



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

ISNARD LOPES COSTA

**COLORAÇÃO ACÍCLICA DE PRODUTOS DE DIGRAFOS E
DIGRAFOS COM LARGURA EM ÁRVORE LIMITADA**

**FORTALEZA
2020**

ISNARD LOPES COSTA

COLORAÇÃO ACÍCLICA DE PRODUTOS DE DIGRAFOS E
DIGRAFOS COM LARGURA EM ÁRVORE LIMITADA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre. Área de concentração: Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Ana Shirley Ferreira da Silva

FORTALEZA
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Costa, Isnard Lopes.

Coloração acíclica de produto de digrafos e digrafos com largura em árvore limitada / Isnard Lopes Costa. – 2020.
51 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2020.

Orientação: Profa. Dra. Ana Shirley Ferreira da Silva.

1. Digrafos . 2. Árvores (teoria dos grafos). 3. Produto de grafos. 4. Número cromático acíclico. I. Título.
CDD 510

ISNARD LOPES COSTA

COLORAÇÃO ACÍCLICA DE PRODUTOS DE DIGRAFOS E
DIGRAFOS COM LARGURA EM ÁRVORE LIMITADA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 30 / 10 / 2020.

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Ana Shirley Ferreira da Silva (Orientadora)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profª. Drª. Ana Karolinna Maia de Oliveira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

À Prof^a. Dra. Ana Shirley Ferreira da Silva, pela excelente orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora Ana Karolinna Maia de Oliveira e Fabrício Siqueira Benevides pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

À minha família pelo apoio incondicional, em especial minha mãe Marta Maria Lopes, por todo esforço e dedicação para com minha educação e formação de caráter, além de principal referência como profissional.

Aos colegas da turma de mestrado, alguns que me acompanham desde o ingresso na graduação, pelas reflexões, críticas e sugestões e estudos em grupo.

"Para examinar a verdade, é necessário, uma vez na vida, colocar todas as coisas em dúvida, tanto quanto possível". (Descartes, 1644, p. 3).

RESUMO

Nesse trabalho, estudamos uma coloração de digrafos. O número cromático acíclico de um digrafo G é o menor inteiro $\chi_a(G)$ tal que o conjunto de vértices de G pode ser partitionado em $\chi_a(G)$ conjuntos os quais induzem um subdigrafo acíclico de G . Dois tópicos são abordados sobre o número cromático acíclico. No primeiro, investigamos o número cromático acíclico dos produtos cartesiano, direto, forte e lexicográfico de digrafos. Demonstramos resultados em cada um desses produtos citados. Mostramos que o número cromático acíclico do produto cartesiano, $G \square H$, é igual ao $\max\{\chi_a(G), \chi_a(H)\}$. Mostramos também que o produto direto de qualquer quantidade finita de ciclos orientados possui número cromático acíclico igual a 2. Ademais, ainda sobre ciclos damos valores exatos para o produto forte de dois ciclos. Finalizando o tópico de produtos, damos valores exatos também para $C_n[H]$, o produto lexicográfico de um ciclo orientado em n vértices por um digrafo arbitrário H que satisfaça $n \leq \chi_a(H)$, complementando o resultado fornecido em (PLEANMANI; PANMA, 2016). No segundo tópico, damos o limitante superior $\lceil \frac{tw+1}{2} \rceil$ para o número cromático de um grafo orientado que tenha largura em árvore limitada por tw e é fornecido um algoritmo FPT para calcular o número cromático acíclico de digrafos que possuem largura em árvore limitada.

Palavras-chave: digrafos; árvores(teoria dos grafos); produto de grafos; número cromático acíclico.

ABSTRACT

In this work, a digraph coloring is studied. The acyclic chromatic number of a digraph G is the least integer $\chi_a(G)$ such that the vertex set of G can be partitioned into $\chi_a(G)$ sets each of which induces an acyclic subdigraph. Two topics are addressed on the acyclic chromatic number. In the first, we investigate the acyclic chromatic number of the cartesian, direct, strong and lexicographic products. We prove some results for each of these products. We show that the acyclic chromatic number of the cartesian product, $G \square H$, is equal to $\max\{\chi_a(G), \chi_a(H)\}$. Also, we showed that the direct product of a finite number of oriented cycles has acyclic chromatic number equals 2. Furthermore, still about the cycles, we establish exact values for the acyclic chromatic number of the strong product of two oriented cycles. And finishing the product topic, we establish exact values for the lexicographic product $C_n[H]$ of a oriented cycle on n vertices by an arbitrary digraph H such that $n \leq \chi_a(H)$ completing the result given in (PLEANMANI; PANMA, 2016). In the second topic, we prove that $\lceil \frac{tw+1}{2} \rceil$ is an upper bound for the acyclic chromatic number of a oriented graph that has treewidth at most tw and give an FPT algorithm to compute the chromatic number of bounded-treewidth digraphs is given.

Keywords: digraphs; trees(graph theory); graph product; acyclic chromatic number.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de coloração acíclica. Veja que os vértices de cada classe de cor induzem um subdigrafo acíclico	12
Figura 2 – A figura apresenta os produtos estudados neste trabalho. Aqui consideramos os produtos do ciclo com 3 vértices pelo caminho com caminho com 3 vértices. Da esquerda para a direita temos: o produto cartesiano, o produto direto, o produto forte e o produto lexicográfico. Os vértices dos fatores estão destacados em preto.	13
Figura 3 – Uma das possíveis representações gráficas do grafo G	17
Figura 4 – Essa figura ilustra os produtos cartesiano, direto e forte entre dois P_2 's. Os vértices dos fatores estão destacados em preto. Da esquerda para a direira, temos $P_2 \square P_2$, $P_2 \times P_2$, $P_2 \boxtimes P_2$	23
Figura 5 – Na figura vê-se C_3 , P_3 e o produto lexicográfico $C_3[P_3]$. Os vértices dos fatores estão destacados em preto.	23
Figura 6 – Essa figura ilustra os produtos cartesiano, direto e forte entre dois P_2 s direcionados. Os vértices dos fatores estão destacados em preto. Da esquerda para a direita, temos $P_2 \square P_2$, $P_2 \times P_2$, $P_2 \boxtimes P_2$	24
Figura 7 – Na figura vê-se C_3 , P_3 e o produto lexicográfico $C_3[P_3]$. Os vértices dos fatores estão destacados em preto.	24
Figura 8 – Um grafo e sua decomposição em árvore	26
Figura 9 – Prova passo a passo de que uma 2-coloração de $C_3 \boxtimes C_2$ não pode ser acíclica	37
Figura 10 – As 16 colorações de $C_3 \boxtimes C_3$, fixada a coloração CCP da coluna C^1 e coloração CPP da linha L^1 e as 16 colorações de $C_3 \boxtimes C_3$, fixada a coloração CCP da coluna C^1 e a coloração CCP da linha L^1 . Em cada uma delas mostramos o ciclo monocromático formado pelas arestas em destaque	37
Figura 11 – 2-coloração de $C_n \boxtimes C_m$, com $n \geq 3$ e $m \geq 4$	38
Figura 12 – Duas 2-colorações distintas que coincidem em $S = \{v_2, v_3, v_4\}$, destacado nos quadros menores. A segunda coloração é acíclica, enquanto a primeira não é	40
Figura 13 – Aqui temos $X_t = \{v, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e os conjuntos $S^- = \{v_1, v_2\}$ e $S^+ = \{v_3, v_4\}$. A componente fraca de H_c contendo v está à esquerda. Tomando como exemplo o conjunto $I = \{v_1, v_4\}$, o digrafo H^I está à direita.	43

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	NOTAÇÃO E DEFINIÇÕES	17
2.1	Definições básicas	17
2.2	Colorações	21
2.3	Produtos de grafos	22
2.4	Complexidade	25
2.5	Decomposição em árvore	26
3	PRODUTOS DE GRAFOS	28
3.1	Produto Cartesiano	28
3.2	Produto Direto	29
3.3	Produto Lexicográfico	30
3.4	Produto Forte	34
4	GRAFOS COM LARGURA EM ÁRVORE LIMITADA	39
4.1	Limitante	39
4.2	Algoritmo FPT	39
5	CONCLUSÃO	50
	REFERÊNCIAS	52

1 INTRODUÇÃO

Muitas situações do mundo real podem ser convenientemente descritas em termos de um diagrama consistindo de um conjunto de objetos relacionados entre si. Por exemplo, os objetos poderiam representar pessoas em uma rede social, estando duas delas relacionadas se uma faz parte dos contatos da outra e vice-versa. Ou ainda os objetos podem ser centros de comunicação, estando eles relacionados se existe uma rede de comunicação entre estes centros. Uma abstração matemática para situações desse é o conceito de um *grafo* (simples), que consiste de um par (V, E) onde V é um conjunto não-vazio e finito, chamado de *conjunto de vértices*, e E é uma família de subconjuntos de tamanho 2 de V , chamado de *conjunto de arestas*.

Uma vez que certa situação da vida real é modelada com um grafo, passamos também a modelar problemas da vida real como problemas sobre grafos. Em particular, uma grande variedade de problemas da vida real se traduz em problemas de coloração de grafos. Por exemplo, se os vértices representam antenas de transmissão, podemos relacionar dois vértices para sinalizar que haverá interferência no sinal caso estas antenas transmitam na mesma frequência. Se as cores representam frequências de rádio, ao darmos cores diferentes a esses vértices, resolvemos o problema de interferência, mais conhecido como problema de alocação de frequências (veja, por exemplo, (GAMST, 1986)). Um outro exemplo simples, porém interessante, consiste em colorir um mapa de maneira que duas regiões que compartilham uma fronteira não possuam a mesma cor. A investigação deste problema deu origem a um dos resultados mais famosos da Teoria dos Grafos, o Teorema das 4 Cores (APPEL; HAKEN, 1977), que diz que 4 cores são suficientes para realizar tal tarefa. Apesar de sua formulação simples, possui demonstração extremamente complexa, que ainda hoje depende da ajuda de computadores¹.

No contexto apresentado acima, uma *coloração própria* de um grafo G é uma atribuição de cores aos vértices de G de maneira que vértices adjacentes (que se relacionam entre si) não possuam a mesma cor. O *número cromático* de um grafo G é então definido como o menor inteiro k para o qual G admite uma coloração própria com k cores; ele é denotado por $\chi(G)$.

Além do ponto de vista prático, existem motivações teóricas para se trabalhar com coloração de grafos, como, por exemplo, no estudo de métricas que, à primeira vista, não possuem relacionamento evidente com o número cromático. Um exemplo surpreendente é o Teorema de (ERDŐS; Simonovits, 1965) que mostra que, para um grafo fixo G , o número máximo de arestas $f(n, G)$ em um grafo com n vértices que não contem G depende do número cromático de G :

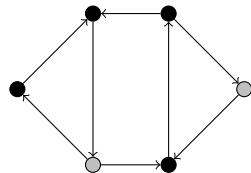
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n, G)}{n^2} = \frac{\chi(G) - 2}{2\chi(G) - 2}.$$

¹Para o leitor interessado, recomendamos a leitura do livro (FRITSCH *et al.*, 1998)

Uma vez que coloração em grafos é interessante também para fins teóricos, a investigação de suas generalizações também se torna relevante. Uma destas é o estudo do problema correspondente em digrafos, que são uma generalização de grafos onde os subconjuntos de V agora são tomados como pares ordenados ao invés conjuntos de dois elementos. Formalmente, um *digrafo* consiste de um par (V, E) onde V é um conjunto não-vazio e finito, chamado de *conjunto de vértices*, e E é uma família de pares ordenados de elementos de V , chamado de *conjunto de arestas direcionadas*.

Existem diversas versões de coloração para digrafos, dentre elas a que será objeto deste trabalho. Uma *coloração acíclica* de um digrafo D é uma partição do conjunto de vértices de D em subconjuntos que induzem subdigrafos acíclicos (como exemplo, veja a Figura 1). O menor inteiro k para o qual o digrafo D admite uma coloração acíclica com k cores é chamado *número cromático acíclico* e é denotado por $\chi_a(D)$. Observe que, dado um grafo não-direcionado $G = (V, E)$, podemos obter um digrafo $D = (V, E')$ associado a G tal que, para cada aresta $(u, v) \in E$, tem-se duas arestas direcionadas (u, v) e (v, u) em E' . Sendo assim, cada aresta de G dá origem a um ciclo de tamanho 2 em D . Logo, uma coloração acíclica de D equivale a uma coloração própria de G e vice-versa, ou seja, de fato o conceito de coloração acíclica em digrafos generaliza o conceito de coloração própria em grafos. Esta coloração foi introduzida em (NEUMANN-LARA, 1982), e tem atraído bastante interesse nos últimos anos (ver e.g. (FEDER; HELL; MOHAR, 2003; BERGER *et al.*, 2013; ANDRES; HOCHSTÄTTLER, 2015; ABOULKER *et al.*, 2016)).

Figura 1 – Exemplo de coloração acíclica. Veja que os vértices de cada classe de cor induzem um subdigrafo acíclico



Fonte: Elaborado pelo autor.

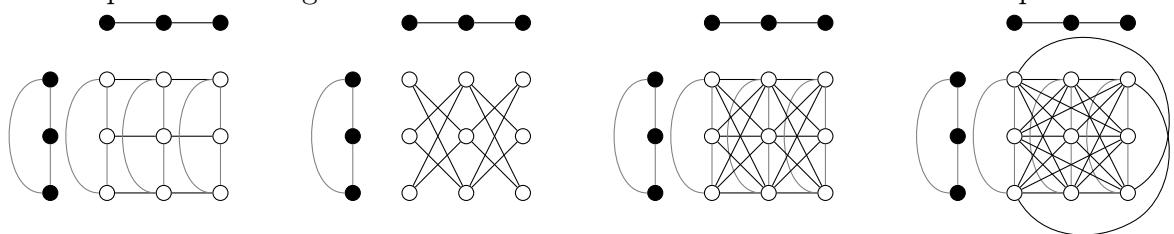
Muitos dos trabalhos sobre estas colorações propõem-se a investigar se elas são “a generalização correta” do problema de coloração própria em grafos. Em outras palavras, muitos autores estão interessados em saber se teoremas clássicos acerca do número cromático de grafos possuem sua contraparte em colorações acíclicas de digrafos. Como exemplo, considere o Teorema de Brooks que caracteriza os grafos com número cromático maior que o grau máximo do grafo. Em (MOHAR, 2010), o autor prova um resultado análogo ao de Brooks para digrafos. Outros artigos que generalizam resultados clássicos, por exemplo, são (HARUTYUNYAN; Mohar, 2012) e (BOKAL *et al.*, 2004).

Este trabalho propõe-se a dar continuidade a este tipo de investigação, tentando generalizar resultados sobre coloração própria de grafos para versões em coloração

acíclica de digrafos. Em particular, investigamos resultados sobre produtos de digrafos e a complexidade de achar uma coloração acíclica de um digrafo com largura em árvore limitada, onde a largura em árvore de um digrafo é dado pela largura em árvore de seu grafo subjacente.

Um *produto* de dois grafos (digrafos) G e H é um grafo (digrafo) definido sobre o produto cartesiano dos conjuntos de vértices de G e H . Os quatro produtos mais estudados são os produtos *cartesiano*, *direto*, *forte* e *lexicográfico*. Estes produtos são denotados por $G \square H$, $G \times H$, $G \boxtimes H$ e $G[H]$, respectivamente, e suas definições formais são feitas no Capítulo 2. A título de ilustração, na Figura 2 exibimos uma representação dos quatro produtos citados acima.

Figura 2 – A figura apresenta os produtos estudos neste trabalho. Aqui consideramos os produtos do ciclo com 3 vértices pelo caminho com 3 vértices. Da esquerda para a direita temos: o produto cartesiano, o produto direto, o produto forte e o produto lexicográfico. Os vértices dos fatores estão destacados em preto.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesse trabalho, generalizamos resultados em cada um dos produtos citados, como discutido a seguir.

Em (SABIDUSSI, 1957), o autor mostra que o número de cores necessárias para colorir o produto cartesiano de dois grafos é o máximo entre o número de cores suficientes para colorir cada fator do produto. Mostramos aqui que o mesmo vale quando se trata do produto de dois digrafos. Formalmente,

Teorema (Provado na seção 3.1). *Sejam G, H digrafos. Então,*

$$\chi_a(G \square H) = \max\{\chi_a(G), \chi_a(H)\}.$$

Uma propriedade interessante do produto direto é dada no teorema abaixo. O seu paralelo em grafos é conhecimento folclórico.

Teorema (Provado na seção 3.2). *Sejam G e H digrafos. Então,*

$$\chi_a(G \times H) \leq \min\{\chi_a(G), \chi_a(H)\}.$$

Uma conjectura famosa acerca do número cromático do produto direto de grafos é a Conjectura de (HEDETNIEMI, 1966), que afirmava que o limitante acima é

apertado, isto é, que $\chi(G \times H) = \min\{\chi(G), \chi(H)\}$. Ela é válida para grafos com número cromático no máximo 4 (EL-ZAHAR; Sauer, 1985), mas permaneceu 52 anos em aberto até que, recentemente, foi provada falsa em geral (SHITOV, 2019).

Como colorações acíclicas em digrafos são generalizações de colorações próprias em grafos não-direcionados, segue também do resultado em (SHITOV, 2019) que a igualdade não é válida para o número cromático acíclico. Porém, como discutido anteriormente, sabemos que esta generalização implica na existência de ciclos de tamanho 2 nos contra-exemplos obtidos por Shitov. Uma pergunta interessante, portanto, é se a igualdade é válida no caso de grafos orientados (grafos direcionados que não possuem ciclos de tamanho 2). O resultado a seguir aponta na direção positiva.

Teorema (Provado na seção 3.2). *Sejam C_{n_1}, \dots, C_{n_t} ciclos orientados com n_1, \dots, n_t vértices, respectivamente. Então,*

$$\chi_a(C_{n_1} \times \dots \times C_{n_t}) = 2.$$

No que concerne ao produto forte, até mesmo o problema de coloração própria de grafos se mostra desafiador já em ciclos, o que pode ser comprovado pela escassez de resultados sobre o tema. Até onde sabemos, o único resultado acerca do produto forte de ciclos foi apresentado em (VESZTERGOMBI, 1979), e diz que $\chi(C_{2k+1} \boxtimes C_{2n+1}) = 5$, para todo $k \geq 2$ e $n \geq 2$. No que diz respeito a ciclos orientados, conseguimos fornecer valores exatos para o produto forte de dois ciclos quaisquer.

Teorema (Provado na seção 3.4). *Sejam C_m, C_n ciclos orientados com m, n vértices, respectivamente.*

1. Se $m = n = 2$, então $\chi_a(C_m \boxtimes C_n) = 4$,
2. Se $m = 3$ e $n \in \{2, 3\}$, então $\chi_a(C_m \boxtimes C_n) = 3$,
3. Se $n \geq 3$ e $m \geq 4$, então $\chi_a(C_m \boxtimes C_n) = 2$.

No que diz respeito ao produto lexicográfico, em (GELLER; STAHL, 1975), os autores demonstraram a equivalência entre colorir o produto lexicográfico de G por H e colorir o produto de G pelo grafo completo com $\chi(H)$ vértices. Demonstramos o resultado análogo.

Teorema (Provado na seção 3.3). *Sejam G, H digrafos, com $\chi_a(H) = k$. Então*

$$\chi_a(G[H]) = \chi_a(G[\vec{K}_k]).$$

Ainda no que diz respeito ao produto lexicográfico, no trabalho seminal no estudo de coloração acíclica problema análogo a citações anteriores (NEUMANN-LARA, 1982), dentre outros resultados, o autor estabelece que um limitante inferior para o número cromático acíclico do produto lexicográfico de dois digrafos G, H é $\chi_a(G) + \chi_a(H) - 1$. Em (PLEANMANI; PANMA, 2016), os autores provam que esse limitante é apertado quando G é o ciclo orientado com n vértices e H é um digrafo arbitrário com $n > \chi_a(H)$; isto

é, eles provam que se $n > \chi_a(H)$, então $\chi_a(C_n[H]) = \chi_a(H) + 1$. Complementando este resultado, fornecemos valores também exatos para quando $n \leq \chi_a(H)$.

Teorema (Provado na seção 3.3). *Seja $n \geq 2$ inteiro, e H um digrafo qualquer. Se $n \leq \chi_a(H)$, então*

$$\chi_a(C_n[H]) = \begin{cases} 2 \cdot \chi_a(H), & \text{se } n = 2; \\ \chi_a(H) + \lceil \frac{\chi_a(H)}{n-1} \rceil, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Observe que $\lceil \frac{\chi_a(H)}{n-1} \rceil$ só é igual a $\chi_a(H)$ quando $n = 2$ e esse valor decresce gradativamente. Logo o limitante superior trivial de $2 \cdot \chi(H)$ só é atingido nos casos em que $n = 2$.

Uma área de estudos que tem sido bastante explorada na última década é a da *complexidade parametrizada* (ver e.g. (CYGAN *et al.*, 2015)). Em tal contexto, buscamos por soluções exponenciais para problemas *NP*-completos que podem ser feitas em tempo $f(k) \cdot p(n)$, onde $p(n)$ é um polinômio quando tomado sobre o tamanho da solução e $f(k)$ é uma função computável sobre um valor k , chamado de *parâmetro*. A escolha de um bom parâmetro pode impactar muito no tempo de execução de um programa, portanto, problemas desse tipo podem fazer uma diferença crucial na prática.

Existem algumas técnicas que são utilizadas para a construção de algoritmos parametrizados e, certamente, uma das abordagens mais bem-sucedidas é a do uso de decomposições em árvore. O conceito de largura em árvore foi originalmente introduzido por (BERTELE; Brioschi, 1973) sob o nome de *dimensão*. Mais tarde foi redescoberto por (ROBERTSON; SEYMOUR, 1984) e desde então tem sido estudado por muitos outros autores, além de ter tido uma grande influência no desenvolvimento de algoritmos *FPT* (ver, por exemplo, o capítulo dedicado ao assunto em (CYGAN *et al.*, 2015)). As principais razões para o sucesso dessa abordagem dentro da teoria da complexidade parametrizada são o famoso Teorema de Courcelle (COURCELLE; Mosbah, 1993), que caracteriza os problemas que podem ser resolvidos em tempo *FPT* quando são parametrizados pela largura em árvore, e a técnica conhecida como *bidimensionalidade* (DEMAINE; Hajiaghayi, 2008), que aplica o *Excluded-Grid Theorem* (ROBERTSON; SEYMOUR, 1986) para assegurar que certos problemas podem ser resolvidos de maneira eficiente ainda que se tenha uma largura em árvore grande.

Neste contexto, investigamos o problema de encontrar o número cromático acíclico de D quando o grafo subjacente a D possui largura em árvore limitada. Primeiramente, provamos o seguinte limitante superior para o caso de grafos orientados.

Teorema (Provado na seção 4.1). *Seja G um grafo, e D uma orientação de G . Então $\chi_a(D) \leq \left\lceil \frac{tw(G)+1}{2} \right\rceil$*

No artigo seminal (NEUMANN-LARA, 1982), o autor conjectura que toda

orientação de um grafo planar pode ser colorida aciclicamente com no máximo duas cores. Esta conjectura ficou conhecida como a *Conjectura das Duas Cores*. Mencionamos que, como grafos periplanares e série-paralelos são grafos planares com largura em árvore no máximo 2, o resultado acima nos diz que a Conjectura das Duas Cores vale para tais grafos. Isso, na verdade, já era conhecido, uma vez que estes grafos possuem grau mínimo no máximo 2 e essa propriedade é monotônica (vemos uma prova disso no Capítulo 2). De qualquer maneira, nosso resultado dá uma prova alternativa deste fato, além de prover um limite de 2 também para orientações de grafos *Halin*, que são grafos que possuem largura em árvore no máximo 3.

O problema de coloração de um grafo G com n vértices e largura em árvore k pode ser resolvido usando um algoritmo de programação dinâmica em uma decomposição em árvore de G . Tal algoritmo roda em tempo $\mathcal{O}(k^{k+\mathcal{O}(1)}n)$, o que faz desse problema, um problema FPT. Provamos que um resultado análogo também vale no contexto de colorações acíclicas.

Teorema (Provado na seção 4.2). *Seja G um digrafo com largura em árvore no máximo tw . Então existe um algoritmo que decide se G possui coloração acíclica com k cores em tempo $\mathcal{O}(k^{tw} \cdot 27^{tw^2} \cdot n)$.*

Até onde sabemos, o único outro algoritmo FPT para o problema é o algoritmo apresentado em (CORNEIL; Rotics, 2005). Este algoritmo é FPT quando parametrizado pela largura modular direcionada de G , denotada aqui por ω , e tem complexidade $\mathcal{O}(n^3 + 2^{\mathcal{O}(\omega \cdot 2^\omega)} \cdot n \cdot \log^2 n)$. É sabido que, sendo tw a largura em árvore de um digrafo cuja largura modular é ω , tem-se que $tw \leq 2(\log \omega + 1)$, (CORNEIL; Rotics, 2005; COURCELLE; Olariu, 2000). Ou seja, a classe dos digrafos de largura em árvore limitada é uma subclasse dos grafos de largura modular direcionada limitada. Vemos que, ao considerar esta subclasse, a complexidade do nosso algoritmo será de $\mathcal{O}(k^{2\log \omega} \cdot 27^{4\log^2 \omega} \cdot n)$, uma complexidade claramente melhor do que a do algoritmo apresentado em (CORNEIL; Rotics, 2005).

Essa dissertação está organizada como segue. No Capítulo 2, fornecemos as definições necessárias. No Capítulo 3 mostramos resultados sobre o número cromático acíclico dos quatro produtos abordados. No Capítulo 4, mostramos os resultados referentes a grafos com largura em árvore limitada. Finalmente, no Capítulo 5, apresentamos nossas considerações finais.

2 NOTAÇÃO E DEFINIÇÕES

2.1 Definições básicas

Um *grafo* G é um par ordenado $(V(G), E(G))$ consistindo de um conjunto $V(G)$ de *vértices* e um conjunto $E(G)$, disjunto de $V(G)$, de *arestas*, juntos com uma *função de incidência* ψ_G que associa a cada aresta de G um conjunto de vértices de tamanho 2 de G . Quando não há ambiguidade, nos referimos aos conjuntos $V(G), E(G)$ como simplesmente V e E , respectivamente. Se e é uma aresta e u e v são vértices tais que $\psi_G(e) = \{u, v\}$, então dizemos que e liga u e v , e os vértices u e v são chamados extremidades de e . Para simplificar a notação escrevemos uv para denotar o par não ordenado $\{u, v\}$.

Os grafos são assim denominados pois podem ser representados graficamente, e é essa representação gráfica que ajuda-nos a entender muitas de suas propriedades. Cada vértice é indicado por um ponto, e cada aresta é representada por uma linha que ligam os pontos que representam as suas extremidades.

Observe que não há uma única maneira de desenhar um grafo, uma vez que as posições relativas aos pontos que representam vértices e as formas das linhas que representam arestas normalmente não têm significância. Um diagrama de um grafo meramente descreve a relação de incidência entre seus vértices e arestas. Por exemplo, a Figura 3 representa o grafo cujos conjuntos de vértices e arestas são dados a seguir

$$G = (V(G), E(G))$$

onde

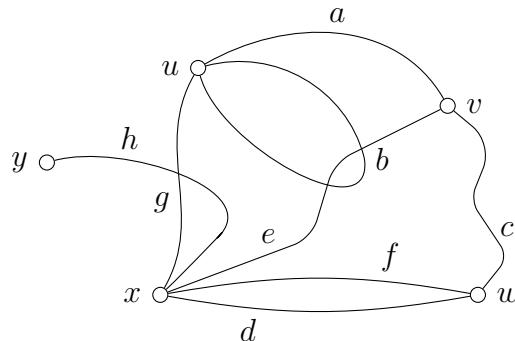
$$V(G) = \{u, v, w, x, y\}$$

$$E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

e ψ_G é definida por

$$\begin{aligned} \psi_G(a) &= uv & \psi_G(b) &= uu & \psi_G(c) &= vw & \psi_G(d) &= wx \\ \psi_G(e) &= vx & \psi_G(f) &= wx & \psi_G(g) &= ux & \psi_G(h) &= xy \end{aligned}$$

Figura 3 – Uma das possíveis representações gráficas do grafo G .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dois grafos G, H são *idênticos*, e escrevemos $G = H$, se $V(G) = V(H)$, $E(G) = E(H)$ e $\psi_G = \psi_H$. Também, dois grafos G, H são *isomorfos*, e escrevemos $G \cong H$, se existem bijeções $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ e $\phi : E(G) \rightarrow E(H)$ tais que $\psi_G(e) = uv$ se, e somente se, $\psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$; tal par de funções é chamado um *isomorfismo* entre G e H . Definimos a união de dois grafos G e H que possuem mesmo conjunto de vértices V , como o grafo $G \cup H = (V, E(G) \cup E(H))$.

Dizemos que as extremidades de uma aresta são *incidentes* a ela, e *vice versa*. Dois vértices que são incidentes a uma aresta comum são chamados *adjacentes*. Da mesma forma também chamamos duas arestas incidindo em um vértice comum de adjacentes. Além disso, dois vértices adjacentes distintos são ditos *vizinhos*. O conjunto dos vizinhos de um vértice v será denotado por $N_G(v)$. O *grau de um vértice* v no grafo G é definido pelo tamanho do conjunto $N_G(v)$, e é denotado por $d_G(v)$. Um conjunto de vértices onde quaisquer dois vértices são adjacentes é chamado de *clique* e um conjunto de vértices onde quaisquer dois vértices são não-adjacentes é chamado de *conjunto estável* ou *independente*.

Uma aresta com extremidades idênticas é chamada *laço*. Duas ou mais arestas com o mesmo par de extremidade são chamadas *arestas paralelas*. Um grafo é dito *simples* se não possui laços ou arestas paralelas. A maior parte do estudo em teoria dos grafos se concentra em grafos simples.

O grafo tal que para qualquer par de vértices u, v , a aresta uv está em $E(G)$ é chamado *grafo completo*. Denotamos por K_n o grafo completo com n vértices.

Um *subgrafo* H de G é um grafo tal que $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$. Dado um grafo G , existem duas formas naturais de produzir subgrafos. Se e é uma aresta de G , podemos obter um grafo com $|E(G)| - 1$ arestas deletando e do conjunto de arestas e mantendo as demais intactas. O grafo resultante é denotado por $G - e$. Analogamente, se v é um vértice de G , podemos obter um grafo com $|V(G)| - 1$ vértices deletando v do conjunto de vértices, junto de todas as arestas que nele incidem. O grafo resultante é denotado por $G - v$. Estas operações são chamadas de *deleção de arestas* e *deleção de vértices*, respectivamente.

Um subgrafo obtido apenas por deleções de arestas de G é chamado um *grafo gerador* de G , em outras palavras, tem mesmo conjunto de vértices que G . Se S é o conjunto de arestas deletadas, tal subgrafo é denotado por $G - S$. Observe que todo grafo simples é subgrafo gerador de um grafo completo. Um subgrafo obtido apenas por deleções de vértices de G é chamado um *subgrafo induzido* de G . Se X é o conjunto dos vértices deletados, o subgrafo resultante é denotado por $G - X$. Frequentemente é no conjunto $Y := V \setminus X$ de vértices restantes que estamos interessados. Em tais casos, o subgrafo é denotado por $G[Y]$ e nos referimos como o subgrafo de G *induzido por* Y .

Um *passeio* em G é uma sequência finita e não vazia $W : v_0, e_1, v_1, \dots, e_\ell, v_\ell$ cujos elementos são alternadamente vértices e arestas do grafo G (não necessariamente distintos) tais que $e_i = v_{i-1}v_i$, para todo $i \in [\ell]$. Se $v_0 = u$ e $v_\ell = v$, dizemos que W

conecta u a v e nos referimos a W como um *uv-passeio*. Um *caminho* é um passeio que não repete vértices, mas também pode ser visto como um grafo simples cujos vértices podem ser arranjados em sequência linear de forma que dois vértices são adjacentes se eles forem consecutivos na sequência e não-adjacentes caso contrário. O tamanho máximo de um menor caminho entre dois vértices de G é chamado *diâmetro* de G e denotado por $\text{diam}(G)$. Analogamente, um *ciclo* é passeio que não repete arestas nem vértices, com exceção do primeiro e último vértice que são iguais, um ciclo com 3 ou mais vértices pode ser visto também como um grafo simples cujos vértices podem ser arranjados em uma sequência cíclica de forma que dois vértices são adjacentes se eles forem consecutivos na sequência e não-adjacentes caso contrário; um ciclo de 1 vértice consiste de um único vértice com um laço e um ciclo de 2 vértices consiste de dois vértices ligados por um par de arestas paralelas. O *tamanho* de um caminho ou um ciclo é a quantidade de seus vértices. O *cumprimento* de um caminho ou um ciclo é a quantidade de seus arestas. Um caminho ou ciclo de tamanho k é chamado um *k -caminho* ou *k -ciclo* e denotam-se P_k e C_k , respectivamente.

Apresentamos a seguinte proposição que será utilizada futuramente em nossos resultados.

Proposição 2.1. *Seja G um grafo qualquer e $u, v \in V(G)$. Se existe um passeio de u para v , então existe um caminho de u para v .*

Prova. Seja $W : u = v_0, e_1, v_1, \dots, e_\ell, v_\ell = v$ um *uv-passeio*. Se W não possui vértices repetidos, então W é um caminho. Suponha, então, que haja um vértice repetido, digamos, $u_i = u_j$ com $0 \leq i < j \leq \ell$. Então, podemos escrever $W : u = v_0, \dots, e_i, v_i, e_{i+1}, \dots, e_j, v_j, e_{j+1}, \dots, e_\ell, v_\ell$. Veja que se removermos o trecho e_{i+1}, \dots, e_j, v_j , então obtemos $W^* : u = v_0, \dots, e_i, v_i, e_{j+1}, \dots, e_\ell, v_\ell$ o que ainda é um *uv-passeio* válido. Note que esse processo diminui a quantidade de vértices do passeio W em pelo menos uma unidade. Se W^* não possui vértices repetidos, então W^* é o *uv-caminho* desejado, caso contrário, repetimos esse mesmo processo até que não haja mais vértices repetidos, o que acontece pois todos os grafos abordados aqui são finitos. Portanto, após realizar esse processo o quanto for necessário, teremos produzido um *uv-caminho*.

□

Um grafo G é dito *conexo* se, para cada $u, v \in V(G)$, existe um caminho entre u e v . Um subgrafo maximal conexo F de G é chamado componente conexa de G . Um grafo que não possui ciclos, é chamado *floresta* e uma floresta que é conexa é chamada *árvore*. Note que cada componente conexa de uma floresta é uma árvore.

Um grafo é dito *planar*, se pode ser desenhado no plano de tal maneira que suas arestas apenas se intersectem as extremidades. Tal desenho é chamado *uma imersão planar do grafo*. Um *grafo plano* (G, φ) é definida como um grafo planar G junto a uma função φ que associa cada vértice de G a um ponto do plano, e cada aresta de G a uma

curva plana tal que os pontos de extremidade de cada curva seja imagem das extremidades de cada aresta, e todas as curvas são disjuntas, com exceção das suas extremidades. Normalmente tratamos da imersão de forma implícita, nos referindo à imersão planar (G, φ) como o grafo planar G .

Embora muitos problemas se dêem à formulação da teoria dos grafos, o conceito de um grafo às vezes não é o mais adequado. Quando lidamos com problemas de fluxo de tráfego, por exemplo, é necessário saber quais vias são de sentido único e em qual direção é permitido locomover-se. Nesses casos, o conceito de grafos não é o suficiente, precisamos de um grafo em que cada aresta tenha uma orientação associada. Chamamos um grafo dessa forma de *grafo direcionado*, ou *digrafo*.

Formalmente, um *digrafo* consiste de um par (V, E) onde V é um conjunto não-vazio e finito, chamado de *conjunto de vértices*, e E é uma relação irreflexiva sobre V , chamado de *conjunto de arestas direcionadas*. Um *subdigrafo* F de D é um digrafo tal que $V(F) \subseteq V(D)$ e $A(F) \subseteq A(D)$. Se a é um arco e $\psi_D(a) = (u, v)$, dizemos que a liga u a v ou ainda, que u domina v . Além disso, u e v são chamados as *extremidades* de a . O vértice u é chamado *cauda* de a e o vértice v é chamado *cabeça* de a . Os vértices de D que dominam um vértice v são chamados seus *vizinhos de entrada*, enquanto que os vértices de D que um vértice v domina são chamados seus *vizinhos de saída*. Esses conjuntos são denotados por $N_D^-(v), N_D^+(v)$, respectivamente. Definimos o *grau* de um vértice v em um digrafo D como sendo o grau de v no grafo subjacente de D . O *grau de entrada* d_D^- de v é o tamanho do conjunto $N_D^-(v)$ e o *grau de saída* d_D^+ é o tamanho do conjunto $N_D^+(v)$. Os graus de saída e entrada mínimos de D são denotado por $\delta^-(D)$ e $\delta^+(D)$, respectivamente. Os graus de saída e entrada máximos de D são denotados por $\Delta^-(D)$ e $\Delta^+(D)$, respectivamente. Um digrafo D é dito *euleriano* se para todo vértice $v \in V(D)$ tivermos $d^-(v) = d^+(v)$.

No restante do texto nos referirmos a arestas direcionadas simplesmente como arestas. Mencionamos que alguns autores preferem o termo da palavra arco no lugar de aresta direcionada.

Podemos associar com um digrafo D um grafo G com mesmo conjunto de vértices simplesmente substituindo cada arco por uma aresta com mesmas extremidades. Este grafo é o *grafo subjacente* de D , um digrafo é dito *conexo* se seu digrafo subjacente é conexo. Da mesma forma, um grafo G pode ser visto como um digrafo pela substituição de cada aresta por dois arcos de orientações opostas com mesmas extremidades; esse é o *digrafo associado* de G . Pode-se também, substituir cada aresta de G por apenas um dos arcos possíveis com mesmas extremidades. O digrafo obtido é chamado uma *orientação* de G . Uma orientação de um grafo simples é chamada *grafo orientado*. Um caso especial bastante estudado de grafo orientado é uma orientação de um grafo completo, que recebe o nome de *torneio*. O *digrafo completo com k vértices* \vec{K}_k é o digrafo tal que para quaisquer dois vértices $u, v \in V(\vec{K}_k)$, tem-se que o arco $(u, v) \in E(\vec{K}_k)$.

Um *caminho direcionado* ou um *ciclo direcionado* é uma orientação de um caminho ou de um ciclo, respectivamente, onde cada vértice domina seu sucessor na sequência. Assim como no caso não-direcionado, nos referimos ao *tamanho* de um caminho ou ciclo como seu número de vértices e o *comprimento* de um caminho ou ciclo como seu número de arestas. Um caminho direcionado ou um ciclo direcionado de tamanho k é chamado k -caminho-direcionado ou k -ciclo-direcionado, denotados por \vec{P}_k e \vec{C}_k , respectivamente. Um digrafo é dito *acíclico* se não possui ciclos direcionados, também nos referimos a um digrafo acíclico por *DAG*. Observe que os DAG's estão para digrafos, assim como florestas estão para grafos não-direcionados. Um subdigrafo maximal F de D que é tal que para cada $u, v \in V(D)$ existe um caminho-direcionado de u para v e um caminho-direcionado de v para u em F é chamado *componente fortemente conexa*, ou simplesmente *componente forte* de D . Uma *componente fracamente conexa* ou *componente fraca* do digrafo D é simplesmente uma componente conexa do grafo subjacente a D . Dizemos que um digrafo D é *transitivo* quando, para $u, v, w \in V(D)$, temos que $uv, vw \in E(D)$ implicam que a aresta $vw \in E(D)$. Chamamos vw de *aresta transitiva*. O digrafo minimal transitivo que contém D é chamado *fecho transitivo* de D e é denotado por $ft(D)$.

Um conjunto de vértices $A \subseteq V(D)$ é um *conjunto acíclico* se o subdigrafo induzido $D[A]$ é acíclico. Um *homomorfismo acíclico* de um digrafo D em um digrafo F é uma função $\phi : V(D) \rightarrow V(F)$ tal que: (i) para cada arco $uv \in E(D)$, ou $\phi(u) = \phi(v)$ ou $\phi(u)\phi(v)$ é arco de F , e (ii) para todo vértice $v \in V(F)$, o subgrafo de D induzido por $\phi^{-1}(v)$ é acíclico.

Sejam a, b, c e m inteiros. Dizemos que a divide b se existe um inteiro q tal que $b = a \cdot q$. Usamos a notação $a|b$ para dizermos que a divide b . Dizemos que a é *congruente a* b *módulo* m se $m|(a - b)$, e denotamos $a \equiv b \pmod{m}$. Se $a + c \equiv b + c \pmod{m}$, então $a \equiv b \pmod{m}$. Essa propriedade é conhecida como *Regra do corte*.

Dados X, Y conjuntos não-vazios e $A \subseteq X$ dizemos que uma função $f : X \rightarrow Y$, estende uma função $g : A \rightarrow Y$ se $f(x) = g(x)$, qualquer que seja $x \in A$. Além disso, dizemos também que f é uma *extensão* de g . Definimos também a *restrição de uma função* $f : X \rightarrow Y$ ao conjunto A como sendo a função $f|_A : A \rightarrow Y$ tal que f estende $f|_A$.

2.2 Colorações

Uma *k -coloração de vértices* de um grafo $G = (V, E)$, ou simplesmente uma *k -coloração*, é uma função $f : V \rightarrow S$, onde S é um conjunto de k cores. Normalmente, o conjunto S é tomado como sendo $[k] = \{1, \dots, k\}$. Uma coloração f é dita *própria* se nenhum par de vértices adjacentes possui mesma cor atribuída. Um grafo é *k -colorível* se possui uma k -coloração própria.

Alternativamente, uma k -coloração própria pode ser vista como uma partição $\{V_1, \dots, V_k\}$ de V , onde V_i denota o conjunto de vértices assinalados com cor i , para cada $i \in [k]$. Os conjuntos V_i são chamados classes de cor da coloração. Uma k -coloração própria, portanto, é uma k -coloração na qual cada classe de cor é um conjunto estável. O mínimo inteiro k no qual um grafo G é k -colorível é chamado seu *número cromático*, e é denotado por $\chi(G)$.

Um *homomorfismo* de um grafo G em outro grafo H é dado por uma função $f : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $f(u)f(v) \in E(H)$, para qualquer $uv \in E(G)$. Observe que quando H é o grafo completo K_k , então um homomorfismo de G em H é também uma k -coloração própria de G , e vice-versa.

Uma extensão da coloração usual de grafos, primeiramente introduzida em (NEUMANN-LARA, 1982) é o conceito de *coloração acíclica*. Uma k - k -coloração acíclica de D é uma função $f : V(D) \rightarrow [k]$ tal que o conjunto $f^{-1}(v)$ induz um DAG como subdigrafo de D , para cada $v \in V(D)$. Há, então, uma equivalência entre uma k coloração acíclica e um homomorfismo acíclico de D em \vec{K}_k . O parâmetro $\chi_a(D)$, chamado *número dicromático* de D (ou número cromático acíclico), é o menor valor de k tal que G admite uma k -coloração acíclica.

2.3 Produtos de grafos

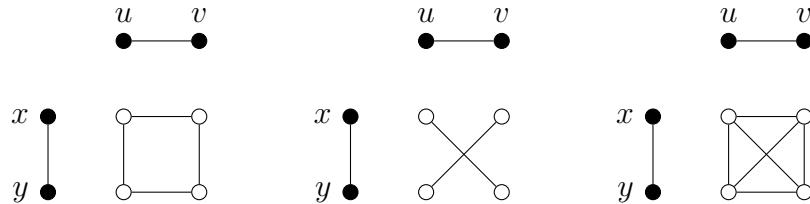
Dados dois grafos não-direcionados G e H , definimos sobre o conjunto de vértices $V(G) \times V(H)$ grafos chamados de *produtos* entre G e H , e chamamos G, H de *fatores* do produto. Alguns desses produtos são estudados na literatura e os mais relevantes recebem os nomes de *Produto Cartesiano*, *Produto Direto*, *Produto Forte* e *Produto Lexicográfico*. Estes produtos, assim como a notação relacionada, são definidos na abaixo, respectivamente. A notação para os produtos é inspirada no grafo formado pelo produto de duas arestas.

1. Produto Cartesiano ($G \square H$): $(u, x)(v, y) \in E(G \square H)$ se, e somente se,
 $u = v$ e $xy \in E(H)$ ou $uv \in E(G)$ e $x = y$.
2. Produto Direto ($G \times H$): $(u, x)(v, y) \in E(G \times H)$ se, e somente se,
 $uv \in E(H)$ e $xy \in E(G)$.
3. Produto Forte ($G \boxtimes H$): $(u, x)(v, y) \in E(G \boxtimes H)$ se,
e somente se, $u = v$ e $xy \in E(H)$, ou $uv \in E(G)$ e $x = y$, ou $uv \in E(H)$ e $xy \in E(G)$.
4. Produto Lexicográfico ($G[H]$): $(u, x)(v, y) \in E(G[H])$ se, e somente se,
 $u = v$ e $xy \in E(H)$ ou $uv \in E(G)$. A notação é a mesma de grafo induzido, mas pelo contexto ficará claro de qual das duas definições estaremos tratando.

Veja nas Figuras 4 e 5 exemplos dos produtos definidos acima.

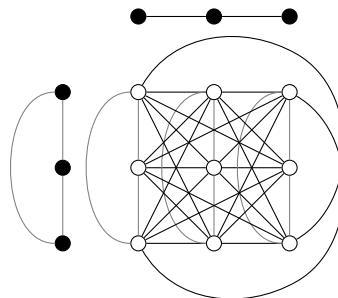
Figura 4 – Essa figura ilustra os produtos cartesiano, direto e forte entre dois P_2 's. Os vértices dos fatores estão destacados em preto. Da esquerda para a direira, temos

$$P_2 \square P_2, P_2 \times P_2, P_2 \boxtimes P_2.$$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 5 – Na figura vê-se C_3 , P_3 e o produto lexicográfico $C_3[P_3]$. Os vértices dos fatores estão destacados em preto.



Fonte: Elaborado pelo autor.

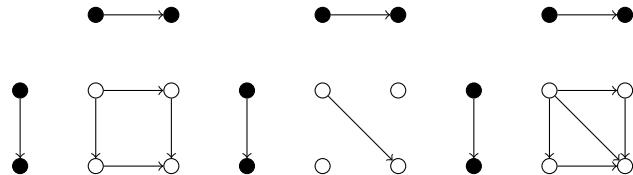
Podemos falar em produtos de dois digrafos D, F , definidos sobre o conjunto de vértices $V(D) \times V(F)$, recebendo também os nomes *Produto Cartesiano*, *Produto Direto*, *Produto Forte* e *Produto Lexicográfico*. Estes produtos, assim como a notação relacionada, são definidos na abaixo, respectivamente.

1. Produto Cartesiano ($D \square F$): $(u, x)(v, y) \in A(D \square F)$ se, e somente se, $u = v$ e $xy \in A(F)$ ou $uv \in A(D)$ e $x = y$.
2. Produto Direto ($D \times F$): $(u, x)(v, y) \in A(D \times F)$ se, e somente se, $uv \in A(F)$ e $xy \in A(D)$.
3. Produto Forte($D \boxtimes F$): $(u, x)(v, y) \in A(D \boxtimes F)$ se, e somente se, $u = v$ e $xy \in A(F)$, ou $uv \in A(D)$ e $x = y$, ou $uv \in A(F)$ e $xy \in A(D)$.
4. Produto Lexicográfico($D[F]$): $(u, x)(v, y) \in A(D[F])$ se, e somente se, $u = v$ e $xy \in A(F)$ ou $uv \in A(D)$.

Veja nas Figuras 6 e 7 exemplos dos produtos definidos acima.

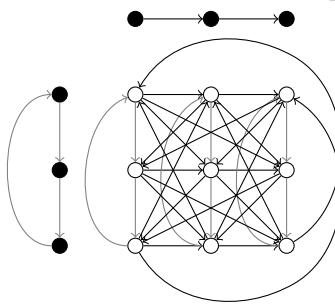
Figura 6 – Essa figura ilustra os produtos cartesiano, direto e forte entre dois P_2 s direcionados. Os vértices dos fatores estão destacados em preto. Da esquerda para a

direita, temos $P_2 \square P_2$, $P_2 \times P_2$, $P_2 \boxtimes P_2$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 7 – Na figura vê-se C_3 , P_3 e o produto lexicográfico $C_3[P_3]$. Os vértices dos fatores estão destacados em preto.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Demonstramos a seguir um lema que será amplamente utilizado nas demonstrações do próximo capítulo.

Lema 2.1. *Sejam G e H digrafos tais que o produto lexicográfico $G[H]$ contém um ciclo $C = (w_1, \dots, w_t)$. Então, para cada $i \in [t]$ tal que $w_i = (u_i, v_i)$, $U = \{u_1, \dots, u_t\}$ e $V = \{v_1, \dots, v_t\}$, tem-se que U não é conjunto acíclico de G ou V não é conjunto acíclico de H . Ademais, como o produto lexicográfico contém todos os outros produtos, um ciclo contido em qualquer um dos produtos implica em um ciclo em algum dos fatores.*

Prova. Primeiro veja que não podemos ter simultaneamente $|U| = 1 = |V|$, pois isso implicaria que C é um laço, que não estamos considerando nesse trabalho. Suponha primeiro que $|U| \geq 2$. Sejam u_{t_1}, \dots, u_{t_r} , com $t_j \in [t]$, para todo $j \in [r]$, os vértices que não se repetem consecutivamente em U enumerados na ordem em que aparecem em C . Pela definição de produto lexicográfico, como $w_{t_{i-1}}w_{t_i} \in E(G[H])$ e $u_{t_{i-1}} \neq u_{t_i}$, temos que $u_{t_{i-1}}u_{t_i} \in E(G)$, para cada $i \in [r]$. Logo, o subdigrafo de G induzido pelos vértices u_1, \dots, u_r contém um ciclo. Assim, U não é acíclico. Suponha agora que $U = \{u\}$ e $|V| \geq 2$. Sejam v_{t_1}, \dots, v_{t_s} , com $s \in [t]$ os vértices que não se repetem em V enumerados na ordem em que aparecem em C . Pela definição de produto lexicográfico, como

$w_{t_{i-1}}w_{t_{(i+1)}} \in E(G[H])$ e $u_1 = \dots = u_t$, temos que $v_{t_{i-1}}v_{t_i} \in E(H)$, para cada $i \in [s]$. Logo, o subdigrafo de H induzido pelos vértices v_{t_1}, \dots, v_{t_r} contém um ciclo. Assim, V não é acíclico.

□

2.4 Complexidade

Sejam $f, g : A \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ funções de valor real não-negativo, definidas sobre um conjunto de números naturais. Dizemos que $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ se existem $n_0 \in A$ e uma constante real $c > 0$ tal que $f(n) \leq c \cdot g(n)$ para todo valor de $n > n_0$.

Na teoria da complexidade computacional, P é uma *classe fundamental de complexidade*. Ela contém todos os problemas de decisão que podem ser resolvidos por uma máquina de Turing determinística usando em tempo polinomial. Uma linguagem $L \subseteq \Sigma^*$, onde Σ é um alfabeto fixo finito é dito estar em P se, e somente se, existe uma máquina de Turing M tal que:

- M roda em tempo polinomial para toda entrada,
- Para todo $x \in L$, M retorna 1 e
- Para todo $x \notin L$, M retorna 0.

Também temos que NP é uma classe fundamental de complexidade. Ela contém todo problema de decisão para o qual uma instâncias cuja resposta é "sim" tem prova verificável em tempo polinomial por uma máquina de Turing determinística.

Uma linguagem $L \subseteq \Sigma^*$, onde Σ é um alfabeto fixo finito é dito estar em P se, e somente se, existem polinômios p e q e uma máquina de Turing determinística M , tais que:

- Para todos x e y , a máquina M roda em tempo $p(|x|)$ na entrada (x, y) ,
- Para todo $x \in L$, existe um vetor y de tamanho $q(|x|)$ tal que $M(x, y) = 1$
- Para todo $x \notin L$ e todos os vetores y de tamanho $q(|x|)$, $M(x, y) = 0$.

Temos que $P \subseteq \text{NP}$, pois se um problema é resolvido em tempo polinomial, então uma solução é também verificável em tempo polinomial, simplesmente resolvendo o problema. Os problemas mais difíceis da classe NP são chamados *problemas NP-completos*. Uma linguagem L é NP -completo se $L \in \text{NP}$ e cada problema em NP é reduzível a L em tempo polinomial.

Um *problema parametrizado* é uma linguagem $L \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$, onde Σ é um alfabeto fixo finito. Para uma instância $(x, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$, o valor k é chamado de *parâmetro*. Definimos o tamanho de uma instância (x, k) de um problema parametrizado como $|x| + k$.

Um problema parametrizado $L \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ é chamado *tratável com parâmetro fixo* (FPT) se existem um algoritmo \mathcal{A} (chamado *algoritmo com parâmetro fixo*), uma função computável $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, e uma constante c tais que, dada instância $(x, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$, o algoritmo \mathcal{A} decide corretamente se $(x, k) \in L$ em tempo limitado por $f(k) \cdot |(x, k)|^c$.

A classe de complexidade contendo todos os problemas tratáveis com parâmetro fixo é chamada **FPT**.

Um problema parametrizado $L \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ é chamado *polynomial por partes* (**XP**) se existem um algoritmo \mathcal{A} e duas funções computáveis $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tais que, dada instância $(x, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$, o algoritmo \mathcal{A} decide corretamente se $(x, k) \in L$ em tempo limitado por $f(k) \cdot |(x, k)|^{g(k)}$. A classe de complexidade contendo todos os problemas polinomiais por partes é chamada **XP**.

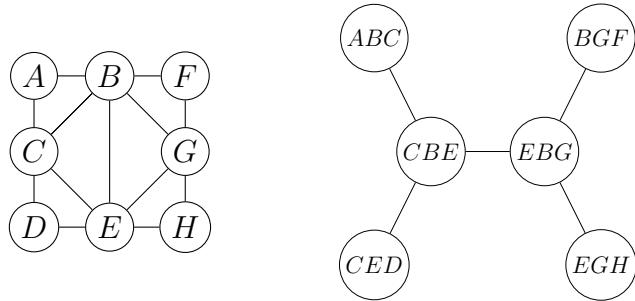
2.5 Decomposição em árvore

Uma *decomposição em árvore* de um grafo G é um par $\mathcal{T} = (T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$, onde T é uma árvore cujo todo nó t é relacionado a um subconjunto $X_t \in V(G)$, chamado sacola, tal que as seguintes três condições são satisfeitas:

- (T1) $\bigcup_{t \in V(T)} X_t = V(G)$. Em outras palavras, cada vértice de G está em pelo menos uma sacola.
- (T2) Para cada $uv \in E(G)$, existe um nó t de T tal que a sacola X_t contém ambos u e v .
- (T3) Para cada $u \in V(G)$, o conjunto $T_u = \{t \in V(T) \mid u \in X_t\}$, isto é, o conjunto dos nós cujas sacolas correspondentes contêm u , induzem uma subárvore conexa de T .

Um exemplo de decomposição em árvore pode ser visto na Figura 8

Figura 8 – Um grafo e sua decomposição em árvore



Fonte: Elaborado pelo autor.

A largura de uma decomposição $\mathcal{T} = (T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ é igual ao $\max_{t \in V(T)} |X_t| - 1$, ou seja, o tamanho da maior sacola menos 1. A *largura em árvore* de um grafo G , denotada por $\text{tw}(G)$, é a menor largura possível de uma decomposição em árvore de G . A largura em árvore pode ser muito pequena, mas também pode ser muito grande para classes particulares de grafos. Por exemplo, árvores e florestas tem largura em árvore no máximo 1 e ciclos tem largura em árvore 2, já a largura em árvore do grafo K_n é $n - 1$.

Dada uma componente fracamente conexa F de um digrafo G e um vértice $v \in V(F)$, definimos o conjunto dos *ancestrais* de v em F como o conjunto dos vértices

$\{u \in V(F) \mid \exists (u, v)\text{-caminho em } F\}$. Analogamente, definimos o conjunto dos *descendentes* de v em F como conjunto dos vértices $\{w \in V(F) \mid \exists (v, w)\text{-caminho em } F\}$.

É conveniente pensar em decomposições em árvores enraizadas, isto é, distinguimos um vértice $r \in V(T)$ que será a raiz de T . Isso introduz uma relação de ancestral-descendente na árvore T . Dizemos que uma decomposição em árvore enraizada é *boa* se as seguinte condições são satisfeitas:

- * $X_r = \emptyset$ e $X_\ell = \emptyset$ para cada folha ℓ de T .

- * Cada nó que não é folha de T é de um dos seguinte tipos:

- *Nó de introdução*: um nó t com exatamente um filho t' tal que $X_t = X_{t'} \cup \{v\}$ para algum $v \notin X'_t$; dizemos que v é *introduzido* em t .
- *Nó de abandono*: um nó t com exatamente um filho t' tal que $X_t = X_{t'} \setminus \{w\}$ tal que $w \in X'_t$; dizemos que w é abandonado em t .
- *Nó de junção*: um nó t com exatamente dois filhos t_1, t_2 tais que $X_t = X_{t_1} = X_{t_2}$.

Fixado um nó $t \in V(T)$, definimos o grafo G_t como sendo o subgrafo de G induzido pelos vértices das sacolas de todos os nós da subárvore de T enraizada em t .

O resultado a seguir, apresentado em (CYGAN *et al.*, 2015) nos garante a existência de decomposições em árvore boas para um certo grafo G com largura limitada.

Lema 2.2. *Se um grafo G admite uma decomposição em árvore com largura no máximo tw , então G também admite uma decomposição em árvore boa com largura no máximo tw . Ademais, dada uma decomposição em árvore $\mathcal{T} = (T, (X_t)_{t \in V(T)})$ de G com largura no máximo tw , pode-se obter uma decomposição em árvore boa de G com largura no máximo tw que possui no máximo $\mathcal{O}(tw|V(G)|)$ nós em tempo $\mathcal{O}(tw^2 \max(|V(T)|, |V(G)|))$.*

Devido ao Lema acima, podemos assumir que toda decomposição em árvore boa usada em algoritmos tem $\mathcal{O}(tw|V(G)|)$ nós.

3 PRODUTOS DE GRAFOS

Como já comentado na introdução, vários dos estudos acerca de variações do problema de coloração sobre digrafos, se dedicam a comprovar que resultados válidos em coloração de grafos não-direcionados também valem em coloração acíclica de digrafos. Dando continuidade a este tipo de estudo, neste capítulo, demonstramos resultados em coloração acíclica de produtos de digrafos que têm resultados paralelos em coloração usual de produtos de grafos não-direcionados.

3.1 Produto Cartesiano

(SABIDUSSI, 1957) demonstrou que, dados dois grafos G, H , para colorir propriamente o produto cartesiano $G \square H$, é necessário e suficiente usar o maior dentre o número de cores utilizadas para colorir G e H . Formalmente, demonstrou-se o seguinte teorema:

Teorema 3.1. (*SABIDUSSI, 1957*) *Sejam G, H grafos. Então,*

$$\chi(G \square H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}.$$

Tal resultado, adaptado à coloração acíclica, se mantém verdadeiro, como pode ser verificado no teorema a seguir.

Teorema 3.2. *Sejam G, H digrafos. Então,*

$$\chi_a(G \square H) = \max\{\chi_a(G), \chi_a(H)\}.$$

Prova. Suponha $\max\{\chi_a(G), \chi_a(H)\} = \chi_a(G) = k$. Como $G \subseteq G \square H$, temos $\chi_a(G \square H) \geq k$. Considere agora k -colorações acíclicas $f_1 : V(G) \rightarrow [k]$ e $f_2 : V(H) \rightarrow [k]$ de G e H , respectivamente. Defina $f : V(G) \times V(H) \rightarrow \{0, \dots, k-1\}$ tal que $f(u, v) = (f_1(u) + f_2(v)) \bmod k$. Suponha que f produz um ciclo monocromático $C = (z_1, \dots, z_t)$ de cor c e escreva $z_i = (u_i, v_i)$, com $u_i \in V(G), v_i \in V(H)$. Sejam agora $U = \{u_1, \dots, u_t\}$, $V = \{v_1, \dots, v_t\}$. Pelo Lema 2.1, os conjuntos U e V são tais que: $|U| = 1$ e V não é um conjunto acíclico em H ou $|U| \geq 2$ e U não é um conjunto acíclico em G . Se o o primeiro caso acontece, digamos $U = \{u\}$, então temos que $(f_1(u) + f_2(v_i)) \bmod k = f_1(u) = c = f_1(u_j) = (f_1(u) + f_2(v_j)) \bmod k$, para cada $i, j \in [t]$. Pela Regra do Corte, temos que $f_2(v_i) = f_2(v_j) \bmod k$ para cada $i, j \in [t]$. Como $f_2(v_i) \leq k$ e $f_2(v_j) \leq k$, para cada $i, j \in [t]$, temos que $f_2(v_i) = f_2(v_j)$, para cada $i, j \in [t]$. Assim, o subdigrafo de H induzido pelo conjunto V possui um ciclo monocromático de cor $f_2(v_1)$ em H , contradizendo a escolha de f_2 . Suponha, agora que $|U| \geq 2$. Para uma aresta

$(u_{i_p}, v_{i_p})(u_{i_{(p+1) \bmod t'}}, v_{i_{(p+1) \bmod t'}}) \in E(C)$, pela definição de Produto Cartesiano, como $u_{i_p} \neq u_{i_{p+1}}$, temos que $v_{i_p} = v_{i_{(p+1) \bmod t'}}$ e $u_{i_p}u_{i_{(p+1) \bmod t'}} \in E(G)$. Assim, temos a igualdade $(f_1(u_{i_p}) + f_2(v_{i_p})) \bmod k = (f_1(u_{i_{(p+1) \bmod t'}}) + f_2(v_{i_p})) \bmod k$. Segue, pela Regra do Corte, que $f_1(u_{i_p}) = f_1(u_{i_{(p+1) \bmod t'}}) \bmod k$. Como $f_1(u_{i_p}) \leq k$ e $f_1(u_{i_{(p+1) \bmod t'}}) \leq k$, temos que $f_1(u_{i_p}) = f_1(u_{i_{(p+1) \bmod t'}})$. Daí, como o argumento foi feito para um vértice arbitrário de U , segue que o subdigrafo de G induzido pelo conjunto U contém um ciclo monocromático de cor $f_1(u_{i_1})$, contradizendo a escolha de f_1 . Logo, C não existe e, assim, f é uma k -coloração acíclica de $G \square H$. Portanto $\chi_a(G \square H) \leq k$.

□

3.2 Produto Direto

Seja $f : V(G) \rightarrow [k]$ uma k -coloração de um grafo não-direcionado G e seja H um grafo não-direcionado arbitrário. É folclore que a função $g : V(G \times H) \rightarrow [k]$ definida por $g(a, x) = f(a)$ é uma k -coloração do grafo não-direcionado $G \times H$. Como H é arbitrário, temos que $\chi(G \times H) \leq \min\{\chi(G), \chi(H)\}$. A versão para coloração acíclica desse resultado também é válida, como demonstra-se no resultado a seguir.

Teorema 3.3. *Sejam G e H digrafos. Então,*

$$\chi_a(G \times H) \leq \min\{\chi_a(G), \chi_a(H)\}.$$

Prova. Seja $f : V(D) \rightarrow [k]$ uma k -coloração acíclica do digrafo D e seja F um digrafo qualquer. Seja $g : V(D) \times V(F) \rightarrow [k]$ definida por $g(a, x) = f(a)$. Suponha que alguma classe de cor, digamos c , não seja acíclica, e seja (w_1, \dots, w_t) um ciclo de cor c em $D \times F$; escreva $w_j = (u_j, v_j)$ para todo $j \in [t]$. Então, temos que $f(u_j) = g(w_j) = c = g(w_{j'}) = f(u_{j'})$ para todo $j, j' \in [t]$. Assim, (u_1, \dots, u_t) é um ciclo monocromático de cor c em D , contradição. Logo, $\chi_a(D \times F) \leq \chi_a(D)$. Como D é arbitrário, segue que $\chi_a(D \times F) \leq \min\{\chi_a(D), \chi_a(F)\}$.

□

Hedetniemi conjecturou que a igualdade $\chi(G \times H) = \min\{\chi(G), \chi(H)\}$ era verdadeira para quaisquer grafos G, H . Tal conjectura permaneceu em aberto até que Shitov exibiu um produto direto de dois grafos que tinha o número cromático menor do que cada um dos números cromáticos de seus fatores. Uma vez que a coloração acíclica é uma generalização de colorações próprias em grafos não-direcionados, temos que a igualdade também não é válida no caso do número cromático acíclico. Porém, uma boa pergunta é se ela poderia ser válida no caso de grafos orientados. O resultado a seguir mostra que a Conjectura de Hedetniemi é válida para produtos de ciclos direcionados.

Teorema 3.4. *Sejam C_n, C_m ciclos orientados. Então,*

$$\chi_a(C_n \times C_m) = 2.$$

Prova. Escreva $V(C_n) = [n]$ e $V(C_m) = [m]$. Pela definição de produto direto, todo vértice $(i, j) \in V(C_n \times C_m)$ tem grau de entrada igual ao de saída, iguais a 1. Logo, $C_n \times C_m$ é Euleriano em cada componente fortemente conexa. Mas, novamente, como $d^-(i, j)$ e $d^+(i, j)$ são iguais a 1, cada componente forte é um ciclo e essas componentes são disjuntas. Logo, $C_n \times C_m$ é um ciclo ou união disjunta de ciclos e, portanto, devemos usar pelo menos duas cores. Assim, $\chi_a(C_n \times C_m) \geq 2$. Como temos que $\chi_a(C_n \times C_m) \leq 2$ pelo Teorema 3.3, segue que $\chi_a(C_n \times C_m) = 2$

□

Observando que o mesmo argumento acima vale quando um dos fatores é uma união disjunta de ciclos direcionados, obtemos que o seguinte corolário é válido.

Corolário 3.1. *Sejam C_{n_1}, \dots, C_{n_t} ciclos orientados com n_1, \dots, n_t vértices, respectivamente. Então, $\chi_a(C_{n_1} \times \dots \times C_{n_t}) = 2$.*

3.3 Produto Lexicográfico

Em (GELLER; STAHL, 1975), os autores demonstraram a seguinte equivalência entre colorir o produto lexicográfico de G por H e colorir o produto de G pelo grafo completo com $\chi(H)$ vértices.

Teorema 3.5. (GELLER; STAHL, 1975) *Sejam G e H grafos não-direcionados, com $\chi(G) = k$. Então,*

$$\chi(G[H]) = \chi(G[K_k] \text{ citet}).$$

Verificamos que o resultado análogo ao Teorema 3.5 também é válido para coloração acíclica.

Teorema 3.6. *Sejam G e H digrafos, com $\chi_a(H) = k$. Então*

$$\chi_a(G[H]) = \chi_a(G[\vec{K}_k]).$$

Prova. Para demonstrar tal igualdade, prosseguimos mostrando que as duas desigualdades acontecem simultaneamente, como segue:

(≤) Como $k = \chi_a(H)$, existe um homomorfismo acíclico $f : H \rightarrow \vec{K}_k$. Considere, então, $g : G[H] \rightarrow G[\vec{K}_k]$ tal que $g(a, x) = (a, f(x))$. Queremos mostrar que g é um homomorfismo acíclico. Lembre-se que g é homomorfismo acíclico se, e somente se,

para todo $(a, x)(b, y) \in E(G[H])$ ou $g(a, x) = g(b, y)$ ou $g(a, x)g(b, y) \in E(G[\vec{K}_k])$ e além disso, para todo $(a, v) \in V(G[\vec{K}_k])$, o conjunto $g^{-1}(a, v)$ é um conjunto acíclico em $G[H]$. Primeiro considere $(a, x), (b, y) \in V(G[H])$ tais que $(a, x)(b, y) \in E(G[H])$. Se $a = b$, então $xy \in E(H)$, pela definição de produto lexicográfico. Além disso, como f é homomorfismo acíclico de H em \vec{K}_k , temos que $f(x) = f(y)$ ou $f(x)f(y) \in E(\vec{K}_k)$. No primeiro caso, temos $g(a, x) = (a, f(x)) = (a, f(y)) = g(a, y)$. No segundo, caso temos $g(a, x)g(a, y) = (a, f(x))(a, f(y)) \in E(G[\vec{K}_k])$. Agora suponha $a \neq b$; então, pela definição de produto lexicográfico, temos que $ab \in E(G)$ e $(a, u)(b, v) \in E(G[\vec{K}_k])$, para todo $u, v \in V(\vec{K}_k)$. Em particular, $(a, f(x))(b, f(y)) = g(a, x)g(b, y) \in E(G[\vec{K}_k])$. Como queríamos.

Finalmente, considere agora $(a, v) \in V(G) \times V(K_k)$. Queremos mostrar que o conjunto $g^{-1}(a, v)$ é acíclico. Note que o conjunto $g^{-1}(a, v)$ é igual ao conjunto $(a, f^{-1}(v)) = \{(a, x) \in V(G) \times V(H) | f(x) = v\}$. Como f é um homomorfismo acíclico, o subdigrafo de H induzido pelo conjunto $f^{-1}(v)$ é acíclico. Agora, veja que o digrafo induzido por $g^{-1}(a, v)$ é uma cópia do subdigrafo de H induzido por $f^{-1}(v)$, logo, temos que o conjunto $g^{-1}(a, v)$ é acíclico. Assim, g é um homomorfismo acíclico e, portanto, $\chi_a(G[H]) \leq \chi_a(G[\vec{K}_k])$.

- (\geq) Seja agora $f : V(G[H]) \rightarrow [\ell]$ uma coloração acíclica de $G[H]$. Sabemos que f também pode ser vista como um homomorfismo acíclico de $G[H]$ em \vec{K}_ℓ . Para cada $a \in V(G)$ denote por H_a a cópia de H em relação a a , isto é, o subdigrafo de $G[\vec{H}]$ induzido por $\{a\} \times V(H)$. Queremos construir uma coloração acíclica de $G[\vec{K}_k]$ usando a coloração f . Suponha que as cores usadas em H_a sejam $\{c_1^a, \dots, c_{\ell_a}^a\} \subseteq [\ell]$. Certamente, $\ell_a \geq k$ pois, caso contrário, conseguimos colorir H que é isomorfo a H_a com menos de k cores. Denotando o conjunto de vértices $V(\vec{K}_k)$ por $\{v_1, \dots, v_k\}$, considere $g : V(G[\vec{K}_k]) \rightarrow [\ell]$ tal que $g(a, v_i) = c_i^a$. Mostramos que g é coloração acíclica de $G[\vec{K}_k]$. Suponha, por contradição, que $C = (w_1, \dots, w_t)$ seja um ciclo monocromático de cor c e escreva $w_j = (a_j, v_j) \in V(G[\vec{K}_k])$, para cada $j \in [t]$. Não podemos ter $a_j = a_{j'}$, para todo $j, j' \in [t]$, pois $f|_{H_a}$ é acíclica para todo $a \in V(G)$. Pelo Lema 2.1, o conjunto $A = \{a_1, \dots, a_t\}$ não é acíclico. Agora, para cada a_j com $j \in [t]$, escolhemos um vértice $x_j \in V(H)$ tal que $f(b_j) = c_j^{a_j} = c$, onde $b_j = (a_j, x_j)$. Temos, pela Prova do Lema 2.1 então que o subdigrafo de $G[\vec{H}]$ induzido pelo conjunto $B = \{b_1, \dots, b_t\}$ contém um ciclo monocromático, contradizendo o fato de f ser uma coloração acíclica de $G[H]$. Logo, g é coloração acíclica de $G[\vec{K}_k]$. Isso demonstra que se $G[H]$ pode ser colorido com ℓ cores, então $G[\vec{K}_k]$ também o pode. Logo, $\chi_a(G[\vec{K}_k]) \leq \chi_a(G[H])$.

□

Observe que temos como consequência direta deste resultado o seguinte corolário.

Corolário 3.2. Se H é DAG, então $\chi_a(G[H]) = \chi_a(G)$, para todo digrafo G .

O resultado abaixo é um fato que será usado em algumas demonstrações a seguir e foi demonstrado em (KLAVZAR, 1996).

Teorema 3.7. (KLAVZAR, 1996) Sejam G, H digrafos. Então $\chi_a(G[H]) \leq \chi_a(G) \cdot \chi_a(H)$.

Como citado na introdução, o trabalho pioneiro no estudos de coloração acíclica foi o (NEUMANN-LARA, 1982). Nele, além de muitos outros resultados, Neumann-Lara estabeleceu um limite inferior para o número cromático acíclico do produto lexicográfico de dois digrafos, enunciado a seguir.

Teorema 3.8. (NEUMANN-LARA, 1982) Sejam G, H digrafos. Então,

$$\chi_a(G[H]) \geq \chi_a(G) + \chi_a(H) - 1.$$

O resultado a seguir fornece valores exatos para certos ciclos, além de dizer que o limitante dado no Teorema 3.8 é apertado neste caso particular.

Teorema 3.9. (PLEANMANI; PANMA, 2016) Seja C_n o ciclo direcionado com n vértices, $n \geq 2$, e H um digrafo arbitrário. Se $n > \chi_a(H)$, então

$$\chi_a(C_n[H]) = \chi_a(H) + 1.$$

Como corolário direto desse resultado, temos que o produto entre dois ciclos tem número cromático acíclico 3, bastando que o número de vértices do primeiro ciclo seja pelo menos 3.

Corolário 3.3. $\chi_a(\vec{C}_m[\vec{C}_n]) = 3$ para todo $m \geq 3$ e para todo $n \geq 2$.

Complementando o resultado acima, investigamos o produto lexicográfico de um ciclo com n vértices por um digrafo H qualquer quando temos $n \leq \chi_a(H)$. A seguir damos valores exatos para esses casos.

Teorema 3.10. Seja $n \geq 2$ inteiro, e H um digrafo qualquer. Se $n \leq \chi_a(H)$, então

$$\chi_a(C_n[H]) = \begin{cases} 2 \cdot \chi_a(H), & \text{se } n = 2; \\ \chi_a(H) + \lceil \frac{\chi_a(H)}{n-1} \rceil, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prova. No que segue, dada uma função $f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ e um subgrafo $G' \subseteq G$, fazemos um

abuso de notação e escrevemos $f(G')$ para denotar a imagem $f(V(G'))$.

Primeiro, suponha $n = 2$. Seja $V(C_2) = \{u_1, u_2\}$ e seja $V(H) = \{v_1, \dots, v_{n'}\}$, onde $n' = |V(H)|$. Denote por w_{ij} o vértice $(u_i, v_j) \in V(\vec{C}_2[H])$ com $i \in [2]$ e $j \in [n']$. Como o digrafo induzido pelos vértices $(w_{i1}, \dots, w_{in'})$ é uma cópia de H , precisamos de pelo menos $\chi_a(H)$ cores para colorir esses vértices. Ademais, como $(w_{1j}, w_{2j'})$ é um 2-ciclo, para todo $j, j' \in [n']$, esses vértices devem ter cores distintas. Dessa forma, a cor de w_{1j} deve ser diferente da cor de $w_{2j'}$, para todo $j, j' \in [n']$. Assim, precisamos de pelo menos $2 \cdot \chi_a(H)$ cores, para colorir tais vértices. Como além disso, pelo Teorema 3.7, temos que $\chi_a(\vec{C}_2[H]) \leq 2 \cdot \chi_a(H)$, segue que $\chi_a(\vec{C}_2[H]) = 2 \cdot \chi_a(H)$.

Suponha, agora, $n \geq 3$. Escreva novamente $V(C_n) = \{u_1, \dots, u_n\}$ e, para cada $i \in [n]$, denote por H_i a cópia de H em relação ao vértice u_i , em outras palavras, H_i é o subdigrafo de $C_n[H]$ induzido pelo conjunto $\{(u_i, v) \mid v \in V(H)\}$. Denote agora $\chi_a(H)$ por k e o valor $k + \lceil \frac{k}{n-1} \rceil$ por k' . Antes de mostrar que $\chi_a(C_n[H]) = k'$, iremos mostrar um fato que nos será útil. Considere $f : V(C_n[H]) \rightarrow [\ell]$ uma ℓ -coloração de $C_n[H]$ tal que a restrição $f|_{H_i}$ é acíclica, para cada $i \in [n]$. Mostramos a seguir que:

- (*) f é uma ℓ -coloração acíclica de $C_n[H]$ se, e somente se, para cada $c \in [\ell]$, existe $i \in [n]$ tal que $c \notin f(H_i)$.

Em outras palavras, nenhum cor $c \in [\ell]$ é tal que c aparece em H_i para todo $i \in [n]$. Provamos primeiro que a condição é necessária.

Provamos primeiro que a condição é necessária. Por contra positiva, suponha que exista alguma cor $c \in [\ell]$ tal que $c \in f(H_i)$, para cada $i \in [n]$. Para cada $i \in [n]$, tome algum vértice $v^i \in V(H)$ tal que $f(u_i, v^i) = c$. Pela definição de produto lexicográfico, tem-se que $((u_1, v^1), \dots, (u_n, v^n))$ é um ciclo monocromático de cor c . Para ver que essa condição é suficiente, novamente por contrapositiva, suponha que f produz um ciclo monocromático C de cor $c \in [\ell]$ em $C_n[H]$. Seja $C = (w_1, \dots, w_t)$ e escreva $w_j = (u_j, v_j) \in V(C_n[H])$, para cada $j \in [t]$. Como $f|_{H_i}$ é acíclica, para cada $i \in [n]$, não podemos ter $u_j = u_{j'}$ para todo $j, j' \in [t]$. Seja, então $U = \{u \in [n] \mid w_j = (u, v_j) \text{ para algum } j \in [t]\}$. Pelo Lema 2.1, temos que U não é um conjunto acíclico em C_n . Como C_n é um ciclo, só podemos ter $U = [n]$. Dessa forma, para cada $i \in [n]$, existe um vértice $v_j \in V(H)$, tal que $w_j = (i, v_j)$, para algum $j \in [t]$. Em particular, $f(i, v_j) = c$. Ou seja, $c \in f(H_i)$, para cada $i \in [n]$.

Agora, para mostrar que $\chi_a(C_n[H]) = k'$, denote por s o valor $k' - k$. Primeiro fornecemos uma coloração acíclica de $C_n[H]$ com k' cores. Para isso, escolhemos n subconjuntos M_1, \dots, M_n de $[k']$, cada um com cardinalidade s , de forma que $\bigcup_{i=1}^n M_i = [k']$. Note que, pelo Princípio da Casa dos Pombos, para que isso seja possível basta que $n \geq \frac{k'}{s}$. De fato temos (a última parte da desigualdade vale pois ao remover o teto no

denominador, o valor obtido não pode diminuir):

$$\frac{k'}{s} = \frac{k+s}{s} = \frac{k}{s} + 1 = \frac{k}{\lceil \frac{k}{n-1} \rceil} + 1 \leq \frac{k}{\frac{k}{n-1}} + 1 = n.$$

Agora, para cada $i \in [n]$, seja f_i uma coloração de H_i que usa as cores $[k'] \setminus M_i$, e seja f a coloração de $C_n[H]$ obtida pela união dessas colorações. Como, para cada $c \in [k']$, existe $i \in [n]$ tal que $c \in M_i$ (O que implica que $c \notin f(H_i)$), temos que f satisfaz a propriedade (*) e, portanto, é uma coloração acíclica de $C_n[H]$.

Finalmente, resta mostrar que se f é uma coloração acíclica de $C_n[H]$ com $k+\ell$ cores, então $\ell \geq s$ (isto é, $k+\ell \geq k'$). Observe que, como $f_i = f|_{H_i}$ deve ser uma coloração acíclica de H_i , para cada $i \in [n]$, temos que $M_i = [k+\ell] \setminus f(H_i)$, o conjunto das cores não usadas em H_i , tem cardinalidade no máximo ℓ . Sendo assim, como por (*) vale que $\bigcup_{i=1}^n M_i = [k+\ell]$, temos: $k+\ell = |\bigcup_{i=1}^n M_i| \leq \ell \cdot n$. Segue, portanto que $\ell \geq \frac{k}{n-1}$ e, como ℓ é um valor inteiro, tem-se $\ell \geq s = \lceil \frac{k}{n-1} \rceil$ como desejado.

□

3.4 Produto Forte

Este produto é o que se sabe menos a respeito no que concerne a grafos direcionados. Provamos alguns resultados a respeito de ciclos, novamente, buscando generalizar alguns resultados conhecidos em coloração de grafos não-direcionados. Em (VESZTERGOMBI, 1979), o autor demonstra a seguinte igualdade para o produto de ciclos ímpares de tamanho maior do que 3.

Teorema 3.11. (VESZTERGOMBI, 1979) *Para todo $k \geq 2$ e para todo $n \geq 2$, tem-se que $\chi(C_{2k+1} \boxtimes C_{2n+1}) = 5$.*

Nos moldes do resultado acima, investigamos o número cromático acíclico do produto forte de ciclos direcionados $C_n \boxtimes C_m$, e fornecemos valores exatos para todos os valores de n e m .

Denotamos o conjunto de vértices de um ciclo direcionado C_n pelo conjunto $[n]$; sendo assim, tem-se $ij \in E(C_n)$ se, e somente se, $j = (i+1) \pmod n$. Dessa forma, se $G = C_m \boxtimes C_n$, então temos que $V(G) = [m] \times [n]$ e

$$(i, k)(j, \ell) \in E(G) \iff \begin{cases} (i = j \wedge k = (\ell+1) \pmod n) \vee \\ (k = \ell \wedge i = (j+1) \pmod m) \vee \\ (i = (j+1) \pmod m \wedge k = (\ell+1) \pmod n) \end{cases}$$

Para cada $i \in [m]$, denotamos por L^i o conjunto $\{(i, j) \mid j \in [n]\}$ e para cada $j \in [n]$, denotamos por C^j o conjunto $\{(i, j) \mid i \in [m]\}$. Daí, L^i representa a i -ésima cópia de C_n , enquanto C^j representa a j -ésima cópia de C_m . Agora dada uma k -coloração f de $C_n \boxtimes C_m$ e uma cor $c \in [k]$, dizemos que f *quebra c horizontalmente em j* se não existe aresta monocromática de cor c entre vértices de C^j e vértices de C^{j+1} . Dizemos também que f *quebra c horizontalmente* se f quebra c horizontalmente em j , para algum $j \in [n]$. De maneira análoga, dizemos que f *quebra c verticalmente em i* se não existe aresta monocromática de cor c entre vértices de L^i e vértices de L^{i+1} . Dizemos ainda que f *quebra c verticalmente* se f quebra c verticalmente em i , para algum $i \in [m]$. O seguinte lema é uma ferramenta útil para as demonstrações subsequentes.

Lema 3.1. *Sejam $G = C_m \boxtimes C_n$ e $f : V(G) \rightarrow [k]$. Se f quebra c horizontalmente e verticalmente para todo $c \in [k]$, então f é uma coloração acíclica de G .*

Prova. Suponha, por contradição, que $f : V(G) \rightarrow [k]$ gera um ciclo de cor c , para algum $c \in [k]$. Seja $C = (w_1, \dots, w_\ell)$ tal ciclo. Defina C' como o conjunto dos vértices de C_m aparecendo em C , isto é, $C' = \{i \in [m] \mid$ para algum $t \in [\ell]$ e para algum $j \in [n]$ tem-se $w_t = (i, j)\}$. E defina $C'' = \{j \in [n] \mid$ para algum $t \in [\ell]$ e para algum $i \in [m]$ tem-se $w_t = (i, j)\}$. Escrevendo $w_1 = (i, j)$, pela definição de produto forte, como cada um desses elementos é distinto, devemos ter $C' = \{i, \dots, i + s\}$, para algum $s \in [\ell - 1]$ e, analogamente, devemos ter $C'' = \{j, \dots, j + r\}$, para algum $r \in [\ell - 1]$. Note que ao menos um dentre os conjuntos C' e C'' deve ter cardinalidade maior do que 1 pois, caso contrário, C seria um laço, o que não é permitido neste trabalho. Suponha, sem perda da generalidade, que $|C'| \geq 2$, ou seja, $s \geq 1$. Novamente, pela definição de produto forte, devemos ter $(i + s)i \in E(C_m)$, isto é, $i = (i + s + 1) \pmod m$. Pela Regra do Corte, devemos ter $(s + 1) = 0 \pmod m$. Ou seja, $s + 1$ é um múltiplo (não-nulo, pois $s \geq 1$) de m . Logo, $|C'| \geq m$. Portanto, C passa por todas as linhas de $C_m \boxtimes C_n$. Como C é monocromático de cor c , existe uma aresta de cor c entre a linha L^i e a linha $L^{(i+1) \pmod m}$, para todo $i \in [m]$, logo f não quebra c horizontalmente.

□

Finalmente estamos prontos para provar o resultado principal desta subseção.

Teorema 3.12. *Sejam C_m, C_n ciclos direcionados com m e n vértices, respectivamente. Então,*

1. *Se $m = n = 2$, então $\chi_a(C_m \boxtimes C_n) = 4$,*
2. *Se $m = 3$ e $n \in \{2, 3\}$, então $\chi_a(C_m \boxtimes C_n) = 3$, e*
3. *Se $n \geq 3$ e $m \geq 4$, então $\chi_a(C_m \boxtimes C_n) = 2$.*

Prova. 1. Observe que $C_2 \boxtimes C_2 = \overleftrightarrow{K}_4$, logo $\chi_a(C_2 \boxtimes C_2) = \chi_a(\overleftrightarrow{K}_4) = 4$.

2. No caso em que $n = 2$, primeiro mostramos que $\chi_a(C_3 \boxtimes C_2) \geq 3$. Suponha, por contradição, que $f : V(C_3) \times V(C_2) \rightarrow [2]$ seja uma 2-coloração acíclica de $C_3 \boxtimes C_2$. Para acompanhar a prova, observe a Figura 9. Lembramos que $V(C_3 \boxtimes C_2) = \{(i, j) | i \in [3], j \in [2]\}$. Como $((1, 1), (2, 1), (3, 1))$ é um ciclo, devemos ter duas cores aparecendo nestes vértices. Além disso, pelo Princípio da Casa dos Pombos, alguma cor aparece em exatamente dois vértices. Suponha, sem perda da generalidade, que $f(1, 1) = f(1, 2) = 1$. Agora, como $(i, j), ((3 - i), j)$ é um 2-ciclo, para todo $(i, j) \in [3] \times [2]$, temos que $f(i, j) = 3 - f(3 - i, j)$. Dessa forma, pela suposição acima, devemos ter $f(2, 1) = f(2, 2) = 2$. Como $((1, 2), (2, 2), (3, 2))$ é um ciclo, devemos ter $f(3, 2) = 1$. Obtemos então que o ciclo $((1, 1), (2, 1), (3, 2))$ é um ciclo monocromático de cor 1. Logo, f não é acíclica e, portanto, $\chi_a(C_3 \boxtimes C_2) \geq 3$. Agora, como $\chi_a(C_3 \boxtimes C_2) \subseteq C_3[C_2]$ e $\chi_a(C_3[C_2]) = 3$ pelo Corolário 3.3, temos que $\chi_a(C_3 \boxtimes C_2) \leq 3$. Logo, $\chi_a(C_m \boxtimes C_n) = 3$.

No caso em que $n = 3$, temos que $\chi_a(C_3 \boxtimes C_3) \leq 3$, pois $\chi_a(C_3 \boxtimes C_3) \subseteq C_3[C_3]$ e, pelo Corolário 3.3, temos que $\chi_a(C_3[C_3]) = 3$. Mostramos, agora, que $\chi_a(C_3 \boxtimes C_3) > 2$ testando todas as possibilidades de uma 2-coloração de $C_3 \boxtimes C_3$. Note que, a menos de uma mudança de rótulos, existe apenas uma coloração possível para C^1 . Usaremos as cores cinza (C) e preto (P) nas colorações da Figura 10. Fixaremos a coloração de C^1 em CCP . Com isso, a linha L^1 só pode ser colorida de duas formas: CPP ou CCP . Exibimos as 16 possíveis colorações para o primeiro caso, o outro é análogo. Veja que nenhuma dessas colorações é acíclica. Portanto, $\chi_a(C_3 \boxtimes C_3) > 2$.

3. Temos que $\chi_a(G) \geq 2$, pois G contém ciclos. Mostramos que $\chi_a(G) \leq 2$, exibindo uma 2-coloração acíclica. Seja $f : V(G) \rightarrow [2]$ como segue (observe a Figura 11 para acompanhar a construção):

Para $(i, j) \in [m] \times [3]$, fazemos

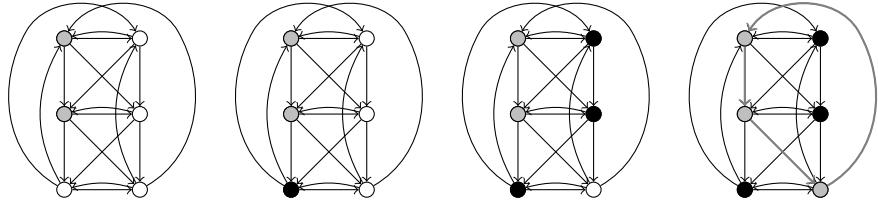
$$f(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j = 1, \ j = 2 \text{ e } i \geq 3, \text{ ou } j = 3 \text{ e } i \leq 3; \\ 2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Nos demais vértices, colorimos as cópias C^j com exatamente duas cores cada, de maneira arbitrária, de forma que cada cópia receba a mesma cor.

Veja que os únicos vizinhos de $(1, 1)$ em C^2 são $(1, 2)$ e $(2, 2)$, que estão coloridos com a cor 2. Logo f quebra 1 horizontalmente. Veja também que a vizinhança de $(1, 2)$ e $(2, 2)$ em C^3 é $(1, 3), (2, 3), (3, 3)$ que estão coloridos com cor 1. Logo, f quebra 2 horizontalmente e, como cada cópia de C_m está colorida com 2 cores, f quebra as cores 1 e 2 verticalmente e, assim, pelo Lema 3.1, f é acíclica.

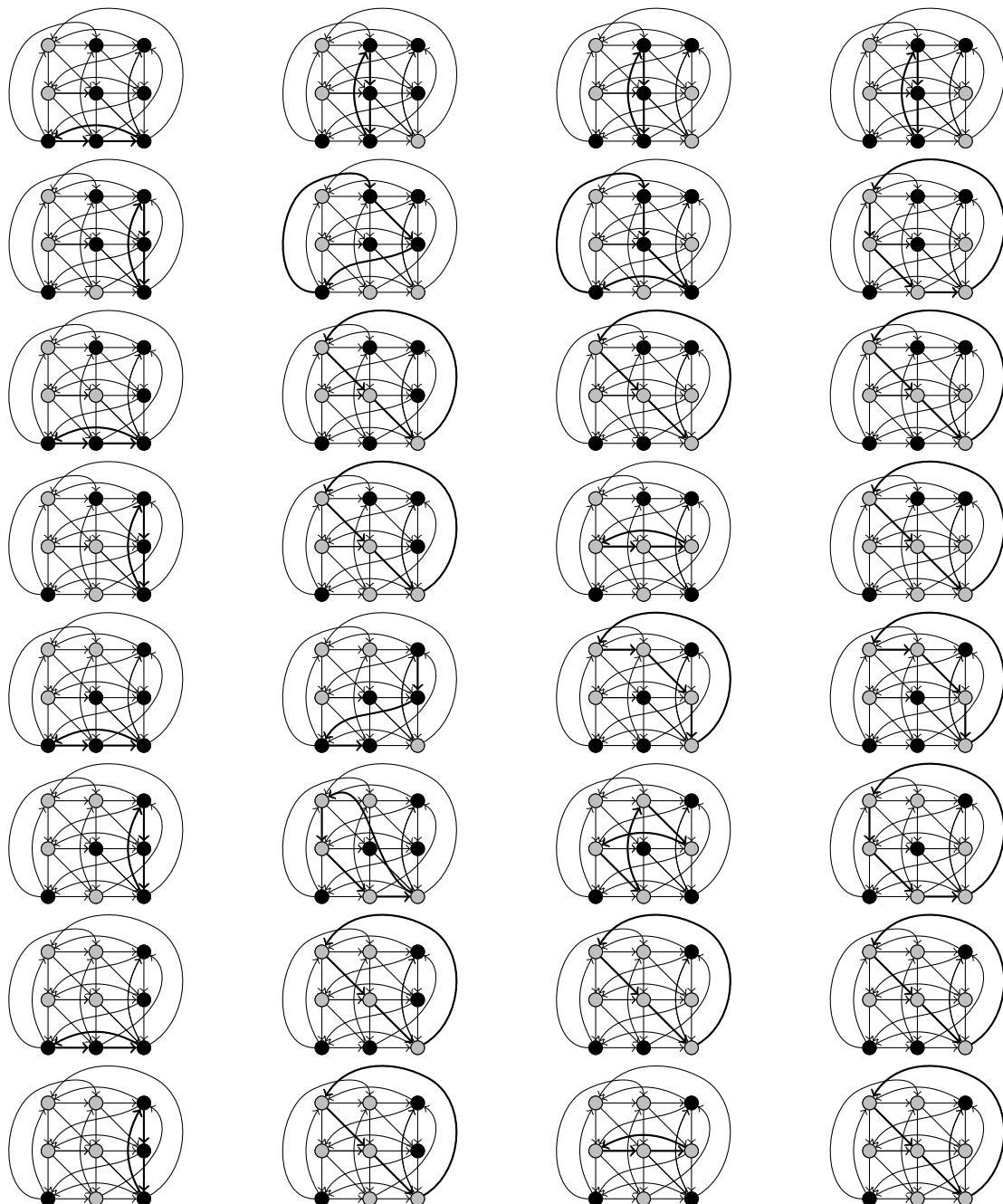
□

Figura 9 – Prova passo a passo de que uma 2-coloração de $C_3 \boxtimes C_2$ não pode ser acíclica



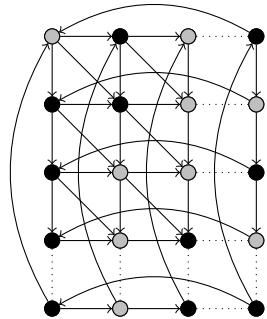
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 10 – As 16 colorações de $C_3 \boxtimes C_3$, fixada a coloração CCP da coluna C^1 e coloração CPP da linha L^1 e as 16 colorações de $C_3 \boxtimes C_3$, fixada a coloração CCP da coluna C^1 e a coloração CCP da linha L^1 . Em cada uma delas mostramos o ciclo monocromático formado pelas arestas em destaque



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 11 – 2-coloração de $C_n \boxtimes C_m$, com $n \geq 3$ e $m \geq 4$



Fonte: Elaborado pelo autor.

4 GRAFOS COM LARGURA EM ÁRVORE LIMITADA

Neste capítulo, damos um limitante para o número cromático acíclico de um grafo orientado em função de sua largura em árvore e um algoritmo FPT que decide em tempo $O(k^{tw} \cdot 27^{tw^2} \cdot n)$ se um dado digrafo G com n vértices e largura limitada por tw possui uma k -coloração acíclica.

4.1 Limitante

Sabe-se que se um digrafo G possui largura em árvore limitada por tw , então $\chi(G)$ é no máximo $tw + 1$. Como o número cromático acíclico é uma generalização do número cromático, bastando ver um grafo G como um digrafo que possui os arcos uv e vu sempre que a aresta $uv \in E(G)$, então esse limitante se mantém válido para o nosso problema. Porém, quando G é um grafo orientado, o limitante pode ser melhorado, como segue.

Teorema 4.1. *Seja D uma orientação do grafo simples G que possui largura em árvore no máximo tw . Então, $\chi_a(D) \leq \lceil \frac{tw+1}{2} \rceil$.*

Prova. Por indução no número de vértices $n = |V(G)|$. Sejam $(T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ uma decomposição em árvore boa de G e $t \in V(T)$ um nó folha. Consideramos que os nós folhas são conjuntos unitários. Podemos supor que X_t contém um vértice $u \in V(G)$ tal que u não está em nenhum outro $X_{t'}$, para todo $t' \in V(T - t)$. Considere o grafo $G' = G \setminus u$. Temos que $tw(G') \leq tw$. Por indução, conseguimos uma coloração $f : V(G') \rightarrow \{1, \dots, \lceil \frac{tw+1}{2} \rceil\}$. Como no máximo tw cores aparecem em $X_t \setminus u$, temos que alguma classe de cor contém no máximo um vizinho de u , digamos a cor i . Fazendo, então $g : V(G) \rightarrow \{1, \dots, \lceil \frac{tw+1}{2} \rceil\}$ tal que $g(v) = f(v)$, para todo $v \in V(G - u)$ e $g(u) = i$, não produzimos um ciclo de cor i , pois G é simples.

□

4.2 Algoritmo FPT

Nesta seção, apresentamos um algoritmo de programação dinâmica para o problema restrito a digrafos com largura em árvore limitada. Antes de definirmos como serão as entradas da nossa tabela de programação dinâmica, precisamos de algumas notações e definições adicionais.

Dado um grafo G , definimos o *diâmetro* de G , denotado por $diam(G)$, como sendo o tamanho do maior caminho mínimo entre dois vértices de G .

Dada uma árvore enraizada $T = (V, E)$, existe uma partição dos nós de acordo com a maior distância até uma folha. Formalmente, seja $h : V(T) \rightarrow \{0, 1, \dots, m\}$ tal que $h(t) = \max \{|E(P)| \mid P \text{ é um } (t, \ell)\text{-caminho e } \ell \text{ é folha}\}$, e seja $p = diam(T)$. Podemos, então, escrever $V(T) = \{V_0, V_1, \dots, V_p\}$ onde V_i é constituído dos nós t tais que $h(t) = i$.

Denote por n_i a cardinalidade de cada V_i para cada $i \in [p]$. Uma ordenação *bottom-up* de $V(T)$ é uma ordem $(v_{11}, \dots, v_{1n_1}, \dots, v_{p1}, \dots, v_{pn_p})$ tal que $V_i = \{v_{i1}, \dots, v_{in_i}\}$. A ordem entre elementos do mesmo conjunto V_i não é importante. Chamamos i de *altura* de $v \in V_i$ na ordenação bottom-up. O algoritmo de programação dinâmica irá percorrer os nós da árvore de decomposição de acordo com a ordenação bottom-up. Sendo assim, ao calcular a tabela relacionada a um determinado nó, já estaremos de posse das tabelas dos seus nós filhos. A seguir, descrevemos do que consiste estas tabelas.

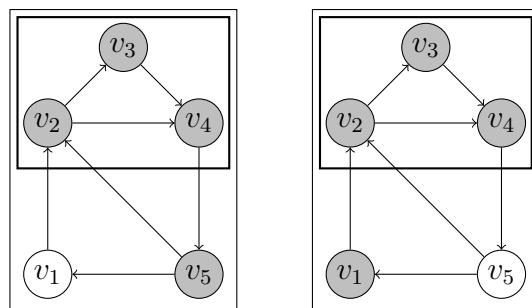
Dado um digrafo G , seja $(T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ uma decomposição em árvore boa do grafo subjacente a G , e considere um nó t da decomposição. No problema de coloração de grafos não direcionados, é suficiente guardar, para cada coloração f possível de X_t , se f pode ser estendida para G_t uma vez que cada nó t é um separador de G e a coloração própria não permite vértices adjacentes numa mesma cor. Porém, dada uma coloração acíclica $g : V(G_t) \rightarrow [k]$, e dado $S \subseteq V(G)$, pode ocorrer de, ao adicionar um vértice novo numa cor, colorações que, quando restritas a X_t são idênticas, sejam tais que uma poderá ser estendida, enquanto outra não. Veja por exemplo as colorações da Figura 12. Isto nos diz que não é suficiente saber se uma coloração f de X_t pode ser estendida para uma coloração acíclica de G_t . Devido a isso, dado um nó $t \in V(T)$ e uma k -coloração g de G_t , dizemos que $H = (X_t, E')$ representa g em X_t se para todo par $u, v \in X_t$, temos que $uv \in E'$ se, e somente se, existe um (u, v) -caminho monocromático por g em G_t . Ao construir nossa tabela de programação dinâmica, precisamos guardar informação não só da existência de uma função f que seja coloração acíclica, mas, também, o digrafo H que representa f . Tal digrafo é único como mostra a proposição abaixo.

Proposição 4.1. *Sejam G um digrafo qualquer, $S \subseteq V(G)$ e f uma k -coloração de G . Se ambos $H_1 = (S, E')$ e $H_2 = (S, E'')$ representam f em $S \subseteq V(G)$, então $E' = E''$.*

Prova. De fato, sejam $u, v \in S$ tais que $uv \in E'$, então existe um (u, v) -caminho monocromático por f em G . Mas, como H_2 representa f em S , temos que a aresta $uv \in E''$. Portanto, $E' \subseteq E''$. Analogamente, obtém-se a inclusão contrária. Assim, temos $E' = E''$.

□

Figura 12 – Duas 2-colorações distintas que coincidem em $S = \{v_2, v_3, v_4\}$, destacado nos quadros menores. A segunda coloração é acíclica, enquanto a primeira não é



Fonte: Elaborado pelo autor.

Considere uma Decomposição em Árvore Boa $(T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ enraizada no nó r de $G = (V, E)$ um digrafo com n vértices e largura em árvore no máximo tw . Para cada $t \in V(T)$, definimos o conjunto de funções $\mathcal{F}_t = \{f : X_t \rightarrow [k]\}$. Para cada coloração $f \in \mathcal{F}_t$, definimos a família \mathcal{H}_t de digrafos cujo conjunto de vértices é X_t e todas as suas arestas são monocromáticas em f , isto é, $\mathcal{H}_t(f) = \{H = (X_t, E(H)) \mid uv \in E(H) \Rightarrow f(u) = f(v)\}$. Agora, para cada $f \in \mathcal{F}_t$ e para cada $H \in \mathcal{H}_t(f)$, definimos:

$$c_t[f, H] = \begin{cases} 1, & \text{se existe uma } k\text{-coloração acíclica } f' \text{ de } G_t \\ & \text{que estende } f \text{ e } H \text{ representa } f'; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sejam $f \in \mathcal{F}_t$ e $H \in \mathcal{H}_t(f)$. Definida a nossa tabela, a resposta que buscamos é o valor de $c_r[f, H]$, pois $G_r = G$.

Iremos apresentar como é feito o cálculo de $c_t[f, H]$ para cada tipo de nó t , dedicando um lema para cada. Mas antes de mais nada, gostaríamos de já poder deixar de lado os casos cujo valor de $c_t[f, H]$ é trivialmente 0. É para isso que servem as definições a seguir.

Dizemos que um digrafo H é *transitivo* quando para todo $\{u, v, w\} \subseteq V(H)$, se $\{uv, vw\} \subseteq E(H)$, então $uw \in E(H)$. A aresta uw é chamada de *aresta transitiva*. O digrafo obtido de H pela adição de cada aresta transitiva que falta é chamado *fecho transitivo* de H , e é denotado por $ft(H)$.

Lema 4.1. *Sejam f uma k -coloração de X_t e $H \in \mathcal{H}_t(f)$. Se G_t possui um ciclo monocromático por f , ou se H não é um digrafo transitivo e acíclico contendo toda aresta monocromática de $G[X_t]$, então $c_t[H, f] = 0$.*

Prova. Suponha que f possui ciclo C monocromático em G_t . Seja $V(C) = \{v_1, \dots, v_q\}$. Temos que $f(v_1) = \dots = f(v_q)$. Note que se uma coloração f' estende f , então deve-se ter $f'(v_i) = f(v_i)$, para cada $i \in [q]$. Logo f' não é acíclica. Portanto, $c_t[f, H] = 0$. Veja que uma aresta monocromática $uv \in E(G[X_t])$ define um caminho monocromático. Portanto, se $uv \in E(G[X_t]) \setminus E(H)$, então H não pode representar qualquer extensão de f , logo $c_t[f, H] = 0$. Suponha, agora, que H representa $f' : V(G_t) \rightarrow [k]$ em X_t , mas não seja transitivo. Então, existe $\{u, v, w\} \subseteq V(H)$ tais que $\{uv, vw\} \subseteq E(H)$, mas $uw \notin E(H)$. Como H representa f' , existem um (u, v) -caminho monocromático e um (v, w) -caminho monocromático em G_t . Concatenando tais caminhos, obtemos um (u, v) -passeio monocromático em G_t . Pela Proposição 2.1 vista no Capítulo 2, tal passeio contém um (u, w) -caminho monocromático, mas $uw \notin E(H)$. Logo H não pode representar f' . Finalmente, suponha que H contenha um ciclo (v_1, \dots, v_t) e H representa uma coloração acíclica f . Pela definição de $(H)_t$, $f(v_1) = f(v_2) = \dots = f(v_t)$. Então existem caminhos

monocromáticos entre v_1 e v_2 , entre v_2 e v_3 e assim sucessivamente. Ao concatenarmos tais caminhos obtemos um passeio fechado, que produz um ciclo monocromático de cor $f(v_1)$. Logo f não é acíclica, contradição. Portanto, se H não é viável, temos $c_t[f, H] = 0$. \square

Como não queremos considerar digrafos em que o conjunto de vértices é vazio, podemos assumir que as folhas são conjuntos unitários. O lema a seguir nos mostra o caso mais simples, o dos nós folha.

Lema 4.2. *Sejam G um digrafo, $(T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ uma decomposição em árvore boa de G , t um nó folha de T e $f \in \mathcal{F}_t$. Então, $c_t[f, (X_t, \emptyset)] = 1$.*

Prova. Digamos que seja $X_t = \{u\}$. Veja que $f(u) = i$, para cada $i \in [k]$ são as únicas colorações possíveis de X_t . Um grafo vazio representa qualquer uma dessas colorações de X_t , logo $c_t[f, (\{u\}, \emptyset)] = 1$. \square

Agora, seja $t \in V(T)$ um nó de introdução, com filho t' , e seja $v \in V(G)$ o vértice que é introduzido por t . Observe que pares de vértices de $X_{t'}$ podem, agora, ser ligados por um caminho passando por v . Por isso é preciso considerar que a entrada $c_t[f, H]$ seja positiva devido a uma entrada (H', f') na tabela de t' onde $f' = f|_{X_{t'}}$, mas H' não necessariamente é igual a $H - v$. Queremos então descrever que tipo de digrafo H' é um bom candidato.

Seja $c = f(v)$ e H_c a componente fraca de H de cor c contendo v . Sejam S^- o conjunto dos ancestrais de v em H_c e S^+ o conjunto dos descendentes de v em H_c . Suponha que H é transitivo, acíclico e tal que toda aresta monocromática de $G[X_t]$ está contida em H . Dizemos que H é *viável* se, adicionalmente, tem-se: para todo $u \in S^- \setminus N_{G_t}^-(v)$, existe $w \in N_{G_t}^-(v)$ tal que $uw \in E(H)$; e, para todo $u \in S^+ \setminus N_{G_t}^+(v)$, existe $w \in N_{G_t}^+(v)$ tal que $wu \in E(H)$. O seguinte lema também nos ajuda a ignorar os digrafos H em que a entrada $c_t[f, H]$ de um nó de introdução é trivialmente 0.

Lema 4.3. *Sejam G um digrafo, $(T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ uma decomposição em árvore boa de G e t um nó de introdução de T com filho t' , onde $X_t = X_{t'} \cup \{v\}$. Sejam ainda $f \in \mathcal{F}_t$ e $H \in \mathcal{H}_t(f)$. Se $c_t[f, H] = 1$, então H é viável.*

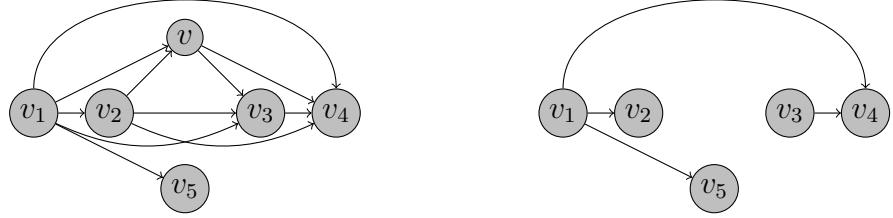
Prova. Seja g uma coloração acíclica de G_t que estende f e que é representada por H em X_t , pelo Lema 4.1, H deve ser acíclico, transitivo e conter todas as arestas monocromáticas de G_t . Além disso, suponha que u seja um descendente de v , $vu \in E(H)$, mas u não seja vizinho de saída de v (isto é, $u \in S^+ \setminus N_{G_t}^+(v)$). A única maneira de existir um caminho monocromático em g entre v e u em G_t é existir um caminho monocromático entre algum $w \in N_{G_t}^+(v)$ e u . Logo $wu \in E(H)$. O argumento para os ancestrais é análogo. \square

Agora, para definir exatamente que entradas da tabela de t' , filho do nó introdução t , devem ser verificadas, primeiro definimos um grafo base mínimo $H_{min} = (X_{t'}, E')$ onde E' é obtido de $E(H)$ como segue. Sejam S^- o conjunto dos ancestrais de v em H e S^+ o conjunto dos descendentes de v em H . Primeiro, remove-se todas as arestas entre S^- e S^+ . Em seguida, adiciona-se toda aresta monocromática de $G[X_{t'}]$ que eventualmente tenha sido removida. Mais formalmente, sendo $c = f(v)$, tem-se:

$$E' = (E(H - v) \setminus [S^-, S^+]) \cup \{uw \in E(G[X_{t'}]) \mid f(u) = f(v) = c\}.$$

Agora, será necessário investigar todo supergrafo adequado de H_{min} que seja subgrafo de H . Para isso, definimos $\mathcal{I} = \{H^I \supseteq H_{min} \mid I \subseteq [S^-, S^+]\}$ e $H^I = ft(H_{min} \cup I)\}$. Um exemplo da definição de H_{min} pode ser visto na Figura 13.

Figura 13 – Aqui temos $X_t = \{v, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e os conjuntos $S^- = \{v_1, v_2\}$ e $S^+ = \{v_3, v_4\}$. A componente fraca de H_c contendo v está à esquerda. Tomando como exemplo o conjunto $I = \{v_1, v_4\}$, o digrafo H^I está à direita



Fonte: Elaborado pelo autor.

A seguinte proposição nos mostra que, de fato, todo digrafo em \mathcal{I} é um subdigrafo de H .

Proposição 4.2. *Sejam t nó de introdução, $f \in \mathcal{F}_t$ e $H \in \mathcal{H}_t(f)$ viável. Além disso, seja $I \subseteq [S^-, S^+]$ e $H^I = ft(H_{min} \cup I)$. Então, $H^I \subseteq H$. Ademais, $E(H - v) \setminus E(H^I) \subseteq [S^-, S^+]$.*

Prova. Já temos que $V(H^I) = X_{t'} \subseteq X_t = V(H)$, resta mostrar que $E(H^I) \subseteq E(H)$. Seja, então, $uw \in E(H^I)$. Se $uw \in H_{min}$, nada a fazer. Como H é transitivo, todas as arestas entre S^+ e S^- estão em H , em particular $I \subset E(H)$. Suponha, por fim, que uw foi adicionada ao tomar o fecho transitivo de $H_{min} \cup I$. Então, existem $u = x_1, \dots, x_q = w$ tais que o caminho (x_1, \dots, x_q) está contido em $H_{min} \cup I$. Assim, para cada $i \in [q - 1]$, $x_i x_{i+1}$ é aresta de H_{min} ou de I . Em todo caso, já que H é transitivo, temos $x_i x_j \in E(H)$, para todo $i < j \leq q - 1$. Em particular, $x_1 x_q \in E(H)$. Para o que resta, observe que $[S^-, S^+] \subseteq E(H - v)$. Além disso, pela construção de H_{min} , temos que $E(H - v) \setminus [S^-, S^+] \subseteq E(H_{min})$ \square

De posse das ferramentas previamente apresentadas, estamos prontos pra demonstrar o lema a seguir, que resolve o caso em que o nó t é um nó de introdução.

Lema 4.4. *Sejam G um digrafo, $(T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ uma decomposição em árvore boa de G , t um nó de introdução de T com filho t' , onde $X_t = X_{t'} \cup \{v\}$. Sejam ainda $f \in \mathcal{F}_t$ e $H \in \mathcal{H}_t(f)$. Então $c_t[f, H] = 1$ se, e somente se, existe $H^I \in \mathcal{I}$ tal que $c_{t'}[f', H^I] = 1$, onde $f' = f|_{X_{t'}}$.*

Prova. Suponha primeiro $c_t[f, H] = 1$; queremos mostrar que existe uma k -coloração acíclica g de $G_{t'}$ que estende f' e é representada em $X_{t'}$ por algum $H^I \in \mathcal{I}$. Pela definição de $c_t[f, H]$, existe uma k -coloração acíclica f'' de G_t que estende f e H representa f'' em X_t . Seja $g = f''|_{G_{t'}}$. Temos que g estende f' e é k -coloração acíclica de $G_{t'}$, portanto resta mostrar que H' , o digrafo que representa g , é um digrafo em \mathcal{I} . Observe que como $G_{t'} = G_t - v$, temos que todo caminho de G_t , com exceção daqueles que passam por v , também existem em $G_{t'}$. Isso nos diz que $E(H[X_{t'}]) \setminus E(H) \subseteq [S^-, S^+]$. Sendo assim, para que tenhamos $H' = H^I$ para algum $I \subseteq [S^-, S^+]$, é suficiente mostrar que $H_{min} \subseteq H'$. Como $V(H_{min}) = V(H') = X_{t'}$, precisamos mostrar que $E(H_{min}) \subseteq E(H')$. Suponha $uw \in E(H_{min})$. Como $H_{min} \subseteq E(H)$, existe um (u, w) -caminho P em G_t . Se $v \notin V(P)$, então segue que $uw \in E(H')$. Caso contrário, observe que a existência de P e o fato de H ser transitivo nos dá que $u \in S^-$ e $w \in S^+$. Logo, se $uw \in E(H_{min})$, significa que $uw \in E(G_{t'})$ ou uw foi introduzida quando foi tomado o fecho transitivo de $(X_{t'}, E'')$. Se ocorre o primeiro, segue que $uw \in E(H')$ diretamente. Caso contrário, existem $x \in S^-$ e $y \in S^+$ tais que $xy \in E(G_{t'})$ e $\{ux, yw\} \in E(H)$, pois H é viável. Se o (u, x) -caminho P_1 e o (y, w) -caminho P_2 não contém v , temos que $\{ux, xy, yw\} \subseteq E(H')$ e portanto $uw \in E(H')$, já que H' é transitivo. Além disso, observe que se $v \in V(P_1)$ então $x \in S^+$ e se $v \in V(P_2)$, então $y \in S^-$. Veja que nenhuma dessas situações pode acontecer, já que $x \in S^-, y \in S^+$ e $S^- \cap S^+ = \emptyset$. Assim, $H_{min} \subseteq H'$, como queríamos demonstrar.

Suponha agora que existe $H^I \in \mathcal{I}$ tal que $c_{t'}[f', H^I] = 1$, onde $f' = f|_{X_{t'}}$. Pela definição de $c_{t'}[f', H^I]$, existe uma k -coloração acíclica f'' de $G_{t'}$ que estende f' e é representada por H^I . Seja $g : V(G_t) \rightarrow [k]$ definida por $g(u) = \begin{cases} f''(u), & \text{se } u \neq v \\ f(v), & \text{se } u = v \end{cases}$. Uma vez que g estende f , por construção, resta mostrar que g é uma k -coloração acíclica de G_t representada por H . Por contradição, suponha que g produz um ciclo monocromático $C = (v_1, v_2, \dots, v_q)$. Devemos ter $v \in V(C)$, caso contrário, C estaria contido em $G_{t'}$, contradizendo o fato de $f'' = g|_{G_{t'}}$ ser coloração acíclica de $G_{t'}$. Suponha então, sem perda de generalidade, que $v = v_1$. Como X_t é separador, temos que $v_2, v_q \in X_t$; logo vv_2, v_qv são arestas monocromáticas de $G[X_t]$, e portanto $\{vv_2, v_qv\} \subseteq E(H)$. Sendo assim, tem-se $v_q \in S^-, v_2 \in S^+$ e, como H é transitivo, segue que $v_qv_2 \in E(H)$. Ademais, porque o caminho (v_2, \dots, v_q) está em $G_{t'}$ e H^I representa f'' tem-se que $v_2v_q \in E(H^I)$, absurdo, pois pela Proposição 4.2, temos que $v_2v_q \in E(H)$, o que nos daria um 2-ciclo

em H . Portanto, g é k -coloração acíclica. Agora mostramos que H representa g , ou seja, que cada par de vértices $u, w \in X_t$, a aresta $uw \in E(H)$ se, e somente se, existe um (u, w) -caminho monocromático em G_t .

(\Rightarrow) Se $uw \in E(H^I)$, nada a fazer, pois H^I representa f'' em $G_{t'}$. Suponha, então $uw \in E(H) \setminus E(H^I)$. Analisamos os casos:

- (a) $w = v$: se $u \in N^-(v)$ então (u, v) é o caminho que procuramos; logo suponha $u \notin N^-(v)$. Como H é viável, existe $z \in N^-(v)$ tal que $uz \in E(H)$. Como $\{u, z\} \subseteq S^-$, temos que $uz \in E(H^I)$. Logo, existe um (u, z) -caminho P em $G_{t'}$. Tal caminho concatenado com a aresta zv nos dá um (u, v) -caminho em G_t .
- (b) $u = v$: análogo ao item (a).
- (c) $v \notin \{u, w\}$: tem-se, então, que $u \in S^-$ e $w \in S^+$, já que $(E(H) \setminus E(H^I)) \subseteq [S^-, S^+]$. Observe que $\{uv, vw\} \subseteq E(H)$, uma vez que H é transitivo, isto é, $S^- = N_H^-(v)$ e $S^+ = N_H^+(v)$. Aplicando os itens (a) e (b), conseguimos um (u, v) -caminho e um (v, w) -caminho que, concatenados, produzem o (u, w) -caminho desejado.

(\Leftarrow) Seja P um (u, w) -caminho em G_t . Se $v \notin V(P)$, então $uw \in E(H^I)$ e estamos satisfeitos já que H^I representa f'' em $G_{t'}$; logo suponha o contrário e escreva $P = (u = v_1, \dots, v = v_i, \dots, v_q = w)$. Como (v_1, \dots, v_{i-1}) e (v_{i+1}, \dots, v_q) são caminhos em $G_{t'}$ e H^I representa f'' em $X_{t'}$, temos que $\{v_1v_{i-1}, v_{i+1}v_q\} \subseteq E(H^I)$. Como $v_{i-1} \in N^-(v)$ e $v_{i+1} \in N^+(v)$, H contém as arestas monocromáticas de $G[X_t]$ e é transitivo, temos que $\{v_1v, vv_q\} \subseteq E(H)$. Logo, $v_1v_q \in E(H)$, como queríamos.

□

Seguimos agora para o caso em que t é um nó de abandono. Antes de apresentar como fazer o cálculo, precisamos de mais algumas definições. Seja $t \in V(T)$ um nó de abandono, com filho t' , e seja $v \in V(G)$ para o qual $X_t = X_{t'} \setminus v$. Dada uma coloração f de X_t e uma coloração f' de $X_{t'}$ que estende f tal que $f'(v) = c$, definimos as vizinhanças de entrada e saída de v na cor c como $N_c^-(v) = N_{X_t}^-(v) \cap f'^{-1}(c)$ e $N_c^+(v) = N_{X_t}^+(v) \cap f'^{-1}(c)$, respectivamente. Definimos, também, $\delta_c(v)$ como o conjunto de arestas incidentes em v e em algum $u \in N_c^-(v) \cup N_c^+(v)$. Para cada cor $c \in [k]$, definimos $Ex_c(H)$ como sendo a família de digrafos H' tais que $E(H) \cup \delta_c(v) \subseteq E(H')$, H' é transitivo e H é subgrafo induzido de H' .

Lema 4.5. *Sejam G um digrafo, $(T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ uma decomposição em árvore boa de G , t um nó de abandono de T com filho t' , onde $X_t = X_{t'} \setminus \{v\}$. Sejam ainda $f \in \mathcal{F}_t$ e $H \in \mathcal{H}_t(f)$. Então, $c_t[f, H] = 1$ se, e somente se, existem $c \in [k]$ e $H' \in Ex_c(H)$ tais que $c_{t'}[f', H'] = 1$, onde f' é coloração de $X_{t'}$ que estende f e $f'(v) = c$.*

Prova. Suponha primeiro que $c_t[f, H] = 1$; queremos mostrar que existem $c \in [k]$ e $H' \in Ex_c(H)$ tais que $c_{t'}[f', H'] = 1$, onde f' é coloração de $X_{t'}$ que estende f e $f'(v) = c$.

Pela definição de $c_t[f, H]$, temos que existe uma k -coloração acíclica g de G_t que estende f e H representa g em X_t . Como $G_t = G_{t'}$, tem-se que g também é k -coloração acíclica de $G_{t'}$. Seja então $c = g(v)$ e considere H' o digrafo que representa g em $X_{t'}$; por definição sabemos que $c_{t'}[f', H'] = 1$, onde $f' = g|_{X_{t'}}$. Resta então mostrar que $H' \in Ex_c(H)$. Para isso, pelo Lema 4.1, é suficiente mostrar que H é subgrafo induzido de H' e que H' contém as arestas de cor c que incidem em v . Sejam, então, $u, w \in X_t \subset X_{t'}$ tais que $uw \in E(H)$. Como H representa g em X_t , existe um (u, w) -caminho monocromático P em G_t . Temos que P é caminho monocromático também em $G_{t'}$. Logo, $uw \in E(H')$, pois H' representa g em $X_{t'}$. Da mesma forma, se $uw \in E(H')$ com $\{u, w\} \subseteq X_t$, então $uw \in E(H)$ uma vez que H representa g em X_t . Logo H é subgrafo induzido de H' . Seja agora uv uma aresta de δ_c . Note que $uv \in E(G[X_{t'}])$, e como H' representa g em $X_{t'}$, temos que $uv \in E(H')$, como queríamos demonstrar.

Suponha agora que existem $c \in [k]$ e $H' \in Ex_c(H)$ tais que $c_{t'}[f', H'] = 1$, onde f' é coloração de $X_{t'}$ que estende f e $f'(v) = c$. Queremos mostrar que $c_t[f, H] = 1$, isto é, queremos encontrar uma coloração acíclica $g : V(G_t) \rightarrow [k]$ tal que $g|_{X_t} = f$ e g é representada por H em X_t . Como $c_{t'}[f', H'] = 1$, por definição temos que existe uma coloração acíclica $f'' : V(G_t) \rightarrow [k]$ de $G_{t'}$ que estende f' e H' representa f'' em $X_{t'}$. Como $G_t = G_{t'}$, temos que f'' é uma coloração acíclica de G_t que estende f . Resta mostrar que H representa f'' em X_t , isto é, que para cada par de vértices $u, w \in X_t$, a aresta $uw \in E(H)$ se, e somente se, existe um (u, w) -caminho monocromático por f'' em G_t . Sejam, então, $u, w \in X_t$ tais que $uw \in E(H)$. Temos que $uw \in E(H')$ pois H é subgrafo induzido de H' , por definição. Como H' representa f'' em $X_{t''}$, existe um (u, w) -caminho monocromático por f'' em $G_{t'} = G_t$, e estamos feitos. Seja agora um (u, w) -caminho monocromático P em G_t , com $u, w \in V(H)$. Temos que $P \subseteq G_{t'}$ novamente pois $G_{t'} = G_t$. Assim, $uw \in E(H')$ pois H' representa f'' em $X_{t'}$. E como H é subdigrafo induzido de H' , temos que $uw \in E(H)$, como queríamos demonstrar.

□

Para o último caso, em que t é um nó de junção, utilizamos a seguinte definição. Seja t um nó de junção, com filhos t_1 e t_2 . Dados $H_1 \in \mathcal{H}_{t_1}(f)$ e $H_2 \in \mathcal{H}_{t_2}(f)$, dizemos que H_1 e H_2 combinam em H se $H = ft(H_1 \cup H_2)$.

Lema 4.6. *Sejam G um digrafo, $(T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ uma decomposição em árvore boa de G e t um nó de junção com filhos t_1, t_2 . Sejam ainda $f \in \mathcal{F}_t$ e $H \in \mathcal{H}_t(f)$. Então $c_t[f, H] = 1$ se, e somente se, existem $H_1 \in \mathcal{H}_{t_1}(f)$ e $H_2 \in \mathcal{H}_{t_2}(f)$ que combinam em H tais que $c_{t_1}[f, H_1] = c_{t_2}[f, H_2] = 1$.*

Prova. Suponha primeiro que $c_t[f, H] = 1$; queremos mostrar que existem $H_1 \in \mathcal{H}_{t_1}(f)$ e $H_2 \in \mathcal{H}_{t_2}(f)$ que combinam em H e tais que $c_{t_1}[f, H_1] = c_{t_2}[f, H_2] = 1$. Pela definição de $c_t[f, H]$ temos que existe uma k -coloração acíclica f' de G_t que estende f e H representa f' em X_t . Como, para cada $i \in [2]$, G_{t_i} é um subgrafo de G_t , temos que $f_i = f'$ restrita

a G_{t_i} é também uma k -coloração acíclica de G_{t_i} . Desta forma, sendo H_i o representante de f_i em $X_{t_i} = X_t$, temos que $c_{t_i}[f, H_i] = 1$, para cada $i \in [2]$. Resta mostrar que H_1, H_2 combinam em H , ou seja, sendo H' o fecho transitivo de $H_1 \cup H_2$, mostramos que $H = H'$. Considere primeiro $uv \in E(H)$. Logo, existe um (u, v) -caminho monocromático P em G_t , pois H representa f' em X_t . Se $P \subseteq G_{t_i}$ para algum $i \in [2]$, temos que $uv \in E(H_i)$ para algum $i \in [2]$ e, portanto, $uv \in E(H')$. Suponha, então, que P não esteja contido em G_{t_i} , para cada $i \in [2]$. Como X_t separa $G_{t_1} \setminus X_t$ de $G_{t_2} \setminus X_t$, devemos ter interseções entre vértices de X_t e vértices de P . Seja $\{u = w_1, \dots, w_q = v\}$ o conjunto de tais interseções, listadas na ordem em que aparecem no caminho. Seja ainda $I \subseteq [q - 1]$ contendo i tal que o subcaminho P_i de P entre w_i e w_{i+1} , esteja contido em G_{t_1} . Temos, então, que as arestas $w_iw_{i+1} \in E(H_1) \cap E(H)$ se $i \in I$, e $w_iw_{i+1} \in E(H_2) \cap E(H)$ caso contrário. Logo, $w_iw_{i+1} \in E(H_1) \cup E(H_2)$. Como H' é transitivo, temos que $w_iw_j \in E(H')$, para todo $1 \leq i, j \leq q$ e, em particular, $w_1w_q = uv \in E(H')$. Seja agora, $uv \in E(H')$. Se $uv \in E(H_i)$, para algum $i \in [2]$, então existe um (u, v) -caminho monocromático em $G_{t_i} \subseteq G_t$. Como H representa f' em X_t , temos que $uv \in E(H)$. Suponha então que uv é uma aresta que surgiu ao tomarmos o fecho transitivo de $H_1 \cup H_2$. Então, existe um caminho $(u = w_1, \dots, w_q = v)$ em $H_1 \cup H_2$ tal que a aresta w_jw_{j+1} está contida em H_1 ou H_2 , para cada $j \in [q - 1]$. Como H_i representa f_i em X_{t_i} para cada $i \in [2]$, temos que existe um (w_j, w_{j+1}) -caminho P_j contido em G_{t_1} ou em G_{t_2} . A concatenação dos caminhos P_j , para $j \in [q - 1]$, nos dá um (u, v) -caminho monocromático em G_t . Portanto, $uv \in E(H)$ e, assim, H_1 e H_2 combinam em H , como queríamos demonstrar.

Agora suponha que existem $H_1 \in \mathcal{H}_{t_1}(f)$ e $H_2 \in \mathcal{H}_{t_2}(f)$ tais que $c_{t_1}[f, H_1] = c_{t_2}[f, H_2] = 1$. Queremos encontrar uma coloração acíclica $f' : V(G_t) \rightarrow [k]$ tal que $f'|_{X_t} = f$ e f' é representada por H em X_t . Pela definição de $c_{t_i}[f, H_i]$, para cada $i \in [2]$, existem k -colorações acíclicas f_1, f_2 de G_{t_1} e G_{t_2} , respectivamente, de forma que f_i estende f e H_i representa f_i em X_{t_i} , para cada $i \in [2]$. Seja $f' : V(G_t) \rightarrow [k]$ tal que:

$$f'(v) = \begin{cases} f_1(v), & \text{se } v \in V(G_{t_1}) \\ f_2(v), & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Primeiro mostramos que f' é uma coloração acíclica de G_t que estende f .

Como $f'(v) = f_1(v) = f(v)$ para todo $v \in X_t$, temos que f' estende f . Suponha que f' não seja acíclica e seja C um ciclo monocromático de G_t . Pela escolha de f_i , temos que C não pode estar contido em G_{t_i} , para cada $i \in [2]$. Como X_t separa $G_{t_1} \setminus X_t$ de $G_{t_2} \setminus X_t$, devemos ter que C intersecta X_t . Seja $V(C) \cap X_t = \{w_1, \dots, w_q\}$ e suponha que tais vértices estejam enumerados de acordo com o sentido do ciclo. Sejam $\{P_i\}_{1 \leq i \leq q}$ os (w_i, w_{i+1}) -caminhos que formam o ciclo C (assumimos $w_1 = w_{q+1}$ por comodidade de notação). Para cada $i \in [q]$, ou $V(P_i) \subseteq V(G_{t_1})$ ou $V(P_i) \subseteq V(G_{t_2})$. Em ambos os casos tem-se que $w_iw_{i+1} \in E(H_1)$ ou $w_iw_{i+1} \in E(H_2)$, pois H_i representa f_i , para cada $i \in [2]$. Desta forma, o ciclo direcionado (w_1, \dots, w_q) está contido em $H_1 \cup H_2$. Temos uma contradição, já que $H_1 \cup H_2 \subseteq H$ e H é acíclico. Logo, f' é acíclica.

Mostramos, agora, que H representa f' em X_t . Primeiro, considere $uv \in E(H)$; queremos mostrar que existe um (u, v) -caminho monocromático em G_t . Se $uv \in E(H_i)$, para algum $i \in [2]$, como H_i representa f_i em X_{t_i} , existe um (u, v) -caminho monocromático em $G_{t_i} \subseteq G_t$, e estamos feitos. Suponha então que uv é uma aresta de H que foi obtida ao tomarmos o fecho transitivo de $H_1 \cup H_2$. Isso significa que existe um caminho $P = (u = w_1, \dots, w_q = v)$ contido em $H_1 \cup H_2$. Mas como H_i representa f_i em X_{t_i} , para cada $i \in [2]$, tem-se que para todo $j \in [q]$, existe um (w_j, w_{j+1}) -caminho monocromático P_j que está contido em G_{t_1} ou em G_{t_2} . Concatenando os caminhos P_j , para $j \in [q]$, produzimos o (u, v) -caminho monocromático desejado. Finalmente, seja P um (u, v) -caminho monocromático em G_t ; queremos mostrar que $uv \in E(H)$. Se $P \subseteq G_{t_i}$, para algum $i \in [2]$, então $uv \in E(H_i)$, já que H_i representa f_i em X_{t_i} ; e como $H_i \subseteq H$, não há o que fazer. Seja, então $V(P) \cap X_t = \{u = w_0, w_1, \dots, w_q = v\}$ e suponha que tais vértices estão enumerados na ordem em que aparecem em P . Seja $I \subseteq [q-1]$ contendo j tal que o (w_j, w_{j+1}) -subcaminho monocromático P_j de P está contido em G_{t_1} . Como H_i representa f_i em X_{t_i} , para cada $i \in [2]$, temos que as arestas $w_j w_{j+1} \in E(H_1)$ se $j \in I$ e $w_j w_{j+1} \in E(H_2)$ caso contrário. Em particular, $w_j w_{j+1} \in E(H_1) \cup E(H_2)$ qualquer que seja $j \in [q-1]$. Assim, $w_j w_{j+1} \in E(H)$, para todo $j \in [q-1]$. Como H é transitivo, $w_j w_\ell \in E(H)$ para todo $1 \leq j < \ell \leq q$. Em particular, $w_1 w_q = uv \in E(H)$, como queríamos demonstrar. \square

Os lemas anteriores podem agora ser combinados para produzir o resultado principal deste capítulo.

Teorema 4.2. *Sejam G um digrafo com largura em árvore no máximo tw e k um inteiro positivo. Supondo que uma decomposição em árvore boa $(T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ de G de largura tw é conhecida, é possível decidir se G possui uma coloração acíclica com k cores em tempo $\mathcal{O}(k^{tw} \cdot 27^{tw^2} \cdot n)$.*

Prova. Para fazer o cálculo da complexidade, utilizaremos a estratégia da ordenação bottom-up apresentada no começo do capítulo, aplicando o lema adequado para cada tipo de nó. Calculamos o tempo gasto em cada nó e fazemos o produto pelo número de nós da árvore. O tempo gasto em um nó t é dado pelo tamanho da tabela de t (que é igual à quantidade de pares (f, H) , onde $f \in \mathcal{F}_t$ e $H \in \mathcal{H}_t(f)$, multiplicado pelo tempo gasto em cada entrada (f, H) da tabela c_t . Primeiro observe que $|\mathcal{F}_t| = k^{tw}$ uma vez que há k possibilidades para cada $u \in X_t$. Já quanto a $|\mathcal{H}_t(f)|$, podemos considerar somente aqueles digrafos que são acíclicos, devido ao Lema 4.1. Sendo assim, para cada par $u, v \in X_t$, consideramos 3 possibilidades: somente a aresta uv está em H ; somente a aresta vu está em H ; ou $\{uv, vu\} \cap E(H) = \emptyset$. Temos portanto um total de no máximo 3^{tw^2} digrafos a serem considerados. Quanto ao tempo gasto em cada entrada, calculamos a seguir, para cada tipo de nó.

- (a) t é um nó folha: vê-se pelo Lemma 4.2 que leva tempo $\mathcal{O}(1)$;
- (b) t é um nó de introdução com filho t' , onde $X_t = X_{t'} \cup \{v\}$: pelo Lema 4.4, sabe-se que $c_t[f, H] = 1$ se, e somente se, existe $H^I \in \mathcal{I}$ tal que $c_{t'}[f', H^I] = 1$, onde $f' = f|_{X_{t'}}$. Logo, usando a notação da prova do lema, basta verificar, para cada $I \subseteq [S^-, S^+]$, se $c_{t'}[f', H^I] = 1$. Como $[S^-, S^+] \subseteq E(H)$ e $V(H) = X_t$, temos que a quantidade de arestas nesse conjunto é limitada por tw^2 . Segue então que $|\mathcal{I}| \leq \mathcal{O}(2^{tw^2})$;
- (c) t é nó de abandono com filho t' , onde $X_t = X_{t'} \setminus \{v\}$: pelo Lema 4.5, temos que $c_t[f, H] = 1$ se, e somente se, existem $c \in [k]$ e $H' \in Ex_c(H)$ tais que $c_{t'}[f', H'] = 1$, onde f' é coloração de $X_{t'}$ que estende f e $f'(v) = c$. Considere $c \in [k]$ e lembre-se que $Ex_c(H)$ contém todo supergrafo $H' = (X_{t'}, E')$ de H tal que E' contém δ_c . Como H' , é acíclico, para cada $u \in X_t$, temos 3 possibilidades: $uv \in E'$, $vu \in E'$, ou $\{uv, vu\} \cap E' = \emptyset$. Segue então que $|Ex_c(H)| \leq 3^{tw}$. Como o número de cores para v é k , levamos tempo $\mathcal{O}(k \cdot 3^{tw})$.
- (d) t é nó de junção com filhos t_1, t_2 : pelo Lema 4.6, $c_t[f, H] = 1$ se, e somente se, existem $H_1 \in \mathcal{H}_{t_1}(f)$ e $H_2 \in \mathcal{H}_{t_2}(f)$ tais que $c_{t_1}[f, H_1] = c_{t_2}[f, H_2] = 1$. Sabemos, pelo o que foi discutido anteriormente, que $|\mathcal{H}_{t_i}| = O(3^{tw^2})$, para cada $i \in [2]$. Sendo assim, precisamos testar um total de $O((3^{tw^2})^2) = O(9^{tw^2})$ pares.

Combinando tudo obtemos a complexidade anunciada, uma vez que a complexidade de tempo nos nós é dominada pelo nó do tipo junção.

□

Devido à relação conhecida entre o número cromático acíclico e a largura em árvore, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 4.1. *Seja G um digrafo com largura em árvore tw . Existe um algoritmo FPT parametrizado pela largura em árvore de G que calcula o número cromático acíclico de G .*

Prova. Podemos obter uma largura em árvore de G com tamanho no máximo $5tw + 4$ (BODLAENDER *et al.*, 2016). Para cada $k \in \{2, \dots, tw\}$, pelo Teorema 4.2 podemos calcular se G possui um coloração acíclica com k cores em tempo $\mathcal{O}(k^{5tw+4} \cdot 27^{(5tw+4)^2} \cdot n)$. Repetiremos o processo no máximo tw vezes, portanto, levamos tempo $\mathcal{O}(tw^{5tw+5} \cdot 27^{(5tw+4)^2} \cdot n) = f(tw) \cdot n$ pra apontar o número cromático acíclico de G , satisfazendo a condição enunciada.

□

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, nós estudamos o número cromático acíclico de digrafos, que tem se mostrado como uma generalização natural do número cromático de grafos não-direcionados. A maior parte dos resultados aqui expostos se concentra no Capítulo 3 que trata sobre o produto de dois digrafos. Primeiro, provamos que o número cromático acíclico do produto cartesiano de G por H é igual a $\max\{\chi_a(G), \chi_a(H)\}$, enquanto que, no caso do produto direto, será no máximo $\min\{\chi_a(G), \chi_a(H)\}$. Em (HEDETNIEMI, 1966) o autor conjecturou que a igualdade $\chi_a(G \times H) = \min\{\chi_a(G), \chi_a(H)\}$ era válida para todos os grafos não-direcionados, até que foi provada falsa em (SHITOV, 2019) e como a coloração acíclica de digrafos é uma generalização da coloração de grafos, a versão da conjectura para coloração acíclica também é falsa no caso geral. Uma outra versão do problema de coloração em digrafos é simplesmente uma coloração própria para o seu grafo subjacente. Em (BESSY; THOMASSÉ, 2005) os autores provaram que a versão não-acíclica da Conjectura de Hedetnimei não é verdadeira. Para isso, eles exibem dois digrafos G, H tais que o número cromático de seus grafos subjacentes são exatamente 5 e o número cromático de $G \times H$ é 3. De toda forma, mencionamos que um dos digrafos envolvidos é uma orientação transitiva de um grafo completo. Assim, este não é um contra-exemplo para a versão acíclica de coloração. Em contrapartida, mostramos que o número cromático acíclico do produto direto de uma quantidade finita qualquer de ciclos orientados é igual a 2. Uma vez que tal produto é um grafo orientado, perguntamos:

Pergunta 5.1. *Sendo G e H grafos orientados, é válido que*

$$\chi_a(G \times H) = \min\{\chi_a(G), \chi_a(H)\}?$$

No que concerne ao produto forte, lembramos que, até mesmo os valores exatos para o número cromático do produtos de dois ciclos permanece em aberto, tendo em vista que, até onde conhecemos, sabe-se somente que $\chi(C_{2k+1} \boxtimes C_{2n+1}) = 5$, para todo $k \geq 2$ e $n \geq 2$ (VESZTERGOMBI, 1979). Neste trabalho, oferecemos valores exatos para o produtos de quaisquer dois ciclos orientados, e perguntamos se nosso resultado pode ser generalizado para o produto de uma quantidade qualquer de ciclos, como foi no caso do produto direto.

Pergunta 5.2. *É possível fornecer valores exatos para $\chi_a(C_{n_1} \boxtimes \dots \boxtimes C_{n_t})$, para inteiros positivos n_1, \dots, n_t ?*

Finalmente, mostramos que o número cromático acíclico de $G[H]$ é igual ao número cromático acíclico de $\overrightarrow{G[K_k]}$, onde $k = \chi_a(H)$, além de dar valores exatos para $\chi_a(C_n[H])$, quando $n \leq \chi_a(H)$, complementando um resultado apresentado em (NEUMANN-LARA, 1982).

Dando continuidade ao estudo, no Capítulo 4 damos um limitante superior para o número cromático acíclico em termos da largura em árvore limitada e fornecemos

um algoritmo FPT que decide se um digrafo D possui número cromático acíclico no máximo k , contanto que D possua largura em árvore limitada.

Ao falar de largura em árvore, nos referimos à largura em árvore do grafo subjacente. Em (JOHNSON *et al.*, 2001), os autores definem a *largura em árvore direcionada*, que seria uma generalização da largura em árvore de grafos não-direcionados. No mesmo artigo, os autores fornecem também um meta-algoritmo para resolver problemas em digrafos com largura em árvore direcionada limitada. Para a aplicação deste meta-algoritmo, é necessário que certas condições sejam satisfeitas. Tais condições não parecem ser satisfeitas pelo problema aqui abordado, e por isso acreditamos que a técnica não seja promissora. De qualquer maneira, perguntamos:

Pergunta 5.3. *Existe um algoritmo FPT para o problema de coloração acíclica em digrafos, parametrizado pela largura em árvore direcionada?*

REFERÊNCIAS

- ABOULKER, P. *et al.* Subdivisions in digraphs of large out-degree or large dichromatic number. **arxiv preprint arXiv:1610.00876**, [s. l.], 2016. Disponível em: <https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v26i3p19>. Acesso em: 10 jun. 2019.
- ANDRES, S. D.; HOCHSTÄTTLER, W. Perfect digraphs. **Journal of Graph Theory**, United States, v. 79, n. 1, p. 21–29, 2015. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/jgt.21811>. Acesso em: 04 mar. 2019.
- APPEL, K.; HAKEN, W. The solution of the four-color-map problem. **Scientific American**, United States, v. 237, n. 4, p. 108–121, 1977. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/24953967>. Acesso em: 06 ago. 2019.
- BERGER *et al.* Tournaments and colouring. **Journal of Combinatorial Theory B**, United States, v. 103, n. 1, p. 1–20, 2013. Acesso em: 18 fev. 2020.
- BERTELE, U.; Brioschi, F. On non-serial dynamic programming. **Journal of Combinatorial Theory A**, United States, v. 14, n. 2, p. 137–148, 1973. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0097316573900162?via%3Dihub>. Acesso em: 02 set. 2020.
- BESSY, S.; THOMASSÉ, S. The categorical product of two 5-chromatic digraphs can be 3-chromatic. **Discrete Mathematics**, Netherlands, v. 305, n. 1-3, p. 344–346, 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.disc.2004.01.023>. Acesso em: 15 out. 2019.
- BODLAENDER, H. L. *et al.* A $c^k n$ 5-approximation algorithm for treewidth. **SIAM J. Comput.**, United States, v. 45, n. 2, p. 317–378, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/130947374>. Acesso em: 22 nov. 2018.
- BOKAL, D. *et al.* The circular chromatic number of a digraph. **Journal of Graph Theory**, United States, v. 46, n. 3, p. 227–240, 2004. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/jgt.20003>. Acesso em: 06 jan. 2020.
- CORNEIL, D. G.; Rotics, U. On the relationship between clique-width and treewidth. **SIAM Journal on Computing**, United States, v. 34, n. 4, p. 825–847, 2005. Disponível em: <https://pubs.siam.org/doi/10.1137/S0097539701385351>. Acesso em: 13 mai. 2019.
- COURCELLE, B.; Mosbah, M. Monadic second-order evaluations on tree-decomposable graphs. **Theoretical Computer Science**, Netherlands, v. 109, n. 1-2, p. 49–82, 1993. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/030439759390064Z>. Acesso em: 02 abr. 2019.
- COURCELLE, B.; Olariu, S. Upper bounds to the clique width of graphs. **Discrete Applied Mathematics**, Netherlands, v. 101, n. 1-3, p. 77–114, 2000. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X99001845?via%3Dihub>. Acesso em: 27-05-201927-05-2019.
- CYGAN, M. *et al.* **Parameterized algorithms**. [s. l.]: Springer, 2015. v. 4. Disponível em: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-21275-3>. Acesso em: 25 jan. 2019.

- DEMAINE, E. D.; Hajiaghayi, M. The bidimensionality theory and its algorithmic applications. **The Computer Journal**, United States, v. 51, n. 3, p. 292–302, 2008. Disponível em: <https://academic.oup.com/comjnl/article-abstract/51/3/292/405293?redirectedFrom=fulltext&login=false>. Acesso em: 14 fev. 2019.
- DESCARTES, R. **Principia Philosophiae**. Amsterdam: Apud Danielem Elzevirium, 1644. Disponível em: https://archive.org/details/bub_gb_8lue9Xxbmq8C/page/n11/mode/2up?form=MG0AV3. Acesso em: 21 set. 2020.
- EL-ZAHAR, M.; Sauer, N. The chromatic number of the product of two 4-chromatic graphs is 4. **Combinatorica**, Germany, v. 5, n. 2, p. 121–126, 1985. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02579374>. Acesso em: 03 dez. 2018.
- ERDŐS, P.; Simonovits, M. A limit theorem in graph theory. In: CITESEER. **Studia Sci. Math. Hung.** 1965. Disponível em: <https://www.semanticscholar.org/paper/A-LIMIT-THEOREM-IN-GRAH-THEORY-Erdos-Simoinovits/b7bf5e535ea38a781268b4580265a96fcf7da7c2>. Acesso em: 25 jun. 2019.
- FEDER, T.; HELL, P.; MOHAR, B. Acyclic homomorphisms and circular colorings of digraphs. **SIAM J. Discr. Math.**, Netherlands, v. 17, n. 1, p. 161–169, 2003. Disponível em: <https://pubs.siam.org/doi/10.1137/S0895480103422184>. Acesso em: 21 jan. 2020.
- FRITSCH, R. *et al.* **Four-Color Theorem**. [s. l.]: Springer, 1998. Disponível em: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4612-1720-6>. Acesso em: 08 jul. 2019.
- GAMST, A. Some lower bounds for a class of frequency assignment problems. **IEEE transactions on vehicular technology**, United States, v. 35, n. 1, p. 8–14, 1986. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/1623376/>. Acesso em: 25 jun. 2019.
- GELLER, D.; STAHL, S. The chromatic number and other functions of the lexicographic product. **J. Comb. Theory B**, United States, v. 19, p. 87–95, 1975. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0095895675900763>. Acesso em: 29 out. 2019.
- HARUTYUNYAN, A.; Mohar, B. Two results on the digraph chromatic number. **Discrete Math.**, Netherlands, v. 312, p. 1823–1826, 2012. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X12000520?via%3Dihub>. Acesso em: 10 jun. 2020.
- HEDETNIEMI, S. T. **Homomorphisms of graphs and automata**. Tese (Doutorado) — University of Michigan, 1966. Disponível em: <https://www.proquest.com/openview/fb156bbc35622e6e23950b6032a4f288/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y>. Acesso em: 05 ago. 2020.
- JOHNSON, T. *et al.* Directed tree-width. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, United States, v. 82, n. 1, p. 138–154, 2001. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0095895600920318?via%3Dihub>. Acesso em: 22 jul. 2019.

KLAVZAR, S. **Coloring graph products - A survey.** *Discret. Math.*, [s. l.], v. 155, n. 1-3, p. 135–145, 1996. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(94\)00377-U](https://doi.org/10.1016/0012-365X(94)00377-U). Acesso em: 08 jul. 2020.

MOHAR, B. Eigenvalues and colorings of digraphs. **Linear Algebra and its applications**, United States, v. 432, p. 2273–2277, 2010. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379509002869>. Acesso em: 15 abr. 2020.

NEUMANN-LARA, V. The dichromatic number of a digraph. **J. Comb. Theory B**, United States, v. 33, n. 3, p. 265–270, 1982. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(82\)90046-6](https://doi.org/10.1016/0095-8956(82)90046-6). Acesso em: 01 abr. 2020.

PLEANMANI, N.; PANMA, S. Bounds for the dichromatic number of a generalized lexicographic product of digraphs. **Disc. Math., Algorithms and Applications**, Netherlands, v. 8, n. 2, p. 1650034 (12 pages), 2016. Disponível em: https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S1793830916500348?srsltid=AfmBOop9EoWkHXzj9Sf639yik_K0fhB9chV4W0Wdvdrv-oZySsseBrRO&Journal-Code=dmaa. Acesso em: 10 dez. 2019.

ROBERTSON, N.; SEYMOUR, P. D. Graph minors. III. Planar tree-width. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, United States, v. 36, n. 1, p. 49–64, 1984. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0095895684900133?via%3Dihub>. Acesso em: 22 nov. 2018.

ROBERTSON, N.; SEYMOUR, P. D. Graph minors. V. Excluding a planar graph. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, United States, v. 41, n. 1, p. 92–114, 1986. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0095895686900304?via%3Dihub>. Acesso em: 19 mar. 2019.

SABIDUSSI, G. Graphs with given group and given graph-theoretical properties. **Canadian Journal of Mathematics**, Canada, v. 9, p. 515–525, 1957. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/Journals/canadian-Journal-of-mathematics/article/graphs-with-given-group-and-given-graphtheoretical-properties/11C54FCF88D5C860650808B200EA8727>. Acesso em: 12 nov. 2019.

SHITOV, Y. Counterexamples to Hedetniemi's Conjecture. **Annals of Mathematics**, United States, v. 190, n. 2, p. 663–667, 2019. Disponível em: <https://annals.math.princeton.edu/wp-content/uploads/annals-v190-n2-p06-s.pdf>. Acesso em: 19 ago. 2020.

VESZTERGOMBI, K. Some remarks on the chromatic number of the strong product of graphs. **Acta Cybern.**, Hungary, v. 4, n. 2, p. 207–212, 1979. Disponível em: <https://cyber.bibl.u-szeged.hu/index.php/actcybern/article/view/3179>. Acesso em: 22 jul. 2020.