



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL**

**FELIPE SOARES ALMEIDA**

**ANÁLISE DA DEFORMAÇÃO LENTA EM VIGAS DE CONCRETO PROTENDIDO**

**FORTALEZA**

**2022**

FELIPE SOARES ALMEIDA

ANÁLISE DA DEFORMAÇÃO LENTA EM VIGAS DE CONCRETO PROTENDIDO

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Civil.

Área de concentração: Engenharia Civil

Orientador: Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Junior

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

A446a Almeida, Felipe Soares.

Análise da Deformação Lenta em Vigas de Concreto Protendido / Felipe Soares Almeida. – 2022.  
48 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia,  
Curso de Engenharia Civil, Fortaleza, 2022.

Orientação: Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Junior.

1. Protensão. 2. Vigas protendidas. 3. Deformação. 4. Flecha diferida. 5. Pós-tensão. I. Título.  
CDD 620

---

FELIPE SOARES ALMEIDA

ANÁLISE DA DEFORMAÇÃO LENTA EM VIGAS DE CONCRETO PROTENDIDO

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Civil.

Aprovada em: 14 / 02 / 2022.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Junior (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Augusto Teixeira de Albuquerque  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Evandro Parente Junior  
Universidade Federal do Ceará

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente aos meus pais, Francisco e Maria de Lurdes, e ao meu irmão, Dymas, pelo apoio que me deram nos fracassos, sucessos, noites mal dormidas e preocupações. Sem eles não estaria aqui.

Agradeço a todos os professores que, de alguma forma fizeram parte da minha formação como Engenheiro Civil, com todos os ensinamentos que me foram passados no decorrer do curso.

Agradeço a todos os meus colegas de curso, que tornaram dias difíceis mais toleráveis e épocas complicadas significativamente mais leves, ajudando sempre que pudessem e no pouco tempo disponível, mesmo em véspera de provas e trabalhos.

Agradeço ao Professor João Batista, por aceitar ser meu orientador e ter me ajudado nesse trabalho, além de tirar minhas dúvidas e me guiado por esse ramo.

Agradeço ao Leonardo Cunha, que me deu todo o apoio nas modelagens e análises. Sem ele esse trabalho não seria possível.

Agradeço também aos meus companheiros de curso e espero que da vida toda Mariana, Yuri, Larissa, Gabriel, Everton, Igor, Tereza, entre outros. Não vão se livrar de mim tão cedo.

E, finalmente, agradeço à Universidade Federal do Ceará como um todo, pelo meu engrandecimento convivendo com sua diversidade em todos os âmbitos, suas oportunidades, seus contrastes, suas controvérsias, mas, acima de tudo, por ter me ensinado a correr atrás de tudo o que eu quero e nunca esperar nada de braços cruzados.

A todos esses, meu sincero muito obrigado.

“O dia em que nada aprendi, foi um dia não  
vivido.”

(Leonardo da Vinci)

## RESUMO

O trabalho consiste na análise da deformação lenta de vigas protendidas pós-tensionadas a fim de contrastar os valores de deformação imediata e deformação lenta e verificando o coeficiente sugerido pela norma brasileira, NBR 6118:2014, para simulação desses efeitos de longa duração. Além disso, esse trabalho analisa o efeito da retração na deformação progressiva nessas vigas de concreto protendido. Vista a complexidade da obtenção de métodos precisos e confiáveis de avaliação da deformação do concreto em função do tempo e o uso de coeficientes empíricos para estimar a flecha diferida com o tempo baseado na flecha imediata de vigas de concreto armado e protendido, esse trabalho visa analisar os deslocamentos de uma viga protendida pós-tensionada, a fim de comparar os deslocamentos reais com os estimados, avaliando o coeficiente de 2,5, muito utilizado por projetistas de estruturas de concreto e softwares de cálculo estrutural no Brasil para multiplicar a flecha imediata com o objetivo de obter uma aproximação para a flecha diferida no tempo. Partindo de um modelo de viga protendida hiperestática proposto por Chen (2008), e de uma viga isostática cedida pelo escritório de cálculo estrutural Hepta Engenharia, realizou-se a modelagem a partir de um programa desenvolvido no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV), do Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil (DDECC) da Universidade Federal do Ceará e realizou-se a análise comparativa de deslocamentos verticais imediatos e totais em ambas as vigas, comparando os valores obtidos com o coeficiente.

**Palavras-chave:** Protensão. Vigas protendidas. Deformação. Flecha Diferida. Pós-Tensão.

## ABSTRACT

This work consists on a analysis of time dependent strain on prestressed beans using the software MATLAB in order to compare the values of short and long term strain, verifying the coefficient that is suggested by brazilian code, ABNT NBR 6118:2014, to simulate those time-dependent behaviours. Also, this work made a analysis on the effect of shrinkage on long term strain in some of those prestressed beans. Looking foward to the complexity in obtaining precise and trustable methods for evaluate the time dependent strain, allied to the low priority that is still given by some of the structural engineers on precise undestanding of creep and shrinkage strain on time dependent behaviour of prestressed beans and the use of empirical coefficients to estimate the long term deformation of those beans, this paper compares the short and long term strain using the coefficient of 2,5 that structural engineers and softwares of structural analysis uses on Brazil to simulate the time dependent strain multiplying the immediate strain. Starting on a initial model of prestressed beam suggested by Chen (2008) of a hiperestatic bean, and a model of an isostatic been given by Hepta Engenharia, an structural engineering office, both models was made using the software developed by Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV), on the Structural Department of Federal University of Ceará (UFC), the beams were analised in order to obtain immediate and long term displacements and compare them with the coefficient.

**Keywords:** Prestressed beans. Strain. Time dependent. Shinkage.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Ponte do Galeão, a primeira ponte em concreto protendido do Brasil e da América Latina .....	16
Figura 2 - Protensão com aderência inicial .....	16
Figura 3 - Protensão com aderência posterior .....	17
Figura 4 - Protensão sem aderência .....	18
Figura 5 - Deformações: recuperável e permanente .....	222
Figura 6 - Gráfico Deformação x tempo .....	233
Figuras 7a e 7b - Componentes da retração em um concreto normal (a) e em um concreto de alta resistência (b) .....	<b>Erro! Indicador não definido.</b> 6
Figura 8 – Parcelas de deformação de uma peça de concreto não fissurada .....	27
Figura 9 – Representação de elemento de viga com 6 graus de liberdade .....	33
Figura 10 – Representação de elemento de viga com 7 graus de liberdade .....	34
Figura 11 – Detalhe da vigas de Chen (2008) utilizadas .....	39
Figura 12 – Gráfico deformação <i>versus</i> tempo na viga YLA 2 .....	40
Figura 13 – Gráfico deformação <i>versus</i> tempo na viga YLB2 .....	40
Figura 14 – Gráfico deformação <i>versus</i> tempo na viga YLC1.....	41
Figura 15 – Armação passiva da viga V106 (QS05) .....	42
Figura 16 – Traçado dos cabos da Viga V106 (QS05) .....	43
Figura 17 – Diagramas de momento fletor e esforço cortante da Viga V106 (QS05) .....	43
Figura 18 – Gráfico deformação <i>versus</i> tempo na viga HEPTA QS05 V106 .....	44

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 - Limites para deslocamentos .....	299
Tabela 2 - Valores característicos superiores da deformação específica de retração $\epsilon_{cs}$ ( $t_\infty$ , $t_0$ ) e do coeficiente de fluência $\phi$ ( $t_\infty$ , $t_0$ ) .....	31
Tabela 3 - Parâmetros de aço passivo e do concreto de vigas, ensaiadas por Chen (2008).....	38
Tabela 4 – Deformação de vigas protendidas de Chen (2008) com diferentes idades.....	41
Tabela 5 – Comparação deformação imediata x deformação lenta com o coeficiente 2,5 para vigas de Chen (2008) .....	41
Tabela 6 – Deformação de viga protendida HEPTA QS05 V106 com diferentes idades.....	44
Tabela 7 – Comparação deformação imediata x deformação lenta com o coeficiente 2,5 para viga HEPTA QS05 V106 .....	45

## **LISTA DE QUADROS**

Quadro 1 - Valores de  $\psi_{60}$ ,  $\psi_{70}$  e  $\psi_{80}$  (para 1000 horas, à 20°C) ..... 288

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

ABNT Associação Brasileira de Normas Técnicas

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
<b>1.1 Justificativa .....</b>	<b>13</b>
<b>1.2 Objetivos .....</b>	<b>14</b>
1.2.1 Objetivos gerais .....	14
1.2.2 Objetivos específicos .....	14
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>15</b>
<b>2.1 Protensão .....</b>	<b>15</b>
<b>2.2 Sistemas de Protensão .....</b>	<b>16</b>
<b>2.3 Deformação de peças em concreto protendido .....</b>	<b>18</b>
<b>2.4 Fluênciа .....</b>	<b>19</b>
<b>2.5 Retração .....</b>	<b>23</b>
<b>2.6 Relaxação do aço .....</b>	<b>27</b>
<b>2.7 Limites Normativos – ABNT NBR 6118:2014 .....</b>	<b>28</b>
<b>2.8 Análises laboratoriais, estatísticas e computacionais ....</b>	<b>Erro! Indicador não definido.</b>
<b>3 ANÁLISE DE VIGA PROTENDIDA .....</b>	<b>31</b>
<b>3.1 Método dos elementos finitos .....</b>	<b>31</b>
3.1.1 Formulação do MEF .....	31
3.1.2 Utilização em Estruturas .....	32
<b>3.2 Análise Numérica .....</b>	<b>35</b>
3.2.1 Linearidade e não-linearidade física e geométrica .....	35
3.2.2 Método do controle de deslocamentos .....	<b>Erro! Indicador não definido.</b>
<b>3.3 Leis Constitutivas .....</b>	<b>Erro! Indicador não definido.</b>
3.3.1 Concreto .....	<b>Erro! Indicador não definido.</b>
3.3.2 Armadura passiva .....	<b>Erro! Indicador não definido.</b>
3.3.3 Armadura ativa .....	<b>Erro! Indicador não definido.</b>
<b>3.4 Tipo da Pesquisa .....</b>	<b>Erro! Indicador não definido.</b>
<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÃO .....</b>	<b>37</b>
<b>4.1 Análise de deformações imediatas x progressivas .....</b>	<b>37</b>
<b>5 CONCLUSÃO .....</b>	<b>46</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>47</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O concreto é o material mais utilizado na construção civil. Seu desempenho à compressão é excelente e seu comportamento monolítico com a adição do aço, onde popularmente passa a ser conhecido como concreto armado, é capaz de resistir a esforços de tração e cisalhamento. Estas características tornam este insumo um dos mais importantes elementos que auxiliaram a verticalização urbanística atual, possibilitando ao homem ocupar espaços em épocas anteriores impossíveis.

No concreto protendido, fios ou cordoalhas são pré ou pós-tracionados dentro da peça de concreto, introduzindo tensões prévias de compressão, combatendo os esforços de tração gerados pela flexão. Assim, comprimindo partes que seriam previamente tracionadas, o concreto passa a não mais fissurar devido à tração – esforço ao qual o concreto possui apenas 10% da resistência que possui na compressão, reduzindo as deformações sofridas pela peça devido à flexão.

Atualmente, as vigas protendidas são amplamente utilizadas para vencer grandes vãos, como em salões de festas, teatros, cinemas, shoppings e pontes, além de serem, muitas vezes, aliadas a lajes nervuradas para que a altura de viga em grandes vãos possa atender à arquitetura em edifícios e casas de alto padrão. Vãos esses que, no concreto armado, necessitariam de uma maior altura e consumo de concreto, além de apresentar fissurações e deformações bem maiores que no concreto protendido.

Apesar disso, alguns dilemas do concreto protendido ainda não foram satisfatoriamente resolvidos, como é o caso da deformação lenta – uma herança do concreto armado, ao menos na norma brasileira vigente ABNT NBR 6118:2014. Enquanto essa análise no concreto armado conta com majoritariamente fluência e retração, além da fissuração intrínseca dos domínios após o Domínio I, no protendido, esta análise conta com seções menos fissuradas (ou não fissuradas), além de adicionar os efeitos da perda progressiva de protensão à fluência e retração como influências nesta deformação.

Assim, é essencial o estudo da deformação lenta e de seus atuais parâmetros de quantificação utilizados nos projetos estruturais, além dos parâmetros utilizados na norma brasileira ABNT NBR 6118:2014.

### 1.1 Justificativa

Fornecer dados comparativos de deformação imediata e lenta do concreto protendido através da análise numérica computacional de quatro vigas de concreto prontendido pós-tração, a fim de auxiliar um melhor entendimento do fenômeno por parte de engenheiros de estruturas e de gerar discussão acerca do coeficiente de 2,5 atualmente adotado para simular a deformação total de vigas.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivos gerais

Comparar a deformação lenta com a deformação imediata de vigas de concreto protendido (pós-tensão), com a finalidade de avaliar coeficiente comumente utilizado por engenheiros projetista de estruturas de concreto para simular a deformação lenta através da imediata.

### 1.2.2 Objetivos específicos

- Gerar discussão acerca do uso de coeficientes para simplificar fenômenos que possuem influência de diversas variáveis.
- Analisar a deformação de uma viga de um projeto estrutural real.
- Introduzir os conceitos de elementos finitos através do uso do elemento de pórtico plano de 7 graus de liberdade.
- Comparar valores de deformação obtidos na análise da deformação total das vigas de Chen (2008) com dados obtidos por Lou (2013).

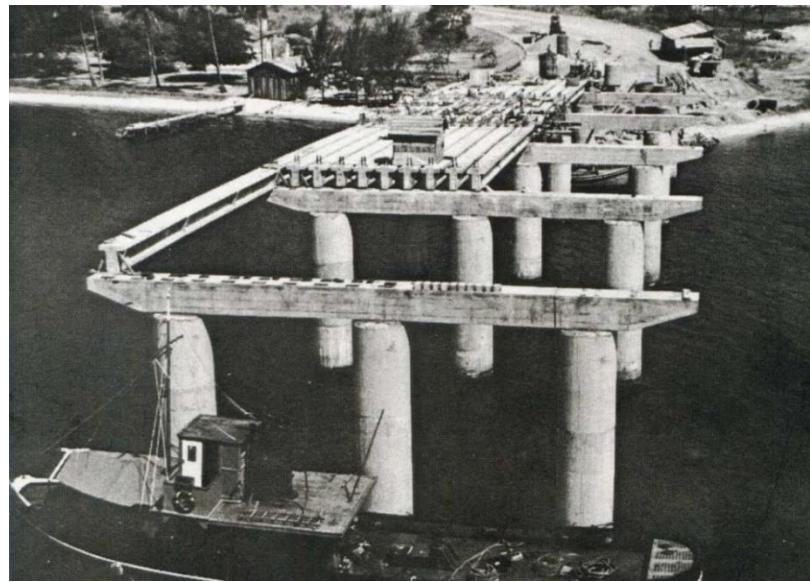
## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Protensão

O concreto possui uma ótima resistência à compressão, sendo uma das características principais que justificam seu emprego em grandes edifícios, onde há grandes cargas verticais que descarregam em pilares e fundações de concreto armado. Porém, sua resistência à tração é de aproximadamente 10% da resistência à compressão, o que torna esse material inapropriado para utilização bruta em elementos onde esse esforço seja relevante. Para que esse problema pudesse ser resolvido, utilizando-se também das propriedades mecânicas do concreto, o aço – que possui ótima resistência à esforços de tração - foi adicionado às estruturas, de tal modo que ambos resistam solidariamente aos esforços solicitantes, facilitando o uso desse sistema em estruturas fletidas, submetidas a compressão e tração na mesma peça (MASCARENHAS; CARVALHO, 2019).

Porém, algumas estruturas necessitam de vãos maiores, como é o caso de pontes, onde construir pilares e fundações pode ser bastante oneroso. Estruturas fletidas em concreto armado possuem dificuldades em vencer grandes vãos devido as suas deformações, facilitando a ocorrência de fissuras e podendo diminuir drasticamente sua durabilidade. Além disso, a altura necessária de vigas e espessura de lajes é bastante relevante nessas situações, onerando o processo. Para resolver esse problema, passou-se a utilizar um concreto pré-esforçado, que consiste em estirar a armadura contra o próprio concreto, a fim de obter uma pré-compressão na zona que seria posteriormente tracionada na peça de concreto. Esse procedimento, conhecido atualmente como protensão, forneceu tecnologia para construção de pontes e demais estruturas com grandes vãos, sendo essas mais esbeltas, econômicas e dando maior flexibilidade à concepção desses projetos (BUCHAIM, 2007).

Figura 1 - Ponte do Galeão, a primeira ponte em concreto protendido do Brasil e da América Latina.



Fonte: Ponte do Galeão RJ – S.T.U.P. – 1949 - Ensaios de Vigas Protendidas com Cabos de Protensão sem Aderência.

## 2.2 Sistemas de Protensão

Há três tipos mais usuais de protensão, que variam em como obter esse pré-tensionamento da peça. A protensão com aderência inicial é obtida geralmente em pistas de protensão, na fabricação de peças pré-moldadas. A peça é concretada, envolvendo uma armadura previamente tracionada, que se encontra ancorada a dispositivos externos. Após o endurecimento do concreto, a ligação da armadura com os contrafortes é cortada, fazendo com que a força de protensão seja transmitida à peça exclusivamente pela aderência, que nesse momento deve estar suficientemente desenvolvida (HANAI, 2005; BUCHAIM, 2007).

Figura 2 - Protensão com aderência inicial.



Fonte: WCH - <http://www.weiler.com.br/>.

Já a protensão com aderência posterior é realizada após o endurecimento da peça de concreto. São alocadas bainhas metálicas e corrugadas, onde são inseridos os cabos, antes ou depois da concretagem, e, ao concreto atingir a resistência de projeto, macacos hidráulicos são apoiados na própria peça de concreto, estirando a armadura até o alongamento previsto em projeto. No término da protensão, os cabos são incorporados em dispositivos de ancoragem e se insere nata de cimento para expulsar o ar entre bainha e cabo, além de promover a aderência entre esses. Como a bainha já se encontra adherida ao concreto, se garante a aderência da protensão (BUCHAIM, 2007). É utilizada ainda em pontes, onde as cargas são bastante elevadas, necessitando de um grau de resistência muito elevado dos cabos, além de um grande número desses, o que é facilitado nesse sistema de protensão.

Figura 3 - Protensão com aderência posterior.



Fonte: Impacto - <https://impactoprotensao.com.br/>

A protensão sem aderência é semelhante à protensão com aderência posterior, porém elimina a etapa de preenchimento da bainha com nata de cimento, gerando um sistema que não possui aderência entre cabo protendido e concreto. O cabo disposto dentro da bainha com essa metodologia de protensão é protegido contra corrosão e tem atrito reduzido com a bainha. Essa solução, atualmente, é amplamente utilizada no Brasil devido aos baixos custos, com cabos leves e bainhas de plástico, e a facilidade da protensão e da ancoragem, possibilitando os benefícios da protensão em lajes mais esbeltas e vãos maiores. É comumente aplicada a vãos longos de edifícios, onde as cargas em vigas não são tão elevadas quanto em pontes ou viadutos. Possui também desvantagens, como em caso de ruptura local de um cabo, onde seria perdida a protensão em toda sua extensão, e no caso do colapso da laje a armadura não aderente, que pode não entrar em escoamento (BUCHAIM, 2007).

Figura 4 - Protensão não-aderente.



Fonte: Impacto - <https://impactoprotensao.com.br/>

### **2.3 Deformação de peças em concreto protendido**

Na deformação, o concreto protendido, assim como o concreto armado, apresenta um comportamento muito complexo, envolvendo fenômenos como elasticidade, plasticidade, fissuração, deformação dependente do tempo, perdas de protensão e efeitos de interação aço-concreto. Sendo assim, quando uma carga é aplicada a uma peça de concreto, provoca deformação, podendo esta ser separada na deformação logo após a aplicação da carga – chamada de deformação imediata – e na deformação durante todo o tempo de vida útil da peça – chamada de deformação lenta. Esta deformação dependente do tempo pode ser bem maior que a deformação inicial da peça (GILBERT; RANZI, 2011).

Entender o grau de deformação de peças estruturais e da estrutura global é fundamental a um projetista de estruturas, podendo prever e prevenir aparecimento de fissuras, efeitos estéticos, fissurações em alvenarias, revestimentos e outros elementos não estruturais ocasionados por deformação de elementos estruturais; e até mesmo rompimento da peça.

Na deformação imediata, que ocorre logo após a cura do concreto, é possível verificar o problema em estágios iniciais, antes de concluir etapas como alvenaria de vedação e revestimentos, o que, embora possa gerar custos altos, evita manutenções em outras etapas de uma obra.

Já na deformação lenta, que ocorre incrementalmente com o acréscimo do tempo e pode ser bem maior que a deformação imediata, ocorre uma curvatura que pode, caso não seja prevista, levar a danos estruturais que se agravam com o tempo, gerando elevados custos de

manutenção. Assim, é essencial que as deformações imediatas e lentas de peças de concreto sejam conhecidas e previstas, para que não haja prejuízos à segurança da estrutura, sua durabilidade e sua economia.

## 2.4 Fluênciа

A fluênciа é a deformação lenta de materiais quando esses estão sujeitos a cargas permanentes, sendo bastante relevante para a quantificação de deformações progressivas em peças de concreto. Este parâmetro varia com o tempo, de forma a compreender a aproximadamente 50% do deslocamento total por fluênciа nos primeiros dois ou três meses, e 90% após dois ou três anos (GILBERT; RANZI, 2011). É dependente de vários fatores, como a intensidade e a duração da carga solicitante no concreto e a idade do concreto, com acréscimo de fluênciа diretamente proporcional a essas variáveis. A mistura do concreto também pode ocasionar que o concreto flua mais, já que, por exemplo, uma granulometria maior dos agregados, assim como um baixo fator água/cimento do concreto em geral aumentam sua intensidade. Outro fator que atua na fluênciа do concreto é seu  $f_{ck}$ : concretos com resistências superiores à compressão tendem a sofrer mais com a fluênciа do que concretos com resistências intermediárias. E, finalmente, fatores ambientais, como uma baixa umidade relativa, também aumentam os efeitos de fluênciа em peças de concreto (GILBERT; RANZI, 2011).

A relação tensão-deformação imediata do concreto pode ser escrita como:

$$\varepsilon_e(t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)}$$

Onde  $\sigma_c(t_0)$  é a tensão solicitante no concreto e  $E_{cs}(t_0)$  é o módulo de elasticidade secante do concreto no tempo  $t_0$ . Sob tensões duradouras, a deformação do concreto aumenta com o tempo, e a deformação total pode ser caracterizada como:

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{cs}(t_0)} [1 + \varphi(t, t_0)]$$

Onde  $\varphi(t, t_0)$  é um coeficiente adimensional que varia em função do tempo  $t_0$  e da idade do concreto  $t$ . Este coeficiente mensura a intensidade da fluênciа no concreto.

Diversas normas desenvolvem as expressões do coeficiente de fluência do concreto em função do tempo. Neste trabalho, será usada a expressão recomendada do CEB-FIP (2010), onde:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_{bc}(t, t_0) + \varphi_{dc}(t, t_0)$$

Onde:

$\varphi_{bc}(t, t_0)$  é o coeficiente de fluência básico

$\varphi_{dc}(t, t_0)$  é o coeficiente de fluência de secagem

O coeficiente de fluência básico é estimado por:

$$\varphi_{bc}(t, t_0) = \beta_{bc}(f_{cm}) \cdot \beta_{bc}(t, t_0)$$

com

$$\begin{aligned} \beta_{bc}(f_{cm}) &= \frac{1,8}{(f_{cm})^{0,7}} \\ \beta_{bc}(t, t_0) &= \ln \left[ \left( \frac{30}{t_{0,adj}} + 0,035 \right)^2 (t - t_0) + 1 \right] \\ f_{cm} &= f_{ck} + 8 \end{aligned}$$

O coeficiente de fluência de secagem é determinado por:

$$\varphi_{dc}(t, t_0) = \beta_{dc}(f_{cm}) \cdot \beta_{dc}(RH) \cdot \beta_{dc}(t_0) \cdot \beta_{dc}(t, t_0)$$

com

$$\beta_{dc}(f_{cm}) = \frac{412}{(f_{cm})^{1,4}}$$

$$\beta_{dc}(RH) = \frac{1 - \frac{RH}{100}}{\sqrt[3]{\frac{0,1h}{100}}}$$

$$\beta_{dc}(t_0) = \frac{1}{0,1 + t_{0,adj}^{-0,2}}$$

$$\beta_{dc}(t, t_0) = [\frac{t - t_0}{\beta_h + (t - t_0)}]^{\gamma(t_0)}$$

Sendo:

$$\gamma(t_0) = \frac{1}{2,3 + \frac{3,5}{\sqrt{t_{0,adj}}}}$$

$$\beta_h = 1,5 \cdot h + 250 \cdot \alpha_{fcm} \leq 1500 \cdot \alpha_{fcm}$$

$$\alpha_{fcm} = (\frac{35}{f_{cm}})^{0,5}$$

$$t_{0,adj} = t_{0,r} \cdot [\frac{9}{2 + t_{0,r}^{-1,2}} + 1]^\alpha \geq 0,5 \text{ dias}$$

Onde:

$t_{0,adj}$  é a idade ajustada da data de carregamento;

$t_{0,r}$  é a idade do concreto na idade de carregamento;

$\alpha$  é um coeficiente que depende do tipo de cimento empregado.

Considerando a deformação elástica  $\varepsilon_c(t_0)$  e substituindo a deformação em função do coeficiente de fluência, têm-se (CEB-FIP, 2010):

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{cs}(t_0)} [1 + \varphi(t, t_0)] + \varepsilon_{sh}(t)$$

$$J(t, t_0) = \frac{[1 + \varphi(t, t_0)]}{E_c(t_0)}$$

$$E(t_0) = \frac{E_c(t_0)}{[1 + \varphi(t, t_0)]}$$

Em que  $J(t, t_0)$  é a função de fluência e  $E(t_0)$  é o módulo de elasticidade efetivo.

O módulo de elasticidade efetivo (MEE) é dependente do tempo e leva em conta o efeito da fluência, contudo não considera o efeito da idade do concreto, o que o torna insatisfatório na consideração da fluência. Assim, foi desenvolvido o Método do Módulo de Elasticidade Ajustado (MMEA), um modelo que determina o módulo de elasticidade efetivo em função do coeficiente de idade  $X(t, t_0)$ . (CEB-FIP, 2010; CUNHA, 2021; TROST, 1967, BAŽANT, 1972).

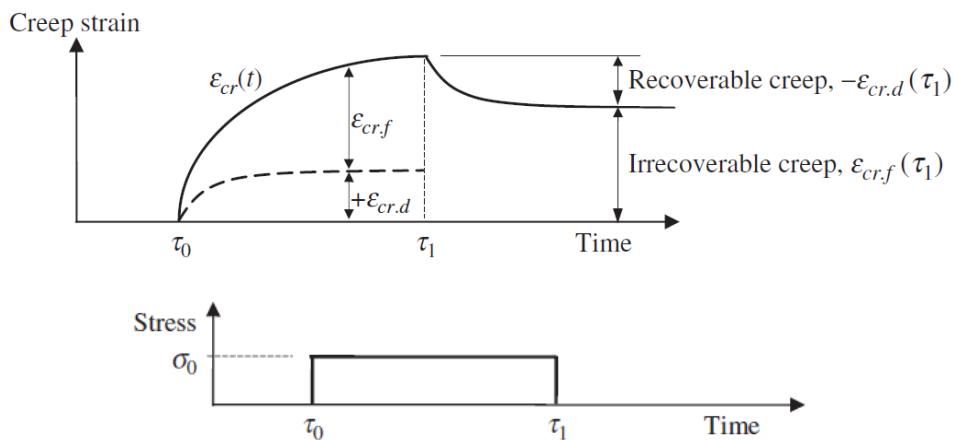
$$\bar{E}(t_0) = \frac{E_c(t_0)}{[1 + X(t, t_0) \cdot \varphi(t, t_0)]}$$

Onde  $\bar{E}(t_0)$  é o módulo de elasticidade efetivo ajustado.

O coeficiente  $X(t, t_0)$  pode ser assumido como 0,8 para diversos problemas práticos. Essa equação possibilita a adequação dos efeitos de fluência para situações de variação de tensões ao longo do tempo (CEB-FIP, 2010; CUNHA, 2021).

A deformação causada por efeito de fluência sob aplicação de carga é parcialmente recuperável e majoritariamente permanente, como ilustra a Figura 5, onde é aplicada uma compressão do tempo  $t_0$  até o tempo  $t_1$ , e logo após esta carga é retirada, ilustrando a deformação final e suas parcelas elástica e inelástica.

Figura 5 - Deformações: recuperável e permanente

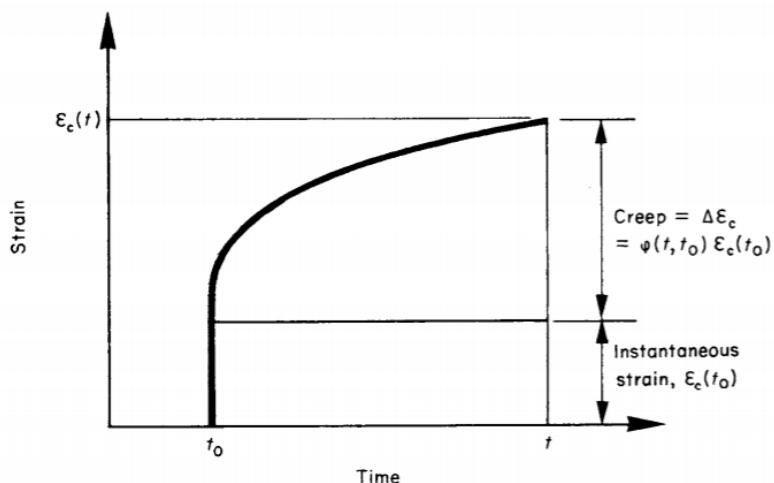


Fonte: Gilbert e Ranzi (2011).

Como também ilustrado na Figura 5, a fluência é uma deformação dependente do tempo. É assumido que essa deformação  $\varepsilon_c(t, \tau)$  aproxima-se de um valor limitante quando o tempo se aproxima do infinito, ou seja,  $\varepsilon_c(\infty, \tau) = \varepsilon_c(\tau)$ .

A seguir, na Figura 6, observa-se um gráfico sobre a relação da deformação instantânea com a deformação de fluência com o tempo.

Figura 6 - Gráfico Deformação x tempo



Fonte: Ghali, Favre e Elbdady (2002).

Com todas essas variáveis, mensurar a fluência de uma peça de concreto torna-se um trabalho bastante complexo. Métodos numéricos, analíticos e laboratoriais têm sido cada vez mais desenvolvidos com o intuito de aumentar a precisão das previsões dessa deformação lenta, porém, estudos das comparações de dados de algumas fontes têm retornado diferentes resultados de deformação lenta do concreto. Variabilidades percentuais de 20% ou mais são esperadas, o que gera grandes incertezas nos valores (GILBERT; RANZI; 2011).

## 2.5 Retração

A retração do concreto é, assim como a fluência, um efeito no concreto que é intensificado com a idade da estrutura. Há diversos tipos de retração do concreto, como a retração plástica, que ocorre no concreto úmido e antes da pega, e as retrações térmicas, químicas e de secagem, que ocorrem no concreto endurecido.

Concretos de resistência elevada são mais propensos à retração plástica, que pode levar a fissurações elevadas na peça recém-concretada. A retração de secagem é uma redução no volume concreto causada pela perda da água por evaporação, que aumenta com o tempo em taxas decrescentes de crescimento, podendo durar meses e até anos para essa retração se acomodar. Por sua vez, a retração térmica dura apenas algumas horas, enquanto o calor de hidratação se dissipar. No entanto, é muito importante seu controle – essa pode levar ao fenômeno chamado etringita tardia, uma patologia que gera fissuração do concreto, o que ocasiona grandes volumes de concretagem a terem um controle específico de temperatura para evitá-lo. Por último, a retração química ou autógena é causada por reações químicas entre a pasta de cimento e dura dias, ou até mesmo semanas para se estabilizar. (GILBERT; RANZI, 2011).

O modelo de retração da CEB-FIP (2010), utilizado nesse trabalho, é definido por:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_S) = \varepsilon_{cbs}(t) + \varepsilon_{cds}(t, t_S)$$

com

$$\varepsilon_{cbs}(t) = \varepsilon_{cbs0}(f_{cm}) \cdot \beta_{bs}(t)$$

$$\varepsilon_{cds}(t, t_S) = \varepsilon_{cds0}(f_{cm}) \cdot \beta_{RH}(RH) \cdot \beta_{ds}(t - t_S)$$

onde:

$\varepsilon_{cs}(t, t_S)$  é a retração total no tempo t;

$\varepsilon_{cbs}(t)$  é a retração básica no tempo t;

$\varepsilon_{cds}(t, t_S)$  é a retração de secagem no tempo t;

$\varepsilon_{cbs0}(f_{cm})$  é o coeficiente de retração básica;

$\varepsilon_{cds0}(f_{cm})$  é o coeficiente de retração de secagem;

$\beta_{bs}(t)$  é o coeficiente em função do tempo que descreve a retração básica;

$\beta_{RH}(RH)$  é o coeficiente em função da umidade relativa do ar;

$\beta_{ds}(t - t_S)$  é o coeficiente em função do tempo que descreve a retração de secagem.

O coeficiente de retração básica e o coeficiente  $\beta_{bs}(t)$  são determinados através de:

$$\varepsilon_{cbs0}(f_{cm}) = -\alpha_{bs} \left( \frac{\left(\frac{f_{cm}}{10}\right)^{2,5}}{6 + \frac{f_{cm}}{10}} \right) \cdot 10^{-6}$$

$$\beta_{bs}(t) = 1 - \exp(-0,2 \cdot \sqrt{t})$$

Já os coeficientes  $\varepsilon_{cds0}(f_{cm})$ ,  $\beta_{RH}(RH)$ ,  $\beta_{ds}(t - t_s)$  são definidos por:

$$\varepsilon_{cds0}(f_{cm}) = [(220 + 110 \cdot \alpha_{ds1}) \cdot \exp(-\alpha_{ds2} \cdot f_{cm})] \cdot 10^{-6}$$

$$\beta_{RH}(RH) = \begin{cases} -1,55 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{RH}{100} \right)^3 \right], & \text{Para } 40 \leq RH < 99\% \cdot \beta_{s1} \\ 0,25, & \text{Para } RH \geq 99\% \cdot \beta_{s1} \end{cases}$$

$$\beta_{ds}(t - t_s) = \left( \frac{(t - t_s)}{0,035 \cdot h^2 + (t - t_s)} \right)^{0,5}$$

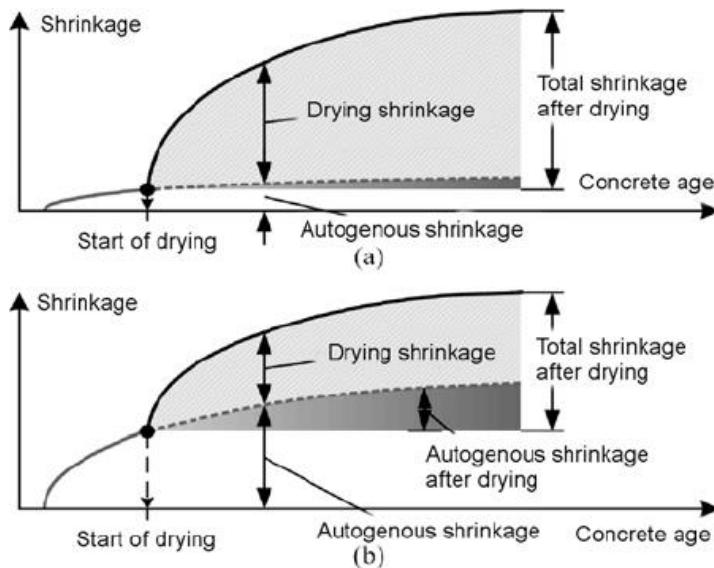
com

$$\beta_{s1} = \left( \frac{35}{f_{cm}} \right)^{0,1} \leq 1,0$$

Onde  $\alpha_{ds1}$  e  $\alpha_{ds2}$  são coeficientes dependentes do tipo de cimento, RH é a umidade relativa do ar em % e h é a espessura fictícia ( $h = 2 \cdot \frac{Ac}{u}$ , onde  $Ac$  é a seção transversal em  $mm^2$  e  $u$  é o perímetro do membro em contato com a atmosfera em  $mm$ ).

De todos os tipos de retração citados, aqueles que possuem maior intensidade e, portanto, maior influência na fissuração e consequente deformação do concreto são a retração de secagem e a retração química. Abaixo, nas Figuras 7a e 7b, é possível ver a parcela destas duas retrações em um concreto normal e em um concreto de alta resistência, estudados por Sakata & Shimoumura, 2004.

Figura 7a e 7b – Componentes da retração em um concreto normal (a) e em um concreto de alta resistência (b).

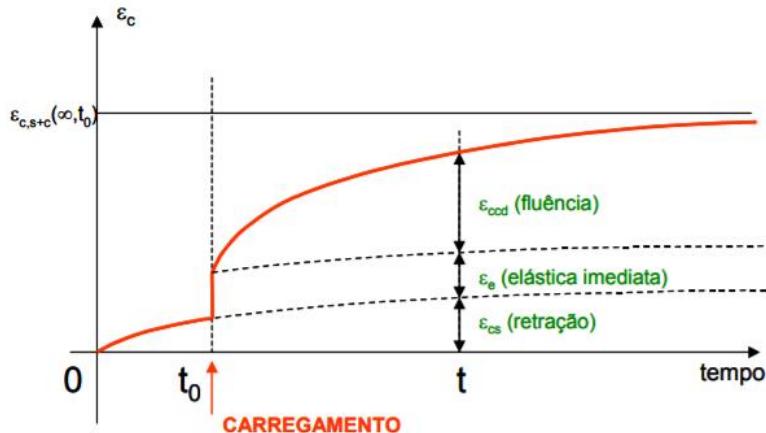


Fonte: Sakata & Shimoumura (2004).

A retração, assim como a fluênciá, é uma variável não-linear. Seu incremento não possui relações lineares com o tempo ou carregamento, podendo haver deslocamentos maiores ou menores em intervalos de tempo iguais; e dependentes do tempo, onde esse ocorre com a passagem do tempo. Ambas causam aumentos graduais na deformação, na curvatura de peças de concreto, nos esforços internos e, para o caso de estruturas protendidas, provocam perdas de protensão, o que pode levar uma peça protendida a perder sua pré-compressão e levá-la a fissurações e comportamentos não previstos em projetos, comprometendo sua utilização (BUCHAIM, 2007).

A deformação total de uma peça de concreto carregada axialmente e não fissurada é a somatória de três parcelas: sua deformação elástica instantânea, sua deformação por fluênciá e sua deformação por retração, como mostra a Figura 8:

Figura 8 – Parcelas de deformação de uma peça de concreto não fissurada.



Fonte: Hanai (2005).

## 2.6 Relaxação do aço de protensão

A armadura de protensão estirada e mantida com comprimento constante sofre um alívio de tensão ao longo do tempo. Esse fenômeno é chamado de relaxação do aço, que também é conhecido como a fluênciā do aço.

É possível mensurar essa relaxação pela determinação do coeficiente  $\psi(t, t_0)$ , calculado por meio da expressão:

$$\Delta\sigma_{pri}(t, t_0) = \psi(t, t_0) * \sigma_{pi}$$

onde:

$\Delta\sigma_{pri}(t, t_0)$ : perda de tensão por relaxação pura (com comprimento constante) desde o tempo  $t_0$  do estiramento do aço até o tempo  $t$ .

$\sigma_{pi}$ : tensão na armadura de protensão no instante de seu estiramento.

O coeficiente  $\psi(t, t_0)$  varia para pré-tração ou pós-tração, afetado por perdas imediatas de protensão na seção da peça de concreto.

Os valores de relaxação do aço são fixados nas especificações dos aços de protensão. Nas normas de fios de aço e de cordoalhas para estruturas de concreto protendido, ABNT NBR 7482:2020 e ABNT NBR 7483:2020, respectivamente, há o estabelecimento de valores médios, medidos após 1000 horas à temperatura constante de 20°C, para as perdas de tensão a valores de tensão de 60, 70 e 80% da resistência característica  $f_{ptk}$  (VERÍSSIMO; CÉSAR JÚNIOR,

1998). Os valores do coeficiente  $\psi_{60}$ ,  $\psi_{70}$  e  $\psi_{80}$  dependem da classe de relaxação do aço e são reproduzidos no Quadro 1.

Quadro 1 - Valores de  $\psi_{60}$ ,  $\psi_{70}$  e  $\psi_{80}$  (para 1000 horas, à 20°C)

Tensão inicial	$\psi$	Classe de relaxação	
		Relaxação normal	Relaxação baixa
$\sigma_{pi} = 0,60 f_{ptk}$	$\psi_{60}$	4,5 %	1,5 %
$\sigma_{pi} = 0,70 f_{ptk}$	$\psi_{70}$	7,0 %	2,5 %
$\sigma_{pi} = 0,80 f_{ptk}$	$\psi_{80}$	12,0 %	3,5 %

Fonte: Veríssimo e César Júnior (1998).

Para intervalos diferentes de 1000 horas, ainda a temperatura constante de 20°C, os valores de  $\psi$  podem ser determinados pela expressão:

$$\psi(t, t_0) = \psi_{1000} \left( \frac{t - t_0}{1000} \right)^{0,15}$$

Para tensões inferiores a  $0,5 f_{ptk}$ , admite-se não haver perda de tensão por relaxação. Tensões intermediárias até  $0,8 f_{ptk}$  podem ser interpoladas pelos valores-base do Quadro 1. Tensões acima de  $0,8 f_{ptk}$  permitem, na falta de dados experimentais, a extração dos valores do Quadro 1.

## 2.7 Limites de deformação

No Brasil, a norma ABNT NBR 6118:2014 – Projeto de Estruturas de concreto – Procedimento, regulamenta os Estados Limites de Serviço das estruturas, onde há parâmetros para deformações-limite, cálculo de deformações imediatas e aproximações para a estimativa da deformação lenta partindo da deformação imediata.

Para qualquer projeto estrutural, é fundamental conhecer o deslocamento de seus componentes. No concreto, é parametrizado na norma ABNT NBR 6118:2014 alguns deslocamentos-limite permitidos às estruturas na Tabela 1.

Tabela 1 - Limites para deslocamentos

<b>Tipo de efeito</b>	<b>Razão da limitação</b>	<b>Exemplo</b>	<b>Deslocamento a considerar</b>	<b>Deslocamento-limite</b>
Aceitabilidade sensorial	Visual	Deslocamentos visíveis em elementos estruturais	Total	$\ell/250$
	Outro	Vibrações sentidas no piso	Devido a cargas accidentais	$\ell/350$
Efeitos estruturais em serviço	Superfícies que devem drenar água	Coberturas e varandas	Total	$\ell/250^a$
	Pavimentos que devem permanecer planos	Ginásios e pistas de boliche	Total	$\ell/350 + \text{contraflecha}^b$
	Elementos que suportam equipamentos sensíveis	Laboratórios	Ocorrido após a construção do piso	$\ell/600$
Efeitos em elementos não estruturais	Paredes	Alvenaria, caixilhos e revestimentos	Após a construção da parede	$\ell/500^c$ e 10 mm e $\theta = 0,0017 \text{ rad}^d$
		Divisórias leves e caixilhos telescópicos	Ocorrido após a instalação da divisória	$\ell/250^c$ e 25 mm
		Movimento lateral de edifícios	Provocado pela ação do vento para combinação frequente ( $\psi_1 = 0,30$ )	$H/1\ 700$ e $H/850^e$ entre pavimentos <sup>f</sup>
		Movimentos térmicos verticais	Provocado por diferença de temperatura	$\ell/400^g$ e 15 mm

Fonte: ABNT (2014).

Onde:

L: Vão entre apoios (m)

H: Altura da edificação (m)

$\theta$ : Ângulo de rotação nodal (rad)

Os efeitos são:

- Aceitabilidade sensorial: Ausência de vibrações indesejáveis ou efeito visual desagradável;
- Efeitos específicos: os deslocamentos podem impedir a utilização adequada da estrutura;
- Efeitos em elementos não estruturais: Evitar fissuração de alvenarias, revestimentos e outros elementos que, embora não estruturais, podem ser afetados pelo comportamento da estrutura;

- Efeitos em elementos estruturais: Evitar deslocamentos que afetem as hipóteses de cálculo estrutural, como limites de fissuração de peças de concreto.

Todos esses requisitos precisam ser cumpridos como valor máximo de deslocamento em peças de concreto.

No cálculo de flechas em estruturas de concreto pretendido é prudente considerar a equação:

$$(EI)eq = E_{cs} I_c$$

Desde que não seja ultrapassado o estado-limite de formação de fissuras. Caso contrário, a expressão seguinte deve ser aplicada:

$$(EI)_{eq,t0} = E_{cs} \left\{ \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] I_{II} \right\} \leq E_{cs} I_c$$

Onde:

$I_c$ : Momento de inércia da seção bruta de concreto;

$I_{II}$ : Momento de inércia da seção fissurado de concreto no estádio II, calculado com

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cs}} ;$$

$M_a$ : Momento fletor na seção crítica do vão considerado, ou seja, o momento máximo no vão para vigas biapoiadas ou contínuas e momento no apoio para balanços, para a combinação de ações considerada nessa avaliação;

$M_r$ : Momento de fissuração do elemento estrutural, cujo valor deve ser reduzido à metade no caso de utilização de barras lisas;

$E_{cs}$ : Módulo de elasticidade secante do concreto.

Desde que  $I_{II}$ ,  $M_r$  e  $M_a$  sejam calculados considerando o elemento estrutural de concreto submetido à combinação de ações escolhida, acrescida da protensão representada como ação externa equivalente.

Para a consideração da flecha diferida no tempo em vigas protendidas, a norma brasileira cita que basta multiplicar a parcela permanente da flecha imediata por  $(1 + \phi)$ . Valores do coeficiente  $\phi$  encontram-se na Tabela 2.

Tabela 2 - Valores característicos superiores da deformação específica de retração  $\varepsilon_{cs}$  ( $t_\infty, t_0$ ) e do coeficiente de fluênciia  $\varphi$  ( $t_\infty, t_0$ )

Umidade média ambiente %			40		55		75		90	
Espessura fictícia $2A_c/u$ cm			20	60	20	60	20	60	20	60
$\varphi (t_\infty, t_0)$ Concreto das classes C20 a C45	5	4,6	3,8	3,9	3,3	2,8	2,4	2,0	1,9	
		3,4	3,0	2,9	2,6	2,2	2,0	1,6	1,5	
		2,9	2,7	2,5	2,3	1,9	1,8	1,4	1,4	
	30	2,7	2,4	2,4	2,1	1,9	1,8	1,6	1,5	
		2,0	1,8	1,7	1,6	1,4	1,3	1,1	1,1	
		1,7	1,6	1,5	1,4	1,2	1,2	1,0	1,0	
	60	- 0,53	- 0,47	- 0,48	- 0,43	- 0,36	- 0,32	- 0,18	- 0,15	
		- 0,44	- 0,45	- 0,41	- 0,41	- 0,33	- 0,31	- 0,17	- 0,15	
		- 0,39	- 0,43	- 0,36	- 0,40	- 0,30	- 0,31	- 0,17	- 0,15	
$\varepsilon_{cs}(t_\infty, t_0) \text{ } \%$										

Fonte: ABNT NBR 6118 (2014).

Onde:

$A_C$ : Área da seção transversal;

$u$ : Perímetro da seção em contato com a atmosfera;

$\varphi$ : Coeficiente de fluênciia;

$\varepsilon_{cs}$ : Retração do concreto;

### 3 ANÁLISE NUMÉRICA

#### 3.1 Método dos elementos finitos

Trata-se de um método numérico para se obter soluções aproximadas de problemas de engenharia. O Método dos elementos finitos (MEF) foi um desenvolvimento natural da formulação em deslocamentos de análise matricial de estruturas reticuladas impulsionadas pelo uso de computação nas pesquisas. (VAZ, 2011).

##### 3.1.1 Formulação do MEF

A formulação do método dos elementos finitos requer a existência de uma equação integral, de forma a dividir uma integral de sobre um domínio complexo (de volume  $V$ ) em um somatório de integrais que se estendem a subdomínios. Esses subdomínios apresentam geometria relativamente simples (de volume  $V_i$ ). É possível calcular todas as integrais estendidas aos subdomínios  $V_i$ . Para isso, basta efetuar o somatório de todas as funções, correspondentes a cada membro, para se obter a integral correspondente a toda a extensão do domínio de volume  $V$ .

Cada subdomínio corresponde a um elemento finito de geometria simples, como segmentos de retas, triângulos, quadriláteros, dentre outros (AZEVEDO, 2003).

### 3.1.2 Utilização em Estruturas

Na mecânica tradicional, as estruturas podem ser divididas entre reticuladas e não-reticuladas. As estruturas reticuladas são compostas por vigas, pórticos, treliças e grelhas, enquanto cascas, placas, paredes e sólidos fazem parte das estruturas não-reticuladas.

Na análise de estruturas reticuladas, surgem muitos conceitos que podem ser ampliados para a generalidade de estruturas, como é o caso do equilíbrio, compatibilidade de deslocamentos, tensões, deformações – e suas interrelações. E é relativamente simples, por meio do método dos deslocamentos, do método das forças e de diversos outros na mecânica clássica, efetuar a análise dessas estruturas.

A extensão desses conceitos para estruturas não reticuladas, porém, é de complexo entendimento. Estruturas contínuas, como também podem ser designadas as não-reticuladas, eram, em épocas passadas, analisadas por derivadas parciais que regem o fenômeno a ser estudado, recorrendo a séries, como a de Fourier, para sua solução. Outrossim, esse método só era aplicável a meios contínuos homogêneos de geometria relativamente simples.

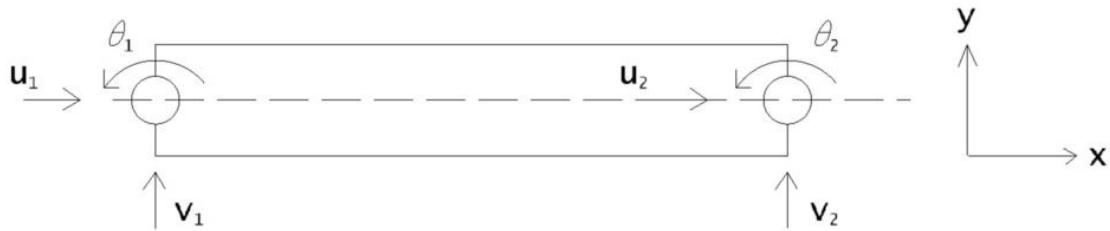
Com a subdivisão do domínio da peça não reticulada em diversos outros subdomínios de geometria simples, é possível mensurar suas características com a análise computacional dos volumes de sub domínios. O esforço computacional é elevado, porém, com o advento da tecnologia, esse obstáculo começou a ser superado e o Método dos elementos finitos passou a ser amplamente utilizado no cálculo de estruturas contínuas. (AZEVEDO, 2003).

### 3.1.3 Elemento finito de pórtico plano

A formulação do elemento finito de pórtico propõe-se a simular as vigas conforme esta teoria clássica de Euler-Bernoulli - uma das hipóteses mais utilizadas no cálculo dessa estrutura.

Esta teoria é bastante simplificada, e considera que uma linha reta normal à superfície neutra permanecerá reta e normal após a deformação da peça, além de desconsiderar pequenos deslocamentos em relação à seção transversal e também a deformação causada pelo cisalhamento. Neste contexto, o elemento de pórtico plano com 6 graus de liberdade é apresentado na Figura 9, contendo uma rotação e duas translações em cada um dos dois nós.

Figura 9 – Representação de elemento de viga com 6 graus de liberdade.

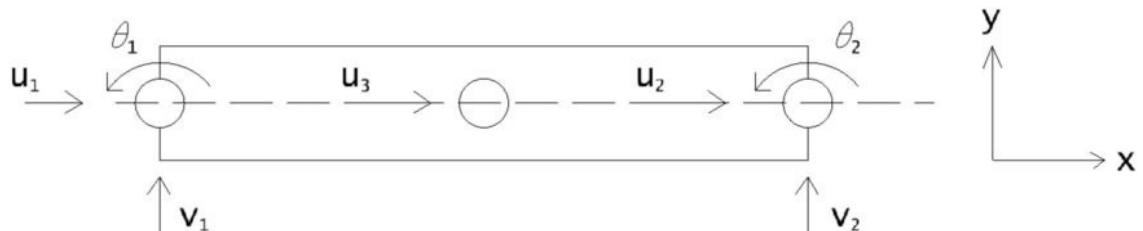


Fonte: Autor.

Utilizando um grau de liberdade interno não associado com os nós da malha da estrutura de pórtico plano, é possível obter, nesse sistema com 7 graus de liberdade, os deslocamentos por meio de interpolação quadrática, podendo melhorar a precisão dos resultados se comparado com os resultados da interpolação linear (FISH, BELYTSCHO, 2007).

Neste trabalho, para a modelagem das vigas em elementos finitos, será utilizado o elemento de pórtico plano com 7 graus de liberdade aliado ao elemento finito de cabo, que será descrito a seguir.

Figura 10 – Representação de elemento de pórtico plano com 7 graus de liberdade.



Fonte: Autor

Os polinômios de interpolação referentes aos deslocamentos axiais,  $u_0(x)$ , são caracterizadas por polinômios quadráticos de Lagrange, com três graus de liberdade para compor o polinômio, sendo expresso por:

$$u_0(x) = L_1 u_1 + L_2 u_2 + L_3 u_3$$

Onde  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  são:

$$L_1 = 1 + \frac{x}{L} \left( \frac{2x}{L} - 3 \right)$$

$$L_2 = \frac{4x}{L} - 4 \left( \frac{x}{L} \right)^2$$

$$L_3 = \frac{x}{L} \left( \frac{2x}{L} - 1 \right)$$

e  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  são os deslocamentos nodais axiais.

Os deslocamentos transversais são desenvolvidos através do polinômio de hermite, representando o vetor de deslocamentos  $u$  em termos da matriz de funções de forma ( $N$ ) e do vetor de deslocamentos nodais ( $u_e$ ):

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_o(X) \\ v_o(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & L_2 & L_3 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & H_2 & 0 & 0 & H_3 & H_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{u}_e$$

O vetor de deformação geral em função do vetor de deslocamentos nodais é exposto por:

$$\varepsilon = \varepsilon_L + \varepsilon_{NL} = B_L u_e + \frac{1}{2} B_{NL} u_e$$

Onde  $B_L$  e  $B_{NL}$  são matrizes de deformação-deslocamento para o elemento de pórtico plano.  $\varepsilon_L$  e  $\varepsilon_{NL}$  são parcelas de deformação linear e não-linear, respectivamente.

### 3.1.4 Elemento finito de cabo

O modelo proposto neste trabalho discretiza o cabo, no caso a monocordalha não-aderente, como um conjunto de segmentos de reta conectando as coordenadas verticais dos cabos de protensão, considerando que a tensão e a deformação no cabo é constante ao longo de seu comprimento devido à ausência de aderência entre a bainha de revestimento do cabo e o concreto.

As coordenadas finais dos segmentos do cabo de protensão não correspondem ao mesmo ponto material, já que este desliza quando o macaco de protensão puxa as cordoalhas, mas sim à bainha de plástico, a qual se manterá no mesmo local de repouso quando os cabos de protensão forem tracionados.

## 3.2 Análise Numérica

### 3.2.1 Linearidade e não-linearidade física e geométrica

A análise estrutural objetiva compreender o comportamento da estrutura quando essa é submetida a ações externas. Essas ações impactam diretamente nas tensões, deformações e deslocamentos da estrutura. Muitas vezes, simplificar essa análise estrutural pode render apreciações mais ágeis, por diminuir o grau de complexidade e, também, por haver situações em que essas simplificações são bem próximas da realidade.

Na realidade, tanto o concreto armado quanto o concreto protendido possuem comportamentos conhecidos como não-lineares. Sob ações dos carregamentos que incidem principalmente na estrutura de concreto armado, a não-linearidade possui várias classificações, todas essas relacionadas ao seu efeito. Dessas, se destacam a não-linearidade física e a não-linearidade geométrica.

A não-linearidade física é intrínseca do material. A relação tensão-deformação desses materiais não se comporta de maneira linear, como previsto na Lei de Hooke (1642). Os efeitos não-lineares são descritos por formas mais complexas de equações constitutivas (matrizes constitutivas não-lineares ou equações constitutivas em termos de incrementos ou taxas). Paralelo a essa, pode haver também a não-linearidade física em ligações semirrígidas, flexíveis,

ou de rótulas inelásticas, que provém de flambagem plastificação ou fissurações localizadas. Essas são não-linearidades nas relações momento-rotação (PEREIRA, 2002).

A estrutura também pode ter, como um todo, um comportamento não-linear, mesmo que o material que a componha tenha um comportamento linear elástico, obedecendo à Lei de Hooke. A deflexão causada pela movimentação da estrutura como um todo pode acarretar no aparecimento de momentos fletores adicionais, de segunda ordem, em virtude da presença de ações normais. Esse efeito é conhecido como não-linearidade geométrica.

Uma das simplificações mais utilizadas no concreto protendido é a da linearidade elástica da estrutura, quando essa é submetida a cargas de serviço, na combinação de ações quase permanentes (PEREIRA, 2002). No concreto armado, com o acréscimo das cargas verticais em uma viga, o concreto passa a não mais resistir às tensões de tração decorrentes da flexão, o que ocorria no Estádio I, levando o concreto da viga à fissuração, diminuição de seção útil, e, assim, perda da rigidez – que acontece a partir do Estadio II. À medida que perde sua rigidez, sua deformação tende a seguir padrões não-lineares, se distanciando das leis de hooke. Já no concreto protendido, a carga equivalente de protensão tende a comprimir partes da viga que estariam tracionadas devido à flexão. Assim, como o concreto tem grande resistência à compressão, as fissuras decorrentes da tração não são formadas, mantendo uma peça com rigidez final semelhante à inicial e amenizando a não-linearidade física do concreto.

### 3.3.2 Armadura passiva e ativa

Tanto na modelagem da armadura passiva quanto na modelagem da armadura ativa, foi considerado o modelo linear elástico seguindo a Lei de Hooke.

$$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s$$

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 4.1 Análise de deformações imediatas x progressivas

Foi analisado o comportamento de vigas com cabos protendidos não aderentes, quando submetidos a cargas de serviço de longa duração, a fim de comparar os valores de deformação lenta com os de deformação imediata. Será avaliada a adequação do uso de um coeficiente bastante usado por engenheiros de estruturas e softwares de cálculo estrutural, que se baseiam na multiplicação da deformação imediata por um coeficiente de 2,5 para simular o efeito dependente do tempo.

O modelo utilizado neste trabalho foi comparado com resultados da literatura, obtidos por Lou *et al* (2013), que analisou numericamente vigas pós-tracionadas ensaiadas por Chen (2008), e pela deformação calculada através do software TQS, onde tanto a flecha quanto a formação de fissuras foi nula pelo efeito da protensão.

Neste estudo, foram utilizadas as vigas designadas como YLA2, YLB2 e YLC1, hiperestáticas, de Chen (2008), e a viga isostática V6 do Pavimento Tipo do projeto QS05, cedida gentilmente pela equipe de engenheiros da Hepta BSB, escritório de cálculo estrutural sediado em Fortaleza/CE.

#### 4.1.2 Vigas de Chen (2008)

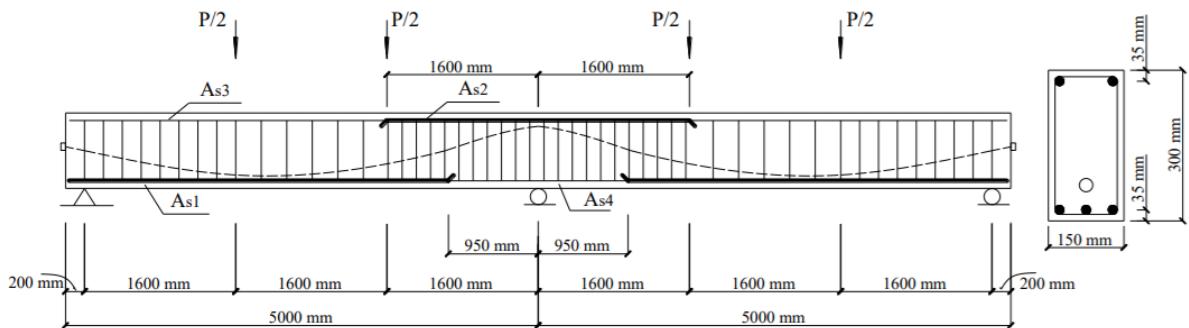
As vigas de Chen (2008) apresentam dimensões de 15 x 30 x 1000 cm, com três apoios e trajetória curva para o cabo interno que acompanha os picos de momento fletor presentes na viga, como mostra a Figura 11. Nessas vigas, variam parâmetros de área de aço passivo e  $f_{ck}$ , como mostrado na Tabela 3.

Tabela 3 - Parâmetros de aço passivo e do concreto de vigas, ensaiadas por Chen (2008).

VIGAS	$A_{s1}$ ( $\text{cm}^2$ )	$A_{s2}$ ( $\text{cm}^2$ )	$A_{s3}$ ( $\text{cm}^2$ )	$A_{s4}$ ( $\text{cm}^2$ )	$f_{yk}$ (MPa)	$f_{ck}$ (MPa)
<b>YLA1</b>	4,524 (4φ12mm)	2,262 (2φ12mm)	2,262 (2φ12mm)	2,262 (2φ12mm)	361	34,9
<b>YLB2</b>	6,032 (3φ16mm)	5,089 (2φ18mm)	2,262 (2φ12mm)	6,032 (3φ16mm)	361	33,0
<b>YLC1</b>	7,634 (3φ18mm)	7,634 (3φ18mm)	2,262 (2φ12mm)	7,634 (3φ18mm)	361	37,1

Fonte: Autor (2021).

Figura 11 – Detalhe de vigas de Chen (2008) utilizadas na análise

Fonte: Lou *et al.* (2013).

Para esta análise destas vigas hiperestáticas, aplicou-se carregamento de serviço de 30 kN, com data de início e término de carregamento da estrutura de 28 e 600 dias, respectivamente. O tipo de cimento utilizado foi o CP-32,5, conforme EN 197-2000. Umidade relativa considerada de 60%. Para avaliar os efeitos causados pela fluência, utilizou-se um coeficiente de idade igual a 0,7, valor localizado no intervalo de 0,65 a 0,75, recomendado por Bažant e Jirásek (2018) para concretos carregados entre 7 e 28 dias e de resistência normal (CUNHA, 2020).

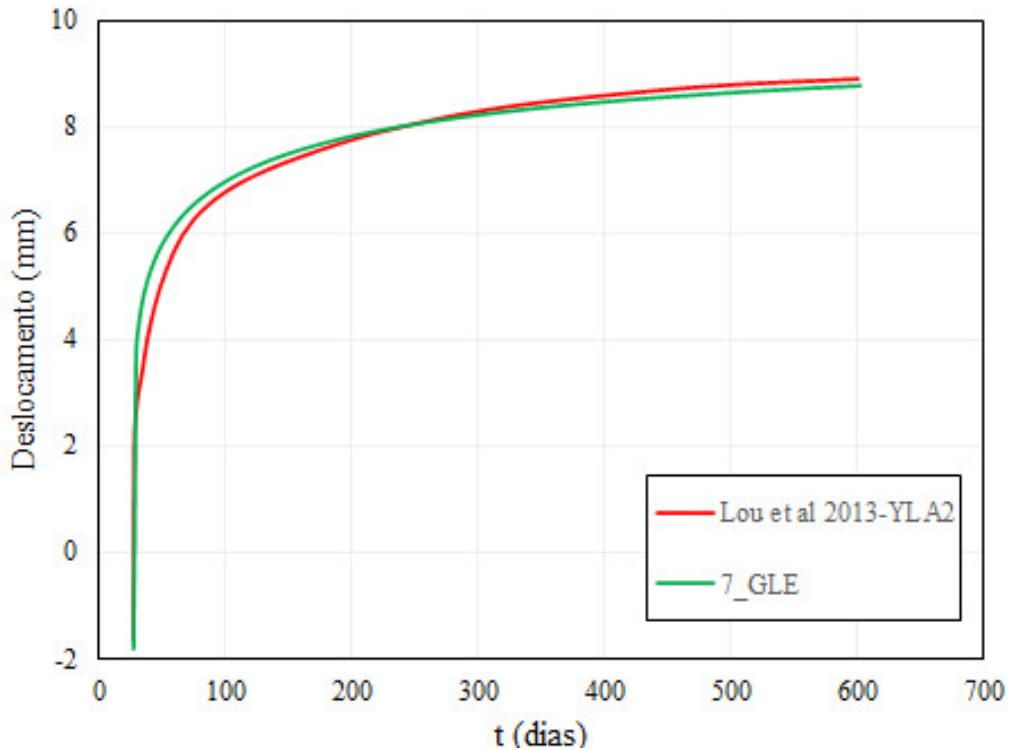
As armaduras de combate ao cisalhamento são estribos com diâmetro de 10mm, espaçados a cada 15cm próximo aos apoios e 20cm. O aço de protensão não aderente possui tensão de escoamento de 1680 MPa, tensão última de 1941 e módulo de elasticidade longitudinal de 197 GPa. A tensão efetiva no cabo após a aplicação da protensão para as vigas YLA1 e YLA2 são de 1083 MPa e 1196 MPa, respectivamente.

As vigas foram modeladas considerando sua simetria, criando uma malha de 16 entre o uma face lateral e o apoio central da viga.

As Figuras 12, 13 e 14 apresentam os valores de deslocamento vertical de um ponto localizado na seção central do vão entre apoios para as vigas YLA2, YLB2 e YLC1, respectivamente. A Tabela 4 mostra os resultados de deformação dessas três vigas para as idades de 28 dias, 600 dias e 1200 dias, enquanto a Tabela 5 compara os valores obtidos com o coeficiente de 2,5.

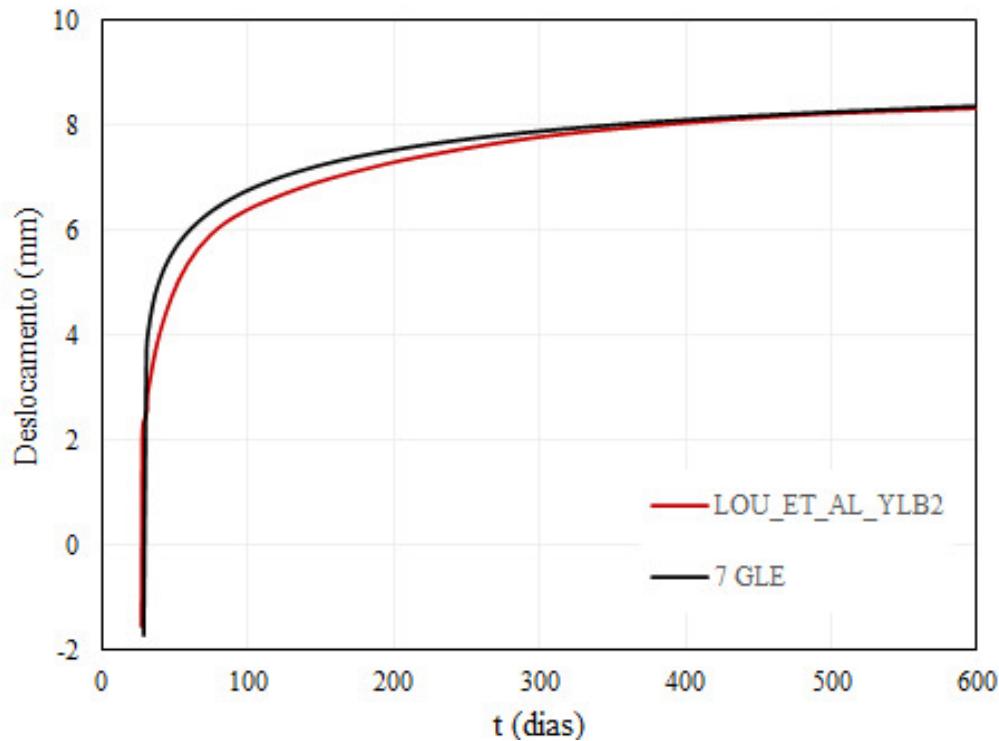
Outrossim, observa-se que a curva obtida é semelhante ao resultado obtido por Lou *et al* (2013), na simulação destas mesmas vigas.

Figura 12 – Gráfico deslocamento *versus* tempo na viga YLA2



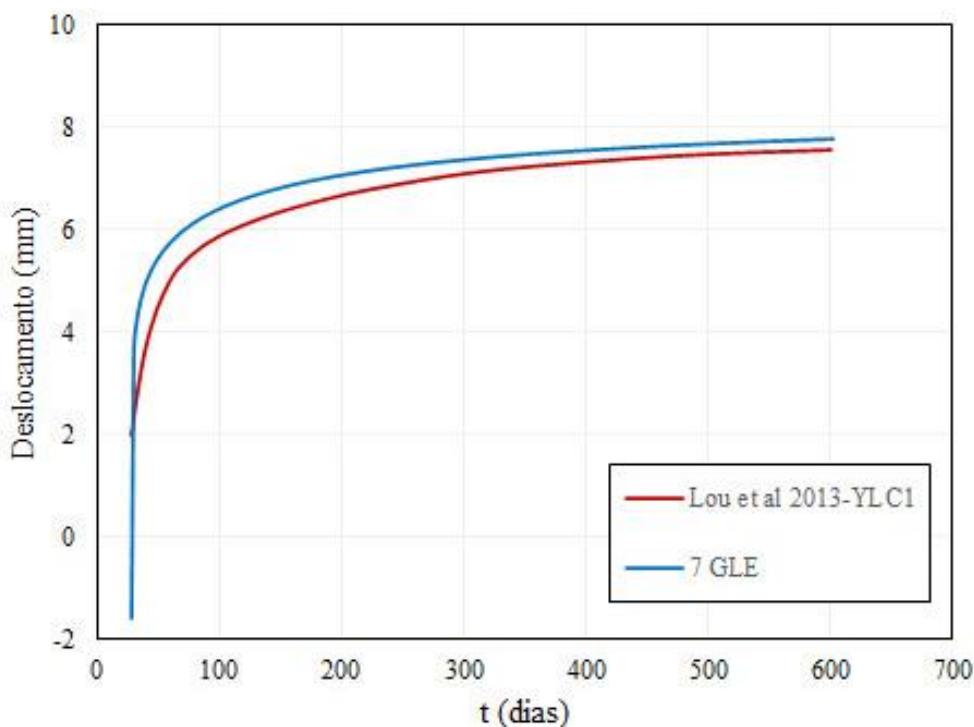
Fonte: Autor (2021).

Figura 13 – Gráfico deslocamento *versus* tempo na viga YLB2



Fonte: Autor (2021).

Figura 14 – Gráfico deslocamento *versus* tempo na viga YLC1.



Fonte: Autor (2021).

Tabela 4 – Deformação de vigas protendidas de Chen (2008) com diferentes idades

<b>VIGAS</b>	<b>Deformação (mm)</b>		
	<b>Tempo: 28 dias</b>	<b>Tempo: 600 dias</b>	<b>Tempo: 1200 dias</b>
<b>YLA2</b>	3,769	8,792	9,191
<b>YLB2</b>	3,750	8,382	8,722
<b>YLC1</b>	3,710	7,791	8,077

Fonte: Autor (2021).

Tabela 5 – Comparação deformação imediata x deformação lenta com o coeficiente 2,5 pras vigas de Chen (2008).

<b>VIGAS</b>	Relação	Percentual do	Relação	Percentual do
	600d / 28d	coeficiente	1200d / 28d	coeficiente
<b>YLA2</b>	2,333	93,31%	2,438	97,54%
<b>YLB2</b>	2,235	89,41%	2,326	93,04%
<b>YLC1</b>	2,100	84,00%	2,177	87,09%

Fonte: Autor (2021).

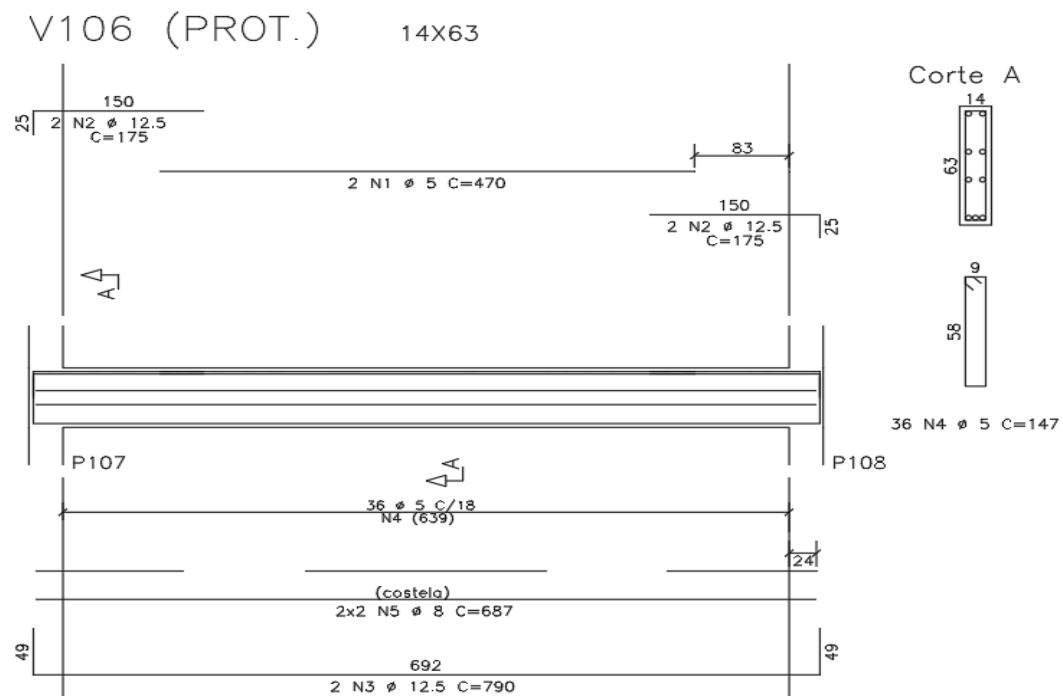
É possível notar que os valores das relações entre deslocamentos em 600 e 1200 dias e da deformação imediata se aproximaram bastante da razão de 2,5 nestas três vigas, que deformaram quase 1cm cada.

#### 4.1.2 Viga HEPTA QS05 V106

Já a viga V6 (QS05) apresenta dimensões de 14 x 63 x 699 cm, com dois apoios e seis cabos internos, cuja trajetória acompanha os picos de momento fletor da viga, como mostra nas Figuras 15, 16 e 17.

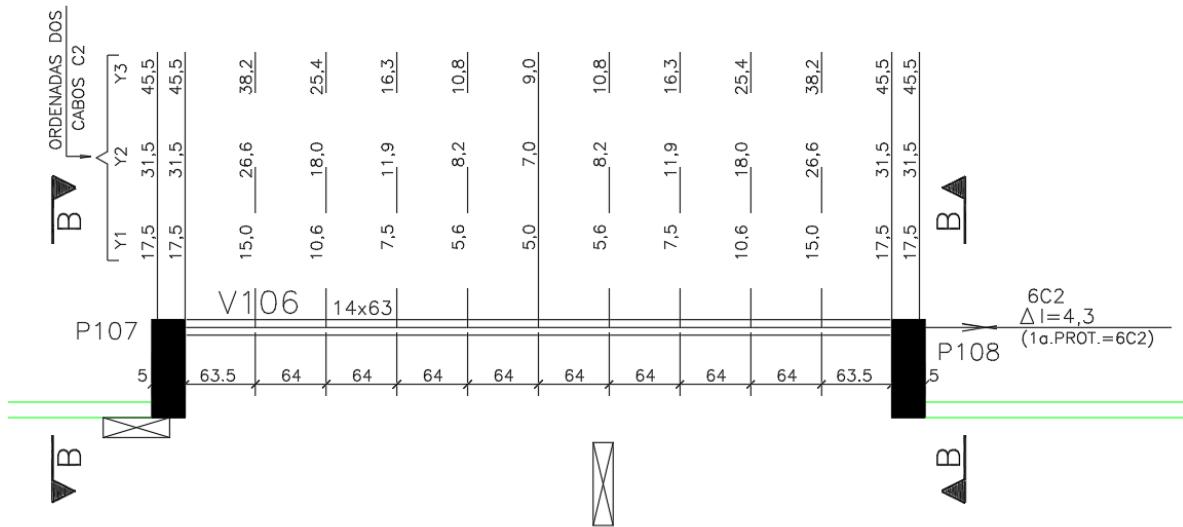
Para a análise desta viga isostática, aplicou-se o carregamento de 33,50 kN/m, com data de início e término de carregamento da estrutura de 28 e 600 dias, respectivamente. O módulo de elasticidade do concreto na data do carregamento foi de 25GPa e o módulo de elasticidade do aço de 200 GPa. A armadura positiva é de 2,42cm<sup>2</sup> e a negativa nos extremos é de, também, 2,42cm<sup>2</sup>. Para simular o carregamento distribuído na viga, o momento máximo obtido foi aplicado nos apoios extremos como um binário de momentos.

Figura 15 – Armação passiva da Viga V106 (QS05).



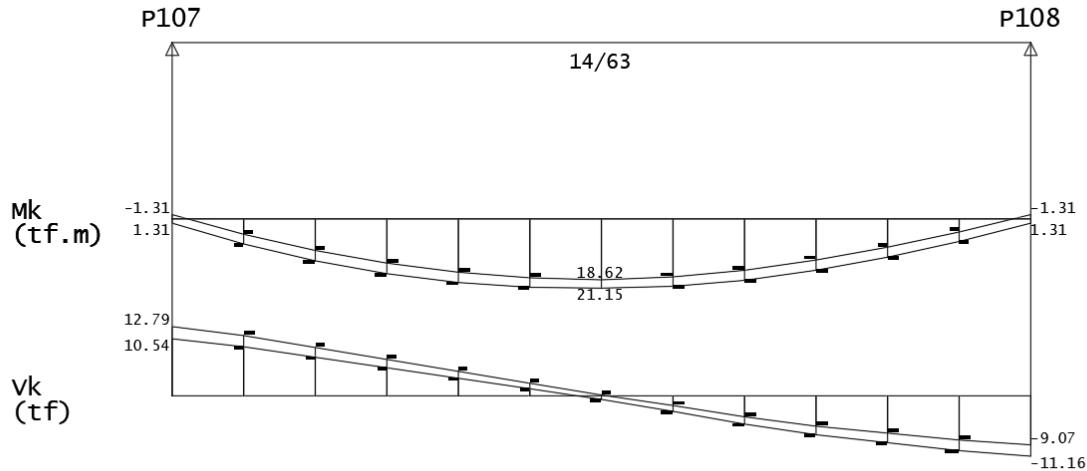
Fonte: HEPTA BSB.

Figura 16 – Traçado dos cabos da Viga V106 (QS05).



Fonte: HEPTA BSB.

Figura 17 – Diagramas de momento fletor e esforço cortante da Viga V106 (QS05).



Fonte: HEPTA BSB.

No diagrama de momento característico,  $M_k$ , o momento máximo considerado foi o da envoltória que retornou o valor de 21,15 tf.m.

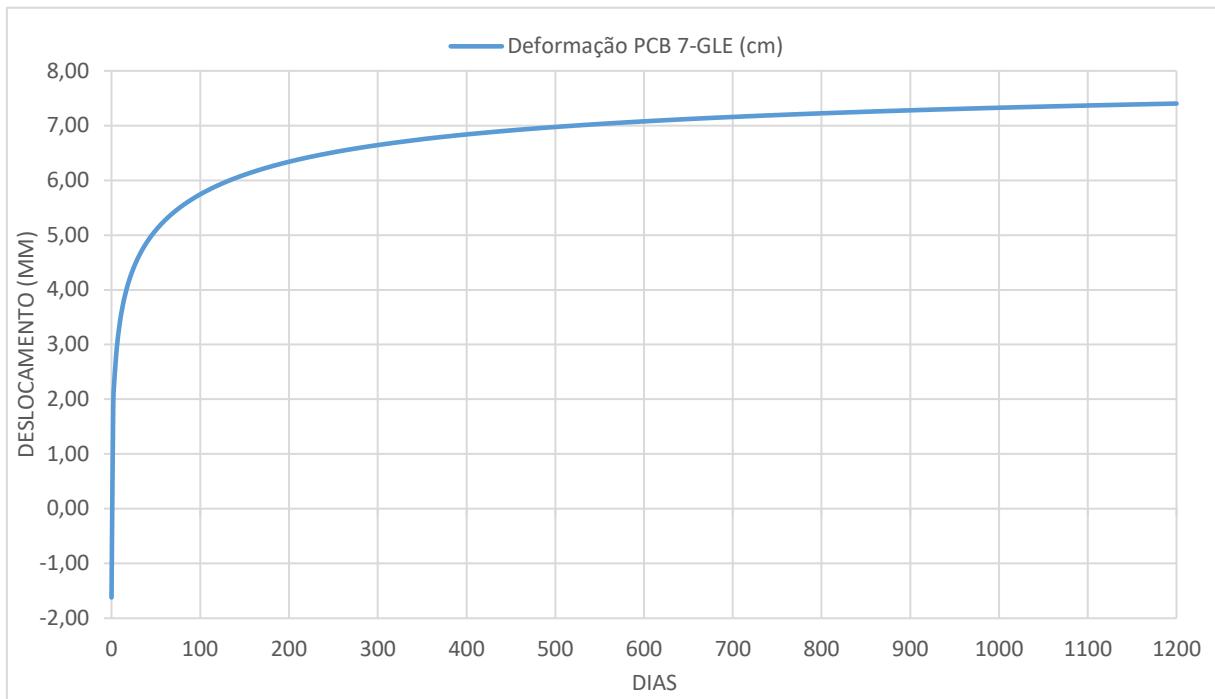
Essa análise foi feita nos tempos de 28 (quando ocorre a protensão da viga), 600 e 1200 dias, onde ocorre a deformação imediata após o desescoramento da estrutura, a deformação lenta passados 600 dias da concretagem e a deformação final.

Por se tratar de uma viga que não possui monitoramento ou que tenha sido ensaiada, já que a mesma foi executada em um empreendimento privado, pouco se sabe sobre alguns

parâmetros, como coeficiente de idade, que foi adotado com 0,7 para fins experimentais. A umidade relativa foi adotada como 63%, valor médio se comparado as umidades relativas dos últimos cinco anos na cidade de Brasília/DF, onde está localizada a edificação.

A Figura 18 ilustra a deformação de um ponto situado no centro do vão da viga durante 1200 dias.

Figura 18 – Gráfico deformação *versus* tempo na viga HEPTA QS05 V106.



Fonte: Autor (2022).

A Tabela 6 faz mostra a deformação no centro da viga para os tempos de 28, 600 e 1200 dias, enquanto a Tabela 7 estabelece um paralelo com o coeficiente de 2,5.

Tabela 6 – Deformação de viga protendida HEPTA QS05 V106 (2021) com diferentes idades.

<b>VIGA</b>	<b>Deformação (mm)</b>		
	<b>Tempo: 28 dias</b>	<b>Tempo: 600 dias</b>	<b>Tempo: 1200 dias</b>
<b>HEPTA QS05 V106</b>	4,54	7,051	7,394

Fonte: Autor (2022).

Tabela 7 – Comparaçāo deformāo imediata x deformāo lenta com o coeficiente 2,5 pra viga HEPTA QS05 V106 (2021).

<b>VIGAS</b>	Relação	Percentual do	Relação	Percentual do
	600d / 28d	coeficiente	1200d / 28d	coeficiente
<b>YLA2</b>	1,553	62,12%	1,629	65,16%

Fonte: Autor (2022).

Observa-se que os a razāo entre as deformāo nos tempos de 600d e 1200d, e imediata, se distanciou daqueles obtidos nas vigas anteriores e do coeficiente testado.

## 5 CONCLUSÃO

O trabalho apresentou a análise numérica de dois modelos de vigas de concreto protendido com pós-tração não aderente, uma isostática real e três hiperestáticas experimentais, comparando as relações entre deformações imediatas e deformações lentas com o coeficiente de 2,5 utilizado por projetistas de estruturas de concreto e softwares de cálculo estrutural no Brasil.

É possível verificar que a análise comparativa das vigas YLA2, YLB2 e YLC1 de Chen (2008) nos parâmetros de deformação imediata x deformação lenta retornou valores pouco abaixo do coeficiente de 2,5, o que aponta que o coeficiente para essas vigas permitiria uma boa e segura aproximação. Porém, o valor de deformação de 1200 dias, que chega a 97,54% desse coeficiente, indica que podem haver melhorias na aproximação para a flecha diferida.

Já para a viga HEPTA QS05 V106, ambas as comparações entre deformações não superaram o valor do coeficiente estipulado de 2,5, o que indica que o coeficiente pode gerar valores bem mais elevados para a deformação lenta partindo da deformação imediata.

Observa-se, assim, que o coeficiente de 2,5 proposto por engenheiros estruturais e softwares de cálculo estrutural para simular a deformação lenta através da imediata apresenta valores que, para as vigas deste trabalho, podem tanto se aproximar bastante dos valores experimentais quanto prover valores de deformação lenta bem acima dos reais. Sugere-se, então, o estudo de melhores equacionamentos para a obtenção dos resultados de deformação lenta no concreto protendido, já que problemas de deformação, ou seja, do estado-limite de serviço, são os principais fins aos quais as vigas protendidas são utilizadas.

Por fim, avalia-se que o presente trabalho mostrou comparações adequadas para avaliação de um dos coeficientes de deformação lenta mais usados no Brasil, utilizando-se de programa PCB do LMCV-UFC no Matlab e de modelos de deslocamento com base em normas internacionais e no elemento finito de pórtico plano com 7 graus de liberdade, cumprindo os objetivos aos quais se propôs.

## REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: 2014.** Projeto de estruturas de concreto: procedimento: Rio de Janeiro: ABNT, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7483: 2020.** Cordoalhas de aço para estruturas de concreto protendido – Especificação. Rio de Janeiro: ABNT, 2020.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7482: 2020.** Fios de aço para estruturas de concreto protendido – Especificação. Rio de Janeiro: ABNT, 2020.

AZEVEDO, Álvaro F. M. **Método dos elementos finitos.** Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2003.

BAŽANT, Z. P.; JIRÁSEK, M. **Creep and hygrothermal effects in concrete structures.** Dordrecht, The Netherlands: Springer, 2018.

BUCHAIM, R. **Concreto Protendido:** tração axial, flexão simples e Força cortante. Londrina: EDUEL, 2007.

CEB-FIP, CEBFIP. Model code 2010. **Comite Euro-International du beton**, 2010.

CHEN, Y. W. **The experimental researches on unbonded partially prestressed concrete continuous beams.** Master's thesis. Changsha: Hunan University, 2008.

CUNHA, Leonardo do Nascimento. **Análise numérica de vigas de concreto protendido com cabos internos não-aderentes para cargas de curta duração e longa duração.** 2021. 113 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2021.

FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **A first course in finite elements.** Wiley, 2007.

GHALI, A.; FAVRE, R.; ELDBADRY, M. **Concrete Structures: Stress and deformation.** 4. Ed. Calgary: Fourth, 2002.

GILBERT, R. I.; RANZI, G. **Time Dependent Behaviour of Concrete Structures.** Canada: Spon Press, 2011.

HANAI, J. B. **Fundamentos do concreto protendido.** São Paulo: USP, 2005.

IMPACTO PROTENSÃO. Disponível em: [www.impactoprotensao.com.br](http://www.impactoprotensao.com.br). 2020. Acesso em: 27 ago. 2021.

LOU, Tiejiong; LOPES, Sergio M. R. L.; ADELINO, V. L. Nonlinear and time-dependent analysis of continuous unbonded prestressed concrete beams. **Computers & Structures**, v. 119, abr. 2013. Disponível em: <https://eg.uc.pt/bitstream/10316/47467/1/01%20CAS-S-12-01301%20v2.pdf>. Acesso em: 27 ago. 2021.

MASCARENHAS, F. J. R.; CARVALHO, R. Chust. Vida útil à fadiga da armadura longitudinal de vigas de pontes de concreto armado frente ao tráfego real de veículos pesados. **Revista ALCONPAT**, v. 9, n. 3, p. 303-319, set./dez. 2019.

PEREIRA, Anderson. **Projeto ótimo de pórticos planos com restrição à flambagem**. 2002. 14. f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil do Pontifícia) - Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.

SAKATA, K.; SHIMOUMURA, T. **Recent progress in research on and evaluation of concrete creep and shrinkage in Japan**, Journal of Advanced Concrete Technology 2(2): 133-140, 2004.

TROST, H.; MARSH, J. G. **The consequences of the principle of superposition on creep and relaxation problems in concrete and pre-stressed concrete**. 1967

VAZ, L. F. C. **Estudo do efeito de adjuvantes em geopolímeros obtidos de resíduos de minas**. 2011. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade da Beira Interior, 2011. Disponível em: <https://ubibliorum.ubi.pt/handle/10400.6/3589>. Acesso em: 10 jul. 2021.

VERÍSSIMO, G. S.; CÉSAR JÚNIOR, K. M. L. **Concreto Protendido: Fundamentos Básicos**. Notas de aula na disciplina de concreto protendido do curso de graduação em engenharia civil da Universidade Federal de Viçosa. 4 ed. Viçosa, 1998.

WCH. **Pistas de produção e bancos de ancoragem**. 201? (On-line). Disponível em: [http://www.weiler.com.br/protensao/bancos\\_pistas.html](http://www.weiler.com.br/protensao/bancos_pistas.html). Acesso em: 27 ago. 2021.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

Ata da Reunião da Banca Avaliadora para julgamento  
do Projeto de Graduação do aluno Felipe Soares  
Almeida, datada de 14 de fevereiro de 2022.

Em 14 de fevereiro de 2022, às 08:00 horas, reuniu-se, por videoconferência, a banca avaliadora constituída pelo Prof. João Batista Marques de Sousa Junior (orientador), pelo Prof. Augusto Teixeira de Albuquerque (examinador) e pelo Prof. Evandro Parente Junior (examinador) para, sob a presidência do primeiro, julgar o Projeto de Graduação do aluno **Felipe Soares Almeida** concluinte do Curso de Engenharia Civil, do Centro de Tecnologia, da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Civil. Abrindo a sessão o presidente da Comissão, apresentou o aluno, da qual foi orientador durante a elaboração de seu projeto de graduação intitulado: “**Análise da Deformação Lenta em Vigas de Concreto Protendido**”. Durante trinta minutos o candidato expôs o seu trabalho. Em seguida foi arguido pelos membros da Banca que sugeriram algumas alterações no trabalho. Depois, facultou-se a palavra aos presentes para perguntas e questionamentos. A seguir a Banca Avaliadora, em reunião secreta, considerou o trabalho APROVADO, atribuindo nota média igual a 8,5.

*João Batista Jr*

Prof. João Batista Marques de Sousa Junior, doutor  
(Orientador)

AUGUSTO TEIXEIRA DE  
ALBUQUERQUE:40990680304  
680304

Assinado de forma digital por

AUGUSTO TEIXEIRA DE

ALBUQUERQUE:40990680304

Dados: 2022.02.14 17:47:46 -03'00'

Prof. Augusto Teixeira de Albuquerque, doutor  
(Examinador)

*Evandro Parente Jr*

Prof. Evandro Parente Junior, doutor  
(Examinador)