UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JORGE HERBERT SOARES DE LIRA

HIPERSUPERFÍCIES IMERSAS EM H^{n+1} (-1) COM CURVATURA MÉDIA CONSTANTE E BORDO PLANAR

FORTALEZA
1997

JORGE HERBERT SOARES DE LIRA

HIPERSUPERFÍCIES IMERSAS EM H^{n+1} (-1) COM CURVATURA MÉDIA CONSTANTE E BORDO PLANAR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Antonio Gervasio Colares.

FORTALEZA

1997

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L745h Lira, Jorge Herbert Soares de.
Hipersuperfícies imersas em Hn+1 (-1) com curvatura média constante e bordo planar / Jorge Herbert Soares de Lira. – 1997.
24 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 1997.
Orientação: Prof. Dr. Antonio Gervasio Colares.

1. Geometria diferencial. I. Título.

CDD 510

JORGE HERBERT SOARES DE LIRA

HIPERSUPERFÍCIES IMERSAS EM H^{n+1} (-1) COM CURVATURA MÉDIA CONSTANTE E BORDO PLANAR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Antonio Gervasio Colares.

Aprovada em: 28/02/1997.

BANCA EXAMINADORA

____

Antonio Gervasio Colares (Orientador)

____

João Lucas Marques Barbosa

____

Wayne Fremont Rossman

FORTALEZA

1997

“How should you walk in that space and know
Nothing of the madness of space,
Nothing of its jocular procreations?”

Wallace Stevens

“As coisas que não existem são mais bonitas”.

Manoel de Barros.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e a Socorro Soares, pela benção permanente do amor. A Fábio, por suas serenas admoestações. Aos amigos, que suportaram, com paciência e humor, estes dois anos de riso e choro; em particular a Amauri, Barnabé, Carlos Alberto, Givaldo, Jurandir, Mary, Rosângela, Webster e a quem mais estiver injustamente incluído neste "quem mais". E "last, but not least" ao professor Gervásio Colares pela pujança exemplar e pelas aulas, no sentido mais amplo. Aos professores Abdênago, Levi e Sebastião por aplacarem minha ignorância. Aos funcionários do Departamento de Matemática, em especial a Tavares e Deca. A Mozart, a Nossa Senhora e a Deus.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Pretendemos apresentar, nesta monografia, dois resultados em que se estabelecem condições suficientes para que uma variedade "herde" as simetrias do seu bordo.

Para maior precisão, enunciamos, abaixo, os teoremas supracitados.

O primeiro, que faz parte do paper [BE], é como segue:

Teorema 2.7: Seja $x: M^n \to \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão com curvatura média constante cuja fronteira é uma subvariedade $(n-1)$-dimensional Γ de $\overline{M}$, fechada e mergulhada. Suponhamos que Γ é invariante por $\{\psi(t)\}$, subgrupo a um parâmetro de isometrias de $\overline{M}$. Então, se x é estável, $x(M)$ é invariante sob ação de $\{\psi(t)\}$.

Aqui são empregados teoremas sobre estabilidade encontrados em [BdCE], aplicados à situação particular em que o espaço ambiente tem curvatura seccional constante.

O teorema seguinte, válido em $H^{n+1}(-1)$, e incluído em [NR], afirma:

Teorema 3.2: Seja M^n hipersuperfície compacta, mergulhada em $H^{n+1}(-1)$, de curvatura média constante não-nula h. Suponhamos que $\Gamma := \partial M$ seja uma subvariedade convexa de um hiperplano geodésico N e que M seja transversal a N ao longo de Γ. Então M é simétrica em relação a todos os hiperplanos de simetria de Γ.

Para a demonstração do teorema **3.2**, são adaptados, para o espaço hiperbólico, a fórmula do fluxo, bem como teoremas enunciados em [BMRS]. Além disso, fazemos uso do princípio de reflexão de Alexandrov, como descrito em [Al].

Em seguida, demonstramos o seguinte corolário do teorema **3.2**:

Corolário 3.4: Seja M uma hipersuperfície compacta, mergulhada em $H^{n+1}(-1)$ tal que $\Gamma := \partial M$ é uma esfera de codimensão 2 e raio hiperbólico ρ. Se M tem curvatura média constante $h = \coth(\rho)$, então M está contida em uma hiperesfera de raio ρ.

Em condições similares às do Teorema **3.2**, mas em outra direção, temos:

Teorema 4.1: Seja M uma hipersuperfície compacta, conexa, mergulhada em $H^{n+1}(-1)$, de curvatura média constante não-nula h. Suponhamos que $\Gamma := \partial M$ é uma hipersuperfície de um hiperplano P de $H^{n+1}(-1)$, e que Γ limita, em P, um domínio estritamente convexo D. Se M é localmente o gráfico de uma função não-negativa f sobre uma vizinhança U de Γ em D, então M é um gráfico sobre D.

Este teorema, enunciado em [BE], usa essencialmente, as mesmas técnicas do anterior.

1. Preliminares

Seja $\overline{M}^{n+1}(c)$ uma variedade riemanniana com curvatura seccional constante c, onde $c \in \{-1, 0, 1\}$. Identificando $\overline{M}$ com uma subvariedade aberta, completa e simplesmente conexa, podemos representá-la como segue:

a) se c = 0, $\overline{M}$ é subvariedade de $R^{n+1} := \{X \in R^{n+2}; \langle X, U\rangle = 0\}$ onde U é vetor de R^{n+2} arbirariamente fixado;

b) se c = 1, $\overline{M} \subset S^{n+1}(1) = \{X \in R^{n+2}; \langle X, X\rangle = 1\}$;

c) se c = -1, $\overline{M} \subset \{X = (x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) \in L^{n+2}; \langle X, X\rangle = -1 \text{ e } x_0 > 0\}$, onde L^{n+2} é o espaço de Lorentz $(n+2)$-dimensional.

Para $c \geq 0$, $\langle\ ,\ \rangle$ representa a métrica euclidiana. Quando c = -1, $\langle\ ,\ \rangle$ corresponde à métrica $ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + \ldots + dx_{n+1}^2$.

Sejam, agora, M^n uma variedade diferenciável com bordo ∂M, e $x: M \to \overline{M}$ uma imersão de M. Consideremos, doravante, M munida da métrica induzida por x, a partir da métrica de $\overline{M}$.

Da forma local das imersões, sabemos ser possível encontrar um conjunto aberto V do espaço ambiente, intersectando $x(M)$, tal que $V \cap x(M)$ é mergulhada em $\overline{M}$, e onde estejam definidos campos $e_0, e_1, \ldots, e_{n+1}$, diferenciáveis, satisfazendo:

(i) $|\langle e_i, e_j\rangle| = \delta_{ij}, \forall i, j, 0 \leq i, j \leq n+2$;

(ii) $e_1, \ldots, e_n$ tangentes a $x(M)$, em cada ponto de $V \cap x(M)$;

(iii) $e_0 = x$, se $c \neq 0$ e $e_0 = U$ quando c = 0.

Denominamos $\{e_i; 1 \leq i \leq n\}$ de referencial ortonormal local. Como definido acima, e_{n+1} é um campo normal a $x(M)$ nos pontos de $V \cap x(M)$.

Denotamos por ε_i o número $\langle e_i, e_i\rangle$, $\forall i$ de modo que $\varepsilon_0 = -1$ quando c = -1.

Se $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{n+1}$ são as formas duais do referencial $\{e_i\}$, ou seja, se satisfazem $\theta_i(e_j) = \delta_{ij}$ em cada ponto de V, então podemos expressar a diferencial de x por

$$\textbf{(1.1)} \qquad dx = \sum_{i=1}^{n} \theta_i e_i,$$

uma vez que $dx_p(T_pM) = T_{x(p)}x(M), \forall p \in M$.

As diferenciais das aplicações $e_i : V \subset R^{n+2} \to R^{n+2}$ permitem-nos definir, em V, as formas de conexão θ_{ij} do seguinte modo:

$$\textbf{(1.2)} \qquad de_i = \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon_j \theta_{ij} e_j, \ \forall i.$$

É fácil ver que as formas θ_{ij} são anti-simétricas, ou seja, $\theta_{ij} = -\theta_{ji}$.

É igualmente conhecido que as formas θ_{ij} são as únicas a satisfazer as equações

$$\textbf{(1.3)} \qquad d\theta_i = \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon_j \theta_{ij} \Lambda \theta_j, \ 0 \le i \le n+1,$$

$$\textbf{(1.4)} \qquad \theta_{ij} = -\theta_{ji},$$

onde $d\theta_i$ simboliza a diferencial exterior de $\theta_i, \forall i$.

Doravante, trataremos indistintamente as formas θ_i, θ_{ij} e as formas obtidas sobre M pelo pull-back de x. Portanto, como $\theta_{n+1} \equiv 0$ quando restrita a M, teremos $d\theta_{n+1} = 0$. Então, aplicando o lema de Cartan à equação **(1.3)** para i = n + 1, temos, para os pontos de M, a equação

$$\textbf{(1.5)} \qquad \theta_{n+1,i} = \sum_{j=0}^{n+1} h_{ij} \theta_j = \sum_{j=1}^{n} h_{ij} \theta_j, \ 1 \le i \le n,$$

com $h_{ij} = h_{ji}$.

A segunda forma fundamental da imersão x é dada por

$$\textbf{(1.6)} \qquad B = \langle de_{n+1}, dx \rangle = \sum_{i=1}^{n} \theta_{n+1,i} \otimes \theta_i.$$

Reunindo **(1.5)** e **(1.6)**, podemos escrever

(1.7) $$B = \sum_{i,\, j=1}^{n} h_{ij}\theta_i \otimes \theta_j,$$

uma vez que $h_{ij} = h_{ji}$.

O traço de B em relação à base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, quando multiplicado por $\left(-\frac{1}{n}\right)$, define a curvatura média de x; isto é,

(1.8) $$h := -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_{ii}.$$

É fácil verificar que o campo definido pelo vetor curvatura média he_{n+1} independe da escolha do referencial $\{e_i; 1 \leq i \leq n\}$, fornecendo, então, um campo normal a M, globalmente definido. Se $h \neq 0$ em M, então M é orientável.

Neste caso $N := \frac{he_{n+1}}{|h|}$ dá uma orientação a M.

Fixemos $e_{n+1} = N$. Assim sendo, combinando as equações **(1.2)** e **(1.5)**, temos

$$dN = \sum_{i,i=1}^{n} h_{ij}\theta_i e_j,$$

para os pontos de M.

Agora, sejam as funções $g: M \to R$ e $\bar{g}: M \to R$ dadas por $g(p) = \langle x(p), V\rangle$ e $\bar{g}(p) = \langle N(p), V\rangle$, onde V é o transporte paralelo de um vetor arbitrariamente fixado em R^{n+2} (ou L^{n+2}, para c = -1). Os laplacianos destas funções, calculados com relação a M, são dados por

(1.11) $$\Delta g = nh\bar{g} - ncg;$$

(1.12) $$\Delta \bar{g} = -\|B\|^2 \bar{g} + nchg + \langle \nabla h, V\rangle.$$

Deduzamos a primeira destas expressões: usando a equação **(1.1)**, temos

$$dg = d\langle x, V\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, V\rangle \theta_i = \sum g_i \theta_i$$

A derivada covariante desta 1 - forma é dada pelas componentes

$$Dg_i = dg_i + \sum_{j=i}^{n} g_j \theta_{ji} = \langle de_i, V\rangle + \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, V\rangle \theta_{ji}.$$

Usando a equação **(1.2),** temos

$$Dg_i = \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon_K \langle e_k, V\rangle \theta_{ik} + \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, V\rangle \theta_{ji}.$$

Entretanto, como $e_0 = x$ quando $c \neq 0$, temos $\theta_{0i} = \theta_i$; por outro lado, para $c = 0$, $\theta_{0i} = 0$, já que $e_0 = U$ = constante. Assim, lembrando que $\theta_{ij} = -\theta_{ji}$, temos

$$\begin{aligned} Dg_i &= -c\langle e_0, V\rangle \theta_i + \langle e_{n+1}, V\rangle \theta_{i,\,n+1} = \\ &= -cg\theta_i - \left(\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\theta_j\right)\overline{g} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\theta_j \end{aligned}$$

Portanto, $\Delta g = \sum_{i=1}^{n} g_{ii} = -ncg - \overline{g}\sum_{i=1}^{n} h_{ii} = -ncg + nh\overline{g}$.

Agora, utilizando a equação **(1.9)**, obtemos

$$d\overline{g} = d\langle N, V\rangle = \langle dN, V\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\langle e_j, V\rangle\right)\theta i = \sum_{i=1}^{n} \overline{g}_i\theta_i.$$

Assim, $D\overline{g}_i = \sum_{j=1}^{n} Dh_{ij}\langle e_j, V\rangle + \sum_{j=1}^{n} h_{ij} D\langle e_j, V\rangle$,

onde $Dh_{ij} = dh_{ij} + \sum_{k=1}^{n} h_{kj}\theta_{ki} + \sum_{k=1}^{n} h_{ik}\theta_{kj} = \sum_{k=1}^{n} h_{ijk}\theta_k$.

Escrevemos, então

$$\begin{aligned} D\overline{g}_i &= \sum_{j,\,k=1}^{n} h_{ijk}\langle e_j, V\rangle\theta_k + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\left\{d\langle e_j, V\rangle + \sum_{k=1}^{n}\langle e_k, V\rangle\theta_{kj}\right\} = \\ &= \sum_{j,\,k=1}^{n} h_{ijk}\langle e_j, V\rangle\theta_k + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\left\{\sum_{\ell=0}^{n+1}\varepsilon_\ell\langle e_\ell, V\rangle\theta_{j\ell} + \sum_{k=1}^{n}\langle e_k, V\rangle\theta_{kj}\right\} = \\ &= \sum_{j,\,k=1}^{n} h_{ijk}\langle e_j, V\rangle\theta_k + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\left\{\varepsilon_0\langle e_0, V\rangle\theta_{j0} + \langle e_{n+1}, V\rangle\theta_{j,\,n+1}\right\} = \\ &= \sum_{j,\,k=1}^{n} h_{ijk}\langle e_j, V\rangle\theta_k + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\left\{-cg\theta_j - \overline{g}\sum_{k=1}^{n} h_{jk}\theta_k\right\} = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n} h_{ijk}\langle e_j, V\rangle - cgh_{ik} - \overline{g}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}h_{jk}\right\}\theta_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{g}_{ik}\theta_k. \end{aligned}$$

Assim

$$\Delta\overline{g} = \sum_{i=1}^{n} \overline{g}_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n} h_{iji}\langle e_j, V\rangle - cgh_{ii} - \overline{g}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}h_{ji}\right\}.$$

Entretanto, as equações de Codazzi para hipersuperfícies de formas espaciais implicam $h_{iji} = h_{iij}$. Portanto,

$$\Delta \bar{g} = \sum_{i,\, j=1}^{n} h_{iij} \langle e_j, V \rangle - cg \sum_{i=1}^{n} h_{ii} - \bar{g} \sum_{i,\, j=1}^{n} h_{ij} h_{ji}$$

e, assim:

$$\Delta \bar{g} = \langle \nabla h, V \rangle + ncgh - \bar{g} \|B\|^2$$

Agora, se escrevermos $x = \sum_{\alpha=0}^{n+1} g_\alpha e_\alpha = \sum_{\alpha=0}^{n+1} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$ e $N = \sum_{\alpha=0}^{n+1} \bar{g}_\alpha e_\alpha = \sum_{\alpha=0}^{n+1} \langle N, e_\alpha \rangle e_\alpha$, definiremos $\Delta x := \sum_{\alpha=0}^{n+1} \Delta g_\alpha e_\alpha$ e $\Delta N = \sum_{\alpha=0}^{n+1} \Delta \bar{g}_\alpha e_\alpha$. Logo, das fórmulas **(1.11)** e **(1.12)**, deduzimos

(1.13) $\quad \Delta x = nhN - ncx;$

(1.14) $\quad \Delta N = -\|B\|^2 N + nchx + \nabla h.$

2. Estabilidade e simetria em formas espaciais

Sejam $\overline{M}^{n+1}$ variedade Riemanniana orientada, e M^n variedade diferenciável com bordo ∂M, orientável, compacta e conexa. Seja, ainda, uma imersão isométrica $x: M \to \overline{M}$, de curvatura média constante h, levando ∂M, difeomorficamente, sobre a variedade $(n-1)$- dimensional Γ de $\overline{M}$.

Seja $\varepsilon > 0$. Consideremos, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, uma imersão x_t de M em $\overline{M}$. Se $x_0 = x$ e a aplicação $X:(-\varepsilon,\varepsilon) \times M \to \overline{M}$ definida por $X(t,p) := x_t(p), \forall t, \forall p,$ for diferenciável, então X é dita uma variação de x. Além disso, quando $x_t|_{\partial M} = x|_{\partial M}, \forall t$, dizemos que X deixa fixo o bordo de M.

Em correspondência a uma variação X de x que deixa fixo o bordo de M, definimos a função área $A:(-\varepsilon,\varepsilon) \to R$ como

$$A(t) := \int_M dM_t,$$

onde dM_t é o elemento de volume de M induzido pela imersão x_t.

Definimos, também, a função volume $V:(-\varepsilon,\varepsilon) \to R$ por

$$V(t) := \int_{[0,t]\times M} X^* d\overline{M},$$

onde $d\overline{M}$ é o elemento de volume de $\overline{M}$.

É fácil ver que $A(t)$ e $V(t)$ são funções diferenciáveis.

Dizemos que X preserva volume quando $V(t) = V(0), \forall t$.

Sejam N o campo unitário normal a M, globalmente definido, correspondente à orientação de M, e $W(p) = \frac{\partial X}{\partial t}(0, p)$ o campo variacional da variação X; a componente normal deste último é dada por fN, onde f é a função $f(p) = \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(0,p), N(p) \right\rangle$.

Com esta notação, temos

$$A'(0) = -\int_M nhf \, dM \text{ e } V'(0) = \int_M f \, dM .$$

Estas fórmulas são demonstradas em [La] e [BdCE], respectivamente.

Por fim se $h_0 := \dfrac{\int_M h\, dM}{\int_M dM}$, então definimos $J(t) := A(t) + nh_0 V(t),\ \forall t$.

Em [BdCE], encontra-se a seguinte proposição:

Proposição 2.1: Seja $x: M^n \to \overline{M}^{n+1}$ imersão com curvatura média constante, e X uma variação de x, fixando o bordo de M e preservando volume. Então $J''(0)$ depende apenas de $f = \langle W, N \rangle$ e é dada por

$$J''(0)(f) = \int_M \left[-f\Delta f - \left(\overline{R}(N) + \|B\|^2 \right) f^2 \right] dM,$$

onde Δ é o laplaciano na métrica de M, $\|B\|$ é a norma da segunda forma fundamental de x, e $\overline{R}(N) = n \cdot \overline{Ricc}(N)$, onde $\overline{Ricc}(N)$ é a curvatura de Ricci de $\overline{M}$ na direção N.

A primeira parte desta proposição nos permite definir uma forma quadrática I sobre o conjunto F das funções $f: M \to R$, diferenciáveis, tais que $f|_{\partial M} \equiv 0$ e $\int_M f\, dM = 0$, por

$$I(f) = \int_M \left[-f\Delta f - \left(\overline{R}(N) + \|B\|^2 \right) f^2 \right] dM.$$

Para $f \in F(M)$, é assegurada, em [BdCE], a existência de uma variação de x, preservando o volume, tal que $W = fN$.

Definimos, a seguir, estabilidade de imersões.

Definição 2.2: Seja $x: M \to \overline{M}$ uma imersão de curvatura média constante h. A imersão x é estável quando $A''(0) > 0$ para toda variação de x que preserva volume.

A próxima proposição, também enunciada em [BdCE], relacionada o conceito de estabilidade com a forma I definida acima.

Proposição 2.3: A imersão $x: M \to \overline{M}$ é estável se e somente se $I(f) > 0,\ \forall f \in F(M)$.

Exemplos de hipersuperfícies estáveis são os discos geodésicos de hipersuperfícies umbílicas em variedades de curvatura seccional constante; a seguir, esboçamos uma demonstração deste fato.

Sejam N hipersuperfície umbílica de $\overline{M}^{n+1}(c)$, M disco geodésico de N e x = inclusão: M→N. Como M é umbílica, temos $\|B\|^2 = nh^2$ e $\overline{Ricc}(N) = c$; além disso, a curvatura seccional de M é $h^2 + c$. Assim, para $f \in F(M)$, temos

$$I(f) = -\int_M \left[f\Delta f + n\left(h^2 + c\right)f^2 \right] dM.$$

Estudemos o caso em que $h^2 + c \leq 0$.

Temos, pelo teorema da divergência, que

$$\int_M \left(f\Delta f + |\nabla f|^2 \right) = \int_{\partial M} f\langle \upsilon, \nabla f \rangle,$$

onde υ é a conormal de M ao longo de ∂M. Como $f|_{\partial M} \equiv 0$, teremos

$$-\int_M f\Delta f = \int_M |\nabla f|^2 \geq 0.$$

Assim, concluímos que

$$I(f) \geq 0.$$

Agora, se $h^2 + c > 0$, é fácil ver que M está contida numa esfera euclidiana S, de codimensão 1, com curvatura seccional $K = h^2 + c$.

Listamos, abaixo, alguns fatos cujas demonstrações podem ser encontradas em [BGM], por exemplo.

O problema $\Delta_S f + \lambda f = 0$ para f satisfazendo $\int_S f \, dS = 0$ (neste caso, $\partial S = \emptyset$) tem como primeiro antovalor o número $\lambda_1(S) = nK$.

A mesma solução vale para o disco geodésico máximo $S \setminus \{p\}$, onde p é um ponto qualquer de S, ou seja, $\lambda_1(S \setminus \{p\}) = nK$ (consideremos, aqui, as funções f satisfazendo $\int_S f \, dS = 0$, e $f(p) = 0$.

Escolhendo $p \in S \setminus M$, concluímos que o problema $(*)\begin{cases} \Delta f + \lambda f = 0 \\ f|_{\partial M} \equiv 0 \\ \int_M f \, dM = 0 \end{cases}$ tem como primeiro autovalor um número $\lambda_1(M)$ satisfazendo $\lambda_1(M) > \lambda_1(S \setminus \{p\}) = nK$.

Então, para $f \in F(M)$, e λ autovalor de (*) associado a f, teremos

$$
\begin{aligned}
I(f) &= -\int_M \left[f\Delta f + n\left(h^2 + c\right)f^2 \right] dM = \\
&= -\int_M \left[f(-\lambda f) + n\left(h^2 + c\right)f^2 \right] dM = \\
&= \int_M \left[\lambda - n\left(h^2 + c\right)\right] f^2 \, dM \geq \int_M \left[\lambda_1(M) - nK\right] f^2 \, dM > 0
\end{aligned}
$$

Definição 2.4: Um campo normal $W = fN$, $f \in F(M)$, é um campo de Jacobi se $f \in \operatorname{Ker} I$.

Uma condição suficiente para que fN seja campo de Jacobi é dada pela seguinte proposição:

Proposição 2.5: Seja $f \in F(M)$ Então fN é campo de Jacobi se e somente se $\Delta f + \left(\overline{R} + \|B\|^2\right) f = \text{constante}$.

Doravante, $\overline{M}$ será variedade de curvatura seccional constante c, com $c \in \{-1, 0, 1\}$.

Seja, então, $\{\psi(t)\}$ subgrupo a um parâmetro de isometrias de $\overline{M}^{n+1}(c)$ tal que $\psi(t)(\Gamma) \subset \Gamma$, $\forall t$. Para $c \leq 0$, $\{\psi(t)\}$ é um conjunto de transformações lineares de R^{n+2}, as quais podemos representar por matrizes que dependam diferenciavelmente de t.

Podemos afirmar que a correspondência $t \mapsto \psi(t)$ é diferenciável. É imediato que $\psi'(t) = \psi(t) \circ \psi'(0)$.

Quando c = 1, as isometrias $\psi(t)$ são restrições, a $S^{n+1}(1)$, de transformações lineares ortogonais e, assim, $t \mapsto \psi(t)$ é também diferenciável.

Suponhamos que $x(M)$ não seja invariante sob ação de $\{\psi(t)\}$. Assim sendo, a aplicação $X(t,p) := \psi(t) \cdot x(p)$ é uma variação não-trivial de x. De fato, $x_t = \psi(t) \circ x : M \to \overline{M}$ é uma imersão, e $x_0 = Id \circ x = x$. Além disso, por hipótese, existe (t, p) tal que $\psi(t) \cdot x(p)$ não pertence a $x(M)$.

Temos que $\dfrac{\partial X}{\partial t}(0,p) = \alpha'(0)$, onde $\alpha(t)$ é a curva, em $\overline{M}$, dada por

$\alpha(t) = \psi(t)\cdot x(p)$. Portanto, $\frac{\partial X}{\partial t}(0,p) = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(h)-\alpha(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\psi(h)\cdot x(p) - x(p)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{(\psi(h)-\mathrm{Id})}{h}\cdot x(p) = \psi'(0)\cdot x(p)$.

Nas igualdades acima, usamos o fato de que α é uma curva em R^{n+2}, bem como a correspondência entre os elementos de $\{\psi(t)\}$ e matrizes reais de que já falamos antes.

Seja, agora, a função $f{:}M\to R$ definida por $f(p) = \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(0,p), N(p)\right\rangle$, onde N é o campo normal a M.

Se $p \in \partial M$, a curva $\alpha(t)$, como definida acima, está inteiramente contida em Γ e, portanto, em $x(M)$. Logo $\langle \alpha'(0), N(p)\rangle = 0$, ou seja, $\left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(0,p), N(p)\right\rangle = 0, \forall p \in \Gamma$.

Verificamos, desta forma, que $f|_{\partial M} \equiv 0$.

Como demonstrado em [BdCE], temos que $V'(t) = \int_M \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(t,p), N_t(p)\right\rangle dM$, onde N_t é o campo normal a $x_t(M)$, dado por $\psi(t)\cdot N(p)$.

Entretanto, $\left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(t,p), N_t(p)\right\rangle = \langle \psi(t)\,\psi'(0)\cdot x(p), \psi(t)\cdot N(p)\rangle = \langle \psi'(0)\,x(p), N(p)\rangle = 0$.

Assim, $V'(t) = 0, \forall t$.

Devemos demonstrar que f satisfaz $\Delta f + \|B\|^2 f + ncf = 0$. Como $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante c, isto equivale a mostrar que fN é campo de Jacobi.

Para fixar as idéias, tomemos c = -1. Neste caso, cada $\psi(t)$ é uma isometria do espaço de Lorentz L^{n+2}. Assim, se $\langle\, , \rangle$ é o produto interno deste espaço, então $\langle \psi(t)\cdot V, \psi(t)\cdot W\rangle = \langle V, W\rangle, \forall\, V, W \in L^{n+2}, \forall t$. Derivando ambos os lados da expressão acima com relação a t, obtemos, em t = 0, que $\langle \psi'(0)\cdot V, W\rangle + \langle V, \psi'(0)\cdot W\rangle = 0$, uma vez que $\psi(0) = \mathrm{Id}$. Donde, se definirmos $Q(V,W) := \langle \psi'(0)\cdot V, W\rangle$, teremos uma forma bilinear anti-simétrica em L^{n+2}.

Por outro lado, podemos escrever

$$f(p) = Q(x(p), N(p)), \forall p \in M.$$

Daí, fazendo uso de um referencial adaptado a $x(M)$, denotado por $\{e_i\}$, encontramos

(2.1) $$\Delta f = Q(\Delta x, N) + Q(x, \Delta N) + 2Q(dx, dN).$$

Contudo, de acordo com as fórmulas **(1.13)** e **(1.14)**, obtemos

(2.2) $$Q(\Delta x, N) = nhQ(N, N) + nQ(x, N) = nQ(x, N)$$

(2.3) $$Q(x, \Delta N) = -nhQ(x, x) - \|B\|^2 Q(x, N) = -\|B\|^2 Q(x, N).$$

E, devido às expressões **(1.1)** e **(1.9)**, temos

(2.4) $$Q(dx, dN) = \sum_{i,j} h_{ij}\theta_i\theta_j Q(e_i, e_j).$$

Como $h_{ij} = h_{ji}$ e $Q(e_i, e_j) = -Q(e_j, e_i)$, o somatório em **(2.4)** é nulo, ou seja,

(2.5) $$Q(dx, dN) = 0.$$

Assim, substituindo **(2.2)**, **(2.3)**, **(2.5)** em **(2.1)**, temos a equação desejada

$$\Delta f = nQ(x, N) - \|B\|^2 Q(x, N) = nf - \|B\|^2 f.$$

Os casos c = 0 e c = 1 são abordados analogamente; a mudança essencial é apenas a do espaço ambiente, que passa a ser R^{n+2}.

Reunindo estas observações, temos a proposição abaixo:

Proposição 2.6: Sejam M, $\overline{M}$, x e Γ como definidos acima. Suponhamos que Γ é invariante sob ação de $\{\psi(t)\}$, subgrupo a um parâmetro de isometrias de $\overline{M}$. Se $x(M)$ não é invariante por $\{\psi(t)\}$, então o campo variacional fN da variação $X = \psi(t) \circ x$ é um campo de Jacobi.

A proposição acima, combinada com as proposições **2.3** e **2.5**, fornece o seguinte teorema:

Teorema 2.7: Seja $x: M^n \to \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão com curvatura média constante cuja fronteira é uma subvariedade $(n-1)$-dimensional Γ de $\overline{M}$, fechada e mergulhada. Suponhamos que Γ é invariante por $\{\psi(t)\}$, subgrupo a um parâmetro de isometrias de $\overline{M}$. Então, se x é estável, $x(M)$ é invariante sob ação de $\{\psi(t)\}$.

O próximo corolário é uma generalização, para formas espaciais, de um resultado válido em $c = 0$, o qual foi provado em [BJ]

Corolário 2.8: Seja $x: M^2 \to \overline{M}^3(c)$ uma imersão isométrica de curvatura média constante não-nula h, cujo bordo é uma esfera unitária num hiperplano. Se x é estável, então $x(M)$ é um disco geodésico de uma superfície umbílica em $\overline{M}$.

Demonstração: Para uma parametrização local de $x(M)$ por coordenadas isotérmicas $z = u + iv$, definimos a forma $\phi(z, \bar{z}) := \left(\frac{e-g}{2} - if\right)dz^2$, onde e, f e g são coeficientes da segunda forma fundamental. Como h = constante, as equações de Codazzi implicam a analiticidade de ϕ; então, já que os pontos umbílicos de $x(M)$ são os zeros de ϕ, estes pontos são isolados ou $x(M)$ é totalmente umbílica.

Pelas hipóteses, temos que $x(M)$ é superfície rotacional (para $c = -1$, por exemplo, é superfície de rotação esférica com eixo geodésico). Daí, as linhas de curvatura de $x(M)$ são os paralelos e meridianos. Logo, ou $x(M)$ é totalmente umbílica, ou seus únicos pontos umbílicos são os pontos sobre o eixo de rotação, onde as velocidades das linhas de curvatura se anulam. Sabemos que o índice de um ponto de $x(M)$ pertencente ao eixo de rotação é não-negativo. Entretanto, em [H], é demonstrado que o índice de um ponto umbílico isolado é negativo. Portanto, $x(M)$ é totalmente umbílica.

Daí, se $c = 1$, $x(M)$ é uma esfera S de codimensão 1 em $S^3(1)$. Se $c = -1$, $x(M)$ está contida em uma superfície umbílica de $H^3(-1)$; supondo P horizontal (o que é possível por isometria de $H^3(-1)$), concluímos que $x(M)$ é disco geodésico.

3. Simetria de hipersuperfcies com bordo convexo.

Neste capítulo e no subsequente, usaremos o modelo $H^{n+1}(-1)=\{(x_0,\ldots,x_n);x_n>0\}$ para o espaço hiperbólico de curvatura seccional -1.

Antes de apresentarmos o teorema principal desta seção, enunciaremos e demonstraremos a fórmula do fluxo no espaço hiperbólico, ferramenta de capital importância para o que segue.

A prova que exporemos abaixo se encontra, com exceção de detalhes de menor importância, em [NR].

Proposição 3.1 (Fórmula do fluxo): Sejam M e D hipersuperfícies compactas, imersas em $H^{n+1}(-1)$ tais que $\partial M=\partial D$; suponhamos que M tem curvatura média constante não-nula h. Seja, ainda, Y um campo de Killing em $H^{n+1}(-1)$. Se $M\cup D$ é um ciclo orientado Σ, com M orientada pelo vetor curvatura média n_M, então vale a igualdade

$$\int_D\langle Y,n_D\rangle=\frac{1}{nh}\int_{\partial M}\langle Y,\upsilon\rangle$$

onde n_D é o campo normal orientando D, e υ é o campo conormal unitário de M ao longo de ∂M, apontando para dentro.

Demonstração: Sabemos, pelo teorema da dualidade de Alexander, que $\Sigma=\partial\Omega$, onde Ω é um domínio compacto, orientado, imerso em $H^{n+1}(-1)$. Por outro lado, segue facilmente da equação de Killing que Div Y $\equiv$ 0 em $H^{n+1}(-1)$. Assim, pelo teorema da divergência

$$\textbf{(3.1)}\qquad 0=\int_\Omega \operatorname{Div} Y=\int_M\langle Y,n_M\rangle+\int_D\langle Y,n_D\rangle.$$

Para uma variação de M com campo variacional $Y|_M$, se $A(t)$ designar a função área, teremos

$$\textbf{(3.2)}\qquad A'(0)=\int_M\frac{d}{dt}dM_t=0.$$

Basta considerarmos, para uma imersão $x: M \to H^{n+1}(-1)$, a variação $x_t(p) := \varphi(t, x(p))$, onde $\varphi: (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to H^{n+1}(-1)$ é o fluxo de Y.

Agora, para X campo vetorial em M, e Z campo vetorial em $H^{n+1}(-1)$, definimos

$$\operatorname{div}_M Z(p) := \text{traço da aplicação } X(p) \mapsto \left(\overline{\nabla}_X Z\right)^T(p),$$

onde $\overline{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de $H^{n+1}(-1)$.

Então, para um referencial geodésico (local) de M $\{e_1, \ldots, e_n\}$, temos

$$\text{(3.3)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{div}_M Y &= -nh\langle Y, n_M\rangle + \sum_{i=1}^{n} e_i\langle Y, e_i\rangle = \\ &= -nh\langle Y, n_M\rangle + \operatorname{div}_M Y^T. \end{aligned}$$

Podemos, então, reescrever a fórmula da derivada da função área, como encontrada em [La], do seguinte modo

$$\text{(3.4)} \qquad A'(0) = \int_M \operatorname{div}_M Y.$$

Reunindo **(3.1)**, **(3.3)** e **(3.4)**, obtemos

$$\text{(3.5)} \qquad 0 = \int \operatorname{div} Y = -\int_M nh\langle Y, n_M\rangle + \int_M \operatorname{div}_M Y^T.$$

Aplicando o teorema da divergência ao último termo, encontramos

$$\text{(3.6)} \qquad \int_M \operatorname{div}_M Y^T = -\int_{\partial M} \langle Y, \upsilon\rangle.$$

Substituindo **(3.6)** em **(3.5)** e, em seguida utilizando **3.1**, temos a igualdade desejada. ■

Temos, agora, o resultado principal deste capítulo, como enunciado em [NR].

Teorema 3.2: Seja M^n hipersuperfície compacta, mergulhada em $H^{n+1}(-1)$, de curvatura média constante não-nula h. Suponhamos que $\Gamma := \partial M$ seja uma subvariedade convexa de um hiperplano geodésico N e que M seja transversal a N ao longo de Γ. Então M é simétrica em relação a todos os hiperplanos de simetria de Γ.

Como uma das etapas da demonstração do teorema acima, usamos a proposição a seguir, que consiste numa adaptação, para o espaço hiperbólico, de um resultado enunciado em [BMRS].

Proposição 3.3: Sejam M, N e Γ satisfazendo as condições do teorema **3.2**. Então M está inteiramente contida numa das componentes conexas determinadas por N em $H^{n+1}(-1)$.

Demonstração: Por translação horizontal combinada com homotetia, podemos fixar $N = \left\{(x_0, x_1, \ldots, x_n); \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1 \text{ e } x_n > 0\right\}$.

Sejam, então, $D \subset N$ o conjunto compacto, limitado por Γ, e U a componente ilimitada de $H^{n+1}(-1)\backslash N$.

Suponhamos que M tem pontos em U, sem perda de generalidade, podemos assumir que existe uma vizinhança de Γ em M totalmente contida em U.

Devemos, então, demonstrar que:

(i) $M \cap N = \Gamma$;

(ii) $M \subset \overline{U}$.

Suponhamos, ao contrário, que $M \cap N$ tem outras componentes além de Γ.

1ª parte: consideremos, inicialmente, o caso em que $M \cap D \neq \emptyset$ e $M \cap (N \setminus D) = \emptyset$. Daí, se M_1 denota a componente conexa de $M \cap \overline{U}$ contendo Γ, temos que a fronteira de $M_1 \cap N$ consiste de variedades mergulhadas em $H^{n+1}(-1)$, de codimensão 2, que não se intersectam umas as outras. Denotemos, então, por D_1 o complementar, em D, da união dos interiores destas variedades. Nestas circunstâncias, D_1 é uma subvariedade própria de D, e $\partial M_1 = \partial D_1$. Além disso, $M_1 \cup D_1$ constitui a fronteira de um domínio compacto Ω_1 de $H^{n+1}(-1)$.

A fim de aplicarmos a fórmula do fluxo, devemos orientar $M_1 \cup D_1$ coerentemente.

O campo conormal de M ao longo de ∂M se estende de modo natural a ∂M_1, podendo, eventualmente, ser tangente a N em pontos de $\partial M_1 \backslash \Gamma$.

A curvatura média de M_1, por ser um ente definido localmente, é a mesma de M: assim, M_1 tem a orientação induzida de M, dada pela direção do vetor curvatura média n_M. É fácil ver, usando o princípio do máximo, que n_M aponta para dentro de Ω_1, em M_1.

Como $D_1 \subset D$ e $D \subset N$ concluímos, das observações acima sobre a orientação de M, que o campo unitário normal a D (e, portanto, a D_1) é dado por $n_D(x) = x_n \cdot x$, desde que $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Logo, para o campo $Y(x) = x$, que é campo de Killing em $H^{n+1}(-1)$, temos $\langle Y, n_D \rangle(x) = \dfrac{1}{x_n}$ e, já que D_1 está propriamente contido em D, segue que

(3.7) $$\int_D \langle Y, n_D \rangle > \int_{D_1} \langle Y, n_D \rangle.$$

Por outro lado, como M está contida em U numa vizinhança de Γ, temos $\langle Y, \upsilon \rangle > 0$ e, já que $\Gamma \subset \partial M_1$, segue que

(3.8) $$\int_\Gamma \langle Y, \upsilon \rangle \leq \int_{\partial M_1} \langle Y, \upsilon \rangle,$$

donde, pela fórmula do fluxo,

(3.9) $$\int_D \langle Y, n_D \rangle \leq \int_{D_1} \langle Y, n_D \rangle,$$

o que contradiz **(3.7)**.

Concluímos, portanto, que se $(M \cap N) \cap D \neq \varnothing$, então $(M \cap N) \setminus D \neq \varnothing$.

2ª parte: restringimo-nos, agora, a provar que $M \cap N$ não tem componentes fora de D.

Suponhamos que exista tal componente, e denotemo-lo por E. Suponhamos, ainda, que E seja homotópico a zero em N\D. Sendo assim, é possível construir uma geodésica $\gamma : [0, \infty) \to N$ tal que $\gamma(0) = q \in D$, e $\gamma([0, \infty)) \cap E$ continha pelo menos dois pontos. Seja, então, $\gamma(t_0)$ o ponto comum ao traço de γ e a Γ.

Consideremos, em seguida, para $0 \leq t < \infty$, o hiperplano geodésico $F(t)$ contendo $\gamma(t)$ e ortogonal a $\gamma'(t)$. Então, se $R_t : H^{n+1} \to H^{n+1}$ é a reflexão (hiperbólica) relativa a $F(t)$, e p é um ponto qualquer de N, temos que $R_t(p)$ é o ponto sobre a geodésica passando por p e ortogonal a $F(t)$ que está a mesma distância (hiperbólica) deste plano que o ponto p. Como tais geodésicas estão contidas em N, temos $R_t(N) \subset N, \forall t$.

Agora, pela compacidade de M. é possível determinar $t_1 \in (0, \infty)$ tal que

(i) $M \cap F(t) = \varnothing, \forall t, t > t_1$;

(ii) $M \cap F(t_1) \neq \varnothing$.

Sendo assim, temos que $M \cap F(t_1)$ não contém pontos de Γ. De fato, pela convexidade de Γ, e pela construção de γ, sabemos que Γ está contida no semi-hiperplano de N determinado por $-\gamma'(t_0)$. Logo, a fim de que $\gamma(t_1) \in \Gamma$, deveríamos ter $E = \varnothing$.

Definindo M_t como a parte de M compreendida entre $F(t)$ e $F(t_1)$, e $M_t^* := R_t(M_t)$, e fazendo t decrescer a partir de t_1, constatamos que há um instante t_2, $0 < t_2 < t_1$, tal que

(i) $M_{t_2}^* \cap M \neq \varnothing$;

(ii) $M_t^* \cap M = \varnothing, \forall t, t > t_2$.

Ainda pela convexidade de M, devemos ter $(M_{t_2}^* \cap M) \cap \Gamma = \varnothing$.

Então, já que $M_{t_2}^* \cap M$ consiste apenas de pontos interiores de M, segue, pelo princípio da reflexão de Alexandrov, como descrito em [Al], que P_{t_2} é plano de simetria de M. Como $t_2 > t_0$, temos, forçosamente, que $\partial M = \varnothing$.

Desta contradição, concluímos que E não pode ser homotópico a zero em N\D.

3ª parte: suponhamos, agora, que existam componentes de $(M \cap N) \setminus D$ não homotópicos a zero em N\D. Sejam E e E_1 duas destas componentes. Sem perda de generalidade, podemos assumir que E_1 limita um domínio contendo E. Consideremos, portanto, uma geodésica γ de comprimento infinito que intersecte E e E_1. Então, utilizando o princípio de reflexão de Alexandrov de modo análogo a como fizemos acima, encontramos um plano de simetria de M que intersecta γ na região anular entre E e E_1; teríamos, por conseguinte, $\partial M = \varnothing$.

Por meio desta contradição, concluímos que existe, no máximo, uma componente E de $(M \cap N) \setminus D$ homotópica a Γ em N\D. E, desta forma, Γ e E constituiriam o bordo de uma região anular A em N. Aplicando o princípio do máximo, temos que o vetor curvatura média de M aponta para dentro do domínio limitado por M e A. Deste modo, a orientação de D passa a ser $n_D(x) = -x_n \cdot x$. Daí, pela fórmula do fluxo, temos

$$\int_{\Gamma} \langle Y, \upsilon \rangle = \frac{1}{nh} \int_{D} \langle Y, n_D \rangle < 0 .$$

Entretanto, $\langle Y, \upsilon \rangle > 0$, como tínhamos anteriormente. Concluímos, assim, que $E = \varnothing$.

Fica, então, demonstrado que $M \cap N = \Gamma$ e que $M \subset \overline{U}$.■

Passamos, agora, à prova do teorema **3.2**.

Demonstração do teorema 3.2: Seja $F = F(0)$ hiperplano de simetria de Γ em N. Se γ é uma geodésica em N, de comprimento infinito, cortando $F(0)$ ortogonalmente, consideremos o hiperplano $F(t)$ passando por $\gamma(t)$ e ortogonal $\gamma'(t)$, com $0 \leq t < \infty$. Expressamos isto dizendo ser $F(t)$ o transladado de $F(0)$ no instante t. Então, pelo princípio da reflexão de Alexandrov, aplicado a $M \cup D$, existe um transladado de $F(0)$, digamos, $F(t_0)$, que é hiperplano de simetria de M.

Suponhamos que $t_0 \neq 0$. Assim, como $F(t_0)$ é, também, hiperplano de simetria de Γ, e tanto $F(0)$ quanto $F(t_0)$ são ortogonais a γ, teremos, para qualquer ponto p de $\gamma([0, \infty)) \cap \Gamma$, dois pontos q, q' sobre γ, distintos, tais que a distância de p a q é igual a distância de p a q'. Logo, $F(t_0) = F(0)$, ou seja, F é hiperplano de simetria de M, o que conclui a demonstração.■

Como corolário do teorema **3.2**, apresentaremos uma caracterização das hiperesferas de $H^{n+1}(-1)$, que está incluída em [NR].

Corolário 3.4: Seja M uma hipersuperfície compacta, mergulhada em $H^{n+1}(-1)$ tal que $\Gamma := \partial M$ é uma esfera de codimensão 2 e raio hiperbólico ρ. Se M tem curvatura média constante $h = \cot gh(\rho)$, então M está contida em uma hiperesfera de raio ρ.

Demonstração: Após uma isometria conveniente de $H^{n+1}(-1)$, podemos supor $\Gamma \subset P = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n); x_n = 1\}$ com centro euclideano em $(0, 0, \ldots, 1)$.

O campo $Y(x) = x$ é campo de Killing em $H^{n+1}(-1)$. De fato, o fluxo de Y corresponde a homotetias centradas na origem $(0, 0, \ldots, 0)$.

Como o raio hiperbólico de Γ é ρ, seu raio euclideano é $\operatorname{senh}\rho$, uma vez que fixamos $\Gamma \subset P$. Assim, $\Gamma \subset S = \left\{(x_0, \ldots, x_n); \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1 + \operatorname{senh}^2\rho = \cosh^2\rho\right\}$. Seja D a região compacta de S limitada por Γ. Orientemos, então, $M \cup D$ a partir do vetor curvatura média de M, de modo a podermos aplicar a fórmula do fluxo como segue

$$\textbf{(3.10)} \qquad \int_D \langle Y, n_D \rangle = \frac{1}{nh} \int_{\partial M} \langle Y, \upsilon \rangle.$$

Seja D' o n-disco euclideano limitado por Γ em P. Temos que D' é orientado por $n'_D = \pm e_n = \pm(0, \ldots, 1)$, já que a métrica induzida em P é a métrica euclideana.

Para Ω, a região compacta de $H^{n+1}(-1)$ entre D e D', temos, do fato de que $\operatorname{Div} Y \equiv 0$, que

$$0 = \int_\Omega \operatorname{Div} Y = \int_D \langle Y, n_D \rangle + \int_{D'} \langle Y, n_{D'} \rangle,$$

o que implica

$$\textbf{(3.11)} \qquad \int_D \langle Y, n_D \rangle = -\int_{D'} \langle Y, n_{D'} \rangle.$$

Reunindo as equações **(3.10)** e **(3.11)**, temos

$$\textbf{(3.12)} \qquad \frac{1}{nh} \int_{\partial M} \langle Y, \upsilon \rangle = -\int_{D'} \langle Y, n_{D'} \rangle.$$

Doravante, fixemos $n_{D'} = -e_n$. Assim, calculamos

$$\langle Y, n_{D'} \rangle = -1$$

e, daí,

$$-\int_{D'}\langle Y, n_{D'}\rangle = \int_{D'}\omega ,$$

onde ω é o elemento de volume na métrica de P. Contudo $\omega = dx_0 \Lambda \ldots \Lambda dx_n$, já que $\{e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0); 0 \le i \le n\}$ é base ortonormal do espaço tangente de D' em cada ponto.

Logo,

$$-\int_{D'}\langle Y, n_{D'}\rangle = \text{volume euclideano de } D' =$$

$$= \frac{1}{n}\text{raio}(D')\cdot\text{volume}(\Gamma) = \frac{1}{n}\text{senh}\,\rho\cdot\text{volume}(\Gamma)$$

Então, combinando a expressão acima com a equação **(3.12)**, temos

(3.13) $$\int_{\Gamma}\langle Y, \upsilon\rangle = \cosh\rho\cdot\text{volume}(\Gamma)$$

Entretanto, restringindo-nos a Γ, obtemos $|Y|^2 = \langle Y, Y\rangle = \cosh^2\rho$ e, portanto,

$$\int_{\Gamma}\langle Y, \upsilon\rangle = \int_{\Gamma}|Y|\cos(Y, \upsilon) = \cosh\rho\int_{\Gamma}\cos(Y, \upsilon).$$

Assim, de **(3.13)**, concluímos que

$$\int_{\Gamma}\langle Y, \upsilon\rangle = \text{volume}(\Gamma).$$

Portanto, $\cos(Y, \upsilon) = 1$ em Γ, ou seja, Y é paralelo a υ ao longo de ∂M, como $n_D = \frac{Y}{|Y|}$ ao longo de Γ, temos que υ é paralelo a n_D em Γ. Isso equivale a dizer que M corta P ortogonalmente ao longo de Γ.

A mesma conclusão é obtido, de modo similar. quando $n_{D'} = e_n$.

Aplicando o teorema **3.2** a M, concluímos que M é simétrica em relação a todos os hiperplanos verticais passando pelo centro euclideano de Γ. Então M é hipersuperfície rotacional e, por [Go], é umbílica. Como a sua curvatura média e $\cot gh\,\rho > 1$, então M está contida numa hiperesfera.■

4. Um teorema de unicidade

Estabelecemos, agora, uma caracterização para gráficos de curvatura média constante no espaço hiperbólico. Para tanto, tornaremos a empregar a proposição **(3.3)**, bem como o princípio da reflexão de Alexandrov, como descrito em [Al]. Este teorema é provado em [BE].

Teorema 4.1: Seja M uma hipersuperfície compacta, conexa, mergulhada em $H^{n+1}(-1)$, de curvatura média constante não-nula h. Suponhamos que $\Gamma := \partial M$ é uma hipersuperfície de um hiperplano P de $H^{n+1}(-1)$, e que Γ limita, em P, um domínio estritamente convexo D. Se M é localmente o gráfico de uma função não-negativa f sobre uma vizinhança de U de Γ em D, então M é um gráfico sobre D.

Demonstração: Por meio de uma isometria de $H^{n+1}(-1)$, podemos fixar $P = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n); x_n > 0 \text{ e } x_0 = 0\}$. Transladando P horizontalmente, se necessário, podemos assumir que M intersecta P transversalmente ao longo de Γ.

As condições sobre M implicam, pela proposição **3.3**, que M está totalmente contida num dos semi-espaços de $H^{n+1}(-1)$ determinados por P, uma vez que M é transversal a P ao longo de Γ. Consideremos, então, $M \subset \{(x_0, x_1, \ldots, x_n); x_0 \geq 0\}$.

Definamos, para cada $t \in R$, os conjuntos

(i) $P_t := \{(t, x_1, \ldots, x_n); x_i \in R, x_n > 0\}$;

(ii) $P_t^+ := \{(x_0, x_1, \ldots, x_n); x_0 > t\}$;

(iii) $M_t := M \cap P_t^+$;

(iv) $M_t^* := \{(x_0 - 2t, x_1, \ldots, x_n); (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in M_t\}$.

Assim, definido, M_t^* é a reflexão hiperbólica (e euclideana) de M_t com relação ao hiperplano P_t.

Pela compacidade de M. é possível encontrar $\lambda > 0$ tal que $M_0^* \cap P_{-\lambda} = \emptyset$. Para este número, seja $D_{-\lambda} := \{(-\lambda, x_1, \ldots, x_n); (0, x_1, \ldots, x_n) \in D\}$ a cópia transladada de D em $P_{-\lambda}$.

Sejam, ainda, D_t as cópias transladadas de D em P_t, para $t \in [-\lambda, 0]$, e $C := \bigcup_{t \in [-\lambda, 0]} D_t$. A região compacta limitada por $M \cup D$, quando unida a C, forma um sólido $(n+1)$- dimensional V, topologicamente um disco de $H^{n+1}(-1)$.

Se denotarmos $S := \partial V$, então S será uma hipersuperfície fechada, mergulhada, regular por partes (a regularidade pode falhar em pontos de Γ).

Suponhamos que M não seja gráfico sobre D. Empregaremos, então, o processo de reflexão de Alexandrov a fim de obter uma contradição.

Sabemos existir um instante $t_0 > 0$ tal que

(i) $P_t \cap V = \emptyset, \forall t, t > t_0$;

(ii) $P_{t_0} \cap V \neq \emptyset$.

Basta, para tanto, tomarmos $t_0 = \max\{x_0; (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in V\}$. Então, se $q \in P_{t_0} \cap V$, está assegurado, pela escolha de t_0, que o espaço tangente de S em q coincide com o hiperplano P_{t_0}.

Além disso, para $t < t_0$, suficientemente próximo de t_0, cada componente conexa de M_t é gráfico sobre alguma parte de P_t.

Como M não é gráfico, deve existir um instante t_1, $0 < t_1 < t_0$, para o qual uma das condições abaixo deixa de ser válida pela primeira vez:

(a) $\operatorname{int}(M_t^*) \subset \operatorname{int}(V)$;

(b) as componentes de M_t são gráficos sobre subconjuntos de P_t e nenhum ponto de M_t tem espaço tangente horizontal, isto é, paralelo a $\{x_n = 0\}$.

Para t_1 assim escolhido, temos:

(i) $M_t^* \cap \partial V = \emptyset, \forall t, t > t_1$;

(ii) $M_{t_1}^* \cap \partial V \neq \emptyset$;

(iii) $M_{t_1}^* \subset V$.

Conjunto $M_{t_1}^* \cap \partial V$ não contém pontos de S\M. De fato, se $q^* \in M_{t_1}^* \cap (S \setminus M)$, e q^* fosse o refletido de $q \in M_{t_1}$, então T_qM seria horizontal, já que, pela escolha de q^*, teríamos $M_{t_1}^*$ inteiramente contida abaixo de S\M em uma vizinhança de q^*.

Entretanto, se T_qM fosse horizontal, haveria instante anterior a t_1 para o qual a condição **(b)** deixaria de ser satisfeita, o que contradizia a definição de t_1.

Igualmente, temos $M_{t_1}^* \cap \Gamma = \varnothing$. Se tivéssemos $q \in M_{t_1}^* \cap \Gamma$ então, como acima, T_qM seria horizontal. Contudo, $M_{t_1}^*$, está localmente abaixo do gráfico de f numa vizinhança de q e, portanto, T_qM não poderia ser horizontal.

Concluímos, então, que $M_{t_1}^* \cap \partial V$ consiste apenas de pontos interiores. Aplicando o princípio do máximo a qualquer um dos pontos desta intersecção, temos que M é uma hipersuperfície compacta mergulhada com plano de simetria P_{t_1}. Teríamos, então $\partial M \neq \varnothing$, uma contradição. Logo, M é gráfico sobre D.■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[Al] Alexandrov, A.D.. Uniqueness theorem for surfaces in the large V. AMS Translations **21**, 412-416, 1962.

[BdCE] Barbosa, J.L., do Carmo, M & Eschenburg, Jost. Stability of hipersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds. Mathematische Zeitschrift **197**, 123-138, 1988.

[BE] Barbosa, J.L. & Earp. R.S.. Prescribed mean curvature hypesurfaces in $H^{n+1}(-1)$ with convex planar boundary, I. Preprint

[BGM] Berger, M., Gauduchon, P. & Mazet, E.. Le spectre d'une variété Riemannienne. Lectures notes in Mathematics, **194**, Springer-Verlag, 1971.

[BJ] Barbosa, J.L. & Jorge, L.M.. Stable H-surfaces whose boundary is $S^1(1)$. Anais da Academia Brasileira de Ciências, **61**, nº 3, 259-263, 1994.

[BMRS] Brito F., Meeks III, W.H., Rosenberg, H. & Earp, R.S.. Structure theorems for constant mean curvature surfaces bounded by a planar curve. Indiana University Mathematics, **40**, nº1, 333-343, 1991.

[Go] Gomes, J.M. Sobre hipersuperfícies com curvatura média constante no espaço hiperbólico. Tese de doutorado, IMPA, 1985.

[H] Hopf, H. Differential Geometry in the large. Lectures notes in Mathematics, **1000**, Springer-Verlag, 1983.

[La] Lawson, Blaine. Lectures on minimal submanifolds.

[NR] Nelli, B. & Rosenberg, H. Some remarks on embedded hypersufaces in hyperbolic space of constant mean curvature and spherical boundary. Annals of Global Analysis and Geometry, **13**, 23-30, 1995.