UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ALEXANDRE CÉSAR GURGEL FERNANDES

SEMICOMPLEXOS DE HÖLDER

FORTALEZA
1999

ALEXANDRE CÉSAR GURGEL FERNANDES

SEMICOMPLEXOS DE HÖLDER

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Lev Birbrair.

FORTALEZA

1999

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F398s Fernandes, Alexandre César Gurgel.
Semicomplexos de Hölder / Alexandre César Gurgel Fernandes. – 1999.
35 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 1999.
Orientação: Prof. Dr. Lev Birbrair .

1. Matemática. 2. Conjuntos semialgébricos. I. Título.
CDD 510

ALEXANDRE CÉSAR GURGEL FERNANDES

SEMICOMPLEXOS DE HÖLDER

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Lev Birbrair.

Aprovada em: 04/01/1999.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Lev Birbrair (Orientador)

Profª. Maria Aparecida Soares Ruas

Prof. Plácido Francisco de Assis Andrade

FORTALEZA

1999

Aleluia! Louvado seja o nome de Jesus.

Agradecimentos

Agradeço ao Professor L. Birbrair pelo excelente trabalho de orientação, agradeço também a C. Humberto e M. Ruas pela leitura final desse trabalho e por sugestões apresentadas e, finalmente, a P. César pelo total apoio técnico.

Semicomplexos de Hölder

Alexandre César Gurgel Fernandes

UFC - Departamento de Matemática
Dissertação de Mestrado

16 de Dezembro de 1999

Conteúdo

Nesta monografia, fazemos uma abordagem de conjuntos semi-algébricos sob o ponto de vista métrico, mais especificamente, analisamos germes de conjuntos semi-algébricos de dimensão 1 munidos da métrica euclidiana induzida. Temos muitas informações a respeito da topologia local de conjuntos semi-algébricos, por exemplo, o Teorema de Estrutura Cônica Local. Este teorema, dentre outras aplicações, classifica germes de conjuntos semi-algébricos, de dimensão 1, módulo uma relação topológica, a saber:

dados $A, B \subset \mathbb{R}^n$ (subespaços), $a \in A$, $b \in B$, os pares (A, a) e (B, b) são ditos *localmente homeomorfos* se existem vizinhanças V de a em A, W de b em B e um homoeomorfismo $F : (V, a) \to (W, b)$. Relembrando, $F : (V, a) \to (W, b)$ significa que $F : V \to W$ é uma aplicação tal que $F(a) = b$.

Diante da classificação topológica sugerida acima, é natural um questionamento a respeito de classificações módulo relações mais fortes do que homeomorfismo, por exemplo, podemos considerar tais conjuntos singulares munidos de uma métrica (natural), e considerar, além da topologia, os "aspectos geométricos". Podemos munir tais conjuntos de duas métricas naturais, a primeira é a métrica euclidiana induzida de $\mathbb{R}^n$ e a segunda é a métrica geodésica relativa à métrica supracitada. A métrica geodésica não é, em geral, equivalente à métrica induzida, por exemplo, no caso de q-triângulos de Hölder [1] para $q > 1$, não temos tal equivalência, como veremos nas considerações finais dessa monografia.

Consideramos $\mathcal{C}$ o conjunto dos pares (A, a) tal que $A \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto semi-algébrico de dimensão 1 (curva semi-algébrica) e $a \in A$. Em $\mathcal{C}$, consideramos a seguinte relação:

dados (A, a) e (B, b) em $\mathcal{C}$, dizemos que esses elementos são *localmente Lipschitz equivalentes*, e denotamos $(A, a) \sim (B, b)$, se existem vizinhanças V de a em A, W de b em B e uma aplicação bi-lipschitziana $F : (V, a) \to (W, b)$.

Pretendemos classificar os elementos de $\mathcal{C}$ segundo a relação "$\sim$". Observemos que a relação "$\sim$" depende de uma métrica. No caso em que a métrica, fixada a priori, é a métrica geodésica, o problema de classificação não é muito interessante porque tal problema é equivalente ao de classificação topológica. "É como se a métrica geodésica não fizesse distinção entre as singularidades".

[1] Conjunto definido no Capítulo 1 e denotado por T_q.

Por exemplo, consideremos os seguintes triângulos de Hölder: T_1 e T_q, $q > 1$. Os elementos $(T_1, 0)$ e $(T_q, 0)$ são localmente Lipschitz equivalentes quando a métrica considerada é a métrica geodésica, no entanto, não são localmente Lipschitz equivalentes quando a métrica considerada é a métrica euclidiana induzida.

Este fenômeno em que o problema de classificação $(\mathcal{C}, \sim)$, quando a métrica considerada é a métrica geodésica, é equivalente ao problema de classificação topológica, citado no início, não é verdade em geral. Por exemplo, no caso de conjuntos semi-algébricos de dimensão 2, discutido em [Bi]. Por outro lado, num certo sentido, a métrica geodésica ainda continua ignorando singularidades, que a métrica induzida não ignora.

Dando uma idéia de como subdividimos essa monografia, temos no Capítulo 1 alguns resultados que serão básicos para a teoria que discutiremos, dentre eles temos o Teorema de Tarski-Seidenberg, a boa decomposição de um germe de curva semi-algébrica que é essencialmente o Teorema de Estrutura Cônica Local e a decomposição de Puiseux de uma função semi-algébrica.

No Capítulo 2, introduzimos um objeto combinatorial que denominamos Semicomplexo, mas não demoramos muito nesse assunto, pelo menos até surgir uma conexão entre tal objeto e curvas semi-algébricas.

Já no Capítulo 3, mostramos como o conceito de semicomplexo aparece quando resolvemos analisar curvas semi-algébricas sob seus aspectos métricos.

O Capítulo 4 é destinado ao Teorema de Classificação, e este é o capítulo em que mais demoramos. Neste capítulo, calculamos alguns semicomplexos, apresentamos um lema de comparação das ordens de duas funções importantes no desenvovimento dessa teoria e findamos com uma demonstração do Teorema de Classificação, do problema $(\mathcal{C}, \sim)$, segundo a métrica induzida.

No Capítulo 5 demonstramos um Teorema de Realização, isto é, resolvemos o problema de prescrever o semicomplexo de um germe de curva semi-algébrica.

Finalmente, destinamos o Capítulo 6 à conexão dessa discussão com o problema de mergulhos normais de germes de curvas semi-algébricas.

1 Preliminares

Dizemos que um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é *semi-algébrico* se existem polinômios f_{ij}, g_{ij}, em n variáveis, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$ tais que

$$A = \bigcup_{i=1}^{p} \{x \in \mathbb{R}^n;\ f_{ij}(x) = 0,\ g_{ij}(x) > 0,\ j = 1, \ldots, q\}$$

Exemplo 1.1. Sejam $q \in \mathbb{Q}^+$ e

$$T_q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1 \text{ e } [y = x^q \text{ ou } y = 0]\right\}.$$

Temos que $T_q \subset \mathbb{R}^2$ é semi-algébrico. Quando $q \geq 1$, dizemos que T_q é o *q-triângulo de Hölder.*

Exemplo 1.2. Sendo

$$S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\right\} ,$$

temos, claramente, que $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ é semialgébrico. Mais geralmente, se $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um polinômio, então $A = p^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$ é semi-algébrico, e neste caso dizemos que $A \subset \mathbb{R}^n$ é *algébrico.*

Observação 1.1. A classe dos subconjuntos semi-algébricos de $\mathbb{R}^n$ é estável por união finita, interseção finita e complementação, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Observação 1.2. Um fato, que não é óbvio, é que se $A \subset \mathbb{R}^n$ é semi-algébrico, então existem subvariedades $A_1, \ldots, A_s$, conexas, semi-algébricas, de $\mathbb{R}^n$ tais que $A = \cup_i A_i$. Então, definimos a *dimensão* de A como o supremo das dimensões (topológicas) de $A_1, \ldots, A_s$. Em [BCR], nas Proposições 2.8.5 e 2.8.13, está provado que o supremo supracitado é a dimensão de Krull do anel quociente de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ pelo ideal $\mathcal{I}(A)$ formado pelos polinônios que se anulam em todo o conjunto A, logo a definição acima não depende da decomposição escolhida. Dizemos que A é uma *curva semi-algébrica* se a dimensão de A é 1.

Boa decomposição. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in A$. Dizemos que $A_1, \ldots, A_k \subset \mathbb{R}^n$ é uma *boa decomposição* de (A, a) se:

1) $A_1, \ldots, A_n$ são semi-algébricos;

2) $A_i \cap A_j = \{a\}$ se $i \neq j$;

3) $\exists\, \epsilon > 0$ tal que $\forall\, 0 < \delta \leq \epsilon$ as componentes conexas de $A \setminus \{a\} \cap B_\delta(a)$ são $A_i \setminus \{a\} \cap B_\delta(a)$ e $\sharp A_i \cap S_\delta(a) = 1$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$.

Observação 1.3. Dados $A \subset \mathbb{R}^n$ curva semi-algébrica e $a \in A$, é um fato que (A, a) sempre admite uma boa decomposição, e isto decorre imediatamente do Teorema de Estrutura Cônica Local, veja [BCR] ou [BR].

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ semi-algébrico. Dizemos que uma aplicação $F : A \to \mathbb{R}^k$ é *semi-algébrica* se o seu gráfico $G_F \subset \mathbb{R}^{n+k}$ é semi-algébrico.

Exemplo 1.3. Seja $\pi : S^1 \to \mathbb{R}$ a projeção $\pi(x, y) = x$. Temos que

$$G_\pi = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 1 \text{ e } x = z\right\}$$

é um subconjunto semi-algébrico de $\mathbb{R}^3$. Logo, π é semi-algébrica. Observemos que $\pi(S^1) \subset \mathbb{R}$ é semi-algébrico, porém $\pi(S^1) \subset \mathbb{R}$ não é algébrico. Então, esse é um contra-exemplo para a afirmação que a classe dos conjuntos algébricos é estável por projeções. Por outro lado, temos

Teorema 1.1 (Tarski-Seidenberg). Sejam $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ uma decomposição de $\mathbb{R}^n$ em soma direta de espaços euclidianos e $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ a projeção $\pi(x, y) = x$. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é semi-algébrico, então $\pi(A) \subset \mathbb{R}^k$ é semi-algébrico.

Corolário 1.1. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ semi-algébrico. Se $F : A \to \mathbb{R}^k$ é semi-algébrica, então $F(A) \subset \mathbb{R}^k$ é semi-algébrico.

Prova. Admitindo $F : A \to \mathbb{R}^k$ semi-algébrica temos que

$$G_F = \left\{(x, F(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k;\ x \in A\right\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$$

é semi-algébrico. Agora, pelo Teorema 1.1 (T-S), temos que $A = \pi(G_F) \subset \mathbb{R}^k$ é semi-algébrico.

Para uma demonstração de T-S, veja [BR].

Exemplo 1.4. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ semi-algébricos e $x = 0 \in A \cap B$. Seja $f : [0, r_0] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(r) = dist\,(A \backslash B_r(x), B \backslash B_r(x))$$

(a métrica considerada é a euclidiana induzida). Suponhamos a boa definição de f, isto é, $\forall\, 0 \leq r \leq r_0$ temos $A \backslash B_r(x) \neq \emptyset$ e $B \backslash B_r(x) \neq \emptyset$. Afirmamos que f é uma função semi-algébrica. De fato, sendo

$$\begin{aligned}
G_1 &= \{(r,t) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq r \leq r_0 \text{ e } t > 0\} \\
G_2 &= \{(r,t) \in \mathbb{R}^2;\ |a-b|^2 \geq t^2 \forall\ (a,b) \in A \times B;\ |a|^2 = |b|^2 = r^2\ \} \\
G_3 &= \{(r,t) \in \mathbb{R}^2;\ \forall \epsilon > 0,\ \exists\ (a,b) \in A \times B;\ |a|^2 = |b|^2 = r^2 \text{ e} \\
&\quad [\ t^2 + \epsilon - |a-b|^2 > 0]\}
\end{aligned}$$

temos

$$G_f = \bigcap_{i=1}^{3} G_i.$$

Claramente, temos $G_1 \subset \mathbb{R}^2$ semi-algébrico. Também, $G_2 \subset \mathbb{R}^2$ é semi-algébrico, pois sendo

$$\begin{aligned}
D = \{&(r,t,a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n;\ (a,b) \in A \times B \text{ e} \\
&[|a-b|^2 - t^2 < 0 \text{ ou } |a|^2 \neq r^2 \text{ ou } |b|^2 \neq r^2]\}.
\end{aligned}$$

e

$$\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

a projeção $\pi(r,t,x,y) = (r,t)$, temos $D \subset \mathbb{R}^{2n+2}$ semi-algébrico e

$$G_2 = \mathbb{R}^2 \backslash \pi(D).$$

Por Tarski-Seidenberg, $G_2 \subset \mathbb{R}^2$ é semi-algébrico.

Agora, sejam p um polinômio em $n + m + 1$ variáveis e $S \subset \mathbb{R}^m$ semi-algébrico. Então

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \forall \epsilon > 0\ \exists s \in S;\ p(x,s,\epsilon)\ \sigma\, 0\}$$

em que $\sigma \in \{=, >\}$, é um subconjunto semi-algébrico de $\mathbb{R}^n$. De fato, Consideremos as seguintes projeções

$$\begin{aligned} \pi &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R};\ \pi(x,y,t) = (x,t) \\ \pi' &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n;\ \pi'(x,t) = x. \end{aligned}$$

Vendo que

$$A = \mathbb{R}^n \backslash \pi' \left[\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \backslash \pi \left[\{(x,y,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R};\ y \in S \text{ e } [t \leq 0 \text{ ou } p(x,y,t)\ \sigma\, 0]\}\right]\right],$$

temos, por Tarski-Seidenberg, que $A \subset \mathbb{R}^n$ é semi-algébrico. Decorre, daí, que $G_3 \subset \mathbb{R}^2$ é semi-algébrico.

Exemplo 1.5. Com as mesmas notações do exemplo acima, temos que

$$g : [0, t_0] \to \mathbb{R}$$

dada por

$$g(r) = dist\,(A \cap S_r(a), B \cap S_r(a))$$

é semi-algébrica.

Decomposição de Puiseux. Seja $f : [0, t_0] \to \mathbb{R}$ semi-algébrica; $f(0) = 0$. Pelo Teorema de Puiseux, veja [Pa], temos que existem $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$ tais que $g : [0, \epsilon] \to \mathbb{R}$ dada por $g(r) = f(r^n)$ é analítica. Supondo g não constante, seja $m \in \mathbb{N}$ a (multiplicidade de g no ponto 0). Assim, existe $\widetilde{h} : [0, \epsilon] \to \mathbb{R}$ analítica; $\widetilde{h}(0) \neq 0$ tal que

$$g(r) = r^m \widetilde{h}(r),\ \forall\, r \in [0, \epsilon].$$

Daí, temos

$$f(r) = r^{\frac{m}{n}} \widetilde{h}\left(r^{\frac{1}{n}}\right),\ \forall\, r \in [0, \epsilon^n].$$

Fazendo $q = \frac{m}{n}$ e $h(r) = \widetilde{h}\left(r^{\frac{1}{n}}\right)$, temos

$$f(r) = r^q h(r),\ \forall\, r \in [0, \epsilon^n].\ \ (*)$$

Dizemos que $(*)$ é a *decomposição de Puiseux de f em* 0.

Para finalizar este capítulo, descreveremos o ângulo de Hölder entre conjuntos semi-algébricos.

Ângulo de Hölder. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ semi-algébricos, $a \in A \cap B$, tais que para um $t_0 > 0$ a função

$$f : [0, t_0] \to \mathbb{R}$$

semi-algébrica, dada por

$$f(r) = dist(A \backslash B_r(a), B \backslash B_r(a))$$

está bem definida. Seja $f(r) = r^q h(r)$ a decomp. de Puiseux de f no ponto 0. Então dizemos que q é o *ângulo de Hölder, no ponto a, entre A e B.* E usamos a seguinte notação

$$H_a(A, B) = q.$$

2 Semicomplexos

Seja $\Re$ a coleção de todos os pares (R, α) em que R é um conjunto finito e $\alpha : R \times R \to \mathbb{R}$ é uma função satisfazendo:

i) $\alpha(r, r) = 0, \forall r \in R$;

ii) $\alpha(r, s) = \alpha(s, r), \forall r, s \in R$.

Exemplo 2.1. Consideremos $R \subset \mathbb{R}$ um subconjunto finito e $\alpha : R \times R \to \mathbb{R}$ dada por $\alpha(r, s) = (r - s)^2$. Então, $(R, \alpha) \in \Re$.

Exemplo 2.2. Consideremos R um conjunto finito e $\phi : R \times R \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(r, s) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad r = s, \\ 1 & \text{se} \quad r \neq s. \end{cases}$$

(métrica zero-um). Também, $(R, \phi) \in \Re$.

Em $\Re$, consideremos a seguinte relação:

dados (R, α) e (S, β) em $\Re$, temos $(R, \alpha) \approx (S, \beta)$ se, e somente se, existe uma bijeção $\Phi : R \to S$ tal que $\beta(\Phi(a), \Phi(b)) = \alpha(a, b)\ \forall a, b \in R$.

Não é difícil verificar que " $\approx$ " é uma relação de equivalência em $\Re$. Denotaremos $[R, \alpha] = \{(S, \beta) \in \Re;\ (R, \alpha) \approx (S, \beta)\}$ e $\widetilde{\Re} = \{[R, \alpha];\ (R, \alpha) \in \Re\}$. Um elemento de $\widetilde{\Re}$ será chamado um *semicomplexo.*

Um semicomplexo Γ é dito um *semicomplexo de Hölder*(SCH) se $\forall\ (R, \alpha) \in \Gamma$, temos:

iii) $\forall\ r, s, t \in R$ dois a dois distintos,

$$\alpha(r, s) \leq \alpha(s, t) \leq \alpha(r, t) \Rightarrow \alpha(r, s) = \alpha(s, t)$$

iv) $\forall\ r, s \in R$ distintos, $\alpha(r, s)$ é um racional maior do que ou igual a 1.

Proposição 2.1. Seja Γ um semicomplexo. Se existe $(R, \alpha) \in \Gamma$ satisfazendo as propriedades (iii) e (iv), acima, então Γ é um SCH.

Exemplo 2.3. Seja Γ um semicomplexo tal que $v(\Gamma) \leq 2$. Se $\forall\,(\alpha, R) \in \Gamma$, temos $\alpha(r,s) \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty)$ se $r \neq s$. Então Γ é um SCH.

Proposição 2.2. Se Γ é um SCH, então $\sharp\,(\alpha(R \times R)) \leq v(\Gamma), \forall\,(R, \alpha) \in \Gamma$.

Prova. Por indução sobre $n = \sharp R$. Caso $n = 1, 2$, claro que não há o que fazer. Podemos supor $n \geq 3$ e que para $n-1$ o resultado desejado seja verdadeiro. Sejam $r \in R$, $S = R \setminus \{r\}$ e $\beta : S \times S \to \mathbb{R}$ dada por $\beta(s,t) = \alpha(s,t)$. Verifica-se, facilmente que $(S, \beta) \in \Re$ e que $[S, \beta]$ é um SCH. Então, por hipótese de indução, $\sharp\,(\beta(S \times S)) \leq \sharp S = n-1$. Para que ocorra $\sharp\,(\alpha(R \times R)) > n$, é necessário que existam $s, t \in S$ distintos tais que $\alpha(r,s) < \alpha(r,t)$ e $\alpha(r,s), \alpha(r,t) \notin \beta(S \times S)$. Por outro lado, por (iii), temos que $\alpha(r,s) < \alpha(r,t) \Rightarrow \alpha(r,s) = \alpha(s,t) \in \beta(S \times S)$. Assim, concluímos que $\sharp\,(\alpha(R \times R)) \leq n$. ■

Consideremos um semicomplexo Γ. Dado $(R, \alpha) \in \Gamma$; $R = \{r_1, \ldots, r_n\}$. Às vezes, usaremos a seguinte notação

$$\Gamma : \begin{bmatrix} \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \alpha_{n-1n} \end{bmatrix}$$

para representar Γ. Em que $\boldsymbol{\alpha_{ij}} := \alpha(r_i, r_j)$. Vejamos a praticidade dessa notação, analisando a seguinte

Pergunta. Seja Γ um SCH. Existe $(R, \alpha) \in \Gamma$ satisfazendo a seguinte propriedade de ordenação:

$$\alpha_{12} \leq \ldots \leq \alpha_{1n} \leq \alpha_{23} \leq \ldots \leq \alpha_{2n} \leq \ldots \leq \alpha_{n-1n}?$$

Resposta. Nos casos $v(\Gamma) = 2, 3$ não é difícil verificar que a resposta é positiva. Porém, no caso $v(\Gamma) = 4$, temos o seguinte exemplo:

$$\Gamma : \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix}.$$

Não é difícil ver que Γ é um SCH. No entanto, a configuração desejada

$$[R,\alpha]:\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

não define um SCH em $\widetilde{\Re}$. Logo, $(R,\alpha) \notin \Gamma$.

Exemplo 2.4. Seja $R = \{1, \dots, n\}$. Dados $1 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{n-1} \in \mathbb{Q}$, existe $(R,\alpha) \in \Re$, tal que $\alpha\,(R \times R) = \{0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ e $[R,\alpha]$ é um SCH. De fato, consideremos

$$[R,\alpha]:\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1 \\ & \alpha_2 & \dots & \alpha_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

3 Curvas semi-algébricas e semicomplexos

Neste capítulo, veremos como semicomplexos aparecem no estudo de curvas semi-algébricas quando analisadas sob o ponto de vista métrico. Denotaremos por $\mathcal{C}$ o conjunto dos pares (A, a) em que $A \subset \mathbb{R}^2$ é uma curva semi-algébrica e $a \in A$ é um ponto não isolado.

Seja (A, a) um elemento de $\mathcal{C}$. Consideremos $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}^2$uma boa decomposição[2] de A em a. Definamos $R = \{A_1, \ldots, A_n\}$ e $\alpha : R \times R \to \mathbb{Q}^+$ por

$$\alpha(\boldsymbol{A_i}, A_j) = H_a(A_i, A_j),$$

em que $H_a(A_i, A_j)$ é o ângulo de Hölder[3], no ponto a, entre A_i e A_j , se $i \neq j$ e $\alpha(A_i, A_i) = 0$.

Definimos o *semicomplexo de* A, *no ponto* a, por $\boldsymbol{\Gamma_A}(a) = [R, \alpha]$.

Exemplo 3.1. Dado $q \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty)$, seja

$$T_q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ [y = x^q \text{ ou } y = 0] \text{ e } [0 \leq x \leq 1]\right\}.$$

o q-triângulo de Hölder. Consideremos

$$\begin{array}{l} A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 > y\} \cap T_q \\ A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0 \text{ e } 0 < x\} \cap T_q \end{array}$$

Calculemos $\Gamma_{T_q}(\mathbf{0})$. Dado $0 < r < 1$, sejam $X_r \in A_1 \setminus B_r(\mathbf{0})$ e $Y_r \in A_2 \setminus B_r(\mathbf{0})$ tais que

$$dist\,(A_1 \setminus B_r(\mathbf{0}), A_2 \setminus B_r(\mathbf{0})) = |X_r - Y_r|.$$

Consideremos $P : \mathbb{R}^2 \to R^2$em que $P(x, y) = (x, 0)$. Temos que $\forall Z \in \mathbb{R}^2$ e $\forall W = (w, 0) \in \mathbb{R}^2$,

$$|Z - P(Z)| \leq |Z - W|.$$

[2]O conceito de boa decomposição de um germe de curva semi-algébrica é apresentado no Capítulo 1.

[3]O ângulo de Hölder, no ponto a, entre A_i e A_j é o racional associado à função $r \to dist\,(A_i \backslash B_r(a), A_j \backslash B_r(a))$, definido no Capítulo 1.

Em particular, sendo $X_r = (x_r, x_r^q)$, temos

$$|X_r - P(X_r)| \leq |X_r - Y_r|.$$

Daí, pela minimalidade de $|X_r - Y_r|$, temos $x_r \leq r$.

Sendo $Y_r = (y_r, 0)$, temos $y_r \geq r$. Se $y_r > r$, então temos que o ângulo $X_r\widehat{P(R)}Y_r$ é maior do que ou igual a 90^o, em que $R = (r, r^q)$.
Daí, $|X_r - Y_r| > |X_r - P(R)|$, absurdo. Então, $y_r = r$.

Agora, consideremos $g : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = (x - r)^2 + x^{2q},$$

em que $I = \{x \in (0,1)\,;\, x^2 + x^{2q} \geq r^2\}$.

Temos que $g(x_r) \leq g(x)$, $\forall x \in I$, por hipótese, e caso $x_r^2 + x_r^{2q} > r^2$, teríamos $g'(x_r) = 0$. Por outro lado,

$$g'(x_r) = 2\left[(x_r - r) + qx_r^{2q-1}\right] > 0.$$

Concluímos, com isso, que X_r é o ponto na interseção $A_1 \cap S_r(\mathbf{0})$ e Y_r é o ponto na interseção $A_2 \cap S_r(\mathbf{0})$.
Agora, temos que $r \leq x_{2r}$. Pois, $x_{2r} < r \Rightarrow 4r^2 = |X_{2r}|^2 = x_{2r}^2 + x_{2r}^{2q} < 2r^2 \Rightarrow 2 < 1$. Assim, $r^q \leq |X_{2r} - Y_{2r}| \leq 2^q r^q$. Assim concluímos que $\Gamma_{T_q}(\mathbf{0}) : [q]$.

Exemplo 3.2. Sejam $m \in \mathbb{R}$, suporemos $m > 0$ para exemplificarmos compativelmente com a figura abaixo, e

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R};\ y = mx \text{ ou } y = 0\}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = mx \text{ e } 0 \leq x\} \cap A\\
A_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0 \text{ e } 0 \leq x\} \cap A\\
A_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = mx \text{ e } x \leq 0\} \cap A\\
A_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0 \text{ e } x \leq 0\} \cap A
\end{aligned}$$

Calculemos $\Gamma_A(\mathbf{0})$. Com argumentos análogos aos utilizados no Exemplo 3.1, podemos mostrar que $dist\,(A_1 \backslash B_r(\mathbf{0}), A_2 \backslash B_r(\mathbf{0})) = |X_r - Y_r|$ em que

X_r é o ponto onde A_1 intersecta $S_r(0)$ e Y_r é o ponto onde A_2 intersecta $S_r(0)$. Temos $X_r = (x_r, mx_r)$ e $Y_r = (r, 0)$. Assim,

$$x_r^2 = \frac{1}{1+m^2}r^2$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} d(X(r), Y(r)) &= \sqrt{(x_r - r)^2 + m^2 x_r^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}r - r\right)^2 + \frac{m^2}{1+m^2}r^2} \\ &= \sqrt{\frac{\left(1-\sqrt{1+m^2}\right)^2 + m^2}{1+m^2}}r. \end{aligned}$$

Então, $H_0(A_1, A_2) = 1$. Com o mesmo grau de dificuldade, calculamos os outros ângulos e concluímos que:

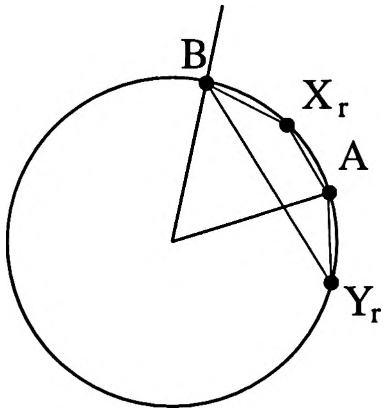
$$\Gamma_A(0) : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.3. Sejam $m < n$ números reais positivos e:

$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; mx \leq y \leq nx\}$
$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0 \text{ e } x \geq 0\}$

Observe que o bordo de K é dado pela união de duas semiretas, as quais denotaremos por R_1 e R_2. Dado $r > 0$ não é difícil mostrar que $dist(K \backslash B_r(0), L \backslash B_r(0)) = dist(\partial K \backslash B_r(0), Y_r)$, em que $Y_r = (r, 0)$. Seja $X_r \in \partial K \backslash B_r(0)$ tal que $|X_r - Y_r|$ realiza a distância acima. Afirmamos que $X_r \in R_1 \cup R_2$. De fato, caso contrário, temos a seguinte configuração:

Em que B é o ponto de R_2 tal que $|B| = r$ e A é o ponto de R_1 tal que $|A| = r$. Temos que o quadrilátero AX_rBY_r está inscrito na circunferência $S_r(0)$. Pela minimalidade de $|X_r - Y_r|$, temos $\overline{BY_r}$ e $\overline{AY_r} \geq \overline{X_rY_r}$. Logo, $A\widehat{X_r}B = A\widehat{X_r}Y_r + Y_r\widehat{X_r}B \geq Y_r\widehat{A}X_r + X_r\widehat{B}Y_r = 180°$. Então, pelo Exemplo 3.2, existe uma constante c, que não depende de r, tal que $2r \geq |X_r - Y_r| \geq cr$.



Observação 3.1. Do Exemplo 3.3, podemos concluir que dois cones K_1 e K_2; K_1 e K_2 se intersectam apenas no vértice a, se aproximam de forma linear. Isto é, existe uma constante c tal que $2r \geq dist\left(K_1 \backslash B_r\left(a\right), K_2 \backslash B_r\left(a\right)\right) \geq cr$.

O próximo resultado que discutiremos, classifica totalmente triângulos de Hölder segundo uma relação de Lipschitz.

Proposição 3.1. Sejam p e q elementos de $\mathbb{Q} \cap [1, +\infty)$. Então, existe uma aplicação bi-lipschitziana

$$F : (T_p, \mathbf{0}) \to (T_q, \mathbf{0})$$

se, e somente se, $p = q$.

Prova. Suponhamos, por absurdo, que exista uma aplicação bi-lipschitziana

$$F : T_p \to T_q$$

tal que $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $p > q \geq 1$. Sejam $0 < c_1 \leq c_2$ constantes bi-Lipschitz de F. Denotemos

$$G_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1 \text{ e } y = x^p\}$$
$$G_q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1 \text{ e } y = x^q\}$$
$$I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1 \text{ e } y = 0\}$$

Como F é um homeomorfismo, ocorre:

a. $F(G_p) = I$ e $F(I) = G_q$ ou

b. $F(G_p) = G_q$ e $F(I) = I$.

Caso ocorra a), consideremos $F(x,0) = (f(x), f(x)^q)$ e $F(x,x^p) = (g(x), 0)$. Temos:

$$\begin{aligned} c_1 x &= \|(x,0)\| \leq F(x,0) \,| \\ &= \sqrt{f(x)^2 + f(x)^{2q}} \leq f(x)\sqrt{2}. \end{aligned}$$

E, portanto,

$$f(x) \geq \frac{c_1}{\sqrt{2}} x, \ \forall\, 0 \leq x \leq 1.$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} c_2 x^p &= c_2 |(x,x^p) - (x,0)| \geq |F(x,x^p) - F(x,0)| \\ &\geq f(x)^q \geq (\frac{c_1}{\sqrt{2}})^q x^q. \end{aligned}$$

Absurdo, pois p foi suposto maior do que q e, x pode ser escolhido positivo suficientemente próximo de 0.

Caso ocorra b), consideremos $F(x,x^p) = (f(x), f(x)^q)$ e $F(x,0) = (g(x), 0)$. Temos:

$$\begin{aligned} c_1 x &\leq c_1 |(x,x^p)| \leq |F(x,x^p)| \\ &= \sqrt{f(x)^2 + f(x)^{2q}} \leq f(x)\sqrt{2}. \end{aligned}$$

E, portanto,

$$f(x) \geq \frac{c_1}{\sqrt{2}} x, \ \forall\, 0 \leq x \leq 1.$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} c_2 x^p &= c_2 |(x,x^p) - (x,0)| \geq |F(x,x^p) - F(x,0)| \\ &\geq f(x)^q \geq \left(\frac{c_1}{\sqrt{2}}\right)^q x^q. \end{aligned}$$

Absurdo, pois p foi suposto maior do que q e x pode ser escolhido positivo suficientemente próximo de 0.

O resultado acima é um caso particular de um teorema que será demonstrado no capítulo seguinte. Apesar de repetitivo, resolvi apresentá-lo antecipadamente e de forma distinguida, pois acredito que esse resultado é um motivo para o próximo capítulo, que trata semicomplexos, justamente, como um invariante segundo uma relação de Lipschitz.

4 Classificação

Neste capítulo, discutimos a classificação bi-Lipschitz local das curvas semi-algébricas planas. Relembrando, estamos considerando $\mathbb{R}^2$ munido da métrica euclidiana e os seus subconjuntos, em particular as curvas supracitadas, munidos da métrica induzida. Aqui, $\mathcal{C}$ continua sendo o conjunto dos pares (A, a) em que; $A \subset \mathbb{R}^2$ é curva semi-algébrica e $a \in A$ é ponto não isolado. Em $\mathcal{C}$ temos a seguinte relação de equivalência:

dados (A, a) e (B, b) em $\mathcal{C}$, temos $(A, a) \sim (B, b)$ se, e somente se, existem vizinhanças V de a em A, W de b em B e uma aplicação bi-lipschitziana $F: V \to W$; $F(a) = b$.

Exemplo 4.1. Sejam

$$\begin{aligned} A &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ [y = x \text{ e } 0 \leq x \leq 1] \text{ ou } [y = 0 \text{ e } 0 \leq x \leq 1]\right\} \\ B &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ [0 \leq y \leq 1 \text{ e } x = 0] \text{ ou } [y = 0 \text{ e } 0 \leq x \leq 1]\right\} \end{aligned}$$

Temos que $(A, \mathbf{0}) \sim (B, \mathbf{0})$, em que $\mathbf{0} = (0, 0)$

De fato, considere $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$dada por $F(x, y) = (x - y, y)$. Temos que F é uma aplicação bi-lipschitziana tal que $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $F(A) = B$.

Exemplo 4.2. Como exemplo interessante de dois elementos de $\mathcal{C}$ que não são equivalentes, segundo a relação "$\sim$", temos $(T_p, \mathbf{0})$ e $(T_q, \mathbf{0})$ em que p e q são elementos distintos de $\mathbb{Q} \cap [1, +\infty)$. Para provar essa afirmação, podemos recorrer à Proposição 3.1, ou ao

Teorema 4.1 (de Classificação). Sejam (A, a) e $(B, b) \in \mathcal{C}$. $(A, a) \sim (B, b)$ se, e somente se, $\Gamma_A(a) = \Gamma_B(b)$.

Prova. Sem perda de generalidade, podemos supor $a = b = \mathbf{0}$. Admitindo que $(A, \mathbf{0}) \sim (B, \mathbf{0})$, consideremos vizinhanças V de $\mathbf{0}$ em A, W de $\mathbf{0}$ em B e uma aplicação bi-lipschitziana

$$F: (V, \mathbf{0}) \to (W, \mathbf{0}).$$

Sejam $0 < c_1 \leq c_2$ constantes de Lipschitz de F, isto é

$$c_1 |X - Y| \leq |F(X) - F(Y)| \leq c_2 |X - Y|, \ \forall X, Y \in V.$$

Consideremos $A_1, \dots, A_k$ e $B_1, \dots, B_l$ boas decomposições de A e B, respectivamente. Usando apenas que F é um homeomorfismo, temos que $l = k$. Agora, para cada i, seja $\phi(i)$ tal que $F(A_i \cap B_\delta(0)) \subset B_{\phi(i)}$, para um $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Usando que F é um homeomorfismo e que para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, $A_i \setminus \{0\} \cap B_\delta(0)$ é componente conexa de $A \setminus \{0\} \cap B_\delta(0)$, podemos garantir a boa definição de $\Phi(i)$. De fato, é só observarmos que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, $B_j \setminus \{0\} \cap B_\epsilon(0)$, $j = 1, \dots, k$, são as componentes conexas de $B \cap B_\epsilon(0)$.

Então, sendo $R = \{A_1, \dots, A_k\}$ e $S = \{B_1, \dots, B_k\}$, temos $\Phi : R \to S$, dada por $\Phi(A_i) = B_{\phi(i)}$. Mostremos que Φ satisfaz:

$$H_0(A_i, A_j) = H_0(\Phi(A_i), \Phi(A_j)).$$

Por absurdo, suponhamos que $m > n$, em que

$$m = H_0(A_i, A_j) \text{ e } n = H_0\left(B_{\Phi(i)}, B_{\Phi(j)}\right).$$

Temos:

$$\begin{aligned}(|X| \geq r) &\Rightarrow |X - 0| \geq r \Rightarrow \frac{1}{c_1}|F(X) - F(0)| \geq r \\ &\Rightarrow |F(X) - 0| \geq c_1 r \Rightarrow |F(X)| \geq c_1 r. \ (*)\end{aligned}$$

Assim, dado $r > 0$ pequeno, existem $X_i \in A_i \backslash B_r(0)$, $X_j \in A_j \backslash B_r(0)$ tais que

$$\begin{aligned} r^m h(r) &= |X_i - X_j| \geq \frac{1}{c_2}|F(X_i) - F(X_j)| \\ &\geq \frac{1}{c_2}(c_1 r)^n g(c_1 r), \end{aligned}$$

em que a última desigualdade decorre de $(*)$.

Aqui, $r^m h(r)$ é a decomposição de Puiseux de

$$dist\,(A_i \backslash B_r(0), A_j \backslash B_r(0))$$

e $r^n g(r)$ é a decomposição de Puiseux de

$$dist\left(B_{\Phi(i)} \backslash B_r(0), B_{\Phi(j)} \backslash B_r(0)\right).$$

Assim,

$$r^{m-n}h(r) \geq \frac{c_1^n}{c_2}g(c_1 r).$$

Fazendo $r \to 0$, temos $0 \geq g(0)$. Absurdo.

Então, fica demonstrada uma direção do Teorema de classificação. A outra direção será demonstrada em etapas e, antes de iniciá-la, vejamos algumas conseqüências imediatas do resultado que provamos agora.

Corolário 4.1. Seja $f : [0, \delta] \to \mathbb{R}$ semi-algébrica, não negativa tal que $f(0) = f'(0) = 0$ e com a seguinte decomposição de Puiseux $f(x) = x^q h(x)$. Seja A o gráfico de f unido com o segmento $[0, \delta] \times \{0\}$. Então, $\Gamma_A(\mathbf{0}) : [q]$.

Prova. Antes de qualquer coisa, observemos que

$$f(0) = f'(0) = 0 \Rightarrow q > 1.$$

Consideremos $F : [0, \delta] \times \mathbb{R}. \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (x, yh(x))$. Aqui, usaremos a métrica do máximo:

$$d(X, Y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\},$$

em que $X = (x_1, x_2)$ e $Y = (y_1, y_2)$. Afirmamos que F aplica uma vizinhança de $\mathbf{0}$ em T_q semi-algebricamente, de forma bi-Lipschitz, sobre uma vizinhança de $\mathbf{0}$ em A. Então, se isto acontece, temos pelo teorema anterior que $\Gamma_A(\mathbf{0})$: $[q]$. Resta-nos provar tal afirmação. Para tanto, consideremos

$$0 < \epsilon < \min\left\{\frac{1}{\sqrt[q-1]{q}}, \xi\right\},$$

em que $\xi > 0$ é tal que

$$qx^{q-1}h(x) + x^q h'(x) < 1, \forall 0 < x < \xi.$$

Então, dados $X = (x, x^q)$ e $Y = (y, y^q)$; $0 \leq y < x \leq \epsilon$. Pela escolha de $\epsilon < \frac{1}{\sqrt[q-1]{q}}$, temos

$$|x - y| = x - y > x^q - y^q = |x^q - y^q|.$$

Assim,

$$d(X,Y) = |x - y|.$$

Analogamente, temos

$$d(F(X), F(Y)) = |x - y|.$$

Nesse caso,

$$d(X,Y) = d(F(X), F(Y)) \ .$$

Agora, caso tenhamos $X = (x, x^q)$ e $Y(y, 0)$, sejam $0 < \lambda < \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{1}{\lambda} \leq \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \leq \gamma, \forall 0 \leq x \leq \epsilon.$$

Consideremos, também,

$$\eta = \max\{1, \lambda\} \text{ e } \mu = \max\{1, \gamma\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} d(X,Y) &\leq |x - y| + x^q \leq |x - y| + \lambda x^q h(x) \\ &\leq \eta(|x - y| + x^q h(x)) \leq 2\eta d(F(X), F(Y)). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} d(F(X), F(Y)) &\leq |x - y| + x^q h(x) \leq |x - y| + \gamma x^q \\ &\leq \mu(|x - y| + x^q) \leq 2\mu d(X,Y). \end{aligned}$$

Finalmente, como

$$d(X,Y) \leq |X - Y| \leq 2d(X,Y),$$

segue-se o resultado. ■

Corolário 4.2. Sejam $f_1, f_2 : [0, \delta] \to \mathbb{R}$ semi-algébricas; $f_1'(0) = f_2'(0) = 0$, com as seguintes decomposições de Puiseux:

$$f_i(x) = x^{q_i} h_i(x), \ i = 1, 2.$$

Então o ângulo de Hölder, no ponto $\mathbf{0}$, entre os gráficos de f_1 e $\boldsymbol{f_2}$ é maior do que ou igual a $\min\{q_1, q_2\}$ e se $q_1 \neq q_2$, então vale a igualdade.

Prova. Chamemos de A_i ao gráfico de f_i, $i = 1, 2$, e consideremos $q = H_0(A_1, A_2)$. Observemos que

$$f_i'(0) = 0 \Rightarrow q_i > 1.$$

Em particular, se provarmos que $q \geq \min\{q_1, q_2\}$, então teremos $q > 1$.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $q_1 \leq q_2$. Seja $F : [0, \delta] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x, y) = (x, y - f_1(x)).$$

Temos que a jacobiana de F num ponto (x, y) é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & f_1'(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, F aplica $A = A_1 \cup A_2$ semi-algebricamente, de forma bi-lipschitziana, sobre $B = F(A)$. Sendo $B_i = F(A_i)$, $i = 1, 2$, temos que

$$\begin{aligned} B_1 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq \delta \text{ e } y = 0\right\}; \\ B_2 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq \delta \text{ e } y = x^{q_1} h_3(x)\right\}, \end{aligned}$$

em que $h_3(x) = x^{q_2 - q_1} h_2(x) - h_1(x)$. Pelo teorema anterior, direção provada, temos que o ângulo de Hölder, no ponto $\mathbf{0}$, entre B_1 e B_2 é q. Agora, caso $h_3(0) \neq 0$, temos pelo corolário 4.1 que $q = q_1$. Caso $h_3(0) = 0$, vê-se facilmente que $q > q_1$. ■

A partir de agora, discutiremos a outra direção do teorema de classificação. Antes disso, vejamos um resultado que compara as ordens de duas funções semi-algébricas que são de grande importância na teoria a seguir. Sendo mais claro, queremos provar que se $(A, a) \in \mathcal{C}$, $R = \{A_1, \ldots, A_n\}$ é uma boa decomposição de (A, a) e temos que $r^{\beta_{ij}} h_{ij}(r)$ é a decomposição de Puiseux de

$$dist\left(A_i \cap S_r(a), A_j \cap S_r(a)\right),$$

então $\beta_{ij} = H_a(A_i, A_j)$.

Lema 4.1. Sejam $h_A, h_B : [0,\delta] \to \mathbb{R}$ semi-algébricas, de classe C^1, tais que $h_A(0) = h_A'(0) = 0$ e $h_B(0) = h_B'(0) = 0$. Sejam A e B os gráficos de h_A e h_B, respectivamente, e suponhamos que $A \cap B = \{\mathbf{0}\}$ e $0 \neq h_A(x) > h_B(x) \neq 0\ \forall x \in (0,\delta]$. Consideremos

$$F(r) = dist\left(A \setminus B_r(\mathbf{0}), B \setminus B_r(\mathbf{0})\right),\ L(r) = dist\left(A \cap S_r(\mathbf{0}), B \cap S_r(\mathbf{0})\right)$$

e

$$F(r) = r^{\alpha} f(r),\ L(r) = r^{\beta} l(r)$$

as decomposições de Puiseux de F e L, respectivamente. Então, $\alpha = \beta$.

Prova. Como $F(r) \leq L(r)\ \forall r$, temos que $\beta \leq \alpha$. Então, suporemos por absurdo que $\beta < \alpha$. Para $r > 0$ suficientemente pequeno, $F(r)$ se realiza em X_r ou em Y_r, em que X_r é o ponto na interseção $A \cap S_r(\mathbf{0})$ e Y_r o ponto em $B \cap S_r(\mathbf{0})$. De fato, usando o Corolário 4.1, temos que $\alpha > 1$. Logo, $\exists\, \delta' > 0$ tal que $F'(r) \geq 0\ \forall\, 0 \leq r \leq \delta'$. Sabemos que F é crescente, e como F é semi-algébrica não constante, $\exists\, \epsilon > 0$ tal que F cresce estritamente em $[0,\epsilon]$, pois $F'(r) > 0$ para $r > 0$ suficientemente pequeno visto que

$$\left\{r \in \left[0,\delta'\right];\ F'(r) = 0\right\}$$

possui um número finito de componentes conexas e como não existe $\eta > 0$ tal que F seja constante em $[0,\eta]$ temos que a componente de 0 é $I = \{0\}$, assim existe $\epsilon > 0$ tal que $F'(r) > 0\ \forall\, 0 < r \leq \epsilon$.

Sejam $Z_r^A \in A \setminus B_r(\mathbf{0})$ e $Z_r^B \in B \setminus B_r(\mathbf{0})$ tais que $F(r) = \left|Z_r^A - Z_r^B\right|$. Então, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que ocorre uma das alternativas:

(1) $r - \epsilon \leq \left|Z_{r-\epsilon}^A\right| < r$;

(2) $r - \epsilon \leq \left|Z_{r-\epsilon}^B\right| < r$.

Caso ocorra (1), temos que

$$Z_r^A = \lim_{\epsilon \to 0} Z_{r-\epsilon}^A = X_r.$$

Caso ocorra (2), temos que

$$Z_r^B = \lim_{\epsilon \to 0} Z_{r-\epsilon}^{\bar{B}} = Y_r.$$

Também, existe $\xi > 0$ tal que $F(r)$ se realiza exclusivamente em X_r $\forall 0 \leq r \leq \xi$ ou em Y_r $\forall 0 \leq r \leq \xi$. Pois caso contrário, existe uma seqüência (r_n) tal que $r_n \to 0$ e $F(r_n) = L(r_n)$. Absurdo, pois $\beta < \alpha$. Suponhamos que $F(r)$ se realize em X_r $\forall 0 \leq r \leq \xi$ e definamos

$$V_r = \frac{X_r - Y_r}{L(r)}, W_r = \frac{Z_r - Y_r}{S(r)} \in S_1(0),$$

em que Z_r é o ponto de $B \setminus B_r(0)$ tal que $F(r) = |X_r - Z_r|$ e $S(r) = |Z_r - Y_r|$.

Temos, $X_r = (x_r, h_A(x_r))$, $Y_r = (y_r, h_B(y_r))$, $Z_r = (z_r, h_B(z_r))$. Assim,

$$W_r = \frac{1}{S(r)}(z_r - y_r, h_B(z_r) - h_B(y_r))$$

e, sendo

$$q_r = \frac{h_B(z_r) - h_B(y_r)}{z_r - y_r},$$

temos, pelo Teorema do Valor Médio, que

$$\lim_{r \to 0} q_r = h_B'(0) = 0.$$

Então,

$$\lim_{r \to 0} W_r = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\sqrt{1 + q_r^2}}(1, q_r) = (1, 0) = \mathbf{e}_1.$$

Como

$$\begin{aligned} L(r) + F(r) &\geq S(r) \geq L(r) - F(r) \\ S(r) + F(r) &\geq L(r) \geq S(r) - F(r) \end{aligned}$$

e

$$\lim_{r\to 0}\frac{F(r)}{L(r)}=0$$

temos que

$$\lim_{r\to 0}\frac{S(r)}{L(r)}=\lim_{r\to 0}\frac{L(r)}{S(r)}=1.$$

Afirmamos que $\lim_{r\to 0}V_r=\mathbf{e}_1$. Com efeito, sendo $c(r)=\langle V_r,W_r\rangle$, temos que

$$F(r)^2=L(r)^2+S(r)^2-2L(r)\,S(r)\,c(r)\,.$$

Assim,

$$0=\lim_{r\to 0}\left(\frac{F(r)}{L(r)}\right)^2=\lim_{r\to 0}\left(1+\left(\frac{S(r)}{L(r)}\right)^2-2\frac{S(r)}{L(r)}c(r)\right)=2-2\lim_{r\to 0}c(r)\,.$$

E, portanto, $\lim_{r\to 0}c(r)=1$.

Agora, sejam

$$U_r=-\frac{Y_r}{r}\text{ e }d(r)=\langle U_r,V_r\rangle\,.$$

É fácil ver que $\lim_{r\to 0}U_r=-\mathbf{e}_1$. Assim,

$$\lim_{r\to 0}d(r)=\langle -\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1\rangle=-1$$

Por outro lado, sejam

$$U_r'=-\frac{X_r}{r}\text{ e }e(r)=\left\langle U_r',-V_r\right\rangle$$

Como $\left|\overline{0X_r}\right|=r=\left|\overline{0Y_r}\right|$, temos que $e(r)=d(r)$. É fácil ver que $\lim_{r\to 0}U_r'=-\mathbf{e}_1$. Assim,

$$-1=\lim_{r\to 0}d(r)=\lim_{r\to 0}e(r)=\lim_{r\to 0}\left\langle U_r',-V_r\right\rangle=\langle -\mathbf{e}_1,-\mathbf{e}_1\rangle=1.$$

O que é, notoriamente, um absurdo.

Agora, o caso em que $F(r)$ se realiza em Y_r é estudado de maneira análoga. ■

Lema 4.2 (de Comparação das Ordens). Sejam $(A,a) \in \mathcal{C}$, $R = \{A_1, \ldots, A_n\}$ uma boa decomposição de (A,a) e consideremos a seguinte decomposição de Puiseux

$$dist\left(A_i \cap S_r(a), A_j \cap S_r(a)\right) = r^{\beta_{ij}} h_{ij}(r).$$

Então $\beta_{ij} = H_a(A_i, A_j)$.

Prova. No caso em que os vetores tangentes a A_i e A_j, em a, "apontam na mesma direção", temos que A_i e A_j são gráficos como nas hipóteses do Lema anterior, porém esse caso já está estudado. Suponhamos que ocorra o contrário. Nesse caso, podemos construir cones K_i e K_j com vértices em a, tais que $K_i \cap K_j = \{a\}$ e para $\delta > 0$, suficientemente pequeno, $A_i \cap B_\delta(a) \subset K_i$ e $A_j \cap B_\delta(a) \subset K_j$.

Sendo

$$d(r) = dist\left(K_i \setminus B_r(a), K_j \setminus B_r(a)\right),$$

sabemos que

$$\lim_{r \to 0} \frac{d(r)}{r} = d \neq 0$$

e

$$d(r) \leq dist\left(A_i \setminus B_r(a), A_j \setminus B_r(a)\right) \leq dist\left(A_i \cap S_r(a), A_j \cap S_r(a)\right) \leq 2r,$$

daí

$$\beta_{ij} = 1 = H_a(A_i, A_j).$$

■

Lema 4.3. Seja $f : [0,\delta] \to \mathbb{R}$ semi-algébrica, de classe C^1, positiva em $(0,\delta]$, tal que $f(0) = f'(0) = 0$ e seja A o gráfico de f. Então, existem $\delta_2 > \delta_1 > 0$ tais que $P : ([0,\delta] \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $p(X) = |X|$, é bi-lipschitziana.

Prova. Seja $f(x) = x^{\alpha} h(x)$ a decomposição de Puiseux de f. Como $f'(0) = 0$, temos $\alpha > 1$. Agora, como $h(0) > 0$ e $\lim_{x \to 0} x h'(x) = 0$, podemos escolher δ_1 tal que

$$(\alpha - 1) h(x) + x h'(x) > 0, \forall x \in [0, \delta_1].$$

Logo,

$$f'(x) > \frac{f(x)}{x}, \forall x \in (0, \delta_1].$$

Portanto,

$$m(x) = \frac{f(x)}{x}$$

é estritamente crescente em $[0, \delta_1]$. Como conseqüência desse fato, temos a seguinte propriedade de convexidade: $\forall x \in [0, \delta_1]$ a curva $\gamma(t) = (t, f(t))$ com $0 \leq t \leq x$, está abaixo do segmento $\overline{0X}$, em que $X = (x, f(x))$.

De volta ao nosso problema, trivialmente, temos que:

$$|P(Y) - P(X)| = ||Y| - |X|| \leq |X - Y|, \forall X, Y \in \mathbb{R}^2.$$

Sendo $\delta_2 > 0$ tal que $P(A \cap ([0, \delta_1] \times \mathbb{R})) = [0, \delta_2]$ e $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a projeção $\pi(x, y) = x$, temos que:

$$|t - s| \geq \left|\pi\left(P^{-1}(t)\right) - \pi\left(P^{-1}(s)\right)\right|, \forall t, s \in [0, \delta_2] \quad (*)$$

De fato, sem perda de generalidade, suponhamos que $s < t$, e consideremos $E = (e_1, e_2)$ o ponto na interseção $\overline{0P^{-1}(t)} \cap S_s(\mathbf{0})$. Como $t - s$ é a medida da hipotenusa de um triângulo tal que um dos catetos mede $\pi(P^{-1}(t)) - e_1$, temos que $t - s \geq \pi(P^{-1}(t)) - e_1$. Agora, pela propriedade de convexidade discutida no início da demonstração, temos que $P^{-1}(s) = (b_1, b_2)$ com $b_2 \leq e_2$. Agora, como $b_1^2 + b_2^2 = s^2 = e_1^2 + e_2^2$, temos que $\pi(P^{-1}(s)) = b_1 \geq e_1$. Daí,

$$t - s \geq \pi\left(P^{-1}(t)\right) - e_1 \geq \pi\left(P^{-1}(t)\right) - \pi\left(P^{-1}(s)\right).$$

Para finalizar, seja $m \in \mathbb{R}$ tal que $\left|f'(t)\right| \leq m$, $\forall\, 0 \leq t \leq \delta_1$. Então, dados $0 \leq y \leq x \leq \delta_1$, $X = (x, f(x))$ e $Y = (y, f(y))$, temos:

$$|X - Y| \leq \int_y^x \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt \leq \sqrt{1 + m^2}\, |x - y| = \sqrt{1 + m^2}\, |\pi(X) - \pi(Y)|.$$

Então, sendo $X = P^{-1}(t)$ e $Y = P^{-1}(s)$, temos:

$$\left|P^{-1}(t) - P^{-1}(s)\right| \leq \sqrt{1+m^2}\left|\pi\left(P^{-1}(t)\right) - \pi\left(P^{-1}(s)\right)\right| \leq \sqrt{1+m^2}\,|t-s|,$$

em que a última desigualdade decorre de $(*)$.

Daí, temos que P^{-1} também é de Lipschitz. ■

Lema 4.4. Sejam $(A, 0), (B, 0) \in \mathcal{C}$, $R = \{A_1, \ldots, A_n\}$, $S = \{B_1, \ldots, B_n\}$ boas decomposições de $(A, 0)$ e $(B, 0)$, respectivamente. Se

$$H_0(A_i, A_j) = H_0(B_i, B_j),\ \forall\, i, j,$$

então $(A, 0)$ e $(B, 0)$ são localmente equivalentes bi-Lipschitz.

Prova. Consideremos $\delta > 0$ suficientemente pequeno, tal que $A_i \cap B_\epsilon(0)$, $i = 1, \ldots, n$ sejam as componentes conexas de $A \cap B_\epsilon(0)$, $\sharp A \cap S_\epsilon(0) = 1$ e $B_i \cap B_\epsilon(0)$, $i = 1, \ldots, n$ sejam as componentes conexas de $B \cap B_\epsilon(0)$, e $\sharp B \cap S_\epsilon(0) = 1\ \forall\, 0 \leq \epsilon \leq \delta$.

Sejam $A' = A \cap B_\delta(0)$, $B' = B \cap B_\delta(0)$ e $\phi : A' \to B'$ tal que $\phi(X)$ é o ponto na interseção $B_i \cap S_{|X|}(0)$ em que i é tal que $X \in A_i$. Como R e S são boas decomposições de $(A, 0)$ e $(B, 0)$, respectivamente, temos que ϕ é uma bijeção. Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, temos que A_i é gráfico sobre sua tangente, no ponto 0, do tipo discutido no Lema 4.3. Logo, existem $0 < \delta_1^i < \delta_2^i \in \mathbb{R}$ tais que

$$\phi_{A_i} : A_i \cap \left(\left[0, \delta_1^i\right] \times \mathbb{R}\right) \to \left[0, \delta_2^i\right]$$

dada por $\phi_{A_i}(X) = |X|$, é bi-Lipschitz.

Seja $\delta = \min_i \{\delta_2^i\}$. Analogamente, temos que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existem $0 < \epsilon_1^i < \epsilon_2^i \in \mathbb{R}$ tais que

$$\phi_{B_i} : B_i \cap \left(\left[0, \epsilon_1^i\right] \times \mathbb{R}\right) \to \left[0, \epsilon_2^i\right]$$

dada por $\phi_{B_i}(Y) = |Y|$ é bi-Lipschitz. Sejam $\epsilon = \min_i \{\epsilon_2^i\}$, $\xi = \min\{\delta, \epsilon\}$, $V = B_\xi(0) \cap A$ e $W = B_\xi(0) \cap B$.

Afirmamos que $\phi_V := \phi_{|V} : V \to W$ é bi-Lipschitz. Com efeito, claramente ϕ_V está bem definida, ϕ_V é injetiva porque ϕ é injetiva, ϕ_V é sobrejetiva pois R e S são boas decomposições. Agora temos que $\phi_i := \phi_{B_i}^{-1} \circ \phi_{A_i}$ é bi-Lipschitz, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Então, seja $\lambda > 0$ uma constante de Lipschitz, que atue como tal, para cada ϕ_i. Também, para cada $i \neq j$ seja $f_{ij}^C : [0, \xi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_{ij}^C(r) = dist\left(C_i \cap S_r(\mathbf{0}), C_j \cap S_r(\mathbf{0})\right)$$

e $g_{ij}^C : [0, \xi] \to R$ dada por

$$g_{ij}^C(r) = dist\left(C_i \setminus B_r(\mathbf{0}), C_j \setminus B_r(\mathbf{0})\right),$$

$C = A, B$. Consideremos as decomposições de Puiseux

$$f_{ij}^A(r) = r^{\alpha_{ij}} h_{ij}^A(r), \; f_{ij}^B(r) = r^{\beta_{ij}} h_{ij}^B(r)$$

e

$$g_{ij}^A(r) = r^{\gamma_{ij}} l_{ij}^A(r), \; g_{ij}^B(r) = r^{\zeta_{ij}} l_{ij}^B(r).$$

Por hipótese, $\alpha_{ij} = H_0(A_i, A_j) = H_0(B_i, B_j) = \beta_{ij}$. Pelo Lema 4.2, temos $\gamma_{ij} = \alpha_{ij}$ e $\zeta_{ij} = \beta_{ij}$. Seja

$$m = \sup_{0 \le r \le \xi} \left\{ \frac{h_{ij}^A(r)}{l_{ij}^A(r)}, \frac{h_{ij}^B(r)}{l_{ij}^A(r)} \right\}.$$

Então, dados $X \in A_i$ e $Y \in A_j$, suponhamos $r = |X| \le |Y| \le \xi$ e seja $Z \in A_j \cap S_r(\mathbf{0})$, temos:

$$\frac{|\phi(X) - \phi(Y)|}{|X - Y|} \le \frac{|\phi(X) - \phi(Z)|}{|X - Y|} + \frac{|\phi(Z) - \phi(Y)|}{|X - Y|} \le \frac{f_{ij}^B(r)}{g_{ij}^A(r)} + \frac{|\phi(Z) - \phi(Y)|}{|X - Y|}.$$

Como

$$\frac{f_{ij}^B(r)}{g_{ij}^A(r)} \le m \text{ e } \lambda \text{ é uma constante de Lipschitz de } \phi_{A_i},$$

temos

$$\frac{|\phi(X) - \phi(Y)|}{|X - Y|} \le m + \frac{|\phi(Z) - \phi(Y)|}{|X - Y|} \le m + \lambda \frac{|Z - Y|}{|X - Y|}.$$

5 Realização geométrica de SCH.

Usando o Lema de Comparação das Ordens, não é difícil verificar que se Γ é o semicomplexo de A no ponto a para algum elemento $(A, a) \in \mathcal{C}$, então Γ é um SCH. Diante desse resultado, surge uma pergunta natural, a saber:

Dado um SCH Γ, existe $(A, a) \in \mathcal{C}$ tal que Γ é o semicomplexo de A no ponto a?

O teorema que discutiremos a seguir, dá uma resposta positiva à pergunta acima.

Teorema 5.1. Dado $(R, \alpha) \in \mathfrak{R}$; $[R, \alpha]$ é SCH (e $R = \{1, \ldots, n\}$), existem gráficos

$$A_i = \left\{(x, f_i(x)) \in \mathbb{R}^2;\, 0 \leq x \leq \epsilon\right\},$$

tais que f_i é uma função semi-algébrica diferenciável e $f_i(0) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Além disso, $A_1, \ldots, A_n$ é uma boa decomposião de $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ no ponto $\mathbf{0} = (0, 0)$ e, finalmente, $\boldsymbol{\alpha_{ij}} = H_{\mathbf{0}}(A_i, A_j)$.

Demonstração. Essa demonstração será feita por indução sobre $\sharp R$. No Caso $\sharp R = 1$, nada temos a fazer. No caso $\sharp R = 2$ os triângulos de Hölder resolvem o nosso problema. Então, por, hipótese de indução, suponhamos que o teorema seja válido para todo $(R, \alpha) \in \mathfrak{R}$; $[R, \alpha]$ é SCH e $\sharp R = n$. Consideremos $(R, \alpha) \in \mathfrak{R}$; $[R, \alpha]$ é SCH e $\sharp R = n+1$. Seja $\alpha_{i_0 j_0} = \max\{\alpha_{ij}\}$. Então, considerando (R, α) modificado por uma permutação $\Phi : R \to R$ tal que $\Phi(i_0) = 1$ e $\Phi(j_0) = 2$. Temos que $(R, \alpha) \in \mathfrak{R}$; $[R, \alpha]$ é SCH, $\sharp R = n + 1$ e $\alpha_{12} = \max\{\alpha_{ij}\}$. Denotemos $q = \alpha_{12}$. Então, sejam $S = \{2, \ldots, n+1\}$ e $\beta = \alpha_{|S \times S}$. Temos que $[S, \beta]$ é um SCH de n vértices. Logo, por hipótese de indução, existem funções semi-algébricas $g_2, \ldots, g_{n+1}$ diferenciáveis num intervalo $[0, \delta]$ tais que $g_k(0) = 0$, $k = 2, \ldots, n+1$, e $\beta_{ij} = H_{\mathbf{0}}(B_i, B_j)$, em que

$$B_i = \left\{(x, g_i(x)) \in \mathbb{R}^2;\, 0 \leq x \leq \epsilon\right\}; i = 2, \ldots, n+1,$$

nos dá uma boa decomposição de $B = \bigcup_{i=2}^{n+1} B_i$ no ponto $\mathbf{0} = (0, 0)$. Observemos que existem racionais $q_2, \ldots, q_{n+1} \leq q$ tais que $g_i(x) = x^{q_i} h_i(x)$ (decomposição de Puiseux), $i = 2, \ldots, n+1$.

Daí,

$$\frac{|\phi(X) - \phi(Y)|}{|X - Y|} \leq m + \lambda \left(\frac{|Z - X|}{|X - Y|} + \frac{|X - Y|}{|X - Y|} \right) \leq m + \lambda + \lambda \frac{f_{ij}^A(r)}{g_{ij}^A(r)}.$$

Como

$$\frac{f_{ij}^A(r)}{g_{ij}^A(r)} \leq m,$$

temos

$$|\phi(X) - \phi(Y)| \leq (m + \lambda + \lambda m) |X - Y|.$$

Assim, concluímos que ϕ_V é de Lipcshitz. Analogamente, podemos mostrar que ϕ_V^{-1} é de Lipschitz. ■

Então, fica demonstrado o teorema de classificação. ■

Sejam $\xi > 0$ e

$$g_1(x) = g_2(x) + \xi x^q.$$

tais que $g_1(x) \neq g_i(x)$ para todo $i = 2, \ldots n+1$ e todo $x \in [0, \delta']$. Seja B_1 o gráfico de g_1. Então, sendo $B' = \bigcup_{i=1}^{n+1} B_i$, claramente $\boldsymbol{\alpha_{ij}} = H_0(B_i, B_j)$ para quaisquer $2 \leq i < j \leq n+1$. E, pelos Corolários 4.1 e 4.2, temos que $\alpha_{1i} = H_0(B_1, B_i)$ para $i = 2, \ldots, n+1$. Então, definindo

$$A_i = B_{\Phi(i)} \text{ e } f_i(x) = g_{\Phi(i)}(x) \text{ para } i = 1, \ldots, n+1$$

e sendo $A = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$, obtemos o desejado. ■

6 Conexão com Mergulhos Normais

Dado um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ semi-algébrico conexo, podemos considerar duas métricas naturais em A, a primeira é a métrica euclidiana induzida (met. ind.) e a segunda é a que definiremos a seguir:

dados $x, y \in A$, seja

$$C_{xy} = \{\phi : [0,1] \to A, \text{ contínua; } \phi(0) = x \text{ e } \phi(1) = y\}.$$

Seja

$$d(x,y) = \inf_{\phi \in C_{xy}} l(\phi)$$

em que

$$l(\phi) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})| \, ; \, 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1 \right\}.$$

Temos que d define uma métrica em A, veja [Yo]. Dizemos que d é a *métrica geodésica relativa à métrica induzida* (met. geod.).

Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in A$. Dizemos que (A, a) é *localmente normalmente mergulhado* (l.n.m.) se existem $0 < c_1 \leq c_2$ e uma vizinhança V de a em A tal que

$$c_1 |X - Y| \leq d(X,Y) \leq c_2 |X - Y| \quad , \forall X, Y \in V.$$

Isto é, as métricas ind. e geod. quando restritas a V são equivalentes.

Observação 6.1. A condição de ser l.n.m. é um invariante local de Lipschitz, melhor dizendo, dados $(A,a), (B,b) \in \mathcal{C}$ tais que $(A,a) \sim (B,b)$, então (A,a) é l.n.m. se, e só se, (B,b) é l.n.m.

Exemplo 6.1. Sejam $m \in \mathbb{R}$ e

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2;\ [y = 0 \text{ e } 0 \leq x \leq 1] \text{ ou } [y = mx \text{ e } 0 \leq x \leq 1] \right\}$$

Afirmamos que $(A, \mathbf{0})$ é localmente normalmente mergulhado. De fato, dados $X, Y \in A$, sendo

$$\lambda = \sqrt{1 - \frac{1 + \cos\theta}{2}}, \text{ em que } \tan\theta = m,$$

temos

$$\lambda\left(|X| + |Y|\right) \leq \sqrt{|X|^2 + |Y|^2 - 2\,|X|\,|Y|\cos\theta}.$$

Portanto,

$$\lambda d\left(X, Y\right) \leq |X - Y| \leq d\left(X, Y\right).$$

Como queríamos mostrar.

Dizemos que o semicomplexo Γ é *trivial* quando $\forall\ (R, \alpha) \in \Gamma$, $\alpha\left(r, s\right) = 1$ $\forall\, r, s \in R$ distintos.

Exemplo 6.2. Consideremos a curva semi-algébrica A, definida no Exemplo 6.1. Pelo Exemplo 3.2, temos que $\Gamma_A\left(\mathbf{0}\right)$ é trivial. Em geral, temos

Teorema 6.1. Seja $(A, a) \in \mathcal{C}$. (A, a) é l.n.m. se, e só se, $\mathbf{\Gamma_A}\left(a\right)$ é trivial.

Prova. Suponhamos que (A, a) seja localmente normalmente mergulhado. Então existem constantes $0 < c_1 \leq c_2$ e uma vizinhança V de a em A tais que

$$c_1 d\left(X, Y\right) \leq |X - Y| \leq c_2 d\left(X, Y\right), \forall\, X, Y \in V.$$

Seja $A_1, \ldots, A_n$ uma boa decomposição de (A, a). Dados $i \neq j$, para $r > 0$, suficientemente pequeno, sejam X_r e Y_r os pontos que constituem as interseções $S_r\left(a\right) \cap A_i$ e $S_r\left(a\right) \cap A_j$, respectivamente. Temos,

$$\begin{aligned} 2r &\geq |X_r - Y_r| \geq c_1 d\left(X_r, Y_r\right) \\ &= c_1\left(d\left(X_r, a\right) + d\left(a, Y_r\right)\right) \\ &\geq c_1\left(r + r\right) = 2c_1 r. \end{aligned}$$

Pelo Lema de Comparação das Ordens, $H_a(A_i, A_j) = 1$.

Reciprocamente, suponhamos que $\Gamma_A(a)$ seja trivial. Pelo Teorema de Classificação temos que

$$(A, a) \sim (B, b)$$

em que $b = \mathbf{0}$ e

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1 \text{e} \ \left[(y = 0) \text{ ou } (y = 1.x) \text{ ou } \ldots \text{ ou } (y = n.x)\right]\right\}$$

em que $n = v(\Gamma_A(a))$. Por outro lado, pelo Exemplo 6.1, temos que (B, b) é l.n.m. Finalmente, pela Observação 6.1, temos que (A, a) é l.n.m. ■

Referências

[BCR] Bochnak J., Coste M., Roy M.F. Géométrie algébrique réelle. Ergbnisse der Mathematik, Springer-verlag (1986).

[Bi] Birbrair L. Local bi-Lipschitz classification of 2-dimensional semialgebraic sets. Preprint (1996).

[BR] Benedetti R., Risler J-J. Real algebraic and semialgebraic sets. Hermann (1990).

[Pa] Pawlucki W. Le théorème de Puiseux pour une application sous-anlytique. Bull. Pol. Acad. Sci. Math. Vol. 32, No. 9-10 (1984).

[Yo] Yomdin J. Metric properties of semialgebraic sets and mappings and their applications in smooth analysis. Proc. of LaRabida Conf. Hermann (1991).

Universidade Federal do Ceará
Departamento de Matemática
Campus do Pici, Bloco 914
CEP. 60455-760