UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CLEON DA SILVA BARROSO

IMERSÕES MÍNIMAS E ESTIMATIVAS DO PRIMEIRO AUTOVALOR DO LAPLACIANO

FORTALEZA

2000

CLEON DA SILVA BARROSO

IMERSÕES MÍNIMAS E ESTIMATIVAS DO PRIMEIRO AUTOVALOR DO LAPLACIANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Abdênago Alves de Barros.

FORTALEZA

2000

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B285i Barroso, Cleon da Silva.
Imersões mínimas e estimativas do primeiro autovalor do laplaciano / Cleon da Silva Barroso. – 2000.
47 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2000.
Orientação: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

1. Variedades riemanianas. I. Título.

CDD 510

CLEON DA SILVA BARROSO

IMERSÕES MÍNIMAS E ESTIMATIVAS DO PRIMEIRO AUTOVALOR DO LAPLACIANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 07/04/2000.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Abdênago Alves de Barros (Orientador)

____

Prof. Gregório Pacelli Feitosa Bessa

____

Prof. Hilário Alencar da Silva

FORTALEZA

2000

Agradecimentos

Em primeiro lugar quero agradeçer a Deus por mais uma vitória conquistada.
À minha amada esposa pela fidelidade e companheirismo.
À meus pais pelo insentivo e apoio nas horas difíceis.
Ao meu sogro e minha sogra pela estimada presença no dia da exposição.

Meus sinceros agradecimentos vão também a todos que, de uma forma direta ou indireta, contribuíram para consolidação deste trabalho.
Em especial, ao Prof. Abdênago Barros pela orientação e escolha do tema.
Aos estimados amigos Diego Moreira, Eduardo Teixeira, Jorge Fernandes, Paulo Cesar, Maria Eugênia, Humberto, Prof. Luquésio e tantos outros, pelos valiosos "bate papos" nos corredores da matemática onde aprendi grandes lições.

Agradeço imensamente também, a todos os professores e colegas do Departamento de Matemática da Universidade do Amazonas, em especial, a Carlos Manoel, Ivan Tribuzy, Sandro Bittar, Profa. Flávia e Henrique H. Filho pelos preciosos ensinamentos na minha formação básica.

Cleon da Silva Barroso. Valeu...!!!!!

Índice

1 Introdução **3**

2 Preliminares **5**
- 2.1 Gradiente, Divergente e Laplaciano. 6
- 2.2 Imersões Isométricas 14

3 Fórmulas de Bochner, de Reilly e Equações de Estrutura **17**
- 3.1 Fórmula de Bochner. 17
- 3.2 Fórmula de Reilly 20
- 3.3 Equações de Estrutura em uma Variedade Riemanniana 23
- 3.4 Laplaciano da Segunda Forma Fundamental 25

4 Aplicações **31**
- 4.1 Estimativas do Primeiro Autovalor do Laplaciano 32

5 Estimativas da Curvatura de Ricci de Subvariedades Mínimas da Esfera **38**

6 Apêndice **42**
- 6.1 Exemplos 42
- 6.2 Exemplo de Imersão Mínima 45

7 Bibliografia **46**

Capítulo 1

Introdução

Sejam $\varphi : M^n \to \mathbb{S}^{n+m}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemannaina M^n na esfera $\mathbb{S}^{n+m}$ e $\lambda_1 = \lambda_1(M)$, o primeiro autovalor do Laplaciano $\Delta = \Delta_M$ em M na métrica induzida por φ. T. Takahashi, [15], provou que $\Delta\varphi + n\varphi = 0$ se, só se, φ é uma imersão mínima. Em particular, se φ é mínima então $\lambda_1 \leq n$.

S. T. Yau, [16], conjecturou que se φ é um mergulho mínimo de uma hipersuperfície compacta, orientável M^n em $\mathbb{S}^{n+1}$ então o primeiro autovalor do Laplaciano (na métrica induzida) é exatamente n. Em contraste, M. Obata, [12], provou que se uma variedade Riemanniana compacta M^n satisfaz $Ric(M) \geq n-1$ e $\lambda_1 = n$ então, M^n é isométrica a esfera $\mathbb{S}^n$. Um outro resultado de rigidez relacionado com o primeiro autovalor λ_1 do Laplaciano é o teorema de S. Montiel e A. Ros, [9], que diz o seguinte: Se $\varphi : T^2 \to \mathbb{S}^3$ é um mergulho mínimo do toro T^2 em $\mathbb{S}^3$ e $\lambda_1 = 2$ então, T^2 é o toro de Clifford.

Para algumas classes de variedades Riemannianas isoparamétrica a conjectura de Yau foi provada por Muto, [10]. Entretanto, o primeiro resultado geral foi obtido por H. I Choi e A. N. Wang, [3]. Usando as fómulas de Bochner e de Reilly, eles provaram que se M^n é uma hipersuperfície compacta minimamente mergulhada em $\mathbb{S}^{n+1}$, então $\lambda_1 \geq \frac{n}{2}$. A. Barros e G. P. Bessa em [1] mostraram uma melhor estimativa que a obtida por H. I. Choi e A. N. Wang. Mais precisamente, eles provaram que para uma hipersuperfície mínima compacta M^n mergulhada em $\mathbb{S}^{n+1}$ o primeiro autovalor do Laplaciano satisfaz a seguinte desigualdade:

$$2\lambda_1 - n \geq \frac{n+1}{n}\lambda_1^2 \frac{\|f\|_2^2}{\|\nabla f\|_2^2},$$

onde f é a extensão harmônica de uma primeira autofunção de M^n a uma das componentes conexas de $\mathbb{S}^{n+1} \setminus M^n$.

Nesta dissertação apresentaremos uma estimativa para o primeiro autovalor do Laplaciano de uma hipersuperfície mínima compacta M^n da esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ obtida por Barros e Bessa, calcularemos o Laplaciano do quadrado da norma da segunda forma fundamental de uma imersão com algumas aplicações à estimativas do primeiro valor próprio do Laplaciano de imersões mínimas e mostraremos dois resultados devido a P. F. Leung, [7], que estimam a curvatura de Ricci de uma subvariedade mínima da esfera em termos da segunda forma fundamental da imersão. Estes são,

Teorema 5.0.4 [Leung] Seja $\varphi : M^n \to \mathbb{S}^{n+m}$ uma imersão mínima. Então, para quaisquer $p \in M^N$, e $v \in T_pM$, com $\|v\| = 1$ tem-se,

$$Ric(v) \geq \frac{n-1}{n}(n-S) , \tag{1.1}$$

onde S é o quadrado da norma da segunda forma fundamental de φ.

Usando o teorema de Obata mostraremos o seguinte teorema, também devido a P. F. Leung:

Teorema 5.0.5 Seja M^n uma subvariedade mínima fechada em $\mathbb{S}^N$. Seja f uma autofunção em M correspondendo ao autovalor não-nulo λ, então

$$\int_M (\lambda + S - n)|\nabla f|^2 dV \geq 0 , \tag{1.2}$$

onde dV é o elemento de volume em M^n. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, ou M^n é totalmente geodésica e λ é o seu primeiro autovalor não-nulo se $n \geq 3$, ou M^n é isométrica a $\mathbb{S}^2\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\right)$ e λ é o primeiro autovalor não-nulo caso n=2.

Estes resultados permite-nos obter informações importantes acerca de M^n. Com efeito, supondo no Teorema (5.0.4), que M^n é compacta e $S < n$, o Teorema de Bonnet-Myers implica na compacidade do recobrimento universal M^* de M^n. Daí, segue-se que o grupo fundamental $\pi_1(M)$ de M^n é finito. Subjacente ao Teorema (5.0.5), decorre que se S for constante então $S \geq n - \lambda_1$.

Na demonstração do Teorema (5.0.5) utilizamos o teorema de Obata, que diz:

Teorema de Obata: Uma variedade Riemanniana completa de dimensão $n \geq 2$ possui uma função não-constante f satisfazendo $Hessf = -c^2 f I_n$ se, e só se, a variedade é isométrica a uma esfera $\mathbb{S}^n(\frac{1}{c})$ no espaço Euclidiano.

A estrutura desta dissertação é a seguinte: no Capítulo 2, será desenvolvido todo material inerente ao nosso trabalho, incluindo algumas identidades que relacionam o Laplaciano de uma função de classe C^∞ em M^n; no Capítulo 3, demonstraremos as fórmulas de Bochner, de Reilly e faremos também uma pequena exposição sobre as equações de estrutura em uma variedade Riemannaiana, visando calcular o Laplaciano de um tensor simétrico que formalmente satisfaz às equações de Codazzi; devido à importância de se estimar o primeiro autovalor de uma variedade Riemannaina, no Capítulo 4 faremos algumas aplicações destas fórmulas exibindo algumas estimativas para $\lambda_1(M)$. Além disso, demonstraremos o resultado de A. Barros e G. P. Bessa; no Capítulo 5, demonstraremos os resultados de P. F. Leung e por fim, no Capítulo 6, apresentaremos alguns exemplos de imersões mínimas da esfera Euclidiana.

Capítulo 2

Preliminares

O principal objetivo deste capítulo é fixar as notações, rever algumas definições e resultados básicos e, por fim, estabelecer determinadas relações que serão importantes nos capítulos posteriores. Lembramos que evitaremos demonstrações de resultados básicos as quais poderão ser encontradas nas respectivas referências.

Desde já ficará estabelecido que a notação M, ou se necessário M^n, representará uma variedade *Riemanniana* de dimensão n, com métrica $\langle \cdot \ , \ \cdot \rangle$ e conexão *Riemanniana* ∇. Indicaremos por $\chi(M)$ o espaço dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $D(M)$ o anel das funções de classe C^∞ em M e, se $p \in M$, então T_pM denotará o espaço tangente a M em p. Se $f : M^n \to N^k$ é uma aplicação diferenciável, então $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ denotará a derivada de f no ponto p.

Com relação a conexão Riemanniana de M o teorema fundamental da Geometria Riemanniana, teorema de Levi-Civita, [4], garante a existência e unicidade de uma conexão afim em M.

Teorema 2.0.1 (*Levi – Civita*). *Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M, chamada conexão Riemanniana de M, tal que $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ as seguintes propriedades se verificam:*

1. *∇ é simétrica, i.e, $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$;*

2. *∇ é compatível com a métrica, i.e, $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$.*

Portanto, a partir daqui todas as conexões citadas serão *Riemannianas*.

Denotando por R a curvatura de M e por Ric a curvatura de *Ricci* num ponto $p \in M$, o **tensor curvatura** e o **tensor de Ricci** de M são definidos por:

$$R(X, Y, Z, T) = \langle R(X, Y)Z, T\rangle \ ;$$

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(X, e_i)Y, e_i\rangle \ ,$$

onde $\{e_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal de T_pM e $X, Y, Z, T \in \chi(M)$.

2.1 Gradiente, Divergente e Laplaciano.

Nesta seção estabeleceremos alguns resultados envolvendo o gradiente e o Laplaciano de funções de classe C^∞ e o divergente de campos de vetores em M.

Definição. 2.1.1 *Dada $f \in D(M)$ o gradiente de f é o campo de vetores definido por*

$$grad(f) : M \to TM, p \mapsto (p\ ,\ grad(f)p)\ ,$$

com a propriedade de que $\langle grad(f), X\rangle = X(f)$, $\forall\ X \in \chi(M)$.

Salvo menção explícita indicaremos $grad(f)$ por ∇f em todo texto sebsequente.
A partir da definição de gradiente de uma função em M, quaisquer que sejam $f, g \in D(M)$ as seguintes propriedades se verificam:

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;
2. $\nabla(f.g) = f.\nabla h + h.\nabla f$,

Definição. 2.1.2 *Dado $X \in \chi(M)$, o divergente de X é a função*

$$divX : M \to \mathbb{R},$$

dada por divX(p)=traço da aplicação linear ($Y(p) \longmapsto (\nabla_Y X)(p)$).

Verificam-se também as seguintes afirmações relacionadas com o divergente de um campo:

1. $div(X+Y) = divX + divY$;
2. $div(fX) = f \cdot divX + \langle\nabla f, X\rangle$,

para quaisquer X,Y $\in \chi(M)$ e toda $f \in D(M)$.

*N*osso objetivo nos seguintes lemas é exibir uma expressão para ∇f e $divX$ em um sistema de coordenadas locais de M. Inicialmente, mostraremos o seguinte lema:

Lema 2.1.1 *Sejam $(x_1, ..., x_n)$ um sistema de coordenadas locais em M definida em uma vizinhança $\mathcal{U} \subset M$ e $f \in D(M)$. Então,*

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} ,$$

onde $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$ e (g^{ij}) é a inversa da matriz (g_{ij}).

Prova : Como $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^{n}$ forma uma base para TM em $\mathcal{U}$ podemos escrever,

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Então,

$$\langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i g_{ij} = \sum_{i=1}^{n} g_{ji} a_i \; . \tag{2.1}$$

Considerando as matrizes, $F = (\langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle)_{n \times 1}$; $A = (a_k)_{n \times 1}$, e $G = (g_{ij})_{n \times n}$, a igualdade (2.1) nos diz que: $F = GA$. Como G é invertível, obtemos $A = G^{-1}F$. Logo, um elemento genérico de A se escreve como:

$$a_i = \sum_{j=‘}^{n} g^{ij} f_j \; ,$$

onde $(g^{ij})_{n \times n} = G^{-1} e f_j = \langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$. Portanto,

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} g^{ij} f_j \Big) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$\square$

Observação 2.1.1 *No caso particular em que $M = \mathbb{R}^n$ e $g_{ij} = \delta_{ij}$ é a métrica Euclidiana temos,*

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Usando a notação f_i em vez de $\langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_i} \rangle$, podemos escrever ∇f na forma:

$$\nabla f = \sum_{k=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ . \tag{2.2}$$

Lema 2.1.2 *Se $(x_1, \ldots, x_n)$ é um sistema de coordenadas locais em M então, para o campo $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ temos:*

$$divX = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^{i} \ ,$$

onde Γ_{ij}^{k} representa os símbolos de Christoffel da métrica em M e $a_i \in \chi(M)$.

Prova : Por definição, $divX = tr(Y \mapsto \nabla_Y X)$. Usando as propriedades da conexão, obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X &= \sum_{j=1}^{n} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \Big(a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big) = \sum_{j=1}^{n} \Big(a_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big) \\
&= \sum_{j,l=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^{l} \frac{\partial}{\partial x_l} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_{j,l=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^{l} \frac{\partial}{\partial x_l} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial a_l}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_l} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^{l} + \frac{\partial a_l}{\partial x_i} \Big) \frac{\partial}{\partial x_l} \ ,
\end{aligned}$$

ou seja, o número entre parênteses é precisamente um elemento genérico da matriz da aplicação $Y \mapsto \nabla_Y X$. Logo,

$$divX = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^{i} + \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \Big)$$

$\square$

Lema 2.1.3 *Sejam* $(E_1, \ldots, E_n)$ *um referencial ortonormal local em* M *e* $X = \sum_{i=1}^{n} X_i E_i$ *um campo em* $\chi(M)$. *Então as seguintes igualdades se verficam:*

1. $divX = \sum_{i=1}^{n} \Big(E_i(X_i) + \sum_{j=1}^{n} X_j \Gamma_{ij}^{i} \Big)$;

2. $divX = \sum_{i=1}^{n} \Big(E_i(X) - \langle \nabla_{E_i} E_i \ , X \rangle \Big)$.

Prova: Como $X = \sum_{j=1}^{n} X_j E_j = \sum_{j=1}^{n} \langle X, E_j \rangle E_j$, usando a definição de divergente concluímos que:

$$
\begin{aligned}
divX &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X_j E_j, E_i \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle X_j \nabla_{E_i} E_j + E_i(X_j) E_j \ , E_i \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} X_j \langle \nabla_{E_i} E_j, E_i \rangle + \sum_{i,j=1}^{n} E_i(X_j) \langle E_j, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i(X_i) + \sum_{i,j=1}^{n} X_j \langle \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{l} E_l, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(E_i(X_i) + \sum_{i,j=1}^{n} X_j \Gamma_{ij}^{i} \Big) .
\end{aligned}
$$

Segue-se portanto a primeira igualdade do lema. Por outro lado, observando que $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}$, segue-se que $0 = E_i \langle E_j, E_i \rangle$. Donde conclui-se que:

$$
\langle \nabla_{E_i} E_j, E_i \rangle = -\langle E_j, \nabla_{E_i} E_i \rangle \tag{2.3}
$$

Substituindo (2.3) na terceira igualdade anterior obtemos a parte 2 do lema. Com efeito,

$$
\begin{aligned}
divX &= \sum_{i=1}^{n} E_i(X_i) - \sum_{i,j=1}^{n} X_j \langle \nabla_{E_i} E_i, E_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} E_i(X_i) - \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(E_i(X_i) - \langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle \Big)
\end{aligned}
$$

□

Lema 2.1.4 *Nas hipóteses do Lema (2.1.2) vale a seguinte igualdade para o divergente de um campo diferenciável em uma variedade Riemanniana:*

$$divX = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i \sqrt{g}\ ) \ ,$$

onde $g = det(g_{ij})$.

Prova: Observemos inicialmente o fato elementar que,

$$\Gamma_{ij}^{i} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \Big(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \Big) g^{li} \ .$$

Daí, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^{i} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_j \Big(\sum_{l=1}^{n} \Big(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} g^{li} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} g^{li} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} g^{li} \Big) \Big) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j,l}^{n} a_j \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} g^{li} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,l}^{n} a_j \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_l} g^{li} - \frac{1}{2} \sum_{i,j,l}^{n} a_j \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} g^{li} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j,l}^{n} a_j \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} g^{li} = \frac{1}{2} \sum_{i,j,l}^{n} a_i \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} g^{lj} \ . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Logo, usando (2.4) e o Lema (2.1.2) obtemos;

$$divX = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{a_i}{2} \sum_{j,l=1}^{n} g^{lj} \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{a_i}{2} \sum_{j,l=1}^{n} g^{jl} \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} \Big) \ . \tag{2.5}$$

Usando agora o fato que $\displaystyle\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl} \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} = tr\Big(G^{-1} \frac{\partial G}{\partial x_i} \Big) = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_i}$, em (2.5) temos:

$$\begin{aligned} divX &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{a_i}{2} tr(G^{-1} \frac{\partial G}{\partial x_i}) \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{a_i}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + a_i \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g})}{\partial x_i} \Big) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} \sqrt{g} + a_i \frac{\partial (\sqrt{g})}{\partial x_i} \Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i \sqrt{g}\ ). \end{aligned}$$

A identidade $\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x_i} = tr\Big(G^{-1}\frac{\partial G}{\partial x_i}\Big)$ é uma consequência da fórmula de *Liouville*. De fato, dada uma família de matrizes invertíveis $G(t) = (g_{ij}(t))$, consideremos as matrizes

$$A(t) = G^{-1}(t)\frac{\partial G(t)}{\partial t} ,$$

onde $t \in \mathbb{R}$. Então,

$$G(t)A(t) = \frac{\partial G(t)}{\partial t} .$$

Fazendo $g(t) = det(g_{ij})$, obtemos

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} det \begin{pmatrix} g_{11}(t) & \dots & g'_{1i}(t) & \dots & g_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ g_{n1}(t) & \dots & g'_{ni}(t) & \dots & g_{nn}(t) \end{pmatrix} .$$

Denotando por $g^i(t)$ a i-ésima coluna de $G(t)$, temos

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} det \Big(g^1(t), \dots, (g^i)'(t), \dots, g^n(t)\Big). \tag{2.6}$$

Considere agora a equação diferencial $G' = AG$, onde $A = G'G^{-1}$. Então,

$$(g^i)' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g^i . \tag{2.7}$$

Substituindo (2.7) em (2.6), obtemos:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{i=1}^{n} det \left(g^1, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g^j, \dots, g^n\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} det\Big(g^1, \dots, g^n\Big) = trA(t)g(t) \\ \therefore \ \frac{g'(t)}{g(t)} &= trA(t) = tr\Big(G^{-1}(t)\frac{\partial G(t)}{\partial t}\Big), \ \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.8}$$

□

Definição. 2.1.3 *O operador linear* $\Delta : D(M) \to D(M)$ *definido por*

$$\Delta f = div(\nabla f) \ ,$$

é chamado o operador Laplaciano de M.

Observação 2.1.2 *Dada uma função* $f \in D(M)$, *considere o campo* $X = \nabla f$. *A partir da definição* (3) *e da igualdade* (2) *do Lema (2.1.3), segue-se imediatamente a igualdade,*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \Big(E_i(E_i(f)) - (\nabla_{E_i} E_i)(f) \Big) \ .$$

Observação 2.1.3 *O Lema (2.1.1) nos diz que as coordenadas do campo* $X = \nabla f$ *num sistema de coordenadas são* $a_i = \sum_{j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}$. *Logo, a partir do Lema (2.1.4) obtemos,*

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big) \ .$$

Definição. 2.1.4 *Sejam* $f \in \chi(M)$ *e* $p \in M$. *Defina o hessiano de* f *no ponto* p *como o operador linear,*

$$Hessf : T_pM \to T_pM \ ; \ Hessf \cdot Y = \nabla_Y \nabla f \ .$$

Considerando o tensor $Hessf(X,Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle$ e observando que

$$[X,Y](f) = XY(f) - YX(f) = (\nabla_X Y - \nabla_Y X)(f),$$

temos que $Hessf(X,Y) = Hessf(Y,X)$, $\forall X, Y \in \chi(M)$. Com isto, se $(x_1, ..., x_n)$ é um sistema de coordenadas locais em M e $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, então:

$$Hessf(\partial_i \ , \partial_j) = \partial_i \partial_j f - (\nabla_{\partial_i} \partial_j)(f) \ . \qquad (2.9)$$

Como $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$ podemos reescrever (2.9) da seguinte maneira:

$$Hessf(\partial_i \ , \partial_j) = \Big(\partial_i \partial_j - \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \Big)(f) \ .$$

As igualdades abaixo decorrem imediatamente das propriedades do gradiente e divergente já vistas anteriormente:

1. $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$;
2. $\frac{1}{2}\Delta(f^2) = f\Delta f + |\nabla f|^2$;
3. $\Delta f = tr(Hessf)$.

Lema 2.1.5 *Sejam $f \in \chi(M)$ e $(x_1, \ldots, x_n)$ um sistema de coordenadas locais em M. Então,*

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\Big(\partial_i\partial_j(f) - \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\partial_k f\Big) .$$

Prova: Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal local em M. Então,

$$e_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\partial_i \ \forall\ k = 1, \ldots, n \ \therefore\ \delta_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ki}a_{lj}g_{ij} .$$

Daí tem-se a igualdade de matrizes $I = A^*AG$, ou seja, $G^{-1} = A^*A$. Logo um elemento genérico da matriz G^{-1} é dado por:

$$g^{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}. \tag{2.10}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \Delta f &= trHessf = \sum_{k=1}^{n} Hessf(e_k, e_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ki}a_{kj}Hessf(\partial_i, \partial_j)\Big) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}\Big)Hessf(\partial_i, \partial_j). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Usando as equações (2.9) e (2.10) em (2.11), segue-se o lema. □

Usando as informações obtidas para o Laplaciano temos o seguinte corolário:

Corolário 2.1.1 *Sejam M uma variedade Riemanniana e $(x_1, \ldots, x_n)$ um sistema de coordenadas locais em M. Então, para toda função $f \in \chi(M)$, Δf pode ser expresso por:*

1. $\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sqrt{g}\ g^{ij}\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\Big)$;

2. $\Delta f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\Big(\partial_i\partial_j(f) - \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\partial_k f\Big)$.

2.2 Imersões Isométricas

Sejam $\overline{M}^{n+m}$ e M^n variedades Riemannianas com conexões $\overline{\nabla}$ e ∇, respectivamente. A seguir recordaremos as equações de estruturas relacionadas com uma imersão isométrica de M em $\overline{M}$. Dada uma imersão isométrica $\varphi : M \to \overline{M}$ e $p \in M$, seja $\mathcal{U} \subset M$ uma vizinhaça de p em M^n tal que $\varphi(\mathcal{U})$ seja uma subvariedade de $\overline{M}$. Para cada $p \in M$ a métrica de $\overline{M}$ decompõe $T_{f(p)}\overline{M}$ na soma direta,

$$T_{f(p)}\overline{M} = d\varphi_p(T_pM) \oplus (d\varphi_pT_pM)^\perp \approx T_pM \oplus (T_pM)^\perp .$$

Indicaremos por $TM^\perp$ o fibrado normal de φ e por $\chi(M)^\perp$ o conjunto das secções de $TM^\perp$. Dados $X, Y \in \chi(\mathcal{U})$, por definição a conexão Riemanniana de M^n, induzida por φ, é dada por $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\top$, onde $\overline{X}$, $\overline{Y}$ são extensões locais de $d\varphi X$ e $d\varphi Y$ a $\overline{M}$.

Dado qualquer $\xi \in \chi(\mathcal{U})^\perp$ a **segunda forma fundamental** de φ em p, segundo o vetor ξ, associada à aplicação bilinear e simétrica

$$\alpha : T\mathcal{U} \times T\mathcal{U} \to T\mathcal{U}^\perp,$$

tal que $\alpha(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$, $\forall\ X, Y \in \chi(\mathcal{U})$ é definida por $B(X,Y) = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle$. Denotaremos por $A_\xi : T_pM \to T_pM$ a aplicação auto-adjunta associada à segunda forma fundamental de φ na direção de ξ , i.e,

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = B(X,Y)\ , \forall\ X, Y \in T_pM\ .$$

Considere agora $\sigma \subset T_pM$ um subspaço bidimensional e v, w uma base de σ. A **curvatura seccional** de σ em p é definida por:

$$K(\sigma) = \frac{R(v,w,v,w)}{\|v \wedge w\|^2}\ ,$$

onde $\|v \wedge w\|^2 = \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2$.

A partir daqui nos restringiremos a imersões isométricas $\varphi : M \to \overline{M}_c$, onde $\overline{M}_c$ é uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante igual a c. Então para quaisquer $X, Y, Z, T \in \chi(M)$ temos as seguintes relações básicas:

Equação de Gauss:

$$R(X,Y,Z,T) = c\Big(\langle Y,T\rangle\langle X,Z\rangle\ - \langle Y,Z\rangle\langle X,T\rangle\Big)\ - \langle\alpha(Y,Z),\alpha(X,T)\rangle + \langle\alpha(Y,T),\alpha(X,Z)\rangle$$

Equação de Codazzi:

$$(\nabla_X^\perp \alpha)(Y,Z) = (\nabla_Y^\perp \alpha)(X,Z)$$

Se $\{\xi_\beta\}_{\beta=1}^m$ é uma base ortonormal de $(T_pM)^\perp$, o **vetor curvatura média** de φ em p e sua **norma** são definidos, respectivamente, por:

$$\vec{H} = \frac{1}{n}\sum_{\beta=1}^{m}(trA_{\xi_\beta})\xi_\beta \quad e \quad H = |\vec{H}| \ .$$

O **quadrado da norma da segunda forma fundamental** de φ em p será denotado por:

$$S = \sum_{\beta=1}^{m} trA_{\xi_\beta}^2 \ .$$

Usaremos as seguintes convenções, já estabelecidas na literatura, para os índices:

$$i, j, k, l, r, s, t = 1, \ldots, n \ ;$$

$$\beta, \theta = 1, \ldots, m \ .$$

Sejam $p \in M$ e $v, w \in T_pM$ quaisquer. Se $\{e_1, \ldots, e_n, \xi_1, \ldots, \xi_m\}$ é um referencial ortonormal local em $\overline{M}_c$, então pela equação de *Gauss* temos

$$\begin{aligned}
\sum_i \langle \bar{R}(v, e_i)w, e_i\rangle &= \sum_i \langle R(v, e_i)w, e_i\rangle - \sum_i \langle \alpha(e_i, e_i), \alpha(v, w)\rangle + \sum_i \langle \alpha(e_i, v), \alpha(e_i, w)\rangle \\
\therefore \quad c(n-1)\langle v, w\rangle &= Ric(v, w) - \sum_{i,\beta}\langle A_\beta e_i, e_i\rangle\langle A_\alpha v, w\rangle + \sum_{i,\beta}\langle A_\beta e_i, w\rangle\langle A_\beta v, e_i\rangle \\
\therefore \quad c(n-1)\langle v, w\rangle &= Ric(v, w) - \sum_\beta (trA_\beta)\langle A_\beta v, w\rangle + \sum_\beta \langle A_\beta^2 v, w\rangle \ . \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Em particular, se $\| v \| = 1$ e $w = v$, em (2.12) temos

$$Ric(v) = \sum_\alpha (trA_\alpha)\langle A_\alpha v, v\rangle - \sum_\alpha \langle A_\alpha^2 v, v\rangle + c(n-1). \qquad (2.13)$$

Posteriormente, usaremos a igualdade (2.13) para demonstrar um resultado devido a *Leung* que dá uma estimativa para a curvatura de *Ricci* de M. A seguir faremos uma aplicação do Lema (2.1.5) demonstrando o teorema de *Takahashi* que caracteriza as imersões mínimas em uma esfera. Essencialmente este teorema afirma que se $\varphi : M^n \to \mathbb{S}^{n+m}$ é uma imersão mínima, então $\Delta\varphi + n\varphi = 0$, i.e, n é um autovalor para o Laplaciano Δ de M. Daí, conclui-se que $\lambda_1(M) \leq n$, onde $\lambda_1(M)$ é o primeiro autovalor de Δ.

Teorema 2.2.1 *(T. Takahashi [15]) Seja $\varphi : M^n \to \mathbb{S}^{n+m}$ uma imersão isométrica sobre a esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+m}$. Então,*

$$\Delta\varphi + n\varphi = nH \ ,$$

onde H é o vetor curvatura média de φ.

Prova: Pelo Lema (2.1.5), temos $\Delta\varphi = \sum_{i,j} g^{ij}(\partial_i\partial_j\varphi - \sum_k \Gamma_{ij}^k\partial_k\varphi)$. Seja $\mathcal{U}$ uma vizinhança em M tal que $\varphi(\mathcal{U})$ seja uma subvariedade de $\mathbb{S}^{n+m}$. Considerando um referencial ortonormal $\{N_1, \ldots, N_p\}$ em $\chi(\mathcal{U})^\perp$, observamos que $\{\varphi, \partial_1\varphi, \ldots, \partial_n\varphi, N_1, \ldots, N_m\}$ forma uma base de $\mathbb{R}^{n+m+1}$. Logo, podemos escrever:

$$\partial_i\partial_j\varphi = \varphi_{ij} = a_{ij}\varphi + \sum_{k=1}^{n} b_{ij}^k\partial_k\varphi + \sum_{\alpha=1}^{m} c_{ij}^\alpha N_\alpha \ . \tag{2.14}$$

Observemos agora que: $a_{ij} = \langle\varphi_{ij}, \varphi\rangle = -\langle\partial_i\varphi, \partial_j\varphi\rangle = -g_{ij}$, já que $\langle\varphi, \varphi\rangle = 1$ e $\langle\partial_i, \partial_j\rangle = \langle\varphi_*\partial_i, \varphi_*\partial_j\rangle$. Por outro lado como,

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}(\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{mi} - \partial_m g_{ij})g^{mk} \quad e \quad b_{ij}^k = \sum_{l=1}^{n} g^{kl}\langle\varphi_{ij}, \partial_l\varphi\rangle \ ,$$

segue-se que $b_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$. Portanto em (2.14) temos:

$$\begin{aligned}
\partial_i\partial_j\varphi &= -g_{ij}\varphi + \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^k\partial_k\varphi + \sum_{\alpha=1}^{m}\langle\varphi_{ij}, N_\alpha\rangle N_\alpha \ . \\
\therefore \quad g^{ij}\Big(\partial_i\partial_j\varphi - \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^k\partial_k\varphi\Big) &= -g^{ij}g_{ij}\varphi + \sum_{\alpha=1}^{m} g^{ij}\langle\varphi_{ij}, N_\alpha\rangle N_\alpha \\
\therefore \quad \Delta\varphi + n\varphi &= \sum_{\alpha=1}^{m}\Big(\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\langle\varphi_{ij}, N_\alpha\rangle\Big)N_\alpha \\
\therefore \quad \Delta\varphi + n\varphi &= \sum_{\alpha=1}^{m}(trS_\alpha)N_\alpha \\
\therefore \quad \Delta\varphi + n\varphi &= nH \ . \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

□

Corolário 2.2.1 *Nas hipóteses do teorema anterior, segue-se que φ é mínima se, e só se, $\Delta\varphi + n\varphi = 0$. Em particular, $\lambda_1(M) \leq n$.*

Capítulo 3

Fórmulas de Bochner, de Reilly e Equações de Estrutura

Neste capítulo demonstraremos as fórmulas de Bochner e de Reilly e faremos também uma breve exposição sobre as equações de estrutura em variedades Riemannianas, usando o método do referencial móvel, afim de calcular o Laplaciano de um tensor simétrico que satisfaz formalmente a "equação de Codazzi".

*P*ara maiores detalhes sobre o assunto indicamos as referências [2], [5], [6], [13] e [14].

3.1 Fórmula de Bochner.

Teorema 3.1.1 *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável. Então,*

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = Ric(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + |Hess f|^2 \ , \tag{3.1}$$

onde $|Hess f|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_j\rangle^2$.

Para demonstração de tal fórmula precisamos do seguinte lema:

Lema 3.1.1 *Sejam* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável e* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *um referencial geodésico em M. Se Ric denota o tensor de Ricci de M então,*

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(f_i \Delta f_i - f_i (\Delta f)_i \Big) = Ric(\nabla f, \nabla f) \ ,$$

onde $h_i = e_\imath(h) = \langle \nabla h, e_i \rangle \ \ \forall \ h \in D(M)$.

Prova do Lema 3.1.1: Inicialmente, observemos que as seguintes relações são verificadas:

1. $e_j(f_i) = e_j\langle \nabla f, e_i\rangle = \langle \nabla_{e_j}\nabla f, e_i\rangle = \langle \nabla_{e_i}\nabla f, e_j\rangle$;
2. $\nabla f_i = \sum_{j=1}^n \langle \nabla f_i, e_j\rangle e_j = \sum_{j=1}^n e_j(f_i)e_j = \sum_{j=1}^n \langle \nabla_{e_i}\nabla f, e_j\rangle e_j$;
3. $\Delta f_i = \sum_{j=1}^n \langle \nabla_{e_j}(\nabla f_i), e_j\rangle = \sum_{j,k=1}^n \langle \nabla_{e_j}(\langle \nabla_{e_i}\nabla f, e_k\rangle e_k), e_j\rangle$,

onde usamos o fato que $Hessf(X,Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle = Hessf(Y,X)$.
Usando agora a hipótese que o referencial é geodésico, no ítem (3) obtemos,

$$\Delta f_i = \sum_{j,k=1}^n \langle \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\nabla f, e_k\rangle\langle e_k, e_j\rangle \ .$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^n f_i\Delta f_i \ = \ \sum_{i,j,k}^n f_i\langle \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\nabla f, e_k\rangle\delta_{jk} = \sum_{i,j=1}^n f_i\langle \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\nabla f, e_j\rangle \ . \tag{3.2}$$

Por outro lado,

$$(\Delta f)_i \ = \ e_i(\Delta f) = e_i\Big(\sum_{j=1}^n \langle \nabla_{e_j}\nabla f, e_j\rangle\Big) = \sum_{j=1}^n e_i\langle \nabla_{e_j}\nabla f, e_j\rangle = \sum_{j=1}^n \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\nabla f, e_j\rangle \ .$$

Consequentemente, temos

$$\sum_{i=1}^n f_i(\Delta f)_i = \sum_{i,j=1}^n f_i\langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\nabla f, e_j\rangle \ . \tag{3.3}$$

Finalmente, (3.2) e (3.3) nos dão:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \Big(f_i\Delta f_i - f_i(\Delta f)_i\Big) \ &= \ \sum_{i,j=1}^n f_i\Big(\langle \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\nabla f - \nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\nabla f, e_j\rangle\Big) \\
&= \ \sum_{i,j=1}^n f_i\langle R(e_i,e_j)\nabla f, e_j\rangle = \sum_{j=1}^n \langle R\Big(\sum_{i=1}^n f_i e_i, e_j\Big)\nabla f, e_j\rangle \\
&= \ \sum_{j=1}^n \langle R(\nabla f, e_j)\nabla f, e_j\rangle = Ric(\nabla f, \nabla f) \ .
\end{aligned}$$

□

Demonstremos agora a fórmula de Bochner.

Note que: $\nabla f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i \quad \therefore \quad |\nabla f|^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i^2$. Logo,

$$\Delta|\nabla f|^2 = \sum_{i=1}^{n} \Delta(f_i^2) = 2\sum_{i=1}^{n} (f_i \Delta f_i + |\nabla f_i|^2).$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i \Delta f_i + \sum_{i=1}^{n} |\nabla f_i|^2 = Ric(\nabla f, \nabla f) + \sum_{i=1}^{n} f_i(\Delta f)_i + \sum_{i=1}^{n} |\nabla f_i|^2 .$$

Pelo ítem 2, observado no início da prova do lema, temos

$$|\nabla f_i|^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_j \rangle^2$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} |\nabla f_i|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_j \rangle^2 = |Hess f|^2 .$$

Como, $\langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} f_i (\Delta f)_j \, \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} f_i (\Delta f)_i$ obtemos:

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = Ric(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle + |Hess f|^2 .$$

□

3.2 Fórmula de Reilly

Nesta seção consideraremos uma variedade Riemanniana compacta $\overline{M}^{\,n+1}$ com bordo $(\partial\overline{M})^n = M$ e $f : \overline{M} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Indiquemos por $u = \frac{\partial f}{\partial \nu}$, $\varphi = f\mid_M$, onde ν é a normal unitária exterior ao bordo M, por $B(X,Y) = -\langle \alpha(X,Y), \nu\rangle$ a segunda forma fundamental de M em relação a ν e por H o vetor curvatura média de M.

Com estas considerações vale o seguinte teorema:

Teorema 3.2.1 (**R.Reilly**) *Sejam $\overline{M}^{\,n+1}$ uma variedade Riemanniana compacta com bordo M e $f : \overline{M}^{\,n+1} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então,*

$$\int_{\overline{M}} (\overline{\Delta} f)^2 = \int_{\overline{M}} |\overline{D}^{\,2} f|^2 + \int_{\overline{M}} \overline{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \int_M 2u\Delta\varphi + \int_M B(\nabla\varphi, \nabla\varphi) + \int_M nHu^2 \ ,$$

onde as quantidades com barra referem-se a $\overline{M}$ e as sem barra a M, e $\overline{D}^{\,2} f = Hess f$.

Prova: Integrando a fórmula de Bochner, temos

$$\frac{1}{2}\int_{\overline{M}} \overline{\Delta}\ |\nabla f|^2 = \int_{\overline{M}} \langle \nabla f, \overline{\nabla}(\overline{\Delta} f)\rangle + \int_{\overline{M}} |\overline{D}^{\,2} f|^2 + \int_{\overline{M}} Ric(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f)\ . \tag{3.4}$$

Por outro lado, o *teorema de Stokes* implica que:

$$\int_M \frac{\partial f}{\partial \nu}\overline{\Delta} f = \int_M \overline{\Delta} f \langle \overline{\nabla} f, \nu\rangle = \int_M div(\overline{\Delta} f \overline{\nabla} f)\ . \tag{3.5}$$

Como $div(\overline{\Delta} f \overline{\nabla} f) = |\overline{\Delta} f|^2 + \langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla}(\overline{\Delta} f)\rangle$ obtemos, usando (3.5), que

$$\int_{\overline{M}} \langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla}(\overline{\Delta} f)\rangle = \int_M \frac{\partial f}{\partial \nu}\overline{\Delta} f - \int_{\overline{M}} |\overline{\Delta} f|^2\ . \tag{3.6}$$

Novamente, aplicando o *teorema de Stokes*, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\overline{M}} \overline{\Delta}\ |\nabla f|^2 &= \frac{1}{2}\int_{\overline{M}} div(grad\langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f\rangle) \\
&= \frac{1}{2}\int_M \langle grad\langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f\rangle, \nu\rangle \\
&= \frac{1}{2}\int_M \nu\langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f\rangle = \int_M \langle \overline{\nabla}_\nu \nabla f, \overline{\nabla} f\rangle.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Substituindo (3.6) e (3.7) em (3.4) obtemos:

$$\int_{\overline{M}} (\overline{\Delta} f)^2 = \int_{\overline{M}} |\overline{D}^2 f|^2 + \int_{\overline{M}} Ric(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f) + \int_M \Big(\frac{\partial f}{\partial \nu}\,\overline{\Delta} f - \langle \overline{\nabla}_\nu \nabla f, \overline{\nabla} f\rangle\Big). \tag{3.8}$$

Consideremos agora $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1} = \nu\}$ um referencial ortonormal em $\overline{M}$. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \nu}\overline{\Delta} f - \langle \overline{\nabla}_\nu \overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f\rangle &= \frac{\partial f}{\partial e_{n+1}} tr(Hess f) - \langle \overline{\nabla}_\nu \overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f\rangle = \\
&= \frac{\partial f}{\partial e_{n+1}}\Big(\sum_{i=1}^{n+1} Hess f(e_i, e_i)\Big) - \sum_{i=1}^{n+1} \langle \overline{\nabla}_\nu \overline{\nabla} f, f_i e_i\rangle \\
&= f_{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} Hess f(e_i, e_i) - f_i \sum_{i=1}^{n+1} Hess f(e_{n+1}, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big(f_{n+1} Hess f(e_i, e_i) - f_i Hess f(e_{n+1}, e_i)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big(f_n(e_i e_i(f) - \overline{\nabla}_{e_i} e_i(f)) - f_i(e_i e_{n+1}(f) - \overline{\nabla}_{e_i} e_{n+1}(f))\Big)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_{n+1}\Big((e_i e_i(f) - \nabla_{e_i} e_i(f)) - (\overline{\nabla}_{e_i} e_i(f) - \nabla_{e_i} e_i(f))\Big) - \sum_{i=1}^{n} f_i(e_i(u) - \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_{n+1}, \overline{\nabla} f\rangle)\ .$$

Observemos que: $\overline{\nabla}_{e_i} e_i(f) - \nabla_{e_i} e_i(f) = \langle \overline{\nabla} f\ , \overline{\nabla}_{e_i} e_i - \nabla_{e_i} e_i\rangle = f_{n+1}\langle \alpha(e_i, e_i), \nu\rangle\ , \forall i = 1, \ldots, n$. Logo,

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{\partial f}{\partial \nu}\overline{\Delta} f - \langle \overline{\nabla}_\nu \overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f\rangle\Big)_{|M} &= u\Big(\Delta\varphi + nH f_{n+1}\Big) - \sum_{i=1}^{n} f_i u_i + \sum_{i=1}^{n} f_i \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_{n+1}, \overline{\nabla} f\rangle \\
&= u\Delta\varphi + nHu^2 - \langle \nabla\varphi, \nabla u\rangle + \sum_{i,j=1}^{n} f_i f_j \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_{n+1}, e_j\rangle \\
&= u\Delta\varphi + nHu^2 - \langle \nabla\varphi, \nabla u\rangle - \sum_{i,j=1}^{n} f_i f_j \langle \alpha(e_i, e_j), \nu\rangle \\
&= u\Delta\varphi + nHu^2 - \langle \nabla\varphi, \nabla u\rangle + B(\nabla\varphi, \nabla\varphi)\ .
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Agora, integrando (3.9) obtemos,

$$\int_M \Big(\frac{\partial f}{\partial \nu}\overline{\Delta} f - \langle \overline{D}_\nu \overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f\rangle\Big) = \int_M u\Delta\varphi - \int_M \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle + n\int_M Hu^2 + \\ + \int_M B(\nabla\varphi, \nabla\varphi). \tag{3.10}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} 0 = \int_M div(u\nabla\varphi) &= \int_M (u\Delta\varphi + \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle)\ ,\ i.e, \\ \int_M u\Delta\varphi &= -\int_M \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Substituindo agora (3.11) em (3.10) obtem-se,

$$\int_M \Big(\frac{\partial f}{\partial \nu}\overline{\Delta} f - \langle \overline{\nabla}_\nu \overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f\rangle\Big) = \int_M 2u\Delta\varphi + n\int_M Hu^2 + \int_M B(\nabla\varphi, \nabla\varphi). \tag{3.12}$$

Em fim, de (3.12) e (3.8), temos a fórmula de Reilly:

$$\int_{\overline{M}} (\overline{\Delta} f)^2 = \int_{\overline{M}} |\overline{D}^{\,2} f|^2 + \int_{\overline{M}} \overline{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \int_M 2u\Delta\varphi + \int_M B(\nabla\varphi, \nabla\varphi) + \int_M nHu^2\ .$$

$\square$

3.3 Equações de Estrutura em uma Variedade Riemanniana

Nosso objetivo nesta seção é relembrar-mos alguns fatos relativos às formas de conexão em uma variedade Riemanniana associado a um referencial ortonormal local $\{e_i\}_{i=1}^n$. Como aplicação desta ferramenta calcularemos o Laplaciano da norma ao quadrado de um tensor simétrico que satisfaz formalmente às equações de *Codazzi*.

Ressaltamos que alguns resultados comuns no uso do método do referencial móvel não serão demonstrados. O leitor interessado poderá consultar as referências [6] e [14].

Teorema 3.3.1 *Sejam M^n uma variedade Reimanniana e $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $\mathcal{U} \subset M$. Seja $\{\omega_i\}$ o coreferencial associado, i.e, $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$. Então, existem únicas $1-formas$ ω_{ij} em M tais que:*

1. $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$;
2. $d\omega_i = \sum_{k=1}^n \omega_{ik} \wedge \omega_k$.

As $1-$formas ω_{ij} são as formas de conexão de M no referencial $\{e_i\}$.

Definição. 3.3.1 *Dados $X, Y \in \chi(M)$, definimos a derivada covariante de Y em relação a X, por:*

$$D_X Y = \sum_{j=1}^n \Big(dY_j(X) + \sum_{i=1}^n \omega_{ij}(X) Y_i\Big) e_j \ .$$

Observação 3.3.1 *É fácil mostrar que a definição de $D_X Y$ independe de $\{e_i\}$, e satisfaz as condições de Levi-Civita, logo coincide com a conexão Riemanniana de M.*

Note que $\forall k = 1, ..., n,$ tem-se $\omega_{ij}(e_k) = \langle \nabla_{e_k} e_i, e_j \rangle$.

Definição. 3.3.2 *Para cada i, j a $2-$forma $\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum_{k=1}^n \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$, é chamada forma de curvatura de M no referencial $\{e_i\}$.*

Observemos que a partir da definição (3.3.1) e da definição de derivada covariante de $1-$forma diferencial mostra-se que $\Omega_{ij}(e_k, e_l) = -\frac{1}{2} R_{ijkl}$, ou seja, que:

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n R_{ijkl}\ \omega_k \wedge \omega_l \ , \tag{3.13}$$

onde $R_{ijkl} = \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle$ e R é o tensor curvatura de M.

Dada uma função $f \in D(M)$ vamos usar as notações df para indicar a derivada covariante de f e $f_{ij} = Hessf(e_i, e_j)$, onde $Hessf(X,Y) = \langle \nabla_X df, Y \rangle$.

Lema 3.3.1 *Em termos das formas de conexão df e $Hessf$ se escrevem como:*

1. $df = \sum_{i=1}^{n} f_i \omega_i$;

2. $\sum_{j=1}^{n} f_{ij}\omega_j = df_i + \sum_{j=1}^{n} f_j \omega_{ji}$.

Prova: A prova de 1 é imediata. Mostremos então 2. Note que:

$$\begin{aligned} f_{ij} &= e_i e_j(f) - (\nabla_{e_i} e_j)(f) = e_i(df e_j) - df(\nabla_{e_i} e_j) \\ &= e_i(f_j) - df\Big(\sum_{k=1}^{n} \omega_{ik}(e_j)\cdot e_k\Big) \\ &= df_i(e_j) - \sum_{k=1}^{n} f_k \omega_{ik}(e_j) \end{aligned} \tag{3.14}$$

Agora, a afirmação 2 verifica-se pela unicidade dada no Teorema (3.3.1) □

A seguir definiremos a derivada covariante de um p-tensor em M.

Definição. 3.3.3 *Para um tensor T de ordem p em M, e $p-$campos $X_1, \ldots, X_p \in \chi(M)$, definimos a derivada covariante de T na direção do campo Z como o $(p+1)-$tensor dado por:*

$$(\nabla T)(X_1, \ldots, X_p, Z) = Z \cdot T(X_1, \ldots, X_p) - \sum_{i=1}^{n} T(X_1, \ldots, \nabla_Z X_i, \ldots, X_p).$$

Resumindo as equações de estrutura em M são:

$$d\omega_i = \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik} \wedge \omega_k \ , \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \tag{3.15}$$

$$d\omega_{ij} = \Omega_{ij} + \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \ , \tag{3.16}$$

onde, $\Omega_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n} R_{ijkl}\ \omega_k \wedge \omega_l, \quad e \quad R_{ijkl} + R_{ijlk} = 0$.

3.4 Laplaciano da Segunda Forma Fundamental

Seja $\phi = \sum_{i,j=1}^{n} \phi_{ij}\omega_i \otimes \omega_j$ um tensor simétrico em M^n, onde $\{\omega_i\}$ é o coreferencial associado a $\{e_i\}$ como na seção (3.3). A seguir vamos usar as equações de estrutura para calcular o Laplaciano de $|\phi|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \phi_{ij}^2$, mais precisamente provaremos o seguinte teorema:

Teorema 3.4.1 *Se ϕ é um tensor simétrico de ordem 2 em M^n satisfezendo formalmente às equações de Codazzi então,*

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 + \sum_{i,j}^{n} \phi_{ij}(tr\phi)_{ij} - \sum_{i,j,m,k}^{n} \phi_{ij}\phi_{mk}R_{mikj} - \sum_{i,j,m,k}^{n} \phi_{ij}\phi_{im}R_{mkkj} \ , \qquad (3.17)$$

onde $R_{ijkl} = \langle R(e_i,e_j)e_k, e_l\rangle \ \forall i,j,k,l = 1,\dots,n$.

Definição. 3.4.1 *Definimos a primeira derivada covariante de ϕ como o tensor de ordem 3 dado por:*

$$D\phi = \sum_{i,j} D\phi_{ij} \otimes \omega_i \otimes \omega_j \ ,$$

onde $D\phi_{ij} = d\phi_{ij} + \sum_k \phi_{kj}\omega_{ki} + \sum_k \phi_{ik}\omega_{kj}$. Em particular, se ϕ_{ijk} 's são as coordenadas de $D\phi_{ij}$ na base $\{\omega_i\}$, então $d\phi_{ij} + \sum_k \phi_{kj}\omega_{ki} + \sum_k \phi_{ik}\omega_{kj} = \sum_k \phi_{ijk}\omega_k$.

Afirmação 3.4.1 *Considerando o tensor $\nabla\phi$, afirmamos que:*

$$\nabla\phi = D\phi \ ,$$

ou seja, as definições (3.3.3) e (3.4.1) são equivalentes para a derivada covariante de ϕ.

Prova : Usando a definição (3.3.3), temos:

$$\begin{aligned}
(\nabla\phi)(e_i,e_j,e_r) &= e_r\phi(e_i,e_j) - \phi(\nabla_{e_r}e_i,e_j) - \phi(e_i,\nabla_{e_r}e_j) \\
&= e_r\phi_{ij} - \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{kl}\omega_k(\nabla_{e_r}e_i)\omega_l(e_j) - \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{kl}\omega_k(e_i)\omega_l(\nabla_{e_r}e_j) \\
&= d\phi_{ij}(e_r) - \sum_{k=1}^{n} \phi_{kj}\omega_k(\nabla_{e_r}e_i) - \sum_{l=1}^{n} \phi_{il}\omega_l(\nabla_{e_r}e_j) \\
&= d\phi_{ij}(e_r) - \sum_{k=1}^{n} \phi_{kj}\langle\nabla_{e_r}e_i, e_k\rangle - \sum_{k=1}^{n} \phi_{ik}\langle\nabla_{e_r}e_j, e_k\rangle \\
&= d\phi_{ij}(e_r) - \sum_{k=1}^{n} \phi_{kj}\omega_{ik}(e_r) - \sum_{k=1}^{n} \phi_{ik}\omega_{jk}(e_r) \\
&= D\phi_{ij}(e_k) = D\phi(e_k,e_i,e_j) \ . \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

□

Definição. 3.4.2 *Definimos a segunda derivada covariante de ϕ como o tensor de ordem 4 dado por:*

$$D^2\phi = D(D\phi) = \sum_{i,j,k} D\phi_{ijk} \otimes \omega_i \otimes \omega_j \otimes \omega_k \ ,$$

onde $D\phi_{ijk} = d\phi_{ijk} + \sum_m \phi_{mjk}\omega_{mi} + \sum_m \phi_{imk}\omega_{mj} + \sum_m \phi_{ijm}\omega_{mk} = \sum_l \phi_{ijkl}\omega_l$, e os ϕ_{ijkl} 's são as coordenadas de $D\phi_{ijk}$ na base $\{\omega_i\}$.

Afirmação 3.4.2 *Considerando agora o tensor $\psi = \sum\limits_{r,s,t}^{n} \phi_{rst}\omega_r \otimes \omega_s \otimes \omega_t$, temos:*

$$\nabla\psi = D^2\phi$$

Prova: Usando agora a definição (10) para o tensor ψ , temos:

$$\begin{aligned}
(\nabla\psi)(e_i, e_j, e_k, e_l) &= e_l\psi(e_i, e_j, e_k) - \psi(\nabla_{e_l}e_i, e_j, e_k) - \psi(e_i, \nabla_{e_l}e_j, e_k) - \psi(e_i, e_j, \nabla_{e_l}e_k) \\
&= e_l\phi_{ijk} - \sum_{r,s,t}^{n} \phi_{rst}\omega_r(\nabla_{e_l}e_i)\omega_s(e_j)\omega_t(e_k) - \sum_{r,s,t}^{n} \phi_{rst}\omega_r(e_i)\omega_s(\nabla_{e_l}e_j)\omega_t(e_k) \\
&- \sum_{r,s,t}^{n} \phi_{rst}\omega_r(e_i)\omega_s(e_j)\omega_t(\nabla_{e_l}e_k) \\
&= d\phi_{ijk}(e_l) - \sum_{r}^{n} \phi_{rjk}\omega_r(\nabla_{e_l}e_i) - \sum_{s}^{n} \phi_{isk}\omega_s(\nabla_{e_l}e_j) - \sum_{t}^{n} \phi_{ijt}\omega_t(\nabla_{e_l}e_k) \\
&= d\phi_{ijk}(e_l) - \sum_{r}^{n} \phi_{rjk}\langle\nabla_{e_l}e_i, e_r\rangle - \sum_{s}^{n} \phi_{isk}\langle\nabla_{e_l}e_j, e_s\rangle - \\
&- \sum_{t}^{n} \phi_{ijt}\langle\nabla_{e_l}e_k, e_t\rangle \\
&= d\phi_{ijk}(e_l) - \sum_{r}^{n} \phi_{rjk}\omega_{ir}(e_l) - \sum_{s}^{n} \phi_{isk}\omega_{js}(e_l) - \sum_{t}^{n} \phi_{ijt}\omega_{kt}(e_l) \\
&= d\phi_{ijk}(e_l) - \sum_{r}^{n} \phi_{rjk}\omega_{ir}(e_l) - \sum_{r}^{n} \phi_{irk}\omega_{jr}(e_l) - \sum_{r}^{n} \phi_{ijr}\omega_{kr}(e_l) \\
&= D\phi_{ijk}(e_l) = D^2\phi(e_l, e_i, e_j, e_k) \ . \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

□

É claro que $\psi = \nabla\phi$, então na verdade provamos que $\nabla(\nabla\phi) = D^2\phi$.

Afirmação 3.4.3 *Derivando exteriormente $D\phi_{ij}$ e usando a definição de $D\phi_{ijk}$, obtemos:*

$$\sum_{k,l}^{n} \phi_{ijkl}\omega_l \wedge \omega_k = \sum_k \phi_{kj}\Omega_{ki} + \sum_k \phi_{ik}\Omega_{kj} \ . \tag{3.20}$$

Prova: Derivando exteriormente $D\phi_{ij}$, obtemos:

$$\sum_k d\phi_{ijk} \wedge \omega_k + \sum_k d\omega_k = d(d\phi_{ij}) + \sum_k d\phi_{kj} \wedge \omega_{ki} + \sum_k \phi_{kj} d\omega_{ki} + \sum_k d\phi_{ik} \wedge \omega_{kj} + \sum_k \phi_{ik} d\omega_{kj}$$

Usando as equações de $D\phi_{ij}$ e $D\phi_{ijk}$ e distribuindo os somatórios tem-se:

$$\sum_{k,l} \phi_{ijkl}\omega_l \wedge \omega_k - \sum_{k,l} \phi_{ljk}\omega_{li} \wedge \omega_k - \sum_{k,l} \phi_{ilk}\omega_{lj} \wedge \omega_k - \sum_{k,l} \phi_{ijl}\omega_{lk} \wedge \omega_k + \sum_k \phi_{ijk} d\omega_k =$$

$$= \sum_{k,l} \phi_{kjl}\omega_l \wedge \omega_{ki} - \sum_{k,l} \phi_{lj}\omega_{lk} \wedge \omega_{ki} - \sum_{k,l} \phi_{k,l}\omega_{lj} \wedge \omega_{ki} + \sum_k phi_{kj} d\omega_{ki} + \sum_{k,l} phi_{ikl}\omega_l \wedge \omega_{kj} -$$

$$- \sum_{k,l} \phi_{lk}\omega_{li} \wedge \omega_{kj} - \sum_{k,l} \phi_{il}\omega_{lk} \wedge \omega_{kj} + \sum_k \phi_{ik} d\omega_{kj}$$

Trocando convenientemente os índices, algumas parcelas anulam-se e obtemos

$$\sum_{ijkl} \phi_{ijkl}\omega_l \wedge \omega_k - \sum_{k,l} \phi_{ijl}\omega_{lk} \wedge \omega_k + \sum_k \phi_{ijk} d\omega_k = - \sum_{k,l} \phi_{lj}\omega_{lk} \wedge \omega ki - \sum_{k,l} \phi_{kl}\omega_{lj} \wedge \omega_{ki} +$$

$$+ \sum_k \phi_{kj} d\omega_{ki} - \sum_{k,l} \phi_{lk}\omega_{li} \wedge \omega_{kj} - \sum_{k,l} \phi_{il}\omega_{lk} \wedge \omega_{kj} + \sum_k \phi_{ik} d\omega_{kj}$$

$$\therefore \ \sum_{ijkl} \phi_{ijkl}\omega_l \wedge \omega_k - \sum_{k,l} \phi_{ijl}\omega_{lk} \wedge \omega_k + \sum_k \phi_{ijk} d\omega_k = - \sum_{k,l} \phi_{lj}\omega_{lk} \wedge \omega_{ki} + \sum_k \phi_{kj} d\omega_{ki} -$$

$$- \sum_{k,l} \phi_{il}\omega_{lk} \wedge \omega_{kj} + \sum_k \phi_{ik} d\omega_{kj}$$

$$\therefore \ \sum_{ijkl} \phi_{ijkl}\omega_l \wedge \omega_k = \sum_l \phi_{lj}\Big(\Omega_{li} - d\omega_{li}\Big) + \sum_k \phi_{kj} d\omega_{ki} + \sum_l \phi_{il}\Big(\Omega_{lj} - d\omega_{lj}\Big) + \sum_k \phi_{ik} d\omega_{kj}$$

Daí segue-se a igualdade (3.20) . □

Como consequência imediata de (3.4.3) obtemos a seguinte expressão:

$$\phi_{ijkl} - \phi_{ijlk} = - \sum_{m=1}^{n} \phi_{mj} R_{milk} - \sum_{m=1}^{n} \phi_{im} R_{mjlk} \ . \tag{3.21}$$

Definição. 3.4.3 *Definimos o Laplaciano do tensor ϕ como o tensor, de mesma ordem, dado por:*

$$\Delta\phi = \sum_{i,j}(\Delta\phi)_{ij}\omega_i \otimes \omega_j \ ,$$

onde $(\Delta\phi)_{ij} := \sum_k \phi_{ijkk}$.

Observação 3.4.1 *Usaremos a seguinte notação:* $(\Delta\phi)_{ij} := \Delta\phi_{ij}$.

Prova do Teorema (3.4.1): No referencial $\{e_i\}$ temos que: $\Delta\phi_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \phi_{ijkk}$. Logo,

$$\Delta\phi_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(\phi_{ijkk} - \phi_{ikjk}) + \sum_{k=1}^{n}(\phi_{ikjk} - \phi_{ikkj}) + \sum_{k=1}^{n}(\phi_{ikkj} - \phi_{kkij}) + \Big(\sum_{k=1}^{n}\phi_{kk}\Big)_{ij} \tag{3.22}$$

Usando (3.21) em (3.22) tem-se:

$$\Delta\phi_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(\phi_{ijkk} - \phi_{ikjk}) + \sum_{k=1}^{n}(\phi_{ikkj} - \phi_{kkij}) + \Big(\sum_{k=1}^{n}\phi_{kk}\Big)_{ij} - \sum_{m,k}^{n}\phi_{mk}R_{mikj} - \\ - \sum_{m,k}^{n}\phi_{im}R_{mkkj} \, . \tag{3.23}$$

Para tensores ϕ_{ij} satisfazendo a "equação de Codazzi", $\phi_{ijk} = \phi_{ikj}$, temos:

1. $\phi_{kik} = \phi_{kki}$;
2. $\phi_{ij} = \phi_{ji} \ \Rightarrow \ \phi_{ijk} = \phi_{jik} \ \Rightarrow \ \phi_{ikk} = \phi_{kik} = \phi_{kki}$;

Logo, as duas primeiras parcelas de (3.23) anulam-se e,

$$\Delta\phi_{ij} = \Big(\sum_{k=1}^{n}\phi_{kk}\Big)_{ij} - \sum_{m,k}^{n}\phi_{mk}R_{mikj} - \sum_{m,k}^{n}\phi_{im}R_{mkkj} \, . \tag{3.24}$$

Por outro lado temos que:

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = \frac{1}{2}\Delta\Big(\sum_{i,j}^{n}\phi_{ij}^2\Big) = \sum_{i,j}^{n}\frac{1}{2}\Delta\phi_{ij}^2 = \sum_{i,j}^{n}\phi_{ij}\Delta\phi_{ij} + \sum_{i,j}^{n}|d\phi_{ij}|^2 \, . \tag{3.25}$$

Sejam $|\phi|^2 = \sum_{i,j}^{n}\phi_{ij}^2$, $tr\phi = \sum_i \phi_{ii}$ e $|\nabla\phi|^2 = \sum_{i,j}^{n}|d\phi_{ij}|^2$. Usando (3.24), (3.25) implica que:

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 + \sum_{i,j}^{n}\phi_{ij}(tr\phi)_{ij} - \sum_{i,j,m,k}^{n}\phi_{ij}\phi_{mk}R_{mikj} - \sum_{i,j,m,k}^{n}\phi_{ij}\phi_{im}R_{mkkj} \tag{3.26}$$

$\square$

Corolário 3.4.1 *Considerando um referencial ortonomal $\{e_i\}$ tal que $\phi_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ então,*

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 + \sum_i \lambda_i (tr\phi)_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2 . \tag{3.27}$$

Prova: Usando o fato que $\phi_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, em (3.27) obtemos

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 + \sum_i \lambda_i (tr\phi)_{ii} - \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j R_{jiji} - \sum_{i,j} \lambda_i^2 R_{ijji} . \tag{3.28}$$

Usando agora em (3.28) o fato que $R_{jiji} = R_{ijij}$ e $R_{ijji} = -R_{ijij}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 &= |\nabla\phi|^2 + \sum_i \lambda_i (tr\phi)_{ii} - \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j R_{ijij} + \sum_{i,j} \lambda_i^2 R_{ijij} \\ &= |\nabla\phi|^2 + \sum_i \lambda_i (tr\phi)_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2 . \end{aligned}$$

□

Como aplicação do teorema anterior podemos considerar a seguinte situação:

Sejam $\varphi : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana M na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ e $p \in M$ qualquer. Seja ξ um campo unitário normal ao longo de φ e considere a aplicação linear

$$\tilde{\phi} : T_pM \to T_pM \quad ; \tilde{\phi}X = AX - HX ,$$

onde $A : T_pM \to T_pM$ é a aplicação auto-adjunta associada a segunda forma fundamental de φ . Seja $\{e_i\}$ uma base ortonormal de T_pM tal que $A \cdot e_i = \lambda_i e_i$. É fácil ver que $tr\tilde{\phi} = 0$ e $\tilde{\phi}e_i = \mu_i e_i$, onde $\mu_i = \lambda_i - H$, além disso, para, $i, j = 1, \ldots, n$ temos

$$|\tilde{\phi}|^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i,j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 . \tag{3.29}$$

Na situação acima o corolário a seguir exprime o Laplaciano da norma ao quadrado de $\tilde{\phi}$.

Corolário 3.4.2 *Considerando o tensor $\phi : TM \times TM \to \mathbb{R}$ dado por $\phi(X,Y) = \langle \tilde{\phi}X, Y\rangle$ temos,*

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 - |\phi|^4 + n|\phi|^2 + nH^2|\phi|^2 - nH\sum_i \mu_i^3 \,. \tag{3.30}$$

Prova: Escrevendo o tensor $\phi = \sum_{i,j}\phi_{ij}\omega_i \otimes \omega_j$, tem-se $\phi_{ij} = \mu_i\delta_{ij}$. Logo pelo que vimos em (3.27) temos,

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 + \sum_i \mu_i(tr\phi)_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\mu_i - \mu_j)^2 \,. \tag{3.31}$$

Pela fórmula de Gauss $R_{ijij} = 1 + \mu_i\mu_j - H(\mu_i + \mu_j) + H^2$. Como $tr\phi = 0$ substituindo esta última igualdade na igualdade de *K. Nomizu* e *B. Smyth*, veja [11], dada por

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}(1 + \mu_i\mu_j)(\mu_i - \mu_j)^2 = n\sum_i \mu_i^2 - (\sum_i \mu_i^2)^2 \tag{3.32}$$

obtemos,

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}(R_{ijij} + H(\mu_i + \mu_j) - H^2)(\mu_i - \mu_j)^2 = n\sum_i \mu_i^2 - \Big(\sum_i \mu_i^2\Big)^2 .$$

Donde conclui-se que

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\mu_i - \mu_j)^2 = n|\phi|^2 - |\phi|^4 + nH^2|\phi|^2 - \frac{1}{2}H\sum_{i,j}(\mu_i + \mu_j)(\mu_i - \mu_j)^2 \,. \tag{3.33}$$

Uma vez que $tr\phi = 0$, é fácil ver que $\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\mu_i + \mu_j)(\mu_i - \mu_j)^2 = n\sum_i \mu_i^3$.
Substituindo agora esta última igualdade e (3.33) em (3.31) segue-se a prova do corolário.

□

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo apresentamos algumas aplicações das fórmulas de *Bochner* e de *R. Reilly* objetivando estimar o primeiro autovalor do Laplaciano de uma subvariedade mínima M^n da esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+p}$, dada por uma imersão $\varphi : M^n \to \mathbb{S}^{n+p}$. Convém observar que pelo Teorema (2.2.1), $\Delta\varphi + n\varphi = 0$. Logo n está no espectro de Δ e espera-se que, de fato, n seja o primeiro autovalor de Δ. O primeiro resultado global nesta direção é devido a H.I Choi e A.N Wang que afirma ser $\lambda_1 \geq \frac{n}{2}$, no caso de $p = 1$, M^n compacta e φ um mergulho mínimo.

Inicialmente, considerando essa situção, demonstraremos o teorema de A. Barros e G.P Bessa que melhora a estimativa dada por H.I Choi e A.N Wang. Sabemos que $\varphi(M)$ divide $\mathbb{S}^{n+1}$ em duas componentes conexas, digamos Ω_1 e Ω_2, tais que:

$$\partial\Omega_1 = \partial\Omega_2 = M \ .$$

Seja $f \in D(\Omega_1)$ uma solução do seguinte Preblema de *Dirichlet*:

$$\begin{cases} \overline{\Delta} f = 0 & \text{em } \Omega_1 \\ f \ = \varphi_1 & \text{em } M \ , \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $\overline{\Delta} f$ é o Laplaciano de f com respeito à métrica de Ω_1 e φ_1 é uma primeira autofunção de M^n, i.e, $\Delta\varphi_1 + \lambda_1\varphi_1 = 0$. Aqui, $\Delta\varphi_1$ indica o Laplaciano de φ_1 com relação à métrica Riemanniana induzida em $\varphi(M^n)$. Sem perda nenhuma de generalidade podemos supor que:

$$\int_M B(\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_1) \geq 0 \ ,$$

onde B é a segunda forma fundamental do mergulho e $\nabla\varphi_1$ é o gradiente de φ_1 na métrica induzida em M^n, para isto invertemos a orientação se necessário.

Com estas considerações temos o seguinte teorema:

4.1 Estimativas do Primeiro Autovalor do Laplaciano

Teorema 4.1.1 *Seja f a solução do problema de Dirichlet (4.1). Considere o seguinte polinômio em t,*

$$P(t) = (2\lambda_1 - n)\|\overline{\nabla} f\|_2^2\, t^2 + 2\lambda_1\|f\|_2^2\, t + \frac{n}{n+1}\|f\|_2^2\,. \tag{4.2}$$

Então $P(t) \geq 0 \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$, onde $\|\ \|_2$ é a norma L^2 em Ω_1.

Como $P(t) \geq 0$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$ seu discriminante é não-positivo. Então, obtemos o seguinte corolário:

Corolário 4.1.1 *Sejam M^n uma hipersuperfície orientável mergulhada minimamente em $\mathbb{S}^{n+1}$ e λ_1 o primeiro autovalor não-nulo do Laplaciano de M^n. Seja f a solução do problema (4.1). Então,*

$$(2\lambda_1 - n) \geq \frac{(n+1)}{n}\lambda_1^2\frac{1}{R(f)}\,, \tag{4.3}$$

onde $R(f) = \frac{\|\overline{\nabla} f\|_2^2}{\|f\|_2^2}$ é o quociente de Rayleigh. Em particular,

$$\|\overline{\nabla} f\|_2^2 \geq (n+1)\|f\|_2^2\,. \tag{4.4}$$

Prova do Teorema(4.1.1): Se $t = 0$ não há o que fazer. Para $t \neq 0$, consideramos o problema de *Dirichlet*:

$$\begin{cases} \overline{\Delta} g = f\,, & \text{em } \Omega_1 \\ g = t\varphi_1\,, & \text{em } M^n \end{cases} \tag{4.5}$$

Aplicando a fórmula de *Green* obtemos:

$$\begin{cases} \int_M \varphi_1 \frac{\partial f}{\partial \nu} &= \int_{\Omega_1} |\overline{\nabla} f|^2 \\ t\int_M \varphi_1 \frac{\partial f}{\partial \nu} &= \int_{\Omega_1} \langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla} g\rangle \\ \int_M \varphi_1 \frac{\partial g}{\partial \nu} &= \int_M f^2 + \int_M \langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla} g\rangle\,. \end{cases} \tag{4.6}$$

Segue-se diretamente de (4.6) e da desigualdade de *Cauchy – Schawarz* que:

$$t\int_M \varphi_1 \frac{\partial g}{\partial \nu} = t\int_{\Omega_1} f^2 + t^2\int_{\Omega_1} |\overline{\nabla} f|^2 \tag{4.7}$$

$$\int_{\Omega_1} |\overline{\nabla} g|^2 \geq t^2\int_{\Omega_1} |\overline{\nabla} f|^2\,. \tag{4.8}$$

Agora aplicando a fórmula de Reilly a g, usando o fato que $|\overline{D}^2 g|^2 \geq \frac{1}{n+1}(\overline{\Delta} g)^2$ e a hipótese que

$$\int_M B(\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_1) \geq 0 \ ,$$

temos:

$$\frac{n}{n+1}\int_{\Omega_1} (\overline{\Delta} g)^2 \geq n\int_{\Omega_1} |\overline{\nabla} g|^2 + \int_M 2\frac{\partial g}{\partial \nu}(\Delta g) \ . \tag{4.9}$$

Levando em conta que $\overline{\Delta} g = f$ em Ω_1 , $g = t\varphi_1$ em M^n e usando as relações (4.7) e (4.8) obtemos a partir de (4.6) a seguinte desigualdade:

$$\frac{n}{n+1}\int_{\Omega_1} f^2 \geq nt^2 \int_{\Omega_1} |\overline{\nabla} f|^2 - 2\lambda_1\Big[t\int_{\Omega_1} f^2 + t^2\int_{\Omega_1} |\overline{\nabla} f|^2\Big] \ . \tag{4.10}$$

Donde conclui-se que:

$$(2\lambda_1 - n)\|\overline{\nabla} f\|_2^2 t^2 + 2\lambda_1\|f\|_2^2 t + \frac{n}{n+1}\|f\|_2^2 \geq 0 \ . \tag{4.11}$$

Mas isso é exatamente o que nós queríamos. □

Prova do Coralário 3: Como $P(t) \geq 0$, segue-se que seu discriminante é não-positivo. É fácil ver que isso implica na desigualdade (4.3). A outra desigualdade segue-se diretamente de (4.3), considerando que $\lambda_1 \geq \frac{n}{2}$ e $n \geq 2$.

Teorema 4.1.2 *Seja* $\varphi : M^n \to \mathbb{S}^{n+m}$ *uma imersão mínima de uma variedade Riemanniana* M^n *compacta na esfera Euclidiana e* f *a primeira auto-função do Laplaciano de* M^n. *Se* $\{e_i\}_{i=1}^{n+m}$ *é um referencial ortonormal em* $\mathbb{S}^{n+m}$ *tal que* $\{e_i\}$ *é tangente a* M^n *e* $\{e_\beta\}$ *é normal a* M^n, *então,*

$$\int_M \sum_{i=1}^{n} |\alpha(\nabla f, e_i)|^2 + \int_M |\nabla f|^2 \geq \int_M |Hessf|^2 \ ,$$

ocorrendo a igualdade se, e somente, se $\lambda_1 = n$. *Além disso, se*

$$\int_M |Hessf|^2 \geq \int_M \sum_{i=1}^{n} |\alpha(\nabla f, e_i)|^2 \ ,$$

então $\lambda_1 \geq n - 1$.

Antes precisamos demonstrar o seguinte lema:

Lema 4.1.1 *Nas condições do teorema vale a seguinte igualdade:*

$$(n - \lambda_1) \int_M |\nabla f|^2 = \int_M \sum_{i=1}^{n} |\alpha(\nabla f, e_i)|^2 + \int_M |\nabla f|^2 - \int_M |Hessf|^2 \ .$$

Prova: No referencial $\{e_1, \ldots, e_{n+p}\}$ a equação de *Gauss* é dada por:

$$R_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} + \sum_{\beta=1}^{p} (h_{ik}^{\beta} h_{jl}^{\beta} - h_{il}^{\beta} h_{jk}^{\beta}) \ , \tag{4.12}$$

onde $h_{ij}^{\beta} = \langle \alpha(e_i, e_j), e_\beta \rangle \ \forall \ i, j = 1, \ldots, n$ e R é o tensor curvatura de M e R_{ijkl} as componentes de R neste referencial.
Usando a equação (4.12) e a minimalidade de φ obtemos:

$$Ric(e_i, e_j) = (n-1)\delta_{ij} - \sum_{\beta=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} h_{ik}^{\beta} h_{kj}^{\beta} \ . \tag{4.13}$$

Donde conclui-se que:

$$Ric(f_i e_i, f_j e_j) = (n-1)\delta_{ij} f_i f_j - \sum_{\beta=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} h_{ik}^{\beta} h_{kj}^{\beta} f_i f_j \ . \tag{4.14}$$

Aplicando o somatório na equação (4.14) nos índices i e j obtemos,

$$Ric(\nabla f, \nabla f) = (n-1)|\nabla f|^2 - \sum_{k}^{n} |\alpha(\nabla f, e_k)|^2. \tag{4.15}$$

Substituindo (4.15) na fórmula de *Bochner* e usando a hipótese que $\Delta f = -\lambda_1 f$ obtem-se:

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |Hessf|^2 + (n-1)|\nabla f|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\alpha(\nabla f, e_i)|^2 - \lambda_1|\nabla f|^2. \tag{4.16}$$

Integrando esta relação e usando o Teorema de *Stokes* segue-se o lema. □

Para a prova do Teorema (4.1.2) usamos o teorema de *T. Takahashi* que diz ser $\lambda_1 \leq n$. Logo o lado esquerdo da igualdade do lema é não-negativo. Portanto,

$$\int_M \sum_{i=1}^{n} |\alpha(\nabla f, e_i)|^2 + \int_M |\nabla f|^2 \leq \int_M |Hessf|^2 ,$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $\lambda_1 = n$. Além disso, se

$$\int_M |Hessf|^2 \geq \int_m \sum_{i=1}^{n} |\alpha(\nabla f, e_i)|^2 ,$$

então $\lambda_1 \geq n-1$. □

Corolário 4.1.2 *Nas condições do Teorema (4.1.2) temos:*

$$\int_M \sum_{i=1}^{n} |\alpha(\nabla f, e_i)|^2 \geq \frac{(n-\lambda_1)(n-1)}{n} \int_M |\nabla f|^2 .$$

Teorema 4.1.3 *Sejam $\varphi : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica e $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial geodésico em uma vizinhança $\mathcal{U} \subset M$. Seja $N \in \chi(\varphi(\mathcal{U})) \approx \chi(\mathcal{U})$ tal que $\langle N, N\rangle = 1$. Então*

$$\Delta N = nH \cdot \varphi - n\nabla H - S \cdot N \tag{4.17}$$

Prova: Por hipótese $\{\varphi, e_1, \ldots, e_n, N\}$ forma uma base ortonormal para $\mathbb{R}^{n+2}$ em $\varphi(\mathcal{U})$. Portando, $\forall\ i = 1, \ldots, n$ podemos escrever:

$$\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}N = a_i\varphi + \sum_j b_{ij}e_j + c_iN \ ,$$

onde $\overline{\nabla}$ denota a conexão de $\mathbb{S}^{n+1}$. Observemos que:

a) $\langle N, \varphi\rangle = 0 \ \Rightarrow\ \langle\overline{\nabla}_{e_i}N, \varphi\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_{e_i}\varphi\rangle = 0 \ \therefore\ \langle\overline{\nabla}_{e_i}N, \varphi\rangle = 0$. Logo,

$$a_i = \langle\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}N, \varphi\rangle = -\langle\overline{\nabla}_{e_i}N, e_i\rangle = B(e_i, e_i), \ \ pois \ \ -\overline{\nabla}_{e_i}N = A_Ne_i \ ;$$

b) $\langle N, N\rangle = 1 \Rightarrow\ e_i\langle N, N\rangle = 0 \ \therefore\ \langle\overline{\nabla}_{e_i}N, N\rangle = 0$. Logo,

$$c_i = \langle\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}N, N\rangle = -\langle\overline{\nabla}_{e_i}N, \overline{\nabla}_{e_i}N\rangle;$$

c) $\langle N, e_j\rangle = 0 \Rightarrow \langle\overline{\nabla}_{e_i}N, e_j\rangle = -\langle N, \overline{\nabla}_{e_i}e_j\rangle$. Logo,

$$\overline{\nabla}_{e_i}N = -\sum_j B(e_i, e_j)e_j \ , \quad donde \ \ c_i = -\sum_j |B(e_i, e_j)|^2 \ ;$$

d) De $\langle\overline{\nabla}_{e_i}N, e_j\rangle = -\langle N, \overline{\nabla}_{e_i}e_j\rangle$ temos, $\langle\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}N, e_j\rangle = -2\langle\overline{\nabla}_{e_i}N, \overline{\nabla}_{e_i}e_j\rangle - \langle N, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}e_j\rangle$. Como $\overline{\nabla}_{e_i}N \in \chi(\mathcal{U})$ e o referencial é geodésico, $\langle\overline{\nabla}_{e_i}N, \overline{\nabla}_{e_i}e_j\rangle = 0$. Além disso, como $[e_i, e_j] = 0$ e $\overline{R}(e_i, e_j)e_i = 0$ temos $\overline{\nabla}_{e_i}e_j = \overline{\nabla}_{e_j}e_i$ e $\overline{\nabla}_{e_j}\overline{\nabla}_{e_i}e_i = \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}e_i$. Logo,

$$b_{ij} = -\langle N, \overline{\nabla}_{e_j}\overline{\nabla}_{e_i}e_i\rangle \ .$$

e) Mas $\overline{\nabla}_{e_i}e_i = \alpha(e_i.e_i) = B(e_i, e_i)N$, portanto $b_{ij} = \langle\nabla B(e_i, e_i), e_j\rangle$.

Das observações acima concluímos que:

$$\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}N = B(e_i, e_i)\varphi - \sum_j\langle\nabla B(e_i, e_i), e_j\rangle e_j - \sum_j |B(e_i, e_j)|^2N \ .$$

Pela observação (2.1.2), temos:
$\Delta N = \sum_i B(e_i, e_i)\varphi - \sum_{i,j}\langle\nabla B(e_i, e_i), e_j\rangle e_j - \sum_{i,j}|B(e_i, e_j)|^2N$. Portanto,

$$\Delta N = nH\varphi - n\nabla H - SN \ .$$

□

Corolário 4.1.3 *Se φ é mínima então, $\Delta N = -SN$.*

Corolário 4.1.4 *Sejam $N_1, \ldots, N_{n+2}$ as funções coordenadas de N. Então supondo ainda φ mínima as seguintes afirmações se verificam,*

1. $\frac{1}{2}\Delta S = S(n-S) - S + \sum_i |HessN_i|^2 - \sum_{i,j} |B(\nabla N_i, e_j)|^2$;

2. $|\nabla B|^2 = \sum_i |HessN_i|^2 - (S + \sum_{i,j} |B(\nabla N_i, e_j)|^2)$;

onde $i = 1, \ldots, n+2$ e $j = 1, \ldots, n$.
Prova: Inicialmente temos que: $\frac{1}{2}\Delta N_i^2 = N_i \Delta N_i + |\overline{\nabla} N_i|^2 = -SN_i^2 + |\overline{\nabla} N_i|^2$. Logo,

$$\frac{1}{2}\Delta \sum_i N_i^2 = -S \sum_i N_i^2 + \sum_i |\overline{\nabla} N_i|^2 \quad \therefore \quad S = \sum_i |\overline{\nabla} N_i|^2 .$$

Pela fórmula de Bochner temos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta |\overline{\nabla} N_i|^2 &= Ric(\overline{\nabla} N_i, \overline{\nabla} N_i) - S|\overline{\nabla} N_i|^2 + |HessN_i|^2 \\
&= (n-1)|\overline{\nabla} N_i|^2 - \sum_j |B(\overline{\nabla} N_i, e_j)|^2 - S|\overline{\nabla} N_i|^2 + |HessN_i|^2 .
\end{aligned}$$

Logo, $\frac{1}{2}\Delta S = (n-1)S - \sum_{i,j} |B(\overline{\nabla} N_i, e_j)|^2 - S^2 + \sum_i |HessN_i|^2$. Daí segue-se o ítem 1.
Quanto ao ítem 2, sabemos pela igualdade (3.31) que

$$\frac{1}{2}\Delta S = S(n-S) + |\overline{\nabla} B|^2 . \tag{4.18}$$

Portanto o resultado segue-se subtraindo (4.18) da igualdade do ítem 1. □

Capítulo 5

Estimativas da Curvatura de Ricci de Subvariedades Mínimas da Esfera

Neste capítulo dedicaremos nossa atenção para provarmos dois teoremas devido a P.F. Leung.

Teorema 5.0.4 *Seja $\varphi : M^n \to \mathbb{S}^{n+m}$ uma imersão mínima. Então para quaisquer $p \in M$, e todo $v \in T_pM$, $\| v \|= 1$ tem-se,*

$$Ric(v) \geq \frac{n-1}{n}(n-S),$$

onde S é o quadrado da norma da segunda forma fundamental de φ.

*P*ara demonstração deste teorema precisamos do seguinte lema,

Lema 5.0.2 *Seja V um espaço vetorial de dimensão $n \geq 2$. Seja $A : V \to V$ um operador linear simétrico tal que $trA = 0$. Se $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$ são os autovalores de A então, $\forall v \in V$ com $\| v \|= 1$ temos,*

$$\langle A^2v, v\rangle \leq \Big(\frac{n-1}{n}\Big)(trA^2) \ .$$

Prova : Seja $\{v_i\}_{i=1}^n$ uma base ortonormal de V tal que $Av_i = \lambda_i v_i$. Então, $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ e $\langle A^2v, v\rangle = \sum_i a_i^2\lambda_i^2$. Tomando $\lambda_j = max\{\lambda_i;\ i = 1, ..., n\}$, temos pela desigualdade de $Cauchy - Schwarz$ que $\lambda_j^2 \leq \Big(\frac{n-1}{n}\Big) trA^2$, consequentemente temos,

$$\langle A^2v, v\rangle \leq \lambda_j^2 \leq \Big(\frac{n-1}{n}\Big) trA^2,$$

e isto prova o lema. □

Prova do Teorema (5.0.4): Sejam $p \in M$ e $v \in T_pM$ com $\| v \|= 1$. Da equação (2.13) temos,

$$Ric(v) = \sum_\alpha (trA_\alpha)\langle A_\alpha v, v\rangle - \sum_\alpha \langle A_\alpha^2 v, v\rangle + (n-1)\ .$$

Mas, φ é mínima, logo $trA_\alpha = 0$, $\forall\alpha = 1, ..., m$. Portanto usando o lema acima para cada aplicação A_α obtemos,

$$Ric(v) \geq -\sum_\alpha \Big(\frac{n-1}{n}\Big)(trA_\alpha^2) + (n-1)\ .$$

Como $S = \sum_\alpha (trA_\alpha^2)$, segue-se o teorema. □

Corolário 5.0.5 *Seja $\varphi : M^n \to \mathbb{S}^{n+m}$ uma imersão mínima. Se M^n é compacta e $S < n$, então $\pi_1(M)$ é finito.*

Prova : Segue-se do Teorema (5.0.4) que se M é compacta e $S < n$, então $Ric(M) \geq c > 0$. Logo, pelo teorema de $Bonnet - Myers$ seu recobrimento universal $\tilde{M}$ é compacto e, portanto, o grupo fundamental $\pi_1(M)$ é finito. □

Corolário 5.0.6 *Seja M^n uma variedade Riemanniana, $n \geq 2$, com curvatura seccional constante $K(M) = a > 1$. Então, M^n não pode ser imersa minimamente numa esfera $\mathbb{S}^{n+p}$.*

Prova : Com efeito, se isso fosse verdade então pelo exemplo 5.3, veja apêndice, teríamos

$$S = (n-1)n - a(n-1)n = n(n-1)(1-a)\ ,$$

já que nesse caso $Ric(M) = (n-1)a$. Daí seguiria que,

$$\frac{(n-1)}{n}(n-S) = (n-1)\Big(1 + (n-1)(a-1)\Big).$$

Por outro lado, o Teorema (5.0.4) implicaria em

$$(n-1)a \geq (n-1)\Big(1 + (n-1)(a-1)\Big).$$

Donde concluiríamos que $a \leq 1$, contradizendo a hipótese. □

Teorema 5.0.5 *Seja M^n uma subvariedade mínima fechada em $\mathbb{S}^N$. Seja f uma autofunção em M^n associado ao autovalor não-nulo λ, então*

$$\int_M (\lambda + S - n)|\nabla f|^2 dV \geq 0 \ ,$$

onde dV é o elemento de volume em M. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente, se, ou M é totalmente geodésica e λ é o primeiro autovalor não-nulo, se $n \geq 3$, ou M é isométrica a $\mathbb{S}^2\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\right)$ e λ é o primeiro autovalor não-nulo se $n = 2$.

Prova: Uma vez que

$$|Hessf|^2 \geq \frac{\lambda^2}{n} f^2 \tag{5.1}$$

obtemos,

$$\int_M |Hessf|^2 \geq \frac{\lambda^2}{n} \int_M f^2 = \frac{\lambda}{n} \int_M |\nabla f|^2. \tag{5.2}$$

Integrando a fórmula de *Bochner* sobre M^n e usando (5.2) junto com $\Delta f = -\lambda f$ obtemos

$$0 \geq \int_M Ric(\nabla f, \nabla f) + \int_M \frac{\lambda}{n} |\nabla f|^2 - \int_M \lambda |\nabla f|^2. \tag{5.3}$$

Aplicando a estimativa dada no Teorema (5.0.4) para a curvatura de *Ricci* em (5.3) obtemos a desigualdade procurada. Analisemos agora o caso em que a igualdade ocorre.

Obviamente se M é totalmente geodésica e λ é o primeiro autovalor de M, i.e, $S = 0$ e $\lambda = \lambda_1$, a igualdade ocorre. Recíprocamente, se ocorre a igualdade então, a partir da estimativa dada em (5.2) concluímos que

$$Hessf = \frac{-\lambda}{n} f I_n \ ,$$

onde I_n é a matriz identidade $n \times n$. Portanto pelo teorema de *M.Obata* [12], M é isométrica a esfera $\mathbb{S}^n\left(\sqrt{\frac{n}{\lambda}}\right)$ e portanto S é constante. Na realidade pela equação de *Gauss* temos,

$$S = n(n-1) - n(n-1)\frac{\lambda}{n} \ .$$

Logo, se a igualdade ocorre então

$$\lambda + n(n-1) - n(n-1)\frac{\lambda}{n} - n = 0 \ \ i.e \ \ (n-2)(n-\lambda) = 0 \tag{5.4}$$

Se $n \geq 3$, então $\lambda = n$ e $M \equiv \mathbb{S}^n(1)$ $\therefore$ M é totalmente geodésica e λ é o primeiro autovalor não-nulo. Por outro lado, se $n = 2$ temos uma imersão mínima de $M \equiv \mathbb{S}^2(\sqrt{\frac{2}{\lambda}})$ em $\mathbb{S}^N$. Se além disso, M não é totalmente geodésica então, $S = 2 - \lambda$ e $\lambda + S - n = \lambda + 2 - \lambda - n = 0$ e, portanto, ocorre a igualdade. $\square$

Corolário 5.0.7 *Seja M^n uma subvariedade fechada mínima em $\mathbb{S}^N$ com S constante. Então,*

$$S \geq n - \lambda_1 \ ,$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor do Laplaciano em M^n.

Capítulo 6

Apêndice

6.1 Exemplos

Exemplo 6.1.1 *Se M^n é uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante $K_\sigma = c$, então*

$$Ric(M) = (n-1)c\ .$$

Prova: Com efeito, dado $p \in M^n$ qualquer, tomamos $v \in T_pM$, $\|v\| = 1$ e $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ uma base ortonormal do hiperplano ortogonal a v. Assim,

$$Ric_p(v) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(v, e_i)v, e_i \rangle\ .$$

Mas, por hipótese em cada secção $\sigma_i = span(v, e_i)$ temos $K_{\sigma_i} = c$. Logo,

$$\langle R(v, e_i)v, e_i \rangle = c\|v \wedge e_i\|^2 = c\ .$$

Daí, concluímos que $Ric_p(v) = (n-1)c\ \forall p \in M^n$, e portanto, $Ric(M) = (n-1)c$. $\square$

Exemplo 6.1.2 *Sejam $f \in D(M)$ qualquer e λ um autovalor para o Laplaciano de f. Então,*

$$|Hessf|^2 \geq \frac{\lambda^2}{n} f^2\ .$$

Prova: Por definição $|Hessf|^2 = \sum_{i,j}(f_{ij})^2$. Então, $|Hessf|^2 \geq \sum_i (f_{ii})^2$.
Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos $\Big(\sum_i f_{ii}\Big)^2 \leq n \sum_i (f_{ii})^2$. Logo,

$$|Hessf|^2 \geq \frac{1}{n}\Big(\sum_i f_{ii}\Big)^2 = \frac{1}{n}\Big(\Delta f\Big)^2 = \frac{\lambda^2}{n} f^2\ .$$

$\square$

Exemplo 6.1.3 *Considere a esfera Euclidiana* $M = \mathbb{S}^n(r)$ *de raio* r. *Então, o tensor curvatura de* M^n *é dado por,*

$$R_{\mathbb{S}^n(r)}(X,Y)Z = \frac{1}{r^2}\Big(\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X\Big)\ ,$$

onde $X,Y,Z \in TM$. *Em particular tem-se,* $Ric(\mathbb{S}^n(r)) = (n-1)\frac{1}{r^2}$ *e* $K_\sigma(\mathbb{S}^n(r)) = \frac{1}{r^2}$.

Prova: Considere a imersão $\varphi : \mathbb{S}^n(r) \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada por $\varphi(p) = p$. Para cada $q \in \mathbb{S}^n(r)$ defina o campo unitário normal a $\mathbb{S}^n(r)$, $N : \mathbb{S}^n(r) \to S^n(1)$; $N(q) = \frac{q}{r}$. Sabemos que a aplicação linear associada a segunda forma fundamental de φ é dada por

$$A_N(X) = -(\overline{\nabla}_X N)^T = -dN(X),$$

$\forall X \in TM$. Se $\alpha : I \to \mathbb{S}^n(r)$ é uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = q$ e $\alpha'(0) = X_q$, então

$$A_N(X_q) = -\frac{d}{dt}(N\alpha)_{t=0} = -\frac{X_q}{r}\ ,$$

$\forall q \in M$. Isto é, $A_N(X) = -\frac{X}{r}$. Agora usando a equação da Gauss e o fato que $\overline{R}_{\mathbb{R}^{n+1}} = 0$ chegaremos a

$$\langle R_{\mathbb{S}(r)}(X,Y)Z,T\rangle = \frac{1}{r^2}\Big(\langle\ \langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X, T\ \rangle\Big)\ ,$$

$\forall X,Y,Z,T \in TM$. Donde segue-se o resultado. $\square$

Exemplo 6.1.4 *Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}_c^{n+p}$ uma imersão mínima de uma variedade Riemanniana M^n em uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante igual a c. Se S denota o quadrado da norma da segunda forma fundamental de φ então,*

$$S = c(n-1)n - \sum_i Ric(e_i, e_i) \ ,$$

onde $\{e_i\}_{i=1}^n$ é um referencial ortonormal em M^n. Em partiacular, se a curvatura seccional de M^n é constante igual a k então,

$$S = cn(n-1) - kn(n-1) \ .$$

Prova: Sejam $p \in M$ e $\{e_1, \dots, e_{n+p}\}$ uma base ortonormal de T_pM. Sabe-se que,

$$R_{ikjk} = c(\delta_{ij}\delta_{kk} - \delta_{kj}\delta_{ik}) - \sum_\beta h_{ik}^\beta h_{kj}^\beta + \sum_\beta h_{kk}^\beta h_{ij}^\beta \ .$$

Então,

$$Ric(e_i, e_j) = c(n-1) - \sum_{\beta,k} h_{ik}^\beta h_{kj}^\beta \ ,$$

pois φ sendo mínima,

$$\sum_{\beta,k} h_{kk}^\beta h_{ij}^\beta = \sum_\beta \Big(\sum_k h_{kk}^\beta \Big) h_{ij}^\beta = \sum_\beta \Big(\sum_k \langle \alpha(e_k, e_k), e_\beta \rangle \Big) h_{ij}^\beta = \sum_\beta \Big(tr A_\beta \Big) h_{ij}^\beta = 0 \ .$$

Por outro lado, como $S = \sum_\beta tr A_\beta^2$ e

$$tr A_\beta^2 = \sum_i \langle A_\beta^2 e_i, e_i \rangle = \sum_{i,j} \langle A_\beta e_i, e_i \rangle^2 = \sum_{i,j} (h_{i,j}^\beta)^2$$

obtemos

$$\sum_i Ric(e_i, e_i) = c(n-1)n - \sum_{\beta,k,i} (h_{ik}^\beta)^2 = c(n-1)n - S \ .$$

Em particular se a curvatura seccional de M^n for constante então pelo exemplo 6.1.1 concluímos a última igualdade. □

6.2 Exemplo de Imersão Mínima

Exemplo 6.2.1 *Seja $P : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ um polinômio harmônico, homogêneo de grau s. Considerando para cada $t > 0$ a função $f_t : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f_t(x) = P(tx) = t^s P(x)$, mostra-se facilmente que*

$$\Delta f_1(x) + \lambda f_1(x) = 0 \ , \tag{6.1}$$

onde $\lambda = s(s+n-1)$. Isto é, as funções f_1 são autofunções para Δ, onde Δ é o Laplaciano induzido em $\mathbb{S}^n$, com autovalores $\lambda = s(s+n-1)$. Tais funções são denominadas esféricos harmônicos.

Considerando agora, a aplicação $\varphi : \mathbb{S}^2(\sqrt{3}) \to \mathbb{R}^5$ dada por,

$$\varphi(x,y,z) = (\frac{yz}{\sqrt{3}}, \frac{zx}{\sqrt{3}}, \frac{xy}{\sqrt{3}}, \frac{x^2-y^2}{2\sqrt{3}}, \frac{x^2+y^2-2z^2}{6}) \ ,$$

observamos que cada função coordenada, vista como uma função de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$, é um polinômio harmônico, homogêneo de grau 2. Logo, a restrição de cada uma delas a esfera $\mathbb{S}^2$ satisfaz a equação (6.1). Assim,

$$\Delta_{\mathbb{S}^2}\varphi + \lambda\varphi = 0 \ , \tag{6.2}$$

com $\lambda = 2(2+2-1) = 6$. Por outro lado, por um cálculo fácil, verifica-se que φ é uma imersão isométrica de $\mathbb{S}^2(\sqrt{3})$ em $\mathbb{R}^5$. Como, a métrica $\overline{g}$ de $\mathbb{S}^2(\sqrt{3})$ satisfaz, $\overline{g} = 3g$, onde g é a métrica de $\mathbb{S}^2$, concluímos que

$$\Delta_{\mathbb{S}^2(\sqrt{3})} = \frac{1}{3}\Delta_{\mathbb{S}^2} \ .$$

Daí e de $\lambda = 6$, a equação (6.2) nos dá

$$\Delta_{\mathbb{S}^2(\sqrt{3})}\varphi + 2\varphi = 0 \ .$$

Portanto, pelo teorema de T.Takahashi, φ é uma imersão mínima de $\mathbb{S}^2(\sqrt{3})$ numa esfera de raio $\sqrt{\frac{2}{\frac{\lambda}{3}}} = 1$, i.e, $\varphi : \mathbb{S}^2(\sqrt{3}) \to \mathbb{S}^4$ é uma imersão mínima e é denominada superfície de Veronese.

Referências Bibliográficas

[1] Barros, A. e Bessa G. P.: Estimates of the first eigenvalue of minimal hypersurfaces of $\mathbb{S}^{n+1}$, Matemática Conteporânea, Vol. 19, 1999.

[2] Cheng, S. Y. e Yau S. T.: Hypersurfaces in spaces of constant curvature. Trans. Amer. Math. Soc. 277, 685-709, 1983.

[3] Choi, H. I e Wang, A. N.: A first eigenvalue estimate for minimal hypersurfaces. J. Diff. Geom., 18, 559-562, 1983.

[4] do Carmo, M.: Geometria Riemanniana, 2^a ed. IMPA, Rio de Janeiro, 1988.

[5] do Carmo, M.: O Método do Referencial Móvel. III Escola Latino-Americano de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

[6] do Carmo, M. e Alencar H.: Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres. Procedings of the A. M. S., Vol. 120, No. 4, April 1994.

[7] Leung, P. F.: Minimal submanifolds in a sphere, Math. Z., **183**(1983), 75-86.

[8] Lichnerowicz, A.: Géométrie des Groupes de Transformations, Dunod 1958.

[9] Montiel, J. e Ros, A.: Minimal Immersions of Surfaces by The first Eigenfunctions and Conformal Area, Inven. Math., 83, p. 153-166, 1986.

[10] Muto, H.: The first eigenvalue of the Laplacian of an isoparametric hypersurface in an unit sphere, Math. Z., 197, 531-549, 1988.

[11] Nomizu,K.e Smyth B.: A formula of Simon's type and hypersurfaces with constant mean curvature, J.Diff. Geom., 3, 367-377, 1969.

[12] Obata, M.: Certain conditions for a Riemannian manifolds to be isometric with a sphere, J.Math. Soc. Japan, 14, 33-340, 1962.

[13] Reilly,R.: Applications of the hessian operator in a Riemannian manifold, Indiana Univ. Math. J., 26, 459-472, 1977.

[14] Spivak, M.: Differential Geometry (5 volumes), Publish or Perish, Berkeley 1979.

[15] Takahashi, T.: Minimal immersions of Riemannian manifolds, J. M. Soc. Japan, Vol.18, No. 4, 1966.

[16] Yau,S. T.: Seminar on differential geometry, Annals of Math. Studies, No. 102, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1982.