$. Portanto, $g(\tilde{g}(s)) = s$. O caso $\tilde{g}(g(t))$ se obtém de maneira análoga, desde que tenhamos \tilde{g} contínua. Para isso, tome s_0 e vamos mostrar que $\lim_{s \rightarrow s_0^-} \tilde{g}(s) = \tilde{g}(s_0)$. Como \tilde{g} é contínua a direita, só precisamos tratar do caso $s \rightarrow s_0^-$. Como \tilde{g} é não decrescente, teremos $\tilde{g}(s) \leq \tilde{g}(s_0)$ para todo $s < s_0$, daí $\limsup_{s \rightarrow s_0^-} \tilde{g}(s) \leq \tilde{g}(s_0)$. Nos resta mostrar que $\liminf_{s \rightarrow s_0^-} \tilde{g}(s) \geq \tilde{g}(s_0)$, ou igual, uma vez que é impossível ser maior. Caso fosse falso, teríamos $\liminf_{s \rightarrow s_0^-} \tilde{g}(s) < \tilde{g}(s_0)$ e, ainda,

para algum $\epsilon > 0$,

$$\liminf_{s \rightarrow s_0^-} \tilde{g}(s) < \tilde{g}(s_0) - \epsilon.$$

Aplicando g , que é contínua e crescente,

$$s_0 = \liminf_{s \rightarrow s_0^-} s \leq \liminf_{s \rightarrow s_0^-} g(\tilde{g}(s)) = g\left(\liminf_{s \rightarrow s_0^-} \tilde{g}(s)\right) < g(\tilde{g}(s_0) - \epsilon) \leq s_0,$$

o que é um absurdo. Logo, \tilde{g} é contínua e o resultado está completamente provado. \square

Proposição 2.8 (Desigualdade de Young). *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Se G é N -função e \tilde{G} é sua N -função complementar então, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$,*

$$ab \leq G(a) + \tilde{G}(b).$$

Demonstração. Nos é suficiente fazer para $a, b \geq 0$. Supondo inicialmente que $g(a) \leq b$, temos, usando as propriedades de N -funções,

$$\begin{aligned} G(a) + \tilde{G}(b) &= G(a) + \int_0^b \tilde{g}(s) ds \\ &= G(a) + \int_0^{g(a)} \tilde{g}(s) ds + \int_{g(a)}^b \tilde{g}(s) ds \\ &\geq G(a) + \tilde{G}(g(a)) + \tilde{g}(g(a))(b - g(a)) \\ &\geq G(a) + \tilde{G}(g(a)) + a(b - g(a)) \\ &= ab + G(a) + \tilde{G}(g(a)) - ag(a). \end{aligned}$$

Observe agora a Figura 3 a seguir. Veja que a área do retângulo de largura a e altura $g(a)$ é justamente a soma da área azul com a área hachurada, que é $G(g(a))$. Portanto, $ag(a) = G(a) + \tilde{G}(g(a))$. Daí, $G(a) + \tilde{G}(b) \geq ab$.

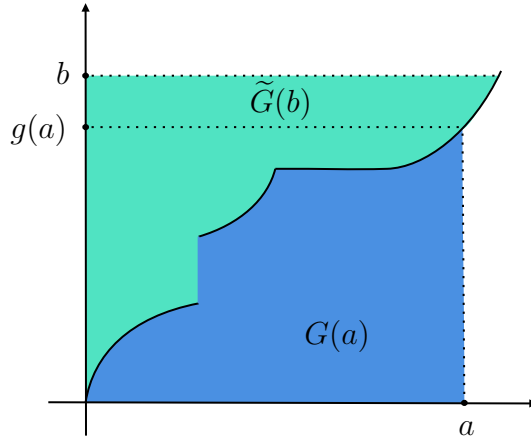
Se tivermos, por outro lado, $g(a) > b$ então $\tilde{g}(b) < a$ e a prova se dá de modo análogo, usando que $b\tilde{g}(b) = G(\tilde{g}(b)) + \tilde{G}(b)$. \square

Estabelecidos os principais conceitos de N -funções, seguiremos então com o próximo passo, que é a apresentação dos espaços de Orlicz.

Definição 2.9 (Classe de Orlicz). *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $G: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ uma N -função. Considere também a medida, bem como a integral, de Lebesgue. Definimos a classe de Orlicz da função G por*

$$\mathcal{L}_G(\Omega) := \left\{ u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável; } \int_{\Omega} G(|u(x)|) dx < \infty \right\}.$$

Figura 3 – Visualização geométrica de $ag(a) = G(a) + \tilde{G}(g(a))$.



Fonte: adaptado de (Krasnosel'skii; Rutickii, 1961).

Observe que no caso de $G(t) = t^p$, para $1 < p < \infty$, temos $\mathcal{L}_G(\Omega) = L^p(\Omega)$, o espaço das funções p -integráveis a Lebesgue. Apesar das classes de Orlicz generalizarem a ideia de espaços de Lebesgue para $1 < p < \infty$, temos o seguinte teorema que mostra o quão grande é o espaço das funções integráveis.

Teorema 2.10. *Seja $L^1(\Omega)$ o espaço das funções integráveis à Lebesgue e \mathfrak{G} o conjunto de todas as N -funções. Então*

$$L^1(\Omega) = \bigcup_{G \in \mathfrak{G}} \mathcal{L}_G(\Omega).$$

Demonstração. Veja Teorema 2.1 de (Ribeiro, 2006). □

Ressaltamos que, a princípio, $\mathcal{L}_G(\Omega)$ não é um espaço vetorial, mas existe uma condição necessária e suficiente para que isso ocorra. A condição denominada na literatura por Δ_2 é satisfeita para G , uma N -função, quando existem constantes $k > 0$ e $t_0 > 0$ tais que

$$G(2t) \leq kG(t) \quad \text{para todo } t \geq t_0. \quad (\Delta_2)$$

No caso de G satisfazer a condição Δ_2 , usamos a notação $G \in \Delta_2$. Nesse sentido, vale:

Teorema 2.11. *$\mathcal{L}_G(\Omega)$ é um espaço vetorial se, e somente se, $G \in \Delta_2$.*

Demonstração. Veja Teorema 2.3 de (Ribeiro, 2006). □

A fim de trabalhar sempre com a estrutura de espaço vetorial, definimos propriamente o que seriam os espaços de Orlicz.

Definição 2.12 (Espaço de Orlicz). *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e G uma N -função. Definimos o espaço de Orlicz da função G , $L^G(\Omega)$, como o menor espaço vetorial que contém $\mathcal{L}_G(\Omega)$.*

Naturalmente, como $L^1(\Omega)$ é um espaço vetorial, teremos, para qualquer N -função G , $L^G(\Omega) \subset L^1(\Omega)$. Além disso, pelo Teorema 2.11, $L^G(\Omega) = \mathcal{L}_G(\Omega)$ se, e somente se, $G \in \Delta_2$.

Uma vez que $L^G(\Omega)$ tem estrutura de espaço vetorial, podemos nos preocupar em inserir uma norma para esse espaço. Na teoria clássica, a primeira norma que surge é a norma de Orlicz, definida para $u \in L^G(\Omega)$ por

$$|u|_G := \sup \left\{ \left| \int_{\Omega} u(x)v(x) \, dx \right| ; v \text{ satisfaz } \int_{\Omega} \tilde{G}(|v(x)|) \, dx \leq 1 \right\},$$

todavia, a norma que vamos utilizar ao longo desta tese é a chamada norma de Luxemburg.

Definição 2.13 (Norma de Luxemburg). *Seja G uma N -função e $u \in L^G(\Omega)$, definimos a Norma de Luxemburg como*

$$\|u\|_G := \inf \left\{ M > 0 ; \int_{\Omega} G\left(\frac{|u(x)|}{M}\right) \, dx \leq 1 \right\}.$$

Ao introduzirmos essas normas, surgem algumas propriedades de análise real e funcional para o espaço vetorial $L^G(\Omega)$. A seguir, exibimos três dessas propriedades. As demonstrações, bem como outras propriedades, podem ser encontradas no Capítulo 2 de (Ribeiro, 2006).

Proposição 2.14. *As normas definidas acima são, de fato, normas. Além disso, são equivalentes, valendo*

$$|u|_G \leq \|u\|_G \leq 2|u|_G.$$

Mais ainda, o espaço $L^G(\Omega)$, equipado com qualquer uma dessas normas, é um espaço de Banach completo.

Proposição 2.15 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, G uma N -função e \tilde{G} sua N -função complementar. Se $u \in L^G(\Omega)$ e $v \in L^{\tilde{G}}(\Omega)$, então*

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x) \, dx \right| \leq 2\|u\|_{L^G(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^{\tilde{G}}(\Omega)}. \quad (2.5)$$

Teorema 2.16. *Seja G uma N -função. Se $G, \tilde{G} \in \Delta_2$ então $(L^G(\Omega), \|\cdot\|_G)$ é reflexivo, sendo o $L^{\tilde{G}}(\Omega)$ o dual de $L^G(\Omega)$.*

Mais informações sobre N -funções podem ser encontradas em (Ribeiro, 2006) e (Krasnosel'skii; Rutickii, 1961).

Pela discussão acima, fica claro que a noção de espaço de Orlicz é uma generalização dos espaços de Lebesgue para $1 < p < \infty$. Nesta mesma direção, introduziremos agora a noção de espaços de Orlicz-Sobolev, que é uma generalização da noção dos espaços de Sobolev $W^{1,p}$. A primeira coisa que vamos fazer é revisar a noção de derivada fraca.

Dada uma função $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \in L^1([a, b])$, inspirados na ideia de integração por partes, a derivada fraca de f vai ser uma g que satisfaça (desde que exista uma tal g),

$$\int_a^b f \phi' = - \int_a^b g \phi$$

para toda $\phi \in C^\infty$ que satisfaça $\phi(a) = \phi(b) = 0$.

De maneira geral, dado um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, dizemos que u tem derivada fraca se existe $v = (v_1, \dots, v_n)$, onde cada $v_i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ satisfazendo, para todo $1 < i < n$,

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} v_i \phi \quad (2.6)$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Bem sabemos que, em existindo, a derivada fraca de uma função é única a menos de um conjunto de medida nula. Além disso, se a função possui derivada no sentido clássico, esta coincide com a derivada fraca. A função v é denominada gradiente fraco de u e usualmente representada por $\nabla u = (\partial u / \partial x_1, \dots, \partial u / \partial x_n)$, como no caso clássico.

Assim como são definidos os espaços de Sobolev $W^{1,p}$ como o espaço das funções em L^p cujo gradiente fraco está em L^p , definimos o espaço de Orlicz-Sobolev.

Definição 2.17 (Espaço de Orlicz-Sobolev). *Dados uma N -função G e um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definimos o espaço de Orlicz-Sobolev por*

$$W^{1,G}(\Omega) := \left\{ u \in L^G(\Omega) ; \text{ existe } \{v_i\}_{i=1}^n \subset L^G(\Omega) \text{ satisfazendo (2.6) para toda } \phi \in C_c^\infty(\Omega) \right\}.$$

Em $W^{1,G}(\Omega)$ utilizaremos a norma de Luxemburg de maneira análoga ao caso dos $W^{1,p}$. Mais precisamente, equiparemos $W^{1,G}(\Omega)$ com a norma

$$\|u\|_{W^{1,G}(\Omega)} := \max \left\{ \|u\|_G, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_G, \dots, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\|_G \right\}$$

Como $W^{1,G}$ é uma legítima generalização dos espaços de Sobolev $W^{1,p}$, também podemos definir os seguintes espaços:

$$W_{\text{loc}}^{1,G}(\Omega) := \left\{ u; u \in W^{1,G}(V) \text{ para todo } V \Subset \Omega \right\}$$

e

$$W_c^{1,G}(\Omega) := \left\{ u \in W^{1,G}(\Omega) ; \text{supp } u \Subset \Omega \right\}.$$

Terminamos essa seção com o seguinte teorema.

Teorema 2.18. *O espaço $(W^{1,G}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,G}(\Omega)})$ é um espaço de Banach. Além disso, é reflexivo se, e somente se, G e \tilde{G} são N -funções que satisfazem a condição Δ_2 .*

A demonstração do teorema acima, bem como outras propriedades do espaço $W^{1,G}(\Omega)$ são encontradas no Capítulo 3 de (Ribeiro, 2006). Em virtude do escopo desta tese, optamos por não apresentar mais propriedades, concentrando-nos apenas nos aspectos essenciais que garantam uma compreensão clara e precisa por parte do leitor.

2.2 Sobre o g -Laplaciano

Nesta tese vamos trabalhar com as N -funções $G: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ que satisfazem as seguintes condições:

- Condição de primitiva:

$$G'(t) = g(t), \quad \text{onde } g \in C^0([0, \infty)) \cap C^1((0, \infty)); \quad (\text{P.C.})$$

- Condição de quociente: para $0 < \delta \leq g_0$ constantes fixas,

$$0 < \delta \leq \frac{tg'(t)}{g(t)} \leq g_0, \quad \text{para todo } t > 0. \quad (\text{Q.C.})$$

Tais condições, também chamadas de condições de Lieberman, foram introduzidas por Gary Lieberman em (Lieberman, 1991) quando este generalizava as condições naturais da estrutura de um operador elíptico da forma divergente. Mais precisamente, essas condições foram introduzidas para estudar a regularidade das soluções fracas do seguinte operador

$$\Delta_g u := \operatorname{div} \left(\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right),$$

conhecido na literatura como g -Laplaciano. O nome é sugestivo uma vez que tal operador é uma generalização do bem mais conhecido p -Laplaciano, bastando tomar $g = t^{p-1}$. Graças as condições (P.C.) e (Q.C.) podemos provar que o operador acima é equivalente a um operador uniformemente elíptico na forma não divergente, cujas constantes de elipticidade λ e Λ não dependem de u , mas somente de δ e g_0 , em conjuntos onde $\nabla u \neq 0$. Além do paper introdutório de Lieberman, outro trabalho que nos dá uma variedade de resultados acerca do g -Laplaciano e das soluções desse operador é (Martínez; Wolanski, 2008).

Antes de prosseguirmos para o g -Laplaciano, vamos explorar mais características das N -funções, uma vez que as condições (P.C.) e (Q.C.) nos permitem provar algumas propriedades adicionais.

Teorema 2.19. *Sejam G, g N -funções que satisfazem (P.C.) e (Q.C.). Então, para $t, s > 0$,*

$$\min \{s^\delta, s^{g_0}\} g(t) \leq g(st) \leq \max \{s^\delta, s^{g_0}\} g(t); \quad (\text{g1})$$

$$\frac{tg(t)}{1+g_0} \leq G(t) \leq tg(t); \quad (\text{g2})$$

$$\min \{s^{1+\delta}, s^{1+g_0}\} G(t) \leq G(st) \leq \max \{s^{1+\delta}, s^{1+g_0}\} G(t); \quad (\text{G1})$$

$$G(t+s) \leq 2^{g_0} (G(t) + G(s)). \quad (\text{G2})$$

Demonstração. Primeiro a propriedade (g1). Para o caso $0 < s \leq 1$, temos

$$\min \{s^\delta, s^{g_0}\} = s^{g_0} \quad \text{e} \quad \max \{s^\delta, s^{g_0}\} = s^\delta,$$

então nosso objetivo passa a ser

$$s^{g_0}g(t) \leq g(st) \leq s^\delta g(t).$$

Veja que

$$s^{g_0}g(t) \leq g(st) \Leftrightarrow g(t) \leq \frac{g(st)}{s^{g_0}} \Leftrightarrow \frac{g(t)}{t^{g_0}} \leq \frac{g(st)}{(st)^{g_0}}.$$

e

$$g(st) \leq s^\delta g(t) \Leftrightarrow \frac{g(st)}{s^\delta} \leq g(t) \Leftrightarrow \frac{g(st)}{(st)^\delta} \leq \frac{g(t)}{t^\delta}.$$

Então, uma vez que $st \leq t$, teremos (g1) válida pra $0 < s \leq 1$, se provarmos que $\frac{g(t)}{t^{g_0}}$ é não crescente e $\frac{g(t)}{t^\delta}$ é não decrescente.

Analisando a derivada de $\frac{g(t)}{t^{g_0}}$ temos

$$\left(\frac{g(t)}{t^{g_0}}\right)' = \frac{g'(t)}{t^{g_0}} - g_0 \frac{g(t)}{t^{g_0+1}} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{g'(t)}{t^{g_0}} \leq g_0 \frac{g(t)}{t^{g_0+1}} \Leftrightarrow \frac{tg'(t)}{g(t)} \leq g_0.$$

Portanto, $\frac{g(t)}{t^{g_0}}$ é não crescente. Analogamente,

$$\frac{tg'(t)}{g(t)} \geq \delta \Rightarrow \left(\frac{g(t)}{t^\delta}\right)' \geq 0 \Rightarrow \frac{g(t)}{t^\delta} \text{ é não decrescente.}$$

Para o caso $s \geq 1$, vale

$$\min \{s^\delta, s^{g_0}\} = s^\delta \quad \text{e} \quad \max \{s^\delta, s^{g_0}\} = s^{g_0}.$$

Como $\frac{g(t)}{t^{g_0}}$ é não crescente, e $t \leq st$,

$$\frac{g(st)}{(st)^{g_0}} \leq \frac{g(t)}{t^{g_0}},$$

então

$$g(st) \leq s^{g_0}g(t).$$

Analogamente, $\frac{g(t)}{t^\delta}$ não decrescente implica

$$s^\delta g(t) \leq g(st).$$

Em todo o caso, para qualquer $s, t > 0$,

$$\min \{s^\delta, s^{g_0}\} g(t) \leq g(st) \leq \max \{s^\delta, s^{g_0}\} g(t).$$

Vamos agora provar (g2). O lado direito é óbvio uma vez que g é não decrescente.

De fato,

$$G(t) = \int_0^t g(s)ds \leq g(t) \cdot (t - 0) = tg(t).$$

Para a outra parte, usando a (Q.C.), temos

$$G(t) = \int_0^t g(s)ds \geq \int_0^t \frac{sg'(s)}{g_0} ds.$$

Uma vez que

$$\int_0^t sg'(s)ds = sg(s)\Big|_0^t - \int_0^t g(s)ds = tg(t) - G(t),$$

teremos, juntando as duas desigualdades acima,

$$G(t) \geq \frac{tg(t) - G(t)}{g_0}.$$

Daí,

$$G(t) \geq \frac{tg(t)}{1 + g_0}.$$

Agora (G1). Usando integração por substituição,

$$G(st) = \int_0^{st} g(u)du = \int_0^t sg(sx)dx.$$

Daí, usando (g1),

$$G(st) \leq s \int_0^t \max \{s^\delta, s^{g_0}\} g(x)dx = \max \{s^{1+\delta}, s^{1+g_0}\} \int_0^t g(x)dx = \max \{s^{1+\delta}, s^{1+g_0}\} G(t).$$

Analogamente,

$$G(st) \geq \min \{s^{1+\delta}, s^{1+g_0}\} G(t).$$

Para finalizar, vamos provar (G2). Os principais ingredientes são a convexidade de G e a propriedade (G1). Segue a sequência:

$$G(a+b) = G\left(2\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) \leq 2^{1+g_0} G\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) \leq 2^{1+g_0} \left(\frac{G(a)}{2} + \frac{G(b)}{2}\right) = 2^{g_0} (G(a) + G(b)).$$

□

Observe agora que as condições (P.C.) e (Q.C.) implicam que g é contínua e estritamente crescente, em particular, $\tilde{g} = g^{-1}$. Com isso, podemos provar o seguinte resultado.

Teorema 2.20. *Se G satisfaz (P.C.) e (Q.C.), então \tilde{G} também satisfaz (P.C.) e (Q.C.) para $1/g_0$ e $1/\delta$. Em particular,*

$$0 < \frac{1}{g_0} \leq \frac{t\tilde{g}'(t)}{\tilde{g}(t)} \leq \frac{1}{\delta}, \quad \forall t > 0.$$

Além disso, vale, para todo $t, s > 0$,

$$\min \left\{ s^{\frac{1}{\delta}}, s^{\frac{1}{g_0}} \right\} \tilde{g}(t) \leq \tilde{g}(st) \leq \max \left\{ s^{\frac{1}{\delta}}, s^{\frac{1}{g_0}} \right\} \tilde{g}(t); \quad (\tilde{g}1)$$

$$\frac{\delta}{1+\delta} t\tilde{g}(t) \leq \tilde{G}(t) \leq t\tilde{g}(t); \quad (\tilde{g}2)$$

$$\min \left\{ s^{1+\frac{1}{\delta}}, s^{1+\frac{1}{g_0}} \right\} \tilde{G}(t) \leq \tilde{G}(st) \leq \max \left\{ s^{1+\frac{1}{\delta}}, s^{1+\frac{1}{g_0}} \right\} \tilde{G}(t); \quad (\tilde{G}1)$$

$$\tilde{G}(t+s) \leq 2^{\frac{1}{\delta}} (\tilde{G}(t) + \tilde{G}(s)); \quad (\tilde{G}2)$$

$$\tilde{G}(g(t)) \leq g_0 G(t). \quad (\tilde{G}3)$$

Demonstração. Note que, uma vez provado a primeira parte, as propriedades $(\tilde{g}1)$, $(\tilde{g}2)$, $(\tilde{G}1)$ e $(\tilde{G}2)$ seguem diretamente das respectivas propriedades de g e G , restando provar apenas a última propriedade.

Para ver que \tilde{G} satisfaz a condição de primitiva, basta observar que, sendo g contínua e crescente, teremos \tilde{g} também contínua e crescente em $[0, \infty)$, e valendo

$$(g^{-1})'(s) = \frac{1}{g'(g^{-1}(s))},$$

o que garante $(g^{-1})'$ contínua em $(0, \infty)$. Aproveitando a igualdade acima, para a condição do quociente, temos

$$\frac{s(g^{-1})'(s)}{g^{-1}(s)} = \frac{s}{g^{-1}(s)g'(g^{-1}(s))}.$$

Para $t = g^{-1}(s)$, obtemos $s = g(t)$, daí

$$\frac{s(g^{-1})'(s)}{g^{-1}(s)} = \frac{g(t)}{tg'(t)} \in \left[\frac{1}{g_0}, \frac{1}{\delta} \right].$$

Para a demonstração de $(\tilde{G}3)$ vamos aplicar a Desigualdade de Young. Na demonstração da Desigualdade de Young vimos que vale a igualdade quando $a = \tilde{g}(b)$ ou $b = g(a)$, daí, para $a = t$, $b = g(t)$,

$$G(t) + \tilde{G}(g(t)) = tg(t) \Rightarrow \tilde{G}(g(t)) = tg(t) - G(t).$$

Invocando a propriedade (g2),

$$\tilde{G}(g(t)) \leq (1 + g_0)G(t) - G(t) = g_0G(t).$$

□

Observação: Observe que as propriedades (G2) e $(\tilde{G}2)$ implicam que G e \tilde{G} satisfazem a propriedade $\Delta_2 : G(2t) \leq 2^{1+g_0}G(t)$ (e análogo para \tilde{G}). Logo, pelo Teorema 2.18, $W^{1,G}$ é um espaço reflexivo sob as condições (P.C.) e (Q.C.).

As hipóteses (P.C.) e (Q.C.) também nos ajudam a trabalhar com os conceitos já apresentados anteriormente, por exemplo, muitas vezes precisamos estimar a norma de alguma função em L^G , embora fazer isso diretamente seja um pouco complicado. O Resultado a seguir ajuda bastante.

Proposição 2.21. *Seja $G : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ uma N -função que satisfaz (P.C.) e (Q.C.), então para qualquer $u \in L^G(\Omega)$,*

$$\|u\|_{L^G(\Omega)} \leq \max \left\{ \left(\int_{\Omega} G(|u|) \right)^{\frac{1}{1+g_0}}, \left(\int_{\Omega} G(|u|) \right)^{\frac{1}{1+\delta}} \right\}. \quad (2.7)$$

Demonstração. Uma vez que o caso

$$\int_{\Omega} G(|u(x)|) \, dx = 0$$

é imediato, podemos começar supondo a integral acima positiva.

Começamos observando que, pela definição da norma de Luxemburg, se provarmos que

$$\int_{\Omega} G\left(\frac{|u(x)|}{M}\right) \, dx \leq 1$$

para algum $M > 0$, então $\|u\|_{L^G(\Omega)} \leq M$. Vamos em busca do M apropriado.

Primeiro, pela propriedade (G1),

$$\int_{\Omega} G\left(\frac{|u|}{M}\right) \leq \max \left\{ \left(\frac{1}{M}\right)^{1+\delta}, \left(\frac{1}{M}\right)^{1+g_0} \right\} \int_{\Omega} G(|u|).$$

Tomemos então

$$M := \max \left\{ \left(\int_{\Omega} G(|u|) \right)^{\frac{1}{1+g_0}}, \left(\int_{\Omega} G(|u|) \right)^{\frac{1}{1+\delta}} \right\}.$$

Daí, caso $\int_{\Omega} G(|u|) < 1$, teremos

$$M = \left(\int_{\Omega} G(|u|) \right)^{\frac{1}{1+g_0}} < 1,$$

logo,

$$\max \left\{ \left(\frac{1}{M} \right)^{1+\delta}, \left(\frac{1}{M} \right)^{1+g_0} \right\} = \left(\frac{1}{M} \right)^{1+g_0} = \frac{1}{\int_{\Omega} G(|u|)}.$$

De maneira análoga, para $\int_{\Omega} G(|u|) \geq 1$,

$$\max \left\{ \left(\frac{1}{M} \right)^{1+\delta}, \left(\frac{1}{M} \right)^{1+g_0} \right\} = \left(\frac{1}{M} \right)^{1+g_0} = \frac{1}{\int_{\Omega} G(|u|)}.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} G\left(\frac{|u|}{M}\right) \leq 1,$$

como queríamos. □

Observação: Naturalmente, nas hipóteses do resultado acima, como pontuado anteriormente, \tilde{G} também será uma N -função que satisfaz (P.C.) e (Q.C.), porém com g_0^{-1} e δ^{-1} . Logo, o também vale (2.7) para \tilde{G} da seguinte forma:

$$\|u\|_{L^{\tilde{G}}(\Omega)} \leq \max \left\{ \left(\int_{\Omega} \tilde{G}(|u|) \right)^{\frac{1}{1+\frac{1}{g_0}}}, \left(\int_{\Omega} \tilde{G}(|u|) \right)^{\frac{1}{1+\frac{1}{\delta}}} \right\}.$$

Proposição 2.22 (Desigualdade de Young com ϵ). *Seja $G : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ uma N -função e \tilde{G} sua função complementar. Se G satisfaz (P.C.) e (Q.C.), então, para todo $0 < \epsilon < 1$ existe $C_{\epsilon} = C(\epsilon, \delta, g_0) > 1$ tal que*

$$ab \leq \epsilon G(a) + C_{\epsilon} \tilde{G}(b) \quad \forall a, b \geq 0.$$

Analogamente,

$$ab \leq \epsilon \tilde{G}(a) + C_{\epsilon} G(b) \quad \forall a, b \geq 0.$$

Demonstração. Comece notando que, para qualquer $0 < \sigma < 1$, podemos usar a Desigualdade de Young e as propriedades (G1) e (\tilde{G} 1) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} ab = \sigma a \frac{b}{\sigma} &\leq G(\sigma a) + \tilde{G}\left(\frac{b}{\sigma}\right) \\ &\leq \max\left\{\sigma^{1+\delta}, \sigma^{1+g_0}\right\} G(a) + \max\left\{\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{1+\frac{1}{\delta}}, \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{1+\frac{1}{g_0}}\right\} \tilde{G}(b) \\ &= \sigma^{1+\delta} G(a) + \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{1+\frac{1}{\delta}} \tilde{G}(b). \end{aligned}$$

Portanto, tomando arbitrariamente $0 < \epsilon < 1$, defina $\sigma := \epsilon^{\frac{1}{1+\delta}}$. A desigualdade acima nos retorna então

$$ab \leq \epsilon G(a) + C_\epsilon \tilde{G}(b),$$

onde

$$C_\epsilon = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}}.$$

Naturalmente, também vale

$$ab \leq \epsilon \tilde{G}(a) + C_\epsilon G(b),$$

com a diferença de termos

$$C_\epsilon = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{g_0}.$$

□

Como mencionado anteriormente, nesta tese iremos nos dedicar ao estudo e à análise da seguinte Equação Diferencial Parcial, entendida no sentido fraco:

$$\Delta_g u := \operatorname{div} \left(\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right) = f \quad \text{em } \Omega, \quad (2.8)$$

onde Ω terá certas propriedades geométricas, g é a derivada de uma N -função G que satisfaz as condições (P.C.) e (Q.C.), e $f \in L^q(\Omega)$ para algum $q > n$.

Para ser mais claro, entendemos (2.8) no sentido das distribuições. Uma função $u \in W_{\text{loc}}^{1,G}$ é dita ser uma subsolução de (2.8) em Ω , denotada por $\Delta_g u \geq f$, se, para toda $0 \leq \phi \in C_0^\infty(\Omega)$, nós temos

$$\int_{\Omega} \frac{g(|\nabla u(x)|)}{|\nabla u(x)|} \nabla u(x) \cdot \nabla \phi(x) dx \leq - \int_{\Omega} \phi(x) f(x) dx. \quad (2.9)$$

Para supersolução usamos \geq em vez de \leq na equação (2.9) e denotamos por $\Delta_g u \leq f$. Quando u é sub e supersolução, dizemos que u é solução, como no caso (2.8). Também quando ocorre a igualdade em (2.9) para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ (sem necessariamente dispormos de $\phi \geq 0$), u vem a ser uma solução.

Proposição 2.23. *É suficiente tomar $\phi \in W_c^{1,G}(\Omega)$ em (2.9) para lidar com subsoluções, desde que tenhamos $f \in L_{\text{loc}}^n(\Omega)$.*

Demonstração. Veja o Lema 14.6 de (Braga; Moreira, 2022). \square

Devido à importância dessa equação no contexto das investigações que iremos realizar, é fundamental que apresentemos alguns teoremas clássicos que são amplamente reconhecidos e utilizados nesse domínio. Ao longo da tese, exploraremos como esses teoremas se aplicam à nossa pesquisa, fornecendo uma base para resolução das questões que estaremos abordando. Os dois primeiros são, respectivamente, a Desigualdade de Harnack fraca (*weak Harnack inequality*) e a Desigualdade de Harnack, ambas apresentadas em (Lieberman, 1991).

Teorema 2.24 (Desigualdade de Harnack fraca). *Seja $0 \leq w \in W_{\text{loc}}^{1,G}(B_r(x_0))$ tal que $\Delta_g w \leq f$, para $f \in L^q(B_r(x_0))$, então existe $p_0 = p_0(n, \delta, g_0, q) > 0$ para o qual vale*

$$\left(\int_{B_{\frac{r}{2}}(x_0)} w^{p_0} \right)^{1/p_0} \leq C \left(\inf_{B_{\frac{r}{2}}(x_0)} w + r g^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q(B_r(x_0))} \right) \right), \quad (2.10)$$

onde $C = C(n, \delta, g_0, q) \geq 1$.

Demonstração. Veja (Lieberman, 1991) Teorema 1.3. \square

Teorema 2.25 (Desigualdade de Harnack). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e $B_r(x_0) \Subset \Omega$. Se $u \geq 0$ satisfaz $\Delta_g u = f$ para $f \in L^q(B_r(x_0))$, então existe $C_H = C_H(n, \delta, g_0, q) \geq 1$ tal que*

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}(x_0)} u \leq C_H \left(\inf_{B_{\frac{r}{2}}(x_0)} u + r g^{-1} \left(r^{1-n/q} \|f\|_{L^q(B_r(x_0))} \right) \right).$$

Demonstração. Veja (Lieberman, 1991) Corolário 1.4. \square

Se definirmos

$$K_{r,f,x_0} := r g^{-1} \left(r^{1-n/q} \|f\|_{L^q(B_r(x_0))} \right),$$

e trabalharmos um pouco a estimativa acima, sob hipótese adicional de u ser contínua, então, para quaisquer dois pontos $a, b \in \overline{B}_{r/2}(x_0)$, vale

$$u(a) \leq \sup_{B_{\frac{r}{2}}(x_0)} u \leq C_H \left(\inf_{B_{\frac{r}{2}}(x_0)} u + K_{r,f,x_0} \right) \leq C_H (u(b) + K_{r,f,x_0}) \quad (2.11)$$

O teorema a seguir é uma versão quantitativa do famoso Lema de Hopf, que na sua versão clássica garante que, dada uma supersolução de uma EDP $Lu \leq 0$, $u \geq 0$ que se anula na fronteira de uma bola, o gráfico de u chega no bordo da bola com um ângulo positivo. No caso de $Lu = 0$ ainda existe uma versão mais refinada, garantindo

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) \geq Cu(x_0),$$

onde x_0 é o centro da bola e ξ um ponto da fronteira da bola onde u se anula. No nosso caso, estaremos apresentando uma versão não homogênea para o g -Laplaciano. A demonstração e mais informações sobre este resultado são encontrados em (Braga; Moreira, 2018).

Teorema 2.26 (Lema de Hopf-Oleinik). *Sejam G, g N -funções que satisfazem (P.C.) e (Q.C.), e $q > n$. Se $0 \leq u \in W_{\text{loc}}^{1,G}(B_r(x_0)) \cap C^0(\overline{B}_r(x_0))$ satisfaz $\Delta_g u = f$, para $f \in L^q(B_r(x_0))$, então*

$$u(x) \geq \left(C_1 \sup_{B_{\frac{r}{2}}(x_0)} u - C_2 r g^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q(B_r(x_0))} \right) \right) \frac{\text{dist}(x, \partial B_r(x_0))}{r} \quad (2.12)$$

para todo $x \in \overline{B}_r(x_0)$. Aqui C_1 e C_2 dependem apenas de parâmetros universais, a saber, n, δ, g_0 e q .

Demonstração. Veja o Teorema 3.2 de (Braga; Moreira, 2018). □

No mesmo *paper*, (Braga; Moreira, 2018), encontramos outro teorema clássico que iremos utilizar: o Princípio da comparação.

Teorema 2.27 (Princípio da Comparação). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio, $u, v \in W^{1,G}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, onde G satisfaz (P.C.) e (Q.C.), e $f \in L^1(\Omega)$. Se u, v satisfazem*

$$\begin{cases} \Delta_g u \geq f \geq \Delta_g v & \text{em } \Omega \\ u \leq v & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

então

$$u \leq v \quad \text{em } \Omega.$$

Demonstração. Veja a Proposição 5.2 de (Braga; Moreira, 2018). \square

O resultado acima assume um papel crucial no capítulo de aplicações, especialmente quando precisamos comparar uma solução u de $\Delta_g u = f$ com a função distância para a fronteira. Como a comparação direta é difícil, utilizamos funções intermediárias que facilitam essa comparação. Tais funções, chamadas de barreiras, possuem propriedades de EDP que permitem a comparação com u , via o Princípio da Comparação, e ao mesmo tempo têm propriedades geométricas que tornam a comparação com a função distância para a fronteira mais acessível.

A seguir, introduziremos os operadores extremais de Pucci, apresentaremos a comparação entre tais operadores e o operador Δ_g , e enunciaremos o resultado do qual faremos uso sobre barreiras. Todos os detalhes da discussão abaixo podem ser encontrados com riqueza de detalhes no capítulo 3 da Tese (Oliveira, 2022). Nesse capítulo, o autor faz um apanhado de vários resultados apresentados em (Braga; Moreira, 2018).

Seja $S^{n \times n}$ o conjunto das matrizes simétricas de ordem n . Dados $0 < \lambda \leq \Lambda$, definimos os operadores extremais de Pucci $\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^{\pm} : S^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^{-}(M) = \lambda \cdot \sum_{e_i > 0} e_i + \Lambda \cdot \sum_{e_i < 0} e_i$$

e

$$\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^{+}(M) = \Lambda \cdot \sum_{e_i > 0} e_i + \lambda \cdot \sum_{e_i < 0} e_i,$$

onde $\{e_i\}$ são os autovalores de M . De outra forma, para

$$\mathcal{A}_{\lambda, \Lambda} := \{A \in S^{n \times n} ; \lambda|x|^2 \leq Ax \cdot x \leq \Lambda|x|^2 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n\},$$

temos

$$\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^{-}(M) = \inf_{A \in \mathcal{A}_{\lambda, \Lambda}} \text{tr}(AM) \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^{+}(M) = \sup_{A \in \mathcal{A}_{\lambda, \Lambda}} \text{tr}(AM),$$

onde $\text{tr}(X)$ é o traço da matriz X .

Defina

$$\mathcal{A}_g(x, \nabla u) := H_g(|\nabla u(x)|) \nabla u(x),$$

onde $H_g(t) := g(t)/t$ é definido para todo $t > 0$. Nesse sentido, $\Delta_g(u) = \text{div}(\mathcal{A}_g(x, \nabla u))$.

Considerando uma função $\phi \in W^{2,1}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ tal que $|\nabla \phi| > 0$ em Ω , é possível garantir que $\mathcal{A}_g(\cdot, \nabla u) \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$ e vale, para quase todo $x \in \Omega$, a seguinte desigualdade é válida:

$$H_g(|\nabla \phi(x)|) \mathcal{M}_{\lambda_\delta, \Lambda_{g_0}}^-(D^2 \phi(x)) \leq \Delta_g \phi(x) \leq \mathcal{M}_{\lambda_\delta, \Lambda_{g_0}}^+(D^2 \phi(x)) H_g(|\nabla \phi(x)|),$$

onde $\lambda_\delta := \min\{1, \delta\}$ e $\Lambda_{g_0} := \max\{1, g_0\}$.

Por fim, concluímos este capítulo com um teorema que é a combinação dos resultados do Teorema 3.1 e Proposição 5.3 de (Braga; Moreira, 2018) ou, alternativamente, dos Teoremas 3.6 e 3.8 de (Oliveira, 2022), juntamente com a discussão da Seção 3.5 do mesmo trabalho.

Teorema 2.28. *Sejam $\mathcal{A} := \mathcal{A}_{x_0, r} := B_{2r}(x_0) \setminus \overline{B}_r(x_0)$ e $\tilde{f} \in L^q(B_{2r}(x_0))$, para $q > n$. Dado $M > 0$, existe única $\Gamma \in W^{2,q}(\mathcal{A}) \cap C^0(\overline{\mathcal{A}})$ satisfazendo*

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{\lambda_\delta, \Lambda_{g_0}}^+(D^2 \Gamma) = \tilde{f} & \text{em } \mathcal{A} \\ \Gamma = M & \text{em } \partial B_{2r}(x_0) \\ \Gamma = 0 & \text{em } \partial B_r(x_0). \end{cases}$$

Além disso, existe $\sigma = \sigma(n, \delta, g_0, q) \in (0, 1)$ tal que, se

$$\|\tilde{f}\|_{L^q(\mathcal{A})} \leq \frac{M\sigma}{r^{2-n/q}},$$

então, para todo $x \in \overline{\mathcal{A}}$, vale

$$\tilde{C}_1 \frac{M}{r} \text{dist}(x, \partial B_r(x_0)) \leq \Gamma(x) \leq \tilde{C}_2 \frac{M}{r} \text{dist}(x, \partial B_r(x_0)) \quad (2.13)$$

e, para qualquer $V \subset \mathcal{A}$ aberto tal que $\tilde{f} \leq 0$ q.t.p em V , temos

$$\Delta_g \Gamma \leq \tilde{C}_3 \frac{g(M/r)}{M/r} \tilde{f} \quad \text{em } V. \quad (2.14)$$

Aqui $\tilde{C}_1 \in (0, 1)$ e $\tilde{C}_2 > 1$, e podemos considerar $0 < \tilde{C}_3 \leq 1$, todas dependendo apenas de n, δ, g_0 e q .

3 DOMÍNIOS

Neste capítulo, exploraremos três classes importantes de domínios: **domínios uniformes**, **domínios NTA** e **domínios $C^{1,1}$** . Esses domínios desempenham um papel fundamental na formulação e resolução de problemas em diversas áreas da matemática, especialmente nas que envolvem equações diferenciais parciais (EDP), como análise harmônica, teoria da regularidade e teoria do potencial.

Iniciaremos com os **domínios uniformes**, apresentando sua definição formal, um breve histórico de seu desenvolvimento e exemplos representativos. Também discutiremos as definições equivalentes que ampliam nossa compreensão dessa classe de domínios, além de apresentar resultados importantes para os objetivos desta tese. Ao final dessa seção, introduziremos o conceito de **domínio de John** e provaremos que os domínios uniformes são, de fato, domínios de John.

A seguir, abordaremos os **domínios NTA** (do inglês *non-tangentially accessible*), apresentando duas definições equivalentes e algumas propriedades fundamentais desses domínios, incluindo um resultado relevante sobre o produto cartesiano de domínios NTA.

Por fim, discutiremos os **domínios $C^{1,1}$** , oferecendo as definições a partir de dois pontos de vista distintos: o analítico e o geométrico, com ênfase na condição da bola. Destacaremos as principais propriedades associadas a esses domínios e, em particular, demonstraremos que os domínios $C^{1,1}$ são também domínios NTA, estabelecendo uma conexão importante entre essas duas classes de domínios.

3.1 Domínio Uniforme

No final da década de 1970, **Olli Martio** e **Jukka Sarvas** publicaram o artigo (Martio; Sarvas, 1979), no qual apresentaram uma interessante classe de domínios, denominados domínios uniformes. Além de sua relevância teórica, os domínios uniformes desempenham um papel crucial em diversas áreas da análise matemática. Esses domínios têm sido muito importantes em áreas como teoria do potencial, análise harmônica e aplicações quasiconformes. A definição de domínios uniformes foi inspirada nos domínios de John, que haviam sido previamente estudados em (John, 1961) e formalmente definidos também em (Martio; Sarvas, 1979). Desde sua introdução, essa noção gerou

diversas formulações equivalentes, adaptadas aos diferentes contextos de aplicação. Uma característica fundamental dos domínios uniformes é a capacidade de conectar qualquer par de pontos dentro do domínio por meio de caminhos bem controlados, frequentemente representados por estruturas conhecidas como *cigars* (ou “charutos”, em tradução direta).

A seguir, formalizamos a definição mais comum de domínio uniforme, baseada nos *cigars* de comprimento.

Definição 3.1 (Domínio Uniforme). *Um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito ser M_Ω -uniforme se existe $M_\Omega = M_\Omega(\Omega) \geq 1$ tal que, para quaisquer pontos $x, y \in \Omega$, existe um caminho retificável, parametrizado pelo comprimento de arco, $\gamma: [0, l(\gamma)] \rightarrow \Omega$ com extremidades $\gamma(0) = x$ e $\gamma(l(\gamma)) = y$, que satisfaz:*

$$l(\gamma) \leq M_\Omega |x - y|; \quad \text{(Bounded turning)}$$

$$\min\{l(\gamma_{x,z}), l(\gamma_{z,y})\} \leq M_\Omega \delta(z) \quad \text{para todo } z \in \gamma, \quad \text{(Cigar)}$$

onde $\delta(z) := \text{dist}(z, \partial\Omega)$ e $\gamma_{x,z}$ representa a restrição de γ com extremos x e z e $\gamma_{z,y}$ com extremos z e y .

A curva γ que satisfaz as duas condições da definição acima para uma constante universal M_Ω é chamada **curva M_Ω -uniforme**. Perceba que a propriedade *cigar* pode ser imediatamente substituída por

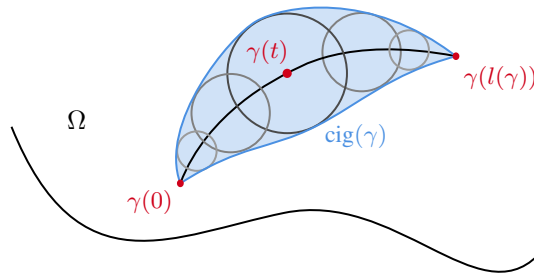
$$\delta(\gamma(t)) \geq \frac{1}{M_\Omega} \min\{t, l(\gamma) - t\} \quad \text{para todo } t \in [0, l(\gamma)].$$

Isso quer dizer que ao considerarmos as bolas de centro $\gamma(t)$ e raio $r_t := \min\{t, l(\gamma) - t\}/M_\Omega$, para $t \in [0, l(\gamma)]$, teremos

$$\text{cig}(\gamma) := \bigcup_{t \in [0, l(\gamma)]} B_{r_t}(\gamma(t)) \subset \Omega,$$

daí o nome da propriedade *cigar*, pela forma geométrica de $\text{cig}(\gamma)$, como exibido na Figura 4.

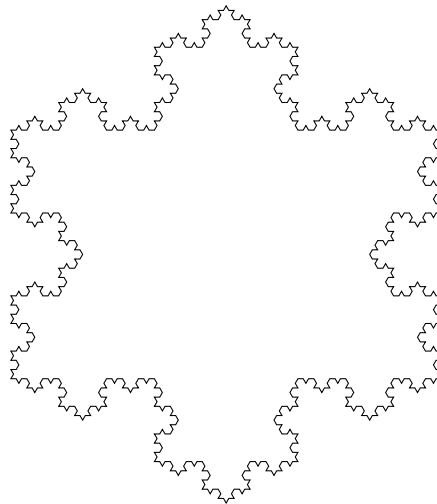
Exemplos de domínios uniformes incluem o espaço euclidiano \mathbb{R}^n e, entre os domínios limitados, destacam-se os mais conhecidos, como os domínios suaves $C^{1,1}$, a ampla classe dos domínios Lipschitz e outros menos comuns, como os domínios de Zygmund, conforme discutido em (Jerison; Kenig, 1982). Além disso, são domínios que permitem a extensão de funções de Sobolev e funções de oscilação média limitada (BMO), conforme

Figura 4 – Esboço da condição *cigar*

Fonte: elaborada pelo autor.

os trabalhos de **Peter Jones** (Jones, 1981; Jones, 1980). A classe de domínios uniformes também inclui exemplos com fronteiras fractais, sendo o mais famoso o floco de neve de Von Koch. Veja a Figura 5.

Figura 5 – Floco de neve de Von Koch

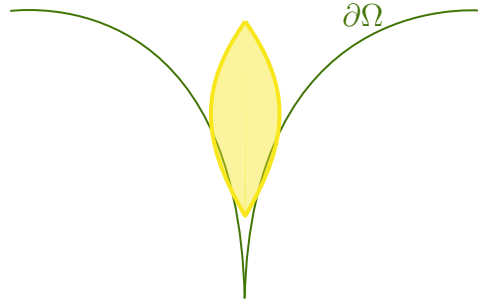


Fonte: elaborada pelo autor.

Entre os domínios que não satisfazem a condição de *cigar*, temos, em \mathbb{R}^2 , a faixa $\mathbb{R} \times (0,1)$ ou qualquer domínio limitado que possua cuspides externas (Figura 6). Já entre os domínios que falham na condição de *bounded turning*, podemos citar o espaço \mathbb{R}^2 com a parte não negativa do eixo x removida, ou ainda, qualquer domínio limitado que contenha uma aresta interna (Figura 7).

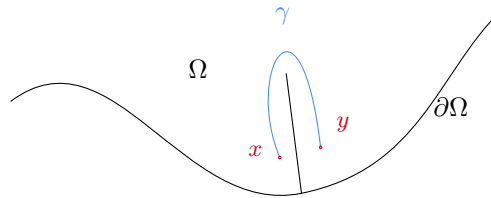
Como discutido, a definição clássica de domínios uniformes é expressa em termos de *cigars* de comprimento, que garantem a possibilidade de conectar qualquer par de pontos por um caminho não excessivamente tortuoso, cuja geometria obedece a condições quantitativas relacionadas ao comprimento e à proximidade da fronteira do domínio.

Figura 6 – Cúspides externas não permitem *cigar*



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 7 – Domínios com arestas internas não satisfazem *bounded turning*



Fonte: elaborada pelo autor.

Contudo, ao longo do tempo, diversas versões alternativas dessa definição emergiram. Em (Martio, 1980) e (Väisälä, 1988), encontramos a equivalência entre diferentes tipos de *cigars*, incluindo aqueles que consideram o diâmetro, em vez do comprimento, e aqueles que utilizam a distância euclidiana, o que reforça a flexibilidade do conceito. Outra característica relevante de domínios uniformes, abordada em (Väisälä, 1988), diz respeito ao caráter local da uniformidade em regiões próximas à fronteira, o que facilita a verificação das propriedades do domínio.

Teorema 3.2 (Uniformidade local implica global). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, $A \geq 1$ e $0 < R < \text{diam}(\Omega)$ constantes reais. Se, para todo $w \in \partial\Omega$, o conjunto $B_R(w) \cap \Omega$ for A -uniforme, então Ω é uniforme com constante de uniformidade $40A^3 \text{diam}(\Omega)/R$.*

Demonstração. Veja o Teorema 4.1 de (Väisälä, 1988). □

Além das definições que envolvem *cigars*, existem diversas outras noções equivalentes à de domínios uniformes. Ainda no final da década de 1970, quase simultaneamente à formalização desses domínios, em (Gehring; Osgood, 1979), **Fred Gehring** e **Brad Osgood** exploraram a conexão entre domínios uniformes e a distância quasi hiperbólica, demonstrando que a uniformidade pode ser caracterizada por uma desigualdade envolvendo

essa métrica. Não entraremos nos detalhes dessa conexão aqui, limitando-nos a apresentar apenas o que nos é relevante.

Definição 3.3 (Distância quasi hiperbólica e geodésicas). *Seja Ω um domínio e $x, y \in \Omega$. A distância quasi-hiperbólica de x até y é dada por*

$$k_{\Omega}(x, y) = \inf_{\tilde{\gamma}} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{ds(z)}{\delta(z)} = \inf_{\tilde{\gamma}} \int_0^{l(\tilde{\gamma})} \frac{ds(t)}{\delta(\tilde{\gamma}(t))}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as curvas $\tilde{\gamma}$ retificáveis, p.p.c.a., que conectam x a y .

Uma **geodésica quasi hiperbólica** é uma curva γ que atinge o ínfimo, ou seja,

$$k_{\Omega}(x, y) = \int_{\gamma} \frac{ds(z)}{\delta(z)} = \int_0^{l(\gamma)} \frac{ds(t)}{\delta(\gamma(t))}.$$

Vamos precisar dos seguintes resultados para Ω um domínio M_{Ω} -uniforme:

Proposição 3.4. *Para quaisquer $x, y \in \Omega$ existe uma geodésica quasi hiperbólica ligando x a y .*

Demonstração. Veja o Lema 1 de (Gehring; Osgood, 1979). □

Proposição 3.5. *Toda geodésica quasi hiperbólica γ é uma curva A -uniforme, onde $A = A(M_{\Omega}) \geq 1$, ou seja,*

$$l(\gamma) \leq A|x - y|$$

$$\min\{l(\gamma_{x,z}), l(\gamma_{z,y})\} \leq A\delta(z) \quad \text{para todo } z \in \gamma.$$

Demonstração. Veja o Corolário 2 de (Gehring; Osgood, 1979). □

Um último resultado sobre domínios uniformes, importante para o capítulo de aplicações e para conhecimento geral, diz respeito ao produto cartesiano de domínios uniformes.

Teorema 3.6. *Se $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ são domínios uniformes, limitados, com constantes M_{Ω_1} e M_{Ω_2} e diâmetros D_1 e D_2 respectivamente, então $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$ é um domínio uniforme com constante $M_{\Omega} = M_{\Omega}(M_{\Omega_1}, M_{\Omega_2}, D_1, D_2)$ satisfazendo $M_{\Omega} \geq \max\{M_{\Omega_1}, M_{\Omega_2}\}$.*

Demonstração. Veja a Proposição 8.3 de (Björn et al., 2021). □

Finalizamos esta seção apresentando brevemente os domínios de John e a *carrot condition*. Embora esses domínios não sejam diretamente utilizados ou resultem em nenhuma conclusão específica desta tese, são apresentados aqui por completude e para conveniência do leitor.

Assim como ocorre com os domínios uniformes, existem diversas definições equivalentes para domínios de John. Optamos por apresentar a mais utilizada, a partir da *carrot condition* (ou condição da cenoura, em tradução livre).

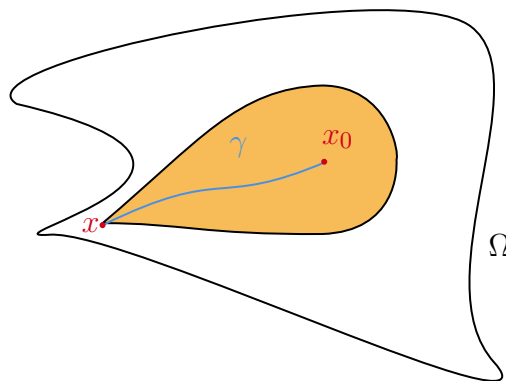
Definição 3.7 (Domínio de John). *Um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é denominado domínio (c, x_0) -John quando existem $c > 0$ e $x_0 \in \Omega$ com a seguinte propriedade: para todo $x \in \Omega$, existe uma curva p.p.c.a. γ que conecta x a x_0 e satisfaz a chamada condição **Carrot**:*

$$\delta(z) \geq c \cdot l(\gamma_{x,z}) \quad \text{para todo } z \in \gamma. \quad (3.1)$$

Aqui, x_0 é denominado o centro do domínio. Um **domínio de John** é um domínio que é (c, x_0) -John para algum par (c, x_0) .

Assim como discutido no caso da condição *cigar* para domínios uniformes, o nome *carrot* provém da forma geométrica da união das bolas de centro z e raio $c \cdot l(\gamma_{x,z})$ ao longo de γ . Veja a Figura 8.

Figura 8 – Representação geométrica da condição *carrot*



Fonte: elaborada pelo autor.

O teorema a seguir estabelece a relação entre domínios de John e domínios uniformes.

Teorema 3.8. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Se Ω é um domínio M_Ω -uniforme, então Ω é um domínio de John.*

Demonstração. Considere em $\overline{\Omega}$ a função δ , distância para a fronteira de Ω . Seja $x_0 \in \Omega$ um ponto onde esta função atinge o máximo. (Existe, por argumentos de continuidade e compacidade). Em termos matemáticos, $x_0 \in \Omega$ satisfaz

$$\delta(x_0) \geq \delta(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

A primeira afirmação é que

$$\delta(x_0) \geq \frac{\text{diam}(\Omega)}{2M_\Omega}.$$

De fato, dado $\epsilon > 0$, considere $x_1, x_2 \in \Omega$ satisfazendo

$$|x_1 - x_2| > \text{diam}(\Omega) - \epsilon.$$

Sendo Ω uniforme, existe γ ligando x_1 a x_2 que cumpre

$$l(\gamma) \leq M_\Omega |x_1 - x_2| \quad \text{e} \quad \delta(z) \geq \frac{1}{M_\Omega} \min\{l(\gamma_{x_1,z}), l(\gamma_{z,x_2})\} \quad \text{para todo } z \in \gamma.$$

Tomando $z_0 \in \gamma$ como aquele que satisfaz $l(\gamma_{x_1,z_0}) = l(\gamma_{z_0,x_2})$, temos

$$\delta(z_0) \geq \frac{l(\gamma)}{2M_\Omega} \geq \frac{|x_1 - x_2|}{2M_\Omega} > \frac{\text{diam}(\Omega) - \epsilon}{2M_\Omega}.$$

Concluimos então que $\delta(x_0) > \frac{\text{diam}(\Omega) - \epsilon}{2M_\Omega}$ para todo $\epsilon > 0$, logo

$$\delta(x_0) \geq \frac{\text{diam}(\Omega)}{2M_\Omega},$$

como afirmamos.

Agora que achamos um possível centro para o domínio de John, vamos provar o restante. Dado qualquer $x \in \Omega$, pela uniformidade existe um γ ligando x e x_0 que satisfaz:

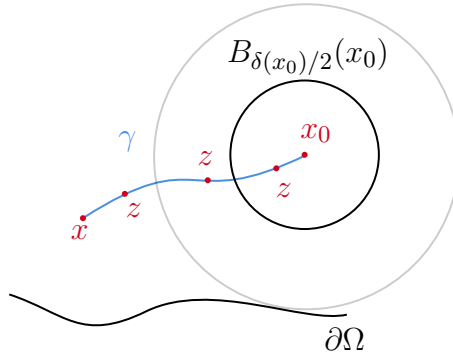
$$l(\gamma) \leq M_\Omega |x - x_0| \quad \text{e} \quad \delta(z) \geq \frac{1}{M_\Omega} \min\{l(\gamma_{x,z}), l(\gamma_{z,x_0})\} \quad \text{para todo } z \in \gamma.$$

Este mesmo γ servirá para nossos propósitos. De imediato, obtemos

$$l(\gamma) \leq M_\Omega |x - x_0| \leq M_\Omega \text{diam}(\Omega),$$

logo,

$$\text{diam} \Omega \geq \frac{l(\gamma)}{M_\Omega}. \tag{3.2}$$

Figura 9 – As três possibilidades para z 

Fonte: elaborada pelo autor.

Para provar (3.1), tome $z \in \gamma$, arbitrariamente. Temos três casos a trabalhar (Figura 9).

CASO #1: $l(\gamma_{x,z}) = \min\{l(\gamma_{x,z}), l(\gamma_{z,x_0})\}$.

Nesse caso, z está na “primeira metade” do caminho γ , daí, direto da segunda condição de curva M_Ω -uniforme,

$$\delta(z) \geq \frac{1}{M_\Omega} l(\gamma_{x,z}).$$

CASO #2: $l(\gamma_{z,x_0}) = \min\{l(\gamma_{x,z}), l(\gamma_{z,x_0})\}$ e $|z - x_0| > \delta(x_0)/2$.

Diferente do caso anterior, não podemos tratar esse caso de maneira tão direta, entretanto, combinando a definição de curva M_Ω -uniforme com a afirmação provada no início, e com (3.2), temos:

$$\delta(z) \geq \frac{1}{M_\Omega} l(\gamma_{z,x_0}) \geq \frac{1}{M_\Omega} |z - x_0| > \frac{\delta(x_0)}{2M_\Omega} \geq \frac{\text{diam}(\Omega)}{4M_\Omega^2} \geq \frac{l(\gamma)}{4M_\Omega^3} \geq \frac{l(\gamma_{x,z})}{4M_\Omega^3}.$$

CASO #3: $l(\gamma_{z,x_0}) = \min\{l(\gamma_{x,z}), l(\gamma_{z,x_0})\}$ e $|z - x_0| \leq \delta(x_0)/2$.

Aqui, como $z \in B_{\frac{\delta(x_0)}{2}}(x_0)$,

$$\delta(z) \geq \frac{\delta(x_0)}{2} \geq \frac{l(\gamma_{x,z})}{4M_\Omega^2},$$

onde na última passagem foi usada mesma sequência de passos do Caso #2.

Acabamos de provar que Ω é um domínio de John com $c = 1/4M_\Omega^3$.

□

3.2 Domínio NTA

Os **domínios NTA** (do inglês *Non-Tangentially Accessible Domains*, ou *domínios acessíveis não tangencialmente* em tradução direta) formam uma classe de domínios no espaço euclidiano \mathbb{R}^n que generalizam propriedades importantes de domínios mais regulares, como os domínios Lipschitz e os domínios de Zygmund. Esses domínios foram introduzidos por **David Jerison** e **Carlos Kenig** em (Jerison; Kenig, 1982), onde estenderam resultados clássicos sobre o comportamento de funções harmônicas em domínios mais gerais, com fronteiras menos regulares.

Um domínio NTA é caracterizado por duas condições principais: a condição de **corkscrew** (saca-rolhas), que garante que todo ponto da fronteira seja acessível tanto do interior quanto do exterior por meio de bolas não tangenciais, e a condição da **Cadeia de Harnack** (*Harnack chain*), que permite conectar pontos dentro do domínio por meio de uma sequência de bolas onde a Desigualdade de Harnack é válida. Essas condições garantem que o domínio tenha uma estrutura geométrica que possibilite um melhor estudo do comportamento de funções harmônicas e de medidas harmônicas. Formalmente, conforme descrito em (Jerison; Kenig, 1982), temos as seguintes definições.

Definição 3.9 (Bola M -não tangencial). *Dado um domínio Ω , uma bola M -não tangencial é uma bola $B_r(x) \subset \Omega$ cuja distância até a fronteira $\partial\Omega$ é comparável ao seu raio:*

$$\frac{r}{M} \leq \text{dist}(B_r(x), \partial\Omega) \leq Mr.$$

Em geral, M é uma constante fixa universal que depende no máximo de Ω .

Definição 3.10 (Cadeia de Harnack). *Para x e y em Ω , uma cadeia de Harnack de x a y em Ω é uma sequência de bolas M -não tangenciais $\{B_i\}_{i=1}^m$ que satisfaz as seguintes condições:*

- $x \in B_1$ e $y \in B_m$;
- $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$ para todo $i < m$.

O número m é o comprimento da cadeia.

O nome “cadeia de Harnack” é sugestivo, pois faz referência justamente à possibilidade de usarmos a Desigualdade de Harnack ao longo da cadeia de bolas para obter comparações entre os valores de $u(x)$ e $u(y)$. Primeiramente, observe que as bolas

consecutivas devem ter raios comparáveis. Assim, pela Desigualdade de Harnack, se u for uma função harmônica positiva em Ω , temos:

$$C^{-1} \cdot u(y) \leq u(x) \leq C \cdot u(y),$$

onde C depende apenas de M e do comprimento da cadeia de Harnack entre x e y .

Agora, passamos à definição formal de um domínio NTA.

Definição 3.11 (Domínio NTA - (Jerison; Kenig, 1982)). *Um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito ser (M, r_0) -NTA, onde $M \geq 1$ e $r_0 > 0$, se satisfaz as seguintes condições:*

i. (Corkscrew) *Para quaisquer $r \leq r_0$ e $w \in \partial\Omega$, existe $\xi_r(w)$ satisfazendo:*

$$\begin{cases} \xi_r(w) \in \Omega, \\ |\xi_r(w) - w| < r, \\ \delta(\xi_r(w)) \geq \frac{r}{M}. \end{cases}$$

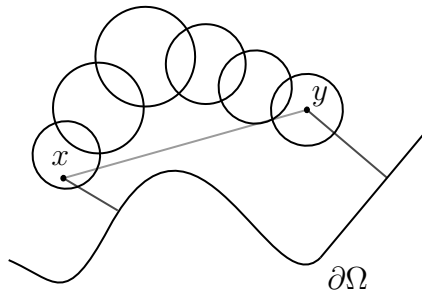
ii. (Corkscrew exterior) $\bar{\Omega}^c$ *satisfaz a condição corkscrew.*

iii. (Harnack Chain) *Se $\epsilon > 0$ e $C \geq 1$, e $x, y \in \Omega$ satisfazem*

$$\delta(x), \delta(y) > \epsilon \quad \text{e} \quad |x - y| < C\epsilon,$$

então existe uma cadeia de Harnack de x até y , cujo comprimento depende possivelmente de M e C , mas nunca de ϵ . Veja a Figura 10.

Figura 10 – Cadeia de Harnack de x até y



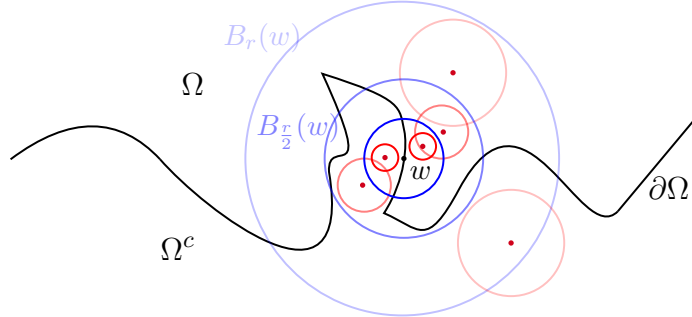
Fonte: elaborada pelo autor.

Um ponto do tipo $\xi_r(w)$ é denominado **ponto de corkscrew** (interior) associado a r e w . A condição de corkscrew nos diz, geometricamente, que, para qualquer $r < r_0$,

$$\xi_r(w) \in B_r(w) \cap \Omega \quad \text{e} \quad B_{\frac{r}{M}}(\xi_r(w)) \subset \Omega,$$

como exibido na Figura 11.

Figura 11 – Condição de *corkscrew*



Fonte: elaborada pelo autor.

Os domínios que satisfazem simultaneamente as condições *i* e *iii* são conhecidos na literatura como **domínios 1-*sided* NTA**. Um resultado importante, já apontado em (Jerison; Kenig, 1982), é que um domínio (limitado) é 1-*sided* NTA se, e somente se, é um domínio uniforme. Contudo, por se tratar de um resultado folclórico, não é trivial encontrar referências que discutam essa conexão. Para ver que domínios uniformes satisfazem as condições *i* e *iii*, basta usar as ideias que serão aplicadas no capítulo seguinte, na demonstração da Desigualdade de Harnack refinada, junto com estimativas envolvendo a métrica quasi hiperbólica. Para ver que os domínios 1-*sided* NTA são uniformes, consulte (Capogna; Tang, 1995) e (Azzam *et al.*, 2017).

Com base nas observações feitas, percebemos que a utilização da noção de domínios uniformes se torna vantajosa em muitos cenários devido à quantidade de resultados já demonstrados nesse contexto. Por essa razão, diversos trabalhos, incluindo esta tese, preferem adotar a seguinte definição para domínios NTA.

Definição 3.12 (Domínio NTA). *Um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito ser (M_Ω, r_Ω) -NTA, onde $M_\Omega \geq 1$ e $r_\Omega > 0$, se for M_Ω -uniforme e, para quaisquer $r \leq r_\Omega$ e $w \in \partial\Omega$, existem pontos de corkscrew (interior e exterior) associados.*

Concluimos esta seção estabelecendo que o produto de dois domínios NTA continua sendo um domínio NTA.

Teorema 3.13. *Se $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ são domínios NTA (limitados), com constantes $M_{\Omega_1}, r_{\Omega_1}$ e $M_{\Omega_2}, r_{\Omega_2}$ e diâmetros D_1 e D_2 respectivamente, então $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$ é um domínio NTA com constantes $M := 4M_\Omega$, com o M_Ω do Teorema 3.6, e $r_\Omega := \min\{r_{\Omega_1}, r_{\Omega_2}\}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.6, Ω é um domínio uniforme com constante M_Ω dependendo de $M_{\Omega_1}, M_{\Omega_2}, D_1$ e D_2 e satisfazendo $M_\Omega \geq \max\{M_{\Omega_1}, M_{\Omega_2}\}$. Note que, nesse caso, Ω ainda é um domínio uniforme para $M = 4M_\Omega$. Nos resta provar que Ω satisfaz as condições de corkscrew interior e exterior para M e r_Ω .

Tome $r \leq r_\Omega$ e $w = (w_1, w_2) \in \partial\Omega$ arbitrários. Vamos mostrar que existe $\xi \in \Omega$ satisfazendo

$$\xi \in B_r(w) \quad \text{e} \quad B_{\frac{r}{M_\Omega}}(\xi) \subset \Omega.$$

E o mesmo para $\xi^e \in \overline{\Omega}^c$.

Desde que

$$\partial\Omega = \partial(\Omega_1 \times \Omega_2) = (\partial\Omega_1 \times \Omega_2) \cup (\Omega_1 \times \partial\Omega_2) \cup (\partial\Omega_1 \times \partial\Omega_2),$$

temos três casos a trabalhar: $w \in \partial\Omega_1 \times \partial\Omega_2$, $w \in \partial\Omega_1 \times \Omega_2$ e $w \in \Omega_1 \times \partial\Omega_2$, onde os dois últimos são análogos.

Primeiro, quando $w_i \in \partial\Omega_i$, para $i \in \{1, 2\}$, como cada Ω_i é NTA, e $M_\Omega \geq M_{\Omega_i}$, existem $\xi_i \in \Omega_i$ pontos de corkscrew associados a w_i e $r/2$, ou seja, cada ξ_i satisfaz

$$\xi_i \in B_{\frac{r}{2}}(w_i) \quad \text{e} \quad B_{\frac{r}{2M_\Omega}}(\xi_i) \subset \Omega_i.$$

(Estamos omitindo a dimensão das bolas, pois fica evidente pela dimensão dos pontos. Faremos o mesmo com a função $|\cdot|$, a qual não terá distinção aparente, mas ficará claro pela dimensão dos pontos trabalhados.)

Defina $\xi := (\xi_1, \xi_2)$. Temos $\xi \in \Omega$,

$$|\xi - w| \leq |\xi_1 - w_1| + |\xi_2 - w_2| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

e

$$B_{\frac{r}{M}}(\xi) \subset B_{\frac{r}{2M_\Omega}}(\xi_1, \xi_2) \subset B_{\frac{r}{2M_\Omega}}(\xi_1) \times B_{\frac{r}{2M_\Omega}}(\xi_2) \subset \Omega_1 \times \Omega_2 = \Omega.$$

Vamos, agora, tratar o caso em que $w \in \partial\Omega_1 \times \Omega_2$, que é inteiramente análogo ao caso $w \in \Omega_1 \times \partial\Omega_2$. Aqui temos $w_1 \in \partial\Omega_1$ e $w_2 \in \Omega_2$ e, por esse motivo, vamos dividir em dois casos, a depender do quão distante está w_2 da fronteira de Ω_2 .

Supondo primeiro que $\delta_{\Omega_2}(w_2) > r/2M_\Omega$, tome $\xi = (\xi_1, w_2)$, onde, dessa vez, ξ_1 é um ponto de corkscrew de Ω_1 associado a r e M_Ω . Teremos $\xi \in \Omega$,

$$|\xi - w| \leq |\xi_1 - w_1| + |w_2 - w_2| < r$$

e

$$B_{\frac{r}{M}}(\xi) \subset B_{\frac{r}{2M_\Omega}}(\xi_1, w_2) \subset B_{\frac{r}{2M_\Omega}}(\xi_1) \times B_{\frac{r}{2M_\Omega}}(w_2) \subset \Omega_1 \times \Omega_2 = \Omega.$$

Por fim, no caso em que $\delta_{\Omega_2}(w_2) \leq r/2M_\Omega$, considere \bar{w}_2 como o ponto de $\partial\Omega_2$ que satisfaz $|w_2 - \bar{w}_2| = \delta_{\Omega_2}(w_2)$. Daí, como Ω_2 é NTA, considere ξ_2 o ponto de corkscrew de Ω_2 associado a $r/4$ e \bar{w}_2 . Também, seja ξ_1 o ponto de corkscrew de Ω_1 associado a $r/4$ e w_1 . Em resumo, temos

$$\xi_1 \in B_{\frac{r}{4}}(w_1) \quad \text{e} \quad \xi_2 \in B_{\frac{r}{4}}(\bar{w}_2)$$

com

$$B_{\frac{r}{4M_\Omega}}(\xi_i) \subset \Omega_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2.$$

Daí, definindo $\xi := (\xi_1, \xi_2)$, temos $\xi \in \Omega$ e

$$\begin{aligned} |\xi - w| &\leq |\xi_1 - w_1| + |\xi_2 - w_2| \\ &\leq |\xi_1 - w_1| + |\xi_2 - \bar{w}_2| + |\bar{w}_2 - w_2| \\ &< \frac{r}{4} + \frac{r}{4} + \frac{r}{2M_\Omega} \\ &\leq r \end{aligned}$$

e

$$B_{\frac{r}{M}}(\xi) = B_{\frac{r}{4M_\Omega}}(\xi_1, \xi_2) \subset B_{\frac{r}{4M_\Omega}}(\xi_1) \times B_{\frac{r}{4M_\Omega}}(\xi_2) \subset \Omega_1 \times \Omega_2 = \Omega.$$

Acabamos de mostrar que Ω satisfaz as condições de corkscrew interior para r_Ω e M .

Para finalizar a demonstração, devemos mostrar a condição de corkscrew exterior. Tome $w \in \partial\Omega$ e $r < r_\Omega$ como no enunciado. Aqui podemos ser mais diretos e considerar apenas dois casos: $w_1 \in \partial\Omega_1$ e $w_2 \in \partial\Omega_2$, que, na verdade, são análogos. Faremos somente o caso $w_1 \in \partial\Omega_1$, não importando se w_2 está em Ω_2 ou $\partial\Omega_2$.

Dado que $w_1 \in \partial\Omega_1$, existe um ponto de corkscrew exterior $\xi_1^e \in \bar{\Omega}_1^c$ satisfazendo

$$\xi_1^e \in B_r(w_1) \quad \text{e} \quad B_{\frac{r}{M_\Omega}}(\xi_1^e) \subset \bar{\Omega}_1^c.$$

Definindo $\xi^e = (\xi_1^e, w_2)$ teremos $\xi^e \in \bar{\Omega}^c$,

$$|\xi - w| \leq |\xi_1^e - w_1| + |w_2 - w_2| < r$$

e

$$B_{\frac{r}{M}}(\xi^e) \subset B_{\frac{r}{M_\Omega}}(\xi^e) \subset B_{\frac{r}{M_\Omega}}(\xi_1^e) \times B_{\frac{r}{M_\Omega}}(w_2) \subset \overline{\Omega}_1^c \times \mathbb{R}^m \subset \overline{\Omega}^c.$$

Portanto, Ω é um domínio (M, r_Ω) -NTA, como queríamos mostrar. \square

3.3 Domínio $C^{1,1}$

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados sobre domínios $C^{1,1}$, ou, equivalentemente, sobre domínios que satisfazem a condição da bola. Explicaremos a equivalência entre essas duas noções e discutiremos alguns resultados importantes por si só, como o Lema das Quatro Bolas e a regularização de caminhos poligonais. Finalmente, demonstraremos que tais domínios são NTA.

Os domínios $C^{1,1}$ fazem parte de uma classe de domínios em que a fronteira é localmente o gráfico de uma função com uma certa regularidade, especificamente de classe $C^{1,1}$. A seguir, apresentamos a definição formal.

Definição 3.14 (Domínio $C^{1,1}$). *Um domínio limitado $D \subset \mathbb{R}^n$ é dito ser $C^{1,1}$ se existem constantes $C, r_0 > 0$ tais que, para todo $\xi \in \partial D$, existe um sistema de coordenadas com $\xi = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, e uma função $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^{1,1}$ satisfazendo as condições:*

$$|\nabla \varphi(y') - \nabla \varphi(z')| \leq C|y' - z'|$$

e

$$B_{r_0}(\xi) \cap D = B_{r_0}(\xi) \cap \{(x', x_n); x_n > \varphi(x')\}.$$

Por outro lado, temos a condição da bola (uniforme), também conhecida na literatura por propriedade da esfera.

Definição 3.15 (Condição da bola). *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ domínio limitado. Dizemos que D satisfaz a **condição da bola interior**, com raio $R > 0$, se, para todo $\xi \in \partial D$, existe $\xi^i \in D$ tal que*

$$B_R(\xi^i) \subset D \quad e \quad \xi \in \partial B_R(\xi^i).$$

Analogamente, dizemos que D satisfaz a **condição da bola exterior**, com raio R , se, nas mesmas condições, existe $\xi^e \in D^c$ satisfazendo:

$$B_R(\xi^e) \subset D^c \quad e \quad \xi \in \partial B_R(\xi^e).$$

Finalmente, dizemos que D satisfaz a **condição da bola** quando satisfaz, simultaneamente, a condição da bola exterior e a condição da bola interior.

A possibilidade de considerar domínios $C^{1,1}$ além de sua definição analítica permite estender muitos resultados para além do contexto euclidiano. Uma vez estabelecida uma noção geométrica, a adaptação de teoremas para outros espaços métricos torna-se mais acessível. A equivalência entre as definições mencionadas é amplamente reconhecida e aceita pela comunidade matemática, sendo considerada um resultado clássico do folclore matemático. Uma demonstração formal pode ser encontrada no artigo (Aikawa *et al.*, 2007) e em (Lewicka; Peres, 2020). Além disso, para uma explicação detalhada baseada no trabalho de (Aikawa *et al.*, 2007), consulte a dissertação de mestrado do autor desta tese (Sousa, 2020).

Teorema 3.16. *Um domínio $D \subset \mathbb{R}^n$ é $C^{1,1}$ se, e somente se, satisfaz a condição da bola.*

Demonstração. Veja (Aikawa *et al.*, 2007) no Lema 2.2 ou, ainda, a Seção 3 de (Sousa, 2020). \square

Iniciaremos uma sequência de resultados auxiliares com o objetivo de demonstrar que um domínio $C^{1,1}$ é NTA.

Lema 3.17. *Dados $C, P \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ tais que $P \in S_r(C) := \partial B_r(C)$. Então, para todo $Q \in \mathbb{R}^n$, são equivalentes:*

- i) $Q \in B_r(C)$.
- ii) $|\overrightarrow{PQ}| < 2r \cos \theta$, onde $\theta := \angle(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PC})$.

Se lembrarmos que $\cos(\angle(u, v)) = \langle u, v \rangle / |u||v|$ e $|\overrightarrow{PC}| = r$ podemos trocar o segundo item por:

$$ii') \quad |\overrightarrow{PQ}| < \frac{2\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PC} \rangle}{|\overrightarrow{PQ}|}.$$

Demonstração. Sem perdas podemos supor que $P = 0$, ou seja, a origem do sistema, e que $C = (0', r) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Assim $\overrightarrow{PQ} = Q = (q_1, \dots, q_n)$ e $\overrightarrow{PC} = C$.

Primeiro suponha $Q \in B := B_r(C)$. Neste caso $\langle Q, C \rangle = rq_n > 0$ pois $B \subset \mathbb{R}_+^n$. Vamos mostrar que

$$|Q| < 2 \frac{\langle Q, C \rangle}{|Q|}.$$

Tome $\lambda > 0$ tal que $\lambda|Q| = 2 \frac{\langle Q, C \rangle}{|Q|}$, ou seja, $\lambda = 2 \frac{\langle Q, C \rangle}{|Q|^2}$. Note que

$$\begin{aligned} |\lambda Q - C|^2 &= |\lambda Q|^2 + |C|^2 - 2\lambda \langle Q, C \rangle \\ &= 4 \frac{\langle Q, C \rangle^2}{|Q|^2} + r^2 - 2 \cdot 2 \frac{\langle Q, C \rangle}{|Q|^2} \cdot \langle Q, C \rangle \\ &= r^2. \end{aligned}$$

ou seja, $\lambda Q \in S_r(C)$.

Para mostrar que $|Q| < 2 \frac{\langle Q, C \rangle}{|Q|}$ só precisamos ter $\lambda > 1$. Isso ocorre, pois

$$Q \in B \Rightarrow |Q - C|^2 < r^2 \Rightarrow |Q|^2 + |C|^2 - 2\langle Q, C \rangle < r^2 \Rightarrow 1 < 2 \frac{\langle Q, C \rangle}{|Q|^2} = \lambda.$$

Agora, suponhamos que $|Q| < 2r \cos \theta$ ou, equivalentemente, que $|Q| < 2 \frac{\langle Q, C \rangle}{|Q|}$. Isso implica, em particular, que $\langle Q, C \rangle > 0$, ou seja, $\cos \theta > 0$, o que significa que $Q \in \mathbb{R}_+^n$. De acordo com o que foi provado anteriormente, temos que $\lambda Q \in S_r(C)$, onde $\lambda = 2 \frac{\langle Q, C \rangle}{|Q|^2}$, e, por hipótese, $\lambda > 1$. Como \bar{B} é convexa, e sabemos que 0 e λQ pertencem a $S_r(C)$, e $Q \in [0, \lambda Q] \setminus \{0, \lambda Q\} \subset B$, concluimos que $Q \in B$, como queríamos. □

O lema a seguir é encontrado no artigo (Lewicka; Peres, 2020).

Lema 3.18 (Lema das quatro bolas). *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ pontos do espaço euclidiano e $u, v \in \partial B_R(0)$ vetores de tamanho R . Se tivermos*

$$B_R(x+u) \cap B_R(y-v) = \emptyset \quad e \quad B_R(x-u) \cap B_R(y+v) = \emptyset,$$

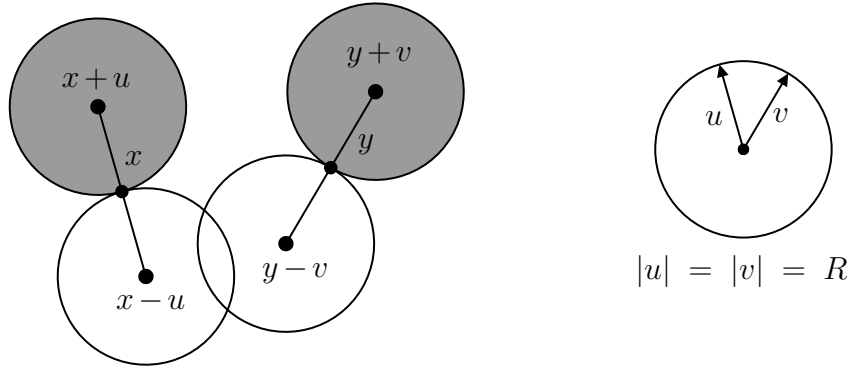
então $|u-v| < |x-y|$. (Figura 12).

Demonstração. A menos de uma translação, podemos supor, sem perda de generalidade, que a origem é $(x+y)/2$, ou seja, $y = -x$. Nesse caso, devemos provar que $|u-v| < |x - (-x)| = 2|x|$.

Defina

$$z := x + \frac{u+v}{2}$$

Figura 12 – O Lema das quatro bolas



Fonte: elaborada pelo autor.

e veja que

$$\frac{u-v}{2} = \frac{u+v}{2} - v = z - x - v.$$

Logo,

$$\frac{u-v}{2} \in \overline{B}_{|z|}(-x-v).$$

Ao mesmo tempo,

$$\frac{u-v}{2} = u - \frac{u+v}{2} = u - z + x$$

implica que

$$\frac{u-v}{2} \in \overline{B}_{|z|}(x+u).$$

Assim,

$$\frac{u-v}{2} \in \overline{B}_{|z|}(x+u) \cap \overline{B}_{|z|}(-x-v).$$

Portanto, usando da hipótese que $B_R(x+u) \cap B_R(-x-v) = \emptyset$, podemos concluir que

$$R^2 \leq |z|^2 = \left| x + \frac{u+v}{2} \right|^2. \quad (3.3)$$

Analogamente, fazendo

$$w := -x + \frac{u+v}{2}$$

temos

$$\frac{v-u}{2} \in \overline{B}_{|w|}(x-u) \cap \overline{B}_{|w|}(-x+v).$$

Então

$$R^2 \leq |w|^2 = \left| x - \frac{u+v}{2} \right|^2. \quad (3.4)$$

Somando (3.3) e (3.4) e usando a lei do paralelogramo¹ temos

$$\begin{aligned} 2R^2 &\leq \left| x + \frac{u+v}{2} \right|^2 + \left| x - \frac{u+v}{2} \right|^2 \\ &= 2 \left(|x|^2 + \left| \frac{u+v}{2} \right|^2 \right) \\ &= 2|x|^2 + \frac{1}{2}|u+v|^2, \end{aligned}$$

e, usando novamente a lei do paralelogramo,

$$\begin{aligned} 2|x|^2 + \frac{1}{2}|u+v|^2 &= 2|x|^2 + \frac{1}{2} [2|u|^2 + 2|v|^2 - |u-v|^2] \\ &= 2|x|^2 + |u|^2 + |v|^2 - \frac{|u-v|^2}{2} \\ &= 2|x|^2 + 2R^2 - \frac{|u-v|^2}{2}. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$2R^2 \leq 2|x|^2 + 2R^2 - \frac{|u-v|^2}{2},$$

que por sua vez implica que

$$|u-v|^2 \leq 4|x|^2,$$

ou seja, $|u-v| \leq 2|x|$ como queríamos. □

Os resultados a seguir servem para regularizar caminhos poligonais sem aumentar o comprimento.

Proposição 3.19. *Sejam $C, r > 0$ números reais. Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto C|x|$. Então existem A, B e $x_0 \in \mathbb{R}$, dependendo de C e de r , tais que a parábola*

¹ Em um espaço vetorial normado E , cuja norma $\|\cdot\|$ provém de um produto interno, vale, para $a, b \in E$:

$$2(\|a\|^2 + \|b\|^2) = \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2.$$

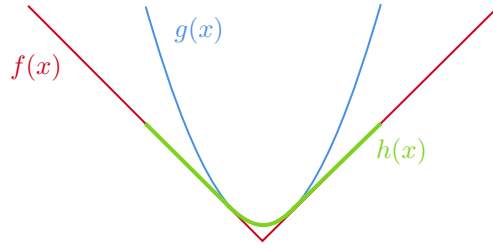
Vale mencionar que a recíproca também é verdadeira e, se vale a igualdade acima, a norma provém de um produto interno.

$g(x) := Ax^2 + B$ satisfaz $g(x) \geq f(x)$, e a função h , dada por

$$h(x) := \begin{cases} g(x), & x \in [-x_0, x_0] \\ f(x), & x \in \mathbb{R} \setminus [-x_0, x_0], \end{cases}$$

é de classe $C^{1,1}(\mathbb{R})$ (Figura 13). Além disso, se $\alpha_1(t) := (t, f(t))$ e $\alpha_2(t) := (t, g(t))$ são definidos para $t \in [-x_0, x_0]$ então $l(\alpha_2) \leq l(\alpha_1)$.

Figura 13 – Colagem $C^{1,1}$ entre f e g



Fonte: elaborada pelo autor.

Demonstração. Tome

$$g(x) := \begin{cases} C \left(\frac{x^2}{r} + \frac{r}{4} \right), & \text{caso } C < 1 \\ C^2 \frac{x^2}{r} + \frac{r}{4}, & \text{caso } C \geq 1, \end{cases}$$

e

$$x_0 := \begin{cases} \frac{r}{2}, & \text{caso } C < 1 \\ \frac{r}{2C}, & \text{caso } C \geq 1. \end{cases}$$

No caso de $C < 1$, teremos:

$$h(x) := \begin{cases} C \left(\frac{x^2}{r} + \frac{r}{4} \right), & x \in \left[-\frac{r}{2}, \frac{r}{2} \right] \\ C|x|, & x \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{r}{2}, \frac{r}{2} \right], \end{cases}$$

e, com alguns cálculos, vemos que a função h é diferenciável e h' contínua, valendo:

$$h'(x) := \begin{cases} C, & x \in \left[\frac{r}{2}, \infty \right) \\ -C, & x \in \left(-\infty, -\frac{r}{2} \right] \\ \frac{2C}{r}x, & x \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{r}{2}, \frac{r}{2} \right]. \end{cases}$$

Então, para $x < y$ temos

$$|h'(y) - h'(x)| = \begin{cases} 0, & x, y \in \left(-\infty, -\frac{r}{2}\right] \quad \text{ou} \quad x, y \in \left[\frac{r}{2}, \infty\right) \\ 2C, & x \in \left(-\infty, -\frac{r}{2}\right] \quad \text{e} \quad y \in \left[\frac{r}{2}, \infty\right) \\ \frac{2C}{r}|y-x|, & x \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right]. \end{cases}$$

Observe que no caso do meio temos necessariamente $|y-x| \geq r$, logo, em todo os casos teremos:

$$|h'(y) - h'(x)| \leq \frac{2C}{r}|y-x| \quad \text{para quaisquer } x, y \in \mathbb{R}..$$

Se $C \geq 1$, obtemos resultados semelhantes de maneira inteiramente análoga, valendo:

$$h(x) := \begin{cases} C^2 \frac{x^2}{r} + \frac{r}{4}, & x \in \left[-\frac{r}{2C}, \frac{r}{2C}\right] \\ C|x|, & x \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{r}{2C}, \frac{r}{2C}\right], \end{cases}$$

$$h'(x) := \begin{cases} C, & x \in \left[\frac{r}{2C}, \infty\right) \\ -C, & x \in \left(-\infty, -\frac{r}{2C}\right] \\ \frac{2C^2}{r}x, & x \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{r}{2C}, \frac{r}{2C}\right] \end{cases}$$

e

$$|h'(y) - h'(x)| \leq \frac{2C^2}{r}|y-x| \quad \text{para quaisquer } x, y \in \mathbb{R}.$$

Resta provar a afirmação sobre os caminhos α_1 e α_2 . Primeiro, temos

$$|\alpha'_1(t)| = \sqrt{1 + (f'(t))^2} = \sqrt{1 + C^2},$$

logo,

$$l(\alpha_1) = \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1 + C^2} dt = 2x_0 \sqrt{1 + C^2}.$$

Analogamente,

$$|\alpha'_2(t)| = \sqrt{1 + (g'(t))^2} = \sqrt{1 + (\sigma t)^2}, \text{ onde } \sigma = \begin{cases} \frac{2C}{r}, & C < 1 \\ \frac{2C^2}{r}, & C \geq 1, \end{cases}$$

logo

$$l(\alpha_2) = \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1 + (\sigma t)^2} dt = 2 \int_0^{x_0} \sqrt{1 + (\sigma t)^2} dt.$$

Como $\sigma x_0 = C$, independente do C ,

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{x_0} \sqrt{1 + (\sigma t)^2} dt &= 2 \left(\frac{x_0}{2} \sqrt{1 + (\sigma x_0)^2} + \frac{\ln(\sigma x_0 + \sqrt{1 + (\sigma x_0)^2})}{2\sigma} \right) \\ &= x_0 \left(\sqrt{1 + (\sigma x_0)^2} + \frac{\ln(\sigma x_0 + \sqrt{1 + (\sigma x_0)^2})}{\sigma x_0} \right) \\ &= x_0 \left(\sqrt{1 + C^2} + \frac{\ln(C + \sqrt{1 + C^2})}{C} \right) \\ &\leq 2x_0 \sqrt{1 + C^2}, \end{aligned}$$

pois

$$\frac{\ln(C + \sqrt{1 + C^2})}{C} \leq \sqrt{1 + C^2}.$$

Daí, $l(\alpha_2) \leq l(\alpha_1)$, como queríamos demonstrar. \square

Proposição 3.20. *Sejam $\rho > 0$ e P, O, Q pontos em \mathbb{R}^n , e considere o caminho poligonal γ formado pelos segmentos $[P, O]$ e $[O, Q]$. Se $P, Q \notin B_{\rho/2}(O)$, então existe um caminho $\tilde{\gamma}$, ligando P a Q , que é regular, coincide com γ fora de $B_{\rho/2}(O)$ e $l(\tilde{\gamma}) \leq l(\gamma)$.*

Demonstração. Como estamos tratando de uma curva plana, podemos supor que estamos no \mathbb{R}^2 , além disso, a menos de uma rotação e uma translação, podemos considerar que O é a origem de \mathbb{R}^2 e γ é parte do gráfico de uma função da forma $x \mapsto C|x|$ para algum $C > 0$. Logo, aplicando a proposição acima para tal C e para $r = \rho/2$, obtemos uma curva $\tilde{\gamma}$ que liga P e Q , é regular e tem um comprimento menor que a γ . O fato de termos $\tilde{\gamma}$ coincidindo com γ fora de $B_{\rho/2}(O)$ vem da observação que o ponto de contato da h da proposição anterior é dado por $(x_0, C|x_0|)$, logo tem norma

$$|(x_0, C|x_0|)| = \sqrt{x_0^2 + C^2 x_0^2} = x_0 \sqrt{1 + C^2} < \frac{\rho}{2}.$$

\square

O último resultado da seção nos mostra que os domínios $C^{1,1}$ são NTA. Vale ressaltar que esta abordagem não tem como objetivo determinar as constantes ótimas, ao contrário, muitas das estimativas podem ser feitas de forma grosseira, com o único intuito de

estabelecer a comprovação teórica do fato. Uma prova deste resultado utilizando a definição analítica de domínio $C^{1,1}$ pode ser encontrada em (Monti; Morbidelli, 2005), embora o contexto seja um pouco mais geral. No entanto, apresentaremos aqui uma demonstração muito mais simples, partindo da definição geométrica de $C^{1,1}$, isto é, tratando esses domínios como aqueles que satisfazem a condição da bola.

Teorema 3.21. *Todo domínio limitado Ω que é $C^{1,1}$ é também NTA, com as constantes M_Ω e r_Ω dependendo do raio R da condição da bola e do diâmetro de Ω .*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar a existência dos pontos de corkscrew. Tome $\xi \in \partial\Omega$ e $0 < r < R$. Como vale a propriedade da bola interior, existe $\xi^i \in \Omega$ tal que $B_r(\xi^i) \subset \Omega$ e $\xi \in \partial B_r(\xi^i)$. Considere o ponto $\xi_r(w)$ definido como o ponto médio do segmento $[\xi, \xi^i]$. Observe que $\xi_r(w)$ é um ponto de corkscrew interior uma vez que

$$\begin{cases} \xi_r(w) \in \Omega \\ |\xi_r(w) - w| = r/2 < r \\ \delta(\xi_r(w)) \geq \frac{r}{2} \text{ (na verdade, é igual).} \end{cases}$$

Fica claro que, se Ω satisfaz as condições de pontos de corkscrew para $M = 2$, então vai continuar valendo para M maior que 2.

Com argumentos análogos, também concluímos a existência de pontos de corkscrew exteriores.

Agora, nos resta mostrar que Ω é M -uniforme, para $M \geq 2$. Pelo Teorema 3.2 nos é suficiente mostrar a existência da curva uniforme ligando pontos próximos de uma mesma região da fronteira de Ω , isto é, em vez de provar que Ω é uniforme, basta que provemos que $B_{r_0}^+(\xi) = B_{r_0}(\xi) \cap D$ é M -uniforme para qualquer $\xi \in \partial\Omega$ e para $r_0 = r_0(R) \leq R$ e $M = M(R) \geq 2$ universais.

Comece considerando $\xi \in \partial\Omega$ arbitrário, e tome $x, y \in B_{\tilde{r}}^+(\xi)$, onde $\tilde{r} < r_0 := \lambda R$ e λ escolhido mediante a necessidade (mantendo-se universal). Devemos mostrar que existe um caminho $\gamma \subset \Omega$, regular, ligando x a y , satisfazendo

$$l(\gamma) \leq M|x - y| \quad \text{e} \quad \delta(z) \geq \frac{1}{M} \min\{l(\gamma_{xz}), l(\gamma_{zy})\}$$

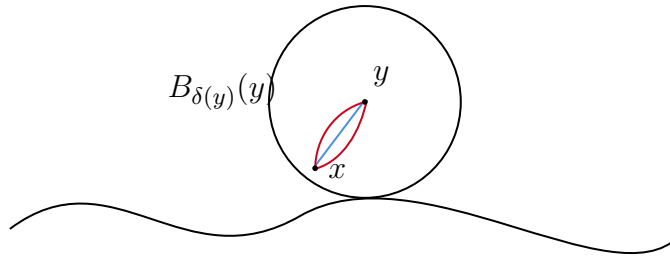
para todo $z \in \gamma$. Depois disso, basta tomar uma reparametrização pelo comprimento de arco.

De início podemos supor $\delta(x) \leq \delta(y)$. Além disso, para tais pontos, temos duas possibilidades:

Caso #1 : $\delta(y) \geq |x - y|$.

Nesse caso, $x \in \overline{B}_{\delta(y)}(y) \subset \Omega$, então x, y podem ser ligados por um segmento entre um ponto da bola e o seu centro, logo, não é difícil ver que é uma curva uniforme, como na Figura 14 a seguir.

Figura 14 – *Cigar* conectando x ao centro da bola



Fonte: elaborada pelo autor.

Formalizando, sendo γ o segmento entre x e y , a condição de *bounded turning* se estabelece automaticamente pois temos

$$l(\gamma) = |x - y|.$$

Já para a condição *cigar*, tome arbitrariamente $z \in [x, y]$. Afirmamos que

$$\overline{B}_{|x-z| \frac{\delta(y)}{|x-y|}}(z) \subset \overline{B}_{\delta(y)}(y).$$

Assumindo a afirmação acima, temos, necessariamente:

$$\delta(z) \geq |x - z| \underbrace{\frac{\delta(y)}{|x - y|}}_{\geq 1}.$$

Daí, se z está mais próximo de x ,

$$\delta(z) \geq |x - z| = \min\{l(\gamma_{x,z}), l(\gamma_{z,y})\}$$

enquanto

$$\delta(z) \geq |x - z| \geq |z - y| = \min\{l(\gamma_{x,z}), l(\gamma_{z,y})\},$$

no caso de z estar mais próximo do y . Em ambos os casos temos a condição *cigar* para $M = 1$.

Nos resta apenas a prova da afirmação. Seja então P um ponto da primeira bola. Temos

$$\begin{aligned}
 |P - y| &\leq |P - z| + |z - y| \\
 &\leq |x - z| \underbrace{\frac{\delta(y)}{|x - y|}}_{\geq 1} + |z - y| \\
 &\leq (|x - z| + |z - y|) \frac{\delta(y)}{|x - y|} \\
 &= \delta(y),
 \end{aligned}$$

provando o desejado.

Caso #2: $\delta(y) < |x - y|$.

Seja

$$k := \min \{m \in \mathbb{N}; 2^{m-1}\delta(y) < |x - y| \leq 2^m\delta(y)\} \geq 1.$$

Considere $\bar{x}, \bar{y} \in \partial\Omega$ pontos que satisfazem a distância de x e y para a fronteira, respectivamente.

De início suponha $\lambda = 1/8$. Tal escolha se justifica pela parte da existência dos pontos de corkscrew, onde podemos tomar $r := 2^{k+1}\delta(y) < 4|x - y| < 8\tilde{r} < 8r_0 < R$, a fim de obter pontos de corkscrew $p := \xi_r(\bar{x})$ e $q := \xi_r(\bar{y})$, os quais podemos tomar de modo que \bar{x}, x e p sejam colineares. O mesmo para \bar{y}, y e q . Teremos então

$$\delta(p) \geq \frac{r}{2} = 2^k\delta(y) \geq 2\delta(y) > \delta(x)$$

e

$$\delta(q) \geq \frac{r}{2} = 2^k\delta(y) \geq 2\delta(y) > \delta(y).$$

Além disso, ainda por serem pontos de corkscrew,

$$|p - x| \leq |p - \bar{x}| < r = 2^{k+1}\delta(y) < 4|x - y|$$

e

$$|q - y| \leq |q - \bar{y}| < r = 2^{k+1}\delta(y) < 4|x - y|.$$

Além disso,

$$|q - p| \leq |q - y| + |y - x| + |x - p| < 4|x - y| + |x - y| + 4|x - y| = 9|x - y|$$

Afirmção: Existem $\epsilon, \lambda_0 > 0$ tais que

$$\text{dist}([p, q], \partial\Omega) \geq \epsilon r \quad \text{para todo } r < \lambda_0 R. \quad (3.5)$$

OBS: Ao final da demonstração da afirmação acima, vamos obter $\epsilon = 1/8$ e $\lambda_0 = 16/291$.

Prova da Afirmção: Observe que, para provar tal afirmação, é suficiente provar que $q \in B_{R-\epsilon r}(\bar{x}^i)$, onde \bar{x}^i é o ponto de Ω que é o centro da bola de raio R que tangencia $\partial\Omega$ em \bar{x} , dado pela condição da bola interior.

Por se tratar de um problema bem caracterizado pela geometria, vamos assumir que \bar{x} é a origem de \mathbb{R}^n e $\overrightarrow{\bar{x}\bar{x}^i}$ é o $R\vec{e}_n$. Vamos ter que achar ϵ e λ_0 tais que $q \in B_{R-\epsilon r}(R\vec{e}_n)$.

Sabendo que p, q estão pelo menos $r/2$ distantes da fronteira, vamos considerar $\epsilon < 1/2$ para termos $p \in B_{R-\epsilon r}(R\vec{e}_n)$.

Pelo Lema 3.17, $q \in B_{R-\epsilon r}(R\vec{e}_n)$ se, e somente se,

$$|\epsilon R\vec{e}_n - q|^2 < 2\langle q - \epsilon R\vec{e}_n, (R - \epsilon r)\vec{e}_n \rangle,$$

ou seja, nos é suficiente provar que, para ϵ pequeno o suficiente e $r < \lambda_0 R$, também pequeno o suficiente, teremos

$$|\epsilon R\vec{e}_n - q|^2 < 2((R - \epsilon r)q_n - (R - \epsilon r)\epsilon r) = 2(R - \epsilon r)(q_n - \epsilon r). \quad (3.6)$$

Nosso primeiro objetivo é mostrar que existem $\epsilon < 1/2$ e $\lambda_0 < 1/8$ para os quais $q_n > 2\epsilon r$. Veja a Figura 15.

Inicialmente, se chamarmos de \bar{u} o vetor $\overrightarrow{\bar{y}\bar{y}^i}$, onde \bar{y}^i é o centro da bola interior, de raio R , dado pela condição da bola em \bar{y} , veremos que

$$q = \bar{y} + \frac{\delta(q)}{R} \bar{u}.$$

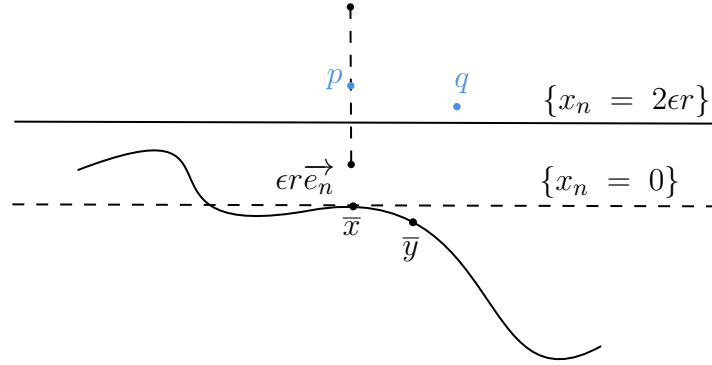
Daí,

$$q_n = \bar{y}_n + \frac{\delta(q)}{R} u_n. \quad (3.7)$$

Vamos então estimar q_n por baixo. Primeiro com a parcela do \bar{y}_n . Veja, inicialmente, que

$$|\bar{y} - \bar{x}| \leq |\bar{y} - y| + |y - x| + |x - \bar{x}| \leq \delta(y) + 2^k \delta(y) + \delta(y) \leq r,$$

Figura 15 – Objetivo: ver que q está acima do nível $\{x_n = 2\epsilon r\}$



Fonte: elaborada pelo autor.

daí podemos prender localmente o bordo de $\partial\Omega$ entre duas bolas de raio R dada pela condição da bola em \bar{x} . Mais precisamente, teremos

$$-f(\bar{y}') \leq \bar{y}_n \leq f(\bar{y}'),$$

para

$$f(z') := R \left(1 - \sqrt{1 - \frac{|z'|^2}{R^2}} \right).$$

Uma vez que $|\bar{y}| = |\bar{y} - \bar{x}| < r$, teremos $|\bar{y}'| < r$. E, como $1 - t < \sqrt{1 - t}$, sempre que $0 < t < 1$, teremos, para $t = |\bar{y}'|^2/R^2$,

$$R(1 - \sqrt{1 - t}) < Rt = \frac{|\bar{y}'|^2}{R} < \frac{r^2}{R}.$$

Portanto,

$$-\frac{r^2}{R} < -f(\bar{y}') \leq \bar{y}_n \leq f(\bar{y}') < \frac{r^2}{R},$$

e $\bar{y}_n > -r^2/R$ será nossa estimativa para a primeira parcela de (3.7).

Agora, para a segunda parcela de (3.7), pelo Lema das quatro bolas, Lema 3.18, temos

$$|u - R\vec{e}_n| < |\bar{y} - \bar{x}| \leq r.$$

Por outro lado, pela Lei dos cossenos,

$$|u - R\vec{e}_n|^2 = |u|^2 + |R\vec{e}_n|^2 - 2|u||R\vec{e}_n|\cos\alpha = 2R^2(1 - \cos\alpha),$$

onde α é o ângulo entre u e $R\vec{e}_n$, portanto,

$$\cos \alpha = \frac{\langle R\vec{e}_n, u \rangle}{R^2} = \frac{u_n}{R}.$$

Daí,

$$r^2 > |u - R\vec{e}_n|^2 = 2R^2 \left(1 - \frac{u_n}{R}\right),$$

e, assim,

$$u_n > \frac{2R^2 - r^2}{2R} = R - \frac{r^2}{2R}.$$

Por fim, como q é ponto de corkscrew, $\delta(q) \geq r/2$ e então

$$\frac{\delta(q)}{R} u_n \geq \frac{r}{2R} \left(R - \frac{r^2}{2R}\right) = \frac{r}{2} - \frac{r^3}{4R^2}.$$

Daí, da equação (3.7), concluímos

$$q_n > -\frac{r^2}{R} + \frac{r}{2} - \frac{r^3}{4R^2}.$$

Vamos então achar $\epsilon < 1/2$ e $\lambda_0 < 1/8$ tais que

$$2\epsilon r < \frac{r}{2} - \frac{r^2}{R} - \frac{r^3}{4R^2} \quad \forall r < \lambda_0 R,$$

ou, ainda,

$$\left(\frac{1}{2} - 2\epsilon\right)r - \frac{r^2}{R} - \frac{r^3}{4R^2} > 0 \quad \forall r < \lambda_0 R.$$

De partida, a equação acima nos impõe que ϵ seja menor que $1/4$, então assim o faça. Vamos estudar o comportamento da função

$$g(r) := \left(\frac{1}{2} - 2\epsilon\right)r - \frac{r^2}{R} - \frac{r^3}{4R^2}$$

em valores de r próximos da origem, assim acharemos o λ_0 . Veja que

$$g'(r) = -\frac{3r^2}{4R^2} - \frac{2r}{R} + \left(\frac{1}{2} - 2\epsilon\right),$$

ou seja, é uma parábola com concavidade para baixo. Além disso, analisando o Δ da equação, obtemos

$$\Delta = \frac{4 + \frac{3}{2} - 6\epsilon}{R^2} > 0,$$

logo g' tem duas raízes reais, dadas por

$$z_1 = \frac{\frac{2}{R} + \sqrt{\Delta}}{-\frac{6}{4R^2}} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{\frac{2}{R} - \sqrt{\Delta}}{-\frac{6}{4R^2}}.$$

Como $z_1 < 0$, e nos interessa apenas a vizinhança de 0 pela direita, e a concavidade da parábola é para baixo, podemos garantir que g' é positiva em $[0, z_2)$. Portanto, usando a estimativa

$$\sqrt{1+x} - 1 > \frac{x}{3}, \quad \text{válida para valores } 0 < x < 1$$

concluimos

$$z_2 = \left(\sqrt{1 + \frac{3}{8} + \frac{3\epsilon}{2}} - 1 \right) \frac{4R}{3} > \left(\frac{1}{8} + \frac{\epsilon}{2} \right) \frac{4R}{3}.$$

Daí, tomando $\epsilon := 1/8$, teremos $z_2 > R/12$ e, assim, g' é positiva em $[0, R/12]$. Segue que g é estritamente crescente em tal intervalo, valendo

$$0 < g(r) \leq g\left(\frac{R}{12}\right) \quad \text{para todo } 0 < r \leq R/12.$$

Obtemos assim, para $\epsilon = 1/8$ e $\lambda_0 = 1/12$, que

$$q_n > 2\epsilon r = \frac{r}{4}.$$

Como nosso objetivo ainda é (3.6), podemos substituir o valor de ϵ para obter um novo objetivo:

$$\left| \frac{r}{8} \vec{e}_n - q \right|^2 < 2 \left(R - \frac{r}{8} \right) \left(q_n - \frac{r}{8} \right). \quad (3.8)$$

Por um lado temos

$$\left| \frac{r}{8} \vec{e}_n - q \right| \leq \frac{r}{8} + \underbrace{|q|}_{|q - \bar{x}|} \leq \frac{r}{8} + |q - \bar{y}| + |\bar{y} - \bar{x}| \leq \frac{r}{8} + r + r = \frac{17r}{8},$$

que implica

$$\left| \frac{r}{8} \vec{e}_n - q \right|^2 \leq \left(\frac{17}{8} \right)^2 r^2.$$

Por outro lado, como $q_n > r/4$,

$$2 \left(R - \frac{r}{8} \right) \left(q_n - \frac{r}{8} \right) > 2 \left(R - \frac{r}{8} \right) \frac{r}{8} = \frac{2Rr}{8} - \frac{2r^2}{8^2},$$

só precisamos achar $\lambda_0 \leq 1/12$ de modo que

$$\left(\frac{17}{8}\right)^2 r^2 \leq \frac{2Rr}{8} - \frac{2r^2}{8^2} \quad \forall r < \lambda_0 R,$$

o que equivale a

$$\frac{17^2 + 2}{8^2} r^2 \leq \frac{2Rr}{8} \quad \forall r < \lambda_0 R.$$

Portanto, para qualquer

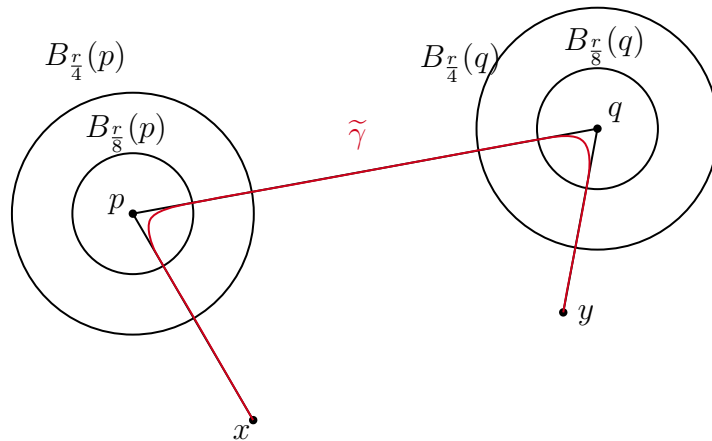
$$r \leq \frac{16R}{291}$$

vale (3.8). Logo, nossa afirmação está provada para $\lambda_0 := 16/291$ e $\epsilon := 1/8$. ■

Podemos então dar continuidade a demonstração principal. Como preciso de $r \leq 16R/291$ para a afirmação valer, e sei que $r < 8r_0$, vamos tomar $r_0 := R/150 < 2R/291$, para que se mantenha necessariamente $r < 16R/291$.

Como $\delta(p) \geq r/2$, bem como $\delta(q)$, vamos tomar bolas de raio $r/4$ em torno de p e q , e estas ainda estarão contidas em Ω . Pela Proposição 3.20, encontramos uma $\tilde{\gamma}$ que regulariza a poligonal $[x, p] \cup [p, q] \cup [q, y]$, tem comprimento menor e que coincide com a própria poligonal fora de $B_{r/8}(p) \cup B_{r/8}(q)$. Confira a Figura 16.

Figura 16 – Regularização da poligonal de x a y



Fonte: elaborada pelo autor.

Vamos provar as condições de $\tilde{\gamma}$ para Ω ser uniforme. Primeiro a condição *bounded turning*:

$$l(\tilde{\gamma}) \leq |x - p| + |p - q| + |q - y| < 17|x - y|.$$

Agora a condição *cigar*:

Defina \tilde{x} o ponto de $[x, p]$ que dista $r/4$ para p , e \tilde{y} o ponto de $[y, q]$ cuja distância para q é $r/4$. Dado $z \in \tilde{\gamma}$, temos três casos: $z \in [x, \tilde{x}]$, $z \in [y, \tilde{y}]$ e $z \in \tilde{\gamma}_{\tilde{x}, \tilde{y}}$. Vamos começar com o último.

Pela afirmação, qualquer ponto de $[p, q]$ está a uma distância maior ou igual a $r/8$ de $\partial\Omega$. Logo, podemos garantir que todo $z \in \tilde{\gamma}_{\tilde{x}, \tilde{y}}$ satisfaz $\delta(z) \geq r/8$. Daí

$$\min\{l(\tilde{\gamma}_{x,z}), l(\tilde{\gamma}_{z,y})\} \leq \frac{l(\tilde{\gamma})}{2} < \frac{17}{2}|x-y| < 2^4|x-y| \leq 2^{k+4}\delta(y) = 2^3r \leq 2^6\delta(z).$$

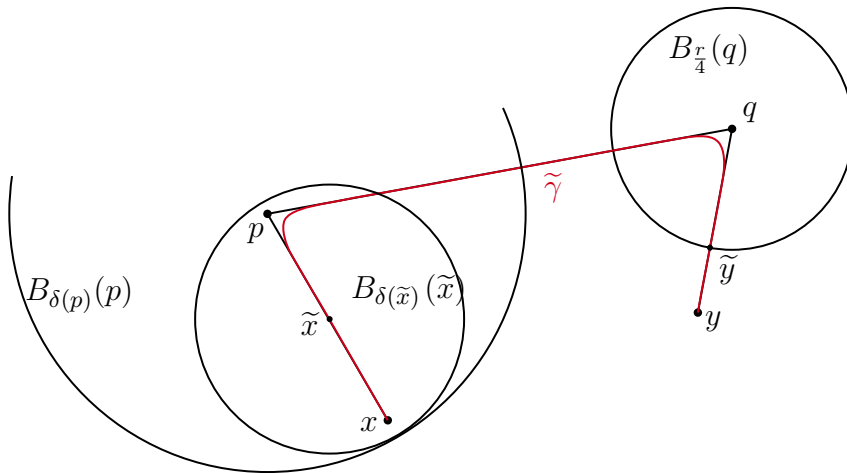
Agora o caso de $z \in [x, \tilde{x}]$. Nesse caso, vamos agir de maneira similar ao CASO #1 do início da demonstração, uma vez que $x, \tilde{x} \in B_{\delta(p)}(p)$. (Figura 17). Note que, sendo x, \tilde{x} e p colineares, temos:

$$x \in \overline{B}_{\delta(\tilde{x})}(\tilde{x}) \subset \overline{B}_{\delta(p)}(p).$$

Pelo CASO #1,

$$\delta(z) \geq |x-z| = \min\{l(\tilde{\gamma}_{x,z}), l(\tilde{\gamma}_{z,y})\}.$$

Figura 17 – Disposição final dos elementos: de x a \tilde{x} temos $\tilde{\gamma}$ sendo um segmento de reta



Fonte: elaborada pelo autor.

Analogamente, caso $z \in [y, \tilde{y}]$, teremos

$$\delta(z) \geq |y-z| = \min\{l(\tilde{\gamma}_{x,z}), l(\tilde{\gamma}_{z,y})\}.$$

Portanto, $\Omega \cap B_{r_0}(\xi)$ é um domínio uniforme para $M := 2^6$, que foi o maior dos “ M ’s” que apareceram na demonstração, e $r_0 := R/150$, que é o menor dos r_0 . Pelo Teorema 3.2, Ω vai ser uniforme com constante

$$\widetilde{M} := \frac{40M^3 \text{diam}(\Omega)}{r_0} = 2^{22} \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot \frac{\text{diam}(\Omega)}{R}.$$

Finalmente, como Ω é uniforme e satisfaz as condições de corkscrew interior e exterior, temos que Ω será NTA com constantes $M_\Omega = \widetilde{M}$ e $r_\Omega = R/2$. \square

4 ESTIMATIVA DE CARLESON

Neste capítulo, apresentaremos e provaremos o resultado principal deste trabalho: a **Estimativa de Carleson**. Originado no início dos anos 1960, no trabalho (Carleson, 1962), este resultado, em seu contexto clássico, trata do fato de que funções harmônicas positivas em uma região que contém parte da fronteira, e se anulam em tal porção da fronteira, são limitadas, em uma região menor, pelo valor de um ponto fixo no domínio, com uma constante multiplicativa que é independente da função. No nosso caso, apresentaremos uma versão para o g -Laplaciano, em domínios NTA. Nossa demonstração fundamenta-se nas ideias originais de (Caffarelli *et al.*, 1981), e, mais especificamente, em trabalhos subsequentes de outros autores, como (Braga; Moreira, 2021), (Braga *et al.*, 2023) e (Adamowicz; Lundström, 2016). Esses estudos se baseiam em dois resultados principais: um **refinamento da Desigualdade de Harnack**, que proporciona uma precisão maior na constante de Harnack, levando em conta a distância do ponto até a fronteira, e um tipo de **Lema de Oscilação de De Giorgi**, também aplicado até a fronteira. Esses dois resultados serão abordados nas duas primeiras seções, enquanto a Estimativa de Carleson será provada na seção final.

Ao longo deste capítulo, fica determinado que as funções G e g satisfazem as condições (P.C.) e (Q.C.). Além disso, dados um domínio Ω e uma bola B , trabalharemos com funções u satisfazendo:

$$\begin{cases} u \in W_{\text{loc}}^{1,G}(B \cap \Omega) \cap C^0(\overline{B} \cap \overline{\Omega}), \\ u \geq 0, \\ \Delta_g u = f, \text{ para } f \in L^q(B \cap \Omega), \text{ com } q > n, \\ u|_{B \cap \partial\Omega} \equiv 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

4.1 Desigualdade de Harnack refinada

Antes de iniciarmos com o resultado principal da seção, vamos apresentar o seguinte lema. Este traz uma propriedade dos domínios uniformes semelhante àquela apresentada em domínios de John.

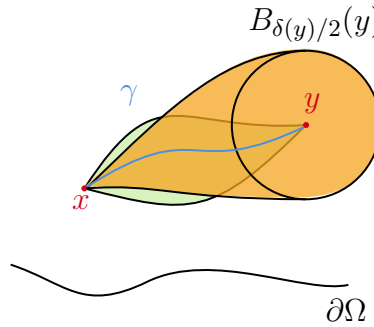
Lema 4.1 (Condição *carrot* em pontos distantes da fronteira). *Sejam Ω um domínio M_Ω -uniforme e $A = A(M_\Omega) \geq 1$. Se $\gamma: [0, l(\gamma)] \rightarrow \Omega$ é uma curva retificável, p.p.c.a., A -*

uniforme, com extremos $x, y \in B_{r/A}(x_0) \cap \Omega$ satisfazendo $\delta(x) \leq \delta(y)$ e $\delta(y) \geq \epsilon r/A$, para algum $1 \geq \epsilon > 0$, então vale

$$\delta(z) \geq \frac{\epsilon}{4A^2} l(\gamma_{x,z}) \quad \forall z \in \gamma. \quad (4.2)$$

A demonstração é análoga a do Teorema 3.8, por essa razão, seremos mais diretos nos argumentos. A principal diferença é que usaremos a hipótese $\delta(y) \geq \epsilon r/A$ uma vez que não temos necessariamente y como um centro do domínio de John. Geometricamente, provaremos que o *cigar* de x até y pode se tornar a *carrot* centrada em y , como na Figura 18 a seguir.

Figura 18 – Construção da *carrot* a partir de *cigar*



Fonte: elaborada pelo autor.

Demonstração. Considere $\epsilon, x, y, A, \gamma, x_0$ e r como no enunciado. De início veja que, por ser A -uniforme, γ deve satisfazer

$$l(\gamma) \leq A|x - y| \leq 2\frac{r}{A}A = 2r, \quad (4.3)$$

e, assim, $r \geq l(\gamma)/2$.

Tomando $z \in \gamma$, teremos três casos a tratar, a depender da posição do z .

CASO #1: $l(\gamma_{x,z}) = \min\{l(\gamma_{x,z}), l(\gamma_{z,y})\}$.

Imediato da segunda condição de curva A -uniforme:

$$\delta(z) \geq \frac{1}{A} l(\gamma_{x,z}).$$

CASO #2: $l(\gamma_{z,y}) = \min\{l(\gamma_{x,z}), l(\gamma_{z,y})\}$ e $|z - y| > \delta(y)/2$.

Combinando a definição de curva A -uniforme com a hipótese $\delta(y) \geq \epsilon r/A$ e com (4.3), temos:

$$\delta(z) \geq \frac{1}{A} l(\gamma_{z,y}) \geq \frac{1}{A} |z - y| > \frac{\delta(y)}{2A} \geq \frac{\epsilon r}{2A^2} \geq \frac{\epsilon l(\gamma)}{4A^2} \geq \frac{\epsilon}{4A^2} l(\gamma_{x,z}).$$

CASO #3: $l(\gamma_{z,y}) = \min\{l(\gamma_{x,z}), l(\gamma_{z,y})\}$ e $|z - y| \leq \delta(y)/2$.

Aqui, como $z \in B_{\frac{\delta(y)}{2}}(y)$,

$$\delta(z) \geq \frac{\delta(y)}{2} \geq \frac{\epsilon r}{2A}.$$

Além disso, por (4.3),

$$\delta(z) \geq \frac{\epsilon r}{2A} \geq \frac{\epsilon l(\gamma)}{4A} \geq \frac{\epsilon}{4A} l(\gamma_{x,z}).$$

Observando que $\epsilon \in (0, 1]$ e $A \geq 1$ teremos, em qualquer caso,

$$\delta(z) \geq \frac{\epsilon}{4A^2} l(\gamma_{x,z}),$$

como queríamos. □

O resultado a seguir é uma versão mais precisa da Desigualdade de Harnack, permitindo que um dos pontos se aproxime da fronteira e mostrando como a distância desse ponto afeta a constante de Harnack. As ideias utilizadas na demonstração seguem as propostas de (Adamowicz; Lundström, 2016), que, por sua vez, refinam o resultado apresentado em (Holopainen *et al.*, 2001).

Teorema 4.2 (Refinamento da Desigualdade de Harnack). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio M_Ω -uniforme. Existe $A_1 = A_1(M_\Omega) \geq 4$ tal que, para todo $w \in \partial\Omega$ e para todo $0 < r < \text{diam}(\Omega)/4$, se u é solução de (4.1) para $B = B_r(w)$, então para qualquer $\epsilon \in (0, 1/2M_\Omega]$,*

$$\begin{cases} u(x) \leq C_1 \left(\frac{\delta(y)}{\delta(x)} \right)^\lambda \left(u(y) + r g^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q(B_r^+(w))} \right) \right) \\ u(y) \leq C_1 \left(\frac{\delta(y)}{\delta(x)} \right)^\lambda \left(u(x) + r g^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q(B_r^+(w))} \right) \right), \end{cases} \quad (4.4)$$

para todos os $x, y \in B_{r/A_1}^+(w)$ que satisfizerem $\delta(x) \leq \delta(y)$ com $\delta(y) \geq \epsilon r/A_1$. Aqui C_1, λ são constantes positivas que dependem apenas de $n, \delta, g_0, M_\Omega, q$ e ϵ .

Observação: No caso homogêneo, i.e., $f = 0$, (4.4) se torna

$$C^{-1} \left(\frac{\delta(y)}{\delta(x)} \right)^{-\lambda} u(y) \leq u(x) \leq C \left(\frac{\delta(y)}{\delta(x)} \right)^{\lambda} u(y). \quad (4.5)$$

Daí, se y é um ponto fixado, com distância fixa até a fronteira, e tomamos x como um ponto variável, podemos observar o fato bem conhecido de que a constante de Harnack é proporcional a uma potência negativa da distância de x até a fronteira.

Demonstração. Graças as Proposições 3.4 e 3.5, podemos conectar quaisquer dois pontos por uma geodésica quasi hiperbólica que também é uma curva A -uniforme, $A = A(M_\Omega) \geq 1$. Faça $A_1 := 4A$. Tome então x, y, ϵ, w, r e u como no enunciado. A possibilidade da existência de y satisfazendo tais hipóteses é justificada pelo limite superior de ϵ e pelo fato de $r < \text{diam}(\Omega)/4$. De fato, considere o conjunto

$$\Gamma_\epsilon := \{z \in B_r^+(w) ; \delta(z) \geq \epsilon r\}.$$

Devemos mostrar que $\Gamma_\epsilon \neq \emptyset$.

Observe que $\Gamma_{\epsilon_1} \subset \Gamma_{\epsilon_2}$ sempre que $\epsilon_1 \geq \epsilon_2$, então só precisamos mostrar que $\Gamma_{1/2M_\Omega} \neq \emptyset$ ¹. Tome agora $z_1 \in B_{r/4}^+(w)$ e $z_2 \in \Omega \setminus B_{2r}(w)$. (Existe z_2 pois $\text{diam}(\Omega) > 4r = \text{diam}(B_r(w))$).

Como Ω é M_Ω -uniforme, existe uma curva uniforme γ_{z_1, z_2} ligando z_1 a z_2 . Como tal curva é conexa, existe um $z_3 \in \gamma_{z_1, z_2} \cap \partial B_{3r/4}(w) \cap \Omega$ e este satisfaz

$$\begin{aligned} \delta(z_3) &\geq \frac{1}{M_\Omega} \min\{l(\gamma_{z_1 z_3}), l(\gamma_{z_3 z_2})\} \\ &\geq \frac{1}{M_\Omega} \min\{|z_1 - z_3|, |z_3 - z_2|\} \\ &\geq \frac{1}{M_\Omega} \frac{r}{2} = \frac{r}{2M_\Omega}. \end{aligned}$$

Logo, $z_3 \in \left\{z \in B_r^+(w) ; \delta(z) \geq \frac{r}{2M_\Omega}\right\}$ e assim $\Gamma_\epsilon \neq \emptyset$ para qualquer $\epsilon \leq 1/2M_\Omega$. Naturalmente, o conjunto dos z tais que $z \in B_{r/A}^+(w)$ e $\delta(z) \geq \epsilon r/A$ será não vazio, dando razão para a existência do y .

¹ Observe que isso equivale a afirmar que todo domínio uniforme satisfaz a condição de *corkscrew* interior automaticamente, o que gera uma redundância na definição de NTAs via domínios uniformes.

Podemos agora partir para a demonstração do resultado. Considere uma geodésica γ ligando x a y . Temos que γ é A -uniforme.

Primeiro observe que, por um cálculo análogo a (4.3), $l(\gamma) \leq r/2$. Daí, para $z \in \gamma$ temos

$$\min\{l(\gamma_{xz}), l(\gamma_{zy})\} \leq \frac{l(\gamma)}{2} \leq \frac{r}{4},$$

ou seja, $l(\gamma_{xz}) \leq r/4$ ou $l(\gamma_{zy}) \leq r/4$. Em particular, $z \in B_{r/4}(x) \cup B_{r/4}(y)$. Acabamos de concluir que

$$\gamma \subset B_{r/4}(x) \cup B_{r/4}(y) \subset B_{r/2}(w),$$

e, portanto, temos que $\gamma \subset B_{r/2}^+(w)$.

Para continuar, necessitamos provar a seguinte afirmação.

AFIRMAÇÃO (Cadeia de bolas cobrindo γ - Harnack chain²) Existe uma cadeia de bolas $\{B_i\}_{i=1}^N$ tal que $B_i := B_{r_i}(x_i)$, onde $x_i \in \gamma$, $\gamma \subset \bigcup_{i=1}^N B_i$ e

- i) $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset \ \forall i$;
- ii) $2B_i := B_{2r_i}(x_i) \subset B_r(w) \cap \Omega$; e
- iii) $N \leq 3k_\Omega(x, y) + 1$.

Prova da Afirmação: Vamos provar a afirmação acima construindo tal família de x_i e r_i . Primeiramente, tome $x_1 := x$ e $r_1 := \delta(x_1)/2$, daí $B_1 := B_{r_1}(x_1)$. Em seguida, tome $x_2 \in \gamma$ como o ponto imediatamente antes de γ sair de $\overline{B_1}$, isto é,

$$x_2 = \gamma(t_2) \in \partial B_1, \ t_2 \in [0, l(\gamma)],$$

onde $\gamma(t) \in \overline{B_1}$ para todo $t \leq t_2$. Defina então $r_2 := \delta(x_2)/2$, e assim fica definida a bola B_2 .

O processo descrito acima é claro e pode ser repetido de maneira consecutiva até um N tal que $x_N = \gamma(t_N)$, com $t_N \in [0, l(\gamma)]$, e tal que $\gamma(t) \in \overline{B_N}$ para todo $t > t_N$. O número de bolas é finito pois, por compacidade, existe $z_0 \in \gamma$ tal que $\delta(z_0)/2$ é mínimo. Daí, como $l(\gamma) < r/2 < \infty$ e $r_i \geq \delta(z_0)/2$ para todo i , γ será coberto por finitas B_i . Em

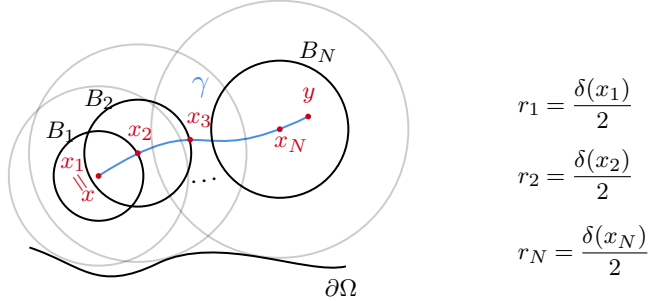
² Aqui nosso objetivo é uma cadeia um pouco mais específica, então vamos além, mas para ver que isso é uma cadeia de Harnack, como na Definição 3.11, basta usar a seguinte estimativa na terceira condição da afirmação:

$$k_\Omega(x, y) \leq 4A^2 \log \left(\frac{|x - y|}{\min\{\delta(x), \delta(y)\}} \right).$$

Essa está presente no Lema 2.13 de (Bonk *et al.*, 2001)).

particular, as bolas não se degeneram. Assim, temos $\gamma \subset \bigcup_{i=1}^N B_i$, com $y \in B_N$. A cadeia de bolas é exibida na Figura 19.

Figura 19 – Construção da Harnack chain



Fonte: elaborada pelo autor.

O item *i*) da afirmação é óbvio, por construção, mesma razão pela qual $2B_i \subset \Omega$. Vamos mostrar que $2B_i \subset B_r(w)$ para qualquer $i \leq N$. Lembrando que $\gamma \subset B_{r/2}(w)$, tome $z \in 2B_i$, para algum $i \leq N$. Teremos,

$$|z - w| \leq |z - x_i| + |x_i - w| < \underbrace{2r_i}_{= \delta(x_i)} + |x_i - w| \leq 2|x_i - w| < r,$$

o que termina de provar *ii*).

Verificar a estimativa em *iii*) é um pouco mais complicado. No que segue, seja $\gamma_i := \gamma_{x_i, x_{i+1}}$ a subcurva de γ que liga x_i a x_{i+1} , e, por convenção, $x_{N+1} := y$, o que garante uma definição adequada para γ_N . Observe que $\{\gamma_i\}_{i=1}^N$ ainda são geodésicas e, por construção, disjuntas, exceto pelo fato de γ_i e γ_{i+1} compartilharem um único ponto em suas extremidades.

Note que, para qualquer $1 \leq i \leq N$, se $z \in \gamma_i$, teremos necessariamente $z \in \overline{B_i}$ e, assim,

$$\delta(z) \leq \delta(x_i) + |x_i - z| \leq 2r_i + r_i = 3r_i.$$

Daí, para $1 \leq i \leq N - 1$,

$$k_\Omega(x_i, x_{i+1}) = \int_{\gamma_i} \frac{ds(z)}{\delta(z)} \geq \int_{\gamma_i} \frac{ds(z)}{3r_i} = \frac{l(\gamma_i)}{3r_i} \geq \frac{1}{3} \frac{|x_i - x_{i+1}|}{r_i} = \frac{1}{3}.$$

Observe, entretanto, que não é válida tal estimativa para $i = N$ uma vez que y é um ponto interior da bola B_N e $l(\gamma_N)$ pode ser menor que o raio r_N . Porém, ainda podemos estimar k_Ω inferiormente da seguinte maneira:

$$k_{\Omega}(x, y) = \int_{\gamma} \frac{ds(z)}{\delta(z)} = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \frac{ds(z)}{\delta(z)} \geq \sum_{i=1}^{N-1} \int_{\gamma_i} \frac{ds(z)}{\delta(z)} \geq \frac{1}{3}(N-1), \quad (4.6)$$

daí, $N-1 \leq 3k_{\Omega}(x, y)$, o que conclui o item *iii*) e prova a afirmação. ■

O próximo objetivo é então estimar o número de bolas N por constantes que envolvam Ω e $\delta(x)$ e $\delta(y)$. Começemos por mostrar que

$$k_{\Omega}(x, y) \leq 1 + \frac{4A_1^3}{\epsilon^2} + \frac{4A_1^2}{\epsilon} \cdot \log\left(\frac{\delta(y)}{\delta(x)}\right). \quad (4.7)$$

Temos dois casos a tratar.

CASO #1: $\frac{\delta(x)}{2} > l(\gamma)$.

Nesse caso, para qualquer $z \in \gamma$, temos

$$\min\{l(\gamma_{x,z}), l(\gamma_{z,y})\} \leq \frac{l(\gamma)}{2} < \frac{\delta(x)}{4}.$$

Portanto, como $\delta(x) \leq \delta(y)$,

$$\gamma \subset B_{\frac{\delta(x)}{4}}(x) \cup B_{\frac{\delta(x)}{4}}(y) \subset B_{\frac{\delta(x)}{4}}(x) \cup B_{\frac{\delta(y)}{4}}(y).$$

Daí, se $z \in B_{\frac{\delta(x)}{4}}(x)$, temos

$$\delta(z) \geq \frac{3}{4}\delta(x) > \frac{\delta(x)}{2},$$

bem como

$$\delta(z) > \frac{\delta(y)}{2} \geq \frac{\delta(x)}{2},$$

caso $z \in B_{\frac{\delta(x)}{4}}(y)$. Logo,

$$\delta(z) \geq \frac{\delta(x)}{2}$$

e, assim,

$$\frac{1}{\delta(z)} < \frac{2}{\delta(x)},$$

para qualquer $z \in \gamma$.

Daí,

$$k_{\Omega}(x, y) = \int_{\gamma} \frac{ds(z)}{\delta(z)} < 2 \int_{\gamma} \frac{ds(z)}{\delta(x)} = \frac{2}{\delta(x)} l(\gamma) \leq 1.$$

CASO #2: $\frac{\delta(x)}{2} \leq l(\gamma)$.

Nesse caso, assumindo que a curva é p.p.c.a.,

$$\begin{aligned} k_{\Omega}(x, y) &= \int_{\gamma} \frac{ds(z)}{\delta(z)} = \int_0^{l(\gamma)} \frac{dt}{\delta(\gamma(t))} \\ &= \int_0^{\delta(x)/2} \frac{dt}{\delta(\gamma(t))} + \int_{\delta(x)/2}^{l(\gamma)} \frac{dt}{\delta(\gamma(t))} \\ &\leq \frac{2}{\delta(x)} \int_0^{\delta(x)/2} dt + \int_{\delta(x)/2}^{l(\gamma)} \frac{dt}{\delta(\gamma(t))} \\ &= 1 + \int_{\delta(x)/2}^{l(\gamma)} \frac{dt}{\delta(\gamma(t))}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.1, e por termos uma curva p.p.c.a.,

$$\delta(\gamma(t)) \geq \frac{\epsilon}{4A_1^2} l(\gamma_{x, \gamma(t)}) = \frac{\epsilon}{4A_1^2} \cdot t,$$

Daí, $1/\delta(\gamma(t)) \leq 4A_1^2/\epsilon t$ e então

$$\int_{\delta(x)/2}^{l(\gamma)} \frac{dt}{\delta(\gamma(t))} \leq \frac{4A_1^2}{\epsilon} \int_{\delta(x)/2}^{l(\gamma)} \frac{dt}{t}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} k_{\Omega}(x, y) &\leq 1 + \frac{4A_1^2}{\epsilon} \int_{\delta(x)/2}^{l(\gamma)} \frac{dt}{t} \\ &= 1 + \frac{4A_1^2}{\epsilon} \log t \Big|_{t=\delta(x)/2}^{l(\gamma)} \\ &\leq 1 + \frac{4A_1^2}{\epsilon} \log t \Big|_{t=\delta(x)/2}^{\frac{A_1}{2\epsilon} \delta(y)} \\ &= 1 + \frac{4A_1^2}{\epsilon} \cdot \log \left(\frac{A_1}{\epsilon} \cdot \frac{\delta(y)}{\delta(x)} \right), \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos que $l(\gamma) \leq r/2 \leq A_1\delta(y)/2\epsilon$ e também que \log é crescente. Agora, usando que $\log(x) \leq x$,

$$\begin{aligned} k_\Omega(x, y) &\leq 1 + \frac{4A_1^2}{\epsilon} \cdot \log\left(\frac{A_1}{\epsilon} \cdot \frac{\delta(y)}{\delta(x)}\right) \\ &= 1 + \frac{4A_1^2}{\epsilon} \log\left(\frac{A_1}{\epsilon}\right) + \frac{4A_1^2}{\epsilon} \log\left(\frac{\delta(y)}{\delta(x)}\right) \\ &\leq 1 + \frac{4A_1^3}{\epsilon^2} + \frac{4A_1^2}{\epsilon} \cdot \log\left(\frac{\delta(y)}{\delta(x)}\right), \end{aligned}$$

o que prova (4.7).

Daí, podemos estimar N da seguinte forma:

$$\begin{aligned} N &\leq 3k_\Omega(x, y) + 1 \\ &\leq 1 + 3 + \frac{12A_1^3}{\epsilon^2} + \frac{12A_1^2}{\epsilon} \cdot \log\left(\frac{\delta(y)}{\delta(x)}\right) \\ &\leq \frac{16A_1^3}{\epsilon^2} + \frac{12A_1^2}{\epsilon} \cdot \log\left(\frac{\delta(y)}{\delta(x)}\right) \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{16A_1^3}{\epsilon^2} + \frac{12A_1^2}{\epsilon} \cdot \frac{\delta(y)}{\delta(x)} \\ &\leq 28 \frac{A_1^3}{\epsilon^2} \frac{\delta(y)}{\delta(x)}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Podemos então dar continuidade a demonstração principal. Primeiro, para melhor fluidez da leitura, considere a seguinte redução

$$K_{r,f,w}^+ := rg^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q(B_r^+(w))} \right).$$

Considere $C_H \geq 1$, a constante de Harnack obtida ao aplicarmos a Desigualdade de Harnack para as bolas $B_1(0)$ e $\bar{B}_{1/2}(0)$. Esta será a mesma para quando aplicarmos para $2B_i$ e \bar{B}_i da família definida acima. Daí, aplicando a Desigualdade de Harnack na cadeia de bolas, pela equação (2.11) com $K_i := K_{2r_i, f, x_i}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
u(x) = u(x_1) &\leq C_H(u(x_2) + K_1) \\
&\leq C_H(C_H(u(x_3) + K_2) + K_1) \\
&= (C_H)^2 u(x_3) + (C_H)^2 K_2 + C_H K_1 \\
&\leq (C_H)^2 C_H(u(x_4) + K_3) + (C_H)^2 K_2 + C_H K_1 \\
&= (C_H)^3 u(x_4) + (C_H)^3 K_3 + (C_H)^2 K_2 + C_H K_1 \\
&\leq \dots \\
&\leq (C_H)^{N-1} u(x_N) + (C_H)^{N-1} K_{N-1} + \dots + C_H K_1 \\
&\leq (C_H)^N u(y) + (C_H)^N K_N + \dots + C_H K_1 \\
&\leq (C_H)^N u(y) + \left((C_H)^N + \dots + C_H \right) K_{r,f,w}^+ \\
&\leq (C_H)^N u(y) + N(C_H)^N K_{r,f,w}^+ \\
&= (C_H)^N \left(u(y) + N \cdot K_{r,f,w}^+ \right),
\end{aligned}$$

ou seja, podemos concluir

$$u(x) \leq N \cdot (C_H)^N \cdot \left(u(y) + K_{r,f,w}^+ \right). \quad (4.10)$$

De maneira inteiramente análoga concluimos

$$u(y) \leq N \cdot (C_H)^N \cdot \left(u(x) + K_{r,f,w}^+ \right). \quad (4.11)$$

Agora, só nos resta estimar $N(C_H)^N$.

Usando (4.8), temos

$$C_H^N \leq C_H^{\frac{16A_1^3}{\epsilon^2} + \frac{12A_1^2}{\epsilon} \cdot \log\left(\frac{\delta(y)}{\delta(x)}\right)} = C_H^{\frac{16A_1^3}{\epsilon^2}} \cdot C_H^{\frac{12A_1^2}{\epsilon} \cdot \log\left(\frac{\delta(y)}{\delta(x)}\right)}$$

e, como para quaisquer $1 \leq a, b, c \in \mathbb{R}$ vale

$$a^{b \log c} = e^{\log(a^{b \log c})} = e^{b \log c \log a} = e^{\log(c^{b \log a})} = c^{b \log a},$$

teremos

$$C_H^N \leq C_H^{\frac{16A_1^3}{\epsilon^2}} \cdot \left(\frac{\delta(y)}{\delta(x)} \right)^{12 \frac{A_1^2}{\epsilon} \cdot \log C_H}.$$

Portanto, agora usando (4.9), podemos concluir

$$N \cdot (C_H)^N \leq 28 \frac{A_1^3}{\epsilon^2} \frac{\delta(y)}{\delta(x)} \cdot C_H^{\frac{16A_1^3}{\epsilon^2}} \cdot \left(\frac{\delta(y)}{\delta(x)} \right)^{12 \frac{A_1^2}{\epsilon} \cdot \log C_H} \leq 28 \frac{A_1^3}{\epsilon^2} \cdot C_H^{\frac{16A_1^3}{\epsilon^2}} \cdot \left(\frac{\delta(y)}{\delta(x)} \right)^{1 + 12 \frac{A_1^2}{\epsilon} \cdot \log C_H}$$

e isso é justamente o que queríamos provar para

$$C := 28 \frac{A_1^3}{\epsilon^2} \cdot C_H^{\frac{16A_1^3}{\epsilon^2}}$$

e

$$\lambda := 1 + 12 \frac{A_1^2}{\epsilon} \cdot \log C_H.$$

□

Observação: Este resultado depende minimamente do operador em questão. Note que apenas utilizamos o fato de que para tal operador é válida a Desigualdade de Harnack clássica. A dependência correta de C e λ é dada por ϵ, Ω, n e C_H , onde C_H é a constante de Harnack associada ao operador em questão. Como no nosso caso temos $C_H = C_H(n, \delta, g_0, q)$ as constantes aparecem conforme descrito no enunciado do teorema.

4.2 Lema de oscilação até a fronteira

Nesta seção, apresentaremos um resultado do tipo Lema da Oscilação de De Giorgi, adaptado para uma versão até a fronteira. Esse resultado constitui um dos dois pilares fundamentais da nossa demonstração da Estimativa de Carleson. Antes de expor o Lema da Oscilação, provaremos alguns resultados preliminares necessários para a construção da demonstração.

O primeiro desses resultados envolve uma construção simples com mollifiers.

Lema 4.3. *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$, com $V \Subset U$. Então, existem $C = C(n) > 0$ e $\varphi \in C_0^\infty(U)$ tais que*

$$\begin{cases} 0 \leq \phi \leq 1 & \text{em } U \\ \phi = 1 & \text{em } V \\ \|\nabla \phi\|_\infty \leq \frac{C}{\text{dist}(V, \partial U)}. \end{cases}$$

Demonstração. Sejam $\delta := \text{dist}(V, \partial U)$ e $W := \{x \in U : \text{dist}(x, \partial V) < \frac{\delta}{2}\}$. É fácil ver que $V \Subset W \Subset U$. Fixe $\xi \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como uma função não-negativa tal que

$$\begin{cases} \xi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \text{supp}(\xi) \subset B_1 \\ \int_{B_1} \xi = 1. \end{cases}$$

Para todo $\epsilon > 0$, defina também $\xi_\epsilon := \frac{1}{\epsilon^n} \cdot \xi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ e tome a convolução $\phi(x) := \chi_W * \xi_{\frac{\delta}{2}}(x)$, onde χ_W é a função característica de W . Por definição, temos $0 \leq \phi \leq 1$, além disso, dado $x \in V$, como $\text{supp}(\xi_{\frac{\delta}{2}}) \subset B_{\frac{\delta}{2}}$,

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_W(x-y) \cdot \xi_{\frac{\delta}{2}}(y) dy \\ &= \int_{B_{\frac{\delta}{2}}} \chi_W(x-y) \cdot \xi_{\frac{\delta}{2}}(y) dy \\ &= \int_{B_{\frac{\delta}{2}}} \xi_{\frac{\delta}{2}}(y) dy \\ &= 1,\end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade decorre do fato que se $x \in V$ e $y \in B_{\frac{\delta}{2}}$, então $x-y \in W$.

Por fim, fazendo $D_i = \partial/\partial x_i$, como para todo $i \leq n$, $D_i\phi = \chi_W * D_i\xi_{\frac{\delta}{2}}$, e

$$\begin{aligned}\chi_W * D_i\xi_{\frac{\delta}{2}}(x) &= \int_{B_{\frac{\delta}{2}}} \chi_W(x-y) \cdot D_i\xi_{\frac{\delta}{2}}(y) dy \\ &\leq \int_{B_{\frac{\delta}{2}}} D_i\xi_{\frac{\delta}{2}}(y) dy \\ &= \frac{2}{\delta} \cdot \int_{B_{\frac{\delta}{2}}} \left(\frac{2}{\delta}\right)^n \cdot D_i\xi\left(\frac{2y}{\delta}\right) dy \\ &= \frac{2}{\delta} \cdot \int_{B_1} D_i\xi(y) dy\end{aligned}$$

o resultado fica provado, uma vez que ξ é uma função específica. (Pode-se tomar o *mollifier* padrão, se preferir). \square

O segundo resultado preliminar trata da possibilidade de estender uma função solução de (4.1) de $B \cap \Omega$ para toda a bola B mantendo uma relação entre $\Delta_g u$ e f (na verdade, das extensões) em toda a B . Esse resultado é apresentado no artigo (Braga; Moreira, 2022) com uma demonstração completa. Para maior clareza e completude, reescrevemos a demonstração aqui.

Lema 4.4 (Lema de Subsolução). *Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio NTA e $w \in \partial\Omega$, se $r < \text{diam}(\Omega)/2$ e u é solução de (4.1) para $B := B_r(w)$ então, para*

$$\bar{u} := \begin{cases} u & \text{em } B \cap \Omega; \\ 0 & \text{em } B \setminus (B \cap \Omega) \end{cases}$$

e

$$\bar{f} := \begin{cases} f & \text{em } B \cap \Omega; \\ 0 & \text{em } B \setminus (B \cap \Omega), \end{cases}$$

definidas em B , vale

- i) $\bar{u} \in W_{\text{loc}}^{1,G}(B) \cap C^0(\bar{B})$;
- ii) $\Delta_g \bar{u} \geq -\bar{f}^-$ em B .

Demonstração. Sejam r, w e B como no enunciado. Como é óbvio que $\bar{u} \in C^0(\bar{B})$, vamos mostrar inicialmente que $\bar{u} \in W_{\text{loc}}^{1,G}(B)$.

Devemos mostrar que para qualquer $V \Subset B$, $\bar{u} \in W^{1,G}(V)$. Vamos fazer isso construindo uma sequência $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset W^{1,G}(V)$ limitada e tal que $u_n \rightrightarrows \bar{u}$ em V . Como $W^{1,G}(V)$ é reflexivo, no nosso caso, podemos usar o Teorema de Eberlein-Shmulian para garantir que, a menos de uma subsequência, $u_n \rightharpoonup u_0$, para alguma $u_0 \in W^{1,G}(V)$. Daí, teremos, necessariamente, $\bar{u} = u_0$, provando o primeiro item.

Tome $V \Subset B$ e considere $\phi \in C_0^\infty(B)$ a função do Lema 4.3. Agora, para cada $n \geq 1$ defina

$$u_n := \left(\bar{u} - \frac{1}{n} \right)^+.$$

AFIRMAÇÃO: $\phi^{1+g_0} \cdot u_n \in W_c^{1,G}(B^+)$.

Por um lado temos, $u \in W_{\text{loc}}^{1,G}(B^+)$, então $\bar{u} \in W_{\text{loc}}^{1,G}(B^+)$, $(\bar{u} - 1/n) \in W_{\text{loc}}^{1,G}(B^+)$ e então $u_n \in W_{\text{loc}}^{1,G}(B^+)$. Por outro lado, $\phi \in C_0^\infty(B^+)$, que implica $\phi^{1+g_0} \in C_0^\infty(B^+)$. Daí, $\phi^{1+g_0} \cdot u_n \in W_c^{1,G}(B^+)$ com

$$\nabla(\phi^{1+g_0} \cdot u_n) = u_n \nabla(\phi^{1+g_0}) + \phi^{1+g_0} \nabla u_n = (1 + g_0) u_n \phi^{g_0} \nabla \phi + \phi^{1+g_0} \nabla u_n.$$

Continuando, podemos usar a Proposição 2.23 para garantir que $\phi^{1+g_0} \cdot u_n \in W_c^{1,G}(B^+)$ pode ser usada como função teste, uma vez que temos $f \in L_{\text{loc}}^n(B^+)$. Assim,

$$-\int_{B^+} \phi^{1+g_0} u_n f = \int_{B^+} \frac{g(|\nabla u(x)|)}{|\nabla u(x)|} \langle \nabla u(x), \nabla(\phi^{1+g_0} u_n) \rangle dx.$$

Como em B^+ vale

$$u_n = \left(\bar{u} - \frac{1}{n}\right)^+ = \begin{cases} u - \frac{1}{n} & \text{em } \left\{u > \frac{1}{n}\right\} \\ 0 & \text{em } \left\{u \leq \frac{1}{n}\right\}, \end{cases}$$

temos,

$$\nabla u_n = \begin{cases} \nabla u - \frac{1}{n} & \text{em } \left\{u > \frac{1}{n}\right\} \\ 0 & \text{em } \left\{u \leq \frac{1}{n}\right\} \end{cases}$$

Daí, para $H_g(t) = g(t)/t$, temos

$$\begin{aligned} - \int_{B^+} \phi^{1+g_0} u_n f \, dx &= \int_{B^+} H_g(|\nabla u|) [\langle \nabla u, (1+g_0)\phi^{g_0} u_n \nabla \phi + \phi^{1+g_0} \nabla u_n \rangle] \, dx \\ &= \int_{B^+} (1+g_0)\phi^{g_0} u_n H_g(|\nabla u|) \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle \, dx + \int_{B^+} \phi^{1+g_0} H_g(|\nabla u|) \langle \nabla u, \nabla u_n \rangle \, dx \\ &= (1+g_0) \int_{\{u > \frac{1}{n}\}} \phi^{g_0} u_n H_g(|\nabla u|) \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle \, dx + \int_{\{u > \frac{1}{n}\}} \phi^{1+g_0} g(|\nabla u|) |\nabla u| \, dx. \end{aligned}$$

Portanto, reordenando e tomando o módulo na da direita,

$$\begin{aligned} \int_{\{u > \frac{1}{n}\}} \phi^{1+g_0} g(|\nabla u|) |\nabla u| \, dx &= - \int_{B^+} \phi^{1+g_0} u_n f \, dx - (1+g_0) \int_{\{u > \frac{1}{n}\}} \phi^{g_0} u_n H_g(|\nabla u|) \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle \, dx \\ &\leq \|\bar{f}\|_1 \cdot \|\bar{u}\|_\infty + (1+g_0) \int_{\{u > \frac{1}{n}\}} \phi^{g_0} u_n H_g(|\nabla u|) |\nabla u| |\nabla \phi| \, dx \\ &= (1+g_0) \int_{\{u > \frac{1}{n}\}} \phi^{g_0} g(|\nabla u|) u_n |\nabla \phi| \, dx + \|\bar{f}\|_1 \cdot \|\bar{u}\|_\infty, \end{aligned}$$

onde $\|\bar{f}\|_1$ denota $\|\bar{f}\|_{L^1(B)}$ enquanto $\|\bar{u}\|_\infty$ denota $\|\bar{u}\|_{L^\infty(B)}$.

Pela Desigualdade de Young com ϵ , Proposição 2.22, para qualquer $0 < \epsilon < 1$, e para $a := \phi^{g_0} g(|\nabla u|)$ e $b := u_n |\nabla \phi|$, existe $C_\epsilon = C_\epsilon(\epsilon, g_0, \delta) > 1$ tal que

$$\phi^{g_0} g(|\nabla u|) u_n |\nabla \phi| \leq \epsilon \tilde{G}(\phi^{g_0} g(|\nabla u|)) + C_\epsilon G(u_n |\nabla \phi|).$$

Usando (G1) e (G3), concluímos

$$\begin{aligned}\phi^{g_0} g(|\nabla u|) u_n |\nabla \phi| &\leq \epsilon \max \left\{ (\phi^{g_0})^{1+\frac{1}{\delta}}, (\phi^{g_0})^{1+\frac{1}{g_0}} \right\} \tilde{G}(g(|\nabla u|)) + C_\epsilon G(u_n |\nabla \phi|) \\ &\leq \epsilon \max \left\{ (\phi^{g_0})^{1+\frac{1}{\delta}}, (\phi^{g_0})^{1+\frac{1}{g_0}} \right\} g_0 G(|\nabla u|) + C_\epsilon G(u_n |\nabla \phi|) \\ &\leq g_0 \epsilon \phi^{1+g_0} G(|\nabla u|) + C_\epsilon G(u_n |\nabla \phi|).\end{aligned}$$

Voltando para a equação que envolve integrais, ao substituírmos a informação acima, obtemos:

$$\int_{\{u > \frac{1}{n}\}} \phi^{1+g_0} g(|\nabla u|) |\nabla u| \leq (1+g_0) \int_{\{u > \frac{1}{n}\}} g_0 \epsilon \phi^{1+g_0} G(|\nabla u|) + C_\epsilon G(u_n |\nabla \phi|) \, dx + \|\bar{f}\|_1 \cdot \|\bar{u}\|_\infty.$$

Por outro lado, usando (g2),

$$\int_{\{u > \frac{1}{n}\}} \phi^{1+g_0} g(|\nabla u|) |\nabla u| \, dx \geq \int_{\{u > \frac{1}{n}\}} \phi^{1+g_0} G(|\nabla u|) \, dx.$$

Daí, juntando as duas desigualdades acima,

$$\int_{\{u > \frac{1}{n}\}} \phi^{1+g_0} G(|\nabla u|) \, dx \leq (1+g_0) \int_{\{u > \frac{1}{n}\}} g_0 \epsilon \phi^{1+g_0} G(|\nabla u|) + C_\epsilon G(u_n |\nabla \phi|) \, dx + \|\bar{f}\|_1 \cdot \|\bar{u}\|_\infty,$$

ou, ainda,

$$(1 - \epsilon g_0(1+g_0)) \int_{\{u > \frac{1}{n}\}} \phi^{1+g_0} G(|\nabla u|) \, dx \leq C_\epsilon(1+g_0) \int_{\{u > \frac{1}{n}\}} G(u_n |\nabla \phi|) \, dx + \|\bar{f}\|_1 \cdot \|\bar{u}\|_\infty.$$

Tomando

$$\epsilon := \frac{1}{2g_0(1+g_0)},$$

teremos ainda $C_\epsilon > 1$, e

$$(1 - \epsilon g_0(1+g_0)) \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Daí, como $2C_\epsilon(1+g_0) > 1$, teremos

$$\int_{\{u > \frac{1}{n}\}} \phi^{1+g_0} G(|\nabla u|) \, dx \leq 2C_\epsilon(1+g_0) \left(\int_{\{u > \frac{1}{n}\}} G(u_n |\nabla \phi|) \, dx + \|\bar{f}\|_1 \cdot \|\bar{u}\|_\infty \right).$$

Definindo $D := 2C_\epsilon(1 + g_0) = D(\delta, g_0) > 1$, e usando que G é crescente em $[0, \infty)$, podemos dar continuidade da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}
\int_{\{u > \frac{1}{n}\}} \phi^{1+g_0} G(|\nabla u|) \, dx &\leq D \left(\int_{\{u > \frac{1}{n}\}} G(u_n |\nabla \phi|) \, dx + \|\bar{f}\|_1 \cdot \|\bar{u}\|_\infty \right) \\
&\leq D \left(\int_{\{u > \frac{1}{n}\}} G(\|\bar{u}\|_\infty |\nabla \phi|) \, dx + \|\bar{f}\|_1 \cdot \|\bar{u}\|_\infty \right) \\
&= D \left(\int_{\{u > \frac{1}{n}\} \cap \text{supp } \phi} G(\|\bar{u}\|_\infty |\nabla \phi|) \, dx + \|\bar{f}\|_1 \cdot \|\bar{u}\|_\infty \right) \\
&\leq D \left(G(\|\bar{u}\|_{L^\infty(B)} \|\nabla \phi\|_{L^\infty(B)}) |\text{supp } \phi| + \|\bar{f}\|_{L^1(B)} \cdot \|\bar{u}\|_{L^\infty(B)} \right).
\end{aligned}$$

Portanto, como $\phi \equiv 1$ em V , temos

$$\int_V G(|\nabla u_n|) \, dx \leq \int_B \phi^{1+g_0} G(|\nabla u_n|) \, dx = \int_{\{u > \frac{1}{n}\}} \phi^{1+g_0} G(|\nabla u|) \, dx,$$

e, como $\|\nabla \phi\|_{L^\infty(B)} \leq C/\text{dist}(V, \partial B)$, para $C = C(n)$, e $|\text{supp } \phi| < |B|$, então existe K_V , cuja dependência está em V , n , $\text{diam } \Omega$, δ , g_0 , $\|\bar{f}\|_{L^1(B)}$ e $\|\bar{u}\|_{L^\infty(B)}$, tal que

$$D \left(G \left(\|\bar{u}\|_{L^\infty(B)} \|\nabla \phi\|_{L^\infty(B)} \right) |\text{supp } \phi| + \|\bar{f}\|_{L^1(B)} \cdot \|\bar{u}\|_{L^\infty(B)} \right) \leq K_V.$$

Portanto,

$$\int_V G(|\nabla u_n|) \, dx \leq K_V < \infty.$$

Finalizando, por (2.7), podemos concluir que $|\nabla u_n| \in L^G(V)$, daí, existe C , dependendo de δ , g_0 , e K_V , tal que

$$\|u_n\|_{W^{1,G}(V)} \leq C,$$

onde C não depende de n . Daí, como $W^{1,G}(V)$ é reflexivo, e $\{u_n\} \subset W^{1,G}(V)$, existe uma $u_0 \in W^{1,G}(V)$ e uma subsequência de tal que $\{u_n\}$, a qual ainda chamaremos de $\{u_n\}$, tais que

$$u_n \rightharpoonup u_0.$$

Além disso,

$$|\bar{u} - u_n| = |(\bar{u} - 1/n)^+ - \bar{u}| \leq \frac{1}{n}$$

em B implica que

$$u_n \rightrightarrows \bar{u}.$$

Então concluímos que $\bar{u} = u_0 \in W^{1,G}(V)$. Pela arbitrariedade de escolha de $V \Subset B$, $\bar{u} \in W_{\text{loc}}^{1,G}(B)$, como queríamos para o item i).

Vamos, agora, mostrar ii). Para isso, tome $0 \leq \xi \in C_0^\infty(B)$. Devemos mostrar que

$$-\int_B -\bar{f}^- \xi \, dx = \int_B \bar{f}^- \xi \, dx \geq \int_B H_g(|\nabla \bar{u}|) \langle \nabla \bar{u}, \nabla \xi \rangle \, dx.$$

Comecemos definindo, para $0 < \epsilon < 1$, a função

$$0 \leq v := v_\epsilon := \max \left\{ \min \left\{ 1, 2 - \frac{\bar{u}}{\epsilon} \right\}, 0 \right\} \in W_{\text{loc}}^{1,G}(B).$$

Teremos

$$v = \begin{cases} 1 & \text{em } \{\bar{u} \leq \epsilon\} \\ 2 - \frac{\bar{u}}{\epsilon} & \text{em } \{\epsilon < \bar{u} < 2\epsilon\} \\ 0 & \text{em } \{\bar{u} \geq 2\epsilon\} \end{cases}$$

e, em quase todo ponto,

$$v = \begin{cases} -\frac{\nabla \bar{u}}{\epsilon} & \text{em } \{\epsilon < \bar{u} < 2\epsilon\} \\ 0 & \text{em } \{\bar{u} \leq \epsilon\} \cup \{\bar{u} \geq 2\epsilon\}. \end{cases}$$

Portanto, por motivos análogos ao do caso de $\phi^{1+g_0} \cdot u_n \in W_c^{1,G}$ na prova do item i),

também temos $(1-v)\xi$ e $v\xi$ em $W_c^{1,G}$. Daí,

$$\begin{aligned}
\int_B H_g(|\nabla \bar{u}|) \langle \nabla \bar{u}, \nabla \xi \rangle \, dx &= \int_B H_g(|\nabla \bar{u}|) \langle \nabla \bar{u}, \nabla((1-v)\xi + v\xi) \rangle \, dx \\
&= \int_{\{u>0\}} H_g(|\nabla u|) \langle \nabla u, \nabla((1-v)\xi + v\xi) \rangle \, dx \\
&= \int_{\{u>0\}} H_g(|\nabla u|) \langle \nabla u, \nabla((1-v)\xi) \rangle \, dx + \\
&\quad + \int_{\{u>0\}} H_g(|\nabla u|) \langle \nabla u, v\nabla \xi + \xi \nabla v \rangle \, dx \\
&= \int_{\{u>0\}} H_g(|\nabla u|) \langle \nabla u, \nabla((1-v)\xi) \rangle \, dx + \\
&\quad + \int_{\{0<u\leq\epsilon\}} H_g(|\nabla u|) \langle \nabla u, \nabla \xi \rangle \, dx + \\
&\quad + \int_{\{\epsilon<u<2\epsilon\}} H_g(|\nabla u|) \left\langle \nabla u, \left(2 - \frac{u}{\epsilon}\right) \nabla \xi \right\rangle \, dx + \\
&\quad + \int_{\{\epsilon<u<2\epsilon\}} H_g(|\nabla u|) \left\langle \nabla u, \frac{-\xi}{\epsilon} \nabla u \right\rangle \, dx.
\end{aligned}$$

Analisando separadamente as últimas quatro parcelas da sequência acima, podemos concluir:

- $\int_{\{u>0\}} H_g(|\nabla u|) \langle \nabla u, \nabla((1-v)\xi) \rangle \, dx = - \int_{\{u>0\}} f(1-v)\xi \, dx$, pois $\xi(1-v)$ é função teste,
- $\int_{\{0<u\leq\epsilon\}} H_g(|\nabla u|) \langle \nabla u, \nabla \xi \rangle \, dx \leq \int_{\{0<u\leq\epsilon\}} g(|\nabla u|) |\nabla \xi| \, dx$,
- $\int_{\{\epsilon<u<2\epsilon\}} H_g(|\nabla u|) \left\langle \nabla u, \left(2 - \frac{u}{\epsilon}\right) \nabla \xi \right\rangle \, dx \leq \int_{\{\epsilon<u<2\epsilon\}} g(|\nabla u|) |\nabla \xi| \, dx$ e
- $\int_{\{\epsilon<u<2\epsilon\}} H_g(|\nabla u|) \left\langle \nabla u, \frac{-\xi}{\epsilon} \nabla u \right\rangle \, dx = - \frac{\xi}{\epsilon} \int_{\{\epsilon<u<2\epsilon\}} g(|\nabla u|) |\nabla u| \, dx \leq 0$.

Substituindo cada uma delas na sequência anterior, obtemos

$$\int_B H_g(|\nabla \bar{u}|) \langle \nabla \bar{u}, \nabla \xi \rangle \, dx \leq - \int_{\{u>0\}} f(1-v)\xi \, dx + \int_{\{0<u\leq\epsilon\}} g(|\nabla u|) |\nabla \xi| \, dx.$$

Como $\xi > 0$, e $0 \leq v \leq 1$, teremos $0 \leq \xi(1-v) \leq \xi$ e, como $\bar{f} \geq \bar{f}^-$, teremos

$$-\bar{f}^- \xi(1-v) \leq \bar{f}^- \xi,$$

então

$$-\int_{\{u>0\}} f(1-v)\xi \, dx \leq \int_{\{u>0\}} \bar{f}^- \xi \, dx \leq \int_B \bar{f}^- \xi \, dx.$$

Daí,

$$\int_B H_g(|\nabla \bar{u}|) \langle \nabla \bar{u}, \nabla \xi \rangle \, dx \leq \int_B \bar{f}^- \xi \, dx + \underbrace{\int_{\{0<u<2\epsilon\}} g(|\nabla u|) |\nabla \xi| \, dx}_{:=I_\epsilon}. \quad (4.12)$$

Nossa prova estará acabada quando mostrarmos que $I_\epsilon \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Defina

$$A_\epsilon := \{0 < u < 2\epsilon\} \cap \text{supp } \xi.$$

Pela Desigualdade de Hölder em (2.5),

$$I_\epsilon \leq 2 \|g(|\nabla u|)\|_{L^{\tilde{G}}(A_\epsilon)} \|\nabla \xi\|_{L^G(A_\epsilon)}$$

e, usando (2.7) para \tilde{G} , e $(\tilde{G}3)$, estimamos

$$\begin{aligned} \|g(|\nabla u|)\|_{L^{\tilde{G}}(A_\epsilon)} &\leq \max \left\{ \left(\int_{A_\epsilon} \tilde{G}(g(|\nabla u|)) \right)^{\frac{1}{1+\frac{1}{g_0}}}, \left(\int_{A_\epsilon} \tilde{G}(g(|\nabla u|)) \right)^{\frac{1}{1+\frac{1}{\delta}}} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \left(\int_{A_\epsilon} g_0 G(|\nabla u|) \right)^{\frac{1}{1+\frac{1}{g_0}}}, \left(\int_{A_\epsilon} g_0 G(|\nabla u|) \right)^{\frac{1}{1+\frac{1}{\delta}}} \right\} \\ &\leq \tilde{C} \max \left\{ \left(\int_{A_\epsilon} G(|\nabla u|) \right)^{\frac{1}{1+\frac{1}{g_0}}}, \left(\int_{A_\epsilon} G(|\nabla u|) \right)^{\frac{1}{1+\frac{1}{\delta}}} \right\}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{C} = \tilde{C}(\delta, g_0) > 0$. Além disso, pelos resultados da prova do item *i*), tomando $V := \text{supp } \xi$,

$$\begin{aligned} \int_V G(|\nabla \bar{u}|) \, dx &= \int_{V \cap \{u>0\}} G(|\nabla u|) \, dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{V \cap \{u>\frac{1}{n}\}} G(|\nabla u|) \, dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_V G(|\nabla u_n|) \, dx \\ &\leq K_V < \infty. \end{aligned}$$

Com maior razão, como $A_\epsilon \subset V$,

$$\int_{A_\epsilon} G(|\nabla u|) \, dx \leq K_V.$$

E, como $|A_\epsilon| \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\int_{A_\epsilon} G(|\nabla u|) \, dx \rightarrow 0.$$

Daí, quando $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\|g(|\nabla u|)\|_{L^{\tilde{G}}(A_\epsilon)} \rightarrow 0.$$

Analisando a outra parcela, uma vez que $\xi \in C_0^\infty(B)$, temos também

$$\|\nabla \xi\|_{L^G(A_\epsilon)} \rightarrow 0$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Portanto, em (4.12), ao mandarmos o $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\int_B H_g(|\nabla \bar{u}|) \langle \nabla \bar{u}, \nabla \xi \rangle \, dx \leq \int_B \bar{f}^- \xi \, dx,$$

como queríamos. □

Podemos então estabelecer um resultado do tipo Lema da Oscilação de De Giorgi, que garante que a oscilação de uma função em uma bola é estritamente menor que a oscilação na bola de mesmo centro e raio dobrado. Além disso, desde que o raio seja suficientemente pequeno, a constante de correção não depende do raio. Como mencionado anteriormente, tratamos de uma versão do lema que permite estimar a oscilação da função u até a fronteira do domínio. Provaremos esse resultado sem usar qualquer outra condição geométrica senão a condição de *corkscrew* exterior.

Teorema 4.5 (do tipo Lema da oscilação de De Giorgi). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio satisfazendo a condição de corkscrew exterior, com constantes M_Ω e r_Ω . Tomando $w \in \partial\Omega$ e $0 < r < \min\{r_\Omega, \text{diam}(\Omega)/2\}$ arbitrariamente, se u é solução de (4.1) para $B_r(w)$, então existe $0 < \gamma = \gamma(M_\Omega, n, \delta, g_0, q) < 1$ tal que*

$$\sup_{B_{r/2}^+(w)} u \leq \gamma \sup_{B_r^+(w)} u + r g^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q(B_r^+(w))} \right). \quad (4.13)$$

Demonstração. Sejam \bar{u}, \bar{f} as extensões de u e f por zero para toda a bola, como no Lema 4.4. Defina

$$S := \sup_{B_r(w) \cap \Omega} \bar{u}$$

e

$$v := S - \bar{u}.$$

Teremos que $v \geq 0$ está em $W_{\text{loc}}^{1,G}(B_r(w))$ com

$$\Delta_g v = -\Delta_g \bar{u} \leq \bar{f}^- \leq |\bar{f}| \in L^q(B_r(w)).$$

Decorre então da Desigualdade de Harnack Fraca, Teorema 2.24, que existem $p_0 > 0$ e $C \geq 1$ dependendo apenas de n, δ, g_0 e q tais que

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_{\frac{r}{2}}(w)} v^{p_0} \right)^{1/p_0} &\leq C \left(\inf_{B_{\frac{r}{2}}(w)} v + r g^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \|\bar{f}\|_{L^q(B_r(w))} \right) \right) \\ &= C \left(\inf_{B_{\frac{r}{2}}(w)} v + r g^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q(B_r^+(w))} \right) \right). \end{aligned}$$

Daí, considerando $K_{r,f,w}^+ := r g^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q(B_r^+(w))} \right)$,

$$\begin{aligned} C \left(\inf_{B_{\frac{r}{2}}(w)} v + K_{r,f,w}^+ \right) &\geq \left(\int_{B_{\frac{r}{2}}(w)} v^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \\ &\geq \frac{1}{|B_{r/2}(w)|^{1/p_0}} \left(\int_{B_{\frac{r}{2}}(w)} v^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \\ &\geq \frac{1}{|B_{r/2}(w)|^{1/p_0}} \left(\int_{B_{\frac{r}{2}}(w) \cap \{v=S\}} v^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \\ &\geq \frac{S}{|B_{r/2}(w)|^{1/p_0}} \left(|B_{r/2}(w) \cap \{v=S\}| \right)^{1/p_0}. \end{aligned}$$

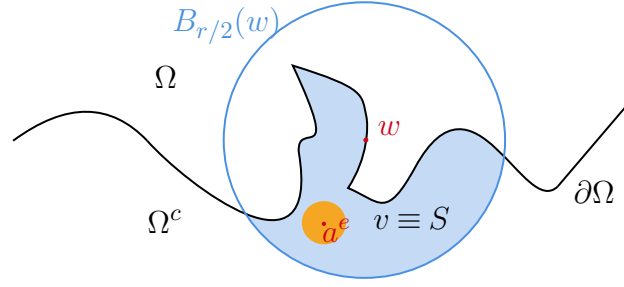
Veja que $\{v=S\}$ contém a parte de $B_{r/2}(w)$ que está intersectada com Ω^c . Além disso, como Ω tem a propriedade do *corkscrew* exterior para M_Ω e r_Ω , dentro de $B_{r/2}(w) \cap \Omega^c$ existe uma bola menor, cujo raio é $r/4M_\Omega$. Mais precisamente, como mostrado na Figura 20, existe $a^e \in B_{r/2}(w) \cap \Omega^c$ tal que

$$B_{\frac{r}{4M_\Omega}}(a^e) \subset B_{r/2}(w) \cap \Omega^c \subset B_{r/2}(w) \cap \{v=S\}.$$

Logo, dando continuidade às contas anteriores,

$$\begin{aligned} C \left(\inf_{B_{r/2}(w)} v + K_{r,f,w}^+ \right) &\geq \frac{S}{|B_{r/2}(w)|^{1/p_0}} \left(|B_{r/2}(w) \cap \{v=S\}| \right)^{1/p_0} \\ &\geq \frac{S}{|B_{r/2}(w)|^{1/p_0}} \left| B_{\frac{r}{4M_\Omega}}(a^e) \right|^{1/p_0} \\ &= \frac{S}{(2M_\Omega)^{n/p_0}}, \end{aligned}$$

Figura 20 – Bola de raio $r/4M_\Omega$ dentro de $\{V = s\}$



Fonte: elaborada pelo autor.

daí

$$\inf_{B_{r/2}(w)} v + K_{r,f,w}^+ \geq \frac{S}{C(2M_\Omega)^{n/p_0}} := \frac{S}{\widetilde{C}}.$$

Voltando para \bar{u} obtemos

$$S - \sup_{B_{r/2}(w) \cap \Omega} \bar{u} + K_{r,f,w}^+ = \inf_{B_{r/2}(w)} v + K_{r,f,w}^+ \geq \frac{S}{\widetilde{C}}.$$

Portanto,

$$\sup_{B_{r/2}^+(w)} u \leq \left(1 - \frac{1}{\widetilde{C}}\right) S + K_{r,f,w}^+,$$

que é justamente o que queríamos, para

$$\gamma := 1 - \frac{1}{\widetilde{C}} = 1 - \frac{1}{C(2M_\Omega)^{n/p_0}} < 1$$

com C e p_0 sendo as constantes da Desigualdade de Harnack fraca. \square

Teorema 4.6 (Lema da oscilação até a fronteira - Geral). *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domínio que satisfaz a propriedade do corkscrew exterior para M_Ω e r_Ω , defina $r_1 := \min\{r_\Omega, \text{diam } \Omega/2\}$. Tomando $w \in \partial\Omega$ e $0 < r < r_1$, se u é solução de (4.1) para $B = B_r(w)$, então existem constantes $C_2 = C_2(M_\Omega, n, \delta, g_0, q) > 1$ e $0 < \beta = \beta(M_\Omega, n, \delta, g_0, q) \leq 1$ tais que*

$$\sup_{B_\rho^+(w)} u \leq C_2 \left(\frac{\rho}{r}\right)^\beta \sup_{B_r^+(w)} u + \left(\frac{C_2}{C_2 - 1}\right) r g^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q(B_r^+(w))}\right),$$

para qualquer $\rho \leq r/2$.

Demonstração. Considerando $w \in \partial\Omega$ e $r < r_1$ arbitrários, pelo teorema anterior, temos garantido um γ , para o qual vale (4.13). Tomando $\sigma := \max\{\gamma, 1 - \gamma\}$, podemos garantir

que $1/2 \leq \sigma < 1$ e que ainda vale

$$\sup_{B_{r/2}^+(w)} u \leq \sigma \sup_{B_r^+(w)} u + K_r^+$$

para

$$K_r^+ := rg^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q(B_r^+(w))} \right).$$

Mantendo a notação, e aplicando novamente o teorema anterior com σ , temos

$$\begin{aligned} \sup_{B_{r/4}^+(w)} u &\leq \sigma \sup_{B_{r/2}^+(w)} u + K_{\frac{r}{2}}^+ \\ &\leq \sigma \left(\sigma \sup_{B_r^+(w)} u + K_r^+ \right) + K_{\frac{r}{2}}^+ \\ &= \sigma^2 \sup_{B_r^+(w)} u + \sigma K_r^+ + K_{\frac{r}{2}}^+. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \sup_{B_{r/8}^+(w)} u &\leq \sigma \sup_{B_{r/4}^+(w)} u + K_{\frac{r}{4}}^+ \\ &\leq \sigma \left(\sigma^2 \sup_{B_r^+(w)} u + \sigma K_r^+ + K_{\frac{r}{2}}^+ \right) + K_{\frac{r}{4}}^+ \\ &= \sigma^3 \sup_{B_r^+(w)} u + \sigma^2 K_r^+ + \sigma K_{\frac{r}{2}}^+ + K_{\frac{r}{4}}^+. \end{aligned}$$

Aplicando várias vezes podemos concluir que, para qualquer $m \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{B_{\frac{r}{2^m}}^+(w)} u \leq \sigma^m \sup_{B_r^+(w)} u + \sigma^{m-1} K_r^+ + \cdots + \sigma K_{\frac{r}{2^{m-2}}}^+ + K_{\frac{r}{2^{m-1}}}^+,$$

mas, como K_r^+ é crescente em r ,

$$\begin{aligned} \sup_{B_{\frac{r}{2^m}}^+(w)} u &\leq \sigma^m \sup_{B_r^+(w)} u + (\sigma^{m-1} + \cdots + \sigma + 1) K_r^+ \\ &= \sigma^m \sup_{B_r^+(w)} u + \frac{1 - \sigma^m}{1 - \sigma} K_r^+ \\ &< \sigma^m \sup_{B_r^+(w)} u + \frac{1}{1 - \sigma} K_r^+. \end{aligned}$$

Tomando $0 < \rho \leq r/2$, existe $m \geq 1$, inteiro, tal que

$$\frac{r}{2^{m+1}} < \rho \leq \frac{r}{2^m}.$$

Definindo

$$\beta := \log_2 \frac{1}{\sigma},$$

notamos que $\beta = \beta(M_\Omega, n, \delta, g_0, q) \in (0, 1]$ satisfaz

$$\sigma^m = \left(\frac{1}{2^\beta}\right)^m = \left(\frac{1}{2^m}\right)^\beta = \left(2\frac{1}{2^{m+1}}\right)^\beta = 2^\beta \left(\frac{1}{2^{m+1}}\right)^\beta < 2^\beta \left(\frac{\rho}{r}\right)^\beta$$

e isso prova o teorema com

$$C_2 := 2^\beta = \frac{1}{\sigma} = \min \left\{ \frac{C(2M_\Omega)^{n/p_0}}{C(2M_\Omega)^{n/p_0} - 1}, C(2M_\Omega)^{n/p_0} \right\} \in (1, 2],$$

para C e p_0 da Desigualdade de Harnack fraca.

□

4.3 A Estimativa de Carleson

Finalmente, chegamos ao nosso resultado principal. A demonstração é conduzida por contradição, fazendo uso da Desigualdade de Harnack refinada e do Lema da Oscilação de De Giorgi até a fronteira, em sua versão geral.

Teorema 4.7 (Estimativa de Carleson). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio (r_Ω, M_Ω) -NTA. Existem constantes $A_0 = A_0(M_\Omega) \geq 12$ e $r_0 = r_0(\Omega) > 0$, tais que, para quaisquer $w \in \partial\Omega$ e $0 < r < r_0$, se u satisfaz as propriedades de (4.1) para $B = B_r(w)$, então*

$$\sup_{B_{r'}^+(w)} u \leq c_0 \left(u(\xi_0) + rg^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q(B_r^+(w))} \right) \right), \quad (4.14)$$

para $c_0 = c_0(n, \delta, g_0, q, M_\Omega) > 0$, $r' = r/A_0$ e $\xi_0 := \xi_{r'}(w)$, ou seja, um ponto de corkscrew interior associado a w e a r' , isto é, $\xi_{r'}(w)$ satisfaz

$$\begin{cases} \xi_0 \in \Omega \\ |\xi_0 - w| < r' \\ \delta(\xi_0) \geq \frac{r'}{M_\Omega}. \end{cases}$$

Demonstração. Tome $A_0 = 3A_1$ e $r_0 := \min\{r_\Omega, \text{diam}(\Omega)/4\}$, onde A_1 é do Teorema 4.2.

Em todo o tempo, usaremos o Teorema 4.2 com $\epsilon := 1/6M_\Omega$, eliminando a dependência de ϵ nas constantes C_1 e λ do teorema. Considere w , r , u e ξ_0 arbitrários, mas como no teorema. Vamos novamente considerar a redução

$$K_{r,f,w}^+ := rg^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q(B_r^+(w))} \right).$$

Seja $x_0 \in \overline{B}_{r'}^+(w) \setminus \partial\Omega$ tal que $u(x_0) = \sup_{B_{r'}^+(w)} u$. Nossa prova se dá em assumir

$$M \left(u(\xi_0) + K_{r,f,w}^+ \right) < u(x_0) \quad (4.15)$$

e tratar de achar $M \gg 1$, universal, tal que a equação acima nos conduz a um absurdo.

Temos inicialmente dois casos a tratar.

Caso #1 - $\delta(x_0) \geq r'/4M_\Omega$:

Aqui temos dois subcasos a tratar. Primeiro, quando $\delta(x_0) \leq \delta(\xi_0)$, como

$$\delta(\xi_0) \geq \frac{r'}{M_\Omega} = \frac{r}{3A_1M_\Omega} > \frac{r}{6A_1M_\Omega},$$

a primeira desigualdade de (4.4) (com $x = x_0$ e $y = \xi_0$) nos dá

$$u(x_0) \leq C_1 \left(\frac{\delta(\xi_0)}{\delta(x_0)} \right)^\lambda \left(u(\xi_0) + K_{r,f,w}^+ \right).$$

Como $\delta(\xi_0) < r'$ e $\delta(x_0) \geq r'/4M_\Omega$, temos

$$u(x_0) \leq C_1 (4M_\Omega)^\lambda \left(u(\xi_0) + K_{r,f,w}^+ \right).$$

Por outro lado, quando $\delta(x_0) > \delta(\xi_0)$, teremos obrigatoriamente $\delta(x_0) > r/(6A_1M_\Omega)$ e, pela segunda desigualdade de (4.4) (agora com $x = \xi_0$ e $y = x_0$),

$$u(x_0) \leq C_1 \left(\frac{\delta(x_0)}{\delta(\xi_0)} \right)^\lambda \left(u(\xi_0) + K_{r,f,w}^+ \right).$$

Daí, como $\delta(x_0) \leq r'$ e $\delta(\xi_0) \geq r'/M_\Omega$, teremos

$$u(x_0) \leq C_1 (M_\Omega)^\lambda \left(u(\xi_0) + K_{r,f,w}^+ \right).$$

Resumindo: pelo refinamento da Desigualdade de Harnack (R.D.H.), trabalhando os subcasos $\delta(x_0) \leq \delta(\xi_0)$ e $\delta(x_0) > \delta(\xi_0)$, obtemos

$$u(x_0) \leq \tilde{C} \left(u(\xi_0) + K_{r,f,w}^+ \right), \quad \text{onde} \quad \tilde{C} := (4M_\Omega)^\lambda \cdot C_1. \quad (4.16)$$

Daí, tomando $M \geq \tilde{C}$ de agora em diante, a desigualdade acima junto com (4.15) retorna um absurdo.

Caso #2 - $\delta(x_0) < r'/4M_\Omega$:

Aqui, como $\delta(\xi_0) \geq r'/M_\Omega > \delta(x_0)$, o R.D.H implica em

$$u(x_0) \leq C_1 \cdot \left(\frac{\delta(\xi_0)}{\delta(x_0)} \right)^\lambda \cdot (u(\xi_0) + K_{r,f,w}^+),$$

então, por (4.15),

$$M(u(\xi_0) + K_{r,f,w}^+) < u(x_0) \leq C_1 \cdot \left(\frac{\delta(\xi_0)}{\delta(x_0)} \right)^\lambda \cdot (u(\xi_0) + K_{r,f,w}^+).$$

Daí,

$$M < C_1 \cdot \left(\frac{\delta(\xi_0)}{\delta(x_0)} \right)^\lambda$$

e, assim,

$$\frac{\delta(x_0)}{\delta(\xi_0)} < \left(\frac{C_1}{M} \right)^{1/\lambda}. \quad (4.17)$$

Seja $\bar{x}_0 \in \partial\Omega$ o ponto da fronteira de Ω que satisfaz $\delta(x_0) = |x_0 - \bar{x}_0|$. Veja que

$$\bar{x}_0 \in B_{\frac{5r'}{2}}(w) \cap \partial\Omega$$

pois

$$|\bar{x}_0 - w| \leq \underbrace{|\bar{x}_0 - x_0|}_{< r'/4} + \underbrace{|x_0 - w|}_{\leq r'} < \frac{5r'}{2}.$$

Além disso, para $z \in B_{\frac{r'}{2}}^+(\bar{x}_0)$,

$$|z - w| \leq \underbrace{|z - \bar{x}_0|}_{< r'/2} + \underbrace{|\bar{x}_0 - w|}_{< 5r'/2} < 3r' < r.$$

Logo, conseguimos demonstrar que

$$B_{\frac{r'}{2}}^+(\bar{x}_0) \subset B_{3r'}^+(w) \subset B_r^+(w). \quad (4.18)$$

O resultado acima garante que u satisfaz (4.1) em $B_{\frac{r'}{2}}^+(\bar{x}_0)$, então podemos aplicar a versão geral do Lema da Oscilação até a Fronteira (L.O.F.), Teorema 4.6, em $B_{\frac{r'}{2}}^+(\bar{x}_0)$ e para $\rho := \delta(x_0)$, que satisfaz

$$\rho < \frac{r'}{4M_\Omega} \leq \frac{r'/2}{2},$$

para obter

$$\sup_{\overline{B}_{\delta(x_0)}^+(\overline{x}_0)} u \leq C_2 \cdot \left(\frac{\delta(x_0)}{r'/2} \right)^\beta \cdot \sup_{B_{\frac{r'}{2}}^+(\overline{x}_0)} u + \frac{C_2}{C_2 - 1} \cdot K_{\frac{r'}{2}, f, \overline{x}_0}^+.$$

Defina, agora, $x_1 \in \overline{B}_{\frac{r'}{2}}^+(\overline{x}_0) \setminus \partial\Omega$ como o ponto que satisfaz $u(x_1) = \sup_{B_{\frac{r'}{2}}^+(\overline{x}_0)} u$.

Como

$$u(x_0) \leq \sup_{\overline{B}_{\delta(x_0)}^+(\overline{x}_0)} u$$

e $K_{r, f, \overline{x}_0}^+$ é crescente com r , obtemos

$$u(x_0) \leq 2^\beta C_2 \cdot \left(\frac{\delta(x_0)}{r'} \right)^\beta \cdot u(x_1) + \frac{C_2}{C_2 - 1} \cdot K_{\frac{r}{2}, f, \overline{x}_0}^+.$$

Daí, uma vez que $\delta(\xi_0) < r'$, teremos

$$\frac{\delta(x_0)}{r'} < \frac{\delta(x_0)}{\delta(\xi_0)}$$

e então, por (4.17),

$$u(x_0) \leq 2^\beta C_2 \cdot \left(\frac{C_1}{M} \right)^{\beta/\lambda} \cdot u(x_1) + \frac{C_2}{C_2 - 1} \cdot K_{\frac{r}{2}, f, \overline{x}_0}^+. \quad (4.19)$$

Seja $\xi_1 := \xi_{\frac{r'}{2}}(\overline{x}_0)$ o ponto de corkscrew interior associado ao raio $r'/2$ e ao ponto $\overline{x}_0 \in \partial\Omega$. Pela equação (4.18), o ponto ξ_1 deve satisfazer

$$\xi_1 \in B_{\frac{r'}{2}}^+(\overline{x}_0) \subset B_{3r'}^+(w) = B_{r/A_1}^+(w),$$

enquanto ξ_0 claramente também satisfaz $\xi_0 \in B_{r/A_1}^+(w)$. Como

$$\delta(\xi_1) \geq \frac{r'/2}{M_\Omega} = \frac{r}{6M_\Omega A_1},$$

e também já vimos que $\delta(\xi_0) > r/6M_\Omega A_1$, podemos usar o R.D.H. para obter

$$u(\xi_1) \leq C_1 \left(\frac{\delta(\xi_0)}{\delta(\xi_1)} \right)^\lambda \left(u(\xi_0) + K_{r, f, w}^+ \right), \quad \text{caso } \delta(\xi_1) \leq \delta(\xi_0),$$

e

$$u(\xi_1) \leq C_1 \left(\frac{\delta(\xi_1)}{\delta(\xi_0)} \right)^\lambda \left(u(\xi_0) + K_{r, f, w}^+ \right), \quad \text{caso } \delta(\xi_0) \leq \delta(\xi_1).$$

Como

$$\frac{r'}{M_\Omega} \leq \delta(\xi_0) < r' \quad \text{e} \quad \frac{r'}{2M_\Omega} \leq \delta(\xi_1) < \frac{r'}{2},$$

temos, com folga,

$$\max \left\{ \frac{\delta(\xi_1)}{\delta(\xi_0)}, \frac{\delta(\xi_0)}{\delta(\xi_1)} \right\} < 4M_\Omega,$$

o que nos permite concluir,

$$u(\xi_1) \leq \tilde{C} \left(u(\xi_0) + K_{r,f,w}^+ \right), \quad (4.20)$$

para o mesmo \tilde{C} definido em (4.16).

Observe agora que $K_{\frac{r}{2},f,x_0}^+ \leq K_{r,f,w}^+$. Para ver isso, primeiro note que, dado $z \in B_{\frac{r}{2}}^+(\bar{x}_0)$,

$$|z - w| \leq |z - \bar{x}_0| + |\bar{x}_0 - x_0| + |x_0 - w| < \frac{r}{2} + \frac{r'}{4} + r' \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4A_0} + \frac{1}{A_0} \right) r < r,$$

o que implica $B_{\frac{r}{2}}^+(\bar{x}_0) \subset B_r^+(w)$. Daí,

$$\|f\|_{L^q(B_{\frac{r}{2}}^+(\bar{x}_0))} \leq \|f\|_{L^q(B_r^+(w))},$$

e, como g^{-1} é crescente, concluímos $K_{\frac{r}{2},f,x_0}^+ \leq K_{r,f,w}^+$.

Daí, continuando de (4.20), como $\tilde{C} \geq 1$,

$$\begin{aligned} u(\xi_1) + K_{\frac{r}{2},f,\bar{x}_0}^+ &\leq \tilde{C} \left(u(\xi_0) + K_{r,f,w}^+ \right) + K_{\frac{r}{2},f,\bar{x}_0}^+ \\ &\leq \tilde{C} \left(u(\xi_0) + K_{r,f,w}^+ \right) + K_{r,f,w}^+ \\ &\leq 2\tilde{C} \left(u(\xi_0) + K_{r,f,w}^+ \right) \end{aligned}$$

e então, por (4.15),

$$\frac{M}{\tilde{C}} \left(u(\xi_1) + K_{\frac{r}{2},f,\bar{x}_0}^+ \right) \leq 2M \left(u(\xi_0) + K_{r,f,w}^+ \right) < 2u(x_0).$$

Juntando a desigualdade acima com (4.19), obtemos

$$M \left(u(\xi_1) + K_{\frac{r}{2},f,\bar{x}_0}^+ \right) < 2\tilde{C}u(x_0) \leq 2\tilde{C}2^\beta C_2 \cdot \left(\frac{C_1}{M} \right)^{\beta/\lambda} \cdot u(x_1) + \frac{2\tilde{C}C_2}{C_2 - 1} \cdot K_{\frac{r}{2},f,\bar{x}_0}^+.$$

Daí,

$$Mu(\xi_1) + \left(M - \frac{2\tilde{C}C_2}{C_2 - 1} \right) \cdot K_{\frac{r}{2},f,\bar{x}_0}^+ < 2\tilde{C}2^\beta C_2 \cdot \left(\frac{C_1}{M} \right)^{\beta/\lambda} \cdot u(x_1).$$

Tomando

$$M \geq \frac{4\tilde{C}C_2}{C_2 - 1},$$

obtemos

$$M/2 \geq \frac{2\tilde{C}C_2}{C_2-1},$$

$$-M/2 \leq -\frac{2\tilde{C}C_2}{C_2-1}$$

e

$$M/2 = M - M/2 \leq M - \frac{2\tilde{C}C_2}{C_2-1}.$$

Então

$$\frac{M}{2} \cdot \left(u(\xi_1) + K_{\frac{r}{2}, f, \bar{x}_0}^+ \right) < 2\tilde{C}2^\beta C_2 \cdot \left(\frac{C_1}{M} \right)^{\beta/\lambda} \cdot u(x_1)$$

e assim

$$M \left(u(\xi_1) + K_{\frac{r}{2}, f, \bar{x}_0}^+ \right) < 4\tilde{C}2^\beta C_2 \cdot \left(\frac{C_1}{M} \right)^{\beta/\lambda} \cdot u(x_1).$$

Seja M_0 tal que

$$4\tilde{C}2^\beta C_2 \cdot \left(\frac{C_1}{M_0} \right)^{\beta/\lambda} = 1,$$

ou seja,

$$M_0 := \left(4\tilde{C}2^\beta C_2 \right)^{\lambda/\beta} \cdot C_1.$$

Tomando $M > M_0$,

$$M \left(u(\xi_1) + K_{\frac{r}{2}, f, \bar{x}_0}^+ \right) < u(x_1).$$

Da mesma forma, usando (4.19) e que $\tilde{C} \geq 1$, concluímos

$$u(x_0) < u(x_1) + \frac{C_2}{C_2-1} \cdot K_{\frac{r}{2}, f, \bar{x}_0}^+.$$

Daí, para

$$M \geq \max \left\{ \tilde{C}, \frac{4\tilde{C}C_2}{C_2-1}, M_0 \right\},$$

$$\begin{cases} M \left(u(\xi_1) + K_{\frac{r}{2}, f, \bar{x}_0}^+ \right) < u(x_1) \\ u(x_0) < u(x_1) + \frac{C_2}{C_2-1} \cdot K_{\frac{r}{2}, f, \bar{x}_0}^+ \end{cases} \quad (4.21)$$

A partir desse momento vamos repetir os argumentos trocando x_0 e ξ_0 por x_1 e ξ_1 , e $B_r(w)$ por $B_{r/2}(\bar{x}_0)$. (Já vimos que $B_{r/2}^+(\bar{x}_0) \subset B_r^+(w)$, que é onde a u tem suas boas propriedades).

Estando ainda dentro do Caso #2, vamos ter que analisar (4.21) também em dois casos separados.

Caso #2.1 - $\delta(x_1) \geq r'/8M_\Omega$:

Nesse caso, pelo R.D.H. em $B_{\frac{r}{2}}^+(\bar{x}_0)$, como

$$\delta(\xi_1) \geq \frac{r'/2}{M_\Omega} = \frac{r/2}{3A_1M_\Omega} > \frac{r/2}{6A_1M_\Omega},$$

e $x_1, \xi_1 \in B_{\frac{r'}{2}}^+(\bar{x}_0) = B_{\frac{r/2}{3A_1}}^+(\bar{x}_0) \subset B_{\frac{r/2}{A_1}}^+(\bar{x}_0)$ então, analisando os subcasos $\delta(x_1) \leq \delta(\xi_1)$ e $\delta(x_1) \geq \delta(\xi_1)$ de maneira análoga ao que já foi feito no **Caso #1**, obtemos

$$u(x_1) \leq \tilde{C} \left(u(\xi_1) + K_{\frac{r}{2}, f, \bar{x}_0}^+ \right),$$

o que é um absurdo contra (4.21) considerando que $M > \tilde{C}$. Tal contrassenso ocorre contra uma equação que foi obtida legitimamente a partir da suposição em (4.15), o que implica que o absurdo se dá em relação da validade de (4.15).

Caso #2.2 - $\delta(x_1) < r'/8M_\Omega$:

Como $\delta(\xi_1) > (r/2)/6A_1M_\Omega$ e $\delta(x_1) < \delta(\xi_1)$, pelo R.D.H. em $B_{\frac{r}{2}}^+(\bar{x}_0)$, concluímos

$$u(x_1) \leq C_1 \cdot \left(\frac{\delta(\xi_1)}{\delta(x_1)} \right)^\lambda \cdot \left(u(\xi_1) + K_{\frac{r}{2}, f, \bar{x}_0}^+ \right),$$

então, por (4.21)

$$\frac{\delta(x_1)}{\delta(\xi_1)} < \left(\frac{C_1}{M} \right)^{1/\lambda}. \quad (4.22)$$

Seja $\bar{x}_1 \in \partial\Omega$ tal que $\delta(x_1) = |x_1 - \bar{x}_1|$. Temos $\bar{x}_1 \in B_{\frac{5r'}{2}}(w) \cap \partial\Omega$ pois

$$|\bar{x}_1 - w| \leq \underbrace{|\bar{x}_1 - x_1|}_{< r'/8} + \underbrace{|x_1 - \bar{x}_0|}_{\leq r'/2} + \underbrace{|\bar{x}_0 - x_0|}_{< r'/4} + \underbrace{|x_0 - w|}_{\leq r'} < 5r'/2.$$

Além disso, $B_{r'/4}^+(\bar{x}_1) \subset B_{3r'}^+(w) \subset B_r^+(w)$, pois, dado $z \in B_{r'/4}^+(\bar{x}_1)$,

$$|z - w| \leq |z - \bar{x}_1| + |\bar{x}_1 - w| \leq \frac{r'}{4} + \frac{5r'}{2} < 3r',$$

então podemos aplicar o L.O.F. em $B_{r'/4}^+(\bar{x}_1)$ com $\rho := \delta(x_1) < r'/8M_\Omega \leq (r'/4)/2$. Daí,

$$u(x_1) \leq \sup_{\overline{B_{\delta(x_1)}^+(\bar{x}_1)}} u \leq C_2 \cdot \left(\frac{\delta(x_1)}{r'/4} \right)^\beta \cdot \sup_{B_{\frac{r'}{4}}^+(\bar{x}_1)} u + \frac{C_2}{C_2 - 1} \cdot K_{\frac{r'}{4}, f, \bar{x}_1}^+.$$

Escolhendo um $x_2 \in \overline{B_{\frac{r'}{4}}^+(\bar{x}_1)} \setminus \partial\Omega$ que satisfaz $u(x_2) = \sup_{B_{\frac{r'}{4}}^+(\bar{x}_1)} u$ e, como K_{r, f, \bar{x}_1}^+ é crescente em r ,

$$u(x_1) \leq 2^\beta C_2 \cdot \left(\frac{\delta(x_1)}{r'/2} \right)^\beta \cdot u(x_2) + \frac{C_2}{C_2 - 1} \cdot K_{\frac{r}{4}, f, \bar{x}_1}^+.$$

Finalmente, usando que $\delta(\xi_1) < r'/2$ e vale (4.22), concluímos

$$u(x_1) \leq 2^\beta C_2 \cdot \left(\frac{C_1}{M} \right)^{\beta/\lambda} \cdot u(x_2) + \frac{C_2}{C_2 - 1} \cdot K_{\frac{r}{4}, f, \bar{x}_1}^+. \quad (4.23)$$

Seja $\xi_2 := \xi_{\frac{r'}{4}}(\bar{x}_1)$ um ponto de corkscrew interior associado a $r'/4$ e \bar{x}_1 . Podemos verificar que ξ_1 e ξ_2 pertencem ao conjunto $B_{\frac{r/2}{A_1}}^+(\bar{x}_0)$ e mantêm distância maior ou igual a $(r/2)/6M_\Omega A_1$ para a fronteira de Ω . Daí, pelo R.D.H. em $B_{\frac{r}{2}}^+(\bar{x}_0)$, em um processo análogo ao da desigualdade (4.20), chegamos em

$$u(\xi_2) \leq \tilde{C} \left(u(\xi_1) + K_{\frac{r}{2}, f, \bar{x}_0}^+ \right),$$

e, como $\tilde{C} \geq 1$ e $\|f\|_{L^q(B_{\frac{r}{4}}^+(\bar{x}_1))} \leq \|f\|_{L^q(B_{\frac{r}{2}}^+(\bar{x}_0))}$,

$$u(\xi_2) + K_{\frac{r}{4}, f, \bar{x}_1}^+ \leq 2\tilde{C} \left(u(\xi_1) + K_{\frac{r}{2}, f, \bar{x}_0}^+ \right).$$

Então, por (4.21),

$$\frac{M}{\tilde{C}} \left(u(\xi_2) + K_{\frac{r}{4}, f, \bar{x}_1}^+ \right) \leq 2M \left(u(\xi_1) + K_{\frac{r}{2}, f, \bar{x}_0}^+ \right) < 2u(x_1).$$

Juntando a desigualdade acima com (4.23), obtemos

$$M \left(u(\xi_2) + K_{\frac{r}{4}, f, \bar{x}_1}^+ \right) < 2\tilde{C}u(x_1) \leq 2\tilde{C}2^\beta C_2 \cdot \left(\frac{C_1}{M} \right)^{\beta/\lambda} \cdot u(x_2) + \frac{2\tilde{C}C_2}{C_2 - 1} \cdot K_{\frac{r}{4}, f, \bar{x}_1}^+.$$

Daí,

$$Mu(\xi_2) + \left(M - \frac{2\tilde{C}C_2}{C_2 - 1} \right) \cdot K_{\frac{r}{4}, f, \bar{x}_1}^+ < 2\tilde{C}2^\beta C_2 \cdot \left(\frac{C_1}{M} \right)^{\beta/\lambda} \cdot u(x_2).$$

Como temos

$$M \geq \frac{4\tilde{C}C_2}{C_2 - 1}$$

então

$$\frac{M}{2} \cdot (u(\xi_2) + K_{\frac{r}{4}, f, \bar{x}_1}^+) < 2\tilde{C}2^\beta C_2 \cdot \left(\frac{C_1}{M} \right)^{\beta/\lambda} \cdot u(x_2)$$

e assim

$$M \left(u(\xi_2) + K_{\frac{r}{4}, f, \bar{x}_1}^+ \right) < 4\tilde{C}2^\beta C_2 \cdot \left(\frac{C_1}{M} \right)^{\beta/\lambda} \cdot u(x_2).$$

Como estamos considerando $M > M_0$, temos

$$4\tilde{C}2^\beta C_2 \cdot \left(\frac{C_1}{M} \right)^{\beta/\lambda} \leq 1$$

daí,

$$M \left(u(\xi_2) + K_{\frac{r}{4}, f, \bar{x}_1}^+ \right) < u(x_2). \quad (4.24)$$

Além disso, como no Caso #2, usando (4.23) e que $\tilde{C} \geq 1$, concluímos

$$u(x_1) < u(x_2) + \frac{C_2}{C_2 - 1} \cdot K_{\frac{r}{4}, f, \bar{x}_1}^+.$$

Como já tínhamos

$$u(x_0) < u(x_1) + \frac{C_2}{C_2 - 1} \cdot K_{\frac{r}{2}, f, \bar{x}_0}^+,$$

chegamos em

$$u(x_0) < u(x_1) + \frac{C_2}{C_2 - 1} \cdot K_{\frac{r}{2}, f, \bar{x}_0}^+ < u(x_2) + \frac{C_2}{C_2 - 1} \cdot \left(K_{\frac{r}{4}, f, \bar{x}_1}^+ + K_{\frac{r}{2}, f, \bar{x}_0}^+ \right).$$

Feitos esses passos, fica evidente como funciona o processo. Para

$$M \geq \max \left\{ \frac{4\tilde{C}C_2}{C_2 - 1}, M_0 \right\}, \quad A_0 = 3A_1 \quad \text{e} \quad r' = r/A_0,$$

vão existir seqüências $x_0, x_1, \dots, x_m \in \Omega$ e $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m \in \partial\Omega$ satisfazendo

$$x_i \in \overline{B}_{\frac{r'}{2^i}}^+(\bar{x}_{i-1}) \quad \text{tal que} \quad u(x_i) = \sup_{\overline{B}_{\frac{r'}{2^i}}^+(\bar{x}_{i-1})} u,$$

onde

$$|x_i - \bar{x}_i| = \delta(x_i), \quad \text{para} \quad 0 \leq i \leq m,$$

convencionando que $\bar{x}_{-1} := w$. E, sendo Ω um domínio NTA, vai existir uma seqüência de pontos de corkscrew interiores, $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m$ onde $\xi_i := \xi_{r'/2^i}(\bar{x}_{i-1})$ satisfaz

$$\begin{cases} \xi_i \in \Omega \\ |\xi_i - \bar{x}_{i-1}| < \frac{r'}{2^i} \\ \delta(\xi_i) \geq \frac{r'/2^i}{M_\Omega} = \frac{r'}{2^i M_\Omega}. \end{cases}$$

Estaremos também aptos a concluir que, dado um $j \geq 1$ para o qual vale $\delta(x_i) < \frac{r'}{2^{i \cdot 4M_\Omega}}$ para todo $i < j$ e

$$M\left(u(\xi_i) + K_{\frac{r'}{2^i}, f, \bar{x}_{i-1}}^+\right) < u(x_i) \quad (4.25)$$

para todo $i \in [0, \dots, j]$, então, se no j -ésimo caso ocorrer

$$\delta(x_j) \geq \frac{r'}{2^j \cdot 4M_\Omega},$$

teremos um absurdo contra

$$M\left(u(\xi_j) + K_{\frac{r'}{2^j}, f, \bar{x}_{j-1}}^+\right) < u(x_j). \quad (4.26)$$

E tal absurdo implica em um absurdo contra (4.15).

Então podemos supor que para todo $m \geq 1$, nossa seqüência $\{x_i\}_0^m$ satisfaz

$$\delta(x_i) < \frac{r'}{2^i \cdot 4M_\Omega} \quad (4.27)$$

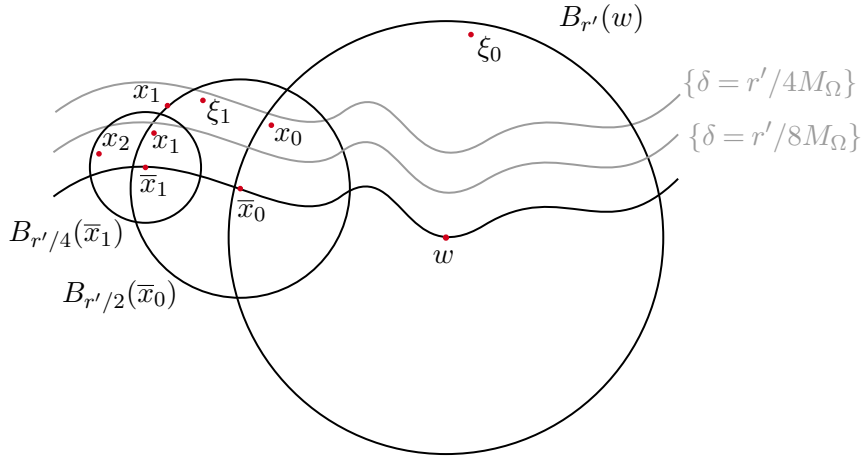
para todo $i \leq m$, como na Figura 21. Além disso, para todos $m \geq 1$ e $1 \leq j \leq m$ teremos

$$|\bar{x}_j - w| \leq \underbrace{|\bar{x}_j - x_j|}_{< \frac{1}{4} \frac{r'}{2^j}} + \underbrace{|x_j - \bar{x}_{j-1}|}_{\leq \frac{r'}{2^j}} + \underbrace{|\bar{x}_{j-1} - x_{j-1}|}_{< \frac{1}{4} \frac{r'}{2^{j-1}}} + \underbrace{|x_{j-1} - \bar{x}_{j-2}|}_{\leq \frac{r'}{2^{j-1}}} + \dots + \underbrace{|\bar{x}_0 - x_0|}_{< \frac{1}{4} r'} + \underbrace{|x_0 - w|}_{\leq r'}$$

portanto,

$$|\bar{x}_j - w| < \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{j-1}} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\right) r' < \frac{5r'}{2}.$$

Figura 21 – Elementos da demonstração



Fonte: elaborada pelo autor.

Isso é suficiente para garantir que para qualquer $z \in B_{\frac{r}{2^j}}^+(\bar{x}_{j-1})$,

$$|z - w| \leq \underbrace{|z - \bar{x}_{j-1}|}_{< \frac{r}{2^j}} + \underbrace{|\bar{x}_{j-1} - w|}_{\frac{5r'}{2}} < \left(\frac{1}{2^j} + \frac{5}{2A_0}\right) r < r,$$

uma vez que $j \geq 1$ e $A_0 \geq 12$. Ou seja, para todo $j \geq 1$ vale

$$B_{\frac{r}{2^j}}^+(\bar{x}_{j-1}) \subset B_r^+(w).$$

Logo, para todo $j \geq 1$,

$$\|f\|_{L^q\left(B_{\frac{r}{2^j}}^+(\bar{x}_{j-1})\right)} \leq \|f\|_{L^q(B_r^+(w))}$$

e, como g^{-1} é crescente e vale (g1), teremos

$$\begin{aligned}
K_{\frac{r}{2^j}, f, \bar{x}_{j-1}}^+ &= \frac{r}{2^j} \cdot g^{-1} \left(\left(\frac{r}{2^j} \right)^{1-\frac{n}{q}} \cdot \|f\|_{L^q \left(B_{\frac{r}{2^j}}^+(\bar{x}_{j-1}) \right)} \right) \\
&\leq \frac{r}{2^j} \cdot g^{-1} \left(\left(\frac{r}{2^j} \right)^{1-\frac{n}{q}} \cdot \|f\|_{L^q(B_r^+(w))} \right) \\
&\leq \frac{r}{2^j} \cdot \max \left\{ \left(\frac{1}{2^j} \right)^{(1-\frac{n}{q})\delta}, \left(\frac{1}{2^j} \right)^{(1-\frac{n}{q})g_0} \right\} g^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \cdot \|f\|_{L^q(B_r^+(w))} \right) \\
&= \frac{1}{2^j} \cdot \max \left\{ \left(\frac{1}{2^j} \right)^{(1-\frac{n}{q})\delta}, \left(\frac{1}{2^j} \right)^{(1-\frac{n}{q})g_0} \right\} \cdot K_{r, f, w}^+ \\
&= \frac{1}{2^j} \cdot \left(\frac{1}{2^j} \right)^{(1-\frac{n}{q})\delta} \cdot K_{r, f, w}^+ \\
&= \left(\frac{1}{2^j} \right)^{1+(1-\frac{n}{q})\delta} \cdot K_{r, f, w}^+.
\end{aligned}$$

Definindo $\alpha := 1 + \left(1 - \frac{n}{q}\right)\delta$, teremos, para qualquer $j \geq 1$,

$$K_{\frac{r}{2^j}, f, \bar{x}_{j-1}}^+ \leq \left(\frac{1}{2^\alpha} \right)^j \cdot K_{r, f, w}^+. \quad (4.28)$$

Além disso, sempre estaremos aptos a usar o L.O.F. e o R.D.H. propriamente, e recuperar os passos dos casos anteriores. Com isso, também concluímos

$$\begin{aligned}
u(x_0) &< u(x_1) + \frac{C_2}{C_2 - 1} \cdot K_{\frac{r}{2}, f, \bar{x}_0}^+ \\
&< u(x_2) + \frac{C_2}{C_2 - 1} \cdot K_{\frac{r}{4}, f, \bar{x}_1}^+ + \frac{C_2}{C_2 - 1} \cdot K_{\frac{r}{2}, f, \bar{x}_0}^+ \\
&= u(x_2) + \frac{C_2}{C_2 - 1} \cdot \left(K_{\frac{r}{4}, f, \bar{x}_1}^+ + K_{\frac{r}{2}, f, \bar{x}_0}^+ \right) \\
&< u(x_3) + \frac{C_2}{C_2 - 1} \cdot K_{\frac{r}{8}, f, \bar{x}_2}^+ + \frac{C_2}{C_2 - 1} \cdot \left(K_{\frac{r}{4}, f, \bar{x}_1}^+ + K_{\frac{r}{2}, f, \bar{x}_0}^+ \right) \\
&= u(x_3) + \frac{C_2}{C_2 - 1} \cdot \left(K_{\frac{r}{8}, f, \bar{x}_2}^+ + K_{\frac{r}{4}, f, \bar{x}_1}^+ + K_{\frac{r}{2}, f, \bar{x}_0}^+ \right) \\
&\vdots \\
&< u(x_m) + \frac{C_2}{C_2 - 1} \cdot \left(K_{\frac{r}{2^m}, f, \bar{x}_{m-1}}^+ + \dots + K_{\frac{r}{2}, f, \bar{x}_0}^+ \right).
\end{aligned}$$

Portanto, usando (4.28),

$$u(x_0) < u(x_m) + \frac{C_2}{C_2 - 1} \cdot \left(\left(\frac{1}{2^\alpha} \right)^m + \dots + \left(\frac{1}{2^\alpha} \right) \right) K_{r, f, w}^+.$$

Logo, juntando (4.15) com a informação acima, obtemos

$$M(u(\xi_0) + K_{r, f, w}^+) < u(x_0) < u(x_m) + \frac{C_2}{C_2 - 1} \cdot \left(\left(\frac{1}{2^\alpha} \right)^m + \dots + \left(\frac{1}{2^\alpha} \right) \right) K_{r, f, w}^+$$

e como $\alpha > 1$, temos $1/2^\alpha < 1/2$ e

$$\left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^m + \dots + \left(\frac{1}{2^\alpha}\right) < \sum_{i=1}^m \frac{1}{2^i} < 1 \quad \forall m.$$

Daí, para qualquer $m \geq 1$,

$$M(u(\xi_0) + K_{r,f,w}^+) < u(x_m) + \frac{C_2}{C_2 - 1} \cdot K_{r,f,w}^+ \leq u(x_m) + \frac{C_2}{C_2 - 1} \cdot (u(\xi_0) + K_{r,f,w}^+). \quad (4.29)$$

Agora, tomando $m \rightarrow \infty$, ainda preservando (4.27), como a sequência $\{x_m\}$ é de Cauchy e $\delta(x_m) \rightarrow 0$, então $x_m \rightarrow y$ para algum $y \in \partial\Omega \cap B_r(x_0)$, conjunto onde $u \equiv 0$. Todavia, sendo u contínua, e valendo $u(y) = 0$, podemos concluir $u(x_m) \rightarrow 0$. Segue então de (4.29) que

$$M(u(\xi_0) + K_{r,f,w}^+) \leq \frac{C_2}{C_2 - 1} \cdot (u(\xi_0) + K_{r,f,w}^+),$$

o que é um absurdo devido a escolha de $M \geq \frac{4\tilde{C}C_2}{C_2 - 1} > \frac{C_2}{C_2 - 1}$.

Em resumo, dada a escolha $M \geq \max\left\{\frac{4\tilde{C}C_2}{C_2 - 1}, M_0\right\} = M(n, \delta, g_0, q, M_\Omega)$, se supormos que a equação (4.15) é válida, chegaremos a um absurdo tanto no caso em que existe j tal que

$$\delta(x_j) \geq \frac{r'}{2^j \cdot 4M\Omega},$$

quanto no caso em que

$$\delta(x_j) < \frac{r'}{2^j \cdot 4M\Omega}$$

para todo j . Isso implica que (4.15) não pode ser válida, e, portanto, a equação correta é (4.14) com $c_0 := M$. □

5 APLICAÇÕES

Neste capítulo, apresentaremos duas importantes aplicações da Estimativa de Carleson. A primeira se concentra na análise do crescimento das soluções de $\Delta_g u = f$ em certos domínios ilimitados, enquanto a segunda trata de um resultado do tipo Desigualdade de Harnack na fronteira.

Continuaremos assumindo que G é um N -função e com g satisfazem (P.C.) e (Q.C.).

5.1 Crescimento exponencial de soluções em domínios ilimitados

A primeira aplicação que apresentamos é uma **estimativa de crescimento exponencial** para soluções de $\Delta_g u = f$ em domínios cilíndricos não limitados, cuja base (ou seção transversal) é um domínio NTA. Em uma sequência de trabalhos, **Henri Berestycki, Luis Caffarelli e Louis Nirenberg** investigaram propriedades de simetria e monotonicidade de soluções positivas de equações elípticas sujeitas a condições de Dirichlet. Sob certas hipóteses, eles demonstraram que tais soluções *não podem crescer mais que exponencialmente* ao longo das direções não limitadas do domínio.

Em (Berestycki *et al.*, 1996), os autores consideram domínios do tipo $\mathbb{R}^{n-j} \times \omega$, com $\omega \subset \mathbb{R}^j$ limitado, suave e dotado de simetrias específicas. Nesse contexto, mostram que a estrutura geométrica do domínio, combinada com a Estimativa de Carleson, impõe uma certa *rigidez* que impede o crescimento livre no infinito. Mais precisamente, provam que existem constantes $C, \alpha > 0$ tais que

$$u(x, y) \leq C e^{\alpha|x|} \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^{n-j} \times \omega.$$

Nesta seção, apresentamos um resultado análogo, porém local, em cilindros do tipo $\Gamma_{r,w}^+$, definidos a seguir. (Veja também a Figura 22). Utilizando a Estimativa de Carleson, que provamos previamente, mostraremos que soluções de (5.1) também obedecem a uma controle exponencial em $|y|$, com $y \in \mathbb{R}^{n-k}$, mesmo sob hipóteses mais fracas de regularidade sobre a geometria da base do cilindro. Vamos então a apresentação dos conceitos e formalização dos resultados.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ um domínio M_Ω, r_Ω -NTA limitado e $f \in L^q(\Omega \times \mathbb{R}^{n-k})$ para

$q > n$. Além disso, para $r > 0$ e $w \in \partial\Omega$, definimos os seguintes cilindros

$$\Gamma_{r,w}^+ := B_r^{+,k}(w) \times \mathbb{R}^{n-k}$$

e

$$\Gamma'_{r,w} := B_r'^{+,k}(w) \times \mathbb{R}^{n-k},$$

onde

$$B_r^{+,k}(w) = B_r^k(w) \cap \Omega \quad \text{e} \quad B_r'^{+,k}(w) = B_r^k(w) \cap \partial\Omega,$$

e $B_r^k(w)$ é uma bola de \mathbb{R}^k .

Nesta seção vamos trabalhar com as funções $u \in W_{\text{loc}}^{1,G}(\Gamma_{r,w}^+) \cap C^0(\overline{\Gamma}_{r,w}^+)$ que satisfazem

$$\begin{cases} \Delta_g u = f & \text{em } \Gamma_{r,w}^+ \\ u \geq 0 & \text{em } \Gamma_{r,w}^+ \\ u \equiv 0 & \text{em } \Gamma'_{r,w}. \end{cases} \quad (5.1)$$

Com a notação devidamente esclarecida, podemos avançar para o enunciado do teorema.

Teorema 5.1. *Existem constantes $A_0 \geq 1, r_0 > 0$, dependendo apenas do domínio Ω tais que, para quaisquer $w \in \partial\Omega$ e $0 < r < r_0$, se u satisfaz (5.1), então, para todo $(x, y) \in B_{r'}^{+,k}(w) \times \mathbb{R}^{n-k}$,*

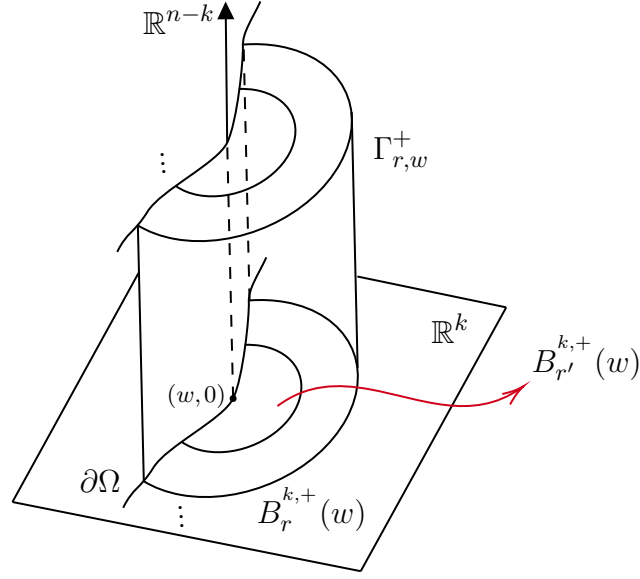
$$u(x, y) \leq C e^{\sigma \frac{|y|}{r}} \left(u(\xi_0, 0) + r g^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q(\Omega \times \mathbb{R}^{n-k})} \right) \right), \quad (5.2)$$

onde $r' = r/A_0$ e C, σ são constantes que dependem apenas de $n, k, A_0, \delta, g_0, q$. Veja a Figura 22 para melhor entendimento. Em particular, tomando r como um múltiplo específico de r_0 , por exemplo $r := 9r_0/10$, concluímos

$$u(x, y) \leq C e^{\sigma|y|} \left(u(\xi_0, 0) + r g^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q(\Omega \times \mathbb{R}^{n-k})} \right) \right) \quad \text{para todo } (x, y) \in B_{r'}^{+,k}(w) \times \mathbb{R}^{n-k}$$

com o σ dependendo também, possivelmente, de r_0 .

Demonstração. Considere o conjunto $\Gamma := \Omega \times B_{\text{diam}(\Omega)}^{n-k}$ que é NTA, pelo Teorema 3.13, e cujas constantes dependem apenas de Ω, n e k . Sejam, a priori, A_0 e r_0 as constantes das Estimativa de Carleson para o domínio Γ . Tome w e r como no enunciado. Além disso,

Figura 22 – Representação do conjunto $\Gamma_{r,w}^+$ 

Fonte: elaborada pelo autor.

considere em Ω um ponto de *corkscrew* ξ_0 associado a $r' = r/A_0$ e a w . Para simplificar a notação, vamos denotar por K o seguinte valor:

$$K := rg^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q(\Omega \times \mathbb{R}^{n-k})} \right)$$

e definir os seguintes conjuntos, para $j \geq 1$:

$$\Omega_j = B_r^{+,k}(w) \times \overline{B}_{jr}^{n-k} \quad \text{e} \quad \tilde{\Omega}_j = B_{r'}^{+,k}(w) \times \overline{B}_{jr}^{n-k}.$$

Para provar o teorema, vamos começar mostrando que para todo $j \geq 1$ vale a seguinte estimativa:

$$u(x, y) \leq j C_*^j (u(\xi_0, 0) + K) \quad \text{para todo} \quad (x, y) \in \tilde{\Omega}_j, \quad (5.3)$$

onde $C_* = C_*(n, k, \delta, g_0, q, M_\Gamma)$.

Vamos provar a estimativa acima. Primeiro, para um melhor entendimento da demonstração, vamos considerar $j = 1$. Seja $z = (x, y) \in \tilde{\Omega}_1 = B_{r'}^{+,k}(w) \times \overline{B}_r^{n-k} \subset \Omega_1 \subset \Gamma$. Considere agora o ponto $z_0 := (w, y)$. Podemos concluir alguns fatos diante desse cenário:

i. $z_0 \in \partial\Gamma$.

De fato,

$$z_0 \in \partial\Omega \times \overline{B}_r^{n-k} \subset \partial\Gamma.$$

ii. $z \in B_{r'}(z_0) \cap \Gamma$.

Ora, que $z \in \Gamma$ já sabemos. Agora, veja que

$$|z - z_0| = |(x, y) - (w, y)| = |x - w| < r'.$$

iii. $f \in L^q(B_r(z_0) \cap \Gamma)$.

Veja que

$$B_r(z_0) \cap \Gamma \subset \Gamma \subset \Omega \times \mathbb{R}^n,$$

conjunto no qual a norma de f em L^q é finita. Também, observe que $B_r(z_0) \cap \Gamma$ não é vazio, uma vez que contém o conjunto $B_{r/2}^{+,k}(w) \times B_{r/2}^{n-k}(y)$.

iv. $u \in W_{\text{loc}}^{1,G}(B_r(z_0) \cap \Gamma) \cap C^0(\overline{B_r(z_0) \cap \Gamma})$ satisfaz

$$\begin{cases} \Delta_g u = f \text{ em } B_r(z_0) \cap \Gamma \\ u \geq 0 \text{ em } B_r(z_0) \cap \Gamma \\ u \equiv 0 \text{ em } B_r(z_0) \cap \partial\Gamma. \end{cases}$$

Isso é verdade pois, relembrando que $r < r_0 < \text{diam}(\Omega)/2$,

$$\begin{aligned} B_r(z_0) \cap \Gamma &\subset B_r^k(w) \times B_r^{n-k}(y) \cap \Omega \times B_{\text{diam}(\Omega)}^{n-k}(0) \\ &= B_r^{+,k}(w) \times B_r^{n-k}(y) \\ &\subset B_r^{+,k}(w) \times \mathbb{R}^{n-k}, \end{aligned}$$

então $\overline{B_r(z_0) \cap \Gamma} \subset \overline{\Gamma}_{r,w}^+$. Além disso, nós teremos $B_r(z_0) \cap \partial\Gamma \subset \Gamma'_{r,w}$:

$$\begin{aligned} \partial\Gamma &= \partial(\Omega \times B_{\text{diam}(\Omega)}^{n-k}) \\ &\subset \partial(\overline{\Omega} \times \overline{B}_{\text{diam}(\Omega)}^{n-k}) \\ &= \partial\overline{\Omega} \times \overline{B}_{\text{diam}(\Omega)}^{n-k} \cup \overline{\Omega} \times \partial\overline{B}_{\text{diam}(\Omega)}^{n-k} \end{aligned}$$

e, para $d := \text{diam}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} B_r(z_0) \cap \partial\Gamma &\subset B_r(z_0) \cap \left[\partial\overline{\Omega} \times \overline{B}_d^{n-k} \cup \overline{\Omega} \times \partial\overline{B}_d^{n-k} \right] \\ &\subset \left(B_r^k(w) \times B_r^{n-k}(y) \right) \cap \left[\partial\overline{\Omega} \times \overline{B}_d^{n-k} \cup \overline{\Omega} \times \partial\overline{B}_d^{n-k} \right] \\ &= \left[(B_r^k(w) \cap \partial\overline{\Omega}) \times (B_r^{n-k}(y) \cap \overline{B}_d^{n-k}) \right] \cup \left[(B_r^k(w) \cap \overline{\Omega}) \times \underbrace{(B_r^{n-k}(y) \cap \partial\overline{B}_d^{n-k})}_{=\emptyset} \right] \\ &= B_r'^{+,k}(w) \times B_r^{n-k}(y) \\ &\subset \Gamma'_{r,w}. \end{aligned}$$

Essas coisas são suficientes para que u venha a herdar para os conjuntos menores as propriedades de (5.1).

Diante desses fatos, uma vez que Γ é NTA, podemos aplicar a Estimativa de Carleson para obter

$$u(z) \leq \sup_{B_{r'}(z_0) \cap \Gamma} u \leq c_0(u(\rho) + K), \quad (5.4)$$

onde ρ é qualquer ponto de *corkscrew* associado a z_0 e r' .

Afirmamos que, se ξ é um ponto de *corkscrew* de Ω , associado a r e w , então, para qualquer $y^* \in \mathbb{R}^{n-k}$ e $b \in \overline{B}_r^{n-k}(y^*)$, (ξ, b) é um ponto de *corkscrew* de $\Omega \times B_{2r}^{n-k}(y^*)$ associado a r e (w, b) . (Veja a Figura 23). De fato, tomando $r < r_\Omega$, $y^* \in \mathbb{R}^{n-k}$ e $b \in \overline{B}_r^{n-k}(y^*)$, nós temos

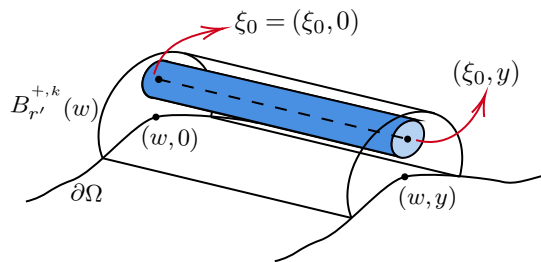
$$|(\xi, b) - (w, b)| = |\xi - w| < r$$

e

$$B_{\frac{r}{M_\Omega}}(\xi, b) \subset B_{\frac{r}{M_\Omega}}^k(\xi) \times B_{\frac{r}{M_\Omega}}^{n-k}(b) \subset \Omega \times B_{2r}^{n-k}(y^*).$$

Em particular, em (5.4) podemos tomar ρ da forma (ξ_0, b) , $b \in \mathbb{R}^{n-k}$ desde que esse pertença a $B_{r'}(z_0) \cap \Gamma$. Precisamente, tome o ponto $\rho := (\xi_0, y)$.

Figura 23 – Cilindro em torno de um segmento de pontos de corkscrew



Fonte: elaborada pelo autor.

Observemos, agora, que para qualquer $b \in \overline{B}_r^{n-k}$, (ξ_0, b) pode ser conectado a $(\xi_0, 0)$ por uma cadeia de bolas finitas, cujas bolas vizinhas possuem intersecção e cujas bolas de mesmo centro e raio dobrado ainda estão em Γ . De fato, seja m o menor número natural maior ou igual a $2A_0M_\Gamma$. Com $m+1$ pontos equidistantes entre 0 e $(\xi_0, r*b/|b|)$, estes incluídos, podemos fazer tal cadeia de bolas, cada bola com raio $r/2A_0M_\Gamma$. Em particular, o mesmo número de bolas, naturalmente, serve para o segmento menor $[(\xi_0, 0), (\xi_0, b)]$.

Voltando a considerar o ponto (ξ_0, y) , montamos uma cadeia de bolas da forma $B^i = B_{r/A_0 M_\Gamma}(x_i)$, centradas nos pontos $x_1 := (\xi_0, 0), x_2, \dots, x_{m+1} := (\xi_0, y)$, onde podemos usar a Desigualdade de Harnack em cada uma dessas bolas, de B^1 a B^m , para obter

$$\begin{aligned}
u(x_{m+1}) &\leq C_H(u(x_m) + K) \\
&\leq C_H(C_H(u(x_{m-1}) + K) + K) = C_H^2 u(x_{m-1}) + C_H^2 K + C_H K \\
&\leq C_H^2(C_H(u(x_{m-2}) + K)) + C_H^2 K + C_H K = C_H^3 u(x_{m-2}) + C_H^3 K + C_H^2 K + C_H K \\
&\vdots \\
&\leq C_H^m u(x_1) + C_H^m K + \dots + C_H^2 K + C_H K \\
&\leq C_H^m u(x_1) + m C_H^m K \\
&\leq m C_H^m (u(x_1) + K),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$u(\xi_0, y) \leq m C_H^m (u(\xi_0, 0) + K). \quad (5.5)$$

Juntando as equações (5.4) e (5.5), obtemos

$$u(z) \leq C_*(u(\xi_0, 0) + K), \quad \text{onde } C_* := 2m c_0 C_H^m.$$

Agora, para o caso geral, considere $z = (x, y) \in \tilde{\Omega}_j = B_{r'}^{+,k}(w) \times \overline{B}_{jr}^{n-k} \subset \Omega_j$. É suficiente provar o caso $z \in \tilde{\Omega}_j \setminus \tilde{\Omega}_{j-1}$. De fato, no caso geral onde $z \in \tilde{\Omega}_j$, vai existir algum $i < j$ tal que $z \in \tilde{\Omega}_i \setminus \tilde{\Omega}_{i-1}$, nos permitindo concluir

$$u(z) \leq i C_*^i (u(\xi_0, 0) + K)$$

e, como $i C_*^i < j C_*^j$, recuperamos (5.3).

Considere então $z \in \tilde{\Omega}_j \setminus \tilde{\Omega}_{j-1}$. Defina $z_0 := (w, y)$ e, para cada $i < j$, seja y_i^* o ponto de ∂B_{ir}^{n-k} onde o segmento $[(w, 0), (w, y)]$ intersecta $B_{r'}^{+,k}(w) \times \partial B_{ir}^{n-k}$. Além disso, defina $\Gamma_{y_i^*}$ por

$$\Gamma_{y_i^*} = \Omega \times B_{\text{diam}(\Omega)}^{n-k}(y_i^*).$$

Exatamente como no caso $j = 1$, nós concluimos *i, ii, iii* e *iv* para $\Gamma_{y_{j-1}^*}$ em vez de Γ . Claramente, $\Gamma_{y_{j-1}^*}$ é NTA com as mesmas constantes de $\Gamma_{y_{j-1}^*}$, e portanto, a

Estimativa de Carleson vale com as mesmas constantes A_0 e r_0 . Então, como (ξ_0, y) é um ponto de *corkscrew* interior de $\Gamma_{y_{j-1}^*}$,

$$u(z) \leq c_0(u(\xi_0, y) + K),$$

para o mesmo c_0 do caso $j = 1$. Usando os mesmos argumentos de tal caso, concluimos

$$u(\xi_0, y) \leq mC_H^m(u(\xi_0, y_{j-1}^*) + K).$$

Afirmamos que para todo $i < j$,

$$u(\xi_0, y_i^*) \leq i(mC_H^m)^i(u(\xi_0, 0) + K). \quad (5.6)$$

Aplicando a afirmação acima com $i = j - 1$ e combinando com as duas equações anteriores, nós completamos a prova de (5.3):

$$\begin{aligned} u(z) &\leq c_0(u(\xi_0, y) + K) \\ &\leq c_0(mC_H^m(u(\xi_0, y_{j-1}^*) + K) + K) \\ &\leq c_0(mC_H^m((j-1)(mC_H^m)^{j-1}(u(\xi_0, 0) + K) + K) + K) \\ &= c_0((j-1)(mC_H^m)^j u(\xi_0, 0) + (j-1)(mC_H^m)^j K + mC_H^m K + K) \\ &\leq c_0(j(mC_H^m)^j u(\xi_0, 0) + j(mC_H^m)^j K + K) \\ &\leq 2c_0 j(mC_H^m)^j (u(\xi_0, 0) + K) \\ &\leq j(2c_0 mC_H^m)^j (u(\xi_0, 0) + K) \\ &= jC_*^j(u(\xi_0, 0) + K). \end{aligned}$$

Para provar (5.6), vamos usar indução. O caso $i = 1$ já foi discutido quando consideramos os pontos (ξ_0, b) , com $b \in \overline{B}_r^{n-k}$, resultando na equação (5.5). Agora, suponha que (5.6) vale para $i = l$. Para o caso $i = l + 1$, podemos usar os mesmos argumentos do caso $i = 1$ para comparar os valores de $u(\xi_0, y_{l+1}^*)$ com $u(\xi_0, y_l^*)$, desde que a distância entre (ξ_0, y_{l+1}^*) e (ξ_0, y_l^*) é r . Obtemos assim

$$u(\xi_0, y_{l+1}^*) \leq mC_H^m(u(\xi_0, y_l^*) + K).$$

Combinando isso com a hipótese de indução,

$$\begin{aligned} u(\xi_0, y_{l+1}^*) &\leq mC_H^m(u(\xi_0, y_l^*) + K) \\ &\leq mC_H^m(l(mC_H^m)^l(u(\xi_0, 0) + K) + K) \\ &= l(mC_H^m)^{l+1} u(\xi_0, 0) + l(mC_H^m)^{l+1} K + mC_H^m K \\ &\leq (l+1)(mC_H^m)^{l+1}(u(\xi_0, 0) + K). \end{aligned}$$

Portanto, a equação (5.6) está provada.

Nos resta agora completar a demonstração do teorema, ou mais precisamente provar (5.2). Tome $z = (x, y) \in B_{r'}^{+,k}(w) \times \mathbb{R}^{n-k}$. Nesse caso, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$jr < |y| \leq (j+1)r,$$

que implica $z \in \tilde{\Omega}_{j+1} \setminus \tilde{\Omega}_j$. Da equação (5.3), obtemos então

$$u(x, y) \leq (j+1)C_*^{j+1}(u(\xi_0, 0) + K).$$

Definindo $\tilde{\sigma} := \log C_*$, temos $e^{\tilde{\sigma}} = C_*$, daí

$$\begin{aligned} u(x, y) &\leq (j+1)C_*^{j+1}(u(\xi_0, 0) + K) \\ &\leq (j+1)e^{\tilde{\sigma}(j+1)}(u(\xi_0, 0) + K) \\ &\leq e^{j+1}e^{\tilde{\sigma}(j+1)}(u(\xi_0, 0) + K) \\ &= e^{(\tilde{\sigma}+1)(j+1)}(u(\xi_0, 0) + K) \\ &= e^{(\tilde{\sigma}+1)}e^{(\tilde{\sigma}+1)j}(u(\xi_0, 0) + K) \\ &\leq e^{(\tilde{\sigma}+1)}e^{(\tilde{\sigma}+1)\frac{|y|}{r}}(u(\xi_0, 0) + K) \\ &= Ce^{\sigma\frac{|y|}{r}}(u(\xi_0, 0) + K), \end{aligned}$$

onde $C := e^{(\tilde{\sigma}+1)}$ e $\sigma := \tilde{\sigma} + 1$.

Para o caso específico onde $r = \frac{9}{10}r_0$, é suficiente tomar $\sigma := \frac{10}{9}r_0\sigma$.

□

5.2 Desigualdade de Harnack de fronteira para domínios $C^{1,1}$

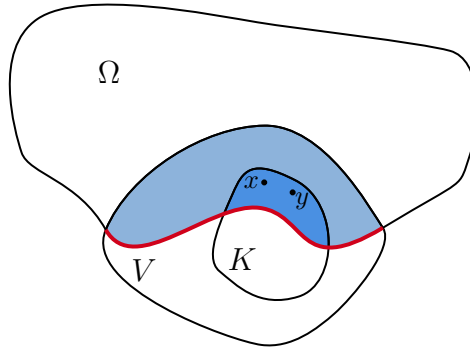
Nesta seção, nosso objetivo principal é demonstrar um resultado relacionado à Desigualdade de Harnack para funções definidas até a fronteira. Genericamente, consideramos a **Desigualdade de Harnack de fronteira** como o teorema que garante que, para quaisquer duas funções harmônicas e não negativas, definidas em uma região próxima à fronteira e que se anulam na fronteira, essas funções decaem para zero com a mesma taxa.

Mais precisamente, dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio com certas propriedades geométricas, $V \subset \mathbb{R}^n$ um aberto que satisfaz $\emptyset \neq V \cap \Omega \subsetneq \Omega$, e $K \subset V$ um compacto que também satisfaz $K \cap \Omega \neq \emptyset$ (Figura 24), se $u > 0$ e $v > 0$ são funções harmônicas em $V \cap \Omega$, e ambas se anulam continuamente em $V \cap \partial\Omega$, então existe uma constante $C \geq 1$, que não depende

de u nem de v , tal que

$$\frac{1}{C} \frac{u(y)}{v(y)} \leq \frac{u(x)}{v(x)} \leq C \frac{u(y)}{v(y)} \quad \text{para quaisquer } x, y \in K.$$

Figura 24 – Desigualdade de Harnack de fronteira



Fonte: elaborada pelo autor.

Em particular, se fixamos y e permitimos que x se aproxime da fronteira, verificamos que, embora $u(x)$ e $v(x)$ tendam a zero, nenhuma delas decai mais rapidamente do que a outra, já que a razão u/v está controlada inferior e superiormente.

Esse resultado foi inicialmente proposto por (Kemper, 1972) e, posteriormente, demonstrado de forma independente por (Dahlberg, 1977), (Ancona, 1978) e (Wu, 1978), todos para domínios Lipschitz. Desde então, diversas generalizações foram realizadas. (Jerison; Kenig, 1982) introduziram os domínios NTA e provaram o resultado para esses domínios. Em seguida, (Bass; Burdzy, 1991) e (Bañuelos *et al.*, 1991) estenderam a prova para domínios Hölder, usando técnicas de probabilidade em suas demonstrações, enquanto (Aikawa, 2001) a fez para domínios uniformes. Sob a ótica da modificação do operador, destacam-se as generalizações de (Caffarelli *et al.*, 1981), que tratam de soluções positivas de equações elípticas na forma divergente com coeficientes L^∞ em domínios Lipschitz, (Aikawa *et al.*, 2007), que abordaram o p -Laplaciano em domínios $C^{1,1}$, (Lewis; Nyström, 2007), que estendeu o estudo ao p -Laplaciano em domínios Lipschitz, e (Braga; Moreira, 2021), que fez para o g -Laplaciano na semi-bola. Também na semi-bola, no artigo (Braga *et al.*, 2023), encontramos uma versão do resultado para soluções da equação $\Delta_g = f$, onde $f \in L^q$, para $q > n$.

No caso em que o resultado acima é válido para $V = B_r(x_0)$, uma bola centrada em um ponto $x_0 \in \partial\Omega$, e $K = \overline{B}_{r/A}(x_0)$, para $A = A(\Omega) \geq 1$, alguns autores denominam o

resultado como Desigualdade de Harnack uniforme de fronteira. Preferimos, entretanto, chamá-lo apenas de Desigualdade de Harnack de fronteira.

O nome **Desigualdade de Harnack** não é uma mera coincidência. Na verdade, ele vem da Desigualdade de Harnack clássica. Sabemos bem que seria impossível obter um resultado dessa natureza envolvendo apenas uma função, pois, à medida que permitimos que os pontos se aproximem da fronteira, a universalidade da constante precisa ser ajustada, passando a depender da distância do ponto até a fronteira, de maneira inversamente proporcional, conforme é discutido no *Refinamento da Desigualdade de Harnack*, no Teorema 4.2.

Entretanto, se na Desigualdade clássica (no interior) tivermos duas funções harmônicas $u, v > 0$ definidas em $B_r(w)$, podemos concluir que

$$u(x) \leq Cu(y) \quad \text{e} \quad v(y) \leq Cv(x), \quad \text{para} \quad x, y \in B_{r/2}(w),$$

onde $C \geq 1$ é uma constante que não depende de u, v, x ou y . Daí, temos que $\frac{1}{v(x)} \leq \frac{C}{v(y)}$, o que implica

$$\frac{u(x)}{v(x)} \leq C^2 \frac{u(y)}{v(y)}.$$

Trocando x com y , obtemos a desigualdade oposta:

$$\frac{1}{C^2} \frac{u(y)}{v(y)} \leq \frac{u(x)}{v(x)} \leq C^2 \frac{u(y)}{v(y)} \quad \text{para} \quad x, y \in B_{r/2}(w).$$

De maneira equivalente, ao assumirmos a equação acima e tomando $v \equiv 1$, voltamos para a Desigualdade de Harnack clássica. Essa é, portanto, a motivação para o nome do resultado.

Ao final do capítulo, provaremos a Desigualdade de Harnack de fronteira para funções g -harmônicas. No caso das soluções de $\Delta_g u = f$, entretanto, não conseguimos provar o mesmo resultado devido ao termo extra envolvendo $\|f\|_{L^q}$, o que nos deixa na metade do caminho, limitando-nos a comparar apenas os valores da função $\frac{u}{\delta_D}$, onde $\delta_D(x)$ representa a distância de x para a fronteira de D .

A partir deste ponto, trabalharemos com domínios $C^{1,1}$. Como discutido no capítulo anterior, sobre domínios, um domínio $C^{1,1}$ é ainda um domínio NTA e cujas constantes da definição de NTA dependem exclusivamente do parâmetro R associado à condição da bola, propriedade que caracteriza os domínios $C^{1,1}$.

Em domínios $C^{1,1}$, a estratégia de demonstração é bastante simples: ela consiste em uma combinação da Estimativa de Carleson com a propriedade da bola exterior e com o uso de barreiras, para obter uma Estimativa superior para u/δ_D . Enquanto isso, utilizamos o Lema de Hopf com propriedades no interior para garantir a Estimativa inferior para u/δ_D . Após isso, basta combinar as duas estimativas para obter o resultado desejado.

5.2.1 Estimativa superior: uma aplicação da Estimativa de Carleson

Antes de avançarmos para a Estimativa superior, vamos apresentar a versão da Estimativa de Carleson que é mais adequada para a nossa demonstração.

Teorema 5.2 (Estimativa de Carleson para domínios $C^{1,1}$). *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um domínio $C^{1,1}$, limitado, cuja propriedade da bola é válida com raio R . Existem constantes $A_0 \geq 1$ e $r_0 > 0$, dependendo apenas de R , tais que, para quaisquer $\xi \in \partial\Omega$ e $0 < r < r_0$, se u é uma função satisfazendo (4.1) para $\Omega = D$ e $B = B_r(\xi)$, então*

$$\sup_{B_{\tilde{r}}^+(\xi)} u \leq c_0 \left(u(\xi_{\tilde{r}}) + r g^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q(B_r^+(\xi))} \right) \right), \quad (5.7)$$

para $c_0 = c_0(n, \delta, g_0, q, R) > 0$, $\tilde{r} = r/A_0$ e onde $\xi_{\tilde{r}} \in [\xi, \xi^i]$ é o ponto que satisfaz

$$\delta_D(\xi_{\tilde{r}}) = |\xi_{\tilde{r}} - \xi| = \tilde{r}.$$

Observe que a única mudança significativa ao passar da versão NTA para $C^{1,1}$ é que o ponto de *corkscrew* é tomado a uma distância igual a \tilde{r} , em vez de ser menor. No entanto, isso não representa um problema, pois a mesma demonstração pode ser aplicada também quando $|\xi_{\tilde{r}} - \xi| \leq \tilde{r}$. Além disso, o fato de podermos lidar com um ponto $\xi_{\tilde{r}}$ que satisfaça $\delta_D(\xi_{\tilde{r}}) = |\xi_{\tilde{r}} - \xi| = \tilde{r}$ é uma vantagem, e reflete a boa regularidade do domínio.

Proposição 5.3. *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um domínio $C^{1,1}$, limitado, cuja propriedade da bola é válida com raio R . Existem $A \geq 1$ e $R_0 > 0$, dependendo apenas de R , com a seguinte propriedade: para $\xi \in \partial D$ e $r \in (0, R_0)$ arbitrários, se u é uma função satisfazendo (4.1) para $\Omega = D$ e $B = B_r(\xi)$, então existe $C_1 = C_1(n, \delta, g_0, q, R) \geq 1$ tal que*

$$\frac{u(x)}{\delta_D(x)} \leq \frac{C_1}{r'} \left(u(\xi_{r'}) + r g^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q(B_r^+(\xi))} \right) \right) \quad \text{para qualquer } x \in B_{r'}(\xi) \cap D,$$

onde $r' = r/A$ e $\xi_{r'} \in [\xi, \xi^i]$ é o ponto tal que $\delta_D(\xi_{r'}) = |\xi_{r'} - \xi| = r'$.

Demonstração. Defina $A := 5A_0$ e $R_0 := \min\{r_0, R/2\}$ onde A_0, r_0 são da Estimativa de Carleson para domínios $C^{1,1}$. Além disso, sendo ξ, r' e x como no enunciado, tome $\eta \in \partial D$ tal que $\delta_D(x) = |x - \eta|$.

Pela propriedade da bola exterior, existe $\eta^e \in D^c$ satisfazendo $B_R(\eta^e) \subset D^c$ e $\eta \in \partial B_R(\eta^e)$. Seja $\eta_{r'}^e$ o ponto de $[\eta, \eta^e]$ que satisfaz

$$|\eta_{r'}^e - \eta| = r'.$$

Tal $\eta_{r'}^e$ também satisfaz

$$|\eta_{r'}^e - \xi| \leq |\eta_{r'}^e - \eta| + |\eta - x| + |x - \xi| \leq r' + r' + r' = 3r'. \quad (5.8)$$

Considerando o anel $\mathcal{A} := B_{2r'}(\eta_{r'}^e) \setminus B_{r'}(\eta_{r'}^e)$, defina em \mathcal{A} a seguinte função

$$\bar{f} := \begin{cases} f, & \text{em } B_{2r'}(\eta_{r'}^e) \cap D \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e, ainda em \mathcal{A} , defina

$$\tilde{f} := -\frac{M|\bar{f}|}{r' \tilde{C}_3 g(M/r')},$$

para

$$M := u(\xi_{r'}) + r' \cdot g^{-1} \left(\frac{(r')^{1-n/q} \|f\|_{L^q(B_r(\xi) \cap D)}}{\sigma \tilde{C}_3} \right).$$

Aqui \tilde{C}_3 e σ são as mesmas constantes do Teorema 2.28.

O Teorema 2.28 garante uma única $\Gamma \in W^{2,q}(\mathcal{A}) \cap C^0(\overline{\mathcal{A}})$ satisfazendo

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{\lambda_\delta, \Lambda_{g_0}}^+(D^2\Gamma) = \tilde{f}, & \text{em } \mathcal{A} \\ \Gamma = M & \text{em } \partial B_{2r'}(\eta_{r'}^e) \\ \Gamma = 0 & \text{em } \partial B_{r'}(\eta_{r'}^e). \end{cases}$$

Além disso, para obter as demais estimativas do mesmo teorema, precisamos primeiramente verificar que $\|\tilde{f}\|_{L^q(\mathcal{A})} \leq \frac{M\sigma}{(r')^{2-n/q}}$. No caso $\|f\|_{L^q(B_r(\xi) \cap D)} = 0$, é óbvio. Caso contrário, é verdade pois, uma vez que

$$\frac{(r')^{1-n/q} \|f\|_{L^q(B_r(\xi) \cap D)}}{\sigma \tilde{C}_3} = g \left(g^{-1} \left(\frac{(r')^{1-n/q} \|f\|_{L^q(B_r(\xi) \cap D)}}{\sigma \tilde{C}_3} \right) \right) \leq g(M/r')$$

e, por (5.8),

$$B_{2r'}(\eta_{r'}^e) \cap D \subset B_{5r'}(\xi) \cap D \subset B_r(\xi) \cap D,$$

teremos

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}\|_{L^q(\mathcal{A})} &= \frac{M}{r' \tilde{C}_3} \frac{\|\bar{f}\|_{L^q(\mathcal{A})}}{g(M/r')} \\ &= \frac{M}{r' \tilde{C}_3} \frac{\|f\|_{L^q(B_{2r'}(\eta_{r'}^e) \cap D)}}{g(M/r')} \\ &\leq \frac{M\sigma}{(r')^{2-n/q}} \frac{\|f\|_{L^q(B_{2r'}(\eta_{r'}^e) \cap D)}}{\|f\|_{L^q(B_r(\xi) \cap D)}} \\ &\leq \frac{M\sigma}{(r')^{2-n/q}}. \end{aligned}$$

Portanto, são válidas as estimativas (2.13) e (2.14). Dessa última, para $V := B_{2r'}(\eta_{r'}^e) \cap D \subset \mathcal{A}$, como na Figura 25, podemos recuperar que

$$\begin{aligned} \Delta_g \Gamma &\leq \tilde{C}_3 \frac{g(M/r')}{M/r'} \tilde{f} \\ &= -\tilde{C}_3 \frac{g(M/r')}{M/r'} \frac{M|\bar{f}|}{r' \tilde{C}_3 g(M/r')} \\ &= -|\bar{f}| \\ &= -|f| \quad (\text{ em } V) \\ &\leq f \\ &= \Delta_g u. \end{aligned}$$

Então

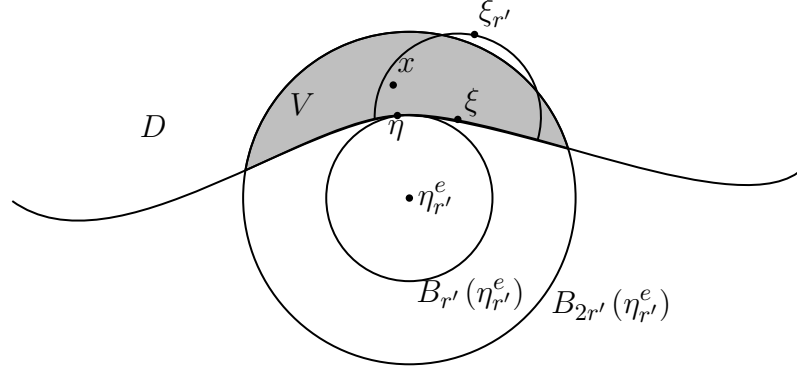
$$\Delta_g \Gamma \leq f \leq \Delta_g u.$$

Para concluir que $u \leq \Gamma$ em V , pelo Princípio da Comparação, Teorema 2.27, só precisamos checar que $u \leq \Gamma$ em ∂V . Em $\partial D \cap \mathcal{A}$, como $u \equiv 0$ em ∂D e $\Gamma \geq 0$ em todo o \mathcal{A} , temos $u \leq \Gamma$. Já em $\partial B_{2r'}(\eta_{r'}^e)$, temos $\Gamma \equiv M$, enquanto, pela Estimativa de Carleson, a qual é válida de $B_r(\xi) \cap D$ para $B_{\tilde{r}}(\xi) \cap D$, onde $\tilde{r} = 5r'$, temos

$$u(y) \leq c_0 \left(u(\xi_{5r'}) + K_{r,f,\xi}^+ \right) \quad \text{para todo } y \in B_{5r'}(\xi) \cap D,$$

onde $K_{r,f,\xi}^+ := r \cdot g^{-1} \left(r^{1-n/q} \cdot \|f\|_{L^q(B_r(\xi) \cap D)} \right)$. Em particular, para todo $y \in \partial B_{2r'}(\eta_{r'}^e) \cap D$,

$$u(y) \leq c_0 \left(u(\xi_{5r'}) + K_{r,f,\xi}^+ \right),$$

Figura 25 – Cenário da Estimativa superior e o conjunto V 

Fonte: elaborada pelo autor.

uma vez que, usando (5.8), vale

$$\partial B_{2r'}(\eta_{r'}^e) \cap D \subset B_{5r'}(\xi) \cap D.$$

Utilizando de um método análogo ao que obtivemos (5.5), como

$$\text{dist}([\xi_{r'}, \xi_{5r'}], \partial D) = \delta(\xi_{r'}) = \frac{r}{A},$$

podemos cobrir $[\xi_{r'}, \xi_{5r'}]$ por $m = m(A) \in \mathbb{N}$ bolas de raio $r/2A$, de modo que as bolas de mesmo centro e raio dobrado também estejam dentro de $B_r(\xi) \cap D$ (veja a Figura 26), lugar onde u tem boas propriedades, e usar a Desigualdade de Harnack na cadeia de bolas para obter

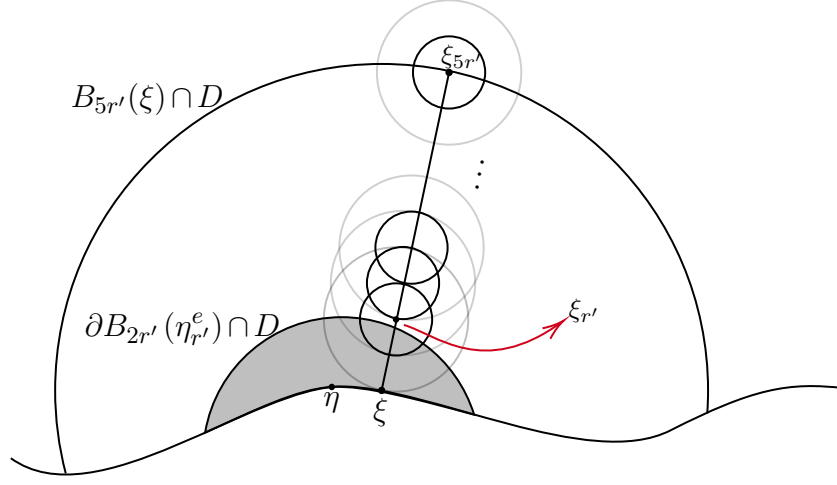
$$u(\xi_{5r'}) \leq \overline{C} \left(u(\xi_{r'}) + K_{r,f,\xi}^+ \right),$$

onde $\overline{C} \geq 1$ aparece dependendo apenas de C_H e m , ou seja, de n, δ, g_0, q e R . Daí, para todo $y \in \partial B_{2r'}(\eta_{r'}^e) \cap D$,

$$u(y) \leq c_0 \left(\overline{C} \left(u(\xi_{r'}) + K_{r,f,\xi}^+ \right) + K_{r,f,\xi}^+ \right) \leq C \left(u(\xi_{r'}) + K_{r,f,\xi}^+ \right).$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} K_{r,f,\xi}^+ &= r \cdot g^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \cdot \|f\|_{L^q(B_r(\xi) \cap D)} \right) \\ &= A \cdot r' \cdot g^{-1} \left(A^{1-\frac{n}{q}} (r')^{1-\frac{n}{q}} \cdot \|f\|_{L^q(B_r(\xi) \cap D)} \right) \\ &\leq A \cdot \max \left\{ \left(A^{1-\frac{n}{q}} \right)^{1/\delta}, \left(A^{1-\frac{n}{q}} \right)^{1/g_0} \right\} \cdot r' \cdot g^{-1} \left((r')^{1-\frac{n}{q}} \cdot \|f\|_{L^q(B_r(\xi) \cap D)} \right) \\ &\leq A \cdot \max \left\{ \left(A^{1-\frac{n}{q}} \right)^{1/\delta}, \left(A^{1-\frac{n}{q}} \right)^{1/g_0} \right\} \cdot r' \cdot g^{-1} \left(\frac{(r')^{1-\frac{n}{q}} \cdot \|f\|_{L^q(B_r(\xi) \cap D)}}{\sigma \tilde{C}_3} \right), \end{aligned}$$

Figura 26 – Cadeia de bolas ligando ξ a $\xi_{5r'}$ 

Fonte: elaborada pelo autor.

pois $\sigma \tilde{C}_3 < 1$. Então, como

$$A \max \left\{ (A^{1-n/q})^{1/\delta}, (A^{1-n/q})^{1/g_0} \right\} \geq 1,$$

se C absorve a constante acima, obtemos, para todo $y \in \partial B_{2r'}(\eta_{r'}^e) \cap D$,

$$u(y) \leq CM \equiv C \cdot \Gamma.$$

Como $C \geq 1$, temos $u \leq C \cdot \Gamma$ em ∂V e

$$\Delta_g(C\Gamma) = -C|f| \leq -|f| \leq f = \Delta_g u \quad \text{em } V,$$

daí, pelo Princípio da comparação,

$$u \leq C \cdot \Gamma \quad \text{em } V.$$

Agora, como $\|\tilde{f}\|_{L^q(\mathcal{A})} \leq M\sigma/(r')^{2-n/q}$, temos

$$u(y) \leq C \cdot \Gamma(y) \leq C \cdot \tilde{C}_2 \frac{M}{r'} \text{dist}(y, \partial B_{r'}(\eta_{r'}^e)) \quad \text{para todo } y \in V.$$

Em particular, como o nosso x pertence ao conjunto V e está na continuação do segmento $[\eta_{r'}^e, \eta]$, e $\{\eta\} = \partial D \cap \partial B_{r'}(\eta_{r'}^e)$, teremos

$$\text{dist}(x, \partial B_{r'}(\eta_{r'}^e)) = \text{dist}(x, \partial D) = \delta_D(x).$$

Daí,

$$u(x) \leq C \cdot \tilde{C}_2 \frac{M}{r'} \delta_D(x)$$

e, então

$$\frac{u(x)}{\delta_D(x)} \leq C \cdot \frac{\tilde{C}_2}{r'} M = C \cdot \frac{\tilde{C}_2}{r'} \left(u(\xi_{r'}) + r' \cdot g^{-1} \left(\frac{(r')^{1-n/q} \|f\|_{L^q(B_r(\xi) \cap D)}}{\sigma \tilde{C}_3} \right) \right).$$

Como $\sigma \tilde{C}_3 < 1$, temos $1/\sigma \tilde{C}_3 > 1$ e

$$\max \left\{ \left(\frac{1}{\sigma \tilde{C}_3} \right)^{1/\delta}, \left(\frac{1}{\sigma \tilde{C}_3} \right)^{1/g_0} \right\} = \left(\frac{1}{\sigma \tilde{C}_3} \right)^{1/\delta} > 1,$$

e, assim,

$$g^{-1} \left(\frac{(r')^{1-n/q} \|f\|_{L^q(B_r(\xi) \cap D)}}{\sigma \tilde{C}_3} \right) \leq \left(\frac{1}{\sigma \tilde{C}_3} \right)^{1/\delta} g^{-1} \left((r')^{1-n/q} \|f\|_{L^q(B_r(\xi) \cap D)} \right).$$

Daí,

$$\frac{u(x)}{\delta_D(x)} \leq C \cdot \frac{\tilde{C}_2}{r'} \left(\frac{1}{\sigma \tilde{C}_3} \right)^{1/\delta} \left(u(\xi_{r'}) + r' \cdot g^{-1} \left((r')^{1-n/q} \|f\|_{L^q(B_r(\xi) \cap D)} \right) \right).$$

Tome $C_1 := C \cdot \tilde{C}_2 \left(\frac{1}{\sigma \tilde{C}_3} \right)^{1/\delta}$. Daí, como $r' < r$,

$$\frac{u(x)}{\delta_D(x)} \leq \frac{C_1}{r'} \left(u(\xi_{r'}) + r \cdot g^{-1} \left(r^{1-n/q} \|f\|_{L^q(B_r(\xi) \cap D)} \right) \right).$$

□

5.2.2 Princípio de Hopf - Estimativa inferior

A proposição a seguir é um resultado do tipo Lema de Hopf, aplicado até a fronteira. Denominamos este resultado de Princípio de Hopf. No caso de domínios tão regulares como o do $C^{1,1}$, o principal ingrediente para a demonstração é o Lema de Hopf na versão para bolas, conforme enunciado no Teorema 2.26.

Proposição 5.4. *Seja D um domínio $C^{1,1}$ limitado, cuja propriedade da bola uniforme vale com raio R . Para qualquer $\xi \in \partial D$ e $0 < r < R/8$, se u é positiva e $\Delta_g u = f$ em $B_r(\xi) \cap D$, para $f \in L^q(B_r(\xi) \cap D)$, com $q > n$, então*

$$\frac{u(x)}{\delta_D(x)} \geq \frac{1}{r'} \left(\frac{u(\xi_{r'})}{C_2} - r \cdot g^{-1} \left(r^{1-n/q} \|f\|_{L^q(B_r(\xi) \cap D)} \right) \right) \quad \forall x \in B_{r'}(\xi) \cap D, \quad (5.9)$$

onde $r' = r/6$, $C_2 = C_2(n, \delta, g_0, q) > 1$ e $\xi_{r'} \in [\xi, \xi^i]$ é tal que $\delta_D(\xi_{r'}) = |\xi_{r'} - \xi| = r'$.

Demonstração. Considere $x \in B_{r'}(\xi)$ com $0 < r < R/8$. Tome $\eta \in \partial D$ tal que

$$\delta_D(x) = |\eta - x|.$$

Isto é possível pois $\{x\}$ é compacto e ∂D é fechado.

Sendo D domínio $C^{1,1}$, existe $\eta^i \in D$ tal que $B(\eta^i, R) \subset D$ e $\eta \in S(\eta^i, R)$. Tome então $\eta_{2r'}^i \in [\eta, \eta^i]$ como o ponto que satisfaz $\delta_D(\eta_{2r'}^i) = |\eta_{2r'}^i - \eta| = 2r'$. Naturalmente $\delta_D(\eta_{2r'}^i) < R$.

Observe que $B_{2r'}(\eta_{2r'}^i) \subset B_r(\xi) \cap D$. De fato, seja $y \in B_{2r'}(\eta_{2r'}^i)$, ou seja, $|y - \eta_{2r'}^i| < 2r'$. Daí

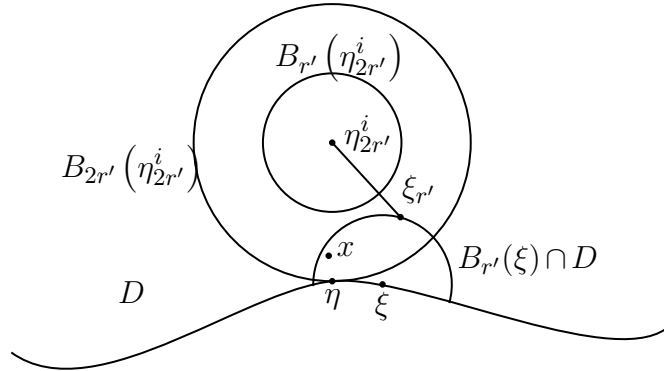
$$|y - \eta^i| \leq |y - \eta_{2r'}^i| + |\eta_{2r'}^i - \eta^i| < 2r' + R - 2r' = R.$$

Portanto, $B_{2r'}(\eta_{2r'}^i) \subset B_R(\eta^i) \subset D$. (Veja a Figura 27). Simultaneamente, temos

$$\begin{aligned} |y - \xi| &= |y - \eta_{2r'}^i + \eta_{2r'}^i - \eta + \eta - x + x - \xi| \\ &\leq \underbrace{|y - \eta_{2r'}^i|}_{< 2r'} + \underbrace{|\eta_{2r'}^i - \eta|}_{= 2r'} + \underbrace{|\eta - x|}_{< |x - \xi|} + \underbrace{|x - \xi|}_{< r'} \\ &< 6r' = r. \end{aligned}$$

Desse modo, $y \in B_r(\xi)$ e, por consequência, $B_{2r'}(\eta_{2r'}^i) \subset B_r(\xi) \cap D$. (Essa foi a razão pela qual trabalhamos com $r' = r/6$.)

Figura 27 – Cenário da Estimativa inferior



Fonte: elaborada pelo autor.

Pelo Lema de Hopf em sua versão não homogênea, Teorema 2.26, aplicado para $x_0 = \eta_{2r'}^i$, valerá (2.12), isto é, existem constantes universais $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 > 0$ tais que, para qualquer $y \in B_{2r'}(\eta_{2r'}^i)$, vale

$$u(y) \geq \left(\tilde{C}_1 \sup_{B_{r'}(\eta_{2r'}^i)} u - \tilde{C}_2 K_{2r', f, \eta_{2r'}^i} \right) \frac{\text{dist}(y, \partial B_{2r'}(\eta_{2r'}^i))}{r'},$$

para $K_{r,f,w}$ representando $r \cdot g^{-1} \left(r^{1-n/q} \|f\|_{L^q(B_r(w) \cap D)} \right)$, onde $r > 0$ e $w \in \mathbb{R}^n$. Em particular, pela configuração que se apresenta, para o nosso x , que está em $B_{2r'}(\eta_{2r'}^i)$, vale

$$\text{dist} \left(x, \partial B_{2r'}(\eta_{2r'}^i) \right) = |x - \eta| = \delta_D(x).$$

Daí, a última desigualdade nos leva a

$$u(x) \geq \left(\tilde{C}_1 u(\eta_{2r'}^i) - \tilde{C}_2 K_{2r',f,\eta_{2r'}^i} \right) \frac{\delta_D(x)}{r'}.$$

Portanto,

$$u(\eta_{2r'}^i) \leq \frac{r'}{\tilde{C}_1} \frac{u(x)}{\delta_D(x)} + \frac{\tilde{C}_2}{\tilde{C}_1} K_{2r',f,\eta_{2r'}^i}. \quad (5.10)$$

Para finalizar, precisamos comparar os valores de u em $\xi_{r'}$ e em $\eta_{2r'}^i$. Considere, então, o segmento $[\xi_{r'}, \eta_{2r'}^i]$. A ideia é aplicar a Desigualdade de Harnack ao longo de uma cadeia de bolas que conecta os pontos nesse segmento. Vamos garantir que o segmento esteja suficientemente distante da fronteira, de modo que possamos assegurar a existência de uma cadeia cuja a quantidade de bolas seja controlada por uma constante universal.

Afirmção. Existem $\epsilon, \lambda \in \mathbb{R}$, constantes positivas, independentes de qualquer parâmetro específico, tais que

$$\text{dist} \left([\xi_r, \eta_{2r}^i], \partial D \right) \geq \epsilon r$$

para qualquer $r < \lambda R$.

Prova da Afirmção: A prova dessa afirmação segue uma sequência análoga àquela apresentada para provar a desigualdade (3.5), quando estávamos demonstrando que um domínio $C^{1,1}$ é uniforme. Por essa razão, vamos omitir a demonstração. As constantes podem ser tomadas $\epsilon = \lambda = 1/8$. (Essa foi a razão pela qual escolhemos $r < R/8$.) ■

Como

$$|\eta_{2r'}^i - \xi_{r'}| \leq |\eta_{2r'}^i - x| + |x - \xi_{r'}| < 4r',$$

podemos usar a afirmação acima, uma vez que $r' < R/8$, para garantir que existem m bolas, com raios proporcionais a r' , que cobrem $[\xi_{r'}, \eta_{2r'}^i]$, centradas em pontos de $[\xi_{r'}, \eta_{2r'}^i]$,

e cujas bolas de mesmo centro e raio dobrado ainda estejam contidas em $B_r(\xi) \cap D$. Tal m não depende de nenhum parâmetro específico.

Agora, em um processo semelhante ao método que obtivemos (5.5), podemos comparar o valor de u em quaisquer dois pontos do segmento $[\xi_{r'}, \eta_{2r'}^i]$ a menos de uma constante multiplicativa $\bar{C} \geq 1$, que depende apenas de da constante de Harnack. Em particular

$$u(\xi_{r'}) \leq \bar{C}(u(\eta_{2r'}^i) + K_{2r',f,\eta_{2r'}^i}).$$

Combinando a desigualdade acima com (5.10), obtemos

$$\begin{aligned} u(\xi_{r'}) &\leq \bar{C} \left(\frac{r'}{\tilde{C}_1} \frac{u(x)}{\delta_D(x)} + \frac{\tilde{C}_2}{\tilde{C}_1} K_{2r',f,\eta_{2r'}^i} + K_{2r',f,\eta_{2r'}^i} \right) \\ &= \bar{C} r' \left(\frac{1}{\tilde{C}_1} \frac{u(x)}{\delta_D(x)} + \left(1 + \frac{\tilde{C}_2}{\tilde{C}_1} \right) \frac{K_{2r',f,\eta_{2r'}^i}}{r'} \right) \\ &\leq C_2 r' \left(\frac{u(x)}{\delta_D(x)} + \frac{K_{2r',f,\eta_{2r'}^i}}{r'} \right), \end{aligned}$$

onde $C_2 := \max \left\{ \frac{\bar{C}}{\tilde{C}_1}, \bar{C} \left(1 + \frac{\tilde{C}_2}{\tilde{C}_1} \right) \right\} > 1$.

Assim, concluímos que

$$\frac{u(\xi_{r'})}{r'} \leq C_2 \left(\frac{u(x)}{\delta_D(x)} + \frac{K_{2r',f,\eta_{2r'}^i}}{r'} \right) \leq C_2 \left(\frac{u(x)}{\delta_D(x)} + \frac{K_{r,f,\xi}^+}{r'} \right).$$

Daí,

$$\frac{u(x)}{\delta_D(x)} \geq \frac{1}{r'} \left(\frac{u(\xi_{r'})}{C_2} - K_{r,f,\xi}^+ \right),$$

como queríamos. □

5.2.3 A Desigualdade de Harnack até a Fronteira

Teorema 5.5 (Desigualdade de Harnack até a Fronteira). *Seja D um domínio $C^{1,1}$ limitado. Existem constantes $A \geq 1$, $R_0 > 0$ tais que, para quaisquer $\xi \in \partial D$, e $0 < r < R_0$, se u é solução de (4.1) para $\Omega = D$ e $B = (B_r(\xi))$, então*

$$\frac{u(x)}{\delta_D(x)} \leq C \left(\frac{u(y)}{\delta_D(y)} + g^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \cdot \|f\|_{L^q(B_r(\xi) \cap D)} \right) \right), \quad \text{para quaisquer } x, y \in B_{r'}(\xi) \cap D,$$

onde $C = C(n, \delta, g_0, q, R)$, onde R é o da condição da bola, e $r' = r/A$.

Demonstração. Comece tomando $A := \max\{\tilde{A}, 6\}$ onde \tilde{A} e $R_0 := \min\{\tilde{R}, R/8\}$, onde \tilde{A} e \tilde{R} são A e R da Proposição 5.3, respectivamente. Se quisermos ser mais precisos, relembando como são as constantes da Proposição 5.3, podemos tomar $A := \max\{5A_0, 6\}$ e $R_0 := \min\{r_0, R/8\}$, onde A_0 e r_0 são as constantes da Estimativa de Carleson para domínios $C^{1,1}$. Denotemos por $\|f\|_q$ o valor $\|f\|_{L^q(B_r(\xi) \cap D)}$. Nesse contexto, teremos, para qualquer $r < R_0$ e $r' = r/A$,

$$\frac{u(x)}{\delta_D(x)} \leq C_1 \left(\frac{u(\xi_{r'})}{r'} + Ag^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \cdot \|f\|_q \right) \right) \quad \text{para todo } x \in B_{r'}(\xi) \cap D,$$

pela Proposição 5.3, e

$$\frac{u(\xi_{r'})}{r'} \leq C_2 \left(\frac{u(y)}{\delta_D(y)} + Ag^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \cdot \|f\|_q \right) \right) \quad \text{para todo } y \in B_{r'}(\xi) \cap D$$

pela Proposição 5.4.

Juntando ambas desigualdades, concluímos, para $x, y \in B_{r'}(\xi) \cap D$,

$$\begin{aligned} \frac{u(x)}{\delta_D(x)} &\leq C_1 \left(C_2 \left(\frac{u(y)}{\delta_D(y)} + Ag^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \cdot \|f\|_q \right) \right) + Ag^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \cdot \|f\|_q \right) \right) \\ &\leq 2C_1 C_2 A \left(\frac{u(y)}{\delta_D(y)} + g^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \cdot \|f\|_q \right) \right). \end{aligned}$$

Portanto, para $C := 2C_1 C_2 A$,

$$\frac{u(x)}{\delta_D(x)} \leq C \left(\frac{u(y)}{\delta_D(y)} + g^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \cdot \|f\|_{L^q(B_r(\xi) \cap D)} \right) \right).$$

□

É interessante observar que, uma vez provado o resultado acima, facilmente recuperamos a Estimativa de Carleson. Tomando $y := \xi_r$, com ξ_r definido como no Teorema 5.2, por continuidade, ainda valerá, para qualquer $x \in B_{r'}(\xi) \cap D$,

$$\frac{u(x)}{\delta_D(x)} \leq C \left(\frac{u(\xi_r)}{r'} + g^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \cdot \|f\|_q \right) \right).$$

Daí, como $\delta_D(x) \leq r'$,

$$u(x) \leq C \frac{\delta_D(x)}{r'} \left(u(\xi_r) + r' g^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \cdot \|f\|_q \right) \right) \leq C \left(u(\xi_r) + r g^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \cdot \|f\|_q \right) \right),$$

recuperando, assim, a Estimativa de Carleson.

Essa proximidade entre os dois resultados leva a crer que, de fato, ambos são equivalentes, sem a necessidade de hipóteses adicionais, e com domínios bem mais

gerais. Nesse sentido, em (Aikawa, 2008), o autor demonstra que, sim, são equivalentes, pelo menos no cenário de operador linear, com $f \equiv 0$ e com domínios uniformes. Sua demonstração, entretanto, não permite adaptação para operadores não lineares.

Finalmente, quando $f \equiv 0$, recuperamos a Desigualdade de Harnack de fronteira em sua forma padrão, discutida no início do capítulo.

Teorema 5.6. *Seja D um domínio $C^{1,1}$ limitado. Existem constantes $A \geq 1$, $R_0 > 0$ tais que, para quaisquer $\xi \in \partial D$, e $0 < r < R_0$, se u, v satisfazem (4.1) para $\Omega = D$, $B = (B_r(\xi))$ e $f \equiv 0$, então para quaisquer $x, y \in B_{r'}(\xi) \cap D$,*

$$\tilde{C}^{-1} \frac{u(y)}{v(y)} \leq \frac{u(x)}{v(x)} \leq \tilde{C} \frac{u(y)}{v(y)},$$

onde $\tilde{C} = \tilde{C}(n, \delta, g_0, q, R)$, onde R é o da condição da bola, e $r' = r/A$.

Demonstração. Temos, para quaisquer $x, y \in B_{r'}(\xi) \cap D$,

$$\frac{u(x)}{\delta_D(x)} \leq C \frac{u(y)}{\delta_D(y)} \quad \text{e} \quad \frac{v(y)}{\delta_D(y)} \leq C \frac{v(x)}{\delta_D(x)}$$

daí,

$$\frac{u(x)}{u(y)} \leq C \frac{\delta_D(x)}{\delta_D(y)} \leq C^2 \frac{v(x)}{v(y)}.$$

Portanto, para $\tilde{C} := C^2$,

$$\frac{u(x)}{v(x)} \leq \tilde{C} \frac{u(y)}{v(y)}.$$

Trocando x com y , concluímos a outra desigualdade, provando o desejado. □

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, estabelecemos a Estimativa de Carleson em domínios do tipo NTA para soluções não homogêneas do operador g -Laplaciano, considerando um termo do lado direito com regularidade L^q , para $q > n$. A partir desse resultado central, obtivemos duas aplicações significativas: uma estimativa de crescimento exponencial em cilindros ilimitados com base NTA e a Desigualdade de Harnack de fronteira em um domínio do tipo $C^{1,1}$.

Começamos com uma revisão dos principais resultados referentes ao operador g -Laplaciano. Em seguida, apresentamos uma análise detalhada dos tipos de domínios considerados — uniformes, NTA e $C^{1,1}$ — destacando propriedades relevantes para o desenvolvimento dos resultados. Nessa etapa, demonstramos ou referenciamos resultados clássicos e folclóricos da literatura, oferecendo uma contribuição adicional ao tratamento desses domínios.

A prova da Estimativa de Carleson foi inspirada nas ideias de Caffarelli e baseou-se em dois ingredientes fundamentais: um refinamento da Desigualdade de Harnack em domínios uniformes e um resultado do tipo Lema da Oscilação, de De Giorgi. Para o primeiro, observamos que a estrutura do operador tem papel secundário, desde que este satisfaça a Desigualdade de Harnack clássica. Aqui, as propriedades geométricas do domínio uniforme desempenham um papel central na argumentação. Já para o segundo ingrediente, a natureza do operador torna-se essencial, enquanto as exigências sobre o domínio restringem-se a alguma noção de densidade do complementar próximo à fronteira — no nosso caso, a condição de corkscrew exterior. A combinação dessas ferramentas permitiu a demonstração completa da Estimativa de Carleson.

Em relação às aplicações, utilizamos a Estimativa de Carleson em subconjuntos limitados do cilindro para obter uma estimativa de crescimento que é controlada por uma função exponencial da variável não limitada. Essa estimativa depende também do valor da solução em um ponto fixado e da norma de f . Para a Desigualdade de Harnack de fronteira, assumimos maior regularidade do domínio, passando a $C^{1,1}$, para garantir a existência de barreiras adequadas, possibilitando a demonstração dos principais ingredientes: o Princípio de Hopf e uma estimativa superior apropriada que decorre da Estimativa de Carleson.

Com a obtenção dos resultados propostos, concluímos que este trabalho oferece ferramentas e ideias que podem ser úteis em diversos contextos, como em problemas de

fronteira livre, teoria do potencial e áreas correlatas da análise não linear e das equações diferenciais parciais.

REFERÊNCIAS

- ADAMOWICZ, T.; LUNDSTRÖM, N. L. The boundary Harnack inequality for variable exponent p -Laplacian, Carleson estimates, barrier functions and $p(\cdot)$ -harmonic measures. **Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)**, Germany, v. 195, n. 2, p. 623–658, 2016.
- AIKAWA, H. Boundary Harnack principle and Martin boundary for a uniform domain. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, Tokyo, v. 53, n. 1, p. 119–145, 2001.
- AIKAWA, H. Equivalence between the boundary Harnack principle and the Carleson estimate. **Mathematica Scandinavica**, Denmark, v. 103, n. 1, p. 61–76, 2008.
- AIKAWA, H. Boundary Harnack principle and the quasihyperbolic boundary condition. In: MAZ'YA, V.; SHAPOSHNIKOVA, T. (org.). **Sobolev spaces in mathematics II: applications in analysis and partial differential equations**. Dordrecht: Springer, 2009. p. 19–30.
- AIKAWA, H.; KILPELÄINEN, T.; SHANMUGALINGAM, N.; ZHONG, X. Boundary Harnack principle for p -harmonic functions in smooth Euclidean domains. **Potential Analysis**, Netherlands, v. 26, n. 3, p. 281–301, 2007.
- AIKAWA, H.; SHANMUGALINGAM, N. Carleson type estimates for p -harmonic functions and the conformal Martin boundary of John domains in metric measure spaces. **Michigan Mathematical Journal**, Ann Arbor, v. 53, n. 1, p. 165–188, 2005.
- ANCONA, A. Principe de Harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine lipschitzien. **Annales de l'Institut Fourier**, Grenoble, v. 28, n. 4, p. 169–213, 1978.
- AZZAM, J.; HOFMANN, S.; MARTELL, J. M.; NYSTRÖM, K.; TORO, T. A new characterization of chord-arc domains. **Journal of the European Mathematical Society**, Berlin, v. 19, n. 4, p. 967–981, 2017.
- BAÑUELOS, R.; BASS, R. F.; BURDZY, K. Hölder domains and the boundary Harnack principle. **Duke Mathematical Journal**, Durham, v. 64, n. 1, p. 195–200, 1991.
- BASS, R. F.; BURDZY, K. A boundary Harnack principle in twisted Holder domains. **Annals of Mathematics**, Princeton, v. 134, n. 2, p. 253–276, 1991.
- BERESTYCKI, H.; CAFFARELLI, L. A.; NIRENBERG, L. Inequalities for second-order elliptic equations with applications to unbounded domains I. **Duke Mathematical Journal**, Durham, v. 81, n. 2, p. 467–494, 1996.
- BJÖRN, A.; BJÖRN, J.; SHANMUGALINGAM, N. Bounded geometry and p -harmonic functions under uniformization and hyperbolization. **The Journal of Geometric Analysis**, New York, v. 31, n. 5, p. 5259–5308, 2021.
- BONK, M.; HEINONEN, J.; KOSKELA, P. Uniformizing Gromov hyperbolic spaces. **Astérisque**, Paris, v. 270, p. 1–99, 2001.
- BRAGA, J. E. M. A new proof of the Phragmén–Lindelöf Theorem for fully nonlinear equations. **Milan Journal of Mathematics**, Basel, v. 85, n. 2, p. 247–256, 2017.

BRAGA, J. E. M.; MOREIRA, D. R. Inhomogeneous Hopf–Oleĭnik Lemma and regularity of semiconvex supersolutions via new barriers for the Pucci extremal operators. **Advances in Mathematics**, Belgium, v. 334, p. 184–242, 2018.

BRAGA, J. E. M.; MOREIRA, D. R. Classification of nonnegative g -harmonic functions in half-spaces. **Potential Analysis**, Netherlands, v. 55, p. 369–387, 2021.

BRAGA, J. E. M.; MOREIRA, D. R. Up to the boundary gradient estimates for viscosity solutions to nonlinear free boundary problems with unbounded measurable ingredients. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, Germany, v. 61, n. 5, p. 197, 2022.

BRAGA, J. E. M.; MOREIRA, D. R.; SOUSA, J. W. V. An inhomogeneous version of the Carleson estimate for singular/degenerate nonlinear equations. **Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)**, Germany, v. 202, n. 5, p. 2293–2311, 2023.

CAFFARELLI, L.; FABES, E.; MORTOLA, S.; SALSA, S. Boundary behavior of nonnegative solutions of elliptic operators in divergence form. **Indiana University Mathematics Journal**, Bloomington, v. 30, n. 4, p. 621–640, 1981.

CAPOGNA, L.; TANG, P. Uniform domains and quasiconformal mappings on the Heisenberg group. **Manuscripta Mathematica**, Germany, v. 86, p. 267–281, 1995.

CARLESON, L. On the existence of boundary values for harmonic functions in several variables. **Arkiv för Matematik**, Sweden, v. 4, n. 5, p. 393–399, 1962.

DAHLBERG, B. E. Estimates of harmonic measure. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Berlin, v. 65, n. 3, p. 275–288, 1977.

GEHRING, F. W.; OSGOOD, B. G. Uniform domains and the quasi-hyperbolic metric. **Journal d'Analyse Mathématique**, Jerusalem, v. 36, n. 1, p. 50–74, 1979.

HOLOPAINEN, I.; SHANMUGALINGAM, N.; TYSON, J. On the conformal Martin boundary of domains in metric spaces. *In*: HEINONEN, J.; KILPELÄINEN, T.; KOSKELA, P. (org.). **Papers on analysis**: a volume dedicated to Olli Martio on the occasion of his 60th birthday. Jyväskylä: University of Jyväskylä, 2001. (Report. University of Jyväskylä. Department of Mathematics and Statistics, v. 83). p. 147–168.

JERISON, D. S.; KENIG, C. E. Boundary behavior of harmonic functions in non-tangentially accessible domains. **Advances in Mathematics**, Belgium, v. 46, n. 1, p. 80–147, 1982.

JOHN, F. Rotation and strain. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, New York, v. 14, n. 3, p. 391–413, 1961.

JONES, P. W. Extension theorems for BMO. **Indiana University Mathematics Journal**, Bloomington, v. 29, n. 1, p. 41–66, 1980.

JONES, P. W. Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces. **Acta Mathematica**, Stockholm, v. 147, p. 71–88, 1981.

KEMPER, J. T. A boundary Harnack principle for Lipschitz domains and the principle of positive singularities. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, New York, v. 25, n. 3, p. 247–255, 1972.

KRASNOSEL'SKII, M. A.; RUTICKII, Y. B. **Convex functions and Orlicz spaces**. Groningen: Noordhoff, 1961.

LEWICKA, M.; PERES, Y. Which domains have two-sided supporting unit spheres at every boundary point? **Expositiones Mathematicae**, Germany, v. 38, n. 4, p. 548–558, 2020.

LEWIS, J. L.; NYSTRÖM, K. Boundary behaviour for p harmonic functions in Lipschitz and starlike Lipschitz ring domains. **Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure**, Paris, v. 40, n. 5, p. 765–813, 2007.

LIEBERMAN, G. M. The natural generalization of the natural conditions of Ladyzhenskaya and Ural'tseva for elliptic equations. **Communications in Partial Differential Equations**, Philadelphia, v. 16, n. 2-3, p. 311–361, 1991.

MARTIO, O. Definitions for uniform domains. **Annales Fennici Mathematici**, Finland, v. 5, n. 1, p. 197–205, 1980.

MARTIO, O.; SARVAS, J. Injectivity theorems in plane and space. **Annales Fennici Mathematici**, Finland, v. 4, n. 2, p. 383–401, 1979.

MARTÍNEZ, S.; WOLANSKI, N. A minimum problem with free boundary in Orlicz spaces. **Advances in Mathematics**, Belgium, v. 218, n. 6, p. 1914–1971, 2008.

MONTI, R.; MORBIDELLI, D. Regular domains in homogeneous groups. **Transactions of the American Mathematical Society**, Providence, v. 357, n. 8, p. 2975–3011, 2005.

OLIVEIRA, J. E. L. **Teoria de fronteira livre para equações não lineares singulares/degeneradas não homogêneas: uma abordagem não variacional**. 2022. 121 f. Tese (Doutorado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2022.

RIBEIRO, B. H. C. **Espaços de Orlicz e uma aplicação a sistemas hamiltonianos**. 2006. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2006.

SOUSA, J. W. V. **Princípio de Harnack de fronteira para o operador p -Laplaciano**. 2020. 71 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2020.

VÄISÄLÄ, J. Uniform domains. **Tohoku Mathematical Journal, Second Series**, Sendai, v. 40, n. 1, p. 101–118, 1988.

WU, J.-M. G. Comparisons of kernel functions boundary Harnack principle and relative Fatou theorem on Lipschitz domains. **Annales de l'Institut Fourier**, Grenoble, v. 28, n. 4, p. 147–167, 1978.