UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CAMPUS DE RUSSAS

CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE SOFTWARE

SIDEVALDO VINÍCIUS PAULINO DE SOUZA

PROBLEMA DE FORMAÇÃO DE MÚLTIPLOS TIMES COM MÚLTIPLAS HABILIDADES PRECIFICADO: UMA ABORDAGEM EXATA

RUSSAS

2025

SIDEVALDO VINÍCIUS PAULINO DE SOUZA

PROBLEMA DE FORMAÇÃO DE MÚLTIPLOS TIMES COM MÚLTIPLAS HABILIDADES PRECIFICADO: UMA ABORDAGEM EXATA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia de Software do Campus de Russas da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Engenharia de Software.

Orientadora: Profa. Drª. Tatiane Fernandes Figueiredo

RUSSAS

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S235p Souza, Sidevaldo Vinicius Paulino de.
Problema de formação de múltiplos times com múltiplas habilidades precificado: uma abordagem exata / Sidevaldo Vinicius Paulino de Souza. – 2025.
56 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, , Russas, 2025.
Orientação: Profa. Dra. Tatiane Fernandes Figueiredo.

1. Formação de Múltiplos Times Precificado. 2. Otimização Combinatória. 3. Programação Linear Inteira. 4. Restrição orçamentária. I. Título.

CDD

SIDEVALDO VINÍCIUS PAULINO DE SOUZA

PROBLEMA DE FORMAÇÃO DE MÚLTIPLOS TIMES COM MÚLTIPLAS HABILIDADES PRECIFICADO: UMA ABORDAGEM EXATA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia de Software do Campus de Russas da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Engenharia de Software.

Aprovada em: 08 de Agosto de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Drª. Tatiane Fernandes Figueiredo (Orientadora)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Eurinardo Rodrigues Costa
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Ms. Pitágoras Graça Martins
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho à minha mãe Maria Cícera Paulino da Silva, por todo o seu amor e apoio. Te amo!

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, que me permitiu estar aqui. A educação é, de fato, uma ferramenta de mudança e deve ser um direito de todos. Agradeço à professora Tatiane Fernandes Figueiredo, que se dedicou e, mesmo com seu tempo limitado, escolheu me orientar. Agradeço a cada pessoa que me ajudou e ajuda de alguma forma; sou imensamente grato por cada um de vocês. Obrigado! Mesmo sem citar nomes, sei que esta mensagem chegará a todos. Obrigado, Maria Cícera Paulino da Silva, minha mãe, por nunca me deixar desistir. Aos meus companheiros de quatro patas Max Steel e Buzz Lightyear, que ficaram madrugadas comigo enquanto escrevia este trabalho e não me deixaram surtar durante o processo, meus mais sinceros agradecimentos.

“O sucesso é ir de fracasso em fracasso sem perder o entusiasmo.”

(Winston Churchill)

RESUMO

O problema de formação de equipes é amplamente estudado na literatura de otimização, especialmente em cenários onde múltiplos projetos demandam habilidades distintas e relações interpessoais impactam diretamente a eficácia das equipes. Este trabalho propõe uma extensão do Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades, denominada Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades Precificado, incorporando restrições orçamentárias ao modelo. A nova formulação utiliza Programação Linear Inteira para alocar especialistas com múltiplas habilidades a projetos, respeitando limites de dedicação, cobertura de habilidades, relações sociométricas e, de forma inédita, um teto de investimento por projeto. A validação do modelo foi realizada a partir de duas instâncias adaptadas da literatura, comparando os resultados obtidos com e sem restrição de custo. Os experimentos demonstraram que o modelo precificado é capaz de gerar soluções viáveis e financeiramente compatíveis, mantendo uma boa cobertura de habilidades e harmonia social entre os membros das equipes. A proposta amplia o potencial de aplicação prática dos modelos de alocação de equipes em contextos reais de gestão de projetos, especialmente em organizações que operam sob restrições de recursos.

Palavras-chave: formação de múltiplos times precificado; otimização combinatória; programação linear inteira; restrição orçamentária.

ABSTRACT

The team formation problem has been extensively studied in the optimization literature, particularly in contexts involving multiple projects with diverse skill requirements and interpersonal dynamics that influence team performance. This work proposes an extension of the Multiple Team Formation with Multiple Skills Problem, named the Priced Multiple Team Formation with Multiple Skills Problem, by introducing budget constraints into the model. The proposed formulation employs Integer Linear Programming to allocate multi-skilled specialists to projects, while respecting time dedication limits, skill coverage, sociometric relationships, and distinctively a budget cap per project. The model was validated through two adapted instances from the literature, allowing for a comparative analysis between solutions generated with and without budget constraints. Results show that the priced model is capable of producing feasible and cost-effective solutions, while maintaining adequate skill coverage and interpersonal harmony within teams. The proposed approach expands the practical applicability of team allocation models, particularly in project management scenarios constrained by financial resources.

Keywords: priced multi-team formation; combinatorial optimization; integer linear programming; Budget constraint.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

B&B	*Branch and Bound*
PFERS	Problema de Formação de Equipes utilizando Redes Sociais
PFMT_{MHP}	Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades Precificado
PFMT_{MH}	Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades
PFT	Problema de Formação de Times
PFTS	Problema de Formação de Times Sociotécnicos
PI	Programação Inteira
PL	Programação Linear
PLI	Programação Linear Inteira
PLIB	Programação Linear Inteira Binária
PLIM	Programação Linear Inteira Mista
PMFT	Problema de Formação de Múltiplos Times
PO	Pesquisa Operacional

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em virtude da elevada complexidade de diversos problemas de formação de time, que possuem um extenso espaço de soluções possíveis, a obtenção de soluções ótimas em um intervalo de tempo computacionalmente viável constitui um desafio substancial. No caso específico do *Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades*, classificado como NP-Difícil, a literatura aponta a aplicação do algoritmo *Branch and Cut* proposto por FIGUEIREDO (2021) como uma abordagem eficaz, apresentando um bom desempenho para a maioria das instâncias disponíveis. Esse problema é uma união do *Problema de Formação de Múltiplos Times*, proposto por Gutierrez *et al.* (2016), e do *Problema de Formação de Times Sociotécnicos*, proposto por Campêlo *et al.* (2018), incorporando características como a formação de múltiplos times, a alocação de pessoas com múltiplas habilidades e a consideração de frações de dedicação de pessoas a diferentes times, excedendo no máximo 100% de seu tempo de trabalho. O objetivo é formar times que respeitem as restrições de demanda de habilidades dos projetos, além de maximizar a afinidade entre os seus membros, uma vez que a saúde das relações sociais em um time está diretamente ligada à produtividade do mesmo e, portanto, ao sucesso do projeto (BALLESTEROS-PÉREZ *et al.*, 2012).

Embora haja muitos esforços para apresentar variações do problema de formação de times que representem as necessidades principais de uma alocação de pessoas em projetos em situações reais, ainda há algumas lacunas na literatura a serem estudadas, como, por exemplo, restrições de custos relacionadas e execução destes projetos. Com o intuito de contribuir para a redução dessas lacunas, este trabalho propõe um modelo de Programação Linear Inteira voltado à resolução do Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades Precificado, incorporando explicitamente restrições orçamentárias associadas à execução de cada projeto.

Para uma melhor organização, este trabalho está segmentado conforme a seguir: Capítulo 2 apresenta os objetivos gerais e específicos da pesquisa; o Capítulo 3 aborda os fundamentos teóricos que sustentam o desenvolvimento do estudo; o Capítulo 4 discute os trabalhos relacionados, destacando abordagens existentes para problemas análogos ao *Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades*; o Capítulo 5 descreve o modelo de Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades (PFMT_{MH}) e sua versão com restrição de custos, Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades Precificado (PFMT_{MHP}); o Capítulo 6 apresenta as etapas metodológicas adotadas, bem como os resultados obtidos e suas respectivas análises; por fim, o Capítulo 7 discorrerá sobre as conclusões do trabalho e as perspectivas para trabalhos futuros.

2 OBJETIVOS

2.0.1 Objetivos gerais

Propor alterações no modelo de Programação Linear Inteira apresentado na literatura para a resolução do Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades para solucionar uma nova variação deste problema que considera também os custos para geração destes times, neste trabalho, denominado por Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades Precificado.

2.0.2 Objetivos Específicos

- Estudar o modelo mais eficiente existente na literatura para resolução do Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades;
- Propor e implementar as alterações necessárias no modelo para resolução do Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades para que também seja possível solucionar a variação considerando custos para geração destes times;
- Gerar novas instâncias baseadas nas instâncias existentes na literatura;
- Analisar os resultados obtidos com novo modelo de Programação Linear Inteira proposto para resolução Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades Precificado.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, serão apresentados os conceitos fundamentais para a resolução do Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades. A Seção 3.1 tratará da Teoria dos Grafos, incluindo grafos ponderados. A Seção 3.2 abordará os princípios da Pesquisa Operacional, enquanto a Seção 3.3 introduzirá a Programação Linear, com destaque para a Programação Linear Inteira (PLI) que será a base para a modelagem matemática do problema. Por fim, a Seção 3.4 apresenta o Algoritmo *Branch and Bound*, que é o método proposto para a resolução do problema aqui abordado. Esses conceitos fornecerão a base teórica necessária para o desenvolvimento, análise e implementação da solução.

3.1 Teoria dos Grafos

Um grafo é uma estrutura matemática representada por $G = (V, E)$, onde V é um conjunto finito de vértices (ou nós) e E é um conjunto de arestas que conectam pares de vértices.

A vizinhança ou adjacência de um vértice v em um grafo G é o conjunto de todos os vértices adjacentes a v. Esse conjunto é frequentemente denotado por $N_G(v)$ ou, quando o grafo está claro pelo contexto, simplesmente por $N(v)$. Para um subconjunto de vértices $W \subseteq V$, a vizinhança é definida como $N(W) = \bigcup_{v \in W} N(v)$, ou seja, a união das vizinhanças de todos os vértices em W. Além disso, se V' é um subconjunto de vértices em $V(G)$, denotamos por $\delta(V')$ o conjunto de arestas em $E(G)$ que possuem um extremo em V' e o outro em $V \setminus V'$. Esse conjunto é conhecido como o corte associado a V'.

Quando dois grafos G e G' satisfazem $V(G') \subseteq V(G)$ e $E(G') \subseteq E(G)$, dizemos que G' é um subgrafo de G, e escrevemos $G' \subseteq G$. Subgrafos são estruturas importantes na teoria dos grafos, pois permitem analisar partes específicas de um grafo maior.

Um grafo bipartido é um tipo especial de grafo em que o conjunto de vértices V pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos V_1 e V_2 (ou seja, $V = V_1 \cup V_2$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), de modo que toda aresta $\{u, v\} \in E$ conecta um vértice $u \in V_1$ a um vértice $v \in V_2$. Em outras palavras, não existem arestas entre vértices dentro do mesmo subconjunto V_1 ou V_2. Grafos bipartidos são úteis para modelar situações onde relações ocorrem apenas entre dois grupos distintos, como em redes de colaboração ou sistemas de recomendação.

Já em um grafo orientado (ou digrafo) $D = (V, A)$, temos um conjunto finito e não vazio $V(D)$ de vértices (ou nós) e um conjunto $A(D)$ de arcos (ou arestas orientadas). Cada arco é um par ordenado de vértices distintos, ou seja, $A(D) \subseteq \{(u,v) \mid u,v \in V(D), u \neq v\}$. Se $a = (u,v)$ é um arco, dizemos que a incide em u e v, onde u é chamado de origem ou início e v é o destino ou término do arco. Em digrafos, a direção das arestas é crucial, pois define o fluxo ou a relação orientada entre os vértices.

3.1.1 Grafo Ponderado

Um grafo é dito ponderado quando existem uma ou mais funções relacionando V(ou E) a conjuntos númericos, isto é, dados quantitativos associados às arestas do grafo que em geral representam relações entre pares de vértices que representam atores em problemas reais (NETTO, 2011).

Um grafo ponderado pode ser definido como uma estrutura $G = (V, E, w_v, w_e)$, onde:

- V é um conjunto de vértices (nós).
- $E \subseteq V \times V$ é um conjunto de arestas (conexões entre vértices).
- $w_v : V \to \mathbb{R}$ é uma função que associa um valor (peso) a cada vértice.
- $w_e : E \to \mathbb{R}$ é uma função que associa um valor (peso) a cada aresta.

Considere o grafo do exemplo anterior:

- $V = \{A, B, C\}$ (vértices).
- $E = \{(A,B), (A,C), (B,C)\}$ (arestas).
- w_v (valores dos vértices):

  $$w_v(A) = 5, \quad w_v(B) = 2, \quad w_v(C) = 4$$

- w_e (valores das arestas):

  $$w_e(A,B) = 3, \quad w_e(A,C) = 2, \quad w_e(B,C) = 4$$

3.2 Pesquisa Operacional

A Pesquisa Operacional (PO) é uma área interdisciplinar que utiliza métodos científicos, principalmente matemáticos e estatísticos, para auxiliar na tomada de decisões em problemas complexos. O objetivo principal da PO é otimizar recursos e melhora de processos, pois tenta frequentemente encontrar uma solução ótima (HILLER; LIEBERMAN, 2013). Uma solução ótima é aquela que apresenta o melhor custo entre todas as soluções viáveis, sendo assim a mais eficiente. Uma solução viável é aquela que satisfaz todas as restrições do problema. Caso alguma restrição não seja atendida, a solução é considerada inviável (VIANA, 2018).

Em virtude da elevada complexidade de diversos problemas do mundo real, que possuem um extenso espaço de soluções possíveis, a obtenção de soluções ótimas em um intervalo de tempo computacionalmente viável constitui um desafio substancial. No caso específico do Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades, o qual é classificado como NP-Difícil, a literatura aponta a aplicação do algoritmo *Branch and Cut* como uma abordagem eficaz, apresentando um bom desempenho para a maioria das instâncias disponíveis na literatura. O objetivo principal deste estudo é propor aprimoramentos para o algoritmo em questão, bem como a criação de um novo conjunto de instâncias desafiadoras, visando testar a eficácia do *Branch and Cut* proposto por (FIGUEIREDO, 2021).

3.3 Programação Linear

Modelos de Programação Linear (PL) são construídos com base em uma função linear, que representa o objetivo a ser alcançado (por exemplo, maximizar o lucro ou minimizar os custos), e um sistema de restrições lineares, que descrevem as limitações do problema, como capacidades ou recursos limitados (PRADO, 2012). A PL é amplamente utilizada em problemas de planejamento e decisão, onde existem múltiplas opções de escolha que estão sujeitas a essas restrições.

Uma solução em PL é qualquer conjunto de valores para as variáveis de decisão que satisfaçam as restrições. No entanto, nem toda solução será necessariamente ótima ou viável, pois pode haver soluções que atendem às condições do problema, mas não são desejáveis. Dependendo da configuração do problema, pode-se ter diferentes tipos de soluções, como soluções viáveis, ótimas ou degenerações (HILLER; LIEBERMAN, 2013). A seguir apresentamos um exemplo genérico de um modelo de PL.

$$MAX/MINZ = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Sujeito às Restrições:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ e \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0. \end{cases}$$

Onde:

- Z: Valor a ser otimizado;
- $c_1, c_2, \ldots, c_n$: Coeficientes que representam o custo, lucro ou peso de cada variável;
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$: Variáveis de decisão (quantidades a serem determinadas);
- a_{ij}: Coeficientes das restrições;
- $b_1, b_2, \ldots, b_m$: Limites das restrições (recursos disponíveis, demandas, etc.).

3.3.1 Método Simplex

O Método Simplex atualmente é o algoritmo mais utilizado para resolver problemas de Programação Linear. Desenvolvido por George Dantzig em 1947, este método é baseado em princípios algébricos e geométricos, permitindo uma busca pseudopolinomial pela solução ótima de problemas que envolvem a maximização ou minimização de uma função objetivo linear, sujeita a um conjunto de restrições também lineares (DANTZIG, 1963).

O Método Simplex opera explorando os vértices do poliedro convexo formado pelas restrições do problema de Programação Linear. Esse poliedro, conhecido como região viável, contém todas as soluções que satisfazem as restrições do problema. O algoritmo inicia-se com uma solução básica viável, que corresponde a um vértice do poliedro, e move-se iterativamente para vértices adjacentes, sempre melhorando o valor da função objetivo. Esse processo é repetido até que não seja possível melhorar ainda mais o valor de Z, momento em que a solução ótima é encontrada (BAZARAA *et al.*, 2011).

Um dos aspectos mais notáveis do Método Simplex é sua eficiência prática. Embora sua complexidade teórica no pior caso seja exponencial (KLEE; MINTY, 1972), na maioria das situações reais, o algoritmo converge em tempo polinomial para a solução ótima. Essa eficiência é atribuída à sua capacidade de explorar a estrutura geométrica do problema, evitando a necessidade de enumerar todas as soluções possíveis. Em suma, o Método Simplex baseia-se em conceitos de álgebra linear e análise convexa, utilizando operações elementares sobre matrizes, como pivotamento, para transformar o sistema de equações e inequações em uma forma que permita a identificação da solução ótima. Essa abordagem algébrica é complementada pela interpretação geométrica, que fornece intuição sobre o comportamento do algoritmo.

O Simplex também é amplamente utilizado como sub-rotina em outros métodos de otimização, como o *Branch and Bound*, que resolve problemas de Programação Linear Inteira. Nesse contexto, o Simplex é aplicado para resolver as relaxações lineares dos subproblemas gerados durante a execução do *Branch and Bound* (WOLSEY, 2020).

3.3.2 Programação Linear Inteira

A PLI é uma abordagem especializada dentro da Programação Linear, na qual as variáveis de decisão são obrigadas a assumir valores inteiros, diferindo dos problemas de Programação Linear tradicional, onde as variáveis podem ser contínuas. Essa característica torna a PLI especialmente útil em cenários onde decisões discretas são necessárias, como na alocação de recursos, planejamento de produção ou roteamento de veículos. No contexto do PFMT_{MH}, a PLI pode ser utilizada para modelar a seleção de indivíduos com habilidades específicas, garantindo que cada time atenda a critérios predefinidos.

Em alguns casos, nem todas as variáveis precisam ser inteiras, o que leva ao conceito de Programação Linear Inteira Mista (PLIM). Nesses problemas, apenas um subconjunto das variáveis é restrito a valores inteiros, enquanto outras podem assumir valores contínuos. Essa flexibilidade permite modelar situações mais complexas e realistas, como problemas que envolvem tanto quantidades discretas (por exemplo, número de indivíduos em um time) quanto contínuas (por exemplo, horas alocadas para cada time). Além disso, existe uma categoria ainda mais específica, conhecida como Programação Linear Inteira Binária (PLIB), em que as variáveis são limitadas a assumir apenas os valores 0 ou 1. Essa restrição é frequentemente aplicada em problemas de decisão binária, como a escolha entre realizar ou não uma ação, selecionar ou descartar um item, ou ativar/desativar um recurso. No contexto de formação de times, a PLIB é particularmente útil para decisões como incluir ou não um indivíduo em um time específico.

A PLI, em suas diferentes formas (PLI pura, PLIM e PLIB), é uma ferramenta poderosa para resolver problemas de otimização em diversas áreas, como logística, finanças, engenharia e ciência da computação. No entanto, a complexidade computacional desses problemas tende a ser maior do que a dos problemas de Programação Linear contínua, devido à natureza discreta das variáveis. Por isso, técnicas avançadas como *Branch and Bound*, *Branch and Cut* e heurísticas são frequentemente empregadas para encontrar soluções viáveis e ótimas de forma eficiente (WOLSEY, 2020).

3.4 Algoritmo *Branch and Bound*

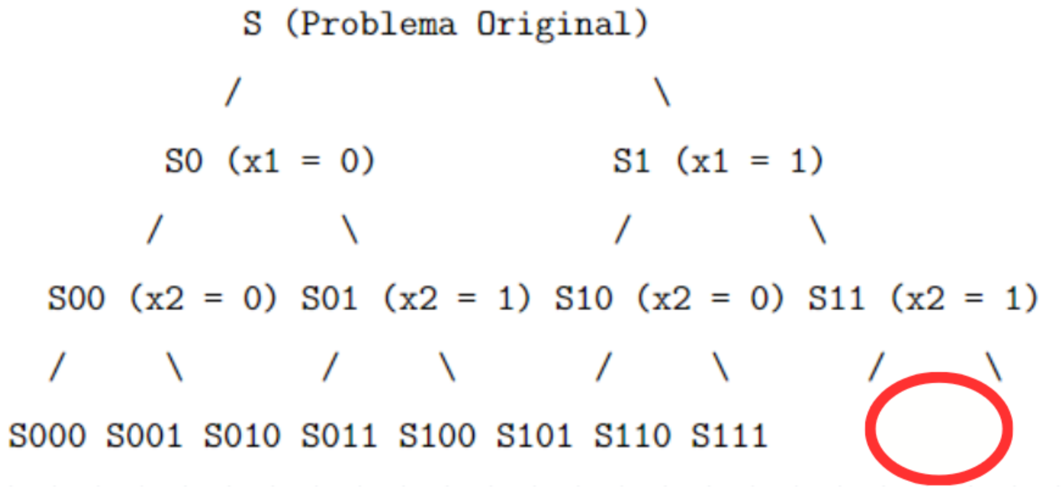
O algoritmo de *Branch and Bound* (B&B) é uma técnica de ramificação e avaliação progressiva utilizada para resolver problemas de Programação Linear Inteira. O método consiste em dividir o problema original em subproblemas menores, com o intuito de reduzir a complexidade e facilitar a resolução. Cada subproblema gerado é, por sua vez, subdividido em problemas ainda menores, repetindo o processo de decomposição até que os subproblemas se tornem suficientemente simples para serem resolvidos diretamente. A abordagem visa explorar de maneira sistemática o espaço de soluções, descartando soluções inviáveis por meio de uma avaliação contínua das fronteiras do problema(HILLER; LIEBERMAN, 2013). O objetivo é encontrar a solução ótima (máxima ou mínima) para um problema original, explorando o espaço de soluções possíveis, evitando assim a necessidade da avaliação de todas as combinações. Cada ramificação corresponde a uma escolha ou decisão que reduz o espaço de busca. Para cada nó, o algoritmo calcula um limite inferior ou um limite superior do valor da solução ótima naquele ramo. Primeira Ramificação Como mencionado acima, o problema original é dividido em S subconjuntos menores. Por exemplo, se o problema original é binário, pode-se ramificar fixando o valor de uma variável S em dois possíveis valores, como apresentado a seguir:

$$S_0 = \{x \in S : x_1 = 0\}$$

$$S_1 = \{x \in S : x_1 = 1\}$$

A Figura 1 ilustra a estrutura de uma árvore de busca gerada pelo algoritmo *Branch and Bound* para resolver um problema de otimização.

Figura 1 – Representação de uma árvore binária ramificada, onde é destacado a podagem quando o limite é ultrapassado.



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

O nó raiz da árvore representa o problema original S, que é subsequentemente dividido em subproblemas menores por meio de ramificações (branches) em variáveis de decisão x_1 e x_2, que podem assumir valores 0 ou 1.

No primeiro nível da árvore, o problema S é ramificado em dois subproblemas: S_0 (quando $x_1 = 0$) e S_1 (quando $x_1 = 1$). Cada um desses subproblemas é, por sua vez, ramificado com base no valor de x_2, resultando em quatro subproblemas no segundo nível: S_{00} (quando $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$), S_{01} (quando $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$), S_{10} (quando $x_1 = 1$ e $x_2 = 0$) e S_{11} (quando $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$).

No terceiro nível, cada subproblema é novamente ramificado, resultando em oito nós folha: S_{000}, S_{001}, S_{010}, S_{011}, S_{100}, S_{101}, S_{110} e S_{111}. Cada nó folha representa uma solução candidata completa, onde todas as variáveis de decisão foram atribuídas.

O B&B utiliza essa estrutura de árvore para explorar sistematicamente as soluções candidatas, eliminando subproblemas que não podem levar a uma solução ótima com base em limites (bounds) calculados. Essa abordagem reduz o espaço de busca e melhora a eficiência do algoritmo.

Em cada nível da árvore, uma variável é fixada, e os nós filhos representam todas as combinações possíveis de valores para as variáveis. Durante o processo, ramos podem ser podados quando os limites calculados indicam que a exploração daquela região não é viável, como destacado na Figura 1. Em problemas de Programação Inteira (PI) onde as variáveis assumem mais de dois valores, é recomendado definir intervalos específicos para a variável ramificada em cada novo subproblema (HILLER; LIEBERMAN, 2013).

4 TRABALHOS RELACIONADOS

Neste capítulo, são apresentados os estudos mais relevantes da literatura que contribuem para a contextualização do problema abordado nesta pesquisa. As Seções 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 discutem trabalhos que tratam de questões relacionadas, destacando suas abordagens, metodologias e contribuições para o tema em questão.

4.1 Problema de Formação de Time utilizando Redes Sociais

Dado um conjunto de especialistas participantes de uma organização, um problema prático amplamente discutido na literatura é o agrupamento de um subconjunto desses especialistas para a realização de uma tarefa. A complexidade deste problema aumenta quando se considera a importância da maximização da eficiência da comunicação entre os membros deste subconjunto. Uma vez que a distância ou a falta de conexão entre eles pode impactar diretamente o desempenho deste subconjunto trabalhando como uma equipe. Cientificamente, podemos definir esse problema como o Problema de Formação de Equipes utilizando Redes Sociais (PFERS). Mais formalmente, podemos representar a entrada deste problema utilizando um grafo orientado ponderado $G = (V, E, S, s, c)$, onde:

- V: Conjunto de nós (especialistas);
- E: Conjunto de arco (conexões entre especialista);
- E: Conjunto de habilidades, tal que, $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ são as habilidades necessárias para realização de uma tarefa;
- Cada especialista $v \in V$ possui um subconjunto de habilidades $s(v) \subseteq S$.
- e cada arco $uv \in E$ possui um peso real representando o custo de comunicação entre dois especialistas u, v. Este custo é dado pela função $c : E \to \mathbb{R}$.

Então o objetivo do PFERS é encontrar um subconjunto de especialistas $T \subseteq V$ tal que:

- O subconjunto definido cubra todas as habilidades requisitadas através de uma função de demanda $D : S \to \mathbb{R}$; e
- Minimize o custo de comunicação entre os especialistas escolhidos.

Onde, o custo de comunicação é definido pela função a seguir: $\text{Custo de comunicação} = \sum_{v \in T} \sum_{u \in T} c(v, u)$

4.2 Problema de Formação de Múltiplos Times

O Problema de Formação de Múltiplos Times (PMFT) é uma extensão do Problema de Formação de Times (PFT), originalmente proposto por (LAPPAS *et al.*, 2009). Enquanto o PFT foca na criação de um único subconjunto de especialistas com habilidades específicas, o PMFT amplia essa abordagem para contemplar múltiplos projetos, permitindo que esses especialistas aloquem frações de seu tempo a diferentes equipes (GUTIERREZ *et al.*, 2016). Essa generalização introduz uma camada adicional de complexidade, uma vez que requer a alocação eficiente de habilidades em cenários onde os indivíduos podem contribuir simultaneamente em mais de uma equipe. Matematicamente definimos:

- Um conjunto de n especialistas;
- Onde cada especialista i possui uma habilidade única s_i;
- Um conjunto de m equipes;
- Onde cada projeto k demanda uma quantidade específica $d_{k,s}$ de especialistas com habilidade s.

O objetivo é alocar os especialistas às equipes de forma a maximizar a satisfação das relações sociais. A alocação é representada por uma variável binária $x_{i,k}$, como apresentado a seguir:

$$x_{i,k} = \begin{cases} 1, & \text{se o indivíduo } i \text{ é alocado ao projeto } k, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Além disso, cada especialista i pode dedicar uma fração $f_{i,k}$ do seu tempo a equipe k, onde $0 \leq f_{i,k} \leq 1$. A restrição de capacidade é dada por:

$$\sum_{k=1}^{m} f_{i,k} \leq 1, \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

A satisfação das relações sociais é calculada com base na matriz sociométrica A, onde $a_{i,j} \in \{-1,0,+1\}$ representa a predisposição do especialista i em trabalhar com o especialista j. O valor total de satisfação S é dado por:

$$S = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_{i,k} \cdot x_{j,k}.$$

O objetivo do PFMT é maximizar S, sujeito às restrições de demanda de cada equipe:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,k} \cdot ⊮(s_i = s) \geq d_{k,s}, \quad \forall k \in \{1,2,\ldots,m\}, \forall s \in \mathscr{S},$$

onde $⊮(s_i = s)$ é uma função indicadora que retorna 1 se $s_i = s$ e 0 caso contrário, e $\mathscr{S}$ é o conjunto de todas as habilidades. A sociometria, introduzida por (MORENO, 1941), desempenha um papel central no PFMT. A matriz sociométrica A é utilizada para quantificar as relações sociais entre os especialistas, influenciando diretamente a coesão e a produtividade das equipes. A maximização das relações positivas ($a_{i,j} = +1$) e a minimização das relações negativas ($a_{i,j} = -1$) são essenciais para o sucesso dos projetos (BALLESTEROS-PÉREZ *et al.*, 2012).

Para resolver o PFMT, (GUTIERREZ *et al.*, 2016) propuseram três abordagens: Programação por Restrições, Busca Local e *Variable Neighborhood Search* (VNS). Dentre essas, o VNS destacou-se como a mais eficaz, demonstrando resultados superiores em termos de qualidade da solução e tempo de execução. Posteriormente, Figueiredo e Campêlo (2018) propuseram o uso do *Simulated Annealing* (SA), outra meta-heurística inspirada no processo de recozimento em metalurgia.

4.3 Problema de Problema de Formação de Times com Múltiplas Habilidades

O problema da formação eficiente de equipes de especialistas para tarefas que exigem múltiplas habilidades proposto por Fitzpatrick e Askin (2005), um desafio comum em ambientes industriais e de serviços. O estudo destaca a complexidade de alocar indivíduos com diferentes competências de maneira a maximizar a eficiência e a coesão da equipe, minimizando custos e conflitos. Os autores identificam que a literatura existente, como os trabalhos de (HACKMAN, 2002) e (COHEN; BAILEY, 1997), fornece bases teóricas sobre dinâmicas de grupo e eficácia coletiva, mas carece de métodos quantitativos para otimizar a formação de equipes em cenários multifacetados.

Para resolver esse problema, Fitzpatrick e Askin propõem um modelo matemático baseado em programação inteira, que considera tanto a proficiência dos trabalhadores em habilidades específicas quanto a compatibilidade interpessoal. O modelo visa maximizar a função objetivo, como exemplificado na equação a seguir:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} x_{ij} - \sum_{k=1}^{q} c_k y_k, \tag{4.1}$$

onde p_{ij} representa a proficiência do trabalhador i na habilidade j, x_{ij} é uma variável binária que indica se o trabalhador i é alocado para a habilidade j, c_k denota o custo de conflito associado à equipe k, e y_k é uma variável binária que indica a formação da equipe k. Restrições adicionais garantem que cada tarefa seja atribuída a um número adequado de trabalhadores e que as equipes sejam balanceadas em termos de habilidades e compatibilidade.

O estudo também referencia trabalhos relacionados, como o de (BELBIN, 2010) sobre papéis de equipe e o de (GUZZO; DICKSON, 2001) sobre fatores contextuais que influenciam a eficácia das equipes. A solução proposta por Fitzpatrick e Askin foi validada por meio de simulações computacionais e estudos de caso, demonstrando sua eficácia em cenários reais. Os resultados indicam que o modelo não apenas melhora a eficiência operacional, mas também reduz conflitos e aumenta a satisfação dos trabalhadores, contribuindo para a literatura sobre gestão de recursos humanos e otimização de processos.

4.4 Problema de Formação de Times Sociotécnicos

O Problema de Formação de Times Sociotécnicos (PFTS) de (CAMPÊLO *et al.*, 2018), intitulado "The Sociotechnical Teams Formation Problem: A Mathematical Optimization Approach", aborda o problema de formação de times sociotécnicos, que integra aspectos técnicos e sociais na alocação de indivíduos a equipes. O problema é relevante em contextos onde a eficiência das equipes depende não apenas das habilidades técnicas dos indivíduos, mas também de sua compatibilidade interpessoal e capacidade de colaboração.

O estudo se baseia em trabalhos anteriores que destacam a importância de considerar tanto habilidades técnicas quanto dinâmicas sociais na formação de equipes. Por exemplo, (FITZPATRICK; ASKIN, 2005) propuseram modelos de otimização para alocar trabalhadores com múltiplas habilidades, enquanto (BELBIN, 2010) enfatizou o papel da compatibilidade interpessoal e dos papéis em equipes. Além disso, (ANAGNOSTOPOULOS *et al.*, 2012) exploraram a formação de equipes em redes sociais, considerando custos de comunicação. (CAMPÊLO *et al.*, 2018) avançam nessa linha ao propor um modelo matemático que integra explicitamente aspectos técnicos e sociais, oferecendo uma abordagem mais abrangente para o problema.

A resolução proposta pelos autores é um modelo de programação inteira que visa maximizar a eficiência das equipes. O modelo considera duas dimensões principais: (1) a adequação das habilidades técnicas dos indivíduos às demandas das tarefas e (2) a compatibilidade social entre os membros da equipe. A função objetivo é definida como na equação de exemplo:

$$Maximizar\ Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} x_{ij} - \sum_{k=1}^{q} c_k y_k, \tag{4.2}$$

onde:

- p_{ij} representa a proficiência do indivíduo i na habilidade j;
- x_{ij} é uma variável binária que indica se o indivíduo i é alocado para a habilidade j;
- c_k denota o custo de conflito associado à equipe k;
- y_k é uma variável binária que indica a formação da equipe k.

Restrições adicionais garantem que cada tarefa seja atribuída a um número adequado de trabalhadores e que as equipes sejam balanceadas em termos de habilidades e compatibilidade.

Trabalhos relacionados, como o de (WI *et al.*, 2009) sobre formação de equipes em redes sociais e o de (HEIMERL; KOLISCH, 2010) sobre alocação de recursos em múltiplos projetos, complementam a discussão ao fornecer perspectivas adicionais sobre a integração de habilidades técnicas e sociais.

5 O PROBLEMA DE FORMAÇÃO DE MÚLTIPLOS TIMES COM MÚLTIPLAS HABILIDADES PRECIFICADO

Neste capítulo, apresenta-se o PFMT_{MHP}, objeto de estudo deste trabalho. A definição do Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades PFMT_{MH} é detalhada na Seção 5.1, pois este pode ser considerado o problema base para o problema foco deste estudo, uma vez que o PFMT_{MHP} é uma variação deste. Em seguida, na Subseção 5.1.1, discute-se o modelo de Programação Linear Inteira, mais eficaz existente na literatura, para resolução do PFMT_{MH}. A representação das soluções propostas para este problema são apresentadas na Seção 5.2. Por fim, na Seção 5.3, apresenta-se as alterações necessárias no modelo apresentado na Subseção 5.1.1 para resolução do PFMT_{MHP}.

5.1 O PROBLEMA DE FORMAÇÃO DE MÚLTIPLOS TIMES COM MÚLTIPLAS HABILIDADES

O PFMT_{MH} emerge como uma extensão e integração de conceitos previamente explorados na literatura, unindo características do PMFT, conforme abordado por Gutierrez *et al.* (2016), e do PFTS, conforme descrito por Campêlo *et al.* (2018). Essa combinação resulta em um problema de otimização combinatória que visa a alocação ótima de um conjunto de especialistas, cada um dotado de perfis variados de competências e níveis de proficiência em múltiplas habilidades, para constituir um determinado número de equipes, onde a alocação de especialistas precisam satisfazer um conjunto de requisitos e restrições específicos de cada equipe, estendendo o modelo de formação de múltiplos times, os indivíduos podem ser alocados a várias equipes por meio de frações de tempo, desde que sua alocação total não ultrapasse 100% de sua capacidade.

5.1.1 Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades

O PFMT_{MH} é definido a partir de uma túpla-8 (P,H,K,Q,D',R,S,W), que representa:

- Um **conjunto de projetos** $P = \{p_1,\ldots,p_m\}$ para os quais os indivíduos devem ser alocados;
- Um **conjunto de indivíduos disponíveis** $H = \{h_1,\ldots,h_n\}$ que podem ser alocados aos projetos P;

- Um **conjunto de habilidades** $K = \{k_1, \ldots, k_r\}$ que os indivíduos em H possuem. Admite-se que qualquer indivíduo em H pode possuir múltiplas habilidades em K. Seja $L_i = \{k_a \in K : h_i \in Q_a\}$ o conjunto de habilidades de $h_i \in H$;
- Um **conjunto de listas de indivíduos** $Q = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_r\}$, onde Q_α contém os indivíduos de H que compartilham a habilidade $k_\alpha \in K$;
- Um **conjunto de frações de alocação permitidas para os indivíduos** $D' = \{d_1, \ldots, d_t\}$;
- Uma **matriz de requisitos dos projetos** $R = [r_{\alpha j}]_{r\times m}$, onde cada entrada $r_{\alpha j}$ é um valor real não-negativo que especifica quantos indivíduos (ou frações deles, se permitido) com a habilidade $k_\alpha \in K$ são necessários para o projeto $p_j \in P$;
- Uma **matriz sociométrica** $S = [s_{ij}]_{n\times n}$ que contém a predisposição de cada indivíduo $h_i \in H$ para trabalhar com o indivíduo $h_j \in H$;
- Uma **lista de pesos** W com m números que descreve as **prioridades dos projetos**.

Variáveis de decisão:

y_{ilu}: Assume o valor 1 se o indivíduo h_i é alocado à equipe p_l com a fração de tempo de alocação d_u, e 0 caso contrário, $\forall h_i \in H, \forall p_l \in P$ e $\forall d_u \in D$.

z_{ijluv}: Assume o valor 1 se os indivíduos h_i e h_j estão na mesma equipe p_l com as frações de tempo de alocação d_u e d_v, e 0 caso contrário, $\forall h_i, h_j \in H, \forall p_l \in P$ e $\forall d_u, d_v \in D$.

y'_{ilua}: Assume o valor 1 se o indivíduo h_i é alocado à equipe p_l com a fração de tempo de alocação d_u e a habilidade k_a, e 0 caso contrário, $\forall p_l \in P, \forall h_i \in H_l, \forall d_u \in D$ e $\forall k_a \in L_i \cap K_l$.

Para construir a função objetivo, utilizamos a variável $z_{ijluv} \in \{0,1\}$, que indica se (valor 1) ou não (valor 0) o par de trabalhadores $h_i, h_j \in H$ está em uma mesma equipe $p_l \in P$, com frações de alocação de tempo iguais a $d_u \in D$ e $d_v \in D$, respectivamente. Considerando essas variáveis e utilizando $s'_{ij} = 2 - s_{ij}/\tau \in [1,3]$, podemos definir A "harmonia global"das equipes como sendo $E' = \sum_{l=1}^{m} w_l e'_l$, onde:

$$e'_l = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{\sum\limits_{h_i,h_j \in H}\sum\limits_{d_u,d_v \in D} s'_{ij} d_u d_v z_{ijluv}}{\left(\sum\limits_{k_a \in K} r_{al}\right)^2} \right) \in [0,1]. \tag{5.1}$$

Assim, a função objetivo do PFMT_{MH} busca minimizar a soma ponderada das eficiências dos projetos (e'_i), ou seja, minimizar essa função é equivalente a maximizar a "harmonia global"das equipes, que mede a qualidade das interações entre os membros. Logo, nosso objetivo é minimizar: $\sum_{p_l \in P} w_l e'_l$.

Sujeito a:

- Esta restrição de linearização articula as variáveis de alocação individual (y_{ilu}) com as de alocação pareada (z_{ijluv}).

  $$y_{ilu} + y_{jlv} - z_{ijluv} \leq 1, \quad \forall h_i, h_j \in H, i \neq j, \forall p_l \in P, \forall d_u, d_v \in D$$

  Formalmente, impõe que a variável z_{ijluv} só pode assumir valor 1 se, e somente se, ambos y_{ilu} e y_{jlv} forem iguais a 1, representando de forma linear o produto $y_{ilu} \cdot y_{jlv}$.

- Esta inequação assegura que o tempo total de dedicação de um indivíduo não exceda seu limite de 100%.

  $$\sum_{p_l \in P} \sum_{d_u \in D} d_u y_{ilu} \leq 1, \quad \forall h_i \in H$$

  A soma das frações de tempo (d_u) alocadas a um indivíduo h_i através de todos os projetos (P) não pode ultrapassar o tempo total de trabalho disponível para dito indivíduo.

- Esta restrição estabelece a relação entre a alocação de tempo total de um indivíduo a um projeto e a alocação de tempo para a execução de suas habilidades específicas.

  $$\sum_{d_u \in D} d_u y_{ilu} \geq \sum_{d_u \in D} \sum_{k_a \in L_i \cap K_l} d_u y'_{ilua}, \quad \forall p_l \in P, \forall h_i \in H_l$$

  A soma das frações de tempo que um indivíduo h_i dedica a um projeto p_l para o exercício de habilidades específicas ($k_a \in L_i$) não pode exceder a fração de tempo total que este indivíduo possui alocada para o mesmo projeto.

- Garante que os requisitos de habilidades de cada projeto sejam satisfeitos.

  $$\sum_{h_i \in Q_a} \sum_{d_u \in D} d_u y'_{ilua} \geq r_{al}, \quad \forall p_l \in P, \forall k_a \in K_l$$

  Para cada projeto p_l e cada habilidade requerida k_a, a soma das frações de tempo de trabalho de todos os indivíduos ($h_i \in Q_a$) alocados para exercer especificamente tal habilidade deve ser maior ou igual à demanda do projeto (r_{al}) por essa habilidade.

- Define a natureza binária das variáveis de decisão do modelo.

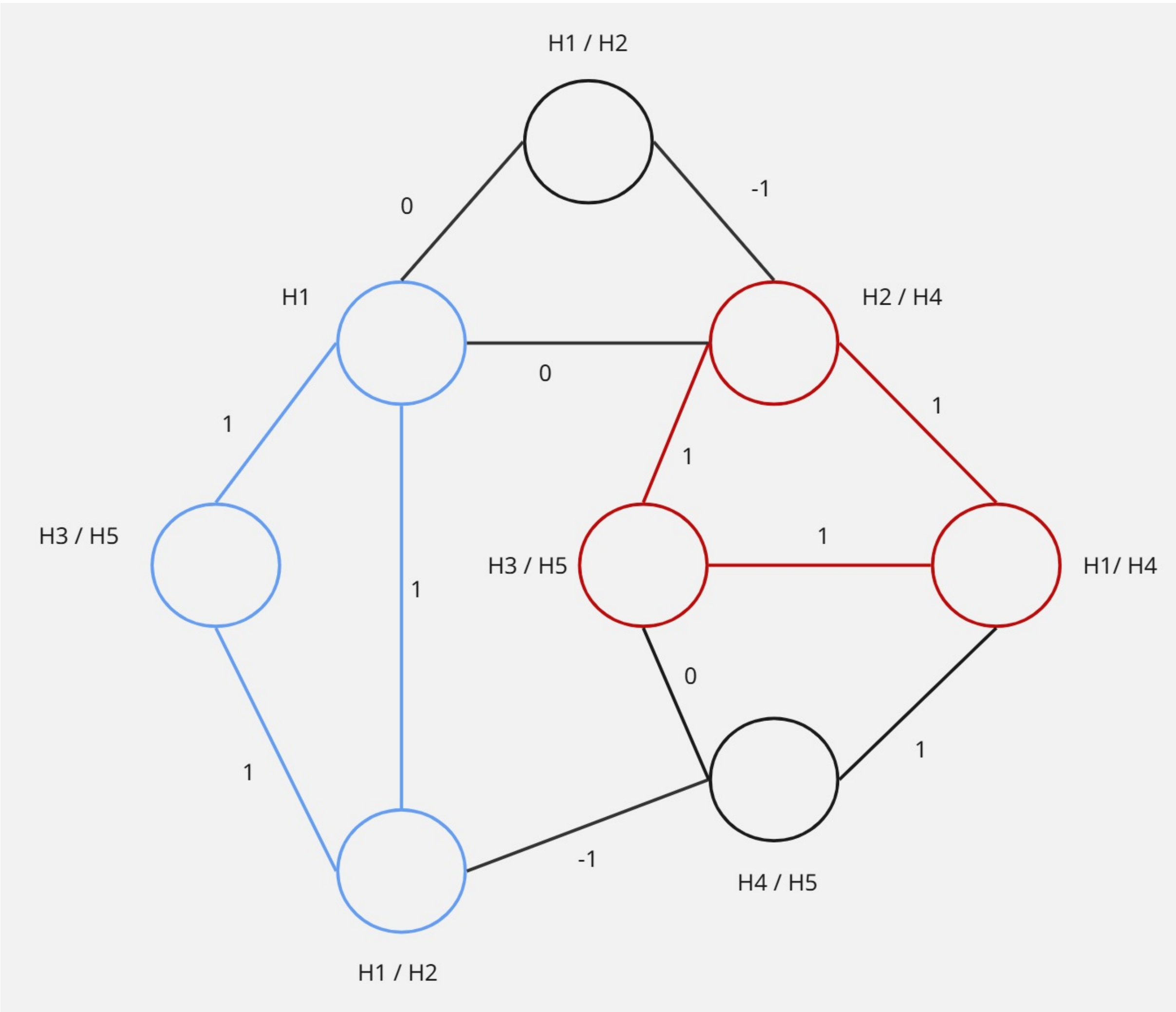
  $$y_{ilu}, z_{ijluv}, y'_{ilua} \in \{0, 1\}$$

5.1.2 *Representação da resolução do Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades*

A Figura 2 ilustra um grafo ponderado, onde os vértices representam especialistas e as arestas indicam a afinidade entre pares de especialistas. Os pesos atribuídos às arestas assumem valores:

- Peso 1 indica afinidade (compatibilidade) entre dois especialistas;
- Peso 0 representa neutralidade entre especialistas;
- Peso -1 representa incompatibilidade entre especialistas.

Figura 2 – Representação de um grafo, onde a alocação de dois times(subconjuntos) é realizada respeitando as restrições do modelo.



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Cada vértice está rotulado com as habilidades que o especialista detém, denotadas por H_k, onde k é o identificador da habilidade.

Dois subconjuntos de vértices são destacados com cores distintas, representando dois times formados para execução de tarefas diferentes, com base nas seguintes diretrizes:

- Time azul: composto por especialistas com as habilidades $H1$, $H2$, $H3$ e $H5$. O grupo foi formado visando a maximização da afinidade entre os membros (isto é, priorizando arestas com peso 1), respeitando a restrição de capacidade de dedicação de cada especialista, a cobertura da demanda de habilidades e a consistência entre a dedicação total e alocação por habilidade.
- Time vermelho: formado por especialistas que cobrem as habilidades $H1$, $H2$, $H3$, $H4$ e $H5$, também buscando maximizar a afinidade interna entre os membros do time, respeitando todas as restrições.

5.1.3 Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades Precificado

Para a versão precificada, inicialmente é necessário adicionar mais duas entradas, ou seja, agora será necessário uma túpla-10 $(P, H, K, Q, D', R, S, W, C, V)$, onde as novas entradas C e V representam respectivamente:

- um **conjunto de Custos** $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ existentes para cada indivíduo em H;
- um **conjunto de Investimentos** $V = \{c_1, \ldots, c_m\}$ existentes para cada projeto em P;

Assim, para a resolução do PFMT_{MHP} usa-se o modelo de PFMT_{MH} adicionando também a restrição:

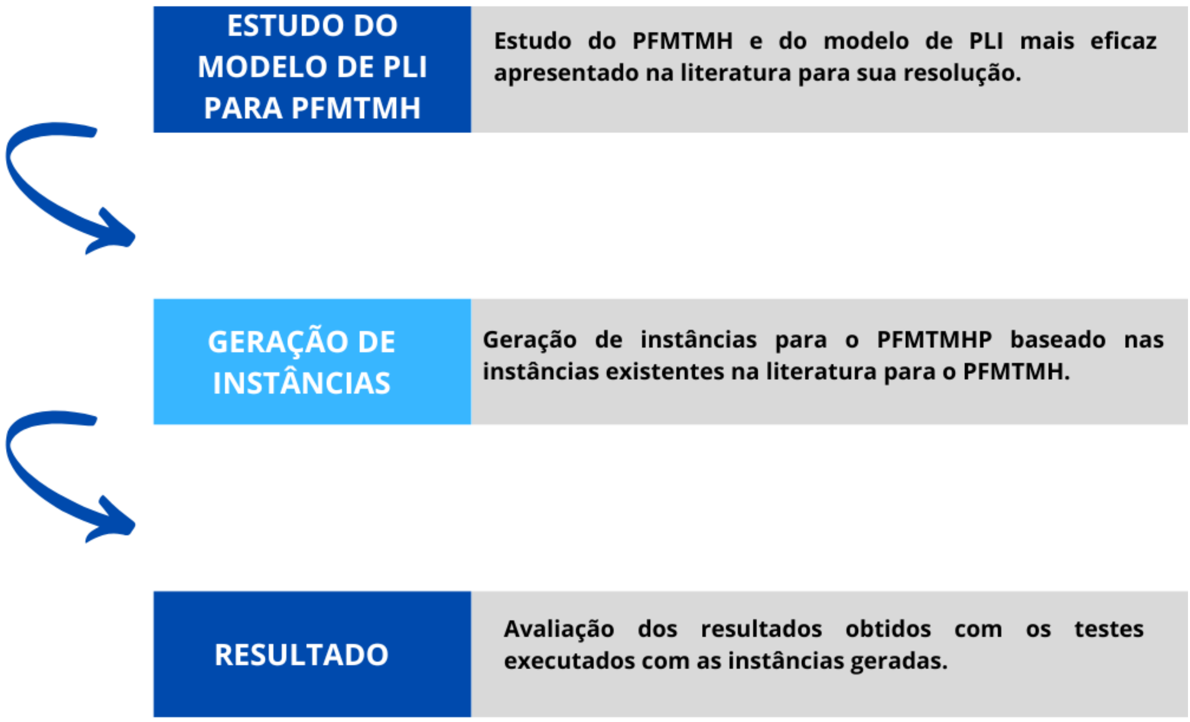
$$\sum_{i \in H} \sum_{u \in D} \sum_{k_a \in K} C_i \cdot u \cdot y'_{i,l,u,a} \leq V_l, \forall p_l \in P$$

Esta restrição impõe um teto orçamentário para cada projeto p_l do conjunto P. Ela assegura que o custo total agregado, derivado da alocação de todos os indivíduos (H) com suas respectivas frações de tempo (D) e custos associados (C_i), não exceda o orçamento máximo (V_l) estipulado para cada projeto p_l.

6 METODOLOGIA

As etapas metodológicas seguidas para a realização desta pesquisa são descritas mais detalhadamente a seguir. Abaixo é apresentado um fluxo que exemplifica as etapas a seguir:

Figura 3 – Fluxo das etapas que constituem a Metodologia.



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

6.1 Estudo do Modelo de Programação Linear Inteira para a Resolução do Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades e Extensões para sua Versão Precificada

A primeira etapa desta pesquisa consistiu em um estudo detalhado do $PFMT_{MH}$, com ênfase no modelo de PLI identificado na literatura como a abordagem mais eficaz para sua resolução. Essa etapa teve como principal objetivo compreender a estrutura formal do problema, suas variáveis de decisão, a função objetivo e o conjunto de restrições que asseguram a viabilidade e qualidade das soluções obtidas.

A função objetivo do modelo busca maximizar a harmonia entre os membros das equipes formadas, considerando a matriz sociométrica que representa as relações interpessoais entre os indivíduos. As variáveis de decisão permitem modelar a alocação fracionária dos especialistas aos projetos, bem como a atribuição de habilidades específicas dentro de cada equipe. As restrições impõem limites sobre a dedicação máxima de cada indivíduo, garantem a cobertura mínima das habilidades exigidas por projeto e asseguram a coerência entre a dedicação total e a alocação por habilidade.

Este estudo preliminar foi fundamental para identificar os pontos de adaptação necessários na formulação matemática, viabilizando a posterior incorporação de novos critérios, como a restrição de custos na versão precificada do problema.

6.1.1 Proposta de Alterações para a Versão Precificada (PFMTMHP)

A partir do aprofundamento no modelo original do PFMT_{MH}, esta etapa teve como objetivo propor e implementar as modificações necessárias para sua adaptação à nova versão do problema: o Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades Precificado (PFMT_{MHP}). Essa extensão visa incorporar restrições econômicas reais ao processo de alocação de especialistas, tornando o modelo mais aderente a contextos organizacionais onde o orçamento constitui um fator limitante.

Conforme descrito na Seção 5.1.3, foram introduzidos dois novos parâmetros à formulação original:

- Um conjunto de custos $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, representando o custo de alocação de cada indivíduo $h_i \in H$;
- Um conjunto de orçamentos $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, que define o limite máximo de investimento disponível para cada projeto $p_j \in P$.

A principal modificação estrutural no modelo matemático foi a inclusão de uma restrição adicional que limita o custo total da alocação de indivíduos a um projeto, garantindo que esse valor não ultrapasse o orçamento previamente estipulado. Essa restrição pode ser expressa da seguinte forma:

$$\sum_{i \in H} \sum_{u \in D} \sum_{k_a \in K} C_i \cdot u \cdot y'_{i,l,u,a} \leq V_l, \quad \forall p_l \in P$$

Essa nova restrição assegura que a alocação de especialistas respeite as limitações orçamentárias de cada projeto, sem comprometer a cobertura das habilidades requeridas nem a coerência das alocações já definidas no modelo base. Com isso, o modelo passa a refletir com maior precisão os desafios enfrentados na prática, onde decisões de alocação precisam equilibrar competências técnicas, relações interpessoais e viabilidade financeira.

6.2 Geração de Instâncias e Captura das Soluções

Para validar o modelo proposto, foram utilizadas duas instâncias adaptadas a partir de casos já explorados na literatura para o PFMT_{MH}. Como discutido anteriormente, uma instância do PFMT_{MH} é formalmente representada por uma tupla-8 $(P, H, K, Q, D', R, S, W)$, onde cada componente descreve os conjuntos e parâmetros fundamentais do problema.

As instâncias foram construídas com os seguintes parâmetros:

- $|P| = 2$: número de projetos;
- $|H| = 25$: número total de indivíduos disponíveis;
- $|K| = 10$: número de tipos distintos de habilidades;
- $D' = \{1, 0.5, 0\}$: conjunto de frações possíveis de dedicação por indivíduo.

O conjunto Q foi construído de forma que 50% dos indivíduos possuíssem múltiplas habilidades, refletindo cenários realistas em que profissionais são versáteis. A matriz sociométrica S adotada é única para ambas as instâncias, assegurando consistência nas relações interpessoais simuladas. O vetor de pesos dos projetos foi definido como $W = \{0.5, 0.5\}$, atribuindo importância igual aos dois projetos considerados.

As matrizes de demanda por habilidade (R) para cada projeto nas duas instâncias de teste são apresentadas nas Tabelas 1 e 2.

Tabela 1 – Demanda de indivíduos com habilidades de S1 a S10 por projeto — Primeira Instância de Teste

S1	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**	**S7**	**S8**	**S9**	**S10**
0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
0	0	0	0	0	0.5	0.5	1.5	1.5	0

Fonte: Adaptada de FIGUEIREDO (2021)

Tabela 2 – Demanda de indivíduos com habilidades de S1 a S10 por projeto — Segunda Instância de Teste

S1	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**	**S7**	**S8**	**S9**	**S10**
2	2	0.5	0.5	1	1	0	0	0	0
2	2	0	0	0	0	1	1	1	1

Fonte: Adaptada de FIGUEIREDO (2021)

Para a geração da versão precificada (PFMT_{MHP}), foram adicionadas duas novas entradas à estrutura da instância: o vetor de custos dos indivíduos C e o vetor de orçamentos por projeto V, conforme descrito anteriormente. Neste cenário, foi considerado:

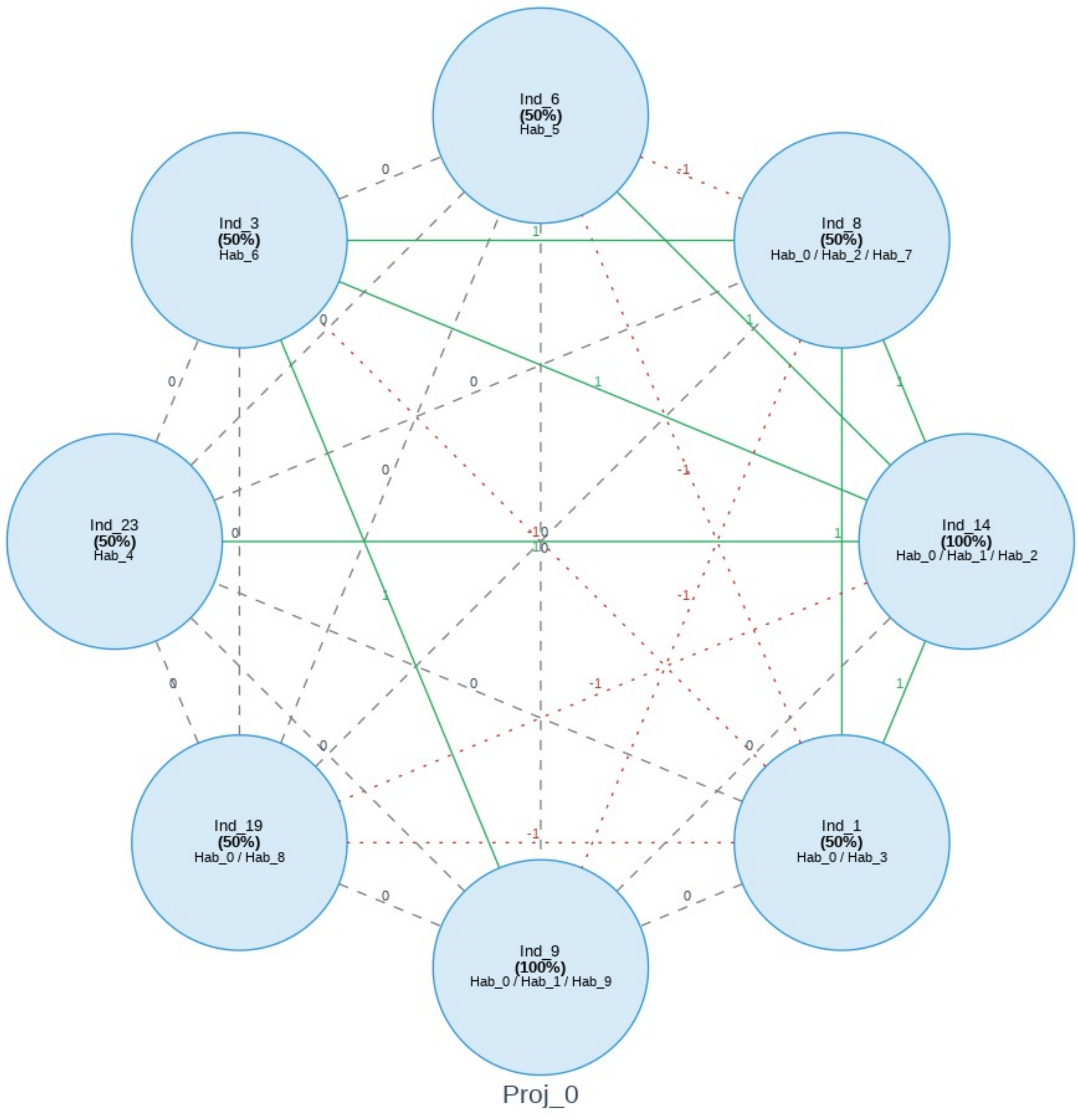
- Um custo de alocação individual variando entre R$ 1.000,00 e R$ 1.500,00;
- Um orçamento máximo por projeto fixado em R$ 20.000,00.

Esses valores foram definidos de forma a representar contextos realistas de restrição orçamentária, permitindo a avaliação do modelo em situações em que a alocação ótima de especialistas deve respeitar limites financeiros estritos, além das exigências técnicas e sociais.

6.3 Análise dos resultados obtidos

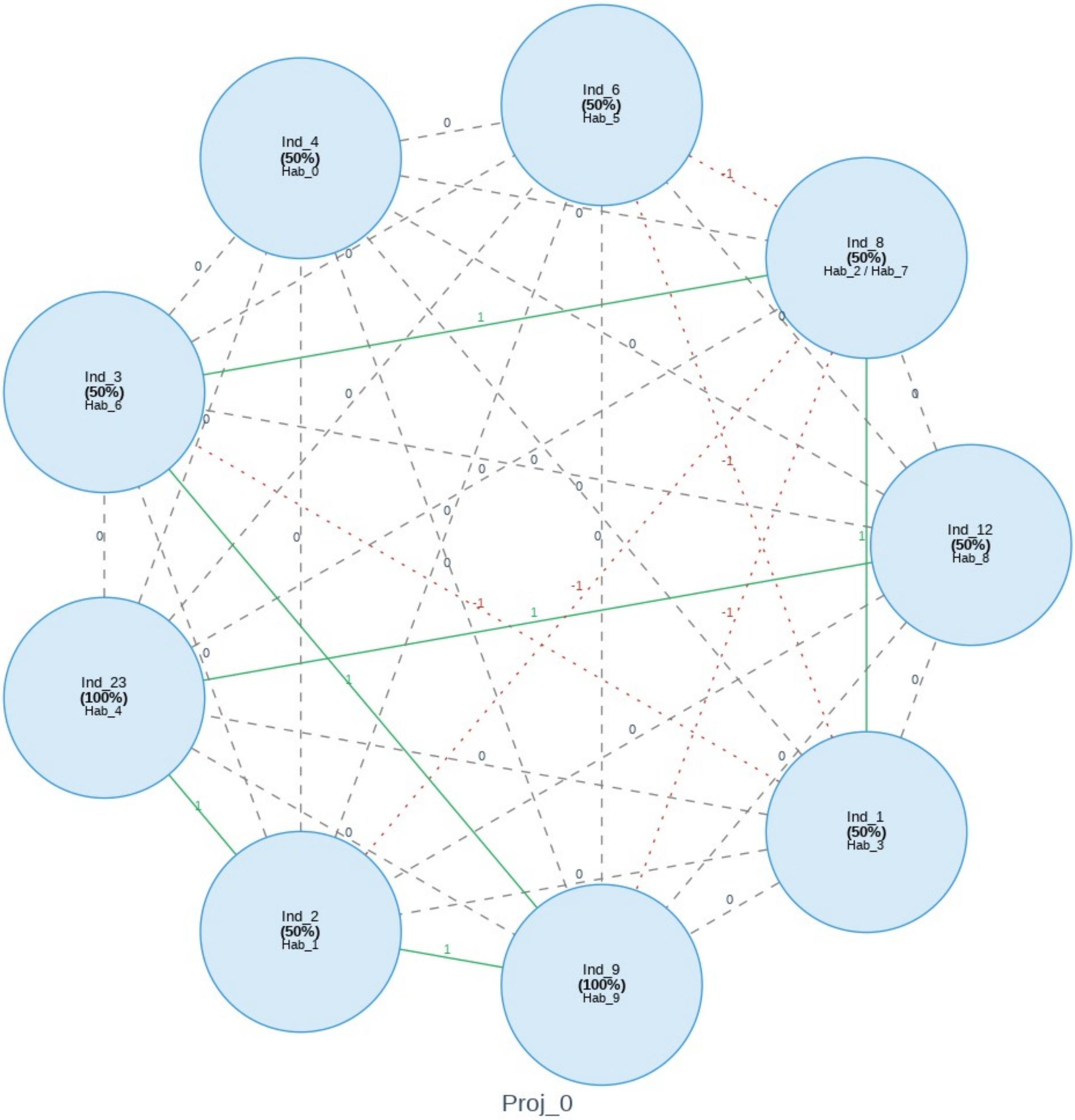
A fim de avaliar o impacto da inclusão da restrição de custos no modelo de formação de múltiplos times com múltiplas habilidades, foi realizada uma comparação entre os resultados obtidos para a versão original do problema (PFMT_{MH}) e sua versão estendida com restrição orçamentária (PFMT_{MHP}). As Figuras 4 e 5 ilustram, respectivamente, as soluções geradas para o projeto $Proj_0$ em ambas as versões do modelo.

Figura 4 – Solução para o Proj_0 utilizando o modelo sem precificação (PFMTMH).



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Figura 5 – Solução para o Proj_0 utilizando o modelo com precificação (PFMTMHP).



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Na versão sem precificação, observa-se que a composição da equipe alocada ao projeto apresenta indivíduos com alta especialização e, em alguns casos, dedicação total (100%), o que contribui para uma cobertura plena das habilidades demandadas. No entanto, esse resultado não considera os custos associados à alocação de tais indivíduos, o que pode comprometer a viabilidade financeira da solução quando aplicada a um contexto real.

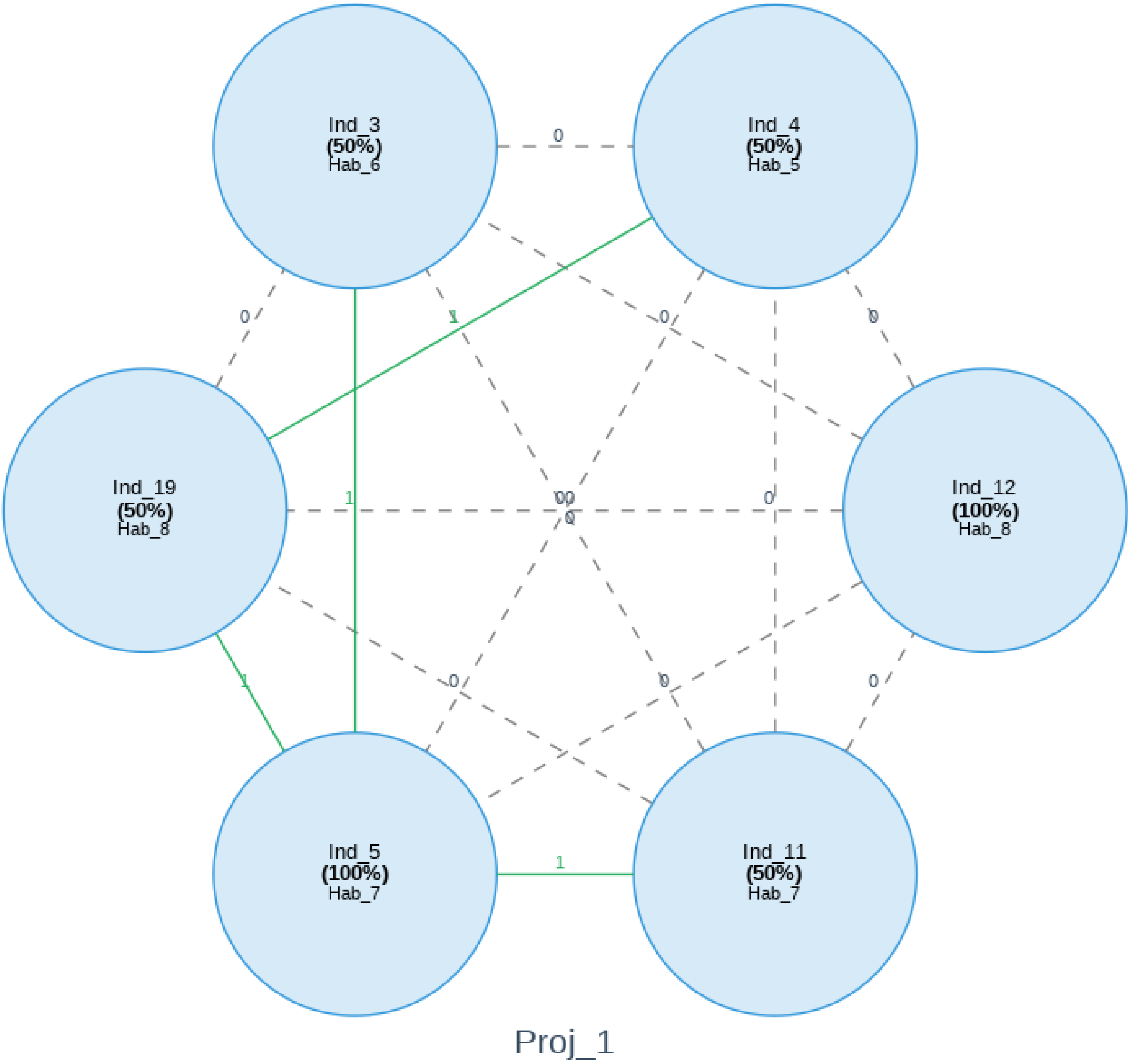
Com a introdução da restrição de orçamento no modelo precificado, o conjunto de indivíduos selecionados para o projeto é alterado de forma a respeitar o limite máximo estipulado de *R$20.000,00*. Essa mudança impacta diretamente a composição da equipe, que passa a incorporar indivíduos com múltiplas habilidades e dedicação parcial, otimizando o uso dos recursos financeiros disponíveis. Notavelmente, é possível identificar a substituição de indivíduos altamente especializados (e possivelmente mais onerosos) por indivíduos com menor custo e maior versatilidade em termos de habilidades.

Além disso, nota-se uma alteração nas relações sociométricas representadas entre os membros do time. Embora o modelo precificado preserve a harmonia em níveis aceitáveis, o compromisso entre custo e harmonia torna-se evidente, destacando o desafio em conciliar a qualidade das interações interpessoais com a restrição orçamentária.

Em resumo, a comparação evidencia que o modelo com precificação é capaz de gerar soluções financeiramente viáveis sem comprometer significativamente a cobertura das habilidades exigidas. A introdução da restrição de custos se mostra essencial para aplicações práticas, especialmente em cenários onde o orçamento é um recurso escasso e deve ser alocado de forma estratégica.

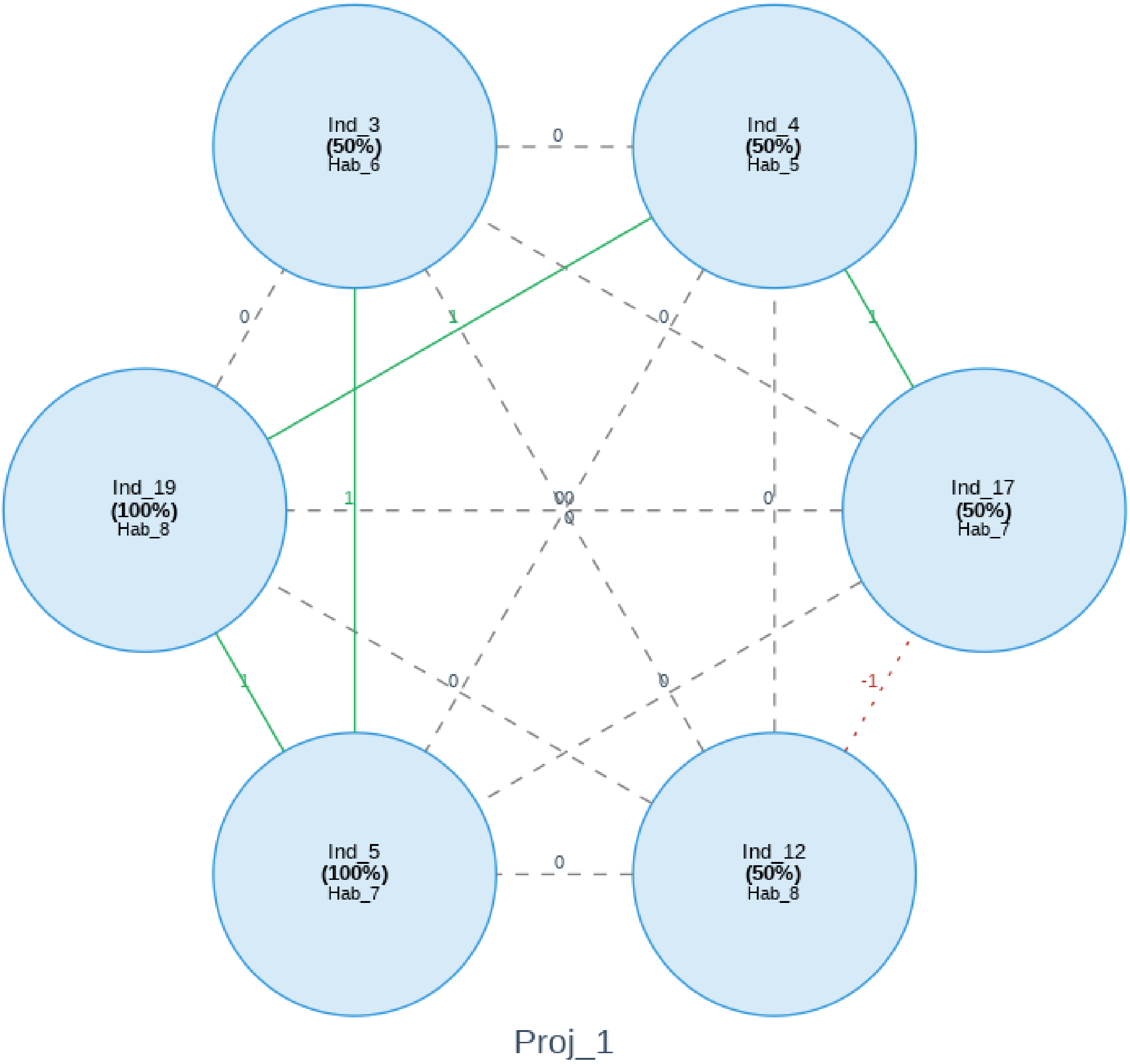
De forma análoga à análise do Proj_0, a comparação entre as soluções para o Proj_1 (Figuras 6 e 7) revela as adaptações estratégicas que o modelo precificado realiza para respeitar o teto orçamentário.

Figura 6 – Solução para o Proj_1 utilizando o modelo sem precificação (PFMTMH).



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Figura 7 – Solução para o Proj_1 utilizando o modelo com precificação (PFMTMHP).



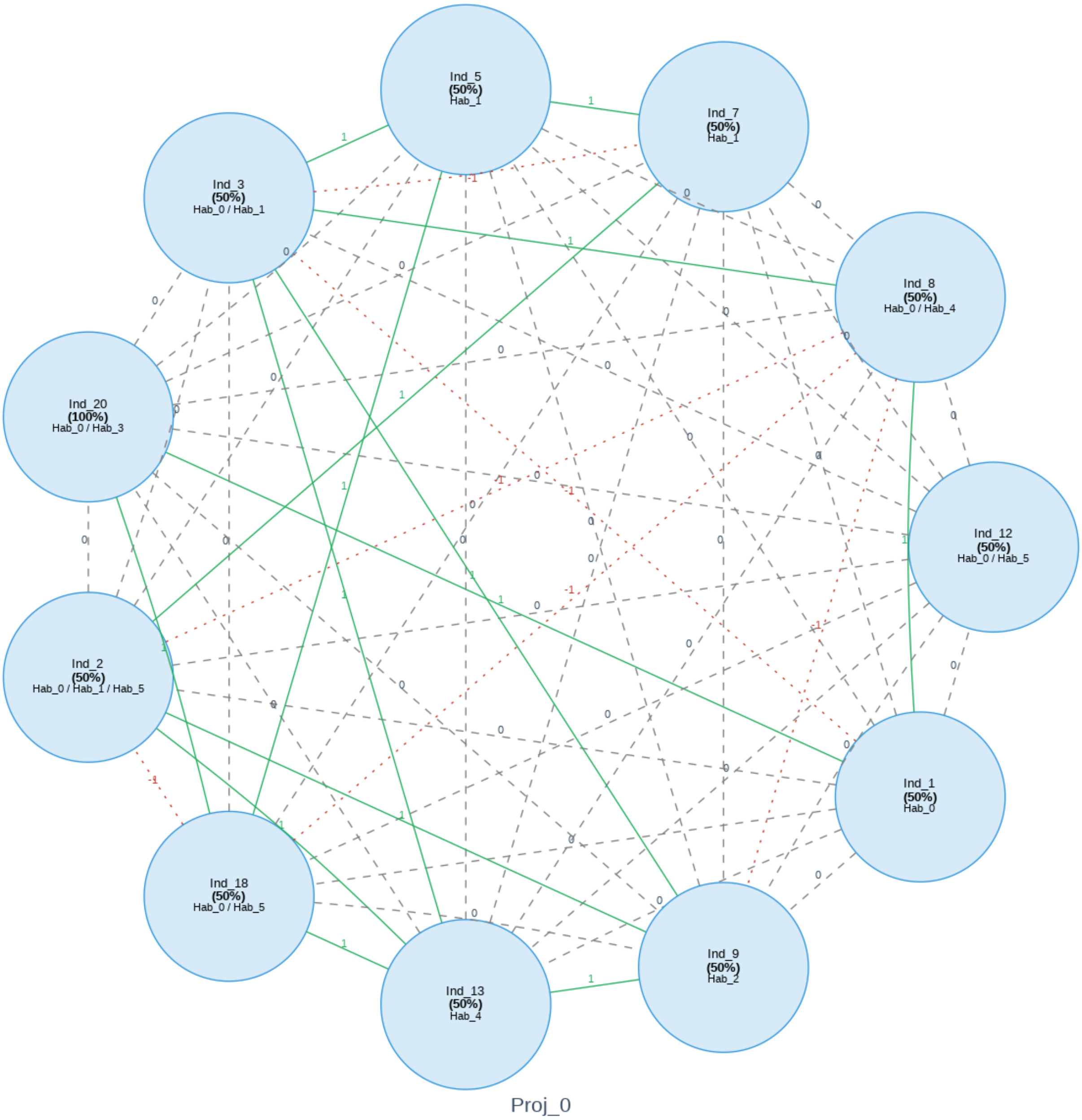
Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Na solução sem precificação (Figura 6), a equipe conta com a participação do Ind_11 e uma alocação integral (100%) do Ind_12. Já na versão precificada (Figura 7), o modelo substitui o Ind_11 pelo Ind_17 e reajusta as cargas de trabalho, reduzindo a dedicação do Ind_12 para 50% e elevando a do Ind_19 para 100%.

Essa reconfiguração demonstra a busca do otimizador por uma combinação de especialistas que, além de suprir as demandas de habilidades do projeto (como Hab_7 e Hab_8), representa um custo total inferior, mantendo-se dentro do orçamento estipulado de R$ 20.000,00. O resultado é uma equipe funcional e financeiramente viável, cuja estrutura social interna é consequentemente alterada, ilustrando o compromisso entre a otimização da harmonia e a adesão às restrições financeiras.

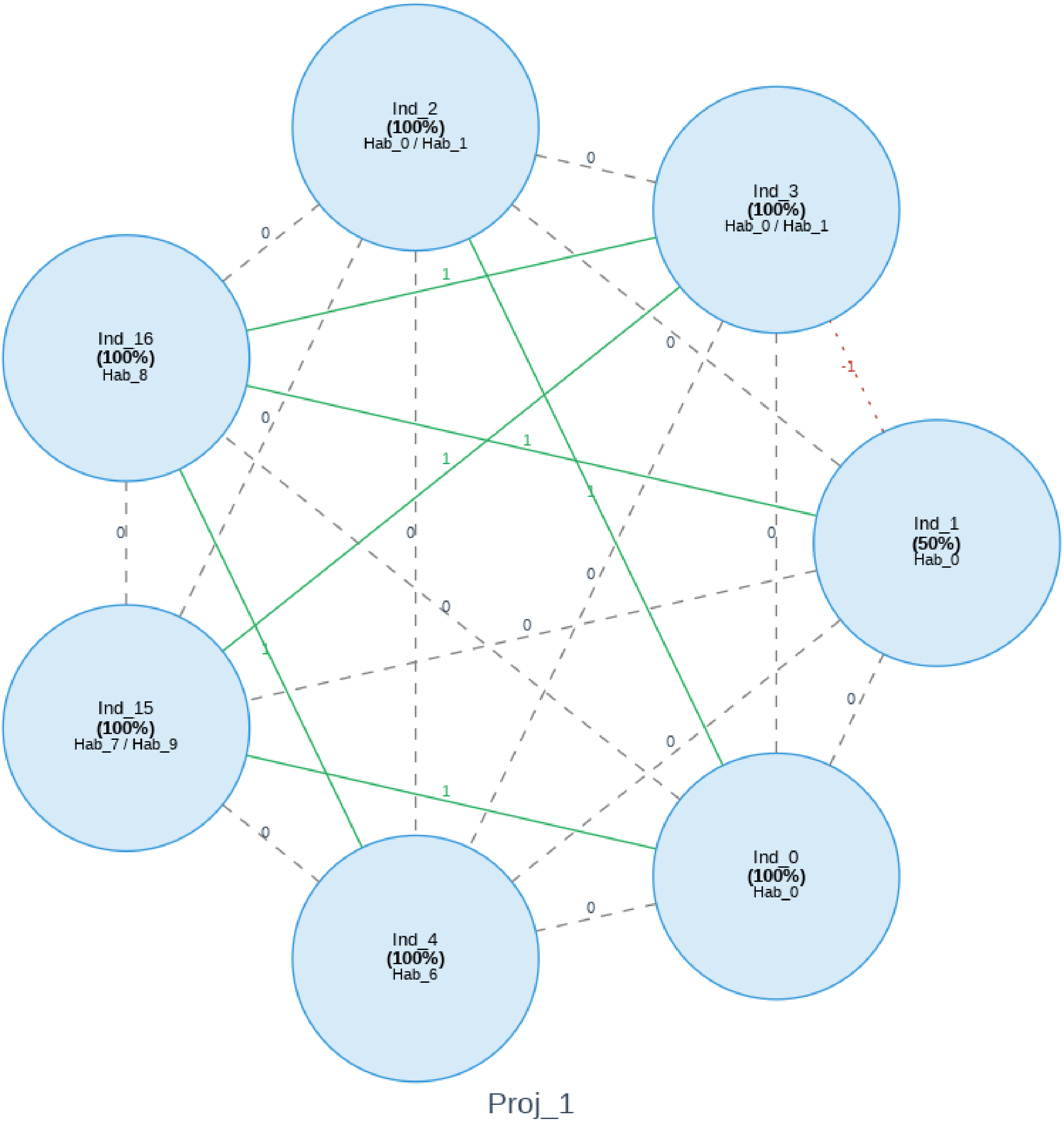
A mesma análise comparativa foi estendida para a segunda instância de teste, que apresenta diferentes demandas de habilidades. As Figuras 8 e 9 ilustram, respectivamente, as soluções geradas para o projeto $Proj_0$ em ambas as versões do modelo, para a instância de teste 2.

Figura 8 – Solução para o Proj_0 utilizando o modelo sem precificação (PFMTMH).



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Figura 9 – Solução para o Proj_0 utilizando o modelo com precificação (PFMTMHP).

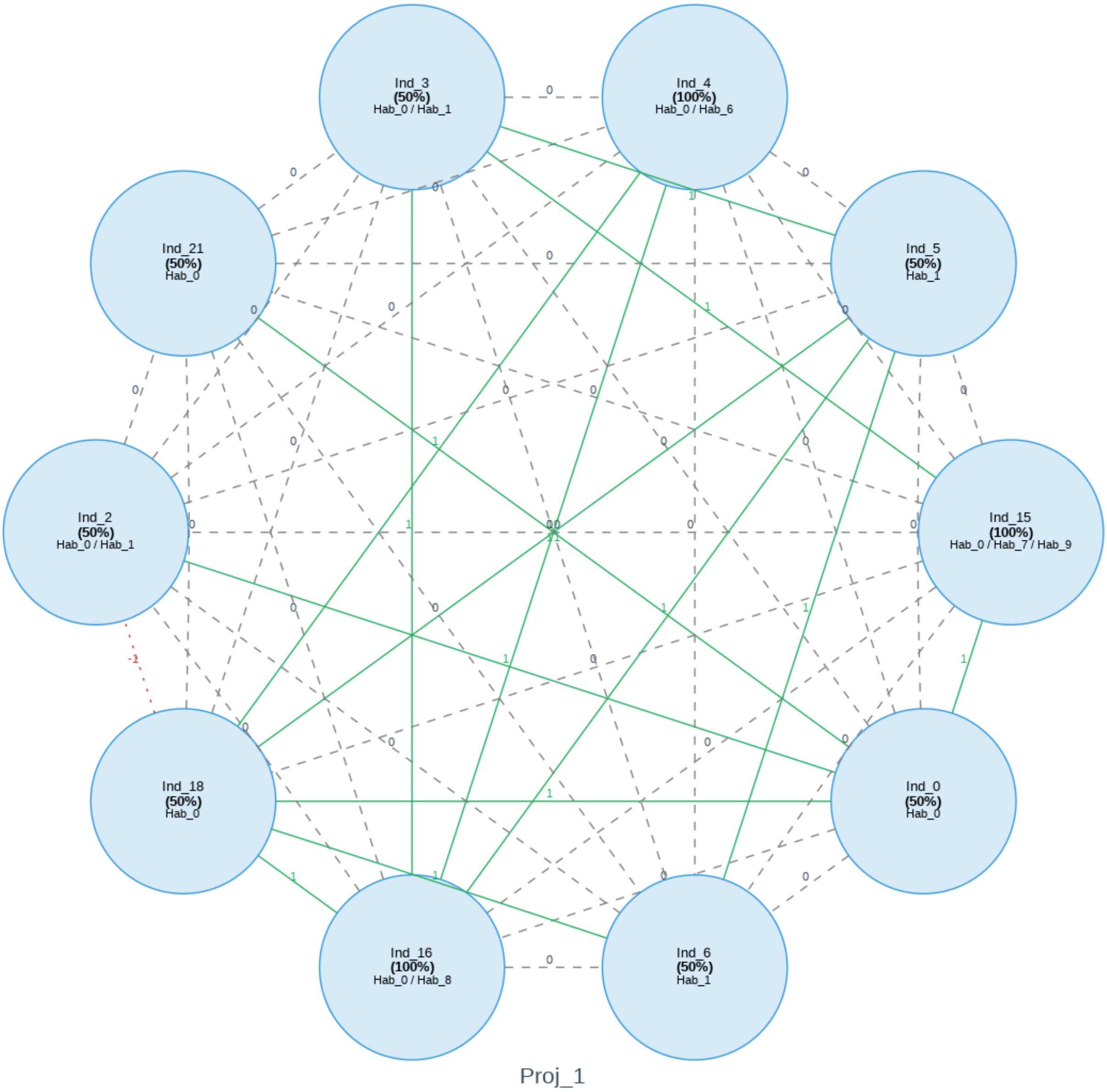


Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Na solução sem precificação (Figura 8), o modelo aloca uma equipe com nove especialistas, incluindo indivíduos com dedicação de 100% (Ind_2 e Ind_12), visando à máxima cobertura de habilidades e harmonia, sem se preocupar com os custos. Já na versão precificada (Figura 9), o modelo realiza ajustes estratégicos para respeitar o teto de R$ 20.000,00. Nota-se a substituição de alguns membros e a readequação das frações de alocação para compor uma equipe igualmente funcional, porém financeiramente viável.

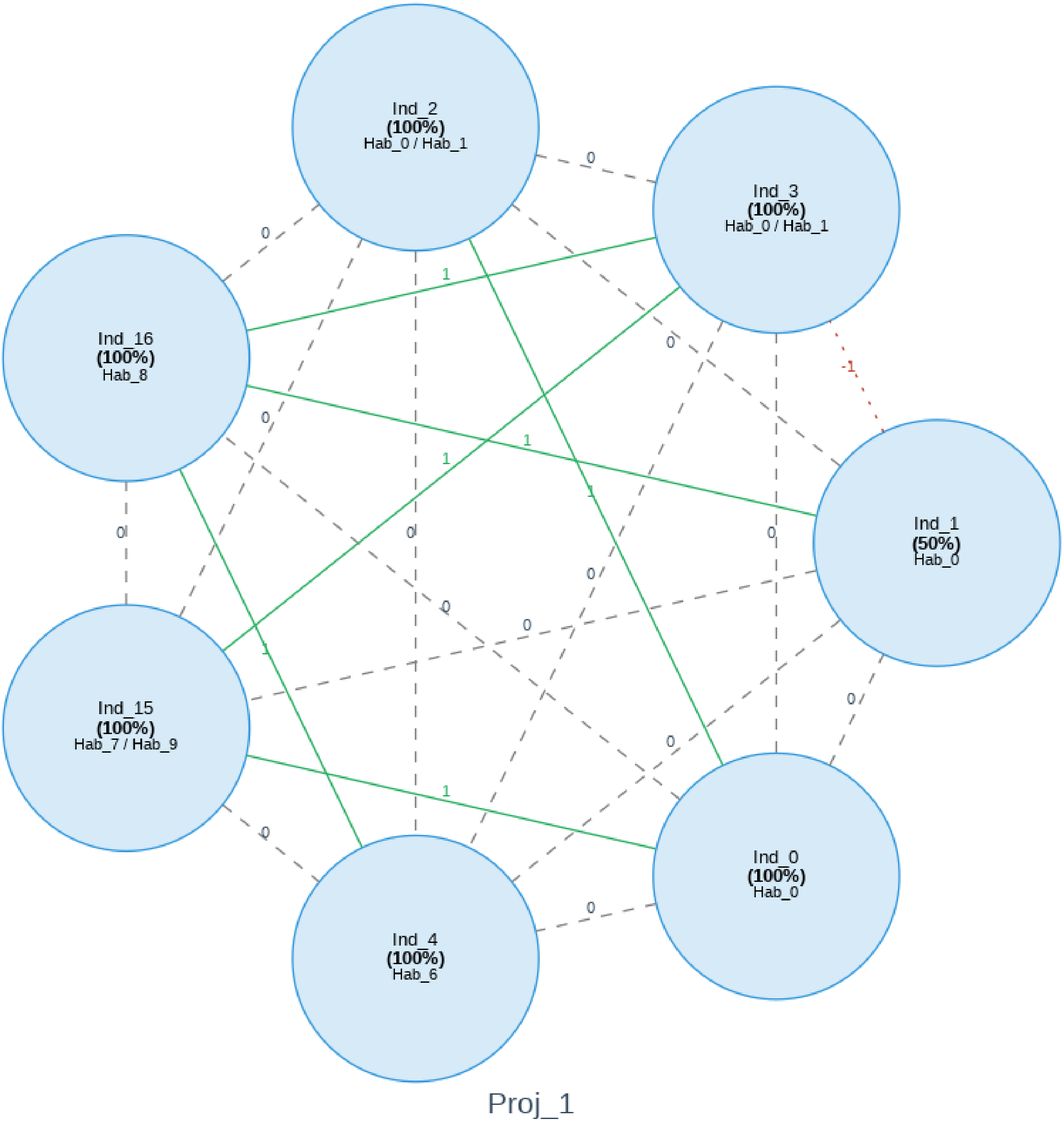
De forma semelhante, a análise para o $Proj_1$ na segunda instância é apresentada nas Figuras 10 e 11. A solução sem precificação (Figura 10) exibe uma equipe robusta, formada para atender plenamente às demandas de habilidades do projeto. Contudo, ao introduzir a restrição de custo (Figura 11), o modelo otimizador reconfigura a equipe de forma significativa.

Figura 10 – Solução para o Proj_1 utilizando o modelo sem precificação (PFMTMH).



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Figura 11 – Solução para o Proj_1 utilizando o modelo com precificação (PFMTMHP).



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

O resultado é a substituição de especialistas potencialmente mais onerosos por outros de menor custo ou maior versatilidade, além de um rebalanceamento nas cargas de trabalho — como a redução da dedicação de alguns membros de 100% para 50%. Essa adaptação evidencia a capacidade do modelo $PFMT_{MHP}$ de encontrar um equilíbrio entre a cobertura de competências técnicas, a harmonia sociométrica e, crucialmente, as limitações financeiras impostas, gerando soluções práticas para cenários de gestão de projetos realistas.

7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho propôs, modelou e avaliou uma variação do Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades (PFMTMH), denominada Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades Precificado (PFMTMHP), que incorpora restrições de custo no processo de alocação de especialistas a projetos. A proposta estende os modelos existentes na literatura ao integrar aspectos de otimização combinatória, cobertura de habilidades múltiplas, relações sociais entre os indivíduos (por meio de uma matriz sociométrica) e, de forma inédita, restrições orçamentárias específicas para cada projeto.

A partir de um estudo detalhado da literatura, foi possível identificar que embora existam abordagens eficazes para problemas de alocação de equipes, como o PMFT, PFTS e o PFERS, poucos trabalhos tratam simultaneamente da complexidade gerada pela possibilidade de múltiplas habilidades por indivíduo, da sociometria, da dedicação parcial e de limitações financeiras. O modelo desenvolvido neste trabalho busca preencher essa lacuna.

A modelagem foi realizada por meio de Programação Linear Inteira (PLI), tendo como função objetivo a maximização da harmonia social entre os membros das equipes, ponderada pelas prioridades de cada projeto. A solução do problema foi viabilizada com o uso de ferramentas de otimização, e sua eficácia foi demonstrada por meio da aplicação em duas instâncias: uma sem restrições de custo (modelo base) e outra com restrições orçamentárias (modelo precificado).

Os resultados evidenciaram que a introdução da restrição de custo impacta a composição das equipes formadas, exigindo maior flexibilidade por parte do modelo para atender simultaneamente aos requisitos de habilidades e à limitação de investimento. A versão precificada conseguiu atender integralmente à demanda de habilidades dos projetos, mantendo níveis aceitáveis de harmonia entre os membros das equipes, mas com rearranjos estratégicos na alocação, como o aumento do uso de indivíduos com múltiplas habilidades e menor custo de alocação.

Comparativamente, a versão sem custo obteve soluções com maior harmonia global, mas que ignoravam aspectos financeiros. Já a versão precificada apresentou soluções mais realistas e aplicáveis em contextos práticos, onde o orçamento disponível é um recurso restritivo.

Contribuições

As principais contribuições deste trabalho podem ser sintetizadas da seguinte forma:

- Proposição de uma nova variação do PFMT_{MH} incorporando restrições de custo por projeto PFMT_{MHP}, ainda pouco explorada na literatura;
- Extensão formal do modelo matemático com a adição de novos parâmetros e variáveis, garantindo flexibilidade e aderência à realidade de alocação de recursos limitados;
- Análise experimental com base em instâncias reais adaptadas da literatura, com visualização gráfica das soluções e análise comparativa dos impactos da restrição de custo;
- Fortalecimento da base teórica na interseção entre problemas de alocação de equipes, redes sociais, múltiplas habilidades e otimização com restrições.

Trabalhos Futuros

A partir dos resultados e limitações identificadas, diversas direções podem ser exploradas em pesquisas futuras:

- Adaptação do modelo para contextos dinâmicos, onde as demandas dos projetos e a disponibilidade dos indivíduos mudam ao longo do tempo;
- Inclusão de preferências explícitas dos indivíduos quanto aos projetos e colegas de equipe, utilizando técnicas de decisão multicritério;
- Aplicação de meta-heurísticas para resolução de instâncias de grande porte, dada a complexidade combinatória do problema;
- Estudo de versões probabilísticas do modelo, onde os custos, habilidades ou relações sociais possam ser incertos ou estocásticos;
- Desenvolvimento de um sistema computacional que permita a aplicação prática do modelo em organizações reais, com interface gráfica e suporte à entrada de dados personalizados.

Considerações Finais

Este estudo reforça a importância de abordagens integradas e realistas para problemas de formação de equipes em ambientes complexos. A inclusão de variáveis sociais, técnicas e econômicas no mesmo modelo contribui não apenas para a qualidade da alocação, mas também para sua viabilidade prática. O modelo proposto pode servir como base para estudos mais avançados em áreas como gestão de projetos, alocação de recursos humanos, engenharia de software, produção e ciência de dados aplicada à tomada de decisão organizacional.

REFERÊNCIAS

ANAGNOSTOPOULOS, A.; BECCHETTI, L.; CASTILLO, C.; GIONIS, A.; LEONARDI, S. A network-centric framework for team formation in the presence of communication costs. **IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering**, v. 24, n. 11, p. 1982–1996, 2012.

BALLESTEROS-PÉREZ, P.; GONZÀLEZ-CRUZ, M. C.; FERNÁNDEZ-DIEGO, M. Social network analysis applied to team formation in collaborative learning environments. **Journal of Network and Computer Applications**, v. 35, p. 1521–1530, 2012.

BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. D. **Linear Programming and Network Flows**. 4th. ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2011.

BELBIN, R. M. **Team Roles at Work**. 2nd. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2010.

CAMPÊLO, M.; FIGUEIREDO, T.; SILVA, A. The sociotechnical teams formation problem: A mathematical optimization approach. **Annals of Operations Research**, Springer, p. 1–16, 2018.

COHEN, S. G.; BAILEY, D. E. What makes teams work: Group effectiveness research from the shop floor to the executive suite. **Journal of Management**, v. 23, n. 3, p. 239–290, 1997.

DANTZIG, G. B. **Linear Programming and Extensions**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1963.

FIGUEIREDO, T.; CAMPÊLO, M. The multiple team formation problem. In: **Latin-Iberoamerican Conference on Operations Research**. Lima, Perú: [s.n.], 2018.

FIGUEIREDO, T. F. **Team formation problems: an integer linear optimization approach**. 130 p. Tese (Doutorado em Ciência da Computação), Fortaleza, 2021. Orientador: Manoel Bezerra Campêlo Neto. Disponível em: <http://repositorio.ufc.br/handle/riufc/58283>.

FITZPATRICK, E. L.; ASKIN, R. G. Forming effective worker teams for multi-skilled tasks. **Journal of Operations Management**, v. 23, n. 5, p. 503–519, 2005.

GUTIERREZ, A.; DUQUE, J.; LOZANO, S. A variable neighborhood search for the team formation problem based on projects. **Computers & Operations Research**, v. 72, p. 163–175, 2016.

GUZZO, R. A.; DICKSON, M. W. Teams in organizations: Recent research on performance and effectiveness. **Annual Review of Psychology**, v. 52, p. 307–338, 2001.

HACKMAN, J. R. **Leading Teams: Setting the Stage for Great Performances**. Boston, MA: Harvard Business School Press, 2002.

HEIMERL, C.; KOLISCH, R. Scheduling and staffing multiple projects with a multi-skilled workforce. **OR Spectrum**, v. 32, n. 2, p. 343–368, 2010.

HILLER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. 9. ed. São Paulo: McGraw-Hill Education, 2013. ISBN 978-85-7726-040-9.

KLEE, V.; MINTY, G. J. How good is the simplex algorithm? In: SHISHA, O. (Ed.). **Inequalities III**. New York: Academic Press, 1972. p. 159–175.

LAPPAS, T.; LIU, K.; TERZI, E. Finding a team of experts in social networks. Association for Computing Machinery (ACM), 2009.

MORENO, J. L. **Foundations of Sociometry**. [S.l.]: Beacon House, 1941.

NETTO, P. O. B. **Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos**. 5th. ed. São Paulo, SP: Edgard Blücher, 2011. ISBN 978-85-212-0692-4.

PRADO, D. **Programação Linear - Volume 1**. 6th. ed. Belo Horizonte, MG: Editora Darci Prado, 2012. ISBN 978-85-98254-45-6.

VIANA, M. C. d. C. **Problema de Formação de Múltiplos Times com Múltiplas Habilidades: uma abordagem heurística**. Trabalho de Conclusão de Curso (graduação), Russas, 2018. 61 f. : il. color.

WI, H.; OH, S.; MUN, J.; JUNG, M. Team formation for generalized tasks in expertise social networks. **Expert Systems with Applications**, v. 36, n. 3, p. 5901–5907, 2009.

WOLSEY, L. A. **Integer Programming**. 2nd. ed. New York, NY: John Wiley & Sons, 2020. ISBN 978-1-119-62571-7.