UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

LUCIANO RONEY GAUSS COSTA JOSINO

UM ESTUDO SOBRE REGULARIDADE DE SOLUÇÕES FRACAS DE EDPS E Q-MINIMIZANTES

FORTALEZA
2024

LUCIANO RONEY GAUSS COSTA JOSINO

UM ESTUDO SOBRE REGULARIDADE DE SOLUÇÕES FRACAS DE EDPS E Q-MINIMIZANTES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Análise e EDP.

Orientador: Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso.

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

J1e Josino, Luciano Roney Gauss Costa.
Um estudo sobre regularidade de soluções fracas de EDPs e Q-minimizantes / Luciano Roney Gauss Costa Josino. – 2024.
80 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2024.
Orientação: Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso.

1. Sobolev, Espaço de. 2. Soluções fracas. 3. Desigualdade de Caccioppoli. 4. Classe de De Giorgi. 5. Qminimizantes. I. Título.

CDD 510

LUCIANO RONEY GAUSS COSTA JOSINO

UM ESTUDO SOBRE REGULARIDADE DE SOLUÇÕES FRACAS DE EDPS E Q-MINIMIZANTES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Análise e EDP.

Aprovada em: 23/02/2024

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. João Vitor da Silva (Unicamp)
Universidade Estadual de Campinas

À Ronaldo e Rita Josino.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. A CAPES não apenas forneceu suporte financeiro fundamental, mas também possibilitou que este trabalho fosse conduzido e concluído com qualidade. Entretanto, este trabalho também só foi possível graças ao apoio e incentivo de pessoas importantes, a quem dedico meus mais sinceros agradecimentos.

Agradeço aos meus pais, Ronaldo e Rita, que me ensinaram a valorizar o conhecimento, a vida e os desafios que estes trazem.

Ao meu irmão, Rômulo, que me enche de motivação com seu interesse por matemática.

À minha esposa, Luana, que me acompanhou durante a escrita desse trabalho e teve a paciência para me ouvir falar uma matemática que ela não entende.

Ao Prof. Dr. Cleon Barroso, pela paciência, disposição e excelente orientação, não somente durante a dissertação, mas em todo o curso.

Aos professores participantes da banca examinadora Gleydson Chaves Ricarte e João Vitor da Silva pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões que foram fundamentais para enriquecer esse trabalho.

Aos colegas da turma de mestrado, pelas reflexões, críticas e sugestões recebidas.

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização deste sonho. Este trabalho é o resultado de um esforço coletivo, e cada colaboração aqui mencionada será sempre lembrada com gratidão.

"Cada vez mais, eu via os grandes profissionais da Rainha das Ciências como mariposas atraídas por um tipo de luz desumana e brilhante, mas abrasadora e cruel. [...] Chegaram demasiadamente perto, queimaram as asas, caíram e morreram" (Doxiadis, 2001).

RESUMO

Nesta dissertação propomos um estudo sobre regularidade de soluções fracas de EDPs na forma divergente e também sobre regularidade do tipo Hölder para Q-minimizantes de funcionais não-lineares cujo integrando satisfaz determinada condição de crescimento polinomial. A primeira parte é dedicada ao estudo clássico que consiste em obter regularidade de soluções fracas de EDPs na forma divergente com coeficientes de classe C^1. A seguir, abordamos o método de De Giorgi que consiste em obter limitação local e Hölder continuidade para soluções fracas de EDPs da forma divergente com coeficientes apenas mensuráveis satisfazendo uma condição de elipticidade. Na terceira e última parte, apresentamos os resultados clássicos de Giusti e Gianquinta sobre a teoria de regularidade do tipo Hölder para Q-minimizantes. Encerramos a exposição da dissertação com comentários destacando as diferenças entre as três abordagens estudadas, bem como com a apresentação de alguns exemplos.

Palavras-chave: Sobolev; soluções fracas; desigualdade de Caccioppoli; classe de De Giorgi; q-minimizantes.

ABSTRACT

In this dissertation, we propose a study on the regularity of weak solutions of PDEs in divergent form, as well as on Hölder regularity for Q-minimizers of nonlinear functionals whose integrand satisfies a certain polynomial growth condition. The first part is dedicated to the classical study of obtaining regularity of weak solutions of PDEs in divergent form with coefficients of class C^1. Next, we address the De Giorgi method, which consists of obtaining local boundedness and Hölder continuity for weak solutions of PDEs in divergent form with merely measurable coefficients satisfying an ellipticity condition. In the third and final part, we present the classical results of Giusti and Gianquinta on the Hölder regularity theory for Q-minimizers. We conclude the exposition of the dissertation with comments highlighting the differences between the three approaches studied, as well as with the presentation of some examples.

Keywords: Sobolev; weak solutions; Caccioppoli inequality; De Giorgi class; q-minimizers.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números Reais
U	Domínio limitado do $\mathbb{R}^n$
∂U	Bordo de U
$B_r(x)$	Bola de raio r centrada no ponto x
$V \subset\subset U$	V está compactamente contido em U
$\mathrm{dist(V,U)}$	Distância mínima entre V e U
$\operatorname{supp} u$	Suporte compacto da função u
C^k	Espaço das funções de classe C^k
C^∞	Espaço das funções suaves
C_c^∞	Espaço das funções suaves com suporte compacto
Du	Gradiente da função u
L^m	Espaço das funções mensuráveis com norma induzida limitada
$\operatorname{ess\,sup} u$	Supremo essencial de u
$\operatorname{ess\,inf} u$	Ínfimo essencial de u
$\|u\|_\infty$	Norma infinito de u
$W^{k,m}$	Espaço de Sobolev
$W_0^{k,m}$	Fecho de C_0^∞ em $W^{k,m}$
$C^{0,\alpha}$	Espaço das funções α-Hölder Contínuas
Lu	Operador L na forma divergente aplicado na função u

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Estudar a regularidade de soluções de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) é uma tarefa natural na análise matemática. Em 1957 De Giorgi publicou o artigo [5], que estudava a regularidade de soluções de equações elípticas com coeficientes mensuráveis e limitados. Além disso, De Giorgi conseguiu obter Hölder continuidade para soluções fracas da equação

$$\mathrm{div}(D^2F(Dw)Du) = 0,$$

onde $u = \partial_i w$. Essa teoria foi desenvolvida para resolver o 19° problema de Hilbert, o que trouxe grandes avanços para a área da teoria de regularidade para EDPs. Com essa ferramenta foi possível obter suavidade para minimizantes de funcionais do tipo

$$\mathcal{F}(u,U) = \int_U F(Du)\,dx$$

para funções u contidas no espaço de Sobolev $W^{1,m}(U)$, que é o espaço das funções que pertencem ao $L^m(U)$ com derivada fraca pertencendo ao $L^m(U)$.

A partir do estudo da regularidade de minimizantes de funcionais, Giust e Gianquinta estabeleceu regularidade para soluções Q-minimizantes, isto é, soluções mínimas $u \in W^{1,m}(U)$ de funcionais $\mathcal{F}$ tal que

$$\mathcal{F}(u,U) \leq Q\mathcal{F}(v,U)$$

para algum $Q > 1$ e toda $v \in W^{1,m}(U)$.

Esse trabalho é dividido em três partes de fundamentação teórica. O capítulo 2 aborda um estudo preliminar que contém o necessário para os capítulos subsequentes estarem bem alicerçados. Irão ser mostrados alguns teoremas e desigualdades clássicas, definido a noção de espaços de Hölder, espaços de Sobolev, algumas propriedades importantes sobre quocientes diferenciais e, por fim, uma abordagem clássica de regularidade interior de soluções fracas para equações da forma divergente com coeficientes C^1. Para esse capítulo inicial, será acompanhado de perto os livros [4] e [12].

O capítulo 3 terá como principal objetivo dar uma motivação para se obter regularidade de minimizantes de funcionais junto à investigação do método de De Giorgi provando a limitação local de soluções de EDPs elípticas de segunda ordem e em seguida estabelecendo Hölder continuidade para essas soluções. Para escrever esse capítulo foram usados os livros [12] e [3] que dão abordagens diferentes do método, porém [3] deixa claro o uso da classe de funções de De Giorgi e da desigualdade de Caccioppoli.

Para finalizar a teoria, o capítulo 4 terá como principal objetivo a obtenção de regularidade para soluções Q-minimizantes de funcionais não-lineares cujo integrando satisfaz certas condições de crescimento polinomial. Usando os artigos [6] e [7] junto ao livro [11] escritos por Giusti e Gianquinta, é demonstrado limitação local e Hölder continuidade para essas soluções.

Para finalizar o trabalho, serão feitos alguns comentários acerca das similaridades e diferenças que existem entre o método de De Giorgi e os resultados obtidos no Capítulo 4, concluindo assim o estudo proposto.

2 PRELIMINARES

Este capítulo abordará conceitos que serão importantes para construir a teoria de De Giorgi para a regularidade de soluções fracas de EDPs.

Inicialmente, será relembrado alguns Teoremas e Desigualdades clássicas. Será revisto a teoria dos espaços de Hölder e Sobolev e em seguida, para falar dos espaços de Sobolev, será introduzido o conceito de derivada fraca. Para finalizar, a última seção desse capitulo terá como principal objetivo abordar as técnicas clássicas para obtenção de regularidade de soluções fracas do problema

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} = f \quad \text{em } U \subset \mathbb{R}^n.$$

Doravante, U denotará um domínio aberto. O principal Teorema abordado aqui (veja Teorema 27) mostra que se os coeficientes $a_{ij}(x)$ são de classe C^1, obtém-se mais regularidade para suas soluções fracas $u \in W^{1,2}(U)$. As técnicas envolvem os chamados quocientes diferenciais de soluções fracas e o uso adequado de funções testes. Como apontado acima, esse tópico é clássico e indicamos ao leitor interessado a referência [4].

2.1 Teoremas e Desigualdades Clássicas

A seguir, algumas definições, Teoremas e proposições elementares serão apresentados para uso posterior e auxílio do leitor.

Definição 1 (Função Convexa)**.** *Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita ser convexa se*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e todo $0 \leq t \leq 1$.

Proposição 2. *Sejam $a, b > 0$ reais e $p \in \mathbb{N}$. Então vale a desigualdade*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Demonstração. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa definida por $f(x) = |x|^p$, para algum $p \in \mathbb{R}$. Então, por f ser convexa, dados $x, y \in \mathbb{R}$ e para todo $t \in [0,1]$ tem-se que

$$f\Big((1-t)x + ty\Big) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$
$$|(1-t)x + ty|^p \leq (1-t)|x|^p + t|y|^p.$$

Tomando $t = \frac{1}{2}$, obtém-se:

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^p \leq \frac{|x|^p + |y|^p}{2}.$$

O que nos fornece a desigualdade

$$|x+y|^p \leq 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p).$$

Em particular, tomando $a,b > 0$ reais e fazendo $x = a$ e $y = b$ na desigualdade anterior, vale que

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p), \quad \forall a,b > 0.$$

$\square$

A demonstrações das desigualdades a seguir podem ser encontradas nos livros [4], [15] ou [18].

Teorema 3 (Desigualdade de Jensen)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função convexa. Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado e $u : U \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável, então*

$$f\left(\fint_U u\, dx\right) \leq \fint_U f(u)\, dx.$$

Proposição 4 (Desigualdade de Cauchy)**.** *Seja $a,b \in \mathbb{R}$ quaisquer, então*

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Proposição 5 (Desigualdade de Cauchy com ε)**.** *Seja $a,b > 0$ e $\varepsilon > 0$, então*

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

Proposição 6 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam $1 \leq p$ e $q \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

para todo $a,b > 0$.

Proposição 7 (Desigualdade de Young com ε)**.** *Sejam $1 \leq p$ e $q \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q$$

com $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-q/p} q^{-1}$.

Proposição 8 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Sejam* $x,y \in \mathbb{R}^n$ *quaisquer. Então*

$$|x \cdot y| \leq |x||y|.$$

Definição 9 (Espaço $L^p(U)$)**.** *Considere* $1 \leq p \leq \infty$. *Dado um conjunto* $U \subset \mathbb{R}^n$, *definimos o espaço* $L^p(U)$ *por:*

(i) $L^p(U) = \{u : U \to \mathbb{R};\ \|u\|_{L^p(U)} < \infty\}$ *onde*

$$\|u\|_{L^p(U)} = \left(\int_U |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

(ii) $L^\infty(U) = \{u : U \to \mathbb{R};\ \|u\|_{L^\infty(U)} < \infty\}$ *onde*

$$\|u\|_{L^\infty(U)} = \operatorname*{ess\,sup}_U |u|.$$

Proposição 10 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam* $1 \leq p$ *e* $q < \infty$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então, se* $u \in L^p(U)$, $v \in L^q(U)$, *tem-se*

$$\int_U |uv| \, dx \leq \|u\|_{L^p(U)} \|v\|_{L^q(U)}.$$

Definição 11. *Se* $1 \leq m < n$, *o expoente crítico de* m *é definido por*

$$m^* := \frac{nm}{n-m}.$$

Teorema 12 (Desigualdade de Sobolev)**.** *Seja* $1 \leq m < n$. *Existe uma constante* C, *dependendo somente do* m *é* n, *tal que*

$$\|u\|_{L^{m^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^m(\mathbb{R}^n)},$$

para toda $u \in C^1_C(\mathbb{R}^n)$.

2.2 Espaços de Hölder

Uma função $u : U \to \mathbb{R}$ é dita ser C-Lipschitz ($C > 0$) quando

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y| \quad \forall x,y \in U.$$

É claro que a condição Lipschitz implica em continuidade uniforme. A partir da ideia de funções Lipschitz podemos considerar a seguinte classe de funções.

Definição 13. *Seja $\alpha \in (0,1)$ uma constante real. Uma função $u : U \to \mathbb{R}$ é dita ser Hölder contínua em U com expoente α se existe uma constate $C > 0$ tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^{\alpha} \quad \forall x, y \in U.$$

Com a noção de funções Hölder contínuas podemos definir o espaço $C^{0,\alpha}(U)$ das funções Hölder contínua, assim como sua norma.

Definição 14. *Sejam $\alpha \in (0,1)$ uma constante real e $u : U \to \mathbb{R}$ uma função real.*

(i) Se u é contínua e limitada, definimos a norma $\|\cdot\|_{C(\overline{U})}$ por

$$\|u\|_{C(\overline{U})} := \sup_{x \in U} |u(x)|.$$

(ii) A semi-norma α-Hölder $[\cdot]_{C^{0,\alpha}(\overline{U})}$ de u é dada por

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{U})} := \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \right\}$$

(iii) A norma α-Hölder $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}(\overline{U})}$ de u é dada por

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{U})} := \|u(x)\|_{C(\overline{U})} + [u]_{C^{0,\alpha}(\overline{U})}$$

(iv) Dizemos que $u \in C^{0,\alpha}(\overline{U})$ se

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{U})} < \infty$$

Podemos generalizar a definição acima a fim de contemplar as funções que são k-vezes continuamente diferenciáveis com k-ésima derivada parcial Hölder contínua. Mais precisamente:

Definição 15. *Definimos o espaço de Hölder $C^{k,\alpha}(\overline{U})$ por*

$$C^{k,\alpha}(\overline{U}) = \{u \in C^k(\overline{U});\ \|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{U})} < \infty\},$$

onde

$$\|u\|_{k,\alpha} := \|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{U})} := \sum_{j \leq k} \|D^j u\|_{C(\overline{U})} + \sum_{j=k} [D^j u]_{C^{0,\alpha}(\overline{U})}.$$

É fácil verificar que $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\overline{U})}$ é, de fato, uma norma. Além disso, também é possível provar que $\left(C^{k,\alpha}(\overline{U}), \|\cdot\|_{k,\alpha}\right)$ é um espaço de Banach (vide [9, cap. 5]).

2.3 Espaços de Sobolev

Seja $u \in C^1(U)$. Denotemos por $C_c^\infty(U)$ o espaço das funções reais em U que são infinitamente diferenciáveis com suporte compacto. Tomando $\phi \in C_c^\infty(U)$, temos

$$(u\phi)_{x_i} = u_{x_i}\phi \ + \ u\phi_{x_i}$$

$$\int_U (u\phi)_{x_i} = \int_U u_{x_i}\phi \ + \ \int_U u\phi_{x_i}.$$

Por outro lado, aplicando o Teorema da Divergência (vide [15, Cap. VII, Sec. 8]) obtemos

$$0 = \int_{\partial U} \langle u\phi e_i, \eta \rangle = \int_U (u\phi)_{x_i} = \int_U u_{x_i}\phi \ + \ \int_U u\phi_{x_i},$$

donde segue que:

$$\int_U u\phi_{x_i} = -\int_U u_{x_i}\phi.$$

De modo geral, tome $u \in C^k(U)$ e $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ um multi-índice tal que $|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n = k$. E então, de modo análogo, obtemos

$$\int_U uD^\beta\phi = (-1)^{|\beta|}\int_U D^\beta u\phi, \tag{2.1}$$

em que

$$D^\alpha\phi = \frac{\partial^{\beta_1} \dots \partial^{\beta_n}}{\partial_{x_1}^{\beta_1} \dots \partial_{x_n}^{\beta_n}}\phi.$$

Note que a igualdade (2.1) faz sentido desde que $u \in C^k(U)$. Por outro lado, para que o lado esquerdo de (2.1) faça sentido é necessário que $u \in L^1_{loc}(U)$. Com isso em mente, podemos considerar a seguinte noção generalizada de derivada.

Definição 16. *Sejam $u, v \in L^1_{loc}(U)$ e β um multi-índice. Dizemos que v é a α-ésima derivada parcial fraca de u, e escrevemos*

$$D^\beta u = v,$$

se vale a igualdade

$$\int_U uD^\beta\phi = (-1)^{|\beta|}\int_U v\phi \tag{2.2}$$

para toda função teste $\phi \in C_c^\infty(U)$.

Lema 17. *(Unicidade da derivada fraca) A β-ésima derivada parcial fraca de u, se existe, é única a menos de um conjunto de medida nula.*

Demonstração. Tome $v_1,\ v_2 \in L^1_{loc}(U)$ satisfazendo

$$\int_U uD^\beta \phi dx = (-1)^{|\beta|}\int_U v_1\phi dx = (-1)^{|\beta|}\int_U v_2\phi dx$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(U)$. Então,

$$\int_U v_1\phi dx = \int_U v_2\phi dx \quad \Rightarrow \quad \int_U (v_1 - v_2)\phi dx = 0$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(U)$. Donde segue que $v_1 - v_2 = 0$ em quase todo $x \in U$. □

Definição 18. *Fixe $1 \leq p \leq \infty$ e tome k um inteiro não negativo. Definimos*

$$W^{k,p}(U) = \{u \in L^p(U); \quad D^\alpha u \in L^p(U) \ \textit{com}\ 0 \leq |\alpha| \leq k\},$$

onde $D^\alpha u$ é a α-ésima derivada parcial fraca de u. Se $u \in W^{k,p}(U)$, definimos a norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \left(\sum_{|\alpha|\leq k}\int_U |D^\alpha u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$$

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(U)} := \sum_{|\alpha|\leq k} \text{ess sup}_U |D^\alpha u| \qquad (p = \infty).$$

Frequentemente, para $p = 2$, escreveremos o espaço de Sobolev como

$$W^{k,2}(U) = H^k(U), \quad k = 0, 1, ...$$

onde $H^k(U)$ é o espaço de Hilbert.

Proposição 19. *(Propriedades da derivada fraca) Suponha $u, v \in W^{k,p}(U)$, $|\beta_1| \leq k$. Então:*

(i) *$D^{\beta_1}u \in W^{k-|\beta_1|,p}(U)$ e $D^{\beta_2}(D^{\beta_1}u) = D^{\beta_1}(D^{\beta_2}u) = D^{\beta_1+\beta_2}u$ para todos os multi-índices β_1, β_2 com $|\beta_1| + |\beta_2| \leq k$.*

(ii) *Para cada $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$ e $D^\beta(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\beta u + \mu D^\beta v$, $|\beta| \leq k$.*

Demonstração. (i) Fixe $\phi \in C_c^\infty(U)$. Note que $\phi \in C_c^\infty(U)$ implica que $D^{\beta_2}\phi \in C_c^\infty(U)$. Faça $\tilde{\phi} = D^{\beta_2}\phi$, e assim

$$\begin{aligned}
\int_U D^{\beta_1} u\tilde{\phi} dx &= (-1)^{|\beta_1|}\int_U uD^{\beta_1}\tilde{\phi}\ dx = (-1)^{|\beta_1|}\int_U uD^{\beta_1}(D^{\beta_2}\phi)\ dx \\
&= (-1)^{|\beta_1|}\int_U uD^{\beta_1+\beta_2}\phi\ dx \\
&= (-1)^{|\beta_1|}(-1)^{|\beta_1+\beta_2|}\int_U D^{\beta_1+\beta_2}u\phi\ dx \\
&= (-1)^{|\beta_2|}\int_U D^{\beta_1+\beta_2}u\phi\ dx.
\end{aligned}$$

Portanto, $D^{\beta_2}(D^{\beta_1}u) = D^{\beta_1+\beta_2}u$ no sentido fraco. (ii) De fato,

$$\begin{aligned}
\int_U (\lambda u + \mu v)D^{\beta_1}\phi\ dx &= \lambda\int_U uD^{\beta_1}\phi\ dx + \mu\int_U vD^{\beta_1}\phi\ dx \\
&= \lambda\cdot(-1)^{|\beta_1|}\int_U D^{\beta_1}u\phi\ dx + \mu\cdot(-1)^{|\beta_1|}\int_U D^{\beta_1}v\phi\ dx \\
&= (-1)^{|\beta_1|}\int_U (\lambda D^{\beta_1}u + \mu D^{\beta_1}v)\phi\ dx.
\end{aligned}$$

Donde segue que $D^{\beta_1}(\lambda u + \mu v) = \lambda D^{\beta_1}u + \mu D^{\beta_1}v$ no sentido fraco. □

2.4 Regularidade interior de soluções fracas

Nesta seção recordaremos um resultado clássico da teoria de regularidade. Considere o seguinte problema:

$$Lu = f \text{ em } U \tag{2.3}$$

onde U é um domínio aberto e limitado em $\mathbb{R}^n$, $u : \overline{U} \to \mathbb{R}$ é uma função desconhecida e $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função dada. Aqui L é um operador diferencial parcial de segunda ordem definido por

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j}$$

onde, em princípio, os coeficientes a_{ij}'s, são funções mensuráveis à Lebesgue com $i,j = 1,2,...,n$. Além disso, assumamos que a matriz $A = (a_{ij})$ seja uma matriz simétrica, i.e., $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i,j.

Definição 20. *O operador L é dito ser uniformemente elíptico se existe uma constante $\lambda > 0$ tal que*

$$\sum_{i,j=1} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e quase todo ponto $x \in U$.

Esta condição de elipticidade significa que para cada $x \in U$, a matriz simétrica $A = (a_{ij}(x))$ é positiva definida, com o seu menor autovalor maior ou igual à λ. Um exemplo simples que podemos obter para o operador L é tomar L como sendo o Laplaciano negativo, isto é, $L = -\Delta$, onde $a_{ij} = \delta_{ij}$.

Definição 21. *(Solução fraca) Uma solução fraca da equação (2.3) é uma função $u \in H^1(U)$ tal que*

$$\int_U a_{ij}u_{x_i}\phi_{x_j}du = \int_U f\phi du, \quad \forall \phi \in H_0^1(U),$$

onde $f \in L^2(U)$ e u_{x_i} é a i-ésima derivada fraca de u de primeira ordem.

Outra definição que necessitamos é o de quociente diferencial, que, conforme veremos a seguir, possui uma relação fina com soluções fracas do Problema (2.3). Estes quocientes serão importantes no estudo de regularidade de soluções fracas.

Definição 22. *Sejam $u \in L^1_{loc}(U)$, $V \subset\subset U$ e $0 < |h| < \operatorname{dist}(V, \partial U)$. Para $k = 1, 2, ..., n$, o quociente diferencial de u em V, na k-ésima direção é definido por:*

$$D_k^h u(x) = \frac{u(x + he_k) - u(x)}{h}, \quad x \in V.$$

Por convenção, denotemos

$$u_k^h := u(x + he_k).$$

A definição de quociente diferencial se assemelha bastante com a definição usual de derivadas parciais de uma função $u \colon U \to \mathbb{R}$. A diferença aqui é que estamos tomando o quociente apenas localmente nos pontos de V e h, pequeno o suficiente, de modo que $x + he_k$ pertença a U, sem tomar o limite quando h tende à 0.

Lema 23. *(Regra do produto) Sejam $v, w \in L^1_{loc}(U), V \subset\subset U$, e $0 < |h| < \operatorname{dist}(V, \partial U)$. Então,*

$$D_k^h(v \cdot w) = w_k^h \cdot D_k^h v + v \cdot D_k^h w \ \text{ em } V,$$

com $k = 1, 2, ..., n$.

Demonstração. De fato, dado $x \in V$, temos

$$\begin{aligned} D_k^h(v \cdot w)(x) &= \frac{(v \cdot w)_k^h(x) - (v \cdot w)(x)}{h} \\ &= \frac{v_k^h(x) \cdot w_k^h(x) - v(x) \cdot w(x)}{h} \\ &= \frac{v_k^h(x) \cdot w_k^h(x) - v(x) \cdot w_k^h(x) + v(x) \cdot w_k^h(x) - v(x) \cdot w(x)}{h} \\ &= \frac{w_k^h(x) \cdot (v_k^h(x) - v(x)) + v(x) \cdot (v_k^h(x) - w(x))}{h} \\ &= w_k^h \cdot D_k^h v + v \cdot D_k^h w \end{aligned}$$

para todo $x \in V$. □

Lema 24. *Sejam $v, w \in L^2_{loc}(U)$ e suponhamos que $W = \operatorname{supp} w \subset\subset U$. Seja $0 < |h| <$ $\operatorname{dist}(W,\ \partial U)$. Então*

$$\int_U v \cdot D_k^{-h} w \ dx = -\int_U w \cdot D_k^h v \ dx$$

com $k = 1, 2, ..., n$.

Demonstração. De fato, tomando $x \in U$, temos

$$\begin{aligned} \int_U v \cdot D_k^{-h} w \ dx &= \int_U v(x) \cdot \frac{w_k^{-h}(x) - w(x)}{-h} \ dx \\ &= -\frac{1}{h}\Big(\int_U v(x) \cdot w_k^{-h}(x) \ dx - \int_U v(x) \cdot w(x) \ dx\Big) \\ &= -\frac{1}{h}\Big(\int_U v(x) \cdot w(x - he_k) \ dx - \int_U v(x) \cdot w(x) \ dx\Big). \end{aligned}$$

Veja que como w possui suporte compacto W em U vale que $w(x) = 0, \forall\ x \in U \backslash W$, logo teremos

$$\int_U v(x) \cdot w(x) \ dx = \int_W v(x) \cdot w(x) dx.$$

Além disso, tomando o difeomorfismo $\phi : W \to U$ dado por $\phi(x) = x - he_k$, e aplicando o Teorema de Mudança de Variáveis (Vide [Cap. VI, Sec. 6, Teorema de Mudança de Variáveis.][15]), obtemos

$$\int_U v(x) \cdot w(x - he_k) \ dx = \int_W v(x + he_k) \cdot w(x) \ dx.$$

Assim, ficamos com

$$\begin{aligned}
\int_U v\cdot D_k^{-h}w\ dx &= -\frac{1}{h}\Big(\int_W v(x+he_k)\cdot w(x)\ dx - \int_W v(x)\cdot w(x)\ dx\Big)\\
&= -\frac{1}{h}\Big(\int_W (v_k^h(x)\cdot w(x) - v(x)\cdot w(x)\ dx\Big)\\
&= -\int_W w(x)\cdot \frac{v_k^h - v(x)}{h}\ dx\\
&= -\int_U w\cdot D_k^h v\ dx.
\end{aligned}$$

□

Note que usamos a hipótese $v, w \in L^2_{loc}(U)$ para garantir, via Hölder, que $v\cdot w \in L^1_{loc}(U)$. Este lema nos ajudará futuramente a obter regularidade para uma solução fraca u do Problema (2.3). Com estas propriedades podemos relacionar estes quocientes diferenciais com as derivadas fracas.

Teorema 25. *Seja $u \in H^1(U)$. Então, para cada $V \subset\subset U$, vale*

$$\|D^h u\|_{L^2(V)} \leq c\|Du\|_{L^2(V)},$$

para algum $c > 0$ que depende apenas de n e $0 < |h| < \frac{1}{2}\text{dist}(V, \partial U)$.

Demonstração. Tomando $x \in V$, e $0 < |h| < \frac{1}{2}\text{dist}(V, \partial U)$, temos pelo Teorema Fundamental do Cálculo (vide [14, Cap. IX, Teorema 9]) que

$$D_i^h u(x) = \frac{u(x+he_i) - u(x)}{h} = \int_0^1 u_{x_i}(x+the_i)dt.$$

Logo, aplicando o módulo dos dois lados da igualdade, obtemos

$$|D_i^h u(x)| = \Big|\int_0^1 Du(x+the_i)dt\Big| \leq \int_0^1 |Du(x+the_i)|dt,$$

donde segue que

$$|D_i^h u(x)|^2 \leq \Big(\int_0^1 |Du(x+the_i)|dt\Big)^2.$$

Aplicando a desigualdade de Jenssen do lado direito dessa igualdade temos

$$|D_i^h u(x)|^2 \leq \int_0^1 |Du(x+the_i)|^2 dt.$$

Então,

$$\begin{aligned}\int_V |D^h u(x)|^2 dx &= \sum_{i=1}^{n} \int_V |D_i^h u(x)|^2 dx \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \int_V \int_0^1 |Du(x+the_i)|^2 dtdx \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_V |Du(x)|^2 dx \\ &= n \cdot \int_V |Du(x)|^2 dx\end{aligned}$$

onde $|D^h u(x)|^2 = |D_1^h u(x)|^2 + \cdots + |D_n^h u(x)|^2$. Logo, segue que

$$\|D^h u\|_{L_2} \leq \sqrt{n} \cdot \|Du\|_{L^2}.$$

$\square$

Teorema 26. *Seja $V \subset\subset U$ e $u \in L^2(V)$. Suponha que exista $c > 0$ tal que $\|D^h u\|_{L^2(V)} \leq c$, para todo $0 < |h| < \frac{1}{2}\text{dist}(V, \partial U)$. Então $u \in H^1(V)$ e $\|Du\|_{L^2(V)} \leq c$.*

Demonstração. Por hipótese, temos que $\sup \|D_i^{-h} u\|_{L^2(V)} \leq c$, com $i = 1, 2, ..., n$. Como L^2 é um espaço Banach reflexivo (vija [1, Teorema 6.6.6], existe uma sequência $\{D_i^{-h_k} u\}_{i=1}^{\infty}$ com $h_k \to 0$, e um $v_i \in L^2(V)$, tal que $D_i^{-h_k} u \rightharpoonup v_i$ em $L_2(V)$, com $\|v_i\|_{L^2(V)} \leq c$. Seja $\phi \in C_c^{\infty}(V)$. Veja que

$$\begin{aligned}\int_V u\phi_{x_i} dx = \int_U u\phi_{x_i} dx &= \lim_{h_k \to 0} \int_U u D_i^{h_k} \phi dx \\ &= \lim_{h_k \to 0} -\int_U \phi D_i^{-h_k} u dx = -\int_V \phi v_i dx.\end{aligned}$$

Isso significa que $v_i = u_{x_i}$. Logo, $|Du| \in L^2(V)$ e $\|Du\|_{L^2(V)} \leq c$. $\square$

O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema 27. *Considere $a_{ij} \in C^1(U)$ com $i, j = 1, ..., n$ e $f \in L^2(U)$. Suponha que $u \in H^1(U)$ é uma solução fraca de*

$$Lu = f \text{ em } U.$$

Então, $u \in H^2_{loc}(U)$ e para cada subconjunto aberto $V \subset\subset U$ vale

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}),$$

onde C é uma constante que depende somente do V, U e dos coeficientes de L.

Demonstração. Fixe um aberto qualquer $V \subset\subset U$ e tome um conjunto aberto W tal que $V \subset\subset W \subset\subset U$. Escolha uma função corte $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 \text{ em } V, \\ \zeta \equiv 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \backslash W, \\ 0 \leq \zeta \leq 1. \end{cases}$$

Como u é uma solução fraca da EDP $Lu = f$ em U temos

$$\int_U a_{ij} u_{x_i} \phi_{x_j} dx = \int_U f\phi dx, \quad \forall \phi \in H_0^1(U).$$

Agora, dado $|h| > 0$ pequeno o suficiente, tome $k \in \{1, ..., n\}$ e faça

$$\phi := -D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u).$$

Para facilitar a notação, escrevamos

$$A = B$$

onde

$$A := \int_U a_{ij} u_{x_i} \phi_{x_j} dx \quad \text{ e } \quad B := \int_U f\phi dx.$$

Estimando A, temos

$$\begin{aligned}
A &= \int_U a_{ij} u_{x_i} \phi_{x_j} dx \\
&= -\int_U a_{ij} u_{x_i} [D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)]_{x_j} dx \\
&= -\int_U a_{ij} u_{x_i} D_k^{-h}[(\zeta^2 D_k^h u)_{x_j}] dx \\
&= \int_U D_k^h(a_{ij} u_{x_i})(\zeta^2 D_k^h u)_{x_j} dx \\
&= \int_U a_{ij} D_k^h u_{x_i} (\zeta^2 D_k^h u)_{x_j} + (D_k^h a_{ij})(u_{x_i})_k^h (\zeta^2 D_k^h u)_{x_j} dx \\
&= \int_U a_{ij} D_k^h u_{x_i} [2\zeta\zeta_{x_j} D_k^h u + \xi^2 D_k^h u_{x_j}] + (D_k^h a_{ij})(u_{x_i})_k^h [2\zeta\zeta_{x_j} D_k^h u + \zeta^2 D_k^h u_{x_j}] dx \\
&= A_1 + A_2,
\end{aligned}$$

onde

$$A_1 = \int_U a_{ij} D_k^h u_{x_i} D_k^h u_{x_j} \zeta^2 dx$$

e

$$A_2 = \int_U 2\zeta\zeta_{xj} a_{ij} D_k^h u_{x_i} D_k^h u + (D_k^h a_{ij})(u_{x_i})_k^h [2\zeta\zeta_{x_j} D_k^h u + \xi^2 D_k^h u_{x_j}] dx.$$

Da elipticidade uniforme do operador L segue que

$$A_1 \geq \lambda \int_U |D_k^h Du|^2 \zeta^2 dx.$$

Da condição de $a_{ij} \in C^1(U)$ temos

$$|A_2| \leq C \int_U \zeta |D_k^h Du||D_k^h u| + \zeta |D_k^h Du||Du| + \zeta |D_k^h u||Du| dx \tag{2.4}$$

para alguma constante C. Observe que, usando a Desigualdade de Cauchy com ε nas parcelas de (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} C\int_U \zeta |D_k^h Du||D_k^h u| dx &= \int_U \Big(\zeta |D_k^h Du|\Big)\Big(C|D_k^h u|\Big) dx \\ &\leq \int_U \varepsilon_1 \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx + \int_U \frac{C^2}{4\varepsilon_1} |D_k^h u|^2 dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C\int_U \zeta |D_k^h Du||Du| dx &= \int_U \Big(\zeta |D_k^h Du|\Big)\Big(C|Du|\Big) dx \\ &\leq \int_U \varepsilon_2 \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx + \int_U \frac{C^2}{4\varepsilon_2} |Du|^2 dx, \end{aligned}$$

e para a última,

$$\begin{aligned} C\int_U \zeta |D_k^h u||Du| dx &= \int_U \zeta \Big(\sqrt{C}|D_k^h u|\Big)\Big(\sqrt{C}|Du|\Big) \\ &\leq \int_U \zeta \Big(\varepsilon_3 C |D_k^h u|^2 + \frac{C}{4\varepsilon_3}|Du|^2\Big). \end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ teremos

$$|A_2| \leq 2\varepsilon_1 \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx + \frac{C^2}{4\varepsilon_1}\int_U \Big(|D_k^h u|^2 + |Du|^2\Big) + \int_U \zeta\Big(\varepsilon_3 C|D_k^h u|^2 + \frac{C}{4\varepsilon_3}|Du|^2\Big).$$

Tomando $\varepsilon_1 = \frac{\lambda}{4}$ e $\varepsilon_3 = \frac{1}{2}$ obtemos

$$\begin{aligned} |A_2| &\leq \frac{\lambda}{2}\int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx + \frac{C^2}{\lambda}\int_U \Big(|D_k^h u|^2 + |Du|^2\Big) dx + \int_U \zeta\Big(\frac{C}{2}|D_k^h u|^2 + \frac{C}{2}|Du|^2\Big) dx \\ &\leq \frac{\lambda}{2}\int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx + \frac{C^2}{\lambda}\int_U \Big(|D_k^h u|^2 + |Du|^2\Big) dx + \frac{C}{2}\int_U \zeta\Big(|D_k^h u|^2 + |Du|^2\Big) dx \\ &\leq \frac{\lambda}{2}\int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx + \int_U \Big(|D_k^h u|^2 + |Du|^2\Big)\Big(\frac{C^2}{\lambda} + \frac{C\zeta}{2}\Big) dx \\ &\leq \frac{\lambda}{2}\int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx + \Big(\frac{C^2}{\lambda} + \frac{C}{2}\Big)\int_W \Big(|D_k^h u|^2 + |Du|^2\Big) dx. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema 25 obtemos que

$$\int_W |D_k^h u|^2 dx \leq C \int_U |Du|^2 dx$$

para alguma constante C. Daí, segue que

$$A \geq \frac{\lambda}{2} \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx - C \int_U |Du|^2 dx.$$

Agora, estimemos a quantidade dada por B. Com efeito, usando a Desigualdade de Cauchy com ε, teremos

$$|B| = \left| \int_U f v dx \right| \leq \int_U |f||v| dx \leq \varepsilon \int_U |v|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_U |f|^2 dx.$$

Usando o Teorema 25 e a proposição 2 com $p = 2$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int_U |v|^2 = \int_U |D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)|^2 dx &\leq C \int_U |D(\zeta^2 D_k^h u)|^2 dx \\
&\leq C \int_U |2\zeta D\zeta D_k^h u + \zeta^2 D_k^h Du|^2 dx \\
&\leq C \int_U \Big(2\zeta |D\zeta| |D_k^h u| + \zeta^2 |D_k^h Du| \Big)^2 dx \\
&\leq C \int_U 2\zeta^2 |D\zeta|^2 |D_k^h u|^2 dx + \zeta^4 |D_k^h Du|^2 dx \\
&\leq C \int_W |D_k^h u|^2 + \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx \\
&\leq C \int_U |Du|^2 dx + C \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx.
\end{aligned}$$

Então, fazendo $\varepsilon = \frac{\lambda}{4}$

$$\begin{aligned}
|B| &\leq \varepsilon C \int_U |Du|^2 dx + \varepsilon C \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_U |f|^2 dx \\
&\leq \frac{\lambda}{4} C \int_U |Du|^2 dx + \frac{\lambda}{4} C \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx + \frac{1}{\lambda} \int_U |f|^2 dx.
\end{aligned}$$

Voltando a igualdade inicial $A = B$, deduzimos que

$$\frac{\lambda}{2} \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx - C \int_U |Du|^2 dx \leq \frac{\lambda}{4} C \int_U |Du|^2 dx + \frac{\lambda}{4} C \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx + \frac{1}{\lambda} \int_U |f|^2 dx,$$

donde segue que:

$$\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{C\lambda}{4} \right) \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx \leq \left(\frac{C\lambda}{4} + C \right) \int_U |Du|^2 dx + \frac{1}{\lambda} \int_U |f|^2 dx. \tag{2.5}$$

Daí segue finalmente que:

$$\int_V |D_k^h Du|^2 dx \leq \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx \leq C \int_U |Du|^2 + |f|^2 dx.$$

para $k = 1, ..., n$ e h suficientemente pequeno e não nulo. Por fim, usando o Teorema 26 podemos concluir que $Du \in H^1_{loc}(U; \mathbb{R}^n)$, e, portanto $u \in H^2_{loc}(U)$, com a estimativa

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{H^1(U)}).$$

$\square$

3 O MÉTODO DE DE GIORGI

Considere agora o problema:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_j})_{x_i} = 0 \text{ em } U, \tag{3.1}$$

onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio aberto e limitado, a matriz $\mathbb{A}(x) = (a_{ij})$ é simétrica, com a_{ij}'s mensuráveis definidas em U, e

$$0 < \lambda|\xi|^2 \leq \langle \mathbb{A}(x)\xi, \xi \rangle \leq \Lambda|\xi|^2, \tag{3.2}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e quase todo ponto $x \in U$, com $0 < \lambda < \Lambda < \infty$ constantes. Perceba que $\mathbb{A}(x)$ ser simétrica implica que a matriz $\mathbb{A}$ possui n autovalores reais λ_i, $i = 1, ..., n$. Além disso, perceba também que a condição (3.2) é equivalente a

$$\lambda \leq \lambda_i(x) \leq \Lambda$$

para todo $i = 1, ..., n$ e q.t.p. $x \in U$. Nosso principal objetivo é mostrar que soluções fracas de (3.1) são Hölder-Contínuas.

Exemplo 28. *Considerando $\mathbb{A}(x)$ a matriz identidade, a condição (3.2) é válida com $\lambda = \Lambda = 1$, e a equação (3.1) se reduz a equação de Laplace*

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}\partial_{x_i} u = 0.$$

Exemplo 29. *Considere α uma constante positiva tal que $0 < \alpha < 1$ e defina a matriz $\mathbb{A}(x)$ em $\mathbb{R}^2$ como*

$$\mathbb{A}(x) = \begin{bmatrix} \frac{x_1^2+\alpha^2 x_2^2}{|x|^2} & (1-\alpha^2)\frac{x_1 x_2}{|x|^2} \\ (1-\alpha^2)\frac{x_1 x_2}{|x|^2} & \frac{\alpha^2 x_1^2 + x_2^2}{|x|^2} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

com $x = (x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\}$. Note que $\mathbb{A}(x)$ é uma matriz simétrica em $\mathbb{R}^4$ e, portanto $\mathbb{A}$ possui autovalores reais. Veja que tomando $\xi = (\xi_1,\, \xi_2)$ então temos que

$$\mathbb{A}(x)\cdot\xi = \begin{bmatrix} \frac{x_1^2+\alpha^2 x_2^2}{|x|^2}\cdot\xi_1 + (1-\alpha^2)\frac{x_1 x_2}{|x|^2}\cdot\xi_2 \\ (1-\alpha^2)\frac{x_1 x_2}{|x|^2}\cdot\xi_1 + \frac{\alpha^2 x_1^2 + x_2^2}{|x|^2}\cdot\xi_2 \end{bmatrix}$$

Usando a Desigualdade de Young, por um lado temos

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}(x)\xi, \xi \rangle &= \frac{1}{|x|^2}\Big((x_1^2 + \alpha^2 x_2^2)\xi_1^2 + 2(1-\alpha^2)x_1 x_2 \xi_1 \xi_2 + (\alpha^2 x_1^2 + x_2^2)\xi_2^2 \Big) \\ &\leq \frac{1}{|x|^2}\Big((x_1^2 + \alpha^2 x_2^2)\xi_1^2 + (1-\alpha^2)(x_1^2\xi_2^2 + x_2^2\xi_1^2) + (\alpha^2 x_1^2 + x_2^2)\xi_2^2 \Big) \\ &\leq |\xi|^2 \end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbb{A}(x)\xi,\xi\rangle &= \frac{1}{|x|^2}\Big((x_1^2+\alpha^2x_2^2)\xi_1^2+2(1-\alpha^2)x_1x_2\xi_1\xi_2+(\alpha^2x_1^2+x_2^2)\xi_2^2\Big)\\
&\geq \frac{1}{|x|^2}\Big((x_1^2+\alpha^2x_2^2)\xi_1^2-(1-\alpha^2)(x_1^2\xi_2^2+x_2^2\xi_1^2)+(\alpha^2x_1^2+x_2^2)\xi_2^2\Big)\\
&\geq \alpha^2|\xi|^2.
\end{aligned}
$$

Donde segue que

$$\alpha^2|\xi|^2 \leq \langle \mathbb{A}(x)\xi,\xi\rangle \leq |\xi|^2, \quad \forall\, x \neq (0,0) \ e\ \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Definindo a função $u : B(0,\,1) \to \mathbb{R}$ *por*

$$u(x) = |x|^{\alpha-1}x_1, \quad x \in B(0,\,1)\backslash\{0,0\} \subset \mathbb{R}^2$$

temos que u é uma solução fraca da equação (3.1) com $\mathbb{A}(x)$ *definida acima.*

3.1 Motivação: Um problema variacional

No International Congress of Mathematics (ICM), em 1900, Hilbert apresentou 24 problemas. Dois deles, o 20º e o 19º problema de Hilbert, são interessantes para iniciarmos este capítulo. O 20º problema de Hilbert questiona se todo problema variacional, com certas condições de contorno, possui solução. Já o 19º indaga sobre a analiticidade de soluções regulares para problemas de cálculo variacional. Em 1904, o ucraniano Sergei N. Bernstein, deu uma solução para o 19º problema de Hilbert. Em 1957, o italiano Ennio De Giorgi encontrou uma nova solução.

Esses problemas são apresentados de maneira geral. Consideremos o seguinte problema variacional específico para ilustrar esses problemas e suas soluções.

Considere $U \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. Assumamos que F satisfaz

$$\lambda|\xi|^2 \leq \Big\langle D^2F(\eta)\xi,\xi\Big\rangle \leq \Lambda|\xi|^2,\ \forall\xi \in \mathbb{R}^n,\ \eta \in \mathbb{R}^n \tag{3.4}$$

com constantes $0 \leq \lambda \leq \Lambda < \infty$. Agora, definamos o funcional

$$I(v) := \int_U F(Dv)dx. \tag{3.5}$$

ao longo do conjunto admissível

$$\mathcal{A}' = \{v;\ v \in C^1(\overline{U}) \text{ e } v = \phi \text{ em } \partial U\},$$

onde $\phi \in C^1(\overline{U})$ é uma função dada.

Definição 30. *Dizemos que $u_0 \in \mathcal{A}'$ é um minimizante do funcional I ao longo da classe $\mathcal{A}'$ se $I(u_0) \leq I(v)$, para todo $v \in \mathcal{A}'$.*

Não podemos provar diretamente a existência de minimizantes em $\mathcal{A}'$, por falta de compacidade local fraca em $C^1(\overline{U})$. Precisaremos estender o problema para um espaço maior. Como sugere Hilbert, estendemos as derivadas clássicas para derivada fraca e soluções clássicas para soluções fracas. Naturalmente, surge o espaço de Sobolev $W^{1,2}(U)$ como espaço de redução para este problema variacional. Agora considere

$$\mathcal{A} = \{v;\ v \in W^{1,2}(U) \text{ e } v - \phi \in W^{1,2}(U)\}.$$

Tomando o conjunto admissível $\mathcal{A}$ desta forma, pode-se mostrar a existência de minimizantes do funcional I em $\mathcal{A}$ apenas usando cálculo variacional.

Teorema 31. *Considere $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo (3.2) e $\phi \in W^{1,2}(U)$ é dada. Então, existe uma única $u_0 \in \mathcal{A}$ tal que*

$$I(u_0) = \inf_{u \in \mathcal{A}} I(u).$$

Demonstração. Primeiro note que pela condição (3.4) existem constantes $c_1 > 0$ e $c_3 > 0$ e $c_2,\ c_4$ dependendo de $\lambda,\ \Lambda,\ F(0),\ DF(0)$, tal que

$$c_1|\eta|^2 - c_2 \leq F(\eta) \leq c_3|\eta|^2 + c_4,\ \forall \eta \in \mathbb{R}^n.$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} F(\eta) - F(0) - \langle DF(0), \eta\rangle &= \int_0^1 \frac{d}{dt} F(t\eta)\, dt - \langle DF(0), \eta\rangle \\ &= \int_0^1 \langle DF(t\eta) - DF(0), \eta\rangle\, dt, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} DF(t\eta) - DF(0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} DF(st\eta)\, ds \\ &= t\int_0^1 D^2F(st\eta)(\eta)\, ds. \end{aligned}$$

E então, usando a condição (3.4),

$$\begin{aligned} F(\eta) - F(0) - \langle DF(0), \eta\rangle &= \int_0^1 t \int_0^1 \left\langle D^2F(st\eta)(\eta), \eta\right\rangle\, ds\, dt, \\ &\leq \int_0^1 t\int_0^1 \Lambda|\eta|^2\, ds\, dt = \frac{\Lambda}{2}|\eta|^2 \end{aligned}$$

De modo análogo pode ser obter que

$$F(\eta)-F(0)-\langle DF(0),\eta\rangle \geq \frac{\lambda}{2}|\eta|^2,$$

donde segue a desigualdade com

$$c_1=\frac{\lambda}{2},\ c_2=-F(0)-\langle DF(0),\eta\rangle\,,\ c_3=\frac{\Lambda}{2} \text{ e } c_4=F(0)+\langle DF(0),\eta\rangle\,.$$

Portanto, I é coercivo, i.e., $I(u)\to+\infty$ se $\|u\|_{W^{1,2}(U)}\to+\infty$. Agora seja

$$m=\inf_{u\in\mathcal{A}} I(u).$$

Note que $-\infty<m<+\infty$. Tome uma sequência minimizante $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{A}$, i.e., $I(u_i)\to m$ com $i\to+\infty$. Por (3.4), segue que $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $W^{1,2}(U)$. Então, pela compacidade fraca, existe subsequência, o qual denotaremos por $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, tal que, $u_i\rightharpoonup u_0$ em $W^{1,2}(U)$. Como cada $u_i\in\mathcal{A}$, segue que $u_0\in\mathcal{A}$. Afirmamos que

$$\liminf_{i\to+\infty}\int_U F(Du_i)dx \geq \int_U F(Du_0)dx. \tag{3.6}$$

Antes observe que com esta desigualdade tem-se:

$$m=\lim_{i\to\infty} I(u_i)=\liminf_{i\to\infty}\int_U F(Du_i)dx \geq \int_U F(Du_0)dx \geq m.$$

Portanto $m=I(u_0)$. Agora, provando (3.6), observe que vale

$$F(\eta)\geq F(\eta_0)+\langle DF(\eta_0),\eta-\eta_0\rangle+\frac{\lambda}{2}|\eta-\eta_0|^2, \quad \forall \eta,\eta_0\in\mathbb{R}^n. \tag{3.7}$$

De fato,

$$\begin{aligned}F(\eta)-F(\eta_0)-\langle DF(D\eta_0),\eta-\eta_0\rangle &= \int_0^1 \frac{d}{dt}F(t\eta+(1-t)\eta_0)dt-\langle DF(D\eta_0),\eta-\eta_0\rangle \\ &= \int_0^1 \langle DF(t\eta+(1-t)\eta_0)-DF(\eta_0),\eta-\eta_0\rangle\, dt\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}DF(t\eta+(1-t)\eta_0)-DF(\eta_0) &= \int_0^1 \frac{d}{ds}DF(st\eta-st\eta_0+\eta_0)ds \\ &= t\int_0^1 D^2F(st\eta-st\eta_0+\eta_0)(\eta-\eta_0)ds.\end{aligned}$$

Logo, temos

$$
\begin{aligned}
F(\eta)-F(\eta_0)-\langle DF(D\eta_0),\eta-\eta_0\rangle &= \int_0^1 t\left(\int_0^1 \left\langle D^2F(st\eta-st\eta_0+\eta_0)(\eta-\eta_0),\eta-\eta_0\right\rangle ds\right)dt\\
&\geq \int_0^1 t\left(\int_0^1 \lambda|\eta-\eta_0|^2\, ds\right)dt\\
&\geq \int_0^1 t\cdot\lambda|\eta-\eta_0|^2 dt = \frac{\lambda}{2}|\eta-\eta_0|^2.
\end{aligned}
$$

Provando (3.7). Agora, de (3.7), segue que

$$\int_U (F(Du_i)-F(Du_0))dx \geq \int_U \langle DF(Du_0),Du_i-Du_0\rangle\, dx \to 0,$$

se $i\to\infty$, visto que $u_i \rightharpoonup u_0$ em $W^{1,2}(U)$. Portanto

$$\liminf_{i\to+\infty}\int_U F(Du_i)dx \geq \int_U F(Du_0)dx.$$

Por fim, vamos mostrar a unicidade de u_0. Suponha que u_0, v_0 são minimizantes para I e tome $u=\frac{u_0+v_0}{2}\in\mathcal{A}$. Então, por (3.6), temos

$$F(Du_0)\geq F(Du)+\langle DF(Du),Du_0-Du\rangle+\frac{\lambda}{2}|Du-Du_0|^2$$

e

$$F(Dv_0)\geq F(Du)+\langle DF(Du),Dv_0-Du\rangle+\frac{\lambda}{2}|Du-Dv_0|^2.$$

Somando as duas desigualdades, obtemos

$$F(Du_0)+F(Dv_0)\geq 2F(Du)+\frac{\lambda}{4}|Du_0-Dv_0|^2.$$

Integrando sobre U, obtemos

$$2m\geq 2\int_U F(Du)dx+\frac{\lambda}{4}\int_U |Du_0-Dv_0|^2dx \geq 2m+\frac{\lambda}{4}\int_U|Du_0-Dv_0|^2dx.$$

O que implica que $u_0=v_0$. □

O Teorema 31 nos dá uma solução positiva para o 20º problema de Hilbert. O lado bom de estudar minimizantes fracos é que é fácil de provar sua existência. O problema que pagamos por isso é a regularidade.

Agora, analisemos o 19º problema de Hilbert sobre a regularidade dos minimizantes. Nosso objetivo é mostrar que o minimizante u_0 é suave. Para isso, vamos estudar a equação de Euler-Lagrange para o funcional I. Primeiro, vamos mostrar que o minimizante u_0 obtido no Teorema 31 é uma solução fraca de Euler-Lagrange. Note que, agora, somente sabemos que $u_0 \in W^{1,2}(U)$.

Teorema 32. *Seja u_0 o minimizante dado no Teorema 31. Então, u_0 é uma solução fraca da equação de Euler-Lagrange*

$$\operatorname{div}(DF(Du_0)) = 0 \quad em\ U. \tag{3.8}$$

Demonstração. Para mostrar que o minimizante u_0 é uma solução fraca de (3.8) devemos mostrar que u_0 satisfaz

$$\int_U \langle DF(Du_0), D\phi\rangle \; dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(U). \tag{3.9}$$

Fixe $\phi \in C_0^\infty(U)$ e defina $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(t) = I(u_0 + t\phi) = \int_U F(Du_0 + tD\phi)\, dx.$$

Note que $g \in C^1(\mathbb{R})$. De fato, derivando e usando a regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{d}{dt} g(t) \\
&= \frac{d}{dt}\int_U F(Du_0 + tD\phi)\, dx \\
&= \int_U \frac{d}{dt} F(Du_0 + tD\phi)\, dx \\
&= \int_U \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F(Du_0 + td\phi) \frac{d}{dt}(Du_0 + tD\phi)\, dx \\
&= \int_U \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F(Du_0 + tD\phi) \frac{d}{dt}(\frac{\partial}{\partial x_i} u_0 + t\frac{\partial}{\partial x_i}\phi)\, dx \\
&= \int_U \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F(Du_0 + tD\phi) \frac{\partial}{\partial x_i}\phi\, dx \\
&= \int_U \langle DF(Du_0 + tD\phi), D\phi\rangle \; dx.
\end{aligned}$$

Assim, g' é contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto $g \in C^1(\mathbb{R})$ com

$$g'(t) = \int_U \langle DF(Du_0 + tD\phi), D\phi\rangle\, dx.$$

Perceba que

$$g'(0) = \int_U \langle DF(Du_0), D\phi\rangle \; dx.$$

Como u_0 é um minimizante, então g atinge seu mínimo em $t = 0$, onde $g(0) = I(u_0)$ e portanto $g'(0) = 0$. Segue que u_0 satisfaz

$$\int_U \langle DF(Du_0), D\phi\rangle \, dx = 0.$$

$\square$

Agora, vamos mostrar que $u_0 \in W^{2,2}_{loc}(U)$ e que sua derivada fraca é uma solução fraca da equação (3.1) para alguma matriz $\mathbb{A}(x)$ satisfazendo (3.2). Desta forma, construiremos uma relação entre o problema variacional e a equação (3.1).

Na prova a seguir, será usado o conceito de quocientes diferenciais. O ponto principal da prova a seguir é o uso da Desigualdade de Caccioppoli. A grosso modo, a estimativa Caccioppoli diz que a norma L^2 das derivadas de soluções são controladas pela norma das soluções.

Teorema 33. *Suponha que u_0 é o minimizante dado pelo Teorema 31. Então $u_0 \in W^{2,2}_{loc}(U)$ e $v_i = \partial_{x_i} u_0$, $i = 1, 2, ..., n$, é uma solução fraca da equação*

$$\operatorname{div}(\mathbb{A}(x) D v_i) = 0 \quad \textit{em } U, \tag{3.10}$$

onde $\mathbb{A}(x) = D^2 F(Du_0(x))$.

Demonstração. Fixe a função corte $\eta \in C_0^\infty(U)$. Seja V um aberto tal que $\operatorname{supp}(\eta) \subset V \subset\subset U$, e defina $\phi = D_i^{-h}(\eta^2 D_i^h u_0)$, onde $i = 1, 2, ..., n$ e $0 < |h| < \operatorname{dist}(V, \partial U)/8$. Perceba que, a maneira como definimos ϕ, com $u_0 \in W^{1,2}(U)$, implica em $\phi \in W_0^{1,2}(U)$. Pelo Teorema 32, u_0 é uma solução fraca de (3.8). Daí,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_U \langle DF(Du_0),\, D\phi\rangle \, dx \\
&= \int_U \left\langle DF(Du_0),\, D(D_i^{-h}(\eta^2 D_i^h u_0))\right\rangle dx \\
&= \int_U \left\langle DF(Du_0),\, D_i^{-h}(D(\eta^2 D_i^h u_0))\right\rangle dx \\
&= -\int_U \left\langle D_i^h DF(Du_0),\, D(\eta^2 D_i^h u_0)\right\rangle dx.
\end{aligned}$$

Veja que

$$
\begin{aligned}
D_i^h DF(Du_0) &= \frac{DF(Du_0(x+he_i)) - DF(Du_0(x))}{h} \\
&= \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{d}{dt} DF(tDu_0(x+he_i)+(1-t)Du_0(x))\, dt \\
&= \int_0^1 D^2F(tDu_0(x+he_i)+(1-t)Du_0(x))\, dt\; D_i^h Du_0(x) \\
&= \mathbb{B}(x) D_i^h Du_0(x),
\end{aligned}
$$

com

$$\mathbb{B}(x) = \int_0^1 D^2F(tDu_0(x+he_i)+(1-t)Du_0(x))\, dt,$$

e

$$D(\eta^2 D_i^h u_0) = \eta^2 D_i^h Du_0 + 2\eta D\eta D_i^h u_0.$$

Donde temos

$$
\begin{aligned}
0 &= -\int_U \left\langle D_i^h DF(Du_0),\ D(\eta^2 D_i^h u_0)\right\rangle dx \\
0 &= -\int_U \left\langle \mathbb{B}(x) D_i^h Du_0(x),\ \eta^2 D_i^h Du_0 + 2\eta D\eta D_i^h u_0\right\rangle dx
\end{aligned}
$$

$$\int_U \left\langle \mathbb{B}(x) D_i^h Du_0(x),\ \eta^2 D_i^h Du_0\right\rangle dx = -2\int_U \left\langle \mathbb{B}(x) D_i^h Du_0(x), \eta D\eta D_i^h u_0\right\rangle dx$$

$$\int_U \left\langle \mathbb{B}(x) D_i^h Du_0(x),\ D_i^h Du_0\right\rangle \eta^2\, dx = -2\int_U \left\langle \mathbb{B}(x) D_i^h Du_0(x), D\eta\right\rangle \eta D_i^h u_0\, dx, \tag{3.11}$$

onde a matriz Hessiana em $\mathbb{B}(x)$ satisfaz (3.2). Vamos denotar (3.11) por

$$\Phi = \Psi, \tag{3.12}$$

em que

$$\Phi = \int_U \left\langle \mathbb{B}(x) D_i^h Du_0(x),\ D_i^h Du_0\right\rangle \eta^2\, dx \quad \text{e} \quad \Psi = -2\int_U \left\langle \mathbb{B}(x) D_i^h Du_0(x), D\eta\right\rangle \eta D_i^h u_0\, dx$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Shwartz,

$$\left| \left\langle \mathbb{B}(x) D_i^h Du_0,\ D\eta\right\rangle \right| \le \left\langle \mathbb{B}(x) D_i^h Du_0, D_i^h Du_0\right\rangle^{\frac{1}{2}} \cdot \langle \mathbb{B}(x) D\eta, D\eta\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Estimando Ψ ficamos com

$$\begin{aligned}
\Psi &\leq 2\int_U \left|\left\langle \mathbb{B}(x)D_i^h Du_0(x), D\eta\right\rangle\right| |\eta||D_i^h u_0|\, dx \\
&\leq 2\int_U \left\langle \mathbb{B}(x)D_i^h Du_0, D_i^h Du_0\right\rangle^{\frac{1}{2}} \langle \mathbb{B}(x)D\eta, D\eta\rangle^{\frac{1}{2}} |\eta||D_i^h u_0|\, dx \\
&\leq 2\int_U \Big(\left\langle \mathbb{B}(x)D_i^h Du_0, D_i^h Du_0\right\rangle^{\frac{1}{2}} |\eta|\Big)\Big(\langle \mathbb{B}(x)D\eta, D\eta\rangle^{\frac{1}{2}} |D_i^h u_0|\Big)\, dx.
\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Hölder e a condição (3.2),

$$\begin{aligned}
\Psi &\leq 2\Big(\int_U \left\langle \mathbb{B}(x)D_i^h Du_0, D_i^h Du_0\right\rangle |\eta|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_U \langle \mathbb{B}(x)D\eta, D\eta\rangle\, |D_i^h u_0|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \Phi^{\frac{1}{2}}\cdot 2\Big(\int_U \Lambda|D\eta|^2|D_i^h u_0|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Estimando Φ, pela condição (3.2) obtemos

$$\Phi \geq \int_U \lambda|D_i^h Du_0|^2|\eta|^2.$$

Voltando para a igualdade (3.12), temos

$$\begin{aligned}
\Phi = \Psi &\leq \Phi^{\frac{1}{2}}\cdot 2\Big(\int_U \Lambda|D\eta|^2|D_i^h u_0|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
\Phi^{\frac{1}{2}} &\leq 2\Big(\int_U \Lambda|D\eta|^2|D_i^h u_0|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
\Big(\int_U \lambda|D_i^h Du_0|^2|\eta|^2\Big)^{\frac{1}{2}} &\leq 2\Big(\int_U \Lambda|D\eta|^2|D_i^h u_0|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
\int_U |D_i^h Du_0|^2|\eta|^2\, dx &\leq \frac{4\Lambda}{\lambda}\int_U |D\eta|^2|D_i^h u_0|^2\, dx \\
\int_U |D^h Du_0|^2|\eta|^2\, dx &\leq \frac{4\Lambda}{\lambda}\int_U |D\eta|^2|D_i^h u_0|^2\, dx.
\end{aligned}$$

Por fim, usando o Teorema 25, ficamos com

$$\int_U |D^h Du_0|^2|\eta|^2\, dx \leq \frac{4\Lambda}{\lambda}\int_U |D\eta|^2|D^h u_0|^2\, dx \leq \frac{4\Lambda}{\lambda}C\int_U |D\eta|^2\, dx = \frac{4\Lambda}{\lambda}C\|D\eta\|^2_{L^2(U)}.$$

Portanto, pelo Teorema 26, $Du_0 \in W^{1,2}_{loc}(U)$ e consequentemente $u_0 \in W^{2,2}_{loc}(U)$. □

Após provar que $u_0 \in W^{2,2}_{loc}(U)$ é natural se perguntar sobre a possibilidade de mostrar que $u_0 \in W^{3,2}_{loc}(U)$. A resposta para isso é não. De maneira informal, podemos diferenciar a equação (3.10) e ver se podemos obter uma Desigualdade do tipo Caccioppoli para controlar a norma L^2 das derivadas de terceira ordem de u_0.

Como dito no início, nosso principal objetivo neste capítulo é mostrar que as soluções fracas da equação (3.1) são Hölder contínuas. Mais precisamente, provaremos o seguinte teorema:

Teorema 34. *Seja* $u \in W^{1,2}(U)$ *uma solução fraca da equação (3.1). Então* $u \in C^{0,\alpha}(U)$, *onde* $0 < \alpha = \alpha(n,\lambda,\Lambda) \leq 1$.

Observe que combinando o Teorema 32 com o Teorema 34 obteremos que $u_0 \in C^{1,\alpha}(U)$ para algum $\alpha > 0$. Então poderemos mostrar que, na verdade, $u_0 \in C^{\infty}(U)$, por estimativa de Schauder. Como se pode ver, o ponto essencial para isso é a teoria de De Giorgi-Moser.

3.2 Conjuntos de De Giorgi

Em seu principal trabalho sobre equações elípticas lineares [5] De Giorgi estabeleceu limitação local e Hölder continuidade para funções satisfazendo certas condições, que chamamos de classe de funções de De Giorgi. Mais precisamente,

Definição 35. *Seja* $U \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto e* $\gamma > 0$ *uma constate. As classes de funções de De Giorgi,* $\mathrm{DG}^{\pm}(U,\gamma)$, *consiste das funções* $u \in W^{1,2}(U)$ *tais que, para toda bola* $B(y,R) \subset U$, *todo* $0 < r < R$ *e todo* $k \in \mathbb{R}$, *satisfazem a desigualdade de Caccioppoli do tipo*

$$\int_{B(y,r)} |D(u-k)^{\pm}|^2\, dx \leq \frac{\gamma}{(R-r)} \int_{B(y,R)} |(u-k)^{\pm}|^2\, dx, \tag{3.13}$$

onde $(u-k)^{+} = \max\{u-k, 0\}$ *e* $(u-k)^{-} = \min\{u-k, 0\}$. *Denotamos* $\mathrm{DG}(U,\gamma)$ *por*

$$\mathrm{DG}(U,\gamma) = \mathrm{DG}^{+}(U,\gamma) \cap \mathrm{DG}^{-}(U,\gamma).$$

Veja que definindo o conjunto $A(k,y,R) = \{x \in B(y,R);\ u(x) > k\}$ pode-se estabelecer uma equivalência entre as desigualdades (3.13) e

$$\int_{A(k,y,r)} |Du|^2\, dx \leq \frac{\gamma}{(R-r)} \int_{A(k,y,R)} |(u-k)|^2\, dx.$$

Basta notar que $A(k,y,r) = B(y,r) \cap \{u > k\}$, onde $\{u > k\} = \{x \in U;\ u(x) > k\}$ e que

$$D(u-k)^{+} = \begin{cases} Du \text{ se } u > k, \\ 0 \text{ se } u \leq k. \end{cases}$$

A menos que seja dito o contrário, iremos escrever $A(k,R)$ ao invés de $A(k,y,R)$ para facilitar a notação. Além disso, é fácil ver que $u \in \mathrm{DG}^+(U,\gamma)$ se, e somente se, $-u \in \mathrm{DG}^-(U,\gamma)$. Para o que se segue vamos precisar da seguinte definição.

Definição 36. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Uma função $u \in W^{1,2}(U)$ é uma subsolução (supersolução) fraca de (3.1) se satisfaz*

$$\int_U \langle \mathbb{A}(x)Du, D\phi\rangle \leq 0 \ \ (\geq 0).$$

para toda $\phi \in W_0^{1,2}(U)$ não negativa.

Com esta definição podemos relacionar as soluções fracas da equação (3.1) com o conjunto $\mathrm{DG}(U,\gamma)$.

Lema 37. *Seja $u \in W^{1,2}(U)$ uma subsolução fraca da equação (3.1). Então $u \in \mathrm{DG}^+(U,\gamma)$ para alguma $\gamma = \gamma(\lambda,\Lambda) > 0$.*

Demonstração. Vamos considerar $y \in U$ fixo tal que $0 < r' < r < \operatorname{dist}(y,\partial U)$. Tome $\eta \in C_0^\infty(U)$ uma função de corte definida por

$$\begin{cases} \eta \equiv 1 & \text{em } B(y,r') \\ \eta \equiv 0 & \text{em } U\backslash B(y,r) \\ 0 \leq \eta \leq 1. \end{cases}$$

com $|D\eta| \leq c/(r-r')$ e c uma constante real positiva. Como $u \in W^{1,2}(U)$ é uma subsolução de (3.1), vale

$$\int_U \langle \mathbb{A}(x)Du, D\phi\rangle \ dx \leq 0$$

para toda $\phi \in W_0^{1,2}(U)$ não negativa. Tomando $\phi = \eta^2 v$ com $v = (u-k)^+$, teremos

$$D\phi = D(\eta^2 v) = 2v\eta D\eta + \eta^2 Dv.$$

Daí,

$$\int_U \langle \mathbb{A}(x)Du, D\phi\rangle \ dx = \int_U \eta^2 \langle \mathbb{A}(x)Du, Dv\rangle \ dx + 2\int_U \eta v \langle \mathbb{A}(x)Du, D\eta\rangle \ dx \leq 0,$$

e consequentemente, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e a de Hölder, temos

$$
\begin{aligned}
\int_U \eta^2 \langle \mathbb{A}(x)Du, Dv\rangle \, dx &\leq -2\int_U \eta v \langle \mathbb{A}(x)Du, D\eta\rangle \, dx \\
&\leq 2\int_U |\eta||v| \langle \mathbb{A}(x)Du, D\eta\rangle \, dx \\
&\leq 2\int_U |\eta||v| \langle \mathbb{A}(x)Du, Du\rangle^{\frac{1}{2}} \langle \mathbb{A}(x)D\eta, D\eta\rangle^{\frac{1}{2}} \, dx \\
&\leq 2\Big(\int_U |\eta|^2 \langle \mathbb{A}(x)Du, Du\rangle \, dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_U |v|^2 \langle \mathbb{A}(x)D\eta, D\eta\rangle \, dx\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Como $v = (u-k)^+$ implica que $Du = Dv$ para $u > k$, temos

$$
\int_U |\eta|^2 \langle \mathbb{A}(x)Dv, Dv\rangle \, dx \leq 2\Big(\int_U |\eta|^2 \langle \mathbb{A}(x)Dv, Dv\rangle \, dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_U |v|^2 \langle \mathbb{A}(x)D\eta, D\eta\rangle \, dx\Big)^{\frac{1}{2}}.
$$

$$
\Big(\int_U |\eta|^2 \langle \mathbb{A}(x)Dv, Dv\rangle \, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leq 2\Big(\int_U |v|^2 \langle \mathbb{A}(x)D\eta, D\eta\rangle \, dx\Big)^{\frac{1}{2}}.
$$

$$
\int_U |\eta|^2 \langle \mathbb{A}(x)Dv, Dv\rangle \, dx \leq 4\int_U |v|^2 \langle \mathbb{A}(x)D\eta, D\eta\rangle \, dx.
$$

Usando a condição (3.2) temos

$$
\int_U |\eta|^2 |Dv|^2 \, dx \leq \frac{4\Lambda}{\lambda}\int_U |v|^2 |D\eta|^2 \, dx.
$$

Estimando a integral do lado direito temos

$$
\int_U |v|^2 |D\eta|^2 \, dx \leq \frac{c^2}{(r-r')^2}\int_{B(y,r)} |v|^2 \, dx,
$$

e estimando a integral do lado esquerdo,

$$
\int_U |\eta|^2 |Dv|^2 \, dx \geq \int_{B(y,r')} |Dv|^2 \, dx.
$$

Donde segue a desigualdade (3.13) com $\gamma = \frac{4\Lambda c^2}{\lambda}$. □

Lema 38. *Seja $u \in W^{1,2}(U)$ uma supersolução fraca de (3.1). Então $u \in \mathrm{DG}^-(U,\gamma)$ para alguma $\gamma = \gamma(\lambda,\Lambda) > 0$.*

Demonstração. Por hipótese, $u \in W^{1,2}(U)$ é uma supersolução fraca de (3.1), i.e., vale que

$$
\int_U \langle \mathbb{A}(x)Du, D\phi\rangle \, dx \geq 0 \quad \forall \phi \in W_0^{1,2}(U).
$$

Logo, $-u \in W^{1,2}(U)$ é uma subsolução fraca de (3.1) pois vale que

$$\int_U \langle \mathbb{A}(x)D(-u), D\phi\rangle \; dx \leq 0 \quad \forall \phi \in W^{1,2}(U).$$

Pelo Lema 37 $-u \in \mathrm{DG}^+(U,\gamma)$ e consequentemente $u \in \mathrm{DG}^-(U,\gamma)$. □

Teorema 39. *Seja $u \in W^{1,2}(U)$ uma solução fraca da equação (3.1). Então $u \in \mathrm{DG}(U,\gamma)$ para alguma $\gamma = \gamma(\lambda, \Lambda) > 0$.*

Demonstração. De fato, se $u \in W^{1,2}(U)$ é uma solução fraca de (3.1), vale que

$$\int_U \langle \mathbb{A}(x)Du, D\phi\rangle \; dx = 0,$$

e, portanto u é uma sub e supersolução fraca de (3.1). Daí, pelos Lemas 37 e 38 temos $u \in \mathrm{DG}^+(U,\gamma)$ e $u \in \mathrm{DG}^-(U,\gamma)$, donde segue o resultado. □

Com a classe de funções de De Giorgi bem estabelecida, podemos obter a seguinte propriedade.

Proposição 40. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $u \in \mathrm{DG}(U,\gamma)$. Então $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall y \in U$ e $\forall r, R;\ 0 < r < R < \mathrm{dist}(y,\ \partial U)$ temos*

$$\int_{B(y,r)} |(u(x)-k)^+|^2 dx \leq \frac{C}{(R-r)^2} |A(k,R)|^{\frac{2}{n}} \int_{B(y,R)} |(u(x)-k)^+|^2 dx$$

onde $C = C(n)$ é uma constante positiva que depende somente de n.

Demonstração. Defina $v = (u-k)^+$ e $\bar{r} = \frac{R+r}{2}$. Assim, teremos $r < \bar{r} < R$. Tome uma função de corte η definida por

$$\begin{cases} \eta \equiv 1 & \text{em } B(y,r) \\ \eta \equiv 0 & \text{em } U \backslash B(y,\bar{r}) \\ 0 \leq \eta \leq 1 & \end{cases}$$

com $|D\eta| \leq \frac{c}{R-r}$, onde c é uma constante positiva. Pela propriedade da derivada do produto, têm-se

$$\begin{aligned} |D(v\eta)|^2 &= |vD\eta + \eta Dv|^2 \\ &\leq (|vD\eta| + |\eta Dv|)^2 \\ &\leq 2(|vD\eta|^2 + |\eta Dv|^2). \end{aligned}$$

Integrando ambos os lados da desigualdade acima sobre $B(y,\bar{r})$ e usando a hipótese de $u \in \mathrm{DG}(U,\gamma)$ segue que

$$
\begin{aligned}
\int_{B(y,\bar{r})} |D(v\eta)|^2\,dx &\le 2\Big(\int_{B(y,\bar{r})} |v|^2|D\eta|^2\,dx + \int_{B(y,\bar{r})} |\eta|^2|Dv|^2\,dx\Big) \\
&\le 2\Big(\frac{c^2}{(R-r)^2}\int_{B(y,\bar{r})} |v|^2\,dx + \int_{B(y,\bar{r})} |Dv|^2\,dx\Big) \\
&\le 2\Big(\frac{c^2}{(R-r)^2}\int_{B(y,R)} |v|^2\,dx + \frac{\gamma}{(R-r)^2}\int_{B(y,R)} |v|^2\,dx\Big) \\
&\le \frac{C_1}{(R-r)^2}\int_{B(y,R)} |v|^2\,dx
\end{aligned}
$$

com $C_1 = 2(c^2+\gamma)$. Então obtemos

$$
\int_{B(y,\bar{r})} |D(v\eta)|^2\,dx \le \frac{C_1}{(R-r)^2}\int_{B(y,R)} |v|^2\,dx.
$$

Veja que pela Desigualdade de Sobolev existe uma constante C_2 dependendo somente de n tal que

$$
\begin{aligned}
\Big(\int_{B(y,r)} |v|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Big)^{\frac{n-2}{n}} &= \Big(\int_{B(y,r)} |\eta v|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Big)^{\frac{n-2}{n}} \\
&\le C_2\int_{B(y,r)} |D(v\eta)|^2\,dx \\
&\le C_2\int_{B(y,\bar{r})} |D(v\eta)|^2\,dx.
\end{aligned}
$$

Além disso, pela Desigualdade de Hölder com expoente $\frac{n}{n-2}$ teremos

$$
\begin{aligned}
\int_{B(y,r)} |v|^2\,dx &\le \Big(\int_{B(y,r)} |v|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Big)^{\frac{n-2}{n}} |A(k,r)|^{1-\frac{n-2}{n}} \\
&= \Big(\int_{B(y,r)} |v|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Big)^{\frac{n-2}{n}} |A(k,r)|^{\frac{2}{n}}.
\end{aligned}
$$

Daí, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{B(y,r)} |v|^2\,dx &\le |A(k,r)|^{\frac{2}{n}}\Big(\int_{B(y,r)} |v|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Big)^{\frac{n-2}{n}} \\
&\le C_2|A(k,r)|^{\frac{2}{n}}\int_{B(y,r)} |D(v\eta)|^2\,dx \\
&\le C_2\frac{C_1}{(R-r)^2}|A(k,r)|^{\frac{2}{n}}\int_{B(y,R)} |v|^2\,dx \\
&\le \frac{C}{(R-r)^2}|A(k,R)|^{\frac{2}{n}}\int_{B(y,R)} |v|^2\,dx,
\end{aligned}
$$

com $C = C_1C_2$ dependendo somente de n. $\square$

3.3 Limitação local

A partir desta seção, caso não seja dito o contrário, denotaremos $\mathrm{DG}(U,\gamma) := \mathrm{DG}(U)$ e $B_r := B(y,r)$ para algum $\gamma \in \mathbb{R}$ positivo e algum $y \in U$, a fim de facilitar a notação. Agora, tomando $u \in \mathrm{DG}(U)$, considere para todo $h \in \mathbb{R}$ e para todo $r > 0$ tal que $B_r \subset\subset U$

$$u(h,r) := \int_{A(h,r)} |u(x) - h|^2 \, dx. \tag{3.14}$$

Defina também para todo $h \in \mathbb{R}$, e para todo $r > 0$ tal que $B_r \subset\subset U$

$$\phi(h,r) := |A(h,r)|^{\eta} u(h,r)^{\xi},$$

$$\overline{\phi}(h,r) := |\{u \geq h\} \cap \overline{B_r}|^{\eta} u(h,r)^{\xi},$$

com η e ξ reais positivos. Veja que, como $\{u > h\} \cap B_r \subseteq \{u \geq h\} \cap \overline{B_r}$, temos

$$\phi(h,r) \leq \overline{\phi}(h,r).$$

Lema 41. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u \in \mathrm{DG}(U)$. Então, para todo $h > k$, para todo $x \in U$ e para todo $r, R \in \mathbb{R}$ tais que $0 < r < R < \operatorname{dist}(y, \partial U)$ temos*

$$|A(h,r)| \leq \frac{1}{((h-k)^2} u(k,R) \tag{3.15}$$

$$u(k,r) \leq \frac{C}{(R-r)^2} |A(k,R)|^{\frac{2}{n}} u(k,R). \tag{3.16}$$

Demonstração. Veja que para $x \in A(h,r)$ temos $u(x) > h > k$, então vale $u(x) - k > h - k$ e $|u(x) - k|^2 > |h-k|^2$. Portanto, integrando sobre $A(h,r)$ temos

$$\begin{aligned} |A(h,r)||h-k|^2 &= \int_{A(h,r)} |h-k|^2 \, dx \\ &\leq \int_{A(h,r)} |u(x) - k|^2 \, dx \\ &\leq \int_{A(k,r)} |u(x) - k|^2 \, dx, \end{aligned}$$

que dividindo por $(h-k)^2$ e lembrando que $A(k,r) \subset A(k,R)$ obtemos

$$|A(h,r)| = \frac{1}{(h-k)^2} \int_{A(h,r)} |h-k|^2 \, dx \leq \frac{1}{(h-k)^2} \int_{A(k,R)} |u(x) - k|^2 \, dx,$$

o que mostra a desigualdade 3.15. Agora, veja que $(u(x)-h)^+ \leq (u(x)-k)^+$, integrando sobre $A(h,r)$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{A(h,r)} |u(x)-h|^2 &= \int_{B_r} |(u(x)-h)^+|^2\,dx \\ &\leq \int_{B_r} |u(x)-k|^2\,dx \\ &= \int_{A(k,r)} |u(x)-k|^2\,dx,\end{aligned}$$

Daí, pela Proposição 40 segue que

$$\begin{aligned}\int_{A(h,r)} |u(x)-h|^2\,dx &\leq \int_{A(k,r)} |u(x)-k|^2\,dx \\ &\leq \frac{C}{(R-r)^2}|A(k,R)|^{\frac{2}{n}} \int_{A(k,R)} |u(x)-k|^2\,dx,\end{aligned}$$

provando a desigualdade (3.16). □

Considerando η e ξ dois números reais positivos e elevando (3.14) e (3.16), respectivamente, à η e ξ,

$$|A(h,r)|^{\eta} u(h,r)^{\xi} \leq \frac{C^{\xi}}{(h-k)^{2\eta}(R-r)^{2\xi}}|A(k,R)|^{\frac{2\xi}{n}} u(k,R)^{\xi+\eta}. \tag{3.17}$$

Podemos escrever o segundo membro de (3.17) como potência de $\phi(k,R)$. Precisamos encontrar um $\theta > 0$ tal que $\frac{2\xi}{n} = \eta\theta$ e $\xi+\eta = \xi\theta$. Daí temos $\theta^2 - \theta - \frac{2}{n} = 0$ e, consequentemente, $\theta = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{n+8}{4n}} > 1$. Daí, temos

$$\phi(h,r) \leq \frac{C^{\xi}}{(h-k)^{2\eta}(R-r)^{2\xi}}|\phi(k,R)|^{\theta}, \quad \theta > 1. \tag{3.18}$$

Lema 42. *Sejam $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências tais que $k_n \nearrow k_0$ e $r_n \searrow r_0$, $r_n > 0$, então*

$$\phi(k_n, r_n) \to \overline{\phi}(k_0, r_0) \tag{3.19}$$

sempre que $n \to \infty$.

Demonstração. Considere $a_n = |\{u > k_n\} \cap B_{r_n}|$. Assim,

$$\begin{aligned}k_n \nearrow k_0 &\Rightarrow (\{u > k_n\})_{n\in\mathbb{N}} \searrow \{u \geq k_0\} \\ r_n \searrow r_0 &\Rightarrow (B_{r_n})_{n\in\mathbb{N}} \cap \searrow \overline{B_{r_0}},\end{aligned}$$

consequentemente $(\{u > k_n\} \cap B_{r_n})_{n\in\mathbb{N}} \searrow \{u \geq k_0\} \cap \overline{B_{r_0}}$ e, portanto

$$a_n \to |\bigcap_{i=1}^{\infty}(\{u > k_n\} \cap B_{r_n})_{n\in\mathbb{N}}| = |\{n \geq k_0\} \cap \overline{B_{r_0}}|. \tag{3.20}$$

Agora denotemos

$$h_n := \int_{B_{r_n}} |(u(x) - k_n)^+|^2 \, dx = \int_{B_{r_1}} |(u(x) - k_n)^+|^2 \chi_{B_r} \, dx$$

onde $B_{r_n} \subseteq B_{r_1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Veja que

$$|(u(x) - k_n)^+|^2 \chi_{B_r} \to |(u(x) - k_n)^+|^2 \chi_{B_{r_0}}$$

para quase todo ponto, sempre que $n \to \infty$. Observe que a sequência $f_n = |(u(x) - k_n)^+|^2$ é não decrescente, então segue que

$$|f_n \chi_{B_{r_n}}| \leq |f_n| \leq |f_1| = |(u(x) - k_1)^+|^2 \in L^1(B_{r_1}).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [18] vale

$$h_n \to \int_{B_{r_1}} |(u(x) - k_n)^+|^2 \chi_{B_{r_0}} \, dx = \int_{B_{r_0}} |(u(x) - k_n)^+|^2 \, dx. \tag{3.21}$$

Finalmente, por (3.20) e (3.21) teremos

$$\phi(k_n, r_n) \to |\{u \geq k_0\} \cap \overline{B_{r_0}}|^\eta u(k_0, r_0)^\xi = \overline{\phi}(k_0, r_0).$$

□

Lema 43. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $R_0 > 0$ tal que $B_{R_0} \subset\subset U$. Então para todo $k_0 \in \mathbb{R}$ e para todo $\sigma \in (0,1)$, existe um $d \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\phi(k_0 + d, R_0 - \sigma R_0) = 0. \tag{3.22}$$

Em particular, d satisfaz a relação

$$d^{2\eta} = \frac{2^{2\xi + 2\eta \frac{\theta}{\theta - 1}} c^\xi}{\sigma^{2\xi} R_0^{2\xi}} \phi(k_0, R_0)^{\theta - 1}. \tag{3.23}$$

Demonstração. Considere as sequências

$$k_n = k_0 + d - \frac{d}{2^n} \nearrow k_0 + d, \tag{3.24}$$

$$r_n = R_0 - \sigma R_0 + \frac{\sigma R_0}{2^n} \searrow R_0 - \sigma R_0. \tag{3.25}$$

Mostraremos que para todo $n \geq 1$ natural vale

$$\phi(k_n, r_n) \leq \frac{\phi(k_0, R_0)}{2^{\lambda n}}, \quad \text{onde } \lambda = \frac{2\xi + 2\eta}{\theta - 1}. \tag{3.26}$$

Com efeito, para $n = 1$, já que $k_1 > k_0$ e $r_1 < R_0$ temos

$$\begin{aligned}
\phi(k_1, r_1) = \phi\Big(k_0 + \frac{d}{2}, R_0 - \frac{\sigma R_0}{2}\Big) &\leq \frac{c^\xi}{\left(\frac{\sigma R_0}{2}\right)^{2\xi}\left(\frac{d}{2}\right)^{2\eta}}\phi(k_0, R_0)^\theta \\
&= \Big(\frac{c^\xi}{(\sigma R_0)^{2\xi} d^{2\eta}}\phi(k_0, R_0)^{\theta - 1}\Big) 2^{2\xi + 2\eta}\phi(k_0, R_0) \\
&= \frac{1}{2^{2\xi + 2\eta\frac{\theta}{\theta - 1}}} 2^{2\xi + 2\eta}\phi(k_0, R_0) = \frac{1}{2^{\frac{2\xi + 2\eta}{\theta - 1}}}\phi(k_0, R_0) \\
&= \frac{\phi(k_0, R_0)}{2^\lambda}.
\end{aligned}$$

Agora, suponha que (3.26) é válida para algum n. Como $k_{n+1} > k_n$ e $r_{n+1} < r_n$, temos

$$\begin{aligned}
\phi(k_{n+1}, r_{n+1}) &\leq \frac{c^\xi}{\left(\frac{\sigma R_0}{2^{n+1}}\right)^{2\xi}\left(\frac{d}{2^{n+1}}\right)^{2\eta}}\phi(k_n, R_n)^\theta \\
&= \left[\frac{c^\xi}{(\sigma R_0)^{2\xi} d^{2\eta}}\phi(k_0, R_0)^{\theta - 1}\right]\frac{2^{(2\xi + 2\eta)(n+1)}}{\phi(k_0, R_0)^{\theta - 1}}\phi(k_n, R_n)^\theta \\
&\leq \frac{1}{2^{2\xi + 2\eta\frac{\theta}{\theta - 1}}}\frac{2^{(2\xi + 2\eta)(n+1)}}{\phi(k_0, R_0)^{\theta - 1}}\Big(\frac{\phi(k_0, R_0)}{2^{\lambda n}}\Big)^\theta \\
&= \frac{1}{2^{\lambda\theta}}\frac{2^{\lambda(\theta - 1)(n+1)}}{\phi(k_0, R_0)^{\theta - 1}}\frac{\phi(k_0, R_0)^\theta}{2^{\lambda\theta n}} \\
&= \frac{1}{2^{\lambda[\theta(1+n) - (\theta - 1)(n+1)]}}\phi(k_0, R_0) = \frac{\phi(k_0, R_0)}{2^{\lambda(n+1)}}.
\end{aligned}$$

Daí, por indução a desigualdade (3.26) é válida para todo $n \geq 1$ natural. Por fim, por (3.26), pelo Lema 42 e fazendo $n \to \infty$ obtemos

$$\overline{\phi}(k_0 + d, R_0 - \sigma R_0) \leq 0.$$

Então, como $\phi(h, r) \leq \overline{\phi}(h, r)$, segue que

$$0 \leq \phi(k_0 + d, R_0 - \sigma R_0) \leq \overline{\phi}(k_0 + d, R_0 - \sigma R_0) \leq 0.$$

□

Com estes resultados, podemos obter uma estimativa geral para o supremo essencial de uma função da classe de De Giorgi.

Teorema 44. *Sejam $U \in \mathbb{R}^n$ um aberto e $u \in \mathrm{DG}(U)$ e $r > 0$ tal que $B_r \subset\subset U$. Então para todo $k_0 \in \mathbb{R}$ temos*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_{r/2}} u \leq k_0 + c\Big(\frac{1}{r^n}\int_{A(k_0,r)} |u-k_0|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{|A(k_0,r)|}{r^n}\Big)^{\frac{\theta-1}{2}}. \tag{3.27}$$

Demonstração. Fazendo $\sigma = \frac{1}{2}$ em (3.22), existe um $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(k_0+d, r/2) \\ &= |\{u > k_0+d\} \cap B_{\frac{r}{2}}|^\eta\Big(\int_{A(k_0+d,r/2)} |u-(k_0+d)|^2\, dx\Big)^\xi \end{aligned}$$

O que nos dá

$$|\{u > k_0+d\}| \cap B_{r/2}| = 0,$$

isto é,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_{r/2}} u \leq k_0+d$$

ou

$$\int_{A(k_0+d,\, r/2)} |u-(k_0+d)|^2\, dx = 0.$$

e, como $|u-(k_0+d)| > 0$ em $A(k_0+d,\, r/2)$, então

$$|A(k_0+d,\, r/2)| = 0.$$

Daí, por (3.23), segue que

$$d = \frac{C}{r^{\xi/\eta}}|A(k_0,\, r)|^{\frac{\theta-1}{2}}\Big(\int_{A(k_0,\, r)} |u(x)-k_0|^2\, dx\Big)^{(\theta-1)\frac{\xi}{2\eta}}.$$

Veja que, da igualdade $\frac{2\xi}{\eta} = n\theta$ obtemos $\frac{\xi}{\eta} = n\frac{\theta}{2} = \frac{n}{2} + n\frac{\theta-1}{2}$, e de $\xi+\eta = \xi\theta$ obtemos $\frac{\xi}{2\eta}(\theta-1) = \frac{1}{2}$ donde segue o resultado. □

Teorema 45. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u \in \mathrm{DG}(U)$. Então, para todo $r > 0$ tal que $B_r \subset\subset U$ temos*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_{r/2}} u \leq c\Big(⨍_{B_r} |u|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Demonstração. Pelo Teorema 44, fazendo $k_0 = 0$ obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname*{ess\,sup}_{B_{r/2}} u &\leq c\Big(\frac{1}{r^n}\int_{A(0,\,r)} |u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{|A(0,\,r)|}{r^n}\Big)^{\frac{\theta-1}{2}} \\
&\leq c\Big(\frac{1}{r^n}\int_{A(0,\,r)} |u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\omega_n^{\frac{\theta-1}{2}} \\
&\leq c\omega_n^{\frac{\theta}{2}}\Big(\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{A(0,\,r)} |u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= c\Big(\fint_{B_r} |u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 46. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u \in W^{1,2}_{loc}(U)$ uma solução de (3.1). Então, $u \in L^\infty_{loc}(U)$, isto é, para todo $r > 0$ tal que $B_r \subset\subset U$ temos*

$$\|u\|_{L^\infty(B_{r/2})} \leq c\Big(\fint_{B_r} |u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.28}$$

Demonstração. Como u é solução de (3.1), então u é uma subsolução e supersolução de (3.1). Daí, pelo Lema 27 e 28 $u, -u \in \mathrm{DG}(U)$. Aplicando o Teorema anterior em $-u$ obtemos

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_{r/2}}(-u) \leq c\Big(\fint_{B_r} |-u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

donde segue que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_{r/2}} u \geq -c\Big(\fint_{B_r} |-u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

e, portanto,

$$\|u\|_{L^\infty(B_{r/2})} \leq c\Big(\fint_{B_r} |u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

□

3.4 O Teorema de De Giorgi

Definição 47. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u : U \to \mathbb{R}^n$. Dado $x \in U$, $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset\subset U$ definimos*

$$M(r) := \operatorname*{ess\,sup}_{B_r(x)} u, \quad m(r) := \operatorname*{ess\,sup}_{B_r(x)} u, \quad \omega(r) := M(r) - m(r),$$

onde $\omega(r)$ é chamado de oscilação essencial de u na bola $B_r(x)$.

É fácil ver, que se u é uma função limitada, então sua oscilação essencial também é limitada.

Lema 48. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u \in \mathrm{DG}(U)$. Dado $x \in U$, $r > 0$ tal que $2r < \mathrm{dist}(x, \partial U)$, $K_0 = \frac{M(2r)+m(2r)}{2}$ e $k_i = M(2r) - \frac{M(2r)-K_0}{2^i}$. Se $|A(K_0, r)|z \leq \frac{1}{2}|B_r|$, então para todo $m \geq m_0$*

$$|A(k_m, r)| \leq C_n r^n \Big(\frac{1}{m}\Big)^N, \quad \textit{onde } N = \frac{n}{2n-2}.$$

Demonstração. Consideremos $h > k > K_0$. Assim, temos

$$v(x) := \min\{u(x), h\} = \min\{u(x), k\} = \begin{cases} h-k, & x \in \{u \geq k\} \\ u(x)-k, & x \in \{k \leq u \leq h\} \\ 0, & x \in \{u \leq h\}. \end{cases}$$

Já que $\{u \leq K_0\} \subseteq \{u \leq k\}$ temos por hipótese que

$$|B_r \cap \{v = 0\}| = |B_r \cap \{u \leq k\}| \geq |B_r \cap \{u < K_0\}| \geq \frac{1}{2}|B_r|.$$

Aplicando a desigualdade de Sobolev para v com $p = 1$ e a desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \Big(\int_{B_r} |v|^{\frac{n}{n-1}}\, dx\Big)^{\frac{n-1}{n}} &\leq C_n \int_{B_r} |Dv|\, dx \\ &= C_n \int_{A(k,r)-A(h,r)} |Du|\, dx \\ &\leq C_n |A(k,r)-A(h,r)|^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{A(k,r)-A(h,r)} |Du|\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Pela forma como definimos v, podemos escrever

$$\Big(\int_{A(h,r)} |v|^{\frac{n}{n-1}}\, dx\Big)^{\frac{n-1}{n}} = \Big(\int_{A(h,r)} |h-k|^{\frac{n}{n-1}}\, dx\Big)^{\frac{n-1}{n}} = (h-k)|A(h,r)|^{\frac{n-1}{n}}.$$

Como $A(h,r) \subseteq B_r$, pelo que concluímos anteriormente, temos

$$(h-k)|A(h,r)|^{\frac{n-1}{n}} \leq C_n |A(k,r)-A(h,r)|^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{A(k,r)-A(h,r)} |Du|\, dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

e consequentemente,

$$(h-k)^2 |A(h,r)|^{\frac{2n-2}{n}} \leq C_n |A(k,r)-A(h,r)| \int_{A(k,r)-A(h,r)} |Du|^2\, dx.$$

Note que $A(k,r)-A(h,r)\subseteq A(k,r)$ e $u\in \mathrm{DG}(U)$ nos dá

$$\begin{aligned}(h-k)^2|A(h,r)|^{\frac{2n-2}{2}} &\le C_n|A(k,r)-A(h,r)|\int_{A(k,r)-A(h,r)}|Du|^2\,dx\\ &\le C_n|A(k,r)-A(h,r)|\int_{A(k,r)}|Du|^2\,dx\\ &\le C_n|A(k,r)-A(h,r)|\frac{C}{r^2}\int_{A(k,2r)}|u-k|^2\,dx,\end{aligned}$$

e já que $u-k\le M(2r)-k$, $A(k,2r)\le |B_{2r}|=\omega_n r^n$ e $|A(k,r)-A(h,r)|=|A(k,r)|-|A(h,r)|$ temos

$$\begin{aligned}C_n|A(k,r)-A(h,r)|\frac{C}{r^2}\int_{A(k,2r)}|u-k|^2\,dx &\le \frac{C_n}{r^2}|A(k,r)-A(h,r)||M(2r)-k|^2|A(k,2r)|\\ &\le \frac{C_n}{r^2}|A(k,r)-A(h,r)||M(2r)-k|^2\omega_n r^n\\ &\le C_n r^{n-2}(|A(k,r)|-|A(h,r)|)|M(2r)-k|^2.\end{aligned}$$

Assim, temos

$$(h-k)^2|A(h,r)|^{\frac{2n-2}{2}}\le C_n r^{n-2}(|A(k,r)|-|A(h,r)|)|M(2r)-k|^2. \tag{3.29}$$

Agora, vamos definir $M:=M(2r)$ e considerar $k_i=M-\frac{M-K_0}{2^i}\nearrow M$, então

$$k_i-k_{i-1}=\frac{M-K_0}{2} \tag{3.30}$$

e

$$M-k_{i-r}=\frac{M-K_0}{2^{i-1}} \tag{3.31}$$

e, consequentemente, já que $k_i>k_{i-1}$, por (3.29) e (3.31), temos

$$\begin{aligned}(k_i-k_{i-1})^2|A(k,r)|^{\frac{2n-2}{n}} &\le C_n r^{n-2}(|A(k_{i-1},r)|-|A(k_i,r)|)|M-k_{i-1}|^2\\ &= C_n r^{n-2}(|A(k_{i-1},r)|-|A(k_i,r)|)\frac{|M-k_0|^2}{2^{2i-2}}.\end{aligned}$$

Usando (3.30), podemos escrever

$$\frac{|M-k_0|^2}{2^{2i}}|A(k_i,r)|^{\frac{2n-2}{n}}\le C_n r^{n-2}(|A(k_{i-1},r)|-|A(k_i,r)|)\frac{|M-k_0|^2}{2^{2i-2}},$$

portanto

$$|A(k_i,r)|^{\frac{2n-2}{n}}\le C_n r^{n-2}(|A(k_{i-1},r)|-|A(k_i,r)|). \tag{3.32}$$

Veja que, tomando um $m \in \mathbb{N}$ fixo, então para todo $i \leq m$ obtemos $|A(k_i,r)| \geq |A(k_m,r)|$, e, portanto,

$$\sum_{i=1}^{m} |A(k_i,r)|^{\frac{2n-2}{n}} \geq \sum_{i=1}^{m} |A(k_m,r)|^{\frac{2n-2}{n}} \geq m|A(k_m,r)|^{\frac{2n-2}{n}}.$$

Daí, usando (3.32) obtemos

$$m|A(k_m,r)|^{\frac{2n-2}{n}} \leq C_n r^{n-2} \sum_{i=1}^{m} (|A(k_{i-1},r)| - |A(k_i,r)|) \tag{3.33}$$

$$= C_n r^{n-2}(|A(k_0,r)| - |A(k_m,r)|) \leq C_n r^{n-2}|A(k_0,r)|. \tag{3.34}$$

E então podemos concluir que

$$\begin{aligned}
|A(k_m,r)| &\leq \Big(C_n r^{n-2}|A(k_0,r)|\Big)^{\frac{n}{2n-2}} \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{n}{2n-2}} \\
&\leq \Big(C_n r^{n-2}|B_r|\Big)^{\frac{n}{2n-2}} \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{n}{2n-2}} \\
&\leq \Big(C_n r^{n-2}\omega_n r^n\Big)^{\frac{n}{2n-2}} \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{n}{2n-2}} = C_n r^n \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{n}{2n-2}}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 49. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ e $u, -u \in \mathrm{DG}(U)$. Então, para todo $r > 0$ tal que $B_{2r} \subset\subset U$ tem-se*

$$\omega\left(\frac{r}{2}\right) \leq A\omega(2r) \tag{3.35}$$

onde $A < 1$ é uma constante que não depende de r.

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned}
K_0(u) &= (\operatorname*{ess\,sup}_{B_r} u + \operatorname*{ess\,inf}_{B_r} u) \\
&= -\frac{1}{2}(\operatorname*{ess\,inf}_{B_r}(-u) + \operatorname*{ess\,sup}_{B_r}(-u)) = -K_0(-u),
\end{aligned}$$

e então $\{u \leq K_0\} = \{-u \geq K_0\}$. Além disso, se $|B_r \cap \{u \geq K_0\}| \leq \frac{1}{2}|B_r|$, temos

$$|B_r \cap \{u \leq K_0(u)\}| = |B_r \cap \{-u \geq K_0(-u)\}| > \frac{1}{2}|B_r|.$$

Então podemos assumir que $|B_r \cap \{u \geq K_0\} > \frac{1}{2}$, onde aqui estamos escrevendo $K_0 = K_0(u)$. Pelo Teorema 44, com $k_i = M(2r) - \frac{M(2r)-K_0}{2^i}$ e $K_0 = \frac{M(2r)+m(2r)}{2}$, temos

$$\begin{aligned}
M\left(\frac{1}{2}\right) &= \operatorname*{ess\,sup}_{B_{r/2}} u \\
&\leq k_i + \frac{C}{r^{n/2}} \Big(\int_{A(k_i,r)} |u(x) - k_i|^2 \, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{|A(k_i,r)|}{r^n}\Big)^{\frac{\theta-1}{2}}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, sobre $A(k_i,r)$ temos $u(x)-k_i \le M(2r)-k_i$ e, portanto,

$$\int_{A(k_i,r)} |u(x)-k_i|^2\,dx \le (M(2r)-k_i)^2|A(k_i,r)|.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} M\Big(\frac{r}{2}\Big) &\le k_i + C\Big(\frac{|A(k_i,r)|}{r^n}\Big)^{\frac{1}{2}}(M(2r)-k_i)\Big(\frac{|A(k_i,r)|}{r^n}\Big)^{\frac{\theta-1}{2}} \\ &= k_i + C(M(2r)-k_i)\Big(\frac{|A(k_i,r)|}{r^n}\Big)^{\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Pelo lema anterior temos

$$C\Big(\frac{|A(k_i,r)|}{r^n}\Big)^{\frac{\theta}{2}} \le C_n\Big(\frac{1}{i}\Big)^{\frac{n\theta}{4n-4}} \to 0 \quad \text{sempre que } i\to\infty.$$

Dessa forma, existe um $i_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$C\Big(\frac{|A(k_{i_0},r)|}{r^n}\Big)^{\frac{\theta}{2}} \le \frac{1}{2},$$

então vale que

$$\begin{aligned} M\Big(\frac{r}{2}\Big) &\le k_{i_0} + \frac{(M(2r)-k_{i_0})}{2} \\ &= \frac{1}{2}k_{i_0} + \frac{1}{2}M(2r) \\ &= \frac{1}{2}\Big(M(2r) - \frac{M(2r)-K_0}{2^{i_0}}\Big) + \frac{1}{2}M(2r) \\ &= \frac{1}{2}\Big(M(2r) - \frac{M(2r) - \frac{M(2r)-m(2r)}{2}}{2^{i_0}} + \frac{1}{2}M(2r) \\ &= \frac{1}{2}M(2r) - \frac{1}{2}\Big(\frac{\frac{2M(2r)-M(2r)-m(2r)}{2}}{2^{i_0}}\Big) + \frac{1}{2}M(2r) \\ &= M(2r) - \frac{M(2r)-m(2r)}{2^{i_0+2}}. \end{aligned}$$

Subtraindo $m\Big(\frac{r}{2}\Big)$ e usando que $m\Big(\frac{r}{2}\Big) \le m(2r)$ temos

$$\begin{aligned} \omega\Big(\frac{r}{2} \le M\Big(\frac{r}{2}\Big) - m\Big(\frac{r}{2}\Big) &\le M(2r) - m\Big(\frac{r}{2}\Big) - \frac{M(2r)-m(2r)}{2^{i_0+2}} \\ &\le M(2r)-m(2r) - \frac{M(2r)-m(2r)}{2^{i_0+2}} \\ &= (M(2r)-m(2r))\Big(1-\frac{1}{2^{i_0+2}}\Big) \\ &= A\omega(2r), \end{aligned}$$

onde A depende somente de i_0 e $0 < A = 1 - \frac{1}{2^{i_0+2}} < 1$. □

Os dois lemas que serão mostrados a seguir serão importantes para demostrar que as funções da classe de De Giorgi são Hölder continuas.

Lema 50. *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência não-decrescente tal que $a_n \to 0$ com $0 < t < a_1$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Então, existe um $k > 1$ natural tal que $a_k < t < a_{k-1}$*

Demonstração. De fato, já que $a_n \to 0$, então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < t$ para todo $n > n_0$. Definindo

$$k := \min\{n > n_0; \quad a_n < t\}$$

temos $k > 1$ e já que a sequência é não-decrescente temos $a_k < t < a_{k-1}$. □

Lema 51. *Seja $R > 0$, $\phi : [0, \infty] \to [0; \infty]$ uma função não-decrescente e $0 < C$, $A < 1$ constantes satisfanzendo a desigualdade*

$$\phi(Ct) \leq A\phi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.36}$$

Então, existe um $\alpha > 0$ tal que

$$\phi(t) \leq \frac{1}{A}\left(\frac{t}{R}\right)^{\alpha}\phi(R), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.37}$$

Demonstração. De fato, veja que como $C < 1$, a sequência $a_n = C^n$ é estritamente decrescente e $a_n \to 0$ sempre que $n \to \infty$. Então, tomando $t < R$ teremos $\frac{t}{R} < 1$ e usando o lema anterior obtemos um n_0 tal que $C^{n_0+1} < \frac{t}{R} < C^{n_0}$. Por ϕ ser não-decrescente e pela desigualdade (3.36) segue que

$$\phi(t) \leq \phi(C^{n_0}R) \leq A\phi(C^{n_0-1}R) \leq A^2\phi(C^{n_0-2}R) \leq \cdots \leq A^{n_0}\phi(R).$$

Veja que

$$C^{n_0+1} < \frac{t}{R} \Rightarrow n_0 > -1 + \log_C \frac{t}{R}.$$

Daí, como $A < 1$ temos

$$\begin{aligned}
A^{n_0}\phi(R) &\leq A^{-1}A^{\log_C \frac{t}{R}}\phi(R) \\
&= \frac{1}{A}(C^{\log_C A})^{\log_C(\frac{t}{R})}\phi(R) \\
&= \frac{1}{A}(C^{\log_C(\frac{t}{R})})^{\log_C A}\phi(R) \\
&= \frac{1}{A}\left(\frac{t}{R}\right)^{\log_C A}\phi(R) \\
&= \frac{1}{A}\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha}\phi(R),
\end{aligned}$$

onde $\alpha = \log_C A$. $\square$

Perceba que se tomarmos $C < A < 1$ no lema anterior teremos $\alpha \in (0,1)$, já que $\alpha = \log_C A$.

Teorema 52 (De Giorgi)**.** *Seja $U \in \mathbb{R}^n$ um aberto e $u, -u \in \mathrm{DG}(U)$. Então existe um $\alpha \in (0,1)$ tal que $u \in C^{0,\alpha}(U)$.*

Demonstração. Considere $R > 0$ tal que $R < \mathrm{dist}(x, \partial U)$. Pelo teorema 49 temos

$$\omega(Cr) \leq A\omega(r), \quad \forall r > 0;\ r \leq R,$$

com $C = \frac{1}{4}$ e $0 < A = 1 - \frac{1}{2^{i+2}} < 1$. Aplicando o lema 51 obtemos

$$\omega(r) \leq \frac{1}{A}\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha} \omega(R), \quad \forall r < R.$$

Vamos fazer i grande o suficiente para que $A = 1 - \frac{1}{2^{i+2}} > \frac{1}{4}$. Considerando $x, y \in B_R$ tal que $|x-y| = r < R$, pode-se concluir que

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq \omega(r) \\ &\leq \frac{1}{A}\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha}\omega(R) = \left(\frac{1}{A}\frac{\omega(R)}{R^{\alpha}}\right) r^{\alpha} \\ &= \left(\frac{1}{A}\frac{\omega(R)}{R^{\alpha}}\right)|x-y|^{\alpha} \\ &= L|x-y|^{\alpha}, \end{aligned}$$

onde $L = \left(\frac{1}{A}\frac{\omega(R)}{R^{\alpha}}\right)$. Então, $u \in C^{0,\alpha}(B_R)$ onde R é tomado arbitrariamente. $\square$

Perceba que não foi necessário ter a hipótese de u ser solução de (3.1) para mostrar que uma função, sendo da classe DG, seria Hölder contínua. Voltando ao teorema 39 podemos concluir que se $u \in W^{1,2}_{loc}(U)$ é uma solução fraca da equação (3.1) então $u \in \mathrm{DG}(U)$ e, portanto, pelo teorema 52, vale que $u \in C^{0,\alpha}(U)$. Então, podemos formular o seguinte corolário.

Corolário 53. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Se $u \in W^{1,2}_{loc}(U)$ é uma solução de (3.1) então existe um $\alpha \in (0,1)$ tal que $u \in C^{0,\alpha}(U)$.*

4 REGULARIDADE DE Q-MÍNIMOS

4.1 Introdução

Nosso último e principal objetivo neste trabalho de dissertação, é estender a teoria de regularidade de De Giorgi para minimizantes de funcionais não-lineares do tipo:

$$\mathscr{F}(u,U) := \int_U f(x,u,Du)dx. \tag{4.1}$$

Doravante U representará um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, $u\colon U \to \mathbb{R}$ uma função real, e $(x,u,p) \mapsto f(x,u,p)$ uma função real de Carathéodory que satisfaz alguma condição de crescimento. Mais precisamente, estamos interessados no seguinte tipo de crescimento:

$$|p|^m - b|u|^\gamma - g(x) \leq f(x,u,p) \leq \mu|p|^m + b|u|^\gamma + g(x), \tag{4.2}$$

onde g é uma dada função não negativa, e m,γ,b,μ são constantes não negativas que satisfazem:

$$m > 1, \quad 1 \leq \gamma < \begin{cases} m^* := \dfrac{mn}{n-m}, & m < n \\ \\ +\infty, & m \geq n. \end{cases}$$

A teoria de regularidade que será apresentada neste capítulo tem como base o artigo [7]. Nesse artigo, os autores Giaquinta e Giusti abordam a noção de Q-minimizantes (noção introduzida por eles no artigo [6]) para o funcional $\mathscr{F}$ e demostram vários resultados interessantes que incluem naturalmente os resultados obtidos por De Giorgi. Nosso desafio aqui será discorrer sobre tais resultados. Doravante, usaremos a notação $Q(x,r)$ para representar o cubo (aberto) em $\mathbb{R}^n$, com lados paralelos aos eixos coordenados, centrado em x e lado (aresta) $r > 0$, ou seja,

$$Q(x,r) := \Big\{ y \in \mathbb{R}^n\colon \max_{1 \leq i \leq n} |y_i - x_i| < r/2 \Big\}.$$

Além disso, dado um conjunto $B \subset U$, a notação $\operatorname{osc}(u,B)$ indicará a oscilação de u em B, isto é,

$$\operatorname{osc}(u,B) = \sup_{x\in B} u(x) - \inf_{x \in B} u(x).$$

Como espólio do que vem pela frente, podemos adiantar que o ponto-chave da abordagem delineada nos artigos supracitados, consiste em mostrar que a oscilação de

Q-minimizantes em bolas B_r possui um decaimento controlado por uma potência do tipo r^α com $\alpha \in (0,1)$. Conforme a proposição a seguir indica, esse é um dos caminhos para provar o principal resultado deste capítulo, que consiste em provar que tais minimizantes são localmente Hölder contínuos.

Proposição 54. *Seja $\alpha \in (0,1)$. Suponha que $u\colon U \to \mathbb{R}$ seja tal que*

$$\operatorname{osc}(u, B_r(x)) \leq C_0 r^\alpha \quad \textit{para todo } B_r(x) \subset U. \tag{4.3}$$

Então, $u \in C^{0,\alpha}_{\mathrm{loc}}(U)$.

Demonstração. Queremos demonstrar que para todo $x_0 \in U$ existe uma vizinhança V de x_0 tal que $u|_V$ é Hölder-contínua. Fixe $x_0 \in U$ e seja $r_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$. Considere a bola $V = B(x_0, r_0/4)$ e sejam $z, x \in V$ quaisquer. Faça $r = |z - x|$. Um cálculo diretor mostra que $B_r(x) := B(x,r) \subset B(x_0, 3r_0/4) \subset U$. Então, por hipótese, temos

$$|u(z) - u(x)| \leq \operatorname{osc}(u, B_r(x)) \leq C_0 r^\alpha = C_0 |z - x|^\alpha.$$

□

4.2 A noção de Q-minimizantes

Conforme apontado e testemunhado por muitos autores renomados, o problema central no Cálculo das Variações consiste em garantir a existência e regularidade de soluções para o problema de minimização:

$$\min_{u \in \mathcal{A}} \int_U f(x, u(x), Du(x))dx, \tag{P}$$

onde $\mathcal{A}$ é uma determinada classe de funções e $(x,u,p) \mapsto f(x,u,p)$ é uma função real definida em $U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ sendo um domínio limitado aberto. Por exemplo, uma das mais usuais classes é a que prescreve a condição de Dirichlet $u = \phi$ em ∂U.

Interessante ressaltar que o problema de minimização acima contempla uma vasta gama de Equações Diferenciais Parciais (EPDs). Além disso, como é bem conhecido, há uma conexão fina entre soluções de (P) e certas EDPs. A título de ilustração, suponha que $f(x,u,p)$ seja de classe C^1. Agora, seja u um minimizante do problema (P). Defina

$$u \mapsto \mathscr{F}(u, U) := \int_U f(x, u, Du)dx.$$

Seja φ uma função *teste* tal que $\text{supp}(\varphi) \subset U$, de modo que $u+t\varphi$ coincide com u em ∂U para valores de t em um intervalo I centrado em $t=0$. Defina

$$g(t) = \mathscr{F}(u+t\varphi, U) := \int_U f(x, u+t\varphi, D(u+t\varphi))dx.$$

Então, $t \mapsto g(t)$ possui um mínimo em $t=0$. Consequentemente, $g'(0)=0$. Segue, portanto que:

$$\frac{d}{dt}\int_U f(x, u+t\varphi, Du+tD\varphi)dx = 0.$$

Diferenciando sob o sinal da integral e aplicando regra da cadeia, segue daí que:

$$\int_U \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i}(x, u(x), Du(x)) \cdot \varphi_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x), Du(x)) \cdot \varphi \right) dx = 0.$$

Agora, observemos que se f é de classe C^2, então podemos integrar por partes (aplicar o Teorema de Divergência – lembre que $\varphi|_{\partial U} \equiv 0$) e concluir que:

$$\int_U \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i}(x, u(x), Du(x)) - \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x), Du(x)) \right) \varphi dx = 0.$$

Como esta equação é válida para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(U)$, concluímos que uma solução u de (P) satisfaz a EDP:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i}(x, u(x), Du(x)) = g(x), \tag{4.4}$$

onde

$$g(x) := \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x), Du(x)).$$

Doravante, estaremos dedicados ao estudo da seguinte noção generalizada de mínimos do Problema (P).

Definição 55. *Uma função $u \in W^{1,m}_{\text{loc}}(U)$ é dita ser um Q-mínimo ($Q \geq 1$) para o funcional $\mathscr{F}$ definido em (4.1) se para quaisquer conjunto aberto $A \subset\subset U$ e $v \in W^{1,m}_{\text{loc}}(U)$ com* $\text{supp}(v-u) \subset A$ *tem-se que*

$$\mathscr{F}(u, A) \leq Q\mathscr{F}(v, A). \tag{4.5}$$

4.3 Lemas técnicos

Os seguintes lemas terão papéis fundamentais no estudo da regularidade de Q-mínimos.

Lema 56. *Dado f(t) uma função real limitada não negativa definida para* $0 \leq T_0 \leq t \leq T_1$. *Suponha que para* $T_0 \leq t < s \leq T_1$ *tem-se*

$$f(t) \leq A(s-t)^{-\alpha} + B + \beta f(s),$$

onde A, B, α, *e* β *são constantes não negativas e* $\beta < 1$. *Então existe uma constante* c, *que depende somente de* α *e* β *tal que para todo* r, R, $T_0 \leq r < R \leq T_1$ *tem-se:*

$$f(r) \leq c\Big[A(R-r)^{-\alpha} + B\Big].$$

Demonstração. Considere a sequência $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ definida por

$$t_0 = r \quad \text{e} \quad t_{i+1} - t_i = (1-\tau)\tau^i(R-r),$$

com $0 < \tau < 1$. Perceba que a sequência $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é crescente já que $t_{i+1} - t_i > 0$. Por hipótese, temos

$$f(t) \leq A\cdot(s-t)^{-\alpha} + B + \beta f(s)$$

para todo $T_0 \leq t < s \leq T_1$. Assim,

$$\begin{aligned} f(t_0) &\leq A\cdot(t_1-t_0)^{-\alpha} + B + \beta\cdot f(t_1) \\ &\leq A\cdot(1-\tau)^{-\alpha}\cdot\tau^{-0\cdot\alpha}\cdot(R-r)^{-\alpha} + B + \beta\cdot f(t_1) \\ &\leq \frac{A}{(1-\tau)^{\alpha}}\cdot(R-r)^{-\alpha} + B + \beta\cdot f(t_1). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \beta\cdot f(t_1) &\leq \beta\cdot\Big[A\cdot(t_2-t_1)^{-\alpha} + B + \beta\cdot f(t_2)\Big] \\ &\leq \beta\cdot\Big[A\cdot(1-\tau)^{-\alpha}\cdot\tau^{-1\cdot\alpha}\cdot(R-r)^{-\alpha} + B + \beta\cdot f(t_2)\Big] \\ &\leq \frac{A}{(1-\tau)^{\alpha}}\cdot(R-r)^{-\alpha}\cdot\beta\tau^{\alpha} + \beta B + \beta^2\cdot f(t_2). \end{aligned}$$

Segue que:

$$f(t_0) \leq \frac{A}{(1-\tau)^{\alpha}}\cdot(R-r)^{-\alpha}\cdot\sum_{i=0}^{1}\tau^{-i\alpha}\beta^i + B\sum_{i=0}^{1}\beta^i + \beta^2 f(t_2).$$

Daí, como

$$\tau^{-\alpha} > 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{1}\beta^i \leq \sum_{i=0}^{1}\tau^{-i\alpha}\beta^i$$

vale que

$$f(t_0) \leq \left[\frac{A}{(1-\tau)^{\alpha}} \cdot (R-r)^{-\alpha} + B\right] \cdot \sum_{i=0}^{1} \tau^{-i\alpha}\beta^i + \beta^2 \cdot f(t_2).$$

Fazendo essa iteração k vezes obtemos

$$f(t_0) \leq \beta^k f(t_k) + \left[\frac{A}{(1-\tau)^{\alpha}} \cdot (R-r)^{-\alpha} + B\right] \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \tau^{-i\alpha}\beta^i.$$

Tomando $\tau^{-\alpha}\beta < 1$ e fazendo $k \longrightarrow \infty$, temos a série geométrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} \tau^{-i\alpha}\beta^i = \frac{1}{1-\tau^{-\alpha}\beta} \quad \text{e} \quad \beta^k f(t_k) \longrightarrow 0.$$

Daí

$$\begin{aligned} f(t_0) &\leq \left[\frac{A}{(1-\tau)^{\alpha}} \cdot (R-r)^{-\alpha} + B\right] \cdot \frac{1}{1-\tau^{-\alpha}\beta} \\ &\leq \left[A(R-r)^{-\alpha} + B(1-\tau)^{\alpha}\right] \cdot \frac{(1-\tau)^{-\alpha}}{1-\tau^{-\alpha}\beta}. \end{aligned}$$

Como $(1-\tau)^{\alpha} < 1$, obtemos

$$f(r) \leq c\Big[A(R-r)^{-\alpha} + B\Big]$$

com $c = (1-\tau)^{-\alpha}(1-\beta\tau^{-\alpha})^{-1}$. $\square$

A prova dos seguintes lemas pode ser encontrada em [11, Lemma 7.1 e Lemma 7.3].

Lema 57. *Sejam $C, \zeta > 0$ e $B > 1$. Suponha que $(J_i)_{i\geq 0}$ seja uma sequência de números reais positivos tais que*

$$J_{i+1} \leq CB^i J_i^{1+\zeta} \quad \forall i \geq 0.$$

Se $J_0 \leq C^{-1/\zeta} \times B^{-1/\zeta^2}$, então

$$\lim_{i\to\infty} J_i = 0.$$

Lema 58. *Seja $\varphi(t)$ uma função positiva. Suponha que existam constantes $q > 0$ e $0 < \tau < 1$ tais que para todo $R \in (0, R_0)$,*

$$\varphi(\tau R) \leq \tau^{\delta}\varphi(R) + BR^{\beta}, \tag{4.6}$$

com $0 < \beta < \delta$, *e*

$$\varphi(t) \le q \cdot \varphi(t^k R) \quad \forall t \in (\tau^{k+1}R, \tau^k R).$$

Então, para todo $\theta < R \le R_0$ *tem-se:*

$$\varphi(\theta) \le C\left(\left(\frac{\theta}{R}\right)^{\beta} \varphi(R) + B\theta^{\beta}\right), \tag{4.7}$$

onde C *é uma constante dependendo somente de* q, τ, δ *e* β.

4.4 Desigualdade de Caccioppoli para Q-mínimos

A seguir ilustraremos o passo primeiro na direção de obtermos a regularidade C^{α} para Q-mínimos. A saber, o estabelecimento de uma desigualdade do tipo Caccioppoli.

Teorema 59. *Seja* $u \in W^{1,m}_{\mathrm{loc}}(U)$ *um* Q*-mínimo para o funcional*

$$\mathscr{F}(u,U) = \int_U f(x,u,Du)dx.$$

Suponha válidas as condições (4.2) e (4.5) e suponha que $g \in L^{\sigma}_{\mathrm{loc}}(U)$ *com* $\sigma > n/m$. *Então para todo* $x_0 \in U$, *existem constantes* $R_0 \in (0,1)$, $H > 0$ *e* $0 < \zeta < m/n$ *tais que:*

$$\int_{A_{k,\theta}} |Du|^m \, dx \le \frac{H}{(R-\theta)^m} \int_{A_{k,R}} w^m \, dx + H\Big(k^m R^{-\zeta n} + \|g\|_{\sigma}\Big) |A_{k,R}|^{1-\frac{m}{n}+\zeta}, \tag{4.8}$$

para todo $0 < \theta < R \le R_0$ *e* $k \ge 0$, *onde para* $k, r > 0$,

$$A_{k,r} = \Big\{x \in U : u(x) > k\Big\} \cap Q_r$$

e Q_r *é um cubo de aresta* r, *centrado em* x_0, *estritamente contido em* U.

Demonstração. Fixe $x_0 \in U$. Seja $r_0 = \mathrm{dist}(x_0, \partial U)$ e faça $B_0 = B_{r_0/2}(x_0)$. Para $r \in (0, r_0/2\sqrt{n}]$, seja Q_r o cubo descrito no enunciado, contido em B_0. Por simplicidade de notação, façamos $\|g\|_{\sigma} = \|g\|_{L^{\sigma}(\overline{B_0})}$.
Defina $w := \max(u-k, 0)$. Dados $0 < t < r$, fixe uma função corte (suave) η em $\mathbb{R}^n$ tal que:

$$\begin{cases} \mathrm{supp}(\eta) \subset Q_r, \\ 0 \le \eta \le 1, \\ \eta \equiv 1 \text{ em } Q_t \ (t < r), \\ |D\eta| \le 2(r-t)^{-1}. \end{cases}$$

Considere agora a função teste $v = u - \eta w$. Segue da definição de Q-mínimo que:

$$\int_{A_{k,r}} f(x,u,Du)dx \leq Q \int_{A_{k,r}} f(x,u-\eta w, D(u-\eta w))dx.$$

Combinando o lado esquerdo acima com o lado esquerdo de (4.2), obtemos

$$\int_{A_{k,r}} |Du|^m dx \leq Q \int_{A_{k,r}} f(x,u-\eta w, D(u-\eta w))dx + b\int_{A_{k,r}} |u|^\gamma dx + \int_{A_{k,r}} g(x)dx.$$

Aplicando agora o lado direito de (4.2), obtemos

$$\int_{A_{k,r}} |Du|^m dx \leq Q \int_{A_{k,r}} \Big(\mu\, |D(u-\eta w)|^m + b|u-\eta w|^\gamma + g(x)\Big)dx + b\int_{A_{k,r}} |u|^\gamma dx + \int_{A_{k,r}} g(x)dx.$$

Podemos então concluir que:

$$\begin{aligned}\int_{A_{k,r}} |Du|^m dx &\leq Q\bigg(\int_{A_{k,r}} \mu|Du-\eta Dw - wD\eta|^m\, dx + \int_{A_{k,r}} b|u-\eta w|^\gamma\, dx \\ &\quad + \int_{A_{k,r}} g(x)\, dx\bigg) + b\int_{A_{k,r}} |u|^\gamma\, dx + \int_{A_{k,r}} g(x)\, dx \\ &\leq Q\mu \int_{A_{k,r}} |(1-\eta)Du - wD\eta|^m\, dx + Qb\int_{A_{k,r}} |u-\eta w|^\gamma\, dx \\ &\quad + Q\int_{A_{k,r}} g(x)\, dx + b\int_{A_{k,r}} |u|^\gamma\, dx + \int_{A_{k,r}} g(x)dx\end{aligned}$$

Por um lado, temos

$$\int_{A_{k,r}} |(1-\eta)Du - wD\eta|^m\, dx \leq 2^m\bigg(\int_{A_{k,r}} (1-\eta)^m|Du|^m + w^m|D\eta|^m\, dx\bigg).$$

Por outro lado, como em $A_{k,r}$ ocorre a igualdade $u = w+k$ que implica $u - \eta w = (1-\eta)w + k$, segue que

$$\int_{A_{k,r}} |u-\eta w|^\gamma\, dx \leq 2^\gamma\Big(k^\gamma|A_{k,r}| + \int_{A_{k,r}} w^\gamma dx\Big).$$

Combinando todas essas desigualdades, deduzimos que:

$$\begin{aligned}
\int_{A_{k,r}} |Du|^m dx \leq{}& Q\mu 2^m\Big(\int_{A_{k,r}} (1-\eta)^m|Du|^m + w^m|D\eta|^m\,dx\Big) + Qb2^\gamma\Big(k^\gamma|A_{k,r}| + \int_{A_{k,r}} w^\gamma dx\Big)\\
&+Q\int_{A_{k,r}} g(x)\,dx + b\int_{A_{k,r}} w^\gamma\,dx + bk^\gamma|A_{k,r}| + \int_{A_{k,r}} g(x)dx\\
\leq{}& Q\mu 2^m\Big(\int_{A_{k,r}} (1-\eta)^m|Du|^m + w^m|D\eta|^m\,dx\Big)\\
&+bQ2^{\gamma+1}\Big(k^\gamma|A_{k,r}| + \int_{A_{k,r}} w^\gamma dx\Big) + (Q+1)|A_{k,r}|^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\,\|g\|_\sigma\\
\leq{}& \gamma_1\Bigg(\int_{A_{k,r}} (1-\eta)^m|Du|^m dx + \int_{A_{k,r}} w^m|D\eta|^m\,dx + \int_{A_{k,r}} w^\gamma dx + k^\gamma|A_{k,r}|\\
&+|A_{k,r}|^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\,\|g\|_\sigma\Bigg)
\end{aligned}$$

onde $\gamma_1 = \gamma_1(Q,\mu,\gamma,\sigma,m,b)$.

Note que $\operatorname{supp}(w) \subset \{u > k\}$ e $w|_{A_{k,r}} \in W^{1,m}(A_{k,r})$. De um modo geral, notemos que se $w \in W^{1,m}(V)$, com $V \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e $\partial V \in C^1$, então pela desigualdade de Sobolev (vide [4, Theorem 6, p. 270]) sabemos que existe uma constante $c_1 = c_1(n,m) > 0$ (dependendo apenas de n e m) tal que

$$\Big(\int_V w^{m^*}\,dx\Big)^{\frac{m}{m^*}} \leq c_1\int_V |Dw|^m\,dx.$$

Portanto, neste caso, como $m \leq \gamma < m^*$, segue daí e da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
\int_V w^\gamma\,dx &\leq \|w\|_{m^*}^{\gamma-m}|V|^{1-\frac{\gamma}{m^*}}\Big(\int_V w^{m^*}\,dx\Big)^{\frac{m}{m^*}}\\
&\leq c_1\|w\|_{m^*}^{\gamma-m}|V|^{1-\frac{\gamma}{m^*}}\int_V |Dw|^m\,dx.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

A seguir, denotaremos $\|u\|_{m^*} = \|u\|_{L^{m^*}(B_0)}$. Agora observe que podemos escolher um $R_0 \in (0,1)$, $R_0 = R_0(\|u\|_{m^*},\gamma,n,m)$, pequeno o suficiente tal que

$$c_1\|u\|_{m^*}^{\gamma-m}|Q_r|^{1-\frac{\gamma}{m^*}} \leq \frac{1}{2\gamma_1} \quad \forall\, 0 < r \leq R_0. \tag{4.10}$$

Consequentemente, podemos aplicar (4.9) e (4.10) com $V = B_r$ (lembre que $B_r \subset Q_r \subset B_0$)

para deduzir

$$\int_{A_{k,r}} w^\gamma \, dx \le \int_{B_r} |w|^\gamma dx \le c_1 \|w\|_{m^*}^{\gamma - m} |B_r|^{1-\frac{\gamma}{m^*}} \int_{B_r} |Dw|^m dx$$

$$= c_1 \|w\|_{m^*}^{\gamma - m} |B_r|^{1-\frac{\gamma}{m^*}} \int_{B_r \cap \{u>k\}} |Dw|^m dx$$

$$\le \frac{1}{2\gamma_1} \int_{A_{k,r}} |Du|^m \, dx, \quad \forall\, 0 < r \le R_0$$

Por outro lado, temos

$$k^{m^*} |A_k| \le \int_{A_k} |u|^{m^*} dx \le \|u\|_{m^*}^{m^*}. \tag{4.11}$$

Então, para $t < r < R_0$, temos

$$\int_{A_{k,r}} |Du|^m \, dx \le \gamma_1 \Bigg(\int_{A_{k,r}} (1-\eta)^m |Du|^m dx + \int_{A_{k,r}} w^m |D\eta|^m \, dx + \int_{A_{k,r}} w^\gamma dx + k^\gamma |A_{k,r}|$$

$$+ |A_{k,r}|^{1-\frac{1}{\sigma}} \|g\|_\sigma \Bigg)$$

$$\le \gamma_1 \Bigg(\int_{A_{k,r} \setminus A_{k,t}} |Du|^m \, dx + \frac{2^m}{(r-t)^m} \int_{A_{k,r}} w^m \, dx + \frac{1}{2\gamma_1} \int_{A_{k,r}} |Du|^m \, dx$$

$$+ k^\gamma |A_{k,r}| + |A_{k,r}|^{1-\frac{1}{\sigma}} \|g\|_\sigma \Bigg),$$

donde segue que:

$$\int_{A_{k,r}} |Du|^m \, dx \le 2\gamma_1 \Bigg(\int_{A_{k,r} \setminus A_{k,t}} |Du|^m \, dx + \frac{2^m}{(r-t)^m} \int_{A_{k,r}} w^m \, dx + k^\gamma |A_{k,r}|$$

$$+ |A_{k,r}|^{1-\frac{1}{\sigma}} \|g\|_\sigma \Bigg).$$

Então, em resumo temos que:

$$\int_{A_{k,r}} |Du|^m \, dx \le 2\gamma_1 \int_{A_{k,r} \setminus A_{k,t}} |Du|^m \, dx + 2\gamma_1 \Bigg(\frac{2^m}{(r-t)^m} \int_{A_{k,R}} w^m \, dx + k^\gamma |A_{k,R}|$$

$$+ |A_{k,R}|^{1-\frac{1}{\sigma}} \|g\|_\sigma \Bigg).$$

Note que como $\sigma > n/m$, podemos escrever $1/\sigma = m/n - \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$. Portanto, $1 - 1/\sigma = 1 - m/n + \epsilon$ donde conclui-se que

$$|A_{k,R}|^{1-\frac{1}{\sigma}} \|g\|_\sigma = |A_{k,R}|^{1-\frac{m}{n}+\epsilon} \|g\|_\sigma.$$

Por outro lado, seguindo [6, p. 35], e usando (4.11), vemos que:

$$k^\gamma |A_{k,R}| = \Big(k^{m^*}|A_{k,R}|\Big)^{\frac{\gamma-m}{m^*}} \cdot k^m |A_{k,R}|^{1-\frac{\gamma-m}{m^*}}$$

$$\leq \|u\|_{m^*}^{\gamma-m} \cdot k^m |A_{k,R}|^{1-\frac{m}{n}+(1-\frac{\gamma}{m^*})}.$$

Note que não há perda de generalidade em assumir que $|A_{k,R}| < 1$. Inserindo essas informações na desigualdade anterior, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_{A_{k,r}} |Du|^m\,dx &\leq 2\gamma_1 \int_{A_{k,r}\setminus A_{k,t}} |Du|^m\,dx + 2\gamma_1\Bigg(\frac{2^m}{(r-t)^m}\int_{A_{k,R}} w^m\,dx \\ &\qquad + \|u\|_{m^*}^{\gamma-m}\cdot k^m|A_{k,R}|^{1-\frac{m}{n}+(1-\frac{\gamma}{m^*})} + |A_{k,R}|^{1-\frac{m}{n}+\epsilon}\|g\|_\sigma\Bigg) \\ &\leq 2\gamma_1 \int_{A_{k,r}\setminus A_{k,t}} |Du|^m\,dx + 2\gamma_1\Bigg(\frac{2^m}{(r-t)^m}\int_{A_{k,R}} w^m\,dx \\ &\qquad + \Big(\|u\|_{m^*}^{\gamma-m}k^m + \|g\|_\sigma\Big)|A_{k,R}|^{1-\frac{m}{n}+\tilde{\epsilon}}\Bigg),\end{aligned}$$

onde $\zeta = \min\Big(\epsilon, 1-(\gamma/m^*)\Big)$. Convém observar de passagem que um cálculo direto mostra que $\zeta < m/n$. Somando em ambos os lados da desigualdade acima o termo $2\gamma_1\displaystyle\int_{A_{k,t}} |Du|^m\,dx$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{A_{k,r}} |Du|^m\,dx + 2\gamma_1\int_{A_{k,t}} |Du|^m\,dx &\leq 2\gamma_1\int_{A_{k,t}} |Du|^m\,dx + 2\gamma_1\int_{A_{k,r}\setminus A_{k,t}} |Du|^m\,dx \\ &\quad + 2\gamma_1\Bigg(\frac{2^m}{(r-t)^m}\int_{A_{k,R}} w^m\,dx + \Big(\|u\|_{m^*}^{\gamma-m}k^m + \|g\|_\sigma\Big)|A_{k,R}|^{1-\frac{m}{n}+\tilde{\epsilon}}\Bigg),\end{aligned}$$

que por sua vez (lembre que $t < r$) fornece

$$\begin{aligned}\int_{A_{k,t}} |Du|^m\,dx &\leq \frac{2\gamma_1}{1+2\gamma_1}\int_{A_{k,r}} |Du|^m\,dx + \frac{2^m}{(r-t)^m}\int_{A_{k,R}} w^m\,dx \\ &\quad + \Big(\|u\|_{m^*}^{\gamma-m}k^m + \|g\|_\sigma\Big)|A_{k,R}|^{1-\frac{m}{n}+\tilde{\epsilon}}.\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 56 obtemos uma constante $\gamma_2 > 0$ tal que

$$\int_{A_{k,\theta}} |Du|^m\,dx \leq \gamma_2\Bigg(2^m(R-\theta)^{-m}\int_{A_{k,R}} w^m\,dx + \Big(\|u\|_{m^*}^{\gamma-m}k^m + \|g\|_\sigma\Big)|A_{k,R}|^{1-\frac{m}{n}+\zeta}\Bigg).$$

Fazendo $H = \gamma_2\max(2^m, \|u\|_{m^*}^{\gamma-m})$ e considerando que $R < 1$, concluímos que:

$$\int_{A_{k,\theta}} |Du|^m\,dx \leq \frac{H}{(R-\theta)^m}\int_{A_{k,R}} w^m\,dx + H\Big(k^m R^{-\zeta n} + \|g\|_\sigma\Big)|A_{k,R}|^{1-\frac{m}{n}+\zeta}.$$

$\square$

Corolário 60. *Considere as condições do Teorema 59. Então, para todo $x_0 \in U$ existem constantes $R_0 \in (0,1)$, $H > 0$ e $0 < \zeta < m/n$ satisfazendo a seguinte desigualdade:*

$$\int_{B_{k,\theta}} |Du|^m dx \leq \frac{H}{(R-\theta)^m} \int_{B_{k,R}} (k-u)^m dx + H\Big(|k|^m R^{-n\zeta} + \|g\|_\sigma\Big)|B_{k,R}|^{1-\frac{m}{n}+\zeta}, \quad (4.12)$$

para todo $0 < \theta < R \leq R_0$ e $k \leq 0$, onde

$$B_{k,r} = \Big\{x \in U \colon u(x) < k\Big\} \cap Q_r \quad (r > 0).$$

Demonstração. Basta notar que a função $-u$ é um Q-minimizante do funcional

$$\tilde{\mathscr{F}}(v,U) = \int_U f(x,-v,-Dv)dx,$$

e aplicar convenientemente o resultado anterior (troque k e k_0 por $-k$ e $-k_0$). □

4.5 Classe de De Giorgi

Agora que provamos a desigualdade de Caccioppoli, temos a motivação correta para considerar a seguinte definição:

Definição 61. *Seja $u \in W^{1,m}_{\text{loc}}(U)$. Dados $\chi, H, \zeta, R_0 > 0$ e $k_0 \geq 0$, dizemos que u pertence a classe*

$$DG^+_m = DG^+_m(U,H,\chi,\zeta,R_0,k_0)$$

se para quaisquer cubos concêntricos $Q_\theta \subset Q_R \subset\subset U$, com $0 < \theta < R \leq R_0$, e para qualquer $k \geq k_0$ vale a desigualdade:

$$\int_{A_{k,\theta}} |Du|^m dx \leq \frac{H}{(R-\theta)^m} \int_{A_{k,R}} (u-k)^m dx + H\Big(\chi^m + k^m R^{-n\zeta}\Big)|A_{k,R}|^{1-\frac{m}{n}+\zeta} \quad (4.13)$$

Similarmente, definimos DG^-_m como sendo a classe das funções $u \in W^{1,m}_{\text{loc}}(U)$ tais que para quaisquer $\theta < R$ em $(0,R_0]$ e $k \leq -k_0$, vale a seguinte desigualdade:

$$\int_{B_{k,\theta}} |Du|^m \leq \frac{H}{(R-\theta)^m} \int_{B_{k,R}} (k-u)^m dx + H\Big(\chi^m + |k|^m R^{-n\zeta}\Big)|B_{k,R}|^{1-\frac{m}{n}+\zeta}. \quad (4.14)$$

Finalmente, usaremos a notação clássica DG_m para indicar a interseção:

$$DG_m := DG^+_m \cap DG^-_m$$

Conforme veremos adiante, uma característica surpreendente é que a classe de funções De Giorgi, DG_m, concentra na desigualdade (4.13) praticamente todas as informações relativas ao comportamento contínuo de Q-minimizantes. Convém lembrar que nossa meta principal é verificar a continuidade Hölder de tais funções. Agora que já demos o primeiro passo, vamos caminhar na direção do segundo, que consiste em verificar a limitação local de Q-minimizantes. Esse é o tema da próxima seção.

4.6 Limitação Local de Q-minimizantes

O principal objetivo desta seção é demostrar que funções na classe DG_m são localmente limitadas. Recordemos que uma função real $u\colon U \to \mathbb{R}$ é dita ser localmente limitada se, para qualquer $x_0 \in U$, existe uma vizinhança V de x_0 em U tal que a restrição $u|_V$ é limitada. Preliminarmente, demonstraremos o seguinte resultado que desempenhará papel crucial nessa tarefa.

Teorema 62. *Sejam $C, h_0 > 0$, $0 < \zeta \leq m/n$ e $w \in W^{1,m}(U)$ uma função tal que para algum $x_0 \in U$,*

$$\int_{A_{h,\sigma}} |Dw|^m dx \leq \frac{C}{(\tau-\sigma)^m} \int_{A_{h,\tau}} (w-h)^m dx + Ch^m |A_{h,\tau}|^{1-\frac{m}{n}+\zeta} \tag{4.15}$$

para todo $\frac{1}{2} \leq \sigma < \tau \leq 1$, $h \geq h_0$, onde para todo $s \in [\frac{1}{2}, 1]$, $A_{h,s} = \{u > h\} \cap Q_s$ e $Q_s = Q_s(x_0)$ é o cubo centrado em x_0 de aresta s estritamente contido em U. Então, para alguma constante universal $c > 0$, w satisfaz:

$$\int_{A_{k,\sigma}} (w-k)^m dx \leq \frac{c}{(k-h)^{m\zeta}} \left[\frac{1}{(\tau-\sigma)^m} + \frac{k^m}{(k-h)^m} \right] \cdot \left(\int_{A_{h,\tau}} (w-h)^m dx \right)^{1+\zeta}. \tag{4.16}$$

Em particular, para alguma constante $D = D(m,n,\zeta) > 0$ tem-se que:

$$\sup_{Q_{1/2}} w \leq D \left(\int_{Q_1} (w^+)^m dx \right)^{1/m}. \tag{4.17}$$

Demonstração. Fixe $\frac{1}{2} \leq \sigma < \tau \leq 1$ e seja $\eta \in C_0^\infty(B_{\frac{\sigma+\tau}{2}})$ uma função de corte tal que:

$$\eta \equiv 1 \text{ em } B_\sigma, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad \text{e} \quad |D\eta| \leq \frac{4}{\tau-\sigma}.$$

Para $k \geq h_0$, defina $\xi = \eta(w-k)^+$. Note que $1 - \frac{m}{m^*} = \frac{m}{n}$. Então, aplicando a desigualdade de Sobolev ([4, Theorem 6, p. 270]) e usando o fato que

$$D\xi = D\eta \cdot (w-k)^+ + \eta \cdot D(w-k)^+,$$

temos

$$\int_{A_{k,\sigma}}(w-k)^m dx = \int_{A_{k,\sigma}} \xi^m dx \le \left(\int_{A_{k,\sigma}} \xi^{m^*} dx\right)^{\frac{m}{m^*}} \cdot |A_{k,\sigma}|^{1-\frac{m}{m^*}}$$
$$\le C\int_{A_{k,\sigma}} |D\xi|^m dx \cdot |A_{k,\tau}|^{\frac{m}{n}}$$
$$\le C\left(\int_{A_{k,\sigma}} |Dw|^m dx + \frac{1}{(\tau-\sigma)^m}\int_{A_{k,\sigma}}(w-k)^m dx\right)|A_{k,\tau}|^{\frac{m}{n}}$$
$$\le C\left(\int_{A_{k,\frac{\sigma+\tau}{2}}} |Dw|^m dx + \frac{1}{(\tau-\sigma)^m}\int_{A_{k,\frac{\sigma+\tau}{2}}}(w-k)^m dx\right)|A_{k,\tau}|^{\frac{m}{n}}.$$

Inserindo agora a desigualdade (4.15), vemos claramente que:

$$\int_{A_{k,\sigma}}(w-k)^m dx \le \frac{c|A_{k,\tau}|^{\frac{m}{n}}}{(\tau-\sigma)^m}\int_{A_{k,\tau}}(w-k)^m dx + ck^m|A_{k,\tau}|^{1+\zeta}. \tag{4.18}$$

Agora observemos que se $h<k$, então:

$$\int_{A_{h,\tau}}(w-h)^m dx = \int_{\{w>k\}\cap B_\tau}(w-h)^m dx + \int_{(\{w>h\}\setminus\{w>k\})\cap B_\tau}(w-h)^m dx$$
$$\ge \int_{\{w>k\}\cap B_\tau}(w-h)^m dx$$
$$= \int_{\{w>k\}\cap B_\tau}(w-k+k-h)^m dx$$
$$\ge \int_{\{w>k\}\cap B_\tau}(k-h)^m dx = (k-h)^m|A_{k,\tau}|.$$

Além disso, como $h<k$ implica $\{w>h\}\supset\{w>k\}$, temos ainda que:

$$\int_{A_{k,\tau}}(w-k)^m dx \le \int_{A_{k,\tau}}(w-h)^m dx \le \int_{A_{h,\tau}}(w-h)^m dx.$$

Consequentemente, ao introduzirmos essas últimas desigualdades em (4.18) chegamos a conclusão de que:

$$\int_{A_{k,\sigma}}(w-k)^m dx \le \frac{c}{(\tau-\sigma)^m}\cdot|A_{k,\tau}|^{m/n}\cdot\int_{A_{h,\tau}}(w-h)^m dx + \frac{ck^m}{(k-h)^{m(1+\zeta)}}\left(\int_{A_{h,\tau}}(w-h)^m dx\right)^{1+\zeta}$$
$$\le \frac{c}{(\tau-\sigma)^m}\cdot|A_{k,\tau}|^{\zeta}\cdot\int_{A_{h,\tau}}(w-h)^m dx + \frac{ck^m}{(k-h)^{m(1+\zeta)}}\left(\int_{A_{h,\tau}}(w-h)^m dx\right)^{1+\zeta}$$
$$\le \left[\frac{c}{(\tau-\sigma)^m}\cdot\frac{1}{(k-h)^{m\zeta}} + \frac{ck^m}{(k-h)^{m(1+\zeta)}}\right]\left(\int_{A_{h,\tau}}(w-h)^m dx\right)^{1+\zeta}$$
$$= \frac{c}{(k-h)^{m\zeta}}\left[\frac{1}{(\tau-\sigma)^m} + \frac{k^m}{(k-h)^m}\right]\cdot\left(\int_{A_{h,\tau}}(w-h)^m dx\right)^{1+\zeta},$$

onde c é uma constante universal. Note que usamos acima o fato que $\zeta \leq m/n$ e $|A_{k,\tau}| \leq |Q_1| = 1$.

Em suma, até aqui provamos a seguinte desigualdade:

$$\int_{A_{k,\sigma}} (w-k)^m dx \leq \frac{c}{(k-h)^{m\zeta}} \left[\frac{1}{(\tau-\sigma)^m} + \frac{k^m}{(k-h)^m} \right] \cdot \left(\int_{A_{h,\tau}} (w-h)^m dx \right)^{1+\zeta}. \quad (4.19)$$

Agora, seja $d \geq h_0$ um número a ser escolhido a posteriori. Para $i \in \mathbb{N}$, defina as sequências:

$$k_i = 2d\left(1 - 2^{-i-1}\right),$$

$$\sigma_i = \frac{1}{2}\left(1 + 2^{-i}\right).$$

Um cálculo direto fornece a seguintes relações:

$$\frac{k_{i+1}^m}{(k_{i+1}-k_i)^m} \leq 2^{2m} \times 2^{im} \quad \& \quad \frac{1}{(\sigma_i - \sigma_{i+1})^m} = 2^{2m} \times 2^{im} \quad \& \quad \frac{1}{(k_{i+1}-k_i)^{m\zeta}} = \frac{2^{m\zeta} \times 2^{im\zeta}}{d^{m\zeta}}.$$

Reescrevendo então (4.19) com $\sigma = \sigma_{i+1}$, $\tau = \sigma_i$, $k = k_{i+1}$ e $h = k_i$, e fazendo

$$J_i = d^{-m} \int_{A_{k_i,\sigma_i}} (w-k_i)^m dx,$$

obtemos, após a realização de uns cálculos diretos, a seguinte desigualdade:

$$J_{i+1} \leq C \cdot 2^{im(\zeta+1)} J_i^{1+\zeta} \quad (4.20)$$

onde $C = 2^{m(\zeta+2)+1} c$. Agora observe que

$$J_0 = \frac{1}{d^m} \int_{A_{d,1/2}} (w-d)^m dx \leq \frac{1}{d^m} \int_{Q_1} (w^+)^m dx.$$

Portanto, escolhendo d como sendo

$$d = C^{\frac{1}{m\zeta}} B^{\frac{1}{m\zeta^2}} \left(\int_{Q_1} (w^+)^m dx \right)^{1/m},$$

com $B = 2^{m(\zeta+1)}$, vemos claramente que

$$J_0 \leq C^{-\frac{1}{\zeta}} \cdot B^{-\frac{1}{\zeta^2}}.$$

De acordo com o Lema 57 (Seção 4.3), podemos concluir então que

$$\frac{1}{d^m} \int_{A_{2d,1/2}} (w-2d)^m dx = \lim_{i \to \infty} J_i = 0.$$

Consequentemente, tem-se que

$$\sup_{Q_{1/2}} w \leq 2d.$$

□

Feitas as considerações preliminares acima, incorre estarmos aptos a enunciar e demonstrar o principal resultado desta seção.

Corolário 63. *Seja $u \in DG_m^+$. Então, u é localmente limitada por cima em U. Mais precisamente, existe constante $c > 0$ tal que para todo $x_0 \in U$ e $R \leq \min(R_0, \operatorname{dist}(x_0, \partial U))$, tem-se:*

$$\sup_{Q_{R/2}} u(x) \leq c\left(\left(\fint_{Q_R} u_+^m dx\right)^{1/m} + \kappa_0 + \chi R^\beta\right). \tag{4.21}$$

Demonstração. Recordemos que $DG_m^+ = DG_m^+(U, H, \chi, \zeta, R_0, k_0)$. A ideia é mostrarmos que a hipótese $u \in DG_m^+$ pode ser reduzida à condição prescrita em (4.15). Neste sentido, notemos primeiro que se fizermos

$$v = u + \chi R^\beta \quad \& \quad h = k + \chi R^\beta \qquad \left(\beta = \frac{n\zeta}{m} \text{ e } k \geq k_0\right), \tag{4.22}$$

então $\{v > h\} = \{u > k\}$. Para $h, r > 0$, seja $A_{h,r} = \{v > h\} \cap Q_r$. Portanto, para fixado $x_0 \in U$, segue da desigualdade (4.13) que

$$\begin{aligned}
\int_{A_{h,\sigma}} |Dv|^m dx &= \int_{\{v>h\}\cap Q_\sigma} |Dv|^m dx = \int_{\{u>k\}\cap Q_R} |Du|^m dx \\
&\leq \frac{H}{(R-\sigma)^m} \int_{\{u>k\}\cap Q_\sigma} (u-k)^m dx + H\left(\chi^m + k^m R^{-n\zeta}\right) |\{u > k\} \cap Q_R|^{1-\frac{m}{n}+\zeta} \\
&= \frac{H}{(R-\sigma)^m} \int_{A_{h,R}} (v-h)^m dx + H\left(\chi^m + k^m R^{-n\zeta}\right) |A_{h,R}|^{1-\frac{m}{n}+\zeta},
\end{aligned}$$

para todo $R_0/2 \leq \sigma < R \leq R_0$. Observemos ainda que;

$$\begin{aligned}
\chi^m + k^m R^{-n\zeta} &= \left(\chi^m R^{n\zeta} + k^m\right) \cdot R^{-n\zeta} \\
&= \left(\left(\chi \cdot R^{\frac{n\zeta}{m}}\right)^m + k^m\right) \cdot R^{-n\zeta} \\
&\leq \left(\left(k + \chi \cdot R^{\frac{n\zeta}{m}}\right)^m + \left(k + \chi \cdot R^{\frac{n\zeta}{m}}\right)^m\right) \cdot R^{-n\zeta} \\
&= 2h^m R^{-n\zeta},
\end{aligned}$$

donde segue que:

$$\int_{A_{h,\sigma}} |Dv|^m dx \leq \frac{2H}{(R-\sigma)^m} \int_{A_{h,R}} (v-h)^m dx + 2H h^m R^{-n\zeta} |A_{h,R}|^{1-\frac{m}{n}+\zeta}. \tag{4.23}$$

Portanto,

$$v \in DG_m^+(U, 2H, 0, \zeta, R_0, h_0)$$

em que $h_0 = k_0 + \chi R^{n\zeta/m}$. Ou seja, chegamos a duas conclusões:

(i) É suficiente mostrar que v é localmente limitada por cima.

(ii) Podemos supor sem perda de generalidade que $\chi = 0$.

Agora, mostraremos que também não há perda nenhuma de generalidade em assumir a priori que $R_0 = 1$. Para isso, faremos uma homotetia do domínio U considerando a seguinte mudança de variáveis $y = R_0^{-1}x$. Fixe $0 < \sigma < \tau \leq 1$. Em seguida, defina $w\colon R_0^{-1}U \to \mathbb{R}$ pondo $w(R_0^{-1}x) = v(x)$, para quase todo $x \in U$, onde v é a função definida em (4.22). A seguir, considere y variando em $R_0^{-1}U$. Note que $w(y) = v(R_0 y)$ para todo $y \in R_0^{-1}U$. Além disso, temos:

$$Dw(y) = R_0 Dv(R_0 y), \quad \forall y \in R_0^{-1}U.$$

Defina $\varphi\colon U \to R_0^{-1}U$ pondo $\varphi(x) = R_0^{-1}x$. Então, de (4.23) obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_{A_{h,\sigma}} |Dw|^m dy &= \int_{\{w>h\}\cap Q_\sigma(R_0^{-1}x_0)} |Dw|^m dy = \int_{\varphi(\{v>h\}\cap Q_{\sigma R_0}(x_0))} |Dw|^m dy \\
&= \int_{\{v>h\}\cap Q_{\sigma R_0}(x_0)} |(Dw\circ\varphi)(x)|^m R_0^{-m} dx = \int_{\{v>h\}\cap Q_{\sigma R_0}(x_0)} |Dv(x)|^m dx \\
&\leq \frac{2H}{R_0^m(\tau-\sigma)^m} \int_{\{v>h\}\cap Q_{\tau R_0}(x_0)} (v-h)^m dx \\
&\qquad + 2Hh^m \tau^{-n\zeta} R_0^{-n\zeta} |\{v>h\}\cap Q_{\tau R_0}(x_0)|^{1-\frac{m}{n}+\zeta} \\
&= \frac{2H}{R_0^m(\tau-\sigma)^m} \int_{\{w>h\}\cap Q_\tau(R_0^{-1}x_0)} (w-h)^m R_0^m dy \\
&\qquad + 2HR_0^{n-m} h^m \tau^{-n\zeta} |\{w>h\}\cap Q_\tau(R_0^{-1}x_0)|^{1-\frac{m}{n}+\zeta} \\
&\leq \frac{H_1}{(\tau-\sigma)^m} \int_{A_{h,\tau}} (w-h)^m dx + H_1 h^m \tau^{-n\zeta} |A_{h,\tau}|^{1-\frac{m}{n}+\zeta}.
\end{aligned}$$

Isso mostra que $w \in DG_m^+(R_0^{-1}U, H_1, 0, \zeta, 1, h_0)$. Além do mais, considerando $1/2 \leq \sigma < \tau < 1$, vemos que w satisfaz a desigualdade (4.15) com $R_0^{-1}U$ no lugar de U e $y_0 = R_0^{-1}x_0$ no lugar de x_0. Em particular, a desigualdade (4.17) é válida, e um cálculo direto mostra que esse fato implica na desigualdade (4.21). Isso conclui a prova do corolário. □

Observação 64. *Observamos aqui que considerações análogas aplicadas a $v = u - \chi R^\beta$ e $h = k - \chi R^\beta$ em (4.14), com $\beta = \frac{n\zeta}{m}$, fornecem a desigualdade:*

$$\int_{B_{h,\theta}} |Dv|^m \, dx \leq \frac{C}{(R-\theta)^m} \int_{B_{h,R}} (h-v)^m \, dx + C|h|^m R^{-n\zeta} |B_{h,R}|^{1-\frac{m}{n}+\zeta} \tag{4.24}$$

Note que claramente, (4.24) vale para $h \leq -h_0 = -k_0 - \chi R^\beta$.

4.7 Regularidade Hölder

Nesta seção final, iremos mostrar que os resultados da seção anterior podem ser usados para provarmos que Q-minimizantes do funcional

$$\mathscr{F}(u,U) = \int_U f(x,u,Du)dx$$

são localmente Hölder contínuos. Inicialmente, observamos que uma vez provado que Q-mínimos de $\mathscr{F}$ são localmente limitados, então podemos, sem perda de generalidade, supor que a função de densidade f satisfaça, de fato, o seguinte crescimento:

$$|p|^m - \alpha(x,M) \le f(x,u,p) \le L(M)|p|^m + \alpha(x,M), \tag{4.25}$$

onde $M \ge \sup|u|$ e $L(M)$ (ex. $L(M) = \mu + M$) e $\alpha(x,M)$ (ex., $\alpha(x,M) = bM^\gamma + g(x)$) são funções crescentes de M.

A seguinte proposição segue facilmente da prova do Teorema 59.

Proposição 65. *Seja $u \in W^{1,m}_{\text{loc}}(U)$ um Q-mínimio para o funcional $\mathscr{F}$. Suponha que f satisfaz o crescimento (4.25) e, para todo $M > 0$, $\alpha(\cdot,M) \in L^\sigma_{\text{loc}}(U)$ com $\sigma > n/m$. Então, existem constantes $R_0 \in (0,1)$ e $0 < \epsilon < m/n$ tais que, para todo $x_0 \in U$,*

$$\int_{A_{k,\theta}} |Du|^m dx \le \frac{H}{(R-\theta)^m} \int_{A_{k,R}} (u-k)^m dx + H\chi^m |A_{k,R}|^{1-\frac{m}{n}+\epsilon} \tag{4.26}$$

e

$$\int_{B_{k,\theta}} |Du|^m dx \le \frac{H}{(R-\theta)^m} \int_{B_{k,R}} (k-u)^m dx + H\chi^m |B_{k,R}|^{1-\frac{m}{n}+\epsilon}, \tag{4.27}$$

para todo $k \in \mathbb{R}$ e $0 < \theta < R \le R_0$, onde H e χ são funções de M.

Proposição 66. *Seja $u \in L^\infty(U)$ uma função satisfazendo (4.26) para qualquer $k \in \mathbb{R}$. Se $|k_0| + \sup_U |u| \le M$, então para todo $x_0 \in U$:*

$$\sup_{Q_{R/2}} (u-k_0) \le c\left(\frac{1}{R^n}\int_{A_{k_0,R}} (u-k_0)^m dx\right)^{\frac{1}{m}} \left(\frac{|A_{k_0,R}|}{R^n}\right)^{\frac{\alpha}{m}} + c\chi R^\beta, \tag{4.28}$$

onde $0 < \epsilon < m/n$, $n\epsilon = m\beta$ e α é a solução positiva da equação $\alpha^2 + \alpha = \epsilon$.

Demonstração. Vamos supor inicialmente que $k_0 = 0$. Note que (4.26) corresponde a desigualdade (4.15), com χ no lugar de h. Portanto, reproduzindo os argumentos da prova do Teorema 62, obtemos para todo $\sigma < r \leq R$ a estimativa:

$$\int_{A_{k,\sigma}} (u-k)^m dx \leq \frac{c|A_{k,r}|^{\frac{m}{n}}}{(r-\sigma)^m} \int_{A_{k,r}} (u-k)^m dx + c\chi^m |A_{k,r}|^{1+\epsilon}. \tag{4.29}$$

Agora, para $k \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, faça

$$U(k,t) := \int_{A_{k,t}} (u-k)^m dx.$$

Claramente, para cada $h < k$ e $\sigma \leq r$, temos:

$$|A_{k,\sigma}| \leq (k-h)^{-m} U(h,r). \tag{4.30}$$

Lembre que $n\epsilon = m\beta$. Segue então diretamente de (4.29) e (4.30) que

$$\begin{aligned}
U(k,\sigma) &\leq c(r-\sigma)^{-m}|A_{h,r}|^{\frac{m}{n}} U(h,r) + c\chi^m (k-h)^{-m} U(h,r)|A_{h,r}|^{\epsilon} \\
&= c\left[\frac{|A_{h,r}|^{\frac{m}{n}-\epsilon}}{(r-\sigma)^m} + \frac{\chi^m}{(k-h)^m}\right] U(h,r)|A_{h,r}|^{\epsilon} \\
&\leq c\left[\left(\frac{r^{\epsilon}}{r-\sigma}\right)^m + \left(\frac{\chi r^{\beta}}{k-h}\right)^m\right] r^{-n\epsilon} U(h,r)|A_{h,r}|^{\epsilon}.
\end{aligned}$$

Agora, elevando à potência α ambos os lados de (4.30) e em seguida multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por $|A_{k,\sigma}|^{\alpha}$, obtemos:

$$U(k,\sigma)|A_{k,\sigma}|^{\alpha} \leq c\left[\left(\frac{r^{\epsilon}}{r-\sigma}\right)^m + \left(\frac{\chi r^{\beta}}{k-h}\right)^m\right] \frac{r^{-n\epsilon}}{(k-h)^{m\alpha}} U(h,r)^{1+\alpha}|A_{h,r}|^{\epsilon}.$$

Defina

$$\varphi(h,t) = U(k,t)|A_{k,t}|^{\alpha} \quad (k \geq 0,\, t > 0).$$

Portanto, para $\sigma < r \leq R$ e $h < k$, provamos até aqui a seguinte desigualdade:

$$\varphi(k,\sigma) \leq c\left[\left(\frac{r^{\epsilon}}{r-\sigma}\right)^m + \left(\frac{\chi r^{\beta}}{k-h}\right)^m\right] \frac{r^{-n\epsilon}}{(k-h)^{m\alpha}} \varphi(h,r)^{1+\alpha} \quad \big(\alpha(1+\alpha) = \epsilon\big). \tag{4.31}$$

Fixemos agora uma constante $d \geq \chi R^{\beta}$ (a ser escolhida a posteriori), e defina:

$$k_i = d(1-2^{-i}), \quad r_i = \frac{R}{2}(1+2^{-i}) \quad \big(i \in \mathbb{N}\big).$$

Defina

$$\varphi_i := \varphi(k_i, \sigma_i), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Aplicando agora (4.31) com $\sigma = r_{i+1}$, $r = r_i$, $k = k_{i+1}$ e $h = k_i$, obtemos:

$$\varphi_{i+1} \leq c\left[\frac{3^m 2^{(1-\epsilon)m}}{R^{m(1-\epsilon)}} \times 2^{mi} + \frac{2^{(1-2\beta)} 3^{\beta m} R^{\beta m} \chi^m}{d^m} \times 2^{mi}\right] \cdot \frac{2^{n\epsilon}}{R^{n\epsilon}} \times \frac{2^{m\alpha i} \cdot 2^{m\alpha}}{d^{m\alpha}} \varphi_i^{1+\alpha},$$

donde segue que:

$$\varphi_{i+1} \leq \tilde{c} d^{-m\alpha} 2^{mi(1+\alpha)} R^{-n\epsilon} \varphi_i^{1+\alpha}.$$

Podemos agora aplicar o Lema 57 com $d \geq C R^{-\frac{n\epsilon}{m\alpha}} \varphi_0^{1/m}$, onde $C > 0$ é uma constante escolhida convenientemente, e concluir que $\varphi(d, \frac{R}{2}) = 0$. Note que podemos escolher

$$d = \chi R^\beta + c_0 R^{-\frac{n\epsilon}{m\alpha}} \varphi_0^{1/m}.$$

Neste caso, chegamos à seguinte conclusão:

$$\begin{aligned}
\sup_{Q_{R/2}} u(x) \leq d &= c_0 R^{-\frac{n\epsilon}{m\alpha}} |A_{0,R}|^{1/m} \left(\int_{A_{0,R}} u^m dx \right)^{1/m} + \chi R^\beta \\
&= c_0 R^{\frac{n}{m}(1-\frac{\epsilon}{\alpha})} |A_{0,R}|^{1/m} \left(\frac{1}{R^n} \int_{A_{0,R}} u^m dx \right)^{1/m} + \chi R^\beta \\
&\leq c_0 \left(\frac{1}{R^n} \int_{A_{0,R}} u^m dx \right)^{1/m} \left(\frac{|A_{0,R}|}{R^n} \right)^{\frac{\alpha}{m}} + \chi R^\beta.
\end{aligned}$$

Isso prova a proposição para o caso $k_0 = 0$. No caso geral, basta aplicar o resultado já provado para $u - k_0$ em vez de u. □

O próximo lema fornece uma estimativa de decaimento para a medida do conjunto $A_{k,R}$ quando k está próximo do máximo de u.

Lema 67. *Seja $u \in L^\infty(U)$ uma função satisfazendo (4.26) para todo $k \in \mathbb{R}$. Suponha que para algum $\gamma \in (0,1)$,*

$$|A_{k_0,R}| \leq \gamma |Q_R| \quad \textit{para todo } R \in (0, R_0/2),$$

onde $2k_0 = M(2R) + m(2R) := \sup_{Q_{2R}} u + \inf_{Q_{2R}} u$. Se, além disso, existir um inteiro ν tal que

$$\operatorname{osc}(u, 2R) \geq 2^{\nu+1} \chi R^\beta \qquad \big(\beta = n\epsilon/m\big), \tag{4.32}$$

então

$$|A_{\kappa_\nu,R}| \le c|Q_R| \cdot \nu^{-\frac{n(m-1)}{m(n-1)}}, \qquad \kappa_\nu := M(2R) - \frac{\operatorname{osc}(u,2R)}{2^{\nu+1}}. \tag{4.33}$$

Demonstração. Para $k_0 < h < k$, defina para $x \in U$:

$$v(x) := \begin{cases} k-h \text{ se } u \ge k, \\ u-h \text{ se } h < u < k, \\ 0 \text{ se } u \le h. \end{cases}$$

Note que $v \equiv 0$ em $Q_R \setminus A_{k_0,R}$, e como (por hipótese) a medida desse conjunto é maior do que ou igual a $(1-\gamma)|Q_R|$, podemos aplicar a desigualdade de Sobolev com $p=1$ (vide [11, Cap. 3, Sec. 6, Teorema 3.17, (3.35)]) para concluir que

$$\begin{aligned} \left(\int_{Q_R} v^{\frac{n}{n-1}} dx\right)^{1-\frac{1}{n}} &\le c(n)\Big(\frac{|Q_R|}{|Q_R \setminus A_{k_0,R}|}\Big)^{1-\frac{1}{n}} \int_{Q_R} |Dv| dx \\ &\le c(\gamma,n)\int_\Delta |Dv|dx = c(\gamma,n)\int_\Delta |Du|dx, \end{aligned}$$

onde $\Delta = A_{h,R} \setminus A_{k,R}$. Segue daí que:

$$(k-h)|A_{k,R}|^{1-\frac{1}{n}} \le \left(\int_{Q_R} v^{\frac{n}{n-1}} dx\right)^{1-\frac{1}{n}} \le c|\Delta|^{1-\frac{1}{m}}\left(\int_{A_{h,R}} |Du|^m dx\right)^{1/m}. \tag{4.34}$$

Por outro lado, usando (4.26) com $2R$ no lugar de R e R no lugar de θ, deduzimos a seguinte:

$$\begin{aligned} \int_{A_{h,R}} |Du|^m dx &\le \frac{c}{R^m}\int_{A_{h,2R}} (u-h)^m dx + c\chi^m |A_{k,2R}|^{1-\frac{m}{n}+\epsilon} \\ &\le cR^{n-m}\Big(M(2R)-h\Big)^m + c\chi^m R^{n-m+n\epsilon}. \end{aligned}$$

Agora observe que se $h \le \kappa\nu$, então

$$M(2R) - h \ge M(2R) - \kappa_\nu \ge \frac{\operatorname{osc}(u,2R)}{2^{\nu+1}} \ge \chi R^\beta.$$

Combinando estas duas últimas desigualdades com (4.34), obtemos:

$$\begin{aligned} (k-h)|A_{h,R}|^{1-\frac{1}{n}} &\le c|\Delta|^{1-\frac{1}{m}}\Big(R^{\frac{n-m}{m}}\Big(M(2R)-h\Big) + \chi R^{\frac{n-m+n\epsilon}{m}}\Big) \\ &\le c|\Delta|^{1-\frac{1}{m}} R^{\frac{n-m}{m}}\Big(M(2R)-h\Big). \end{aligned}$$

Caminhando para o final da demonstração, apliquemos agora a desigualdade acima com $k = k_i = M(2R) - 2^{-i-1}\text{osc}(u,2R)$ e $h = k_{i-1}$, com $i = 1,2,\dots,\nu$, e em seguida elevemos a potência $m/(m-1)$, para obtermos a estimativa:

$$\left(\frac{\text{osc}(u,2R)}{2^{i+1}}|A_{\kappa_\nu,R}|^{\frac{n-1}{n}}\right)^{\frac{m}{m-1}} \leq \left(\frac{\text{osc}(u,2R)}{2^{i+1}}\right)^{\frac{m}{m-1}}|A_{k_{i-1},R}|^{\frac{m(n-1)}{n(m-1)}}$$

$$\leq c|\Delta_i|R^{\frac{n-m}{m}\cdot\frac{m}{m-1}}\left(\frac{\text{osc}(u,2R)}{2^i}\right)^{\frac{m}{m-1}},$$

que, consequentemente, implica na seguinte estimativa:

$$|A_{\kappa_\nu,R}|^{\frac{m(n-1)}{n(m-1)}} \leq cR^{\frac{n-m}{m-1}}|\Delta_i|,$$

onde $\Delta_i := A_{k_{i-1},R} \setminus A_{k_i,R}$. Finalmente, somando em i ambos os lados dessa desigualdade, de $i = 1$ até $i = \nu$, obtemos:

$$\nu|A_{\kappa_\nu,R}|^{\frac{m(n-1)}{n(m-1)}} \leq cR^{\frac{n-m}{m-1}}\sum_{i=1}^{\nu}|\Delta_i| \leq cR^{\frac{n-m}{m-1}}|A_{k_0,R}| \leq cR^{\frac{m(n-1)}{m-1}},$$

donde segue claramente a desigualdade (4.33). Isso conclui a demonstração do lema. □

Finalmente, chegamos ao principal resultado desse capítulo. Conforme veremos a seguir, o lema anterior desempenhará um papel crucial em sua prova.

Teorema 68. *Seja u uma função limitada satisfazendo (4.26) e (4.27) com $m > 1$ e $k \in \mathbb{R}$. Então u é localmente Hölder-contínua em U.*

Demonstração. Como na demonstração anterior, faça $2k_0 = M(2R) + m(2R)$. Note que podemos sem perda de generalidade supor que $|A_{k_0,R}| \leq \frac{1}{2}|Q_R|$. De fato, caso contrário, ou seja, se $|A_{k_0,R}| > \frac{1}{2}|Q_R|$ então teremos

$$|B_{k_0,R}| = |Q_R| - |A_{k_0,R}| \leq \frac{1}{2}|Q_R|,$$

e nesse caso, será suficiente escrever $-u$ em vez de u já que u é localmente Hölder-contínua se, e só se, $-u$ for.

Façamos agora $\kappa_\nu = M(2R) - \dfrac{\text{osc}(u,2R)}{2^{\nu+1}}$. Segue que

$$\kappa_\nu > k_0.$$

Portanto, podemos aplicar a desigualdade (4.28) com $M = 2\sup|u|$ e κ_ν no lugar de κ_0 para concluir que:

$$\sup_{Q_{R/2}}(u-\kappa_\nu) \leq \left(\frac{c}{R^n}\int_{A_{\kappa_\nu,R}}(u-\kappa_\nu)^m dx\right)^{\frac{1}{m}}\left(\frac{|A_{\kappa_\nu,R}|}{R^n}\right)^{\frac{\alpha}{m}} + c\chi R^\beta,$$

para alguma constante $c > 0$ (que podemos supor $c \geq 2$). A desigualdade acima claramente implica

$$\sup_{Q_{R/2}} (u - \kappa_\nu) \leq c \sup_{Q_R} (u - \kappa_\nu) \Big(\frac{|A_{\kappa_\nu, R}|}{R^n} \Big)^{\frac{\alpha+1}{m}} + c\chi R^\beta. \tag{4.35}$$

Afirmação. Vale que:

$$\operatorname{osc}(u, R/2) \leq \Big(1 - \frac{1}{2^{\nu+2}}\Big) \operatorname{osc}(u, 2R) + c 2^\nu \chi R^\beta. \tag{4.36}$$

De fato, para checar tal afirmação temos dois casos a considerar:

Caso 1. $\operatorname{osc}(u, 2R) \geq 2^{\nu+1} \chi R^\beta$. Neste caso, podemos concluir a partir de (4.33) e (4.35) que

$$M(R/2) - \kappa_\nu \leq \frac{1}{2} \Big(M(2R) - \kappa_\nu \Big) + c\chi R^\beta.$$

Subtraindo ambos os lados da desigualdade acima por $m(R/2)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{osc}(u, R/2) &\leq \kappa_\nu + \frac{1}{2}\Big(M(2R) - \kappa_\nu\Big) - m(R/2) + c\chi R^\beta \\
&\leq M(2R) - \frac{\operatorname{osc}(u, 2R)}{2^{\nu+1}} + \frac{\operatorname{osc}(u, 2R)}{2^{\nu+2}} - m(2R) + c\chi R^\beta \\
&= \Big(1 - \frac{1}{2^{\nu+2}}\Big) \operatorname{osc}(u, 2R) + c\chi R^\beta.
\end{aligned}$$

Caso 2. $\operatorname{osc}(u, 2R) \leq 2^{\nu+1} \chi R^\beta$. Neste caso,

$$\operatorname{osc}(u, R/2) \leq \operatorname{osc}(u, 2R) \leq 2^{\nu+1} \chi R^\beta \leq c 2^\nu \chi R^\beta \leq \Big(1 - \frac{1}{2^{\nu+2}}\Big) \operatorname{osc}(u, 2R) + c 2^\nu \chi R^\beta.$$

Isso conclui a prova da Afirmação.

Por fim, vejamos agora que não há perda de generalidade em supor que $\beta < \delta$, onde

$$\delta = \log_{1/4} \Big(1 - \frac{1}{2^{\nu+2}}\Big).$$

De fato, caso tenhamos $\beta \geq \delta$ então podemos estimar

$$R^\beta = R^{\delta - \epsilon} \cdot R^{\beta - \delta + \epsilon} \leq R_0^{\beta - \delta + \epsilon} R^{\delta - \epsilon}.$$

Consequentemente, a desigualdade (4.36) se torna:

$$\operatorname{osc}(u, R/2) \leq \Big(1 - \frac{1}{2^{\nu+2}}\Big) \operatorname{osc}(u, 2R) + c 2^\nu \chi R_0^{\beta - \delta + \epsilon} R^{\delta - \epsilon}. \tag{4.37}$$

Defina

$$\varphi(R) = \operatorname{osc}(u, 2R).$$

Segue, portanto, de (4.37) que

$$\varphi\Big(\frac{1}{4}R\Big) \leq \Big(\frac{1}{4}\Big)^{\delta} \varphi(R) + BR^{\beta_0},$$

onde

$$\beta_0 = \begin{cases} \beta \text{ se } \beta < \delta \\ \delta - \epsilon \text{ se } \beta \geq \delta \end{cases} \qquad \text{e} \qquad B = c2^{\nu}\chi \max(1, R_0^{\beta-\delta+\epsilon}).$$

Como φ é não-decrescente, podemos agora aplicar o Lema 58 com $q = 1$ para concluir que

$$\varphi(\theta) \leq C\left(\Big(\frac{\theta}{R}\Big)^{\beta_0} \varphi(R) + B\theta^{\beta_0}\right),$$

para todo $\theta < R \leq \min(R_0, \operatorname{dist}(x_0, \partial U))$. Segue então que

$$\operatorname{osc}(u, B_\theta) \leq C_0 \theta^{\beta_0}$$

para todo $B_\theta = B_\theta(x_0) \subset U$ com $\theta < \min(R_0, \operatorname{dist}(x_0, \partial U))$. Pela Proposição 54 segue que u é localmente β_0-Hölder contínua. Isso conclui a prova do Teorema. □

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Uma pergunta natural a ser feita após esse estudo é: **a condição de crescimento (4.2) com mesmos expoentes é realmente necessária para se obter Hölder continuidade para minimizantes?** A seguir ilustraremos um exemplo devido a Mariano Gianquinta [8] que responde satisfatoriamente essa questão.

Exemplo 69. *Suponha, por exemplo, que $f(p)$ seja uma função estritamente convexa satisfazendo a condição de crescimento*

$$c_0(|p|^2-1) \leq f(p) \leq c_1(|p|^4+1). \tag{5.1}$$

É possível encontrar um minimizante u para o funcional (4.1) que seja ilimitada ou Hölder continua? A resposta é sim. Considere a integral variacional

$$\int_{B_{(0,1)}} \left[\sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i}^2 + \frac{1}{2} u_{x_n}^4\right] dx \tag{5.2}$$

onde o integrando é estritamente convexo e satisfaz (5.1). Note que, para $n \geq 6$ a função

$$u(x) = x_n^2 \left(\frac{n-4}{24}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{5.3}$$

faz com que (5.2) seja finita e uma solução fraca para equação de Euler-Lagrange de (5.2). Em outras palavras, u definida em (5.3) é ilimitada e solução fraca de (5.2).

Atualmente, estudos sobre regularidade de minimizantes para funcionais integrais tem sido conduzidos por vários pesquisadores em diversas perspectivas.

Mais recentemente, o trabalho [17] publicado em 18 de março de 2024, estabelece Hölder continuidade global para minimizantes u do funcional

$$\mathcal{J}_K(u) := \iint_{\mathbb{R}^{2n}\setminus(U^c)^2} K(x,y)|u(y)-u(x)|^2 \, dydx + |\{u>0\} \cap U|,$$

com $U \subset \mathbb{R}^n$ sendo um domínio limitado e $K(x,y)$ é um núcleo mensurável satisfazendo a condição de elipticidade

$$(1-s)\frac{\lambda}{|x-y|^{d+2s}} \leq K(x,y) \leq (1-s)\frac{\Lambda}{|x-y|^{d+2s}}, \quad x,y \in \mathbb{R}^n,$$

para algum $s \in (0,1)$ e $0 < \lambda < \Lambda$ e também satisfazendo a condição e simetria

$$K(x,y) = K(y,x).$$

No resultado principal do trabalho é provado que existe $\alpha \in (0,1)$, $C > 0$, e $r > 0$, dependendo somente de n, s, λ e Λ tais que

$$\|u\|_{C^\alpha(B_{r/2}(x_0))} \leq C\left(\left(\fint_{B_r(x_0)} u^2\, dx\right)^{1/2} + \mathrm{Tail}(u;x_0,r/2)\right), \quad x \in B_{r/2}(x_0),$$

onde para algum $R > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se define

$$\mathrm{Tail}(u;x_0,R) = R^{2s}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_R(x_0)} \frac{u(x)}{|x-x_0|^{n+2s}}.$$

Em [16], publicado em 23 de novembro de 2023, é estabelecido regularidade Lipschitz ótima para Q-minimizantes do funcional

$$\mathcal{J}_G(u,U) := \int_U (G(|Du|) + \chi_{\{u>0\}})\, dx,$$

onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e $G : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é uma função de Young com $G' = g$ satisfazendo a condição clássica de Lieberman, i.e.,

$$\delta \leq \frac{tg'(t)}{g(t)} \leq g_0 \quad \text{para alguma constante} \quad 1 < \delta \leq g_0 < \infty.$$

O trabalho [10], publicado por Giuseppe Grimaldi em 29 de dezembro de 2023, considera os minimizantes $u : U \to \mathbb{R}^n$ do funcional integral

$$\mathcal{F}(u) := \int_U \frac{1}{p}(|Du(x)|_{\gamma(x)} - 1)_+^p\, dx \tag{5.4}$$

para $p > 1$, onde $U \subset \mathbb{R}^m$ é um domínio limitado, com $m \geq 2$. Aqui, a norma $|\cdot|_{\gamma(x)}$ é definida por $|\xi|^2_{\gamma(x)} := \langle \xi,\xi\rangle_{\gamma(x)}$, onde

$$\langle \xi,\eta\rangle_{\gamma(x)} := \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha\beta=1}^{m} \gamma_{\alpha\beta}\xi^i_\alpha\eta^i_\beta, \quad \forall \xi\eta \in \mathbb{R}^{nm}.$$

Além disso, os coeficientes $\gamma_{\alpha\beta} : U \to \mathbb{R}$ são C^1 e satisfazem certas condições de simetria e elipticidade. O resultado principal desse trabalho, mostra que tomando $p > 1$ e $u \in W^{1,p}_{loc}(U,\mathbb{R}^m) \cap W^{1,\infty}_{loc}(U,\mathbb{R}^m)$ uma solução fraca do sistema de Euler-Lagrange de (5.4) dado por

$$\sum_{\alpha\beta=1}^{m} D_\alpha[h(|Du|_\gamma)_{\gamma_{\alpha\beta}} D_\beta u^i] = 0 \tag{5.5}$$

onde $h(t) := \frac{(t-1)_+^{p-1}}{t}$, para $t > 0$, então, $\mathcal{K}(x,Du) \in C^0(U)$ para qualquer função contínua $\mathcal{K} : U \times \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}$ se anulando no conjunto $\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{mn}; |\xi|_{\gamma(x)} \leq 1\}$.

Regularidade de minimizantes de funcionais não-lineares, considerando condições semelhantes às abordadas nesse trabalho, vem sendo alvo de estudo por muitos matemáticos da atualidade. Nos três trabalhos apresentados anteriormente, é possível reconhecer algumas similaridades entre o problema estudado por esses autores e essa dissertação. Vislumbramos para o futuro próximo continuar pesquisando sobre tais problemas.

REFERÊNCIAS

[1] BOTELHO, Geraldo; PELLEGRINO, Daniel; TEIXEIRA, Eduardo. **Fundamentos de análise funcional.** Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[2] BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.** New York: Springer, 2011.

[3] CITTI, Giovanna *et al.* **Harmonic and geometric analysis.** Basel: Birkhäuser, 2015.

[4] EVANS, Lawrence C. **Partial differential equations.** Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2022.

[5] GIORGI, Enio de. **Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipliregolari.** Torino: Accademia delle Scienze, 1957.

[6] GIAQUINTA, Mariano; GIUSTI, Enrico. **On the regularity of the minima of variational integrals**. Italy: University of Firenze, 1982.

[7] GIAQUINTA, Mariano; GIUSTI, Enrico. Quasi-minima. **Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire,** Paris, v. 1, n. 2, p. 79-107, 1984.

[8] GIAQUINTA, Mariano. Growth conditions and regularity, a counterexample. **Manuscripta mathematica,** Berlin, v. 59, n. 2, p. 245–248, 1987.

[9] GILBARG, David *et al.* **Elliptic partial differential equations of second order.** Berlin: Springer, 1977.

[10] GRIMALDI, Antonio Giuseppe. Higher regularity for minimizers of very degenerate convex integrals. **Nonlinear Analysis**, Netherlands, v. 242, p. 113520, 2024.

[11] GIUSTI, Enrico. **Direct methods in the calculus of variations**. River Edge, N. J.: World Scientific, 2003.

[12] HAN, Qing; LIN, Fanghua. **Elliptic partial differential equations**. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2011.

[13] LADYZHENSKAYA, Olga A.; URAL'TSEVA, Nina N. Quasi-linear elliptic equations and variational problems with many independent variables. **Russian Mathematical Surveys**, Russia, v. 16, n. 1, p. 16-17, 1961.

[14] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise vol 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. (Projeto Euclides).

[15] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise vol. 2**. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. (Projeto Euclides).

[16] SILVA, João Vitor da; SILVA, Analía; VIVAS, Hernán. Lipschitz regularity of almost

minimizers in a Bernoulli problem with non-standard growth. **arXiv.org,** [Ithaca, N. Y.], 2023.Disponível em: https://arxiv.org/abs/2311.14207. Acesso em: 01 de abr. de 2023.

[17] SNELSON, Stanley; TEIXEIRA, Eduardo V. Regularity and nondegeneracy for nonlocal Bernoulli problems with variable kernels. **arXiv.org,** [Ithaca, N. Y.], 2024. Disponível em: https://arxiv.org/abs/2403.11937. Acesso em: 01 de abr. de 2023.

[18] STEIN, Elias M.; SHAKARCHI, Rami. **Real analysis**: measure theory, integration, and Hilbert spaces. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 2009.