UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOSÉ VALTER LOPES NUNES

TOPOLOGIA E COMPLETAMENTO DE UM CORPO VALORIZADO

FORTALEZA
1979

JOSÉ VALTER LOPES NUNES

TOPOLOGIA E COMPLETAMENTO DE UM CORPO VALORIZADO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Gervásio Gurgel Bastos.

FORTALEZA
1979

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N925t Nunes, José Valter Lopes.
Topologia e completamento de um corpo valorizado / José Valter Lopes Nunes. – 1979.
76 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Gervásio Gurgel Bastos.

1. Álgebra. I. Título.

CDD 510

JOSÉ VALTER LOPES NUNES

TOPOLOGIA E COMPLETAMENTO DE UM CORPO VALORIZADO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 10/05/1979.

BANCA EXAMINADORA

Gervásio Gurgel Bastos (Orientador)

N. Sankaran

Herminto Borges Neto

FORTALEZA
1979

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, à Universidade Federal da Paraíba, à Coordenação do Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), através da Pró-Reitoria de Pós-Graduação da referida Universidade, pelo suporte financeiro recebido, quando da obtenção dos requisitos para a realização deste trabalho.

Ao Professor Gervásio Gurgel Bastos, Orientador desta Monografia, agradeço todo zelo, a mim dispensado, na realização deste trabalho.

Aos colegas do Curso de Mestrado, bem como aos professores, em particular a N. Sankaran, que de maneira direta ou indiretamente contribuíram para a realização desta Monografia, expresso aqui os meus agradecimentos.

Aos colegas do Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, agradeço todo o apoio.

Sou também grato a Coordenação de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará e a Coordenação da FINEP, pelo apoio recebido para a publicação deste trabalho, bem como, a José Alves Ferreira, pelo excelente trabalho de datilografia.

Fortaleza, março de 1979.

José Valter Lopes Nunes

Ā meus pais

Rubens e Ana

e ās meus irmãos

À minha esposa

Maria do Carmo

e às minhas filhas

Tercia e Tarcia

S U M Á R I O

INTRODUÇÃO 01

0. DEFINIÇÕES E RESULTADOS BÁSICOS 02

1. A TOPOLOGIA DEFINIDA POR UMA VALORIZAÇÃO 33

2. A ESTRUTURA UNIFORME DE UM CORPO VALORIZADO (K,v) E UMA CONDIÇÃO NECESSÁRIA E SUFICIENTE PARA QUE K SEJA LOCALMENTE COMPACTO 47

3. COMPLETAMENTO DE UM CORPO VALORIZADO 56

BIBLIOGRAFIA 76

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é estudar a topologia e o completamento de um corpo valorizado por uma valorização de Krull, tendo como base o livro de Bourbaki, N., Commutative Algebra, mais especificamente o parágrafo 5.3 do Capítulo VI ; ainda como subsídio usamos o livro também de Boubaki, N., General Topology.

Dividimos este trabalho em quatro partes. Na secão 0, temos as principais definições e resultados que serão usados nas seções subsequentes. Um dos resultados mais utilizados, está em 0.63, que é uma condição necessária e suficiente para a extensão de uma função contínua.

O objetivo da seção 1 é a demonstração de 1.7, que nos dá uma condição necessária e suficiente para que a topologia definida por uma valorização v, sobre o seu anel, coincida com a topologia m-ádica, onde m é o ideal maximal do anel de v.

Na seção 2, definimos a estrutura uniforme de um corpo valorizado (k,v) e damos uma condição necessária e suficiente para que K seja localmente compacto com a topologia definida por v.

Na seção 3, construímos o completamento de um corpo valorizado em relação a uma valorização de posto arbitrário e mostramos que o completamento $\hat{K}$ é um corpo valorizado em relação a uma valorização $\hat{v}$, que obtemos estendendo v à $\hat{K}$. Revisitamos, finalmente, o caso de uma valorização de posto 1 e verificamos que o completamento por meio de filtros de Cauchy, coincide com o completamento por sequências de Cauchy, como usualmente.

0. DEFINIÇÕES E RESULTADOS BÁSICOS

Nesta seção, temos a definição de valorização; usamos resultados e conceitos por demais conhecidos e para os quais damos apenas a referência bibliográfica. Temos o conceito de filtro, limite de uma aplicação em relação a um filtro e um Teorema sobre extensão de função contínua. Finalmente, temos resultado sobre espaços uniformes e sistema fundamental de entourages de uma estrutura uniforme; filtros de Cauchy, espaço completo e aplicação uniformemente contínua; filtro de Cauchy minimal, que usamos na seção 3, para definir completamento e mais um Teorema sobre extensão de função contínua; topologia induzida por uma estrutura uniforme e um exemplo de espaço topológico uniformizável.

0.1. Definição:

Diz-se que um grupo abeliano G é totalmente ordenado, se existe um subconjunto P de G, tal que:

I - $0 \notin P$;

II - Se $a \in G$, então ou $a \in P$ ou $a = 0$ ou $-a \in P$;

III - P é fechado para a operação soma.

[3], Chap V, § 8.

0.2. Observação:

Seja G um grupo abeliano totalmente ordenado e P nas condições de 0.1. Então, definindo: $a \leq b$. se e somente se, $a=b$ ou $b-a \in P$, valem as seguintes condições:

1. $(G,\leq)$ é um conjunto totalmente ordenado; isto é, valem as

propriedades:

Reflexiva: $a \leq a$.

Anti-simétrica: $a \leq b$ e $b \leq a \Longrightarrow a = b$.

Transitiva: $a \leq b$ e $b \leq c \Longrightarrow a \leq c$.

2. $\leq$ é compatível com a operação $(+)$ de G; isto é,

$a \leq b$ e . $c \leq d \Longrightarrow a+c \leq b+d$.

Reciprocamente, se $\leq$ é uma relação em um grupo abeliano G, satisfazendo 1 e 2 acima, então definindo $P=\left\{a \in G,\ a \geq 0,\ a \neq 0\right\}$ então P satisfaz as condições I e II de 0.1. Quando $a \geq 0$ e $a \neq 0$, dizemos que $a > 0$.

0.3. Definição:

Um subgrupo H de um grupo totalmente ordenado G, é chamado subgrupo isolado de G, se as relações: $0 \leq y \leq x$ e $x \in H$, implicam que $y \in H$.

0.4. Exemplos:

1. Todo subgrupo do grupo aditivo dos números reais com a ordem usual é um grupo totalmente ordenado.

2. Seja Z o grupo aditivo dos números inteiros com a ordem usual.

   Considere o produto cartesiano $Z \times Z$ com a seguinte ordem: $(a,b) \leq (a',b')$, se e somente se, $a<a'$ ou $(a=a'$ e $b \leq b')$. É um fácil exercício mostrar que, com essa ordem, $Z \times Z$ é totalmente ordenado.

   Vamos mostrar que $\left\{(0,n)\right\}_{n \in Z}$ é um subgrupo isolado de $Z \times Z$.

Seja $(r,s) \in Z \times Z$, tal que $(0,0) \leq (r,s) \leq (0,n)$
Da primeira desigualdade, temos $0 < r$ ou ($r=0$ e $s \leq n$)
Assim temos $r = 0$ e portanto $(r,s) \in \{(0,n)\}_{n\in Z}$, o que quer dizer que $\{(0,n)\}_{n\in Z}$ é um subgrupo isolado de $Z \times Z$.
Claramente $\{(0,n)\}_{n\in Z}$ é o único subgrupo isolado em $Z \times Z$,
Esta relação de ordem é chamada ordem lexicográfica.
Este exemplo pode ser generalizado, tomando-se n cópias de um grupo totalmente ordenado em lugar de Z.

0.5. Observação:

Pode-se mostrar que o conjunto dos subgrupos isolados de um grupo totalmente ordenado é totalmente ordenado em relação à inclusão $\subseteq$.

0.6. Definição:

Seja G um grupo totalmente ordenado. Se o número de subgrupos isolados de G, distintos de G, é finito e igual a n, dizemos que G tem posto n. Caso contrario dizermos que G tem posto infinito.
No exemplo 1 de 0.4. todos os grupos tem posto 1, enquanto que no exemplo 2, $Z \times Z$ tem posto 2.

0.7. Definição:

Sejam K um corpo e G um grupo abeliano totalmente ordenado. Uma valorização de K com valores em G, é uma aplicação $v: K \longrightarrow G \cup \{\infty\}$ tal que

I - $v(xy) = v(x) + v(y)$, para $x,y \in K$.
II - $v(x+y) \geq \inf\{v(x), v(y)\}$, para $x,y \in K$.

III - $v(1) = 0$ e $v(0) = \infty$, onde $\infty + g = \infty$, para todo $g \in G \cup \{\infty\}$ e $\infty > g$, para todo $g \in G$.

O grupo $v(K^*)$ é chamado grupo de valores de v.

0.8. Definição:

O posto de uma valorização v é o posto do seu grupo de valores. [1], Chap VI. § 4.4.

0.9. Exemplos:

1. Seja Q o corpo dos números racionais.

Se $x \in Q$, podemos escrever, $x = p^k y$, onde $(p,y) = 1$, isto é p não aparece na decomposição de y. Seja Z o grupo aditivo dos números inteiros com a ordem usual.

Definimos: $v_p : Q \longrightarrow Z \cup \{\infty\}$ tal que: $v(x) = k$, $v(0) = \infty$.

É fácil ver que v_p é uma valorização, chamada valorização p-ádica de Q e que o posto de v_p é igual a 1.

2. Seja K um corpo e $K[x,y]$, o anel dos polinômios a duas variáveis sobre K.

Seja $f \in K[x,y]$, $f \neq 0$, temos $f(x,y) = \sum a_{ij} x^i y^j \neq 0$.

Podemos escrever, $f = x^m [a_o(y) + a_1(y)x + \cdots + a_\ell(y)x^\ell]$ onde $a_o(y) \neq 0$ e $m \in Z_{\geq o}$.

Seja $a_o(y) = y^n f_1(y)$, onde $f_1(o) \neq 0$, $n \in Z_{\geq o}$.

Então f pode ser escrito na "forma canonica" seguinte:

$$f = x^m y^n f_1(y) + x^{m+1} f_2(x,y)$$

Definamos $v(f) = (m,n)$, se $f \neq 0$ e $v(o) = \infty$.

Notemos que $v(f) = \min \{(i,j) \in Z \times Z$ (com a ordem lexicográfica); $a_{ij} \neq 0\}$. Logo $v(f)$ está bem definida.

Temos que v satisfaz as seguintes propriedades:

Seja $g \in K[x,y]$, $g \neq 0$, então $g = x^r y^s g_1 + x^{r+1} g_2$ onde $g_1 \in K[y]$, $g_1(o) \neq 0$ e $g_2 \in K[x,y]$.

Assim $f.g = x^{m+r}y^{m+s}f_1g_1+x^{m+r+1}y^s+x^{m+r+1}y^nf_1.g_2+x^{m+r+2}f_2.g_2$ e $(f_1.g_1)(o) \neq 0$. Logo $v(f.g) = (m+r,n+s) = v(f) + v(g)$. Temos também: $f+g = x^my^nf_1+x^ry^sg_1+x^{m+1}f_2+x^{r+1}g_2$.

Então temos os seguintes casos:

I. $m = r$, neste caso temos:

I.1. $m = r$ e $n < s$.

teremos: $\min\{(m,n);\ (r,s)\} = (m,n)$,

então, $f+g = x^my^n(f_1+y^{s-n}g_1) + x^{m+1}(f_2+g_2)$ e $(f_1+y^{s-n}g_1)(o)\neq 0$.

Logo $v(f+g) = (m,n) = \min\{v(f),\ v(g)\}$.

I.2. $m = r$ e $n > s$. Aqui $\min\{(m,n);(r,s)\} = (r,s)$

então: $f+g = x^my^s(y^{n-s}f_1+g_1)+x^{m+1}(f_2+g_2)$ e $(y^{n-s}f_1+g_1)(o)\neq 0$.

Logo $v(f+g) = (m,s) = (r,s) = \min\{v(f);v(g)\}$.

I.3. $m=r$ e $n=s$. Aqui, $\min\{(m,n);(r,s)\} = (m,n)$

então $f+g = x^my^n(f_1+g_1)+x^{m+1}(f_2+g_2)$. Temos dois casos, $f_1+g_1=0$ e neste caso $v(f+g)=(m+1,t)>(m,n)=\min\{v(f);v(g)\}$ ou $f_1+g_1\neq 0$ e aqui se $(f_1+g_1)(o)=0$, temos

$v(f+g) = (m,n+k) > (m,n) = \min\{v(f);v(g)\}$.

Se $(f_1+g_1)(o) \neq 0$, temos $v(f+g) = (m,n) = \min\{v(f),v(g)\}$.

II. $m < r$

Podemos escrever: $f+g = x^my^nf_1+x^{m+1}h_1$ onde $h_1 \in K[x,y]$

então $v(f+g) = (m,n) = \min\{(m,n);(r,s)\} = \min\{v(f);v(g)\}$.

III. $m > r$.

De maneira análoga ao caso II, podemos escrever:

$f+g = x^ry^sg_1+x^{r+1}h_2$ onde $h_2 \in K[x,y]$

então $v(f+g) = (r,s) = \min\{(m,n);(r,s)\}= \min\{v(f);v(g)\}$.

Finalmente, é fácil ver que estendendo v ao corpo de frações $K(x,y)$, pondo $v(f/g) = v(f) - v(g)$, temos que v é uma valorização de $K(x,y)$ e por 0.6 e 0.8, o posto de v é igual a 2.

0.10. Proposição:

Sejam v uma valorização de um corpo K, com grupo de valores G e $\Lambda = \{x \in K;\ v(x) \geq 0\}$ que chamamos de anel de v. Então existe uma correspondência biunívoca, invertendo ordem, entre os ideais primos de Λ e os subgrupos isolados de G .

Assim, o posto de uma valorização é igual ao número de ideais primos, diferente de zero, do seu anel.

Demonstração:

Veja [1] Chap. VI. § 4, proposições 1 e 4 .

0.11. Proposição:

Seja v uma valorização de um corpo K. Então, uma condição necessária e suficiente para que o posto de v seja igual a 1, é que o grupo de valores de v, seja isomorfo a um subgrupo ordenado, diferente de zero, do grupo dos números reais.

Demonstração:

Veja [4] Chap II, Théoreme 1.

Passamos agora a alguns resultados de topologia geral.

0.12. Proposição:

Se para cada elemento x de um conjunto X, corresponde um conjunto $\mathcal{B}(x)$ de subconjuntos de X, tal que:

I - Todo subconjunto de X que contém um elemento de $\mathcal{B}(x)$, também pertence à $\mathcal{B}(x)$.

II - Toda interseção finita de conjuntos de $\mathcal{B}(x)$, pertence à $\mathcal{B}(x)$.

III - O elemento x, pertence a todo conjunto de $\mathcal{B}(x)$.

IV - Se $V \in \mathcal{B}(x)$, existe $W \in \mathcal{B}(x)$, tal que cada $y \in W$, $V \in \mathcal{B}(y)$.

Então existe uma única topologia em X, tal que, para cada $x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ é o conjunto das vizinhanças de x, nesta topologia.

Demonstração:

Veja [2], Chap I, § 1.2. Proposição 2.

0.13. Proposição:

Sejam f, g duas aplicações contínuas de um espaço topológico X em um espaço topológico de Hausdorff Y e A um subconjunto denso de X. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$, então $f=g$.

Demonstração:

O resultado segue-se do fato de $\{x \in X;\ f(x) = g(x)\}$, ser fechado em X.

0.14. Definição:

Um espaço topológico X, diz-se totalmente desconexo se as únicas componentes conexas diferente do vazio, são seus pontos.

0.15. Definição:

Um espaço topológico X é dito Regular, se é de Hausdorff e o conjunto das vizinhanças fechadas de qualquer de seus pontos, é um sistema fundamental de vizinhanças do ponto, isto é dada uma vizinhança v de um ponto $x \in X$, existe uma vizinhança fechada de x, contida em V. [2], Chap I, § 8.4.

0.16. Definição:

Um corpo topológico é um conjunto K que possui uma estrutura de corpo e uma topologia satisfazendo as seguintes condições:

I - A aplicação de $K \times K$ em K tal que: $(x,y) \longrightarrow x+y$, é contínua.

II - A aplicação de K em K tal que: $x \longrightarrow -x$ é contínua.

III - A aplicação de $K \times K$ em K tal que: $(x,y) \longrightarrow xy$, é contínua.

IV - A aplicação de K^* em K, tal que: $x \longrightarrow x^{-1}$, é contínua.

0.17. <u>Definição</u>:

Um <u>filtro</u> de um conjunto X, é um conjunto $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X, tal que:

FI - Todo subconjunto de X que contém um elemento de $\mathcal{F}$, pertence também à $\mathcal{F}$.

FII - Toda interseção finita de elementos de $\mathcal{F}$, pertence a $\mathcal{F}$.

FIII - O conjunto vazio, não pertence à $\mathcal{F}$.

0.18. <u>Exemplos</u>:

I - Seja X um espaço topológico. A coleção das vizinhanças de $x \in X$ em X é um filtro.

II - Seja X um conjunto infinito. Os complementos dos subconjuntos finitos de X, formam um filtro. Em particular, se $X = N$ o conjuntos dos inteiros positivos, esse filtro se chma filtro de <u>Frèchet</u>. Se denotamos esse filtro por $\mathcal{F}$, temos: para cada $F \in \mathcal{F}$, existe $n_0 \in N$, tal que: $n \geq n_0 \Longrightarrow n \in F$.

0.19. <u>Definição</u>:

Dados dois filtros $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ do mesmo conjunto X, $\mathcal{F}'$ é dito <u>mais fino</u> do que $\mathcal{F}$, se $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.

0.20. Proposição:

Uma condição necessária e suficiente para que exista um filtro de um conjunto X contendo um conjunto A de subconjuntos de X, é que toda interseção finita de elementos de A seja não vazio. Neste caso, F o conjunto de subconjuntos de Xque contém uma interseção finita de elementos de A, é o filtro menos fino que contém A. Diz-se que F é gerado por A.

Demonstração:

Se um tal filtro existe, pela propriedade FII, ele também contém A' o conjunto das interseções finitas de elementos de A e por FIII, todo elemento de A' é diferente do vazio. Reciprocamente, suponha que nenhuma interseção finita de elementos de A seja vazio. Seja F como definido acima.

I - Todo conjunto F que contenha um elemento de F, conterá uma interseção finita de elementos de A.
Logo $F \in F$.

II - A interseção finita de elementos que contém uma interseção finita de elementos de A, contém uma interseção finita de elementos de A e portanto pertence a F.

III - Como todo elemento de F, contém uma interseção finita de elementos de A, que por hipótese é diferente do vazio, temos que F não contém o conjunto vazio.

0.21. Proposição:

Seja B um conjunto de subconjuntos de um conjunto X. Então, o conjunto F de subconjuntos de X os quais contém um elemento de $\mathcal{B}$ é um filtro, se e somente se, $\mathcal{B}$ satisfaz as seguintes propriedades:

BI - A interseção de dois elementos de $\mathcal{B}$, contém um elemento de $\mathcal{B}$.

BII - $\mathcal{B} \neq \emptyset$ e $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

Demonstração:

Da definição de filtro, 0.17.

0.22. Definição:

Um conjunto $\mathcal{B}$ de subconjuntos de um conjunto X que satisfaz BI e BII é dito uma base de filtro

0.23. Proposição:

Seja $\mathcal{B}$ uma base de filtro sobre um conjunto X e considere uma aplicação $f:X \longrightarrow X'$. Então $f(\mathcal{B})$ é uma base de filtro sobre o conjunto X'.

Demonstração:

Vamos verificar as propriedades BI e BII.

I - Se $M \in \mathcal{B}$, $M \neq \emptyset$ e temos $f(M) \neq \emptyset$.

II - Se M e N pertencem à $\mathcal{B}$, $M \cap N \neq \emptyset$ e $f(M \cap N) \neq \emptyset$ e mais: $f(M) \cap f(N) \supset f(M \cap N)$.

0.24. Definição:

Seja (x_n) uma sequência num conjunto X.

O filtro elementar associado a (x_n) é o filtro gerado pela imagem do filtro de Fréchet, pela aplicação, de $\mathbb{N}$ em $X: n \longrightarrow x_n$.

Isto é: O filtro elementar associado à (x_n) é o conjunto de subconjuntos $M \subset X$, tais que: $x_n \in M$, exceto para um número finito de valores de n.

0.25. Proposição:

Considere f uma aplicação de um conjunto X em um conjunto X'. Seja $\mathcal{B}'$ uma base de filtro de X'. Então $f^{-1}(\mathcal{B}')$ é uma base de filtro de X, se e somente se, para cada $M' \in \mathcal{B}'$, $f^{-1}(M') \neq \emptyset$, isto é: todo elemento de $\mathcal{B}'$ intersecta f(X).

Demonstração:

Segue diretamente das definições

0.26. Definição:

Sejam A um subconjunto de um conjunto X e $\mathcal{F}$ um filtro de X. Chamamos de traço de $\mathcal{F}$ sobre A a interseção $\mathcal{F} \cap A$.

0.27. Proposição:

Sejam $\mathcal{F}$ um filtro de um conjunto X e A um subconjunto de X. Então, o traço F_A, de F sobre A, é um filtro, se e somente se, cada elemento de F intersecta A.

Demonstração:

Se $M, N \in \mathcal{F}$, temos:

$(M \cap N) \cap A = (M \cap A) \cap (N \cap A)$ e se $P \subset A$ é tal que $P \supset M \cap A$, então $P = (M \cup P) \cap A$.

Assim $\mathcal{F}_A$ satisfaz FI e FII.

Portanto F_A é um filtro, se e somente se, cada conjunto de F intersecta A.

0.28. Definição:

Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{F}$ um filtro de X. Um ponto $x \in X$ é dito um ponto limite de $\mathcal{F}$, se $\mathcal{F}$ é mais fino que o filtro de vizinhanças de x. Em outras palavras, se dado qualquer vizinhança $\mathcal{B}(x)$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset \mathcal{B}(x)$.

0.29. Definição:

Sejam x um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma base de filtro de X. Um ponto $x \in X$ é dito um ponto limite de $\mathcal{B}$, se x é um ponto limite do filtro gerado por $\mathcal{B}$.

0.30. Definição:

Num espaço topológico X, um ponto x é um ponto de acumulação de uma base de filtro de X, se ele pertence ao fecho de todos os elementos de $\mathcal{B}$. Em particular x é um ponto de acumulação do filtro gerado por $\mathcal{B}$.
Daí, temos que uma condição necessária e suficiente para que x seja um ponto de acumulação de $\mathcal{B}$ é que todo conjunto de um sistema fundamental de vizinhanças de x, intersecta todo conjunto de $\mathcal{B}$. Segue-se então que a afirmação: "x é um ponto de acumulação de um filtro $\mathcal{F}$", é equivalente a " existe um filtro, mais fino que $\mathcal{F}$, e do que o filtro de vizinhanças de x". Em outras palavras:

0.31. Observação:

Um ponto x é um ponto de acumulação de um filtro $\mathcal{F}$, se e somente se, existe um filtro mais fino que $\mathcal{F}$ o qual converge para x. Em particular, todo ponto limite de um filtro $\mathcal{F}$ é um ponto de acumulação de $\mathcal{F}$.

0.32. Definição:

Sejam f uma aplicação de um conjunto X em um espaço topológico Y e $\mathcal{F}$ um filtro de X. um ponto $y \in Y$ é dito um limite (resp. ponto de acumulação) de f com relação ao filtro $\mathcal{F}$, se y é um limite (resp. ponto de acumulação) da base de filtro $f(\mathcal{F})$.

Denote-se: $y = \lim_{\mathcal{F}} f$.

0.33. Definição:

Sejam X, Y espaços topológicos, A um subconjunto de X e $a \in X$ tal que $a \in \overline{A}$, onde $\overline{A}$ é o fecho topológico de A em X. Considere $\mathcal{F}$ o traço sobre A, do filtro de vizinhanças de a em X. Seja f uma aplicação de A em Y; então se $y \in Y$ é um limite de f em relação à $\mathcal{F}$, isto é: $y = \lim_{\mathcal{F}} f$, dizemos também que y é um limite de f em a, em relação ao subespaço A e escrevemos: $y = \lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x)$.

0.34. Definição:

Sejam X, Y espaços topológicos, $g: X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua e A um subconjunto de X. Se f é a restrição a A da aplicação $g: X \longrightarrow Y$; dizemos que g tem um limite y em relação à A, no ponto $a \in \overline{A}$, se y é um limite de f em a, em relação à A.

0.35. Teorema:

Sejam X um espaço topológico, A um subconjunto denso de X e $f: A \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua de A num espaço regular Y. Então f pode ser estendida a uma aplicação contínua

$\overline{f}:X \longrightarrow Y$, $\overline{f}(x) = \lim\limits_{y \to x, y \in A} f(y)$, se e somente se, para cada $x \in X$, $\lim\limits_{y \to x, y \in A} f(y)$ existe em Y. A extensão $\overline{f}$ é então única.

Demonstração:

Veja |2| Chap I. § 8.5, Teorema I.

0.36. Definição:

Sejam X um conjunto e V,W subconjuntos de $X \times X$.

Definimos: $VoW = \{(x,y) \in X \times X; (x,z) \in W$ e $(z,y) \in V$, para algum $z \in X\}$

Denotamos também: $VoW = VW$

Se $V = W$, denotamos: $VoV = \overset{2}{V}$

para $n > 1$, $\overset{n}{V} = \overset{n-1}{V} \; o \; V$

Temos também: $\overset{-1}{V} = \{(x,y) \in X \times X;\ (y,x) \in V\}$.

0.37. Definição:

Uma estrutura uniforme sobre um conjunto X, é dada por um conjunto de subconjuntos de $X \times X$, os quais satisfazem FI e FII de 0.17 e mais:

U1. Todo elemento de $\mathcal{U}$, contém a diagonal $\Delta = \{(x,x) \in X \times X\}$.

U2. Se $V \in \mathcal{U}$, então $\overset{-1}{V} \in \mathcal{U}$.

U3. Para cada $V \in \mathcal{U}$, existe $W \in \mathcal{U}$, tal que $\overset{2}{W} \subset V$.

A estrutura uniforme $\mathcal{U}$ é um filtro de $X \times X$ e os elementos de $\mathcal{U}$, são chamados entourages de X. |2|, Chap 2, § 1.

0.38. Definição:

Um sistema fundamental de entourages (SFE) de uma estrutura uniforme, é um conjunto $\mathcal{B}$ de entowrages tal que: toda entourage contém um elemento de $\mathcal{B}$.

0.39. Proposição:

Um conjunto $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X x X é um SFE de uma estrutura uniforme sobre X, se e somente se, $\mathcal{B}$ satisfaz BI de 0.21 e mais:

U1' - Todo elemento de $\mathcal{B}$ contém a diagonal Δ .

U2' - Para cada $V \in \mathcal{B}$, existe $V' \in \mathcal{B}$, tal que $V' \subset V^{-1}$

U3' - Para cada $V \in \mathcal{B}$, existe $W \in \mathcal{B}$, tal que $W^2 \subset V$.

Demonstração:

Veja [2], Chap II, § 1.1.

0.40. Observação:

Por o.22 e 0.39, um SFE de uma estrutura uniforme de $X \neq \emptyset$, é uma base de filtro que gera o filtro das entourages de X.

0.41. Exemplos:

I - Seja X = R o corpo ordenado dos números reais

Para cada $\xi > 0$, seja $V_\xi = \{(x,y) \in R \times R;\ |x-y| < \xi\}$.

Temos: U1' é claro pois $|x-x| < \xi$

Como $V_{\xi_1} \cap V_{\xi_2} = V_{\xi_3}$ onde $\xi_3 = \min\{\xi_1, \xi_2\}$, segue-se BI.

Dado $\xi>0$, tome $\delta = \xi/2$, então se $(x,y) \in W_\delta^2$, temos que existe $z \in R$, tal que $(x,z) \in W_\delta$ e $(z,y) \in W_\delta$, isto é:

$|x-z| < \delta$ e $|z-y| < \delta$

Logo $|x-y| = |x-z+(z-y)| \leq |x-z|+|z-y| < 2\delta = \xi$

Portanto $(x,y) \in V_\xi$ e U3' é satisfeito.

De $|x-y| = |y-x|$ e do que mostramos, temos U2'.

Assim $\{V_\xi\}$ é um SFE para uma estrutura de R.

Observe que $\{V_\xi\}$ é um sistema fundamental de entowrages simétricas, pois cada V é simétrica, isto é: $V = \overset{-1}{V}$.

II- Dado um número primo p, seja $W_n = \{(x,y) \in Z \times Z; x \equiv y (\text{mod } p^n), n > 0\}$ verificamos que os conjuntos W_n (para p fixo), formam um SFE para uma estrutura uniforme do conjunto dos números inteiros Z. Usaremos 0.39 !

- Como $W_n \cap W_m = W_r$ onde $r = \min\{m,n\}$ segue-se a propriedade BI.
- Como $x \equiv x$ (mod p^n), segue-se U1'.
- Dado m>0, se $(x,y) \in \overset{2}{W}_m$, temos $(x,z) \in W_m$ e $(z,y) \in W_m$ para algum $z \in Z$.

  isto é: $x \equiv z$ (mod p^m) e $z \equiv y$ (mod p^m)

  Daí $x \equiv y$ (mod p^m) e $(x,y) \in W_m$; assim $W_m = \overset{2}{W}_m$

  Então temos U3' e do fato da congruência ser simétrica, temos U2'.

  Esta estrutura é chamada, estrutura uniforme p-ádica de Z.

III-De maneira mais geral que o exemplo I: Todo espaço métrico é uniformizável. Diz-se que a estrutura $\mathcal{U}$, é gerada pela métrica d.

Um SFE para $\mathcal{U}$ é dado por $V_\xi = \{(x,y) \in X \times X;\ d(x,y) < \xi\}$ onde $\xi > 0$.

0.42. Definição:

Uma entourage V de um espaço uniforme X é dita simétrica, se $V = \overset{-1}{V}$.

Claramente $V \cap \overset{-1}{V}$ e $V \cup \overset{-1}{V}$ são entourages simétricas.

0.43. Proposição:

As entourages simétricas de um espaço uniforme X, formam um SFE para a estrutura uniforme de X.

Demonstração:

A propriedade BI é consequência de FII.
Se V é simétrica, V contém a diagonal, assim temos U1'
A propriedade U2', vem de U2 e U3.
Finalmente, por U3, dada um entourage simétrica V, existe W (não necessariamente simétrica), tal que: $W^2 \subset V$
Tome $W' = W \cap W^{-1}$ que é simétrica e temos:
$W'^2 \subset W^2 \subset V$. Portanto temos U3' e por 0.39, temos o resultado.
Sejam X um espaço uniforme e V uma entourage de X.
Denotamos: $V(x) = \{y \in X;\ (x,y) \in V\}$.

0.44. Proposição:

Sejam X um espaço uniforme, $x \in X$ e $\mathcal{B}(x) = \{V(x);\ V$ é uma entourage de $X\}$. Então existe uma única topologia sobre X tal que: para cada $x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ é o filtro de vizinhanças de x, nesta topologia.

Demonstração:

Em virtude de 0.12. é bastante mostrar:

I - Seja $A \subset X$, tal que $A \supset V(x)$, para alguma entourage V de X. Então $A \times A \supset V$, o que implica que $A \times A$ é uma entourage de X, por 0.37.
Assim $A = (A \times A)(x)$ pertence à $\mathcal{B}(x)$.

II - Se V_1 e V_2 são entourages de X, por 0.37, $V_1 \cap V_2$ é uma entourage de X. Assim $V_1(x) \cap V_2(x) = (V_1 \cap V_2)(x) \in \mathcal{B}(x)$.

III - $x \in V(x)$, para toda entourage V, pois V contém a diagonal.

IV - Se V é uma entourage de X, por 0.37, existe uma entourage W de X, tal que $W^2 \subset V$.

Então, para todo $y \in W(x)$, se $z \in W(y)$, temos: $(x,y) \in W$ e $(y,z) \in W$ e assim $(x,z) \in W^2$ e $z \in W^2(x) \subset V(x)$.

Logo $W(y) \subset V(x)$. Portanto $V(x) \in \mathcal{B}(y)$, para todo $y \in W(x)$.

0.45. <u>Definição:</u>

A topologia definida em 0.44, é chamada <u>topologia induzida pela estrutura uniforme de X</u>.

Uma estrutura uniforme sobre um espaço topológico X, é dita <u>compatível</u> com a topologia de X, se esta topologia coincide com a topologia induzida pela estrutura uniforme de X.

0.46. <u>Proposição:</u>

Seja X um espaço uniforme. Para toda entourage simétrica V de X e todo subconjunto M de X x X, temos:

$VMV = \{(x,y) \in X \times X ;\ \exists\ (p,q) \in M \text{ e } (x,p) \in V,\ (q,y) \in V\}$ é uma vizinhança de M no espaço produto X x X. Ademais,

$\overline{M} = \bigcap_{V \in \mathcal{U}} VMV$, onde $\mathcal{U}$ é o conjunto das entourages simétricas de X.

<u>Demonstração:</u>

Seja V uma entourage de X.

Se $(x,y) \in VMV$, $\exists (p,q) \in M$, tal que $(x,p) \in V$ e $(q,y) \in V$

isto é: $x \in V(p) = \{y;(y,p) \in V\}$ e $y \in V(q)$, o que significa que $(x,y) \in V(p) \times V(q)$

Como $V(p) \times V(q)$ é uma vizinhança de (p,q) em $X \times X$ e $V(p) \times V(q) \subset VMV$, segue-se que VMV é uma vizinhança de M no espaço produto $X \times X$.

Agora, $(x,p) \in V$ e $(y,q) \in V$, se e somente se, $p \in V(x)$ e $q \in V(y)$, se e somente se, $(p,q) \in V(x) \times V(y)$.

Como V varia sobre $\mathcal{U}$, os conjuntos $V(x) \times V(y)$ formam um sistema fundamental de vizinhanças de (x,y) em $X \times X$. Se U e U' são entourages, existe uma entourage simétrica V, tal que $V \subset U \cap U'$, isto por 0.40 e 0.43.

Assim, $V(x) \times V(y) \subset U(x) \times U'(y)$

Logo, $V(x) \times V(y)$ intersecta um conjunto M de $X \times X$, para cada $V \in \mathcal{U}$, se e somente se, $(x,y) \in \overline{M}$.

Portanto $\overline{M} = \bigcap_{V \in \mathcal{U}} VMV$.

0.47. <u>Proposição</u>:

Os interiores das entourages de X em $X \times X$, formam um sistema fundamental de enourages de X. O mesmo resultado é válido para os fechos das entourages de X em $X \times X$.

<u>Demonstração</u>:

I - Se V é uma entourage de X, por 0.43, existe uma entourage simétrica W', tal que $\overset{2}{W'} \subset V$.

Por sua vez, existe uma entourage simétrica W, tal que: $\overset{2}{W} \subset W'$ e assim $\overset{4}{W} \subset \overset{2}{W'} \subset V$, pois se $(x,y) \in \overset{4}{W}$, existe $z \in X$ tal que $(x,z) \in \overset{2}{W} \subset W'$ e $(z,y) \in \overset{2}{W} \subset W'$, donde $(x,y) \in \overset{2}{W'} \subset V$. Assim, $W \subset \overset{2}{W} \subset \overset{4}{W} \subset V$.

Por 0.46, $\overset{3}{W}$ é uma vizinhança de W e então o interior de V em X x X contém W. Portanto o interior de V é uma entourage de X e como o interior de V contém o interior de W, por 0.38, temos o resultado.

II - Temos $W \subset \overset{3}{W} \subset V$. Como o fecho de W contém W, ele é uma entourage.

Por 0.46, o fecho de W está contido em $\overset{3}{W} \subset V$.

Portanto obtemos o que queríamos.

0.48. Proposição:

Todo espaço uniforme de Hausdorff X é Regular.

Demonstração:

Dado uma enourage V, por 0.47, existe uma entourage $W \subset V$, fechada em X x X.

Então se $x \in X$, $W(x)$ é fechado em X pois $W(x)$ é homeomorfo ao subespaço fechado $\{x\} \times W(x)$ de W e como W é fechado, $\{x\} \times W(x)$ é fechado em X x X.

Finalmente vamos mostrar que os conjuntos $W(x)$, formam um sistema fundamental de vizinhanças para x.

Dado uma entourage V, por 0.47, existe uma entourage fechada W, tal que $W \subset V$. Portanto $W(x) \subset V(x)$.

Como X é de Hausdorff, por 0.15, X é regular.

0.49. Definição:

Sejam X um espaço uniforme e V uma entourage de X.

Um subconjunto $A \subset X$, é dito V-pequeno, se $A \times A \subset V$. No caso de X ser um espaço métrico, por exemplo, um conjunto

$A \subset X$ é V_ξ-pequeno, se para todo par (x,y) de elementos de A, tivermos: $d(x,y) < \xi$. Isto nos dá que A é V_ξ-pequeno, se o diâmetro de A for menor do que ξ.

0.50. <u>Definição</u>:

Um filtro F, de um espaço uniforme X, é um <u>filtro de Cauchy</u> se para cada entourage V de X, existe um subconjunto de X, pertencente à F, o qual é V-pequeno.

0.51. <u>Definição</u>:

Um <u>espaço completo</u> é um espaço uniforme no qual todo filtro de Cauchy converge.

0.52. <u>Definição</u>:

Sejam X e X' espaços uniformes. Uma aplicação $f:X \rightarrow X'$ é <u>uniformemente contínua</u>, se para cada entourage V' de X', existe uma entourage V de X, tal que: se $(x,y) \in V$ implica $(f(x), f(y)) \in V'$.

Observe que esta definição nos dá uma generalização da definição de aplicação uniformemente contínua, no caso de espaço métrico.

0.53. <u>Proposição</u>:

Seja $f:X \longrightarrow Y$ uma aplicação uniformente contínua de um espaço uniforme X sobre um espaço uniforme Y, onde a estrutura uniforme de X é dada pela imagem inversa por f, da estrutura uniforme de Y. Se F é um filtro de Cauchy de Y; então $f^{-1}(F)$ é uma base de filtro de Cauchy de X.

Demonstração:

Seja $M \in f^{-1}(\mathcal{F})$, tal que $f(M)$ é um conjunto V-pequeno onde V é uma entourage de Y.

Para todo par de pontos $x,y \in M$, temos: $(f(x),f(y)) \in V$ isto por 0.52.

Daí, $(x,y) \in U$ pois U (entourage de X) é um certo $f^{-1}(V)$.

Portanto M é U-pequeno e $f^{-1}(\mathcal{F})$ é de Cauchy.

0.54. Proposição:

Seja X um espaço uniforme. Se o traço de um filtro de Cauchy de X, sobre um subconjunto $A \subset X$ é um filtro então esse filtro é de Cauchy sobre o espaço uniforme A.

Demonstração:

Sejam $i:A \longrightarrow X$ a aplicação inclusão e $\mathcal{F}$ um filtro de Cauchy de X. Temos: $\mathcal{F}_A = i^{-1}(\mathcal{F})$.

Como i é uniformemente contínua, por 0.53, $\mathcal{F}_A$ é um filtro de Cauchy sobre A.

0.55. Proposição:

Se $f:X \longrightarrow X'$ é uma aplicação uniformemente contínua, então a imagem por f, de uma base de filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ de X, é uma base de filtro de Cauchy de X'.

Demonstração:

Por 0.52, dado uma entourage V' de X', então $g^{-1}(V')$, onde $g = f \times f$, é uma entourage de X.

Seja $M \in \mathcal{F}$, um conjunto $g^{-1}(V')$-pequeno

isto é: tal que $M \times M \subset g^{-1}(V')$.

Então $f(M) \times f(M) \subset V'$ e assim $f(M) \in f(\mathcal{F})$ é V'-pequeno. Portanto $f(\mathcal{F})$ é uma base de filtro de Cauchy de X', por 0.23.

0.56. Definição:

Seja $\mathcal{F}$ um filtro de Cauchy de um espaço uniforme X. Diz-se que $\mathcal{F}$ é um filtro de Cauchy minimal, se ele é um elemento minimal, com relação à inclusão, no conjunto dos filtros de Cauchy de X.

0.57. Proposição:

Se X é um espaço uniforme, para cada filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ de X, existe um único filtro de Cauchy minimal $\mathcal{F}_0$, menos fino que $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{U}$ um SFE de X, então os conjuntos $V(M) = \bigcup_{x \in M} V(x)$, $M \in \mathcal{B}$ e $V \in \mathcal{U}$, formam uma base de $\mathcal{F}_0$.

Demonstração:

I - Os conjuntos $V(M)$, $M \in \mathcal{B}$, $V \in \mathcal{U}$, formam uma base para um filtro $\mathcal{F}_0$, pois: se $M, M' \in \mathcal{B}$ e $V, V' \in \mathcal{U}$, existem, por 0.22 e 0.40, $M'' \in \mathcal{B}$ e $V'' \in \mathcal{U}$ tais que:

$M'' \subset M \cap M'$ e $V'' \subset V \cap V'$.

Assim, $V''(M) \subset V(M) \cap V'(M')$ e temos o que queríamos já que $V(M) \neq \emptyset$. Por construção, $\mathcal{F}_0$ é menos fino que $\mathcal{F}$, já que: se $F_0 \in \mathcal{F}_0$, $F_0 \supset V(M) = \{V(x);\ x \in M\} \supset M$, então $F_0 \in \mathcal{F}$.

II - Agora, $\mathcal{F}_0$ é de Cauchy pois se M é V-pequeno, então $V(M)$ é $\overset{3}{V}$-pequeno já que se x, x' é um par qualquer de pontos de $V(M)$, existem $y_1, y_2 \in M$ tais que $(x, y_1) \in V$ e $(x', y_2) \in V$

Como M é V-pequeno, $(y_1,y_2) \in V$

Assim $(x,y_2) \in \overset{2}{V}$ e $(x,x') \in \overset{3}{V}$.

III - Finalmente a unicidade.

Seja $\mathcal{A}$ um filtro de Cauchy menos fino que $\mathcal{F}$.

Para cada $M \in \mathcal{B}$ e $V \in \mathcal{U}$, como $\mathcal{A}$ é de Cauchy, existe um conjunto $N \in \mathcal{A}$, V-pequeno.

Como $\mathcal{A}$ é menos fino que $\mathcal{F}$, então $N \in \mathcal{F}$ e $N \cap M \neq \emptyset$.

Assim $N \subset V(M)$ e $V(M) \in \mathcal{A}$.

Portanto $\mathcal{A}$ é mais fino que $\mathcal{F}_0$. Consequentemente $\mathcal{F}_0$ é o único filtro de Cauchy minimal menos fino que $\mathcal{F}$.

0.58. <u>Proposição</u>:

Para cada $x \in X$, onde X é um espaço uniforme, o filtro de vizinhanças $\mathcal{B}(x)$ em X, é um filtro de Cauchy minimal.

<u>Demonstração</u>:

Vamos mostrar que o único filtro de Cacuhy menos fino que $\mathcal{F}$, o conjunto dos subconjuntos de X os quais contém x, é $\mathcal{B}(x)$.

I - É claro que $\mathcal{B}(x)$ é menos fino que $\mathcal{F}$.

II - Seja $\mathcal{A}$ um filtro de Cauchy menos fino que $\mathcal{F}$.

Para cada x e para cada V, como $\mathcal{A}$ é de Cauchy, existe $N \in \mathcal{A}$ tal que N é V-pequeno.

Como $\mathcal{A}$ é menos fino que $\mathcal{F}$, temos $N \in \mathcal{F}$ e $N \ni x$.

Assim $N \subset V(x)$ pois se $y \in N$, como $x \in N$, $(x,y) \in N \times N \subset V$ donde $y \in V(x)$.

Daí, por 0.17, $V(x) \in \mathcal{A}$.

Como os $V(x)$ formam uma base de $\mathcal{B}(x)$, segue-se que $\mathcal{A}$ é mais fino que $\mathcal{B}(x)$. Portanto $\mathcal{B}(x)$ é minimal.

0.59. <u>Proposição</u>:

Seja X um espaço uniforme. Todo ponto de acumulação de um filtro de Cauchy $\mathcal{F}$, de X, é um ponto limite de $\mathcal{F}$.

Demonstração:

Se x é um ponto de acumulação de $\mathcal{F}$, todo sistema fundamental de vizinhanças de x, intersecta todo conjunto de $\mathcal{F}$ e estas interseções formam um filtro $\mathcal{A}$ que é mais fino que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{B}(x)$.

Como $\mathcal{F}$ é de Cauchy, $\mathcal{A}$ é de Cauchy.

Por 0.57, seja $\mathcal{F}_0$ o único filtro de Cauchy minimal menos fino que $\mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}_0$ e $\mathcal{B}(x)$ são minimais menos fino que $\mathcal{A}$, segue-se que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{B}(x)$.

Assim, $\mathcal{B}(x)$ é menos fino que $\mathcal{F}$, isto é: x é um ponto limite de $\mathcal{F}$.

0.60. Observações:

Uma condição necessária e suficiente para que um espaço topológico X, seja de Hausdorff, é que cada filtro de X tenha no máximo um ponto limite. Para demonstração, veja |2| Chap I, § 8.1, proposição 1.

0.61. Proposição:

Seja X um espaço uniforme. Se $\mathcal{F}$ é um filtro de Cauchy minimal de X, então todo elemento de $\mathcal{F}$ tem interior não vazio e este interior também pertence à $\mathcal{F}$.

Demonstração:

Seja V uma entourage de X, por 0.43 e 0.47, existe uma entourage simétrica e aberta $U \subset V$.

Temos então que para cada M subconjunto de X, U(M) é aberto e contido em V(M).
Como $\mathcal{F}$ é minimal, por 0.57, os conjuntos V(M) formam uma base de $\mathcal{F}$ e por 0.22 todo elemento de $\mathcal{F}$ contém U(M) que é um aberto diferente do vazio. Assim todo elemento de $\mathcal{F}$ tem interior não vazio.
Por 0.20, U(M) $\in$ F é assim o interior de cada elemento de $\mathcal{F}$, também pertence à F .

0.62. Proposição:

Sejam X um espaço uniforme e A um subconjunto denso de X, tal que toda base de filtro de Cauchy de A, converge em X. Então X é completo.

Demonstração:

Podemos considerar, sem perda de generalidade, $\mathcal{F}$ um filtro de Cauchy minimal de X, pois se este converge, qualquer um mais fino, também converge.
Daí, por 0.61, todo elemento de $\mathcal{F}$ tem interior não vazio e como A é denso em X, o traço de $\mathcal{F}$ sobre A é um filtro de Cauchy sobre A, (isto por: 0.27 e 0.54.), que por hipótese converge para x $\in$ X .
Como $\mathcal{F}$ é menos fino que o filtro gerado pelo traço de $\mathcal{F}$ sobre A, pois $\mathcal{F}$ é minimal; então x é um ponto de acumulação de $\mathcal{F}$ e por 0.59, x é um ponto limite de $\mathcal{F}$. Portanto X é completo.

0.63. Proposição:

Sejam A um subconjunto denso de um espaço topológico X e

f uma aplicação de A num espaço uniforme de Hausdorff completo X'. Então f pode ser estendida por continuidade à X, se e somente se, para cada $x \in X$, a imagem por f, do traço sobre A do filtro de vizinhanças de x em X, é uma base de filtro de Cauchy em X'.

<u>Demonstração</u>:

Por 0.48, X' é um espaço Regular, então, f pode ser estendida por continuidade à X, por 0.35, se e somente se, para cada $x \in X$, $\lim_{y \to x, y \in A} f(y)$ existe em X', mas por 0.33 isto quer dizer que $\lim_{\mathcal{F}} f$ existe em X' e significa ainda por 0.32, se chamamos o traço sobre A do filtro de vizinhanças de x em X de $\mathcal{F}$, que a base de filtro $f(\mathcal{F})$ converge em X' e como X' é completo, o que temos é equivalente à $f(\mathcal{F})$ ser uma base de filtro de Cauchy em X'.

0.64. <u>Definição</u>:

Um espaço topológico X é dito <u>uniformizável</u> e sua topologia é dita uniformizável, se existe uma estrutura uniforme sobre X, a qual é compatível, no sentido de 0.45, com sua topologia.

0.65. <u>Observação</u>:

Nem todo espaço topológico é uniformizável.
Por exemplo, de 0.48 e 0.15 um espaço que não seja de Hausdorff ou um espaço onde existe um ponto para o qual o conjunto das vizinhanças fechadas deste ponto não forma um sistema fundamental de vizinhanças.

Um exemplo de espaço topológico uniformizável é dado a seguir em 0.66.

0.66. Proposição:

Se X é um espaço topológico compacto, existe uma única estrutura uniforme compatível com a topologia de X.

Demonstração:

I - Unicidade: Mostraremos que se existe uma estrutura uniforme sobre X compatível com a topologia de X, então o conjunto $\mathcal{U}$ das entourages de X é o conjunto de todas as vizinhanças da diagonal Δ.

Dado uma entourage V de X, existe por 0.39 e demonstração de 0.47, uma entourage simétrica W, tal que $\overset{3}{W} \subset V$, mas $\overset{3}{W} \supset W \wedge W$ que por 0.46 é uma vizinhança de Δ. Assim V é uma vizinhança de Δ.

Reciprocamente, mostraremos que toda vizinhança de Δ, está em $\mathcal{U}$.

Suponha que existe uma vizinhança U de Δ, tal que $U \notin \mathcal{U}$. Então os conjuntos $V \cap U^c$, $V \in \mathcal{U}$, formam uma base de filtro $\mathcal{A}$ sobre o espaço compacto $X \times X$, pois $V \cap U^c \neq \emptyset$ e $(V_1 \cap U^c) \cap (V_2 \cap U^c) = (V_1 \cap V_2) \cap U^c \supset V_3 \cap U^c$, já que por 0.40, existe uma entourage V_3 tal que $V_1 \cap V_2 \supset V_3$. Daí, $\mathcal{A}$ tem um ponto de acumulação, pois $X \times X$ é compacto, $(a,b) \notin \Delta$, pois $(V \cap U^c) \cap \Delta = \emptyset$.

Como $\mathcal{U}$ é um filtro menos fino que $\mathcal{A}$, (a,b) também é um ponto de acumulação de $\mathcal{U}$.

Sendo a estrutura $\mathcal{U}$ de Hausdorff, pois X é compacto e por hipótese, a topologia coincide com a topologia induzida, a interseção dos fechos dos conjuntos de $\mathcal{U}$, é Δ. Logo se (a,b) é ponto de acumulação de $\mathcal{U}$, temos que $(a,b) \in \Delta$, o que é uma contradição.

Portanto o conjunto das entourages de X, coincide com o conjunto das vizinhanças de Δ.

II - Existência: Mostraremos que o conjunto $\mathcal{B}$ das vizinhanças de Δ em $X \times X$, é o conjunto das entourages de uma estrutura uniforme compatível com a topologia de X. É bastante mostrar que $\mathcal{B}$ é o conjunto das entourages de uma estrutura de Hausdorff sobre X e aí a topologia induzida por esta estrutura uniforme será menos fina que a topologia de X, já que os $V(x)$ são abertos em X se V é aberto em $X \times X$.

Agora, considerando X_1 o espaço topológico com a topologia induzida pela estrutura uniforme de X. Como esta topologia é menos fina que a topologia de X, temos que a aplicação identidade $i: X \longrightarrow X_1$ é contínua. Como X é compacto e X_1 de Hausdorff, i é fechada e assim um homeomorfismo. Portanto as topologias coincidem.

Finalmente, vamos mostrar que $\mathcal{B}$ é o conjunto das entourages de uma estrutura de Hausdorff.

As propriedades FI, FII e U1, são claras.

Vejamos U2, U3 e que a estrutura dada por $\mathcal{B}$ é de Hausdorff, isto é, que Δ é a interseção dos conjuntos de $\mathcal{B}$.

Em primeiro lugar, todo conjunto consistindo somente de um ponto $(x,y) \in X \times X$ é fechado pois X é de Hausdorff. Assim, se $x \neq y$, o complemento de (x,y) em $X \times X$

é uma vizinhança de Δ. A interseção destas vizinhanças é Δ pois Δ é fechado, já que X é de Hausdorff.

Agora, como a aplicação: $\begin{array}{l} X \times X \longrightarrow X \times X \\ (x,y) \longrightarrow (y,x) \end{array}$ é um homeomorfismo, se $V \in \mathcal{B}$, então $\overset{-1}{V} \in \mathcal{B}$ e temos satisfeito U2.

Finalmente, suponhamos que U3 não é válido.

Então existe $V \in \mathcal{B}$, tal que, para todo $W \in \mathcal{B}$, $\overset{2}{W} \cap V^c \neq \emptyset$.

Os conjuntos $\overset{2}{W} \cap V^c$, $W \in \mathcal{B}$, formam uma base de filtro sobre o espaço compacto X x X, pois $\overset{2}{W} \cap V^c \neq \emptyset$ e $(\overset{2}{W} \cap V^c) \cap (\overset{2}{W'} \cap V^c) = (\overset{2}{W} \cap \overset{2}{W'}) \cap V^c \supseteq W'' \cap V^c$ uma vez que por 0.40, existe W", tal que $W'' \subseteq \overset{2}{W} \cap \overset{2}{W'}$.

Assim esse filtro tem um ponto de acumulação $(x,y) \notin \Delta$.

Como X é compacto, X é regular e existem vizinhanças abertas disjuntas U_1 de x e U_2 de y, e vizinhanças fechadas $V_1 \subseteq U_1$ e $V_2 \subseteq U_2$ de x e y respectivamente.

Seja $U_3 = (V_1 \cup V_2)^c$ e considere a vizinhança

$$W = \bigcup_{i=1,2,3} (U_i \times U_i) \text{ de } \Delta \text{ em } X \times X.$$

Daí, se $(u,v) \in W$ e por exemplo $u \in V_1$, então teremos $v \in U_1$ e assim, $(u,v) \in U_1 \times U_1$.

Portanto, a vizinhança $V_1 \times V_2$, de (x,y) em X x X, não intersecta $\overset{2}{W}$ e isto significa que $\overset{2}{W} \cap V^c$ não intersecta uma vizinhança de (x,y), no caso $V_1 \times V_2$, o que é uma contradição com o fato de (x,y) ser ponto de acumulação da base de filtro formada pelos conjuntos $\overset{2}{W} \cap V^c$.

Portanto temos a propriedade U3 .

0.67. <u>Proposição</u>:

Seja X um espaço compacto. Então X é um espaço uniforme completo, com a estrutura compatível com a topologia de X .

Demonstração:

Como X é compacto, em particular, todo filtro de Cauchy $\mathcal{F}$, possui um ponto de acumulação em X, o que por 0.50, é um ponto limite de $\mathcal{F}$. Portanto $\mathcal{F}$ é convergente em X e por 0.51, X é completo.

1. A TOPOLOGIA DEFINIDA POR UMA VALORIZAÇÃO

Nesta seção, definimos uma topologia sobre um corpo K, a partir de uma valorização v de K, mostramos que essa topologia é de Hausdorff, que torna K um corpo topológico, isto é, essa topologia é compatível com a estrutura de corpo de K e mostramos que K é totalmente desconexo com essa topologia.

Por outro lado, se v é uma valorização discreta, isto é seu grupo de valores é isomorfo à Z, mostramos que os ideais do anel A de valorização de v, diferente de zero, são da forma Au^n, $n > 0$ e u um elemento uniformizante de v, ou seja u é tal que sua imagem por v é o elemento do grupo de valores que corresponde a $1 \in Z$.

Finalmente, o Teorema desta seção nos dá uma condição necessária e suficiente para que a topologia de que falamos acima, coincida com a topologia m-ádica sobre o anel de valorização de v.

Sejam K um corpo, v uma valorização de K e G o grupo totalmente ordenado $v(K^*)$ - o grupo de valores de v.

Para cada $\alpha \in G$, denotamos $V_\alpha = \left\{x \in K;\ v(x) > \alpha\right\}$.

1.1. <u>Proposição</u>:

A família $\left\{V_\alpha\right\}_{\alpha \in G}$, satisfaz as seguintes propriedades:

I - Cada V_α é um subgrupo aditivo de K.

II - $\bigcap_{\alpha \in G} V_\alpha = \left\{0\right\}$.

III - Se $\alpha > \beta$, então $V_\beta \supset V_\alpha$

IV - Dados V_α e V_β, existe V_γ, tal que $V_\gamma \subset V_\alpha \cap V_\beta$

V - Dado V_α, existe V_β, tal que $V_\beta^2 \subset V_\alpha$.

VI - Dados V_α, $a \in V_\alpha$ e $b \in K$, existe V_β, tal que:

$V_\beta + a \subseteq V_\alpha$ e $V_\beta b \subseteq V_\alpha$.

Demonstração:

I - Temos que $0 \in V_\alpha$ pois $v(0) = \infty > \alpha$ para todo $\alpha \in G$, e $x-y \in V_\alpha$, pois $v(x-y) \geq \inf \{v(x), v(y)\} > \alpha$, já que $v(x) > \alpha$ e $v(-y) = v(y) > \alpha$.

Portanto cada V_α é um subgrupo aditivo de K .

II - É claro.

III - Se $x \in V_\alpha$ então, $v(x) > \alpha > \beta$ daí, $x \in V_\beta$

Portanto $V_\alpha \subseteq V_\beta$.

IV - Dados V_α e V_β, como G é totalmente ordenado, existe $\gamma \in G$, tal que $\gamma > \alpha$ e $\gamma > \beta$, consequentemente pelo item anterior, $V_\gamma \subseteq V_\alpha \cap V_\beta$

V - Tome $\beta > \alpha$ e sejam $x,y \in V_\beta$

então $v(x) > \beta$ e $v(y) > \beta$.

Temos ainda, $v(xy) = v(x) + v(y) > 2\beta > \alpha$ e assim

e assim $xy \in V_\alpha$ o que nos dá que $V_\beta^2 \subseteq V_\alpha$.

VI - Tome $\beta > \alpha$ e $x \in V_\beta$

então, $v(x+a) \geq \inf \{v(x), v(a)\} > \alpha$

Logo $x + a \in V_\alpha$ e $V_\beta + a \subseteq V_\alpha$.

Se $b \in K$, como G é totalmente ordenado,

temos: $v(b) > v(x)$ ou $v(x) > v(b)$, para certo $x \in K$.

Assim, existe β tal que $\beta + v(b) > \alpha$.

Daí se $x \in V_\beta$, temos: $v(xb) = v(x) + v(b) > \alpha$

Portanto $xb \in V_\beta$ e $V_\beta b \subseteq V_\alpha$

1.2. Lema:

Considere $\mathcal{B} = \left\{x + V_\alpha;\ \alpha \in G,\ x \in K\right\}$.
Para todo par de pontos distintos, $a,b \in K$, existe $U \in \mathcal{B}$, tal que, $a \in U$ e $b \notin U$.

Demonstração:

Sejam a,b pontos distintos de K
Como por 1.1, $\bigcap_{\alpha \in G} V_\alpha = \left\{0\right\}$, existe $\beta \in G$, tal que $b-a \notin V_\beta$, donde $b \notin V_\beta + a$.
Assim $U = V_\beta + a$ é uma tal vizinhança.

1.3. Proposição:

Existe uma única topologia τ_V sobre K, para a qual K é um grupo topológico aditivo e $\left\{V_\alpha\right\}_{\alpha \in G}$ forma um sistema fundamental de vizinhanças para o zero.

Demonstração:

I - Se existe uma topologia τ_V sobre K, tal que $\left\{V_\alpha\right\}_{\alpha \in G}$ forma um sistema fundamental de vizinhanças do zero, então $\mathcal{B} = \left\{x+V_\alpha;\ \alpha \in G,\ x \in K\right\}$ é uma base para esta topologia. Portanto se temos uma tal topologia, ela é única.

I.1. Se temos a topologia, então V_α é aberto em K e portanto as vizinhanças da forma $x+V_\alpha$, são abertos em K com respeito a essa topologia.

I.2. Se W é um aberto em K com respeito a topologia dada e $a \in W$, por 1.2, para $b \in K \setminus W$, existe $U \in \mathcal{B}$, tal que $a \in U$ e $b \notin U$, pois suponha que existe $b \in K \setminus W$, tal que $b \in U$ para todo $U \in \mathcal{B}$.

Como vimos na demonstração de 1.2, $U = a+V_\beta$, para certo β, então temos $b \in a+V_\beta$ para todo β, o que é uma contradição. Portanto, existe $U \in \mathcal{B}$, tal que $a \in U \subseteq W$. Concluímos assim que $\mathcal{B}$ é uma base para a topologia dada.

II - Seja τ_V a topologia gerada por $\mathcal{B}$ em K, isto é: τ_V é a topologia menos fina em K que contém os elementos de $\mathcal{B}$ como abertos (veja [2], Chap 1, § 2.3). Assim os abertos de τ_V são uniões de interseções finitas de elementos de $\mathcal{B}$. Em outras palavras, $\mathcal{B}$ é uma sub-base de τ_V. Temos que cada $V_\alpha \in \tau_V$ e além disso, dado qualquer vizinhança W de zero com respeito a τ_V, existe $A \in \tau_V$, tal que $0 \in A \subseteq W$. Pela definição de τ_V, $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ onde $U_\lambda = \bigcap_{i(\lambda)=1}^{m(\lambda)} \left\{X_{i(\lambda)} + V_{\alpha_{i(\lambda)}}\right\}$. Como $0 \in A$, existe $\lambda \in \Lambda$, tal que, $0 \in U_\lambda = \bigcap_{i(\lambda)=1}^{m(\lambda)} \left\{X_{i(\lambda)} + V_{\alpha_{i(\lambda)}}\right\}$, isto é, $0 \in X_{i(\lambda)} + V_{\alpha_{i(\lambda)}}$ para cada $i(\lambda) = 1 \cdots m(\lambda)$, mas por 1.1, $V_{\alpha_{i(\lambda)}}$ é um subgrupo, logo $X_{i(\lambda)} \in V_{\alpha_{i(\lambda)}}$, ou seja, $X_{i(\lambda)} + V_{\alpha_{i(\lambda)}} = V_{\alpha_{i(\lambda)}}$, donde $0 \in U_\lambda = \bigcap_{i(\lambda)=1}^{m(\lambda)} V_{\alpha_{i(\lambda)}}$.

Então para $\alpha \geq \max\left\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m(\lambda)}\right\}$, temos que $V_\alpha \subseteq U_\lambda \subseteq A$. Logo $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de vizinhanças do zero com respeito a τ_V.

Resta mostrar que a aplicação
$$\begin{aligned} K \times K &\longrightarrow K \\ (x,y) &\longrightarrow x-y \end{aligned}$$
é contínua com respeito a topologia τ_V.

Trabalharemos inicialmente com vizinhanças da forma

$x + V_\alpha \in \mathcal{B}$. Seja $z = x-y$ e $w + V_\alpha$ uma vizinhança qualquer de z, desta forma. Por 1.1, existe $\beta \in G$, tal que $V_\beta \subseteq V_\alpha$, então, $z + V_\beta \subseteq w + V_\alpha$, já que $z \in w + V_\alpha$

Assim, $(x+V_\beta)-(y+V_\beta)=x-y+V_\beta-V_\beta = x-y+V_\beta = z+V_\beta \subseteq w + V_\alpha$.

Agora, dado uma vizinhança qualquer $A = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, de $z = x-y$

Com respeito a τ_v, temos $U_\lambda = \bigcap_{i(\lambda)=1}^{m(\lambda)} \left\{w_{i(\lambda)} + V_{\alpha_{i(\lambda)}}\right\}$.

É claro que basta trabalharmos com U_λ. Já obtemos que para cada $i(\lambda)$, existe $\beta_{i(\lambda)}$, tal que

$$(x + V_{\beta_{i(\lambda)}}) - (y + V_{\beta_{i(\lambda)}}) \subseteq w_{i(\lambda)}+V_{\alpha_{i(\lambda)}}$$

Como só temos um número finito de $i(\lambda), i(\lambda)=1,\dots,m(\lambda)$, seja $\beta = \max\left\{\beta_1,\dots,\beta_{m(\lambda)}\right\}$. Então claramente por 1.1, $(x + V_\beta) - (y + V_\beta) \subseteq U_\lambda$ e portanto está mostrada a continuidade.

1.4. <u>Observação</u>:

Como V_α aberto em K e K é um grupo topológico aditivo, a translação é um homeomorfismo e para $y \in K$, temos $y + V_\alpha$ é aberto em K. Então $\bigcup_{y\notin V_\alpha} (y + V_\alpha)$, que é o complementar de V_α em K, é aberto em K. Portanto V_α é fechado em K.

1.5. <u>Lema</u>:

Sejam $x,y \in K^*$ e $\alpha \in G$.

Se $v(x-y) > \sup\left\{\alpha + 2v(y), v(y)\right\}$, então, $v(x^{-1} - y^{-1}) > \alpha$

<u>Demonstração</u>:

Temos $x^{-1} - y^{-1} = x^{-1}(y - x)y^{-1}$

então $v(x^{-1}-y^{-1}) = v(x^{-1})+v(y-x)+v(y^{-1}) = v(x-y)-v(x)-v(y)$.
já que $v(x^{-1}) = -v(x)$ e $v(-x) = v(x)$.

Se $v(x-y) > v(y)$, temos $v(y) = \inf \{v(x-y),\ v(y)\}$

daí: $v(x) = v\left[(x-y)+y\right] \geq \inf \{v(x-y),\ v(y)\} = v(y)$.

Suponhamos que $v(x) = v\left[(x-y) + y\right] > v(y)$.

Como $y = (x-y) + y - (x-y)$,

$v(y) \geq \inf \{v\left[(x-y) + y\right],\ v(x-y)\} > v(y)$, pois ambos $v\left[(x-y) + y\right] = v(x) > v(y)$ e $v(x-y) > v(y)$, o que nos dá uma contradição. Logo $v(x) = v(y)$.

Se ademais, $v(x-y) > \alpha + 2v(y)$, temos:

$v(x^{-1}-y^{-1}) = v(x-y)-v(x)-v(y)=v(x-y) - 2v(y) > \alpha+2v(y)-2v(y) = \alpha$

1.6. Proposição:

A topologia τ_v é de Hausdorff e compatível com a estrutura de corpo de K. A aplicação $v:K^* \dashrightarrow G$ é contínua se G tem a topologia discreta.

Demonstração:

I - Basta verificar que podemos separar por dois abertos disjuntos, a origem e um outro ponto diferente da origem, pois dados dois pontos quaisquer $x,y \in K$, $x \neq y$, podemos trazê-los para a origem, isto é, podemos pensá-los como a origem e o ponto $y-x$.

Assim, seja $x \in K^*$ e $\alpha = v(x)$.

Temos que $x \notin V_\alpha$. Como V_α é fechado em K, temos que V_α^c é aberto em K. Logo V_α e V_α^c são os abertos disjuntos que "separam" a origem e o ponto $x \neq 0$, respectivamente.

II - Como já mostramos em 1.3, que K é um grupo topológico aditivo, resta verificar a continuidade das aplicações: $K \times K \longrightarrow K$, tal que $(x,y) \longrightarrow xy$ e $K^* \longrightarrow K$, tal que, $x \longrightarrow x^{-1}$.

Da demonstração de 1.3, vemos que basta trabalharmos com vizinhanças da forma $x + V_\alpha$.

Em primeiro lugar, seja $z = xy$ e $w + V_\alpha$ uma vizinhança qualquer de z.

Por 1.1, existem β, γ e δ, tais que:

$z + V_\beta \subseteq w + V_\alpha$, $V_\gamma^2 \subseteq V_\beta$ e $V_\delta(x + y) \subseteq V_\beta$.

Tome $\lambda = \max\{\gamma, \delta\}$, então $V_\lambda \subseteq V_\gamma \cap V_\delta$.

Assim, $(x+V_\lambda)(y+V_\lambda) = xy+V_\lambda(x+y)+V_\lambda^2 \subseteq z+V_\beta \subseteq w+V_\alpha$.

e temos a continuidade do produto.

Agora, se $x \in K^*$, dado $\alpha \in G$ e $y \in K^*$, se $x-y \in V_\beta$ onde $\beta = \sup\{\alpha + 2v(x), v(x)\}$, isto é sempre que $v(x-y) > \sup\{\alpha + 2v(x), v(x)\}$, por 1.5, temos $v(x^{-1}-y^{-1}) > \alpha$, isto é, $x^{-1}-y^{-1} \in V_\alpha$, o que mostra a continuidade da aplicação, $K^* \longrightarrow K$, tal que $x \longrightarrow x^{-1}$, aliás, mais do que isto, mostra que essa aplicação é uniformemente contínua.

III - Suponha que G está munido da topologia discreta. Então um aberto contendo $v(x)$, pode ser o próprio $v(x)$, seja $v(x) = \alpha$. Se $x-y \in V_\alpha$, isto é: $v(x-y) > v(x)$, por parte da demonstração de 1.5, temos $v(x) = v(y)$.

Logo $v(y)$ pertence ao aberto contendo $v(x)$.

Portanto v é contínua.

1.7. Proposição:

Sejam K um corpo e v uma valorização de K, com grupo de K, com grupo de valores G. Então:

I - $A = \{x \in K;\ v(x) \geq 0\}$ é um subanel de K, chamado o anel de valorização de v.

II - Para todo $\alpha \in G$, $\alpha \geq 0$, V_α e $V'_\alpha = \{x \in K;\ v(x) > \alpha\}$ são ideais de A e todo ideal diferente de zero de A, contém um dos V'_α.

III - $m(A) = \{x \in A;\ v(x) > 0\}$ é o único ideal maximal de A. $U(A) = A \setminus m(A)$ é o conjunto dos elementos invertíveis de A e $k(A) = A/_{m(A)}$ é um corpo, chamado corpo de resíduos da valorização v.

Demonstração:

I - Que A é um subanel de K, vem das propriedades da valorização v.

II - Que V_α, V'_α, para $\alpha > 0$, são ideais de A, é claro.

Considere $b \neq \{0\}$ um ideal de A.

Dado $x \in b$, $x \neq 0$, para todo $y \in V'_\alpha$ onde $\alpha \geq v(x)$.

Podemos escrever $y = (yx^{-1})x$

Como $v(y) \geq \alpha \geq v(x)$, temos $v(yx^{-1}) = v(y) - v(x) \geq 0$.

Logo $yx^{-1} \in A$ e assim $y \in Ax \subseteq b$, pois $x \in b$.

Portanto, $V'_\alpha \subseteq b$.

III - Temos $U(A) = A \setminus m(A) = \{x \in K;\ v(x) = 0\}$. Assim se $x \in U(A)$, $v(x^{-1}) = -v(x) = 0$ e então $x^{-1} \in U(A)$, isto é, se $x \in U(A)$, então x é invertível.

Reciprocamente, se $y \in A$ é invertível em A,

Então $v(y) \geq 0$ e $v(y^{-1}) \geq 0$, mas $v(y) + v(y^{-1}) = 0$.

Logo $v(y) = 0$ e $y \in U(A)$

Assim $U(A)$ é o conjunto dos elementos invertíveis de A. Portanto, por uma proposição bem conhecida $m(A)$ é o único ideal maximal de A e $k(A) = {}^{A}/_{m(A)}$ é um corpo.

1.8. Observação:

Se $\beta < \alpha$, temos que $V_\beta \supset V'_\alpha \supset V_\alpha$. Assim, a família $\{V'_\alpha\}$ forma um sistema fundamental de vizinhanças do zero com respeito a topologia τ_v.

1.9. Definição:

Seja K um corpo. A única valorização v de K, tal que $v(x) = 0$, $\forall x \in K^*$, é chamada a valorização imprópria ou trivial de K.

1.10. Proposição:

Uma valorização v é imprópria, se e somente se, τ_v é a topologia discreta.

Demonstração:

Se v é imprópria, $v(x) = 0$ $\forall x \neq 0$ e $v(0) = \infty$, então para cada $\alpha \in G$, $V_\alpha = \{0\}$, ou seja $\{0\}$ é aberto em K segundo τ_v. Como K é um grupo aditivo topológico, segue-se que cada ponto de K é aberto em K, isto é, τ_v é a topologia discreta. Reciprocamente, se τ_v é a topologia discreta, $\{0\}$ é aberto em K e então existe $\alpha \in G$, tal que $V_\alpha = \{0\}$.

Suponha que existe $x \neq 0$, tal que $v(x) \neq 0$.

Podemos supor $v(x) = \beta > 0$.

Tome $\gamma > \max\{\alpha, \beta\}$. Então $x \in V_\gamma \subset V_\alpha$ o que é uma contradição.

Portanto v é uma valorização imprópria.

1.11. Proposição:

O corpo topológico K, com a topologia τ_v, é totalmente desconexo, isto é, qualquer subconjunto de K com mais de um ponto é desconexo.

Demonstração:

Seja $X \subseteq K$ um subconjunto de K, que podemos supor sem perda de generalidade ser formado por dois pontos. Podemos supor ainda que um desses pontos é a origem. Seja então $x \neq 0$ o outro ponto.

Assim por 1.2, existe $\alpha \in G$, tal que $x \notin V_\alpha$. Como por 1.4, V_α é aberto e fechado em K, temos que $V_\alpha \cap X$ é aberto e fechado em K e $X \setminus (V_\alpha \cap X)$ é aberto em K.

Logo $X = [X \setminus (V_\alpha \cap X)] \cup [V_\alpha \cap X]$ é a união de dois abertos disjuntos e diferentes do vazio.

Portanto X é desconexo e K é totalmente desconexo.

1.12. Proposição:

A topologia quociente do corpo de resíduos da valorização v, é a topologia discreta.

Demonstração:

Temos que $m(A) = V_0$ que é aberto e fechado em K. Assim os pontos de k(A) são abertos e fechados na topologia quociente de k(A).

Portanto a topologia de k(A) é a topologia discreta.

1.13. Definição:

Sejam K um corpo e v uma valorização de K com grupo de valores G. Diz-se que v é uma valorização discreta, se existe um isomorfismo de grupos ordenados de G sobre Z. Se temos isso, seja $\gamma \in G$ o elemento correspondente a $1 \in Z$, pelo isomorfismo. Todo $u \in K$, tal que $v(u) = \gamma$ é chamado elemento uniformizante de v.

A valorização discreta v, diz-se normalizada se $G = Z$.

1.14. Lema:

Sejam K um corpo e v uma valorização discreta de K. Considere A o anel da valorização v e u um elemento uniformizante para v. Então os ideais diferentes de zero, de A, são da forma Au^n, $n \geq 0$. Em particular $m^n = Au^n$, $n \geq 0$.

Demonstração:

Seja ζ um isomorfismo de $v(K^*)$ sobre Z. Então $w = \zeta \circ v$ é uma valorização de K e um elemento uniformizante é por 1.13, qualquer $u \in A$ tal que $w(u) = 1$.

Para cada $x \in K^*$, existe $n \in Z$ tal que $w(x) = n = w(u^n)$.

Daí, $w(x) - w(u^n) = 0$, isto é, $w(xu^{-n}) = 0$, donde $z = xu^{-n}$ é um elemento invertível de A. Assim, $x = zu^n$.

Considere $b \neq 0$ um ideal qualquer de A.

Seja $x \neq 0$, $x \in b$, tal que $w(x) = \alpha$ é o menor valor positivo assumido por w sobre b.

Então, se $y \in b$, temos $v(y) \geq \alpha = v(x)$ e então $yx^{-1} \in A$, donde $y \in Ax$.

Por outro lado, como $x \in b$, temos que $Ax \subseteq b$.

Logo $b = Ax$.

Mas $x = z\,u^n$, $n \geq 0$, assim $b = Azu^n = Au^n$ pois z é inversível. Portanto terminamos a demonstração.

1.15. Definição:

Sejam A um anel local e m o seu ideal maximal. A topologia m-ádica de A é a topologia que tem como sistema fundamental de vizinhanças do zero, $\{m^n\}_{n=0,1,2,\ldots}$, onde convencionamos $A = m^0$.

1.16. Teorema:

Sejam K um corpo, v uma valorização de K com grupo de valores G, A o anel de valorização de v e m seu ideal maximal. Então, uma condição necessária e suficiente para que a topologia definida por v sobre A, seja identica a topologia m-ádica, é que A seja um corpo ou v uma valorização discreta.

Demonstração:

I1. Se A é um corpo, então $A = K$.

Então em τ_v, um sistema fundamental de vizinhanças para o zero é constituído somente de $\{0\}$. Por outro lado, para a topologia m-ádica um sistema fundamental de vizinhanças do zero é dado por $\{m^n\}$, mas $m = \{0\}$. Logo esse sistema fundamental de vizinhanças é constituído somente de zero.

Portanto neste caso, as duas topologias coincidem.

I2. Suponha que v é uma valorização discreta. Vamos mostrar que $V_n = m^{n+1}$, $n=0,1,2,\ldots$.

Temos $V_o = m = Au$, isto por 1.14.

Temos ainda: $V_n = \left\{x \in A;\ v(x) > n\right\}$ e $m^{n+1} = Au^{n+1}$.

Se $x \in V_n$, temos $v(x) > n\, v(u) = v(u^{n+1})$

Assim $x = zu^{n+1}$ onde z é um elemento invertível de A

e $x \in Au^{n+1} = m^{n+1}$.

Reciprocamente, se $x \in m^{n+1} = Au^{n+1}$,

então, $v(x) = v(zu^{n+1}) = v(z) + (n+1) \geq n+1$.

Logo $x \in V_n$ e portanto concluímos.

II.1. Vamos mostrar que posto de v é igual a 1.

Suponha que posto seja maior do que 1. Por 0.10, existe um ideal primo p tal que, $\{0\} \subsetneq p \subsetneq m$. Assim, $m^j \supseteq p$ para $j=1,2,\ldots$, pois se $a \in m \setminus p$, temos que $a^j \in m^j \setminus p$, já que p é primo.

Logo $\bigcap_j m^j \supseteq p \neq \{0\}$, o que é uma contradição pois a topologia m-ádica, por hipótese, coincide com a topologia τ_v sobre A e por 1.6, τ_v é de Hausdorff. Portanto posto de v é igual a 1 ou $A = K$.

II.2. Se A não é um corpo, então posto de v é igual a 1 e por 0.11, temos que $G \subseteq (\mathbb{R}, \leq)$.

II.3. Consideremos agora, $G \subseteq (\mathbb{R}, \leq)$. Vamos mostrar que G_+, o conjunto dos elementos positivos de G, tem um elemento mínimo.

Dado $\alpha \in G_+^*$, existe $n \in \mathbb{N}^*$, tal que $m^n \subseteq V_\alpha$, pois por hipótese as duas topologias coincidem, assim para todo $x \in m$, $x^n \in V_\alpha$, o que nos dá, $nv(x) > \alpha$

e $v(x) > {}^{\alpha}/_{n}$ (*).

Então ou ${}^{\alpha}/_{n} \in G_+$ e neste caso ${}^{\alpha}/_{n}$ é o elemento mínimo de G_+ ou $G_+ \subseteq ({}^{\alpha}/_{n}, \infty)$ e daí temos que:

ou G_+ tem um elemento mínimo, ou existe uma sequência (γ_n) em G_+ convergindo para $\gamma \in ({}^{\alpha}/_{n},\infty)$, como (γ_n) é convergente, temos que (γ_n) é de Cauchy e daí, existe $n_0 \in N$ tal que para $m,n \geq n_0$ (podemos supor $m \geq n$), $\gamma_m - \gamma_n \longrightarrow 0$ (com relação ao valor absoluto usual de R)

Então $0 < \gamma_m - \gamma_n < {}^{\alpha}/_{n}$.

Como G é um subgrupo, temos que $\gamma_m - \gamma_n \in G_+$, o que é uma contradição de (*).

Portanto existe um elemento minimal ρ em G_+^*.

II.4. Se $G \subset (R, \leq)$ e G_+^* tem uma elemento mínimo ρ, então $G \subset <\rho>$, onde $<\rho>$ é o subgrupo de $(R,+)$ gerado por ρ, e portanto $G = <\rho>$, isto é, G é isomorfo (como grupo abeliano ordenado) a um subgrupo de Z.

Para todo $\alpha \in G$, existe $n \in Z$, tal que, $n\rho \leq \alpha < (n+1)\rho$

Suponhamos que $n\rho < \alpha < (n+1)\rho$ então, $0 < \alpha - n\rho < \rho$, mas $\alpha - n\rho \in G_+^*$. Assim temos uma contradição da minimalidade de ρ. Logo $\alpha = n\rho$ e $G \subset <\rho>$.

Portanto v é uma valorização discreta.

2. A ESTRUTURA UNIFORME DE UM CORPO VALORIZADO (K,v) E UMA CONDIÇÃO NECESSÁRIA E SUFICIENTE PARA QUE K SEJA LOCALMENTE COMPACTO

Nesta seção definimos a estrutura uniforme de um corpo valorizado; mostramos que esta estrutura é compatível com a topologia definida pela valorização de K, isto é, quando se induz a topologia da estrutura uniforme obtida, o que se faz é "recuperar" a topologia dada pela valorização de K.

Demonstramos dois resultados, o primeiro utilizando a estrutura uniforme de K, dá uma condição necessária e suficiente para K ser completo e o segundo usando a noção de limite inverso, dá uma condição necessária e suficiente para que K seja localmente compacto.

2.1. <u>Definição:</u>

Seja v uma valorização de K. Considere em K, a topologia τ_v. Para cada α, definimos $\underline{V_\alpha} = \left\{(x,y) \in K \times K;\ y-x \in V_\alpha\right\}$ Denotamos por $\mathcal{V}$ a família dos $\underline{V_\alpha}$, $\alpha \in G$.

2.2. <u>Proposição:</u>

$\mathcal{V}$ forma um sistema fundamental de entourages para uma estrutura uniforme $\mathcal{U}$ sobre K.

<u>Demonstração:</u>

I - Como $0 \in V_\alpha$, por 2.1, temos que a diagonal está contida em $\underline{V_\alpha}$, para cada $\alpha \in G$.

II - Por 1.1, dados $\alpha, \beta \in G$, existe γ, tal que: $V_\gamma \subseteq V_\alpha \cap V_\beta$

Se $(x,y) \in \underline{V}_\gamma$, $y-x \in V_\gamma$

e daí $y-x \in V_\alpha$ e $y-x \in V_\beta$, o que nos dá: $(x,y) \in \underline{V}_\alpha$ e $(x,y) \in \underline{V}_\beta$ e então $(x,y) \in \underline{V}_\alpha \cap \underline{V}_\beta$

Portanto, existe $\gamma \in G$, tal que $\underline{V}_\gamma \subset \underline{V}_\beta \cap \underline{V}_\alpha$

III - Se $(x,y) \in \underline{V}_\alpha \Longrightarrow y-x \in V_\alpha$ e como V_α é um subgrupo, temos que $x-y \in V_\alpha$ o que nos dá que $(y,x) \in \underline{V}_\alpha$. Portanto, $\underline{V}_\alpha^{-1} = \underline{V}_\alpha$ e assim da propriedade U3, temos que existe uma entourage W tal que $W \subset \underline{V}_\alpha^{-1}$,

IV - Dado α, existe β tal que $V_\beta^2 \subset V_\alpha$, isto por 1.1. Assim, se $(x,y) \in (\underline{V}_\beta)^2$, temos: $(x,z) \in \underline{V}_\beta$ e $(z,y) \in \underline{V}_\beta$ para algum z. Daí $z-x \in V_\beta$ e $y-z \in V_\beta$, então,

Por 1.1, $y-x \in V_\beta \subset V_\beta^2 \subset V_\alpha$

Agora, por 2.1, $(x,y) \in \underline{V}_\alpha$ e assim, $(\underline{V}_\beta)^2 \subset \underline{V}_\alpha$.

Portanto por 0.39, temos o resultado.

2.3. Definição:

A estrutura uniforme sobre um corpo K, com uma valorização v, é a estrutura uniforme $\mathcal{U}$, para a qual um sistema fundamental de entourages é dado pelos $\underline{V}_\alpha$ de 2.1, isto é, as entourages desta estrutura são os subconjuntos de $K \times K$ que contêm um dos $\underline{V}_\alpha$.

2.4. Proposição:

A estrutura uniforme $\mathcal{U}$ de K é compatível com a topologia τ_v de K.

Demonstração:

As vizinhanças de x, na topologia τ_v de K, são: $x + V_\alpha$.
As vizinhanças de x, na topologia induzida de estrutura uni-

forme de K são, de acordo com 0,45,

$\underline{V_\alpha}(x) = \{y \in K;\ (x,y) \in \underline{V_\alpha}\} = \{y \in K;\ y - x \in V_\alpha\}$, por 2.1.

Vamos mostrar que estas vizinhanças coincidem.

I - Se $y \in \underline{V_\alpha}(x)$, então $y - x \in V_\alpha$ e daí: $y \in x + V_\alpha$.

Logo $\underline{V_\alpha}(x) \subset x + V_\alpha$.

II - Se $y \in x + V_\alpha$, então $y - x \in V_\alpha$ e $y \in \underline{V_\alpha}(x)$.

2.5. Proposição:

Se em K existe uma vizinhança V_α, de zero a qual é completa com relação a estrutura uniforme $\mathcal{U}$, então, K é completo.

Demonstração:

Sejam V_α uma vizinhança do zero, a qual é completa e $\mathcal{F}$ um filtro de Cauchy em relação a estrutura dada.

Então existe $M \in \mathcal{F}$, tal que $M \times M \subset \underline{V_\alpha}$

Agora, se $x \in M$, então $M \subset x + V_\alpha$, pois se $y \in M$,

Como $x \in M$, temos $(x,y) \in M \times M \subset \underline{V_\alpha}$ e assim por 2.1, $y - x \in V_\alpha$, donde $y \in x + V_\alpha$.

Daí, $x + V_\alpha \in \mathcal{F}$, por 0.17, o que implica que a interseção de cada elemento de $\mathcal{F}$ com $x + V_\alpha$ é diferente do vazio e assim por 0.27, o traço de $\mathcal{F}$ sobre $x + V_\alpha$, é um filtro. Como $\mathcal{F}$ é de Cauchy, por 0.54, este traço é um filtro de Cauchy sobre $x + V_\alpha$.

Temos que $x + V_\alpha$ é completo, pois é a translação de V_α. Assim o traço de $\mathcal{F}$ sobre $x + V_\alpha$, converge para um ponto $x_0 \in x + V_\alpha$.

Como x_0 é um ponto de acumulação de F, por 0.59, x_0 é um ponto limite de F. Portanto K é completo.

Um grupo abeliano topológico G é um grupo aditivo com uma topologia, com relação a qual, a aplicação

$G \times G \longrightarrow G$, $(x,y) \longrightarrow x - y$ é contínua.

2.6. Proposição:

Seja G um grupo abeliano topológico de Hausdorff e sejam H_α, $\alpha \in I$ (onde I é um conjunto parcialmente ordenado) uma família de subgrupos de G tal que:

P1 - $H_\alpha \supseteq H_\beta$, sempre que $\alpha \leq \beta$.

P2 - Para cada $\alpha \in I$, H_α é completo e cada vizinhança de zero contém um dos H_α, em outras palavras: a base de filtro formada pelos H_α, converge para zero.

Então a aplicação canônica $f: G \longrightarrow \varprojlim G/H_\alpha$ é um isomorfismo de grupos topológicos.

Demonstração:

I - A aplicação $f: G \longrightarrow \varprojlim G/H_\alpha$ tal que: $x \longmapsto (x+H_\alpha)$, é um homomorfismo contínuo, pois cada aplicação $f_\alpha: G \rightarrow G/H_\alpha$ tal que: $x \longmapsto x+H_\alpha$, é um homorfismo contínuo.

II - Temos $f^{-1}\left[(x_\alpha+H_\alpha)\right] = \left\{x \in G;\ f(x) = (x+H_\alpha) = (x_\alpha+H_\alpha)\right\}$ e $(x+H_\alpha) = (x_\alpha+H_\alpha)$ para todo $\alpha \in I$, se e somente se, $x-x_\alpha \in H_\alpha$, para todo $\alpha \in I$, se e somente se, $x \in x_\alpha+H_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, se e somente se, $x \in \bigcap_{\alpha \in I} (x+H_\alpha)$.

Então $f^{-1}\left[(x_\alpha+H_\alpha)\right] = \bigcap_{\alpha \in I} \left\{x+H_\alpha\right\}$

Em particular, $H = \operatorname{Ker} f = f^{-1}(0) = \bigcap_{\alpha \in I} H_\alpha$.

Por P2, cada H_α é fechado em G, logo H é fechado em G. Ainda por P2, cada vizinhança do zero contém H_α, para algum $\alpha \in I$, e assim contém também H, o que nos dá que H é o fecho de $\{0\}$. Como G é de Hausdorff, temos então: $H = \{0\}$. Portanto f é biunívoca.

III - Para mostrar que f é sobrejetiva é bastante mostrar que toda família $(x_\alpha + H_\alpha) \in \varprojlim {}^{G}/_{H_\alpha}$, tem interseção não vazia, isto é, a imagem inversa por f é diferente do vazio.

Cada $x_\alpha + H_\alpha$ é um subespaço completo de G, pois é uma translação de H_α, como toda vizinhança U do zero de G, contém um H_α, por definição da estrutura uniforme de G, o correspondente $x_\alpha + H_\alpha$ é V-pequeno, onde V é a entourage que corresponde a vizinhança U.

Para simplificar, fixe β então o conjunto dos $x_\alpha + H_\alpha$ contidos em $x_\beta + H_\beta$, que é o traço de $\{x_\alpha + H_\alpha\}_{\alpha \in I}$ em $x_\beta + H_\beta$,
é uma base de filtro de Cauchy e converge
Portanto, como os $x_\alpha + H_\alpha$ são fechados em G, $\bigcap_{\alpha \in I} \{x_\alpha + H_\alpha\} \neq \emptyset$ pois deve conter o ponto limite.

IV - Finalmente, mostramos que a imagem de uma vizinhança, do zero em G é uma vizinhança do zero em $\varprojlim {}^{G}/_{H_\alpha}$ e assim f^{-1} é contínua. Com isso terminamos a demonstração de 2.6. Seja V uma vizinhança do zero em G, então existe uma vizinhança W do zero em G, tal que $W^2 \subset V$. Por hipótese, existe $\alpha \in I$, tal que $H_\alpha \subset W$ e daí $V \supset WH_\alpha$. Considere $f_\alpha : G \longrightarrow G/_{H_\alpha}$ a aplicação canônica e $\psi_\alpha : \varprojlim G/_{H_\alpha} \longrightarrow G/_{H_\alpha}$, a restrição da projeção, então temos: $f_\alpha = \psi_\alpha \circ f$.

Assim, $V \supset WH_\alpha \supset f_\alpha^{-1}\left[f_\alpha(W)\right] = f^{-1} \circ \psi_\alpha^{-1}\left[f_\alpha(W)\right] = f^{-1}\left[\psi_\alpha^{-1} f_\alpha(W)\right]$. Como $\psi_\alpha^{-1}\left[f_\alpha(W)\right]$ é uma vizinhança do zero em $\varprojlim G/H_\alpha$, segue-se que $f(V) \supset \psi_\alpha^{-1}\left[f_\alpha(W)\right]$ é uma vizinhança do zero em $\varprojlim G/H_\alpha$.

2.7. Teorema:

Sejam K um corpo, v uma valorização não imprópria de K, A o anel da valorização v e m o seu ideal. Então K com a topologia τ_v é localmente compacto, se e somente se, satisfaz as seguintes propriedades:

I - K é completo

II - v é discreta

III - O corpo de resíduos $k(A)$ é finito. Neste caso, A é compacto.

Demonstração:

I - Por 0.67 e 2.5, segue-se que K é completo. Da hipótese de A ser localmente compacto, existe uma vizinhança compacta do zero. Por outro lado, existe α, tal que, V'_α está contido nessa vizinhança compacta, isto pela demonstração de 1.3. Como V'_α é fechado num compacto, V'_α é compacto. Por 1.7, V'_α é um ideal de A, mostramos na demonstração de 1.14, que A é um anel principal, temos então que existe $a \in K^*$, tal que Aa é compacto. Portanto $A = (Aa)\,a^{-1}$ é compacto, pois a translação é um homeomorfismo.

II - Mostraremos que se $b \neq \{0\}$ é um ideal de A, então A/b

é compacto e discreto e assim $A/_b$ é finito. Portanto, em particular, $k(A) = A/_m$ é finito, $A/_b$ é compacto pois é a imagem de A pela aplicação canônica, que é contínua pois a topologia é a topologia quociente.

As imagens inversas, pela aplicação canônica, dos pontos de $A/_b$, são da forma $x+b$, pois a imagem inversa do zero é b. Então, $x+b$ é aberto, se e somente se, b é aberto; Por 1.7, todo ideal de A, diferente de zero, contém um V_α e assim é aberto.

Logo os pontos de $A/_b$ são abertos.

Portanto $A/_b$ é discreto .

III - Do ítem II, se $y \neq 0$ em m, o anel $A/_{Ay}$ é finito.

Então, por um resultado bem conhecido, existe somente um número finito de ideais de A, que contém Ay.

Mostraremos que $P = \left\{v(x) ;\ v(y) \geq v(x) > 0\right\}$ é finito.

Temos $y \in V'_\alpha$ onde $\alpha = v(x)$.

Logo $Ay \subseteq V'_\alpha$ pois por 1.7, V'_α é um ideal de A.

Portanto só existe um número finito de V'_α, já que só existe um número finito de ideais de A que contêm Ay .

Isto quer dizer que só existe um número finito de $v(x)$ tal que $v(y) \geq v(x) > 0$. Assim P é finito. Agora, como $v(K^*)$ é totalmente ordenado, P é totalmente ordenado e sendo P finito, temos que P tem um menor elemento γ.

Então, para todo $x \in A$, tal que $v(x) > 0$, temos:

ou $v(x) > v(y) \geq \gamma$, pois $v(y) > \gamma$, sempre;

ou $v(x) \leq v(y)$ e neste caso, $v(x) \in P$.

Então $v(x) > \gamma$.

Assim $v(x) \geq \gamma$ e γ é o menor elemento de $v(K^*)$. Como P é finito, existe um maior inteiro $m \geq 0$, tal que $m\gamma \in P$.

Daí, $m\gamma \leq v(y) < (m+1)\gamma$ e $0 \leq v(y) - m\gamma < \gamma$

Como γ é o menor elemento de P, temos:

$v(y) - m\gamma = 0$, donde $v(y) = m\gamma$.

Portanto, $v(K^*) = Z\gamma$ e v é discreta.

Reciprocamente, podemos supor sem perda de generalidade que v é normalizada pois a composta de uma valorização de K com um isomorfismo de grupos ordenados é ainda uma valorização de K, a qual define a mesma topologia que a definida por v.

Seja u um elemento uniformizante de v, por 1.14, $k(A) = A/_{Au}$ e assim pela hipótese, $A/_{Au}$ é finito.

Como a aplicação, $A \longrightarrow \dfrac{Au^n}{Au^{n+1}}$, $n \geq 0$ tal que, $x \longrightarrow xu^n + Au^{n+1}$

é um homomorfismo de núcleo igual a Au, segue-se que $A/_{Au}$ é isomorfo (como grupo) a $\dfrac{Au^n}{Au^{n+1}}$ e assim $\dfrac{Au^n}{Au^{n+1}}$ é finito. Por outro lado $\dfrac{A/_{Au^{n+1}}}{Au^n/_{Au^{n+1}}} \cong A/_{Au^n}$ e então segue-se por indução que $A/_{Au^j}$ é finito para todo $j \geq 0$. Logo $A/_{Au^j}$ é compacto e pelo Teorema de Tychonoff, $\prod_{j\geq 0} A/_{Au^j}$ é compacto.

Como A é fechado em K e K é completo, então A é completo. (Veja [2], Chap II, § 3.4, Proposição 8). Assim Au^j é completo, pois a aplicação translação ($x \longrightarrow x\,u^n$) é uniformemente contínua e portanto por O. , leva completo em completo.

Por 2.6, a aplicação canônica $f:A \longrightarrow \varprojlim A/_{Au^j}$ é um isomorfismo de grupos topológicos, logo $\varprojlim A/_{Au^j}$ é completo e assim como

$\prod_{j\geq o} A/_{Au^j}$ é compacto, temos que $\varprojlim A/_{Au^j}$ é fechado em $\prod_{j>o} A/_{Au^j}$ (veja [2] Chap II, § 3.4, proposição 8) o que nos dá que $\varprojlim A/_{Au^j}$ é compacto.

Portanto, pelo isomorfismo, A é compacto e uma vizinhança compacta do zero, donde K é localmente compacto.

Observe que na recíproca de 2.7, não foi preciso usar toda a hipótese. Em lugar de K ser completo, bastaria a condição A é completo.

3. COMPLETAMENTO DE UM CORPO VALORIZADO

Nesta seção construímos o completamento $\hat{K}$ de um corpo valorizado em relação a uma valorização de posto arbitrário. Mostramos que $\hat{K}$ é um espaço uniforme de Hausdorff e a unicidade do completamento. Vemos que todo homomorfismo contínuo de um corpo topológico em outro, é uma aplicação uniformemente contínua, quando consideramos esses corpos topológicos como espaço uniforme. Depois, mostramos que $\hat{K}$ é um corpo topológico; que podemos estender de maneira única, a valorização v de K^*, a uma valorização $\hat{v}$ de $\hat{K}^*$ e que a topologia definida por $\hat{v}$, coincide com a topologia de $\hat{K}$. Baseados na definição de limite de uma aplicação em relação a um subespaço e na proposição 0.35, damos como observação, a maneira de atuar de $\hat{v}$, sobre os elementos de $\hat{K}^*$.

Finalmente, revisitamos o caso em que temos uma valorização de posto 1. Aqui, temos que o completamento por meio de filtros de Cauchy, coincide com o completamento, por sequências de Cauchy, como usualmente.

Definamos $\hat{K}$ como o conjunto dos filtros de Cauchy minimais de K. Consideremos a seguinte coleção de subconjuntos de $\hat{K}x\hat{K}$: Seja $\tilde{V}_\alpha$ o conjunto de todos os pares de filtros de Cauchy minimais, os quais têm em comum um conjunto $\underline{V_\alpha}$-pequeno, no sentido de 0.49, onde $\underline{V_\alpha}$ é uma entourage do espaço uniforme K.

Vejamos que o conjunto dos $\tilde{V}_\alpha$ forma um sistema fundamental de entourages para uma estrutura uniforme de $\hat{K}$.

I.1 - Como cada $H \in \hat{K}$ é de Cauchy, por (0.50), $(H,H) \in \underline{V_\alpha}$ para toda entourage $\underline{V_\alpha}$ de K. Assim, $\tilde{V}_\alpha$ contém a diagonal de $\hat{K} \times \hat{K}$.

I.2 - Se $\underline{V_\alpha}$, $\underline{V_{\alpha'}}$ são entourages de K, então, por 0.37, $\underline{V_\beta} = \underline{V_\alpha} \cap \underline{V_{\alpha'}}$ é uma entourage de K e todo conjunto $\underline{V_\beta}$-pequeno é também $\underline{V_\alpha}$-pequeno. Assim, $\tilde{V}_\beta \subset \tilde{V}_\alpha \cap \tilde{V}_{\alpha'}$.

I.3 - Segue-se imediatamente da definição que cada $\tilde{V}_\alpha$ é simétrico, isto é, $\tilde{V}_\alpha^{-1} = \tilde{V}_\alpha$.

I.4 - Dada um entourage $\underline{V_\alpha}$ de K existe, por 0.37, uma entourage $\underline{V_\beta}$ de K, tal que $\underline{V_\beta}^2 \subset \underline{V_\alpha}$.

Considere filtros de Cauchy minimais: $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$, tais que: $(\mathcal{H},\mathcal{D}) \in \tilde{V}_\beta$ e $(\mathcal{D},\mathcal{E}) \in \tilde{V}_\beta$, isto é: $(\mathcal{H},\mathcal{E}) \in \tilde{V}_\beta^2$, então existem dois conjuntos $\underline{V_\beta}$-pequenos, M e N, tais que:

$M \in \mathcal{H} \cap \mathcal{D}$ e $N \in \mathcal{D} \cap \mathcal{E}$

Como M e N pertencem à $\mathcal{D}$, por 0.17, $M \cap N \neq \emptyset$ e assim $M \cup N$ é $\underline{V_\beta}^2$-pequeno, o que implica que $M \cup N$ é $\underline{V_\alpha}$-pequeno.

Como $M \cup N \supset M \cap N \in \mathcal{H} \cap \mathcal{E}$, então $M \cup N \in \mathcal{H} \cap \mathcal{E}$

Então, como $M \cup N$ é $\underline{V_\alpha}$-pequeno e pertence à $\mathcal{H} \cap \mathcal{E}$, temos $\tilde{V}_\beta^2 \subset \tilde{V}_\alpha$. Portanto, por 0.39, o conjunto dos $\tilde{V}_\alpha$, forma um sistema fundamental de entourages para uma estrutura uniforme de $\bar{K}$.

3.1. Proposição:

O espaço uniforme $\bar{K}$ é de Hausdorff

Demonstração:

Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{D}$ dois filtros de Cauchy minimais de K, tais que $(\mathcal{H},\mathcal{D}) \in \tilde{V}_\alpha$, para todo α, isto é: $\mathcal{H}$ e $\mathcal{D}$ contêm em comum um conjunto $\underline{V_\alpha}$-pequeno para toda entourage $\underline{V_\alpha}$ de K.
Então, por 0.22, os conjuntos $M \cup N$, com $M \in \mathcal{H}$ e $N \in \mathcal{D}$, formam uma base de um filtro $\mathcal{E}$, menos fino que $\mathcal{H}$ e $\mathcal{D}$, pois $M \cup N \neq \emptyset$

e $(M\cup N)\cap(M'\cup N') \supset (M\cap M')\cup(N\cap N')$.

Mostraremos agora que E é de Cauchy.

• Para toda entoruage $\underline{V_\alpha}$ de K, existe por hipótese, um conjunto $\underline{V_\alpha}$-pequeno P, pertencendo a ambos H e $\mathcal{D}$ e portanto a E, o que mostra que E é de Cauchy.

Então, por 0.56, como E é um filtro de Cauchy menos fino que H e $\mathcal{D}$, temos que $H = E = \mathcal{D}$.

Daí, se $H \neq \mathcal{D}$, existe α para qual, $(H,\mathcal{D}) \notin \tilde{V}_\alpha$.

Por 0.39, existe β para o qual $\overset{2}{\tilde{V}_\beta} \subset \tilde{V}_\alpha$. Assim, $(H,\mathcal{D}) \notin \tilde{V}_\beta$ e daí, $H \notin \tilde{V}_\beta(\mathcal{D})$ e $\mathcal{D} \notin \tilde{V}_\beta(H)$.

Suponha que existe $F \in \tilde{V}_\beta(\mathcal{D}) \cap \tilde{V}_\beta(H)$.

Então, $(F,\mathcal{D}) \in \tilde{V}_\beta$ e $(F,H) \in \tilde{V}_\beta$ e por 0.36, $(H,\mathcal{D}) \in \overset{2}{\tilde{V}_\beta} \subset \tilde{V}_\alpha$, o que é uma contradição pois $(H,\mathcal{D}) \notin \tilde{V}_\alpha$.

Logo $\tilde{V}_\beta(\mathcal{D}) \cap \tilde{V}_\beta(H) = \emptyset$ e portanto K é de Hausdorff.

Por 0.58, para cada $x \in K$, o filtro de vizinhanças $\mathcal{B}(x)$ em K, é um filtro de Cauchy minimal.

Definimos então, $i: K \longrightarrow \hat{K}$, tal que: $i(x) = \mathcal{B}(x)$. Temos que i está bem definida e que i é contínua pois se x está suficientemente proximo de y, $\mathcal{B}(x) \doteq \mathcal{B}(y)$.

3.2. <u>Lema</u>:

Seja $f = i \times i$, a imagem inversa por f, das entourages de $\hat{K}$, formam um sistema fundamental de entourages para a estrutura uniforme definida pela imagem inversa através de i, da estrutura uniforme de $\hat{K}$.

<u>Demonstração</u>:

I - $f^{-1}(\tilde{V}_\alpha) \cap f^{-1}(\tilde{V}_\beta) = f^{-1}(\tilde{V}_\alpha \cap \tilde{V}_\beta)$ para $\tilde{V}_\alpha$, $\tilde{V}_\beta$ da estrutura de $\hat{K}$.

II - Todo $f^{-1}(\tilde{V}_\alpha)$ contém a diagonal, pois $\tilde{V}_\alpha$ contém a diagonal em $\hat{K} \times \hat{K}$ e $f^{-1}(\tilde{V}_\alpha)=\{(x,y) \in K \times K; [i(x),i(y)] \in \tilde{V}_\alpha\}$

III - $\overset{-1}{[f^{-1}(\tilde{V}_\alpha)]} = f^{-1}(\tilde{V}_\alpha) = f^{-1}(\overset{-1}{\tilde{V}_\alpha})$, pois, $(x,y) \in \overset{-1}{[f^{-1}(\tilde{V}_\alpha)]}$, se e somente se, $(y,x) \in f^{-1}(\tilde{V}_\alpha)$, se e somente se, $[i(y),i(x)] \in \tilde{V}_\alpha$, se e somente se, $[i(x),i(y)] \in \tilde{V}_\alpha$, se e somente se, $(x,y) \in f^{-1}(\tilde{V}_\alpha)$.

IV - Se $\tilde{V}_\beta$ é tal que $\overset{2}{\tilde{V}_\beta} \subset \tilde{V}_\alpha$ para algum α . - a existência de $\tilde{V}_\beta$ vem de 0.39. Então $\overset{2}{[f^{-1}(\tilde{V}_\beta)]} \subset f^{-1}(\tilde{V}_\alpha)$.
Se $(x,y) \in \overset{2}{[f^{-1}(V_\beta)]}$, para algum z, $(x,z) \in f^{-1}(\tilde{V}_\beta)$ e $(z,y) \in f^{-1}(\tilde{V}_\beta)$, donde, $[i(x),i(z)] \in \tilde{V}_\beta$ e $[i(z),i(y)] \in \tilde{V}_\beta$ e daí, $[i(x),i(y)] \in \overset{2}{\tilde{V}_\beta} \subset \tilde{V}_\alpha$. Portanto $(x,y) \in f^{-1}(\tilde{V}_\alpha)$.
Portanto por 0.39, temos o que queríamos.

3.3. Lema:

O conjunto dos $\overset{n}{\underline{V}_\alpha}$, forma um sistema fundamental de entourages de K.

Demonstração:

Por 0.37, dada uma entourage $\underline{V}_\beta$ de K, existe uma entourage $\underline{V}_\alpha$ de K, tal que $\overset{2}{\underline{V}_\alpha} \subset \underline{V}_\beta$ e então $\underline{V}_\alpha \subset \underline{V}_\beta$. É claro que $\overset{n}{\underline{V}_\alpha}$, $n \geq 1$, é uma entourage de K, isto por 0.40, já que $\overset{n}{\underline{V}_\alpha} \supset \underline{V}_\alpha$, $n \geq 1$.

3.4. Lema:

Se $(x,y) \in \underline{V}_\alpha$, $\underline{V}_\alpha(x) \cup \underline{V}_\alpha(y)$ é uma vizinhança de x e de y, e mais: $\underline{V}_\alpha(x) \cup \underline{V}_\alpha(y)$ é $\overset{3}{\underline{V}_\alpha}$-pequeno e assim $[i(x),i(y)] \in \overset{3}{\tilde{V}_\alpha}$ e

$(x,y) \in f^{-1}(\tilde{V}_\alpha^3)$. Portanto $\underline{V}_\alpha \subset f^{-1}(\tilde{V}_\alpha^3)$.

Demonstração:

Como $\underline{V}_\alpha(x)$ é uma vizinhança de x e $\underline{V}_\alpha(y)$ é uma vizinhança de y, segue-se que $\underline{V}_\alpha(x) \cup \underline{V}_\alpha(y)$ é uma vizinhança de x e de y. Sejam $y, y' \in \underline{V}_\alpha(x)$, então $(x,y) \in \underline{V}_\alpha$ e $(y',x) \in \underline{V}_\alpha$, logo $(y,y') \in \underline{V}_\alpha^2$. Assim $\underline{V}_\alpha(x)$ é $\underline{V}_\alpha^2$-pequeno.

Agora, se $z, z' \in \underline{V}_\alpha(x) \cup V_\alpha(y)$. Podemos supor que $z \in \underline{V}_\alpha(x)$ e $z' \in \underline{V}_\alpha(y)$, isto é: $(z,x) \in \underline{V}_\alpha$ e $(z',y) \in \underline{V}_\alpha$. Como $(x,y) \in \underline{V}_\alpha$ por hipótese, temos: $(z,y) \in \underline{V}_\alpha^2$, assim $(z,z') \in \underline{V}_\alpha^3$

Portanto, $\underline{V}_\alpha(x) \cup \underline{V}_\alpha(y)$ é $\underline{V}_\alpha^3$-pequeno.

3.5. Proposição:

A aplicação $i : K \longrightarrow \hat{K}$ é uniformemente contínua.

Demonstração:

Para mostrar que i é uniformemente contínua, mostraremos que a estrutura uniforme de K é a imagem inversa por i, da estrutura uniforme de $\hat{K}$.

Em vista de 3.2. 3.3, é bastante mostrar que:

$f^{-1}(\tilde{V}_\alpha) \subset \underline{V}_\alpha \subset f^{-1}(\tilde{V}_\alpha^3)$.

- Se $(x,y) \in f^{-1}(\tilde{V}_\alpha)$, então $[i(x), i(y)] \in \tilde{V}_\alpha$ e assim existe um conjunto $\underline{V}_\alpha$-pequeno M, o qual é uma vizinhança de x e de y. Como $M \times M \subset \underline{V}_\alpha$, segue-se que $(x,y) \in \underline{V}_\alpha$. Logo $f^{-1}(\tilde{V}_\alpha) \subset \underline{V}_\alpha$, a segunda inclusão já foi demonstrada em 3.4.

3.6. Proposição:

$i(K)$ é denso em $\hat{K}$ e $\hat{K}$ é completo em relação a estrutura que definimos no início desta seção.

Demonstração:

I - Seja $\tilde{V}(\mathcal{H})$ uma vizinhança de um ponto $\mathcal{H} \in \hat{K}$.

Temos $\tilde{V}(\mathcal{H}) \cap i(K) = \left\{ i(x);\ x \in K \text{ e } (\mathcal{H}, i(x)) \in \tilde{V} \right\}$

Como $\mathcal{H}$ é de Cauchy, considere M a união dos interiores de todos os conjuntos $\underline{V_\alpha}$-pequenos de $\mathcal{H}$.

Como $\mathcal{H}$ é minimal, por 0.61 e 0.17, $M \in \mathcal{H}$.

Podemos dizer ainda que $\tilde{V}(\mathcal{H}) \cap i(K)$ é o conjunto dos $i(x) = \mathcal{B}(x)$, tais que existe uma vizinhança de x, pertencente à $\mathcal{H}$, que é $\underline{V_\alpha}$-pequeno; ou ainda: $\tilde{V}(\mathcal{H}) \cap i(K)$ é o conjunto dos $i(x) = \mathcal{B}(x)$, tais que x é ponto interior de um conjunto $\underline{V_\alpha}$-pequeno de $\mathcal{H}$.

Desta forma, $\tilde{V}(\mathcal{H}) \cap i(K) = \left\{ i(x);\ x \in M \right\} = i(M) \neq \emptyset$, pois $M \in \mathcal{H}$. Portanto $i(K)$ é denso em $\hat{K}$.

II - Vimos em I, que $M \in \mathcal{H}$, logo $i(M) \in i(\mathcal{H})$, isto é: $\tilde{V}(\mathcal{H}) \cap i(K) \in i(\mathcal{H})$.

Como $i(\mathcal{H})$ é uma base de filtro, por 0.17, segue-se que $\tilde{V}(\mathcal{H}) = \overline{\tilde{V}(\mathcal{H}) \cap i(K)} \in i(\mathcal{H})$. Então $i(\mathcal{H})$ é mais fino que $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, o filtro de vizinhanças de $\mathcal{H}$.

Portanto $i(\mathcal{H})$ converge para $\mathcal{H}$, em $\hat{K}$.

Seja $\mathcal{F}$ um filtro de Cauchy sobre $i(K)$.

Por 3.5, a estrutura de K é a imagem inversa por i, da estrutura de $i(K)$ e por 0.53, $i^{-1}(\mathcal{F})$ é uma base de um filtro de Cauchy $\mathcal{A}$, sobre K.

Seja $\mathcal{H}$ um filtro de Cauchy minimal, menos fino que $\mathcal{A}$ -a existência de $\mathcal{H}$ é de 0.57.

Então $i(\mathcal{H})$ é uma base de filtro de Cauchy sobre $i(K)$, pois i é uniformemente contínua, e $\mathcal{F} = i\left[i^{-1}(\mathcal{F})\right]$ é mais fino que o filtro cuja base é $i(H)$, pois H é menos fino que $i^{-1}(F)$, já que H é minimal.

Como $i(H)$ converge em $\hat{K}$, assim converge o filtro que o tem por base. Consequentemente F converge em $\hat{K}$, pois é mais fino que o filtro cuja base é $i(H)$.

Portanto por 0.62, $\hat{K}$ é completo.

3.7. Proposição:

Dada uma aplicação uniformemente contínua $f:K \longrightarrow Y$ onde Y é um espaço uniforme de Hausdorff completo, existe uma única aplicação uniformemente contínua $g:\hat{K} \longrightarrow Y$, tal que $f=g \circ i$. Ademais se (i_1, K_1) é outro par, constituído de um espaço uniforme de Hausdorff completo K_1 e de uma aplicação uniformemente contínua $i_1 : K \longrightarrow K_1$, com a propriedade acima, então existe um único isomorfismo $\psi:\hat{K} \longrightarrow K_1$ tal que $i_1 = \psi \circ i$.

Demonstração:

I - Seja f uma aplicação uniformemente contínua de K num espaço de Hausdorff completo Y.

Mostraremos inicialmente que existe uma única aplicação uniformemente contínua $g_0 : i(K) \longrightarrow Y$, tal que $f = g_0 \circ i$

Como f é contínua, $f(x) = \lim f(\mathcal{B}(x))$ onde o limite é de f em relação ao filtro $\mathcal{B}(x)$. Este limite existe e é único pois Y é de Hausdorff completo e $f(\mathcal{B}(x))$ é uma base de filtro de Cauchy.

Tome g_0, tal que $g_0\left[i(x)\right] = \lim f(\mathcal{B}(x))$.

Temos então: $f = g_0 \circ i$.

Resta mostrar que g_0 é uniformemente contínua em $i(K)$.

Seja U uma entourage do espaço uniforme Y. Pela continuidade de f, existe uma entourage V, de K, tal que a relação: $(x,x') \in V$, implica $(f(x), f(x') \in U$. Pela demonstração de 3.5, temos que $\left[i(x), i(x')\right] \in \bar{V}$, implica $(x,x') \in V$ e por sua vez a continuidade nos dá: $\left[g_0\left[i(x)\right], g_0\left[i\left[x'\right]\right]\right] \in U$. Então g_0 é uniformemente contínua. Como g_0 é uniformemente contínua e $i(K)$ é denso em $\hat{K}$, por 0.55 e 0.63, temos uma única extensão g, de g_0, satisfazendo a relação $f = g \circ i$.

II - <u>Unicidade</u>

$$\begin{tikzcd}
& K_1 \arrow[dr, "h"] & \\
K \arrow[ur, "i_1"] \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "i_1"'] & & \hat{K} \arrow[dl, "g"] \\
& K_1 &
\end{tikzcd}$$

Seja $i : K \longrightarrow \hat{K}$

Dado $i_1 : K \longrightarrow K_1$, existe uma única $g : \hat{K} \longrightarrow K_1$, uniformemente contínua tal que: $i_1 = g \circ i$.

Por outro lado, se considerarmos, $i_1 : K \longrightarrow K_1$, pela primeira parte , dado $i : K \longrightarrow \hat{K}$, existe uma única aplicação $h : K_1 \longrightarrow \hat{K}$, uniformemente contínua, tal que: $i = h \circ i_1$.

Assim temos: $i = h \circ g \circ i$

$i_1 = g \circ h \circ i_1$.

Como i, i_1 são sobrejetivas, temos: $h \circ g = id_{\hat{K}}$ e $g \circ h = id_{K_1}$.

Portanto g é o único isomorfismo, que no enunciado chamamos de ψ, tal que: $i_1 = \psi \circ i$.

Quando identificamos K com i(K), os filtros de Cauchy minimais sobre K, são os traços sobre K, dos filtros de vizinhanças dos pontos de $\hat{K}$.

3.8. <u>Lema</u>:

Todo homomorfismo contínuo f de um corpo topológico K, em um corpo topológico K', é uniformemente contínuo, quando considerado como aplicação do espaço uniforme K, no espaço uniforme K'.

Demonstração:

Dado V' uma vizinhança do zero no corpo topológico K', pela continuidade de f, existe uma vizinhança V do zero, no corpo topológico K, tal que $f(V) \subset V'$.
Por definição das estruturas uniformes de K e K', temos associados à V e V', as entourages U e U', respectivamente das estruturas uniformes de K e K'.
Agora, se $(x,y) \in U$, $y-x \in V$ e pela continuidade de f,
$f(y-x) \in f(V) \subset V'$.
Como f é um homomorfismo, temos: $f(y) - f(x) \in V'$, e daí:
$(f(x), f(y)) \in U'$.
Portanto f é uniformemente contínua.

3.9. Proposição:

O completamento $\hat{K}$ de um corpo topológico de Hausdorff K, é um corpo topológico, se a imagem pela aplicação: $X \longrightarrow X^{-1}$, de todo filtro de Cauchy com respeito a estrutura aditiva, o qual não tem o zero como ponto de acumulação, é um filtro de Cauchy.

Demonstração:

Em primeiro lugar vejamos que as aplicações: $(x,y) \longmapsto x-y$; $(x,y) \longmapsto xy$ e $x \longmapsto x^{-1}$, respectivamente, de $K \times K \longrightarrow K$, $K \times K \longrightarrow K$ e $K^* \longrightarrow K$, se estendm continuamente à aplicações de: $\hat{K} \times \hat{K} \longrightarrow \hat{K}$, $\hat{K} \times \hat{K} \longrightarrow \hat{K}$ e $\hat{K}^* \longrightarrow \hat{K}$, respectivamente.

A aplicação produto se extende continuamente a $\hat{K}$. (Veja |2|, Chap III, § 6.5 Teorema 1) a primeira é um homomorfismo contínuo em K, logo, por 3.3, uniformemente contínua e por 0.55, leva base de filtro de Cauchy em base de filtro de Cauchy.

Observamos que toda vizinhança de H em $\hat{K}$, intersecta K, pois K é denso em $\hat{K}$. Então por 0.27, o traço sobre K, do filtro de vizinhanças de H em $\hat{K}$, é um filtro. Como o filtro de vizinhanças de H em $\hat{K}$, é de Cauchy, por 0.54, o seu traço sobre K, é um filtro de Cauchy sobre K, e é claro, não tem o zero como ponto de acumulação.

Então temos que, em particular, as aplicações $K \times K \to K$, tal que $(x,y) \longmapsto x-y$ e $K^* \longrightarrow K$, tal que $X \longmapsto X^{-1}$ levam o traço sobre K, do filtro de vizinhanças de H em $\hat{K}$, num filtro de Cauchy.

Assim, por 0.63, podemos estender a primeira aplicação à $\hat{K} \times \hat{K}$ e a última aplicação à $\hat{K}^*$.

Falta agora verificar as propriedades da estrutura de corpo: associatividade, comutatividade e distributividade. Estes resultados seguem-se de 0.18 !

Vejamos:

• Considere a aplicação: $\hat{K} \times \hat{K} \times \hat{K} \xrightarrow{f} \hat{K}$

$$(x, y, z) \longrightarrow (x+y) + z$$

e a aplicação: $\hat{K} \times \hat{K} \times \hat{K} \xrightarrow{g} \hat{K}$

$$(x, y, z) \longrightarrow x + (y+z)$$

Sabemos que $f(x,y,z) = g(x,y,z)$ para $(x,y,z) \in K \times K \times K$, subconjunto denso de $\hat{K} \times \hat{K} \times \hat{K}$, então por 0.18, $f=g$ em $\hat{K} \times \hat{K} \times \hat{K}$ e temos a associatividade da soma em $\hat{K}$.

• Considere a aplicação: $h:\hat{K} \times \hat{K} \longrightarrow \hat{K}$ e a aplicação

$$(x,y) \longrightarrow x+y$$

$h':\hat{K} \times \hat{K} \longrightarrow \hat{K}$

$(x,y) \longrightarrow y+x$, da mesma forma, por 0.18, temos $h = h'$ em $\hat{K} \times \hat{K}$ e temos que $\hat{K}$ é comutativo com a operação soma.

• Sejam as aplicações: $\hat{K} \times \hat{K} \times \hat{K} \longrightarrow \hat{K}$ e $\hat{K} \times \hat{K} \times \hat{K} \longrightarrow \hat{K}$

$$(x,y,z) \longrightarrow x(y+z), \quad (x,y,z) \longrightarrow xy+xz.$$

Claramente, por 0.18, temos a distributividade em $\hat{K}$

O caso para a operação produto, é análogo, e assim terminamos a demonstração.

Sejam K um corpo valorizado em relação a uma valorização v e $G = v(K^*)$ com a topologia discreta, então temos os seguintes resultados:

3.10. Proposição:

$\hat{K}$ é um corpo topológico, e a aplicação $i:K \longrightarrow \hat{K}$ é um homomorfismo.

Demonstração:

I - Por 3.9, basta provar que: Se F é um filtro de Cauchy de K^*, para o qual o zero não é um ponto de acumulação. Então, a imagem de F pela aplicação de $K^* \longrightarrow K$, tal que, $x \longrightarrow x^{-1}$, é um filtro de Cauchy em K.

— Como o zero não é um ponto de acumulação de F, por 0.31, o zero não é um ponto limite de F e por 0.28, F não é mais fino que o filtro de vizinhanças do zero.

Logo existem $M \in F$ e $\beta \in G$, tais que: $M \cap V_\beta = \emptyset$, donde $v(x) \leq \beta$, para todo $x \in M$, isto é: β é uma cota superior para $V(M)$.

Agora, dado $\alpha \in G$, se $M' \in F$ é tal que $M' \subset M$ e $x-y \in V_\gamma$, onde $\gamma = \sup\{\alpha + 2\beta, \beta\}$, para $x,y \in M'$, então por 1.5, $v(x^{-1} - y^{-1}) > \alpha$, isto é: $x^{-1} - y^{-1} \in V_\alpha$.
Logo a aplicação $x \longrightarrow x^{-1}$, de $K^* \longrightarrow K$, é uniformemente contínua. Portanto por 0.55, como F é um filtro de Cauchy de K^*, temos que a imagem de F pela aplicação, $x \longrightarrow x^{-1}$, é um filtro de Cauchy de K.

II - Por construção de estrutura de corpo de $\hat{K}$, temos que i é um homomorfismo.

3.11. <u>Proposição</u>:

A valorização v de K, pode ser estendida de maneira única a valorização de $\hat{v}$ de $\hat{K}$ e $\hat{v}(\hat{K}^*) = v(K^*)$.

<u>Demonstração</u>:

Por 1.6, $v/_{K^*}$ é um homomorfismo contínuo de K^* em G, e assim por 3.8, $v/_{K^*}$ é uma aplicação uniformemente contínua.
Para cada $H \in \hat{K}$, o traço sobre K do filtro de vizinhanças de H em $\hat{K}$, é uma base de filtro de Cauchy, pois K é denso em $\hat{K}$ e por 0.27 e 0.54.
Então por 0.55, a imagem por v, do referido traço, é uma base de filtro de Cauchy sobre G. Assim, por 0.63, v pode ser estendida a uma aplicação contínua, $\hat{v}:\hat{K}^* \longrightarrow G$. Da extensão de v, temos: $\hat{v}(0) = \infty$, $\hat{v}(1) = 0$ e $\hat{v}(\hat{K}^*) = v(K^*)$.
Temos ainda, as aplicações: $\hat{K} \times \hat{K} \longrightarrow G$ e $\hat{K} \times \hat{K} \longrightarrow G$

$$(x,y) \longmapsto \hat{v}(xy) \qquad (x,y) \longmapsto \hat{v}(x)+\hat{v}(y)$$

são contínuas e coincidem no subconjunto denso $K \times K$ de $\hat{K} \times \hat{K}$.
Então por 0.18, elas coincidem em $\hat{K} \times \hat{K}$.
Assim, $\hat{v}(xy) = \hat{v}(x) + \hat{v}(y)$ em $\hat{K}$.

Finalmente, a relação $\hat{v}(x+y) - \inf\{\hat{v}(x), \hat{v}(y)\} \geq 0$ é válida sobre $K^* \times K^*$ e a aplicação: $\hat{K}^* \times \hat{K}^* \longrightarrow G$ é contínua .

$$(x,y) \longrightarrow \inf\{\hat{v}(x), \hat{v}(y)\}$$

Logo $\hat{v}(x+y) - \inf\{\hat{v}(x), \hat{v}(y)\}$ é contínua. Daí,

$\{(x,y) \in \hat{K}^* \times \hat{K}^*; \hat{v}(x+y) - \inf(\hat{v}(x), \hat{v}(y)) \geq 0\}$ é fechado em $\hat{K}^* \times \hat{K}^*$ e como $K^* \times K^*$ é denso em $\hat{K}^* \times \hat{K}^*$, segue-se que,

$\hat{v}(x+y) - \inf\{\hat{v}(x), \hat{v}(y)\} \geq 0$, para todo $(x,y) \in \hat{K}^* \times \hat{K}^*$.

Portanto, $\hat{v}(x+y) \geq \inf\{\hat{v}(x), \hat{v}(y)\}$, para todo $x,y \in \hat{K}^*$.

3.12. <u>Lema</u>:

Para todo α, os fechos $\overline{V}_\alpha$ e $\overline{V}'_\alpha$ de V_α e V'_α em $\hat{K}$, respectivamente são definidos pelas condições: $\hat{v}(x) > \alpha$ e $\hat{v}(x) \geq \alpha$, respectivamente.

<u>Demonstração</u>:

Seja $\alpha \in G$ e $x \in \overline{V}^*_\alpha$.

Para cada $y \in V_\alpha$, suficientemente próximo de x, tal que $\hat{v}(x-y) > \hat{v}(y)$. A demonstração de 1.5 nos dá que $\hat{v}(x) = \hat{v}(y) = v(y) > \alpha$ - a última igualdade é do fato de $y \in K$.

Assim, $\overline{V}^*_\alpha \subset \{x \in \hat{K}^*; \hat{v}(x) > \alpha\}$ e $\overline{V}_\alpha \subset \{x \in \hat{K}; \hat{v}(x) > \alpha\}$

Reciprocamente, seja $x \in \hat{K}^*$ tal que, $\hat{v}(x) > \alpha$.

Para y suficientemente próximo de x, tal que $\hat{v}(x-y) > \hat{v}(y)$.

Temos como acima, que $\alpha < \hat{v}(x) = \hat{v}(y) = v(y)$ e aí $y \in V^*_\alpha$ e $x \in \overline{V}^*_\alpha$. Daí $\{x \in \hat{K}; \hat{v}(x) > \alpha\} \subset \overline{V}_\alpha$. Consequentemente, $\overline{V}_\alpha = \{x \in \hat{K}; \hat{v}(x) > \alpha\}$. De maneira análoga, obtemos que $\overline{V}'_\alpha = \{x \in \hat{K}; \hat{v}(x) \geq \alpha\}$.

3.13. Proposição:

A topologia induzida τ pela estrutura uniforme de $\hat{K}$, coincide com $\tau_{\hat{v}}$.

Demonstração:

É suficiente mostrar que os fechos em $\hat{K}$ dos V_α ($\overline{V}_\alpha$), formam um sistema fundamental de vizinhanças do zero em $\hat{K}$, uma vêz que por 3.12, esses fechos são: $\overline{V}_\alpha = \left\{x \in \hat{K};\ \hat{v}(x) > \alpha\right\}$. Por 3.1 e 0.48, $\hat{K}$ é regular e por 0.15, toda vizinhança do zero em $\hat{K}$, segundo τ, contém o fecho V de uma vizinhança U do zero em $\hat{K}$, segundo τ. Como K é denso em $\hat{K}$ e U é aberto em $\hat{K}$, V é também o fecho do traço de U sobre K em $\hat{K}$, segundo τ. Assim os fechos em $\hat{K}$ das vizinhanças do zero segundo τ, formam um sistema fundamental de vizinhanças do zero em $\hat{K}$. Por construção da estrutura uniforme de $\hat{K}$, a topologia induzida por τ, sobre K, é a própria τ_v. Portanto segue-se o resultado.

3.14. Proposição:

O anel de valorização de $\hat{v}$ é o completamento $\hat{A}$ do anel A de valorização de v. O ideal de $\hat{v}$ é o completamento $\hat{m}$ do ideal de v. Ademais, $\hat{A} = A + \hat{m}$ e o corpo de resíduos da valorização $\hat{v}$ é canonicamente identificado como o corpo de resíduos da valorização v.

Demonstração:

I - O anel da valorização de $\hat{v}$ é $\left\{x \in \hat{K};\ \hat{v}(x) \geq 0\right\} = A'$.

Por 3.11, temos, $A' = \overline{A} = \hat{A}$.

Analogamente, por 3.11, o ideal da valorização de $\hat{v}$ é $\hat{m}$.

II - Seja $x \in \hat{A}$, então existe $y \in A$, suficientemente próximo de x, tal que $\hat{v}(x-y) > \hat{v}(y) \geq 0$. Logo $x-y \in \hat{m}$.

Assim $x = y + (x-y) \in A + \hat{m}$ e $\hat{A} \subset A + \hat{m}$.

Como $A + \hat{m} \subset \hat{A}$, segue-se que $\hat{A} = A + \hat{m}$.

Considere agora a aplicação $g: A \longrightarrow \hat{A}/\hat{m} = \dfrac{A + \hat{m}}{\hat{m}}$

tal que: $x \longmapsto f(x) + \hat{m}$ onde $f: A \longrightarrow A + \hat{m}$ é a aplicação $x \longmapsto x + \hat{m}$.

Como f é sobrejetiva, temos que g também é sobrejetiva.

temos ainda que $\operatorname{Ker} g = \left\{x \in A;\ f(x) \in \hat{m}\right\} = m$.

Portanto, pelo teorema fundamental dos homomorfismos, temos, $A/_m \cong \hat{A}/_{\hat{m}}$.

3.15. Observação:

Por 0.33, 0.34, 0.35 e devido a unicidade, (3.7), para cada $H \in \hat{K}$, $\hat{v}(H) = \lim\limits_{y \to H,\, y \in K} v(y)$, ou por 0.32 e 0.35, se $F = \mathcal{B}(H) \cap K^*$, onde $\mathcal{B}(H)$ é o filtro de vizinhanças de H em $\hat{K}$, temos: $\hat{v}(H) = \lim_F v$, o que significa que para cada $H \in \hat{K}$, $\hat{v}(H)$ é o limite da base de filtro de Cauchy, $v\big|\mathcal{B}(H) \cap K^*\big|$.

3.16. Definição:

Dizemos que $f:(K_1,v_1) \longrightarrow (K_2,v_2)$ é um homomorfismo de corpos valorizados se $f: K_1 \longrightarrow K_2$ é um homomorfismo e $v_1(x) = v_2(\ f(x)\ )$ para todo $x \in K_1$.

Observe que todo homomorfismo de corpos valorizados é contínuo.

3.17. Definição:

Dizemos que $f:(K_1,v_1) \longrightarrow (K_2,v_2)$ é um isomorfismo de corpos valorizados, se existe $g:(K_2,v_2) \longrightarrow (K_1,v_1)$ tal que

$g \circ f = id_{K_1}$, $f \circ g = id_{K_2}$, $v_2 \circ f = v_1$ e $v_1 \circ g = v_2$.

3.18. Teorema:

Sejam (k,v) um corpo valorizado e $i:(K,v) \longrightarrow (\hat{K},\hat{v})$ a aplicação: $x \longrightarrow \mathcal{B}(x)$, temos então:

I - $\hat{K}$ é completo em relação a estrutura uniforme definida por $\hat{v}$.

II - $i(K)$ é denso em $\hat{K}$ relativamente a $\tau_{\hat{v}}$.

III - A aplicação i é um homomorfismo de corpos valorizados.

IV - $\hat{v}(\hat{K}^*) = v\left[i(K^*)\right]$.

V - Dados um corpo valorizado completo (L,w) e $f:(K,v) \longrightarrow (L,w)$ um homomorfismo de corpos valorizados, existe um único homomorfismo de corpos valorizados $g:(\hat{K},\hat{v}) \longrightarrow (L,w)$ tal que, $f = g \circ i$. Decorre daí que o completamento $(\hat{K},\hat{v})$ é univocamente determinado a menos de um isomorfismo de corpos valorizados.

Demonstração:

I - Denotamos $\left[\hat{K}, \mathcal{U}\right]$ o espaço uniforme cuja estrutura uniforme é dada por $\mathcal{U}$ (isto é: a estrutura uniforme de $\hat{K}$, construída no início desta seção) e $\left[K, \mathcal{U}_v\right]$ o espaço uniforme cuja estrutura uniforme é dada por v.

Para mostrarmos que $\left[\hat{K}, \mathcal{U}_{\hat{v}}\right]$ é completo, é bastante mostrar que todo filtro $\mathcal{F}$ que é $\mathcal{U}_{\hat{v}}$-Cauchy (isto é: $\mathcal{F}$ é de Cauchy em relação a estrutura uniforme dada por $\hat{v}$) é também $\mathcal{U}$-Cauchy, pois como por 3.6 $\left[\hat{K}, \mathcal{U}\right]$ é completo, temos que $\mathcal{F}$ τ-converge para $x \in \hat{K}$ e assim $\mathcal{F}$ $\tau_{\hat{v}}$-converge para $x \in \hat{K}$, pois por 3.13 τ coincide com $\tau_{\hat{v}}$.

Portanto $\left[\hat{K}, \mathcal{U}_{\hat{v}}\right]$ é completo.

Para terminar, mostrar que todo filtro $\mathcal{U}_{\hat{v}}$-Cauchy é também $\mathcal{U}$-Cauchy é mostrar que a aplicação inclusão $f:[\hat{K}, \mathcal{U}_{\hat{v}}] \longrightarrow [\hat{K}, \mathcal{U}]$ é uniformemente contínua.

Por 3.5, $i:[\hat{K}, \mathcal{U}_v] \longrightarrow [\hat{K}, \mathcal{U}]$ tal que $x \longmapsto B(x)$, é uniformemente contínua e por 3.6, identificamos $[K, \mathcal{U}_v]$ com um subespaço denso de $[\hat{K}, \mathcal{U}]$. Como $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}_{\hat{v}}$ coincidem, podemos identificar $[K, \mathcal{U}_v]$ com um subespaço denso de $[\hat{K}, \mathcal{U}_{\hat{v}}]$ então i pode ser estendida à $[\hat{K}, \mathcal{U}_{\hat{v}}]$ de maneira única e a extensão é uniformemente contínua.

II - Temos que $i(K)$ é denso em $\hat{K}$ relativamente a $\mathcal{T}$. como $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}_{\hat{v}}$ coincidem, $i(K)$ é denso em $\hat{K}$ relativamente a $\mathcal{T}_{\hat{v}}$.

As demonstrações de III e IV estão em 3.10 e 3.11.

V - Por 3.7, existe uma única aplicação uniformemente contínua $g:\hat{K} \longrightarrow L$, tal que $f = g \circ i$. Resta provar: $w \circ g = \hat{v}$.

Sabemos que $\hat{v}/_{i(K)}[i(x)] = v(x)$ para cada $x \in K$.

Mas, $v(x) = (w \circ f)(x) = [w \circ (g \circ i)] = (w \circ g)(i(x))$

LOgo $\hat{v}/_{i(K)} = (w \circ g)/_{i(K)}$. Como $\hat{v}$ e $w \circ g$ são contínuas e $i(K)$ é denso em $\hat{K}$, segue-se $\hat{v} = w \circ g$.

No caso de valorização v de posto 1, podemos definir em K, a métrica $d: K \times K \longrightarrow R$ tal que $d(x,y) = c^{-v(y-x)}$, $0 < c < 1$

Tendo em vista isso, os resultados seguintes nos darão a relação entre completamento por meio de filtros de Cauchy e o completamento por sequências de Cauchy.

3.19 Proposição:

Um filtro elementar F, associado a uma sequência (x_n) de elementos de K, è de Cauchy com relação a estrutura uniforme

$\mathcal{U}$ de K, se e somente se, dado $U \in \mathcal{U}$, existe $n(U) \in Z_+$, tal que, para inteiros $m,n \geq n(U)$, temos $(x_m,x_n) \in U$.

Demonstração:

Por 0.24, a existência de $F \in \mathcal{F}$ é equivalente a existência de $n_o \in Z_+$, tal que para $n \geq n_o$, temos $x_n \in F$.
Assim, se $\mathcal{F}$ é um filtro de Cauchy, dado $U \in \mathcal{U}$, existe $n(U)$ tal que se $m,n \geq n(U)$, temos $x_n,x_m \in F$ e $(x_n,x_m) \in F \times F \subset U$.
Reciprocamente, da existência de $n(U)$, segue-se a existência de $F \in \mathcal{F}$, tal que $x_n \in F$, para $n \geq n(U)$.
Portanto, para $m,n \geq n(U)$, temos $(x_n,x_m) \in U$, por hipótese.
Consequentemente, $F \times F \subset U$ e $\mathcal{F}$ é de Cauchy.
De 0.41, se $\mathcal{U}$ é gerada pela métrica d, temos: um filtro elementar associado a uma sequência (x_n) de elementos de K, é de Cauchy, se e somente se, dado $\xi > 0$, existe $n(\xi)$ tal que, $d(x_m,x_n) < \xi$, para $m,n \geq n(\xi)$.

3.20. Proposição:

Se a estrutura uniforme $\mathcal{U}$ de K, é gerada pela métrica d, então, um filtro elementar $\mathcal{F}$, associado a uma sequência (x_n), converge para $x \in K$, se e somente se, dado $\xi > 0$ existe $n(\xi)$, tal que $d(x_n,x) < \xi$, para $n \geq n(\xi)$, isto é, se e somente se, (x_n) converge para x.

Demonstração:

Dado $\xi > 0$, isto é, dado uma vizinhança qualquer $V_\xi(x)$, de x, por 0.28, existe $F \in \mathcal{F}$, tal que $F \subset V_\xi(x)$, isto ainda quer dizer que existe $n(\xi)$ de maneira que para $n \geq n(\xi)$, temos $x_n \in F \subset V_\xi(x)$ e assim $d(x_n,x) < \xi$.

Reciprocamente, dado uma vizinhança $V_\xi(x)$, isto é: dado $\xi>0$, existe $n(\xi)$ e com ele $F \in F$, tal que para $n \geq n(\xi)$ (isto é: $x_n \in F$), temos: $d(x_n,x) < \xi$. Assim $F \subset V_\xi(x)$ e F converge para $x \in K$.

3.21. Teorema:

Sejam (K,v) um corpo valorizado, v uma valorização de posto 1 e d a métrica sobre K, $d(x,y) = c^{-v(y-x)}$, $c \in R$, $0 < c < 1$. Considere sobre K a estrutura uniforme U gerada pela métrica d. Então, K é completo relativamente a U, se e somente se, o espaço métrico (K,d) é completo.

Demonstração:

Se K é completo, todo filtro de Cauchy relativamente à U, é convergente. Em particular, dada uma sequência de Cauchy (x_n), o filtro elementar associado, por 3.19, é de Cauchy e converge para $x \in K$. Então por 3.20, a sequência (x_n) converge para $x \in K$.

Reciprocamente, seja F um filtro de Cauchy relativamente à U. Então por definição de filtro de Cauchy, para todo $n \in Z_+$, existe um conjunto $F_n \in U$ tal que $\partial(F_n) < \frac{1}{n}$ onde ∂F_n é diâmetro de F_n. Podemos construir uma sequência (x_n) de elementos de K, escolhendo para cada $n \in Z_+$, um ponto x_n, no conjunto $F_1 \cap \cdots \cap F_n \neq \emptyset$, pois $F_i \in F$. Então para todo $m \leq n$, temos $d(x_m,x_n) < \frac{1}{m}$, pois ambos $x_m,x_n \in F_m$.

Assim (x_n) é de Cauchy.

Por hipótese (x_n) converge para $x \in K$. Mostraremos agora que x é o ponto limite de F .

Dado $\xi > 0$, seja n tal que, $\frac{1}{n} < \xi/2$.

Como x é um ponto limite de (x_n), podemos escolher n, de maneira que $x_n \varepsilon B_{\xi/2}(x)$ onde $B_{\xi/2}(x)$ é a bola de centro x e raio $\xi/2$.

Assim, $\delta(F_n) < \frac{1}{n} < \xi/2$ e $x_n \varepsilon F_n$, implicam que $F_n \subset B_{\xi}(x)$

Portanto F converge para $x \varepsilon K$ e K é completo.

Concluímos portanto que no caso de valorização de posto 1, o completamento por meio de filtros de Cauchy, coincide com o completamento por sequências de Cauchy, como usualmente.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bourbaki, N., Elements of Mathematics, Commutative Algebra. Hermann, Publishers in Arts and Science, and Addison-Wesley Publishing Company, 1972.

[2] Bourbaki, N., Elements of Mathematics, General Topology. Hermann, Éditeurs des Sciences et des Arts, and Addison-Wesley Publishing Company, 1966.

[3] Jacobson, Nathan, Lectures in abstract Algebra, vol III - Theory of Fields and Galois Theory. D. Van Nostrand Company, Inc., 1974.

[4] Ribenboim, P., Théorie des Groupes ordonnés. Univ. Nac. del Sur, Bahia Blanca, Argentina, 1959.