UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ELIZEU AGUIAR SILVA

DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS: FUNDAMENTOS, PROBLEMAS E ABORDAGENS DIDÁTICAS NO ENSINO MÉDIO

FORTALEZA
2025

ELIZEU AGUIAR SILVA

DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS: FUNDAMENTOS, PROBLEMAS E ABORDAGENS DIDÁTICAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.

Orientador: Prof. Dr. Frederico Vale Girão.

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S579d Silva, Elizeu Aguiar.
Desigualdades geométricas: fundamentos, problemas e aplicações no ensino médio / Elizeu Aguiar Silva. – 2025.
79 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2025.
Orientação: Prof. Dr. Frederico Vale Girão.

1. Desigualdades (matemática). 2. Recursos eletrônicos de informação. 3. Matemática-História. 4. Competições escolares. I. Título.

CDD 510

ELIZEU AGUIAR SILVA

DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS: FUNDAMENTOS, PROBLEMAS E ABORDAGENS DIDÁTICAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.

Aprovada em: 20/08/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Frederico Vale Girão (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Antônio Caminha Muniz Neto
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Weslley Marinho Lozório
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

A Deus, pela força e capacidade para concluir este curso; aos meus pais, pelo apoio incondicional; à minha esposa, Gaby Sales, pelo incentivo constante; e ao meu irmão, Esdras, por estar presente nos momentos mais difíceis.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao divino por me proporcionar a vida em sua essência e raridade, bem como pelo poder de conhecer e aprender.

Sou grato à minha mãe e ao meu pai, Juvenalda e Eliseu, por todo o esforço, investimento, cuidado e amor dedicados a mim.

À minha esposa, Gaby, que, sem dúvida alguma, foi minha maior incentivadora na conclusão deste curso e minha companheira inestimável.

Ao meu irmão, Esdras, a quem devo minha vida, pois foi meu principal apoio no momento mais difícil que enfrentei até hoje.

Aos meus queridos e estimados colegas, amigos e irmãos de turma, pois, sozinho, jamais teria conseguido concluir as disciplinas e enfrentar os desafios propostos. A parceria e as amizades firmadas durarão pelo resto dos meus dias.

À minha diretora escolar, Regiane Sales, que, com muita articulação, diálogo e empatia, tornou minha jornada neste curso mais leve e possível.

Aos grandes professores da Universidade Federal do Ceará, doutores do conhecimento, de quem tive a honra de ser o mais humilde aluno. O aprendizado que vocês me proporcionaram transformou minha visão da matemática e elevou minha prática pedagógica ao mais alto nível.

Agradeço, em especial, ao meu orientador, Prof. Dr. Frederico Vale Girão, que, com excelência, disponibilidade e muita dedicação, conduziu a produção deste trabalho.

Finalizo agradecendo às instituições que, em parceria, possibilitam a existência deste curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT): a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), por meio do Programa de Pós-Graduação stricto sensu para a Qualificação de Professores da Rede Pública de Educação Básica (PROEB), e à Universidade Federal do Ceará (UFC). Minha imensa gratidão pela oportunidade de realizar este sonho.

"A geometria é o meio mais direto de ligar o mundo da abstração ao mundo da realidade" (Sophus Lie).

RESUMO

Esta dissertação aborda três desigualdades geométricas clássicas — Ptolomeu, Erdös-Mordell e Isoperimétrica — sob uma perspectiva histórica, teórica e pedagógica. Inicialmente, são apresentados os fundamentos conceituais e a evolução dessas desigualdades desde suas origens até suas formulações atuais. Em seguida, analisam-se aplicações em problemas de competições matemáticas, evidenciando sua relevância para a resolução de questões complexas. Por fim, é proposta uma sequência didática para o ensino médio, apoiada no uso do *software GeoGebra* e outros recursos digitais, com vistas a promover visualizações dinâmicas e estimular a aprendizagem ativa. A metodologia adotada compreende revisão bibliográfica sistemática, estudo de fontes primárias e elaboração de atividades práticas com tecnologias digitais. Como resultado, disponibiliza-se um material didático que integra rigor matemático, contexto histórico e recursos tecnológicos, contribuindo para o ensino de matemática no nível médio e para a formação de professores, ao oferecer estratégias inovadoras para a abordagem de tópicos avançados em geometria.

Palavras-chave: desigualdades (matemática); recursos eletrônicos de informação; matemática - história; ensino médio; competições escolares.

ABSTRACT

This dissertation addresses three classical geometric inequalities — Ptolemy's, Erdős-Mordell, and the Isoperimetric Inequality — through historical, theoretical, and pedagogical perspectives. First, it presents the conceptual foundations and traces the development of these inequalities from their origins to modern formulations. Then, it examines their applications in mathematical competition problems, highlighting their relevance for solving complex questions. Finally, it proposes a teaching sequence for high school supported by *GeoGebra software* and other digital resources, aiming to provide dynamic visualizations and foster active learning. The methodology combines a systematic literature review, analysis of primary sources, and the design of practical activities using digital technologies. As a result, this work offers a didactic resource that integrates mathematical rigor, historical context, and technological tools, contributing to high school mathematics education and teacher training by providing innovative strategies for approaching advanced geometry topics.

Keywords: inequalities (mathematics); electronic information resources; mathematics - history; high school education; school competitions.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
DI	Desigualdade Isoperimétrica
EF	Ensino Fundamental
EM	Ensino Médio
IMO	Olimpíada Internacional de Matemática
LLL	Lado-Lado-Lado
MA	Média Aritmética
MG	Média Geométrica
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
UFC	Universidade Federal do Ceará

LISTA DE SÍMBOLOS

$\in$	Pertence a
Δ	Triângulo
π	Letra grega pi
$\angle$	Ângulo
$\equiv$	Congruente a
$\Longleftrightarrow$	Equivalente a
$A_{\text{máx}}$	Área máxima
$\mathbb{R}^2$	Conjunto de pontos do plano com coordenadas reais
$\mathbb{R}^{2n}$	Conjuntos dos pontos com $2n$ coordenadas reais
P_n	Polígono de n lados
$\sum$	Somatório
sin	Seno de
$\perp$	Perpendicular a
cos	Cosseno de
$\square$	Como queríamos demonstrar
$\sim$	Semelhante a
cot	Cotangente de

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A geometria, enquanto ramo fundamental da Matemática, oferece um vasto campo para o estudo de propriedades, relações e estruturas que conectam elementos intuitivos a conceitos abstratos. Dentro desse contexto, as desigualdades geométricas assumem um papel de destaque por estabelecerem vínculos entre medidas de segmentos, ângulos e áreas, promovendo soluções elegantes para problemas que envolvem otimização e comparação de grandezas. Tais desigualdades não apenas revelam a beleza intrínseca da Matemática, mas também encontram aplicação prática em diversos cenários, desde a modelagem geométrica até desafios de competições matemáticas.

Entre as desigualdades mais notórias, destacam-se a Desigualdade de Ptolomeu, que estabelece uma relação entre lados e diagonais em quadriláteros; a Desigualdade de Erdös-Mordell, que relaciona distâncias internas em um triângulo; e a Desigualdade Isoperimétrica, cuja essência está na maximização da área para um perímetro fixo. Cada uma dessas desigualdades apresenta não apenas valor teórico, mas também potencial pedagógico, na medida em que possibilita explorar conexões entre diferentes áreas da Matemática, como geometria plana, trigonometria, álgebra e análise.

Embora o contexto histórico não seja o eixo central deste trabalho, faz-se pertinente mencionar brevemente a trajetória dessas desigualdades. Elas emergem de problemas clássicos que motivaram gerações de matemáticos e se mantêm atuais, seja pela elegância das demonstrações, seja pelas variações e generalizações que inspiram. Essas características reforçam sua relevância para a formação matemática, tanto no ensino médio quanto em ambientes de iniciação científica, como olimpíadas.

O presente trabalho tem como propósito analisar essas três desigualdades sob uma perspectiva que integra teoria, aplicações e prática pedagógica. Para isso, foram definidas as seguintes diretrizes: apresentar enunciados e demonstrações das desigualdades selecionadas, com uma abordagem acessível, sem perder o rigor matemático; discutir aplicações por meio da resolução detalhada de problemas de competições, enfatizando estratégias criativas que podem ser adaptadas ao ensino; e propor sequências didáticas que utilizam recursos tecnológicos, em especial o *software GeoGebra*, possibilitando visualizações dinâmicas e interativas que favoreçam a construção de conceitos e a aprendizagem ativa.

A metodologia adotada fundamenta-se em três etapas complementares. A primeira consiste na revisão bibliográfica de obras clássicas e artigos contemporâneos que abordam as desigualdades estudadas. A segunda etapa envolve a análise e seleção de problemas que ilustrem a aplicabilidade das desigualdades em contextos desafiadores, como olimpíadas. Por fim, a terceira etapa refere-se à elaboração de propostas pedagógicas voltadas para o ensino médio, em consonância com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), contemplando estratégias que associem conteúdos avançados à prática docente e promovam um ensino significativo.

A organização desta dissertação tem a seguinte estrutura: inicialmente, apresenta-se um capítulo dedicado ao estudo teórico das desigualdades geométricas escolhidas, com demonstrações e observações complementares; em seguida, discute-se a aplicação dessas desigualdades na resolução de problemas selecionados de competições matemáticas; e, por último, expõem-se as sequências didáticas desenvolvidas para a sala de aula, fundamentadas em metodologias ativas e no uso de tecnologias digitais. Ao final, são apresentadas as considerações gerais sobre as contribuições do trabalho, suas limitações e possíveis desdobramentos para pesquisas futuras.

Espera-se que esta pesquisa contribua para a prática docente, oferecendo ao professor de Matemática do ensino médio um material estruturado, que alia rigor teórico, problematização e recursos tecnológicos. Ao integrar esses elementos, busca-se não apenas ampliar a compreensão dos estudantes acerca das desigualdades geométricas, mas também estimular o pensamento crítico, a criatividade e o interesse pela Matemática como ciência viva, dinâmica e essencial para a compreensão do mundo.

2 DESIGUALDADES CLÁSSICAS

As desigualdades geométricas são fundamentais na análise de propriedades de figuras geométricas, como quadriláteros e triângulos, e no entendimento de conceitos como paralelismo e perpendicularidade no espaço. As desigualdades surgem naturalmente ao considerarmos elementos como ângulos, lados e projeções de figuras geométricas. Segundo Euclides, em sua obra *Os Elementos*, a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, e as desigualdades geométricas podem ser usadas para estabelecer relações importantes entre os lados e os ângulos das figuras (Euclides, 2009) . Exemplo disso é a desigualdade triangular, que afirma que a soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo é sempre maior que o comprimento do terceiro lado. Essa desigualdade é crucial para determinar a viabilidade de formar um triângulo a partir de três segmentos de reta. Segundo Stewart, ao estudar quadriláteros e suas propriedades no espaço tridimensional, essa desigualdade também é aplicável para estabelecer as relações entre lados opostos e as diagonais de tais figuras (Stewart, 2016) .

Trataremos, a seguir, de algumas desigualdades geométricas clássicas, abordando o contexto histórico e uma demonstração de cada uma. É notório que certas desigualdades possuem versões específicas para algumas classes de sólidos e polígonos geométricos, como a desigualdade de Ptolomeu para tetraedros e a desigualdade isoperimétrica para triângulos.

2.1 Desigualdade de Ptolomeu

Esta seção apresenta um breve relato sobre as origens históricas e o desenvolvimento da desigualdade de Ptolomeu. Também aborda uma demonstração usando inversão geométrica, baseada na obra de Coxeter e Greitzer (1967), e a versão espacial da desigualdade.

2.1.1 Breve histórico do Teorema e da Desigualdade de Ptolomeu

O Teorema de Ptolomeu tem sua origem na obra do matemático e astrônomo greco-egípcio Cláudio Ptolomeu (100–170 *d.C.*), especialmente no *Almagesto*, um tratado de astronomia composto por treze livros. No Livro I, Ptolomeu desenvolve uma tabela de cordas com base em relações geométricas que hoje identificamos como trigonométricas. Entre os resultados apresentados está o teorema que leva seu nome, enunciado da seguinte forma: em qualquer quadrilátero cíclico, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos (Neugebauer, 1975) .

Esse teorema tem grande relevância histórica e prática, sendo utilizado por Ptolomeu para calcular relações entre ângulos e cordas, antes mesmo da formalização das funções trigonométricas (Berggren, 2007). Com o avanço da matemática, esse resultado foi generalizado para quadriláteros convexos quaisquer, levando à chamada Desigualdade de Ptolomeu. Nesse contexto mais amplo, afirma-se que: em qualquer quadrilátero, o produto das diagonais é menor do que ou igual à soma dos produtos dos lados opostos; com igualdade se, e somente se, o quadrilátero for cíclico (Apostol, 1967).

No século XX, I. J. Schoenberg introduziu a noção de espaços métricos ptolomaicos, caracterizando os espaços métricos em que a desigualdade de Ptolomeu é satisfeita para quaisquer quatro pontos (Schoenberg, 1952). Demonstrou-se que esses espaços correspondem, em termos geométricos, aos subespaços de espaços com produto interno real.

Além disso, Apostol (Apostol, 1967) mostrou que a desigualdade de Ptolomeu pode ser deduzida diretamente da desigualdade do triângulo no conjunto dos números complexos, e que ela também é equivalente à desigualdade da métrica cordal, muito utilizada em análise complexa.

2.1.2 Inversão geométrica

As ideias apresentadas nesta seção podem ser lidas no artigo de Teixeira (2001b).

Definição: A inversão de centro (ou pólo) O e raio k leva um ponto A a um ponto A' tal que:

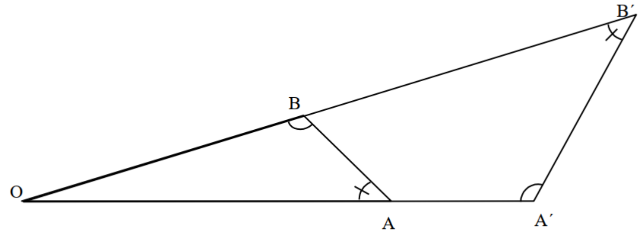
$$A' \in \overleftrightarrow{OA} \quad \text{e} \quad OA \cdot OA' = k^2.$$

Nota: Usaremos sempre O para o pólo da inversão, k para o seu raio e $A', B', \ldots$ para os transformados de $A, B, \ldots$. Note que $(A')' \equiv A$.

Propriedade 1. (Transporte de ângulos) Os triângulos OAB e $OB'A'$ (Figua 1) são semelhantes; em particular:

$$\angle OAB = \angle OB'A' \quad \text{e} \quad \angle OBA = \angle OA'B'.$$

Figura 1 – Triângulos OAB e $OB'A'$



Fonte: (Teixeira, 2001b, p. 1).

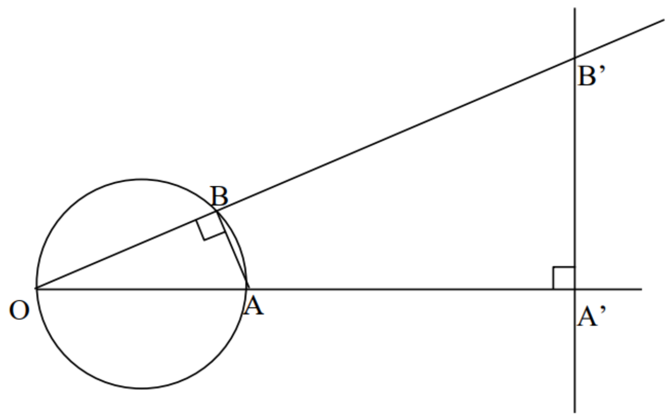
Observação: O segmento $\overline{A'B'}$ não é o inverso do segmento $\overline{AB}$.

Propriedade 2. (Distância entre pontos transformados)

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{k^2}{OA \cdot OB}.$$

Propriedade 3. O inverso de um círculo de diâmetro $\overline{OA}$ (passando pelo pólo O) é uma reta perpendicular a $\overline{OA}$ (Figura 2).

Figura 2 – Círculo de diâmetro $\overline{OA}$ e reta perpendicular a $\overline{OA}$



Fonte: (Teixeira, 2001b, p. 1).

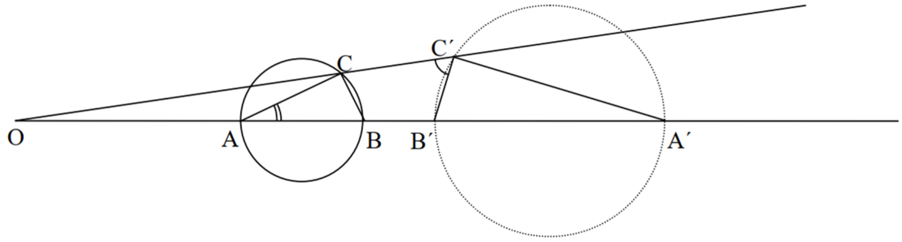
Corolário: O inverso de uma reta r (que não passa pelo pólo O) é uma circunferência de centro C (passando por O), tal que a reta $\overline{OC}$ é perpendicular a r.

Propriedade 4. O inverso de um círculo (de diâmetro $\overline{AB}$ tal que $O \in \overleftrightarrow{AB}$) é o círculo de diâmetro $\overline{A'B'}$ (Figura 3).

Observação: O centro do círculo transformado não é o transformado do centro do círculo original. Isto é, o ponto médio de $\overline{A'B'}$ não é o transformado do ponto médio de $\overline{AB}$.

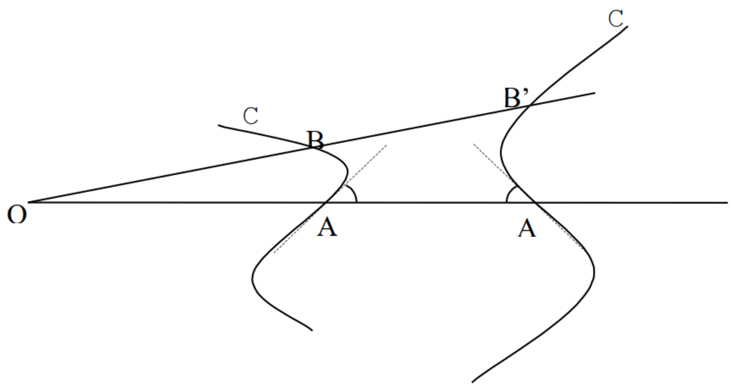
Propriedade 5a. Seja A um ponto qualquer numa curva C. O ângulo entre a curva C e a reta $\overleftrightarrow{OA}$ é igual ao ângulo entre a curva C' e a reta $\overleftrightarrow{OA'}$ (Figura 4).

Figura 3 – Círculo de diâmetro $\overline{AB}$ e círculo de diâmetro $\overline{A'B'}$



Fonte: (Teixeira, 2001b, p. 2).

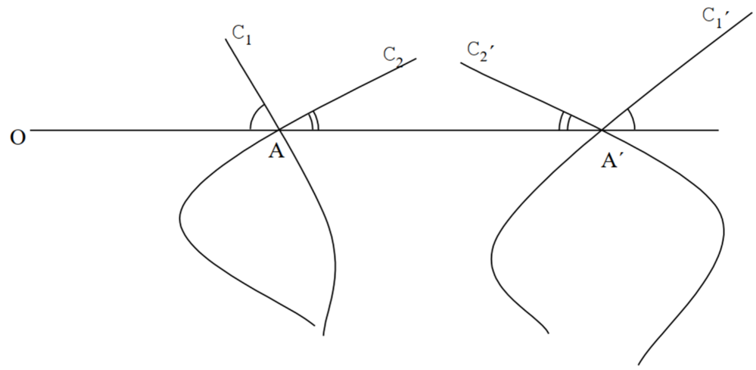
Figura 4 – Curva C com reta $\overleftrightarrow{OA}$ e curva C' com reta $\overleftrightarrow{OA'}$



Fonte: (Teixeira, 2001b, p. 2).

Propriedade 5b. Se duas curvas C_1 e C_2 cortam-se no ponto A fazendo um ângulo α, suas inversas C_1' e C_2' cortam-se em A' fazendo o mesmo ângulo α (Figura 5).

Figura 5 – Curvas C_1 e C_2 e suas inversas C_1' e C_2'



Fonte: (Teixeira, 2001b, p. 2).

Corolários: Inversões transformam círculos tangentes em círculos tangentes (ou círculo e reta tangentes, ou retas paralelas); círculos ortogonais em círculos ortogonais (ou círculo e reta ortogonais, ou retas perpendiculares).

2.1.3 *Formulação matemática e demonstração*

Teorema 2.1.1 (Ptolomeu) *Se ABCD é um quadrilátero convexo de diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, então*

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

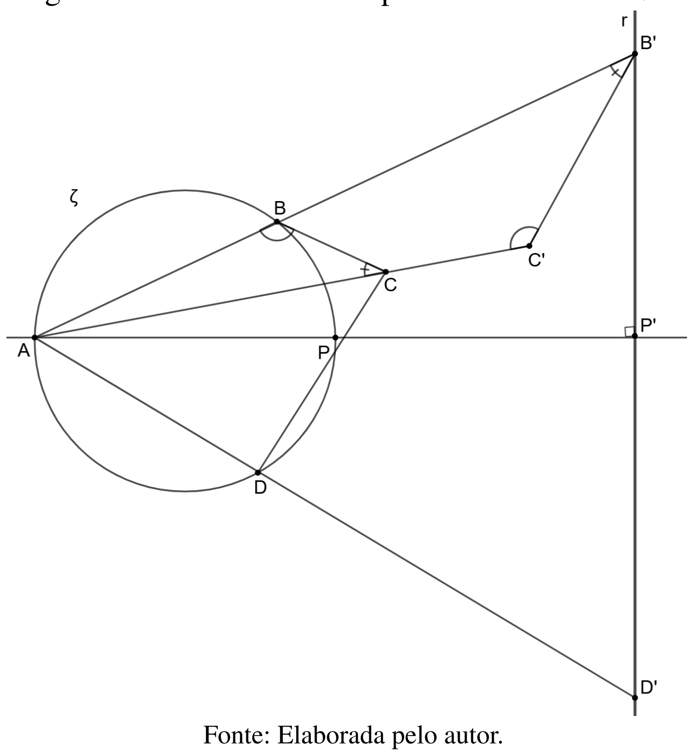
ademais, a igualdade é válida se, e somente se, ABCD é um quadrilátero cíclico.

Demonstração. Considere a inversão $\mathscr{I}$ de pólo A e razão $k > 0$. Seja ζ o círculo que contém os pontos A, B e D. Note que tal círculo é não degenerado, pois A, B e D não são colineares. Seja P o ponto de ζ diametralmente oposto a A. Pelas propriedades da inversão, $\mathscr{I}$ transforma o círculo ζ numa reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AP}$. Sejam B', C' e D' os inversos, respectivamente, de B, C e D por $\mathscr{I}$. Pela propriedade mencionada acima, $B', D' \in r$. Da definição de inversão temos

$$AB \cdot AB' = k^2, \quad AC \cdot AC' = k^2 \ \text{ e } \ AD \cdot AD' = k^2. \tag{2.1}$$

Pela propriedade de transporte de ângulos da inversão, os triângulos ΔABC e $\Delta AC'B'$ são semelhantes. Em particular, $\angle ABC = \angle AC'B'$ e $\angle ACB = \angle AB'C'$. Logo, $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{AC'} = \frac{AC}{AB'}$. Confira Figura 6.

Figura 6 – Inversão $\mathscr{I}$ com pólo em A e razão $k > 0$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Então, $B'C'$ pode ser escrito como $B'C' = \frac{BC \cdot AC'}{AB}$ e, usando as equações de (2.1), chegamos a

$$B'C' = \frac{BC \cdot k^2}{AB \cdot AC}. \tag{2.2}$$

Ou seja, podemos escrever $B'C'$ em função de k e dos lados do triângulo ABC. De igual maneira, valem as semelhanças $\Delta ACD \sim \Delta AD'C'$ e $\Delta ABD \sim \Delta AD'B'$. Daí, concluímos que

$$C'D' = \frac{CD \cdot k^2}{AC \cdot AD} \quad \text{e} \quad B'D' = \frac{BD \cdot k^2}{AB \cdot AD}. \tag{2.3}$$

Considere agora o triângulo $B'C'D'$. A desigualdade triangular nos garante que $B'D' \leq B'C' + C'D'$. Substituindo as equações (2.2) e (2.3) reescrevemos essa desigualdade como

$$\frac{BD \cdot k^2}{AB \cdot AD} \leq \frac{BC \cdot k^2}{AB \cdot AC} + \frac{CD \cdot k^2}{AC \cdot AD}$$

ou, ainda,

$$\frac{BD}{AB \cdot AD} \leq \frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD}.$$

Multiplicando ambos os lados por $AB \cdot AC \cdot AD$, encontramos

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Se o quadrilátero $ABCD$ é cíclico, então B', C' e D' estão alinhados, com C' entre B' e D'. Assim, a igualdade ocorre na desigualdade $B'D' \leq B'C' + C'D'$, e todas as desigualdades acima tornam-se igualdades.

Suponha agora que a igualdade ocorre, ou seja, que

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Dividindo ambos os lados por $AB \cdot AC \cdot AD$, obtemos

$$\frac{BD}{AB \cdot AD} = \frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD}.$$

Multiplicando ambos os lados por k^2, encontramos

$$\frac{BD \cdot k^2}{AB \cdot AD} = \frac{BC \cdot k^2}{AB \cdot AC} + \frac{CD \cdot k^2}{AC \cdot AD},$$

o que, por (2.2) e (2.3), é equivalente a

$$B'D' = B'C' + C'D'.$$

Essa última igualdade significa que B', C' e D' são colineares, com $C' \in \overline{B'D'}$. Portanto, $C' \in r$, o que equivale a dizer que o ponto C pertence ao círculo ζ. Logo, $ABCD$ é um quadrilátero cíclico.

□

2.1.4 Versão espacial da desigualdade de Ptolomeu

Apresentamos na sequência uma versão espacial da desigualdade de Ptolomeu.

Teorema 2.1.2 *Em um tetraedro convexo ABCD, vale a seguinte propriedade:*

$$AC \cdot BD \ < \ AB \cdot CD \ + \ BC \cdot AD.$$

Demonstração. Tome uma inversão $\mathscr{I}$ com pólo em A e razão $k > 0$. Existe uma esfera ξ que passa por A, B, C e D. Logo, pelas propriedades da inversão, $\mathscr{I}$ transforma a esfera ξ num plano. Chamemos esse plano de π. Sejam B', C' e D' os inversos, respectivamente, de B, C e D por $\mathscr{I}$. Então, $B', C', D' \in \pi$. Da definição de inversão temos

$$AB \cdot AB' = k^2, \quad AC \cdot AC' = k^2 \text{ e } AD \cdot AD' = k^2. \tag{2.4}$$

Pela propriedade de transporte de ângulos da inversão, os triângulos ΔABC e $\Delta AC'B'$ são semelhantes. Em particular $\angle ABC = \angle AC'B'$ e $\angle ACB = \angle AB'C'$. Logo, $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{AC'} = \frac{AC}{AB'}$. Confira figura 7.

Então, $B'C'$ pode ser escrito como $B'C' = \frac{BC \cdot AC'}{AB}$ e, usando as equações (2.4), chegamos a

$$B'C' = \frac{BC \cdot k^2}{AB \cdot AC}. \tag{2.5}$$

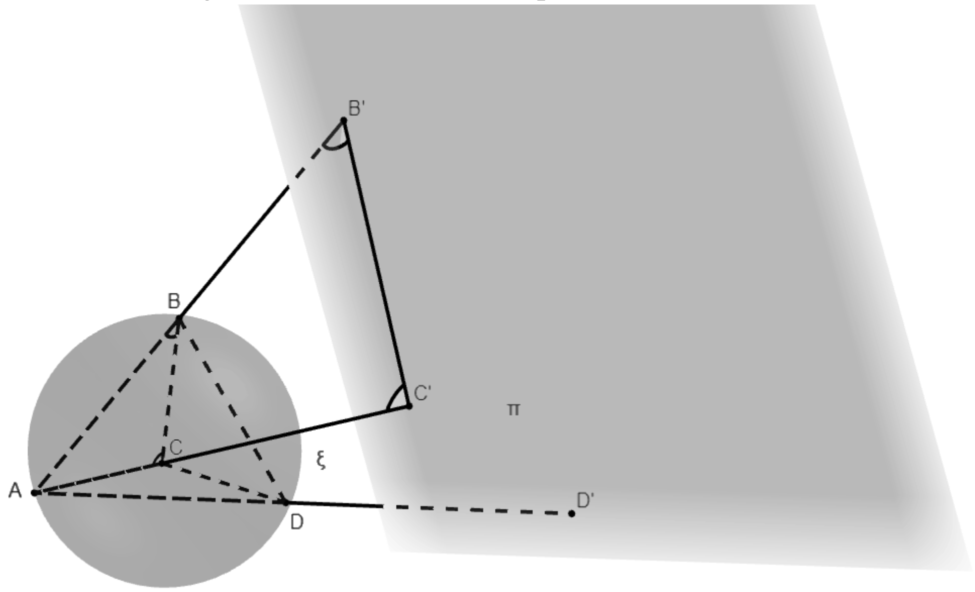
Ou seja, podemos escrever $B'C'$ em função de k e dos lados do triângulo ABC. De igual maneira, valem as semelhanças $\Delta ACD \sim \Delta AD'C'$ e $\Delta ABD \sim \Delta AD'B'$. Daí, concluímos que

$$C'D' = \frac{CD \cdot k^2}{AC \cdot AD} \quad \text{e} \quad B'D' = \frac{BD \cdot k^2}{AB \cdot AD}. \tag{2.6}$$

Aplicando a desigualdade triangular no triângulo $\Delta B'C'D'$ temos $B'D' \ < \ B'C' \ + \ C'D'$. Note que não ocorre a igualdade, pois B', C' e D' não são colineares; caso fossem, A, B, C e D seriam coplanares, e o tetraedro $ABCD$ seria degenerado. Substituindo as equações (2.5) e (2.6), reescrevemos essa desigualdade como

$$\frac{BD \cdot k^2}{AB \cdot AD} < \frac{BC \cdot k^2}{AB \cdot AC} + \frac{CD \cdot k^2}{AC \cdot AD}$$

Figura 7 – Inversão $\mathscr{I}$ com pólo em A e raio $k > 0$



Fonte: Elaborada pelo autor.

ou, ainda,

$$\frac{BD}{AB \cdot AD} < \frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD}.$$

Multiplicando ambos os lados por $AB \cdot AC \cdot AD$, encontramos

$$AC \cdot BD < AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

□

2.2 Desigualdade de Erdös - Mordell

A seguir, apresentamos um pouco da história e uma demonstração detalhada da desigualdade de Erdös–Mordell, utilizando reflexões de um ponto e propriedades métricas de um triângulo. Ao final, também faremos a prova das condições sob as quais ocorre a igualdade. A demonstração aqui apresentada segue as ideias de Komornik (1997).

2.2.1 Breve relato histórico

Proposta inicialmente como problema 3740, na revista The American Mathematical Monthly, pelo matemático húngaro Paul Erdös (Edrdös, 1935), essa desigualdade afirma que: para qualquer triângulo ABC e um ponto P dentro de ABC, a soma das distâncias de P aos vértices é maior do que ou igual ao dobro da soma das distâncias de P aos lados. Os primeiros a apresentarem uma demonstração do problema foram os matemáticos britânicos Louis J. Mordell e P.F. Barrow (Mordell; Barrow, 1937). Porém, essa solução não era muito elementar. Provas subsequentes mais simples foram encontradas por Kazarinoff (Kazarinoff, 1957), baseada em um teorema de Pappus de Alexandria, presente na obra *Mathematical Collection*; outra demonstração foi feito por Bankoff (Bankoff, 1958), usando projeções ortogonais e triângulos semelhantes; e uma prova visual por Alsina e Nelsen (Alsina; Nelsen, 2007).

2.2.2 Formulação matemática e demonstração

Teorema 2.2.1 (Erdös - Mordell) *Sejam ABC um triângulo e P um ponto no seu interior. Sejam a_1, b_1 e c_1 as distâncias de P aos vértices A, B e C, respectivamente, e a_2, b_2 e c_2 as distâncias de P aos lados $\overline{BC}, \overline{CA}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Vale então que*

$$a_1 + b_1 + c_1 \ \geq \ 2(a_2 + b_2 + c_2),$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, ABC é um triângulo equilátero de centro P.

Demonstração. Para a prova dessa desigualdade usaremos o seguinte lema:

Lema 2.2.2 *Se x e y são números reais positivos, então*

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $x = y$.

Demonstracão. Como $x, y > 0$, defina

$$a = \frac{x}{y} \quad \text{e} \quad b = \frac{y}{x}.$$

Então $a, b > 0$ e $ab = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = 1$.
Pela desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica (AM–GM),

$$\frac{a+b}{2} \ \geq \ \sqrt{ab} = \sqrt{1} = 1,$$

logo

$$a + b \geq 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

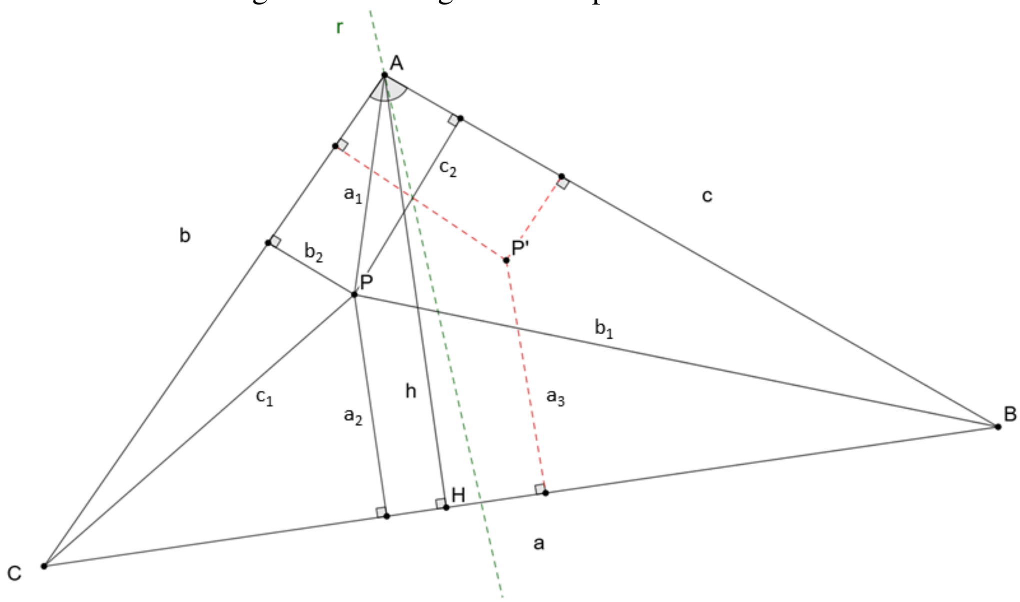
A igualdade em AM–GM ocorre se, e somente se, $a = b$, isto é,

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x} \implies x^2 = y^2.$$

Como $x, y > 0$, conclui-se $x = y$.

Seguindo com a demonstração do Teorema 2.2.1, chamemos de a o lado do triângulo ABC oposto ao vértice A, de b o lado oposto ao vértice B, e de c o lado oposto ao vértice C. Seja P' a reflexão de P em relação à bissetriz do ângulo $\angle BAC$. Pelas propriedades de tal reflexão, $P'A = a_1$ e as distâncias de P' aos lados $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$ são, respectivamente, c_2 e b_2. Seja $H \in \overline{BC}$ de modo que $\overline{AH}$ é a altura do triângulo ABC relativa ao vértice A. Denotemos essa altura por h e chamemos de a_3 a distância de P' ao lado $\overline{BC}$ (Confira Figura 8).

Figura 8 – Triângulo ABC e ponto P interior



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que $a_1 + a_3 \geq h$. Daí,

$$a(a_1 + a_3) \geq ah.$$

Dividindo por 2 ambos os membros dessa desigualdade, encontramos

$$\frac{a(a_1 + a_3)}{2} \geq \frac{ah}{2}.$$

Perceba que o segundo membro representa a área do triângulo ABC, a qual também pode ser expressa como

$$\frac{aa_3 + bc_2 + cb_2}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{a(a_1+a_3)}{2} &\geq \frac{aa_3+bc_2+cb_2}{2}\\ \iff aa_1 &\geq bc_2+cb_2\\ \iff a_1 &\geq \frac{bc_2+cb_2}{a}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Fazendo a reflexão do ponto P em relação à bissetriz do ângulo $\angle ABC$ e em relação à bissetriz do ângulo $\angle ACB$, chegamos a

$$b_1 \geq \frac{ac_2+ca_2}{b} \quad \text{e} \quad c_1 \geq \frac{ab_2+ba_2}{c}. \tag{2.8}$$

Somando membro a membro as desigualdades em (2.7) e (2.8), obtemos

$$a_1+b_1+c_1 \geq \left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)a_2+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)b_2+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)c_2$$

Pelo Lema 2.2.2, segue que

$$a_1+b_1+c_1 \geq 2(a_2+b_2+c_2).$$

Se ocorre a igualdade, ou seja, se $a_1+b_1+c_1 = 2(a_2+b_2+c_2)$, então todas as desigualdades em (2.7) e (2.8) se tornam igualdades, ou seja

$$a_1 = \frac{bc_2+cb_2}{a}, \quad b_1 = \frac{ac_2+ca_2}{b} \quad \text{e} \quad c_1 = \frac{ab_2+ba_2}{c}$$

Isso implica que

$$a_1+b_1+c_1 = \left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)a_2+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)b_2+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)c_2 = 2(a_2+b_2+c_2),$$

O que nos dá

$$\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)=2, \quad \left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)=2 \text{ e } \left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)=2.$$

Como a, b e c são números positivos, pelo Lema 2.2.2 podemos concluir que $a = b$, $b = c$ e $c = a$, ou seja, $a = b = c$. Logo, o triângulo ABC é equilátero. Ocorre também que a desigualdade em (2.7) se torna igualdade, o que por sua vez equivale a $a_1 + a_3 = h$. Isso significa que $P \in AH$, que é a altura do ΔABC relativa ao vértice A, note que AH pertence à bissetriz do ângulo $\angle BAC$, já que ABC é equilátero. Como também ocorrem as igualdades em (2.8), concluimos que P também pertence às alturas relativas aos vértices B e C, logo, P é o ortocentro do triângulo ΔABC, e, portanto, seu centro.

Se o triângulo ABC é equilátero de centro P, então P é simultaneamente o ortocentro, o baricentro e o incentro de ABC. Seja l o lado triângulo ABC, como o baricentro divide cada mediana na razão 2:1, então $a_1 = b_1 = c_1 = \frac{l\sqrt{3}}{3}$ e $a_2 = b_2 = c_2 = \frac{l\sqrt{3}}{6}$. Assim,

$$a_1 + b_1 + c_1 = 2(a_2 + b_2 + c_2) = l\sqrt{3}$$

$\square$

2.3 Desigualdade Isoperimétrica

Nesta seção, faremos um levantamento da história da Desigualdade Isoperimétrica. Vamos apresentar uma demonstração usando polígonos. Também iremos abordar a versão para triângulos dessa desigualdade. As demonstrações apresentadas nesta seção seguem como referência o material de Telichevesky e Klaser (2016).

2.3.1 Aspectos históricos

Considere o seguinte problema de otimização de áreas no que diz respeito a figuras isoperimétricas: dado um perímetro fixo, que polígonos ou proporções de contorno otimizam (maximizam) a área contida nesse contorno?

O Problema Isoperimétrico, como é mais conhecida na literatura a Desigualdade Isoperimétrica, aparece em escritos gregos de Zenódor e Pappus. Porém, não é conhecida desde essa época nenhuma demonstração formal de que é a circunferência, a curva que maximiza a área para um perímetro fixo, embora o resultado já fosse aceito. Uma demonstração formal surgiu apenas em 1870, com Weierstrass. Outros matemáticos obtiveram provas mais concisas do problema, como o alemão Erhard Schmidt, em 1939, cuja demonstração é apresentada em (Moreira; Saldanha, 1993).

As demonstrações que existiam antes da apresentada por Weierstrass consideravam a existência de uma curva que maximizava a área, e, a partir daí, apresentavam argumentos para mostrar que essa curva seria a circunferência. Assim, não eram demonstrações formais.

Durante a Idade Média, o resultado do Problema Isoperimétrico já era muito utilizado para a construção de muros de proteção para as cidades. Tais muros eram de pedra e a construção era cara e trabalhosa. Sendo assim, era necessário utilizar-se de um perímetro mínimo para obter a área máxima. Consultando os mapas da época, de fato, encontramos muros com formatos circulares ou semicirculares.

Referências históricas para a solução do problema aparecem também na literatura. A obra épica *Eneida*, escrita pelo famoso poeta Virgílio (70 *a.C.* a *19 a.C.*) (Virgílio, 2005), retrata a solução do problema através da história de um de seus personagens, a rainha de Cartago, Dido, também conhecida como Elisa. Assim diz a Lenda de Dido, que faz parte do Canto I do referido clássico *Eneida*: Dido foi uma princesa fenícia no século IX *a.C.*, na cidade de Tiro, às margens do Mediterrâneo, localizada onde hoje é o Líbano. Seu irmão, o rei Pigmaleão, assassinou seu marido, o grande sacerdote Arquebas, para subtrair-lhe seus tesouros. Temendo sua própria morte, Dido fugiu em um navio com um grande número de seguidores dispostos a fundar uma nova cidade, "Qart Hadash" (Cartago). No lugar escolhido para a cidade (norte da África, também às margens do Mediterrâneo, onde hoje é a Tunísia), ela tentou comprar terras do rei local, Jarbas, para que pudessem se estabelecer. O arranjo que conseguiu com o rei foi que só teria em terras o que pudesse abranger com a pele de um boi. Dido e seu grupo decidiram, então, cortar a pele em tiras tão finas quanto possível, emendá-las e com elas englobar, em forma de semicírculo, um terreno beirando o mar.

2.3.2 Desigualdade isoperimétrica para triângulos

Teorema 2.3.1 *Dentre todos os triângulos com um dado perímetro P, o triângulo equilátero é o que possui a maior área.*

Demonstração. Utilizamos a Fórmula de Heron para expressar a área A de um triângulo com lados medindo a, b, c e semiperímetro $s = \frac{P}{2}$:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Como P é fixo, s é constante. Para maximizar A, maximizamos $Q = (s-a)(s-b)(s-c)$. Aplicamos a Desigualdade das Médias (Média Aritmética (MA) $\geq$ Média Geométrica (MG)), obtemos

$$\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Como $(s-a)+(s-b)+(s-c) = 3s-(a+b+c) = s$, temos

$$\frac{s}{3} \geq \sqrt[3]{Q},$$

ou seja,

$$Q \leq \left(\frac{s}{3}\right)^3.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $s-a=s-b=s-c$, isto é, se, e somente se, $a=b=c$. O valor máximo de A é:

$$A_{\text{máx}} = \sqrt{s\left(\frac{s}{3}\right)^3} = \frac{s^2}{3\sqrt{3}} = \frac{P^2}{36\sqrt{3}}.$$

□

2.3.3 Desigualdade isoperimétrica para n-ágonos

Teorema 2.3.2 *Fixado $n \in \mathbb{N}$ e um número positivo A, dentre todos os n-ágonos de área A, o n-ágono regular é o que possui menor perímetro.*

Usaremos daqui em diante a abreviação DI para nos refererir à Desigualdade Isoperimétrica (DI) para n-ágonos. A demonstração apresentada a seguir pode ser lida no trabalho de Howards (1992).

Lema 2.3.3 *Fixado $n \in \mathbb{N}$ e um número positivo L, dentre todos os n-ágonos de perímetro L, o n-ágono regular é o que possui maior área.*

Teorema 2.3.4 (Weierstrass) *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e $f: K \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f admite máximo e mínimo em K, isto é, existem pontos $x_1, x_2 \in K$ tais que*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \forall x \in K.$$

Definição: Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é dito *compacto* se for fechado e limitado.

Demonstração. Primeramente, justificamos que existe um n-ágono solução da DI, para o que é conveniente pensar na versão equivalente de acordo com o Lema 2.3.3. Observamos que cada n-ágono fica determinado pela localização de seus n vértices

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$$

no plano $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$. Assim, um n-ágono P_n pode ser visto como um elemento de $\mathbb{R}^{2n}$, a saber, a $2n$-upla

$$(x_1,y_1,x_2,y_2,\ldots,x_n,y_n).$$

Com isso, a área de P_n pode ser interpretada como uma função

$$A\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}.$$

Queremos nos restringir ao conjunto dos n-ágonos de perímetro L e demonstrar que, nesse conjunto, a função área tem um mínimo. Como todos os pontos do plano são 'iguais', podemos fazer mais uma restrição e pensar que o domínio de $\mathbb{R}^{2n}$ ao qual queremos restringir a função A é o conjunto dos pontos que são vértices de P_n com perímetro L e que, além disso, o último vértice é a origem, ou seja, $(x_n, y_n) = (0,0)$. Consideramos, então, o conjunto

$$\{(x_1, y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n = 0, y_n = 0)\}$$

sujeito à condição de perímetro fixo:

$$\|(x_1, y_1)\| + \sum_{i=1}^{n-1} \|(x_i, y_i) - (x_{i+1}, y_{i+1})\| = L.$$

Como o conjunto acima é compacto e a função A é contínua, pelo Teorema 2.3.4, tem-se que existe um minimizante. Assim, concluímos que a DI para n-ágonos tem solução. Agora, provaremos o seguinte lema:

Lema 2.3.5 *Se P_n é solução da DI para n-ágonos, então P_n é convexo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que P_n seja uma solução da DI que não é convexo. Então existem dois pontos A e B de P_n tais que o segmento $\overline{AB}$ não está contido em P_n. Assim, $\overline{AB}$ deve sair e entrar em P_n pelo menos uma vez. Sejam A' e B' os primeiros pontos de saída e entrada em P_n. Considere P'_n, a região obtida substituindo o trecho da fronteira de P_n que vai de A' a B' pelo segmento $A'B'$.

Tem-se que a região P'_n tem área maior do que a área de P_n e, como o segmento é o caminho mais curto entre dois pontos no plano, P'_n tem perímetro menor do que P_n. Esse fato contradiz a suposição de que P_n é solução da DI. Mais precisamente, poderíamos encolher P'_n por uma homotetia de modo que a área da região encolhida coincida com a área de P_n e o perímetro dessa região seria menor do que o de P'_n, e, portanto, menor do que o de P_n.

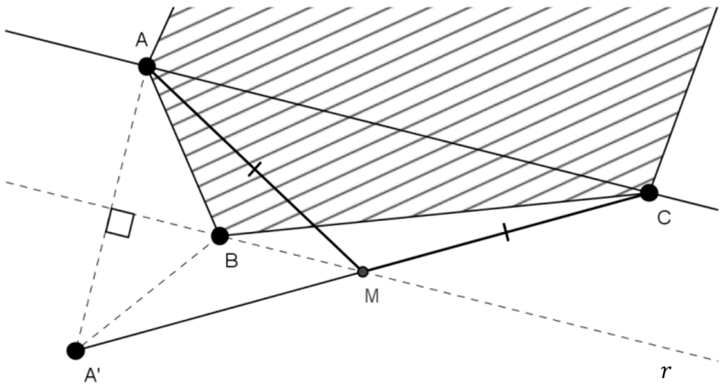
Nossa demonstração da DI será exibida através das duas proposições a seguir.

Proposição 2.3.6 *Se P_n é um n-ágono de área A que é solução da DI, então P_n é equilátero, i.e., todos os lados de P_n têm mesma medida.*

Demonstração. Vamos supor, por absurdo, que P_n tem dois lados consecutivos de medidas distintas ($AB \neq BC$) e mostraremos que existe um n-ágono de mesma área que P_n, porém com perímetro menor. Com isso, temos um absurdo e podemos concluir que P_n não é a solução que buscamos.

Suponha que $AB \neq BC$ são lados consecutivos de P_n e considere a reta $\overleftrightarrow{AC}$, que tem o segmento $\overline{AC}$ inteiramente contido em P_n, já que ele é convexo. Considere r a reta paralela à reta $\overleftrightarrow{AC}$ pelo ponto B. Observe que se trocarmos B por qualquer outro ponto B' de r, e formarmos um novo polígono Q, então Q terá a mesma área de P_n. Tome A' como a reflexão de A pela reta r. Note que os comprimentos AB e $A'B$ coincidem, bem como quaisquer comprimentos AX e $A'X$ com $X \in r$. Assim, trocando B por um ponto $B' \in r$ tal que $A'B' + B'C$ é o menor possível, encontramos o ponto B' que, ao substituir B, diminui o perímetro de P_n (veja a Figura 9).

Figura 9 – Polígono equilátero



Fonte: (Telichevesky; Klaser, 2016, p. 13)

O ponto $M \in r$ que minimiza a soma $A'B' + B'C$ é a interseção da reta r com o segmento $\overline{A'C}$. Isso decorre do fato de que o menor caminho de A' até C, passando por um ponto da reta r, é o segmento retilíneo entre A' e C. Assim, $M = B'$ garante que $A'B' + B'C$ é mínimo. Como A' é o simétrico de A em relação a r, concluímos que $AM = CM$, isto é, M é equidistante de A e C. Com isso, concluímos que P_n é um n-ágono equilátero.

Proposição 2.3.7 *Se P_n é um n-ágono que é solução da DI, então P_n é regular, i.e., todos os lados e ângulos de P_n têm mesma medida.*

Demonstração. Pela proposição anterior, já sabemos que P_n é equilátero. Para a prova dessa proposição vamos considerar a versão equivalente da DI, isto é, vamos encontrar o n-ágono de perímetro fixo que tem a maior área. Vamos demonstrar que os vértices de P_n devem estar todos sobre uma circunferência. Para tal, lembramos um fato sobre circunferências.

Fato da geometria plana: Se o segmento $\overline{PQ}$ é diâmetro de uma circunferência C e X é um ponto do plano tal que $\angle PXQ$ mede 90°, então X está sobre C.

Caso 1: $n = 2k$ é um número par.

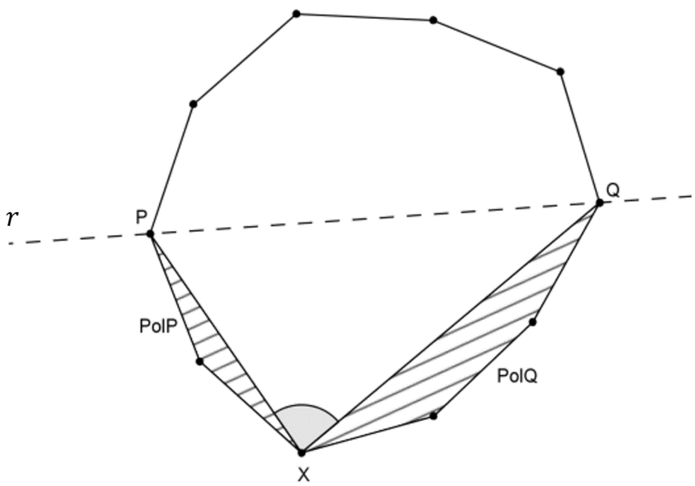
Considere P e Q dois vértices opostos de P_n, tais que existem $k-1$ vértices de P_n entre P e Q. Seja r a reta por P e Q e observe que r divide P_n em dois polígonos de mesma área. Isso se dá porque os polígonos têm o mesmo perímetro e estamos supondo que P_n é solução da DI. Assim, se um dos polígonos tivesse área menor do que o outro, poderíamos substituir o de área menor pela reflexão do de área maior, obtendo assim um polígono de área maior do que A e mesmo perímetro de P_n.

Seja X um dos vértices de P_n entre P e Q. Afirmamos que $\angle PXQ$ mede $90°$. Se P_n' denota o $(k+1)$-ágono que corresponde à parte de P_n que contém X, então a área de P_n' é dada por

$$A(P_n') = A(\text{Pol}P) + A(PXQ) + A(\text{Pol}Q)$$

com Pol$P$ e Pol$Q$ como indicados na Figura 10.

Figura 10 – Polígono equiângulo



Fonte: (Telichevesky; Klaser, 2016, p. 14).

Pensando que o polígono Pol$Q$ da figura é um polígono rígido, vamos mover Q sobre a reta r carregando o polígono Pol$Q$ sobre o segmento $\overline{XQ}$. Observe que isso não altera o perímetro de P_n' nem as áreas de Pol$P$ e Pol$Q$. Assim, se posicionamos Q sobre r de modo que $\angle PXQ$ mede $90°$, maximizamos a área de PXQ e, portanto, a área de Q.

Para justificar esse último fato, vamos calcular a área do triângulo PXQ usando a fórmula $\acute{A}rea(PXQ) = \frac{1}{2} \cdot PX \cdot QX \cdot \sin(\angle PXQ)$, como os comprimentos de PX e QX são fixos, para maximizar a área, o $\sin(\angle PXQ)$ deve ser máximo, o que ocorre quando $\angle PXQ = 90°$.

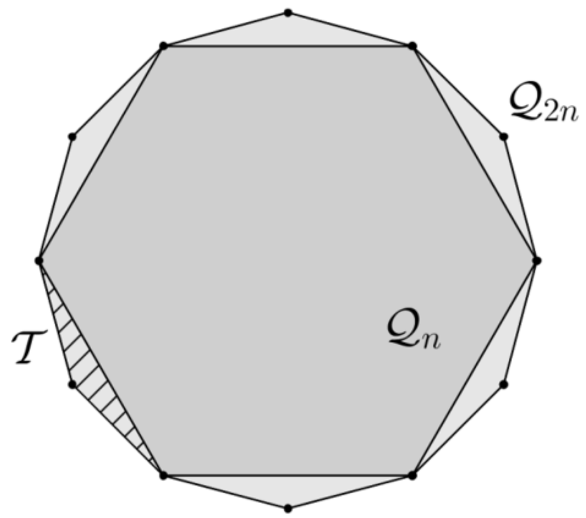
Tomando R igual ao polígono que é a união de P'_n com sua reflexão sobre a reta r, temos que ou $R = P_n$ ou R tem área maior do que a área de P_n. Com isso, concluímos que para qualquer X vértice de P_n, temos $\angle PXQ$ medindo $90°$. Usando o fato de Geometria Plana acima mencionado, concluímos que P_n tem seus vértices sobre uma circunferência de diâmetro $\overline{PQ}$. Portanto, P_n é regular.

Caso 2: n é um número ímpar.

Considere Q_{2n} o polígono regular de $2n$ lados que sabemos ser solução da DI para $2n$-ágonos. Ligando n vértices de Q_{2n}, pulando um a cada passo, de modo que nenhum par de vértices consecutivos seja utilizado, obtemos Q_n, polígono regular de n lados. Além disso, denotamos por T o triângulo formado por dois lados consecutivos de Q_{2n} e o lado correspondente de Q_n.

Seja P_n o polígono solução da DI para n-ágonos. Colando sobre cada lado de P_n um triângulo T, obtemos um polígono de $2n$ lados P_{2n} (veja Figura 11).

Figura 11 – Polígono equiângulo II



Fonte: (Telichevesky; Klaser, 2016, p. 14).

É necessário que P_{2n} seja congruente a Q_{2n} pois, caso contrário, teríamos uma contradição com o primeiro caso. Mas se $P_{2n} \equiv Q_{2n}$, então $P_n \equiv Q_n$, o que conclui essa demonstração.

$\square$

3 APLICAÇÕES DAS DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Problemas de Geometria envolvendo desigualdades são um dos temas mais abordados nas olimpíadas, principalmente nas provas da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). Alguns problemas podem ser resolvidos usando apenas propriedades geométricas, como a desigualdade triangular, usar o fato da hipotenusa ser maior que os catetos, o teorema de Euler $(R \geq 2r)$ e a desigualdade de Ptolomeu. Mas muitas vezes uma transfomação com rotação ou reflexão é bastante útil. A aplicação mais imediata das desigualdades apresentadas diz respeito a problemas envolvendo otimizações.

3.1 Problemas e soluções

Na sequência, apresentamos alguns problemas cuja resolução faz uso das desigualdades geométricas demonstradas neste trabalho.

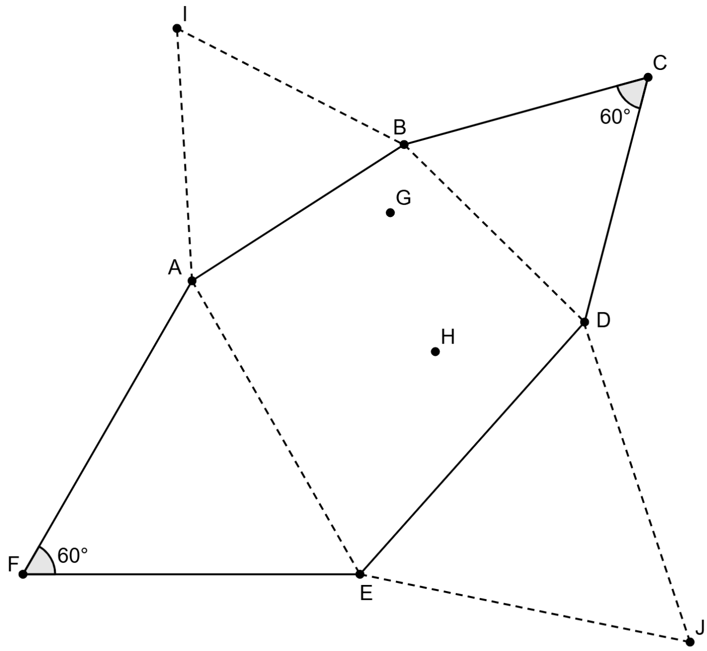
3.1.1 Problema 1 - IMO 1995 - Questão 5

Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo com $AB = BC = CD$ e $DE = EF = FA$, satisfazendo $\angle BCD = \angle EFA = \frac{\pi}{3}$ (60 graus). Suponha que G e H são pontos no interior do hexágono tais que $\angle AGB = \angle DHE = \frac{2\pi}{3}$ (120 graus). Prove que:

$$AG + GB + GH + DH + HE \ \geq \ CF.$$

Solução. Construímos, inicialmente, os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{BD}$, formando os triângulos equiláteros $\triangle EFA$ e $\triangle BCD$ devido às igualdades de lados e ângulos dados. Definimos então os pontos I e J tais que $IA = IB$ e $JD = JE$, com ângulos direcionados $\angle IAB = -\angle CDB$ e $\angle JDE = -\angle FAE$, criando assim os triângulos equiláteros $\triangle AIB$ e $\triangle DJE$ (veja Figua 12).

Figura 12 – Hexágono $ABCDEF$ e triângulos equiláteros AIB e DJE



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observamos que G está na circunferência circunscrita de $\triangle AIB$ pois $\angle AGB = 120°$ e, analogamente, H está na circunferência circunscrita de $\triangle DJE$. Aplicando o Teorema 2.1.1, obtemos $GA+GB = GI$ para o ponto G e $HD+HE = HJ$ para o ponto H, o que nos permite reescrever a expressão original como

$$AG+GB+GH+DH+HE = IG+GH+HJ$$

Notando que o octógono $AIBCDJEF$ é simétrico em relação à reta BE, concluímos que $IG+GH+HJ \geq IJ$, com igualdade ocorrendo quando I, G, H e J estão alinhados. Finalmente, pela congruência geométrica $ABCDEF \equiv AIBDJE$, temos $IJ = CF$, o que completa a demonstração de que

$$IG+GH+HJ \geq CF.$$

□

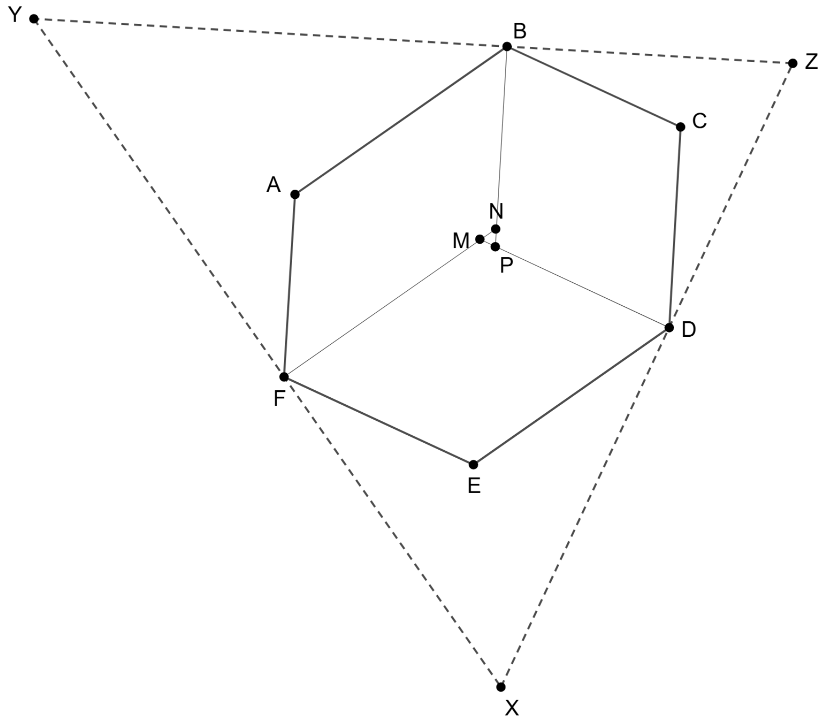
3.1.2 Problema 2 - IMO 1996 - Questão 5

Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo tal que $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ é paralelo a $\overline{EF}$, e $\overline{CD}$ é paralelo a $\overline{FA}$. Sejam R_A, R_C, R_E os raios das circunferências circunscritas aos *triângulos FAB, BCD e DEF, respectivamente, e seja P o perímetro do hexágono. Prove que*

$$R_A + R_C + R_E \ \geq \ \frac{P}{2}.$$

Solução. Considere os pontos M, N e P tais que os quadriláteros $MDEF$, $NFAB$ e $PBCD$ sejam paralelogramos. Considere também os pontos X, Y, Z tais que $\overline{ZY}$, $\overline{ZX}$ e $\overline{XY}$ sejam perpendiculares a $\overline{BP}$, $\overline{DM}$ e $\overline{FN}$, respectivamente, e tais que o hexágono $ABCDEF$ fique inscrito ao triângulo XYZ (veja Figura 13).

Figura 13 – Hexágono $ABCDEF$ e triângulo XYZ



Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que os triângulos DEF e DMF são congruentes; logo, têm o mesmo circunraio. Mas $\overline{XM}$ é o diâmetro do circuncírculo do triângulo DMF (ou do quadrilátero $DMFX$, se preferir). Logo, $XM = 2 \cdot R_E$. Vamos provar que

$$XM + YN + ZP \ \geq \ BN + BP + DP + DM + FM + FN,$$

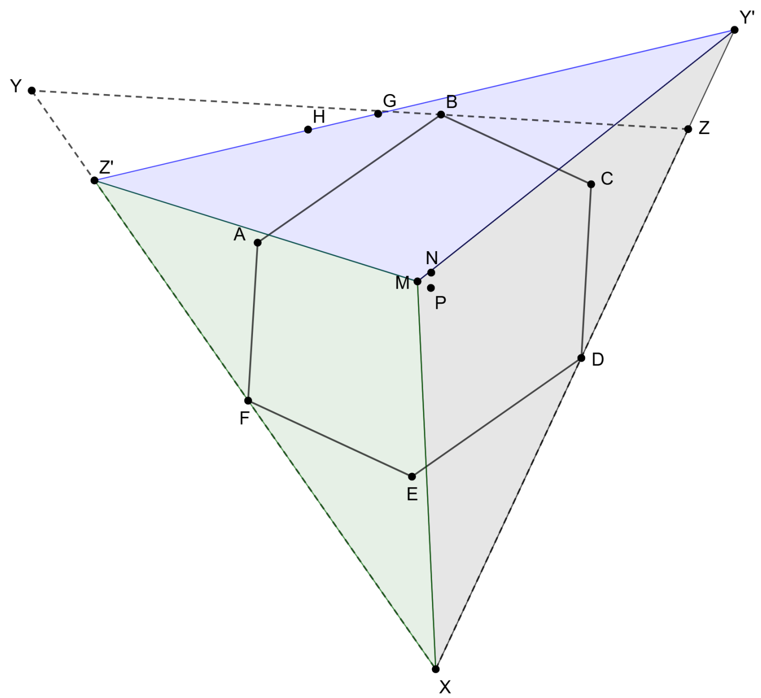
o que equivale ao problema inicial. Considere os dois casos a seguir:

1) M, N e P coincidem. Neste caso, o problema segue da desigualdade de Erdös-Mordell (Teorema 2.2.1).

2) MNP é um triângulo. Sejam Y' e Z' a reflexão dos pontos Y e Z em relação à bissetriz de

$\angle YXZ$. Sejam G e H as projeções de M e X,respectivamente, sobre $\overline{Y'Z'}$. A notação $[ABCD\ldots Z]$ indica a área do polígono $ABCD\ldots Z$. Como $[XYZ] = [Y'XZ'] = [Z'MY'] + [XMZ'] + [Y'MX]$, veja Figura 14, temos:

Figura 14 – Triângulo $XY'Z'$



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$YZ \cdot XH = YZ \cdot MG + ZX \cdot FM + XY \cdot DM. \tag{3.1}$$

Mas, usando a desigualdade triangular no triângulo XMG e o fato do cateto ser menor que a hipotenusa no triângulo XHG (ou mesmo distância de X à reta $\overleftrightarrow{Y'Z'}$), obtemos:

$$XM + MG \geq XG \geq XH \Rightarrow XM \geq XH - MG$$

Substituindo na igualdade (3.1),

$$XM \geq \frac{XY}{YZ} \cdot DM + \frac{XZ}{YZ} \cdot FM \tag{3.2}$$

Analogamente,

$$YN \geq \frac{YX}{XZ} \cdot BN + \frac{YZ}{XZ} \cdot FN \tag{3.3}$$

$$ZP \geq \frac{ZX}{XY} \cdot BP + \frac{ZY}{XY} \cdot DP \tag{3.4}$$

Somando (3.2), (3.3) e (3.4):

$$XM + YN + ZP \ \geq \ \frac{XY}{YZ} \cdot DM + \frac{XZ}{YZ} \cdot FM + \frac{YZ}{XZ} \cdot FN + \frac{YX}{XZ} \cdot BN + \frac{ZX}{XY} \cdot BP + \frac{ZY}{XY} \cdot DP$$

Vamos agora arranjar uma maneira de sumir com as frações. Usaremos a Desigualdade das Médias para concluir. Primeiramente, veja que os triângulos XYZ e MNP são semelhantes, o que nos permite definir

$$k = \frac{FM - FN}{XY} = \frac{BN - BP}{YZ} = \frac{DP - DM}{ZX}$$

Com isto, podemos escrever:

$$\frac{ZX}{XY} \cdot BP + \frac{YX}{XZ} \cdot BN$$

$$= \left(\frac{XZ}{XY} + \frac{XY}{XZ} \right) \frac{BN + BP}{2} + \left(\frac{XZ}{XY} - \frac{XY}{XZ} \right) \frac{BN - BP}{2}$$

$$\geq (BP + BN) - k \cdot \left(\frac{XZ \cdot YZ}{XY} - \frac{XY \cdot YZ}{XZ} \right)$$

Analogamente,

$$\frac{XZ}{XY} \cdot BP + \frac{XY}{XZ} \cdot BN \geq (BP + BN) - k \cdot \left(\frac{XZ \cdot YZ}{XY} - \frac{XY \cdot YZ}{XZ} \right)$$

$$\frac{YX}{ZY} \cdot DM + \frac{ZY}{YX} \cdot DP \geq (DM + DP) - k \cdot \left(\frac{XY \cdot XZ}{YZ} - \frac{XZ \cdot YZ}{XY} \right)$$

$$\frac{XZ}{YZ} \cdot FM + \frac{YZ}{XZ} \cdot FN \geq (FM + FN) - k \cdot \left(\frac{YZ \cdot XY}{XZ} - \frac{XZ \cdot XY}{YZ} \right)$$

Agora, basta somar estas três últimas desigualdades e acabamos o problema.

□

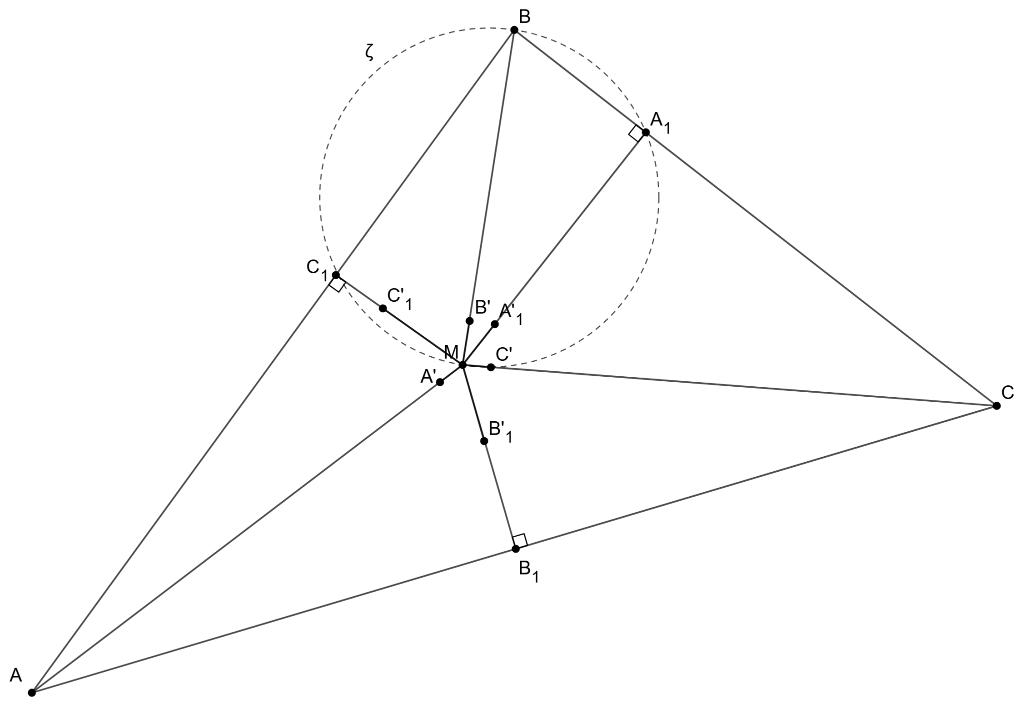
3.1.3 Problema 3 - (Andreescu et al., 2009, p. 97)

Seja M um ponto interior ao triângulo ABC, e sejam A_1, B_1, C_1 os pés das perpendiculares traçadas de M para os lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Prove que:

$$\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{MA_1}+\frac{1}{MB_1}+\frac{1}{MC_1}\right).$$

Solução. Denotemos por A',B',C',A_1',B_1',C_1' as imagens dos pontos A,B,C,A_1,B_1,C_1 com respeito à inversão de centro M e razão 1, chamemos essa inversão de $\mathscr{I}$. Como os $\angle MC_1B = \angle MA_1B = 90^\circ$, então o quadrilátero MA_1BC_1 pode ser inscrito em um círculo de diâmetro $\overline{MB}$, denote por ζ tal círculo (veja Figura 15).

Figura 15 – Triângulo ABC e círculo ζ



Fonte: Elaborada pelo autor.

Pelas propriedades da inversão, $\mathscr{I}$ transforma ζ em uma reta perpendicular a $\overline{MB}$. Portanto, A_1',B' e C_1' são colineares, com $\overline{MB'} \perp \overline{A_1'C_1'}$. Raciocinando de forma análoga, observando que os quadriláteros $MBCB_1$ e MB_1AC_1 são cíclicos, chegamos a $\overline{MC'} \perp \overline{A_1'B_1'}$ e

$\overline{MA'} \perp \overline{B_1'C_1'}$. Aplicando o Teorema 2.2.1 ao ponto M no triângulo $\triangle A_1'B_1'C_1'$, obtemos:

$$MA_1' + MB_1' + MC_1' \geq 2(MA' + MB' + MC'),$$

o que, junto com $MX' = \frac{1}{MX}$ para cada X, fornece o resultado desejado.

$\square$

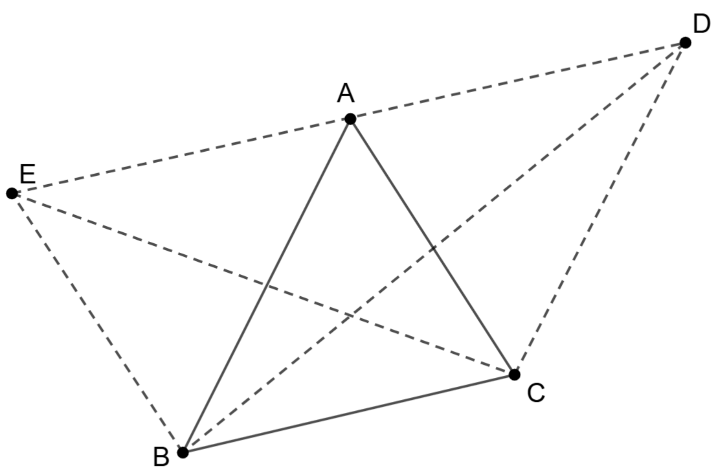
3.1.4 Problema 4 - Desigualdade dual de Klamkin - (Leng, 2016, p. 9)

Sejam a, b e c as medidas dos lados do $\triangle ABC$, e sejam m_b e m_c as medidas das medianas relativas a B e C, respectivamente. Prove que

$$4m_bm_c \;\leq\; 2a^2 + bc$$

Solução. Construa os paralelogramos $ABCD$ e $ACBE$ (veja Figura 16). Note que $DE = 2a$, $BD = 2m_a$, e $CE = 2m_c$.

Figura 16 – Paralelogramos $ABCD$ e $ACBE$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Aplicando o Teorema 2.1.1 ao quadrilátero $BCDE$, chegamos a

$$BC \cdot DE + BE \cdot CD \geq BD \cdot EC,$$

ou seja, $4m_bm_c \leq 2a^2 + bc$.

$\square$

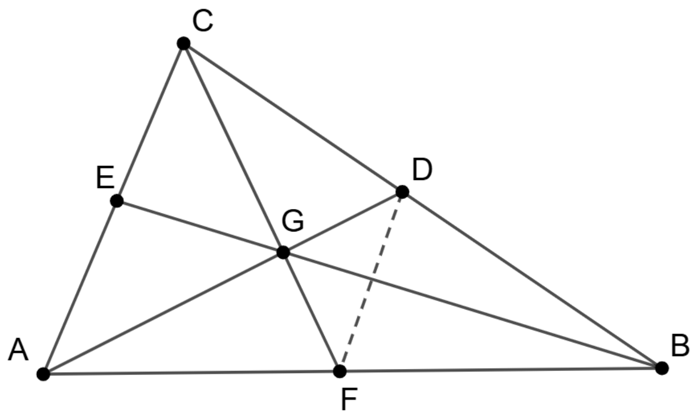
3.1.5 Problema 5 - (Leng, 2016, p. 10)

Sejam a, b e c as medidas dos lados do $\triangle ABC$, e sejam m_a, m_b e m_c as medidas das medianas relativas a A, B e C, respectivamente. Prove que

$$m_a(bc-a^2)+m_b(ac-b^2)+m_c(ab-c^2) \geq 0$$

Solução. Sejam AD, BE e CF as medianas do triângulo ABC de baricentro G (veja Figura 17).

Figura 17 – Triângulo ABC



Fonte: Elaborada pelo autor.

Aplicando o Teorema 2.1.1 ao quadrilátero $BDGF$, chegamos a

$$BG \cdot DF \leq GF \cdot DB + DG \cdot BF. \tag{3.5}$$

Note que $BG = \frac{2}{3}m_b$, $DG = \frac{1}{3}m_a$, $GF = \frac{1}{3}m_c$ e $DF = \frac{b}{2}$. Portanto, a desigualdade (3.5) pode ser reescrita como

$$2b\,m_b \leq a\,m_c + c\,m_a.$$

Assim,

$$2b^2 m_b \leq ab\,m_c + cb\,m_a. \tag{3.6}$$

De forma semelhante,

$$2c^2 m_c \leq ac\,m_b + bc\,m_a, \tag{3.7}$$

$$2a^2 m_a \leq ab\,m_c + ac\,m_b. \tag{3.8}$$

Somando (3.6), (3.7) e (3.8), encontramos

$$2(m_c bc + m_b ca + m_a ab) \geq 2(m_a a^2 + m_b b^2 + m_c c^2),$$

e, rearranjando os termos, obtemos a desigualdade

$$m_a(bc - a^2) + m_b(ac - b^2) + m_c(ab - c^2) \;\geq\; 0.$$

□

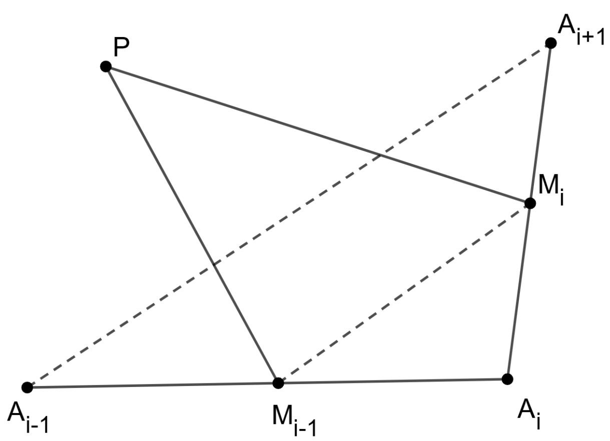
3.1.6 Problema 6 - (Leng, 2016, p. 10)

Seja $A_1A_2\cdots A_n$ um n-polígono regular, e sejam $M_1, M_2, \ldots, M_n$ os pontos médios dos lados correspondentes. Seja P um ponto arbitrário no plano onde o n-polígono está contido. Prove que

$$\sum_{i=1}^{n} PM_i \;\geq\; \left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} PA_i.$$

Solução. Sejam M_{i-1} e M_i os pontos médios do $(i-1)$-ésimo e do i-ésimo lado do polígono regular de n lados, respectivamente (veja Figura 18).

Figura 18 – Lados do polígono regular



Fonte: Elaborada pelo autor.

Aplicando o Teorema 2.1.1 ao quadrilátero $PM_{i-1}A_iM_i$, obtemos a desigualdade

$$A_iM_{i-1} \cdot PM_i + PM_{i-1} \cdot A_iM_i \;\geq\; PA_i \cdot M_{i-1}M_i,$$

de onde concluímos que

$$PM_i + PM_{i-1} \;\geq\; 2\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) \cdot PA_i, \tag{3.9}$$

onde $i = 1, 2, \ldots, n$ e $A_0 = A_n$, $M_0 = M_n$. Somando ambos os lados da desigualdade (3.9), encontramos

$$\sum_{i=1}^{n}(PM_i + PM_{i-1}) \ \geq \ 2\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) \cdot \sum_{i=1}^{n} PA_i,$$

o que é equivalente à desigualdade que queríamos demonstrar.

□

3.1.7 Problema 7 - (Leng, 2016, p. 11)

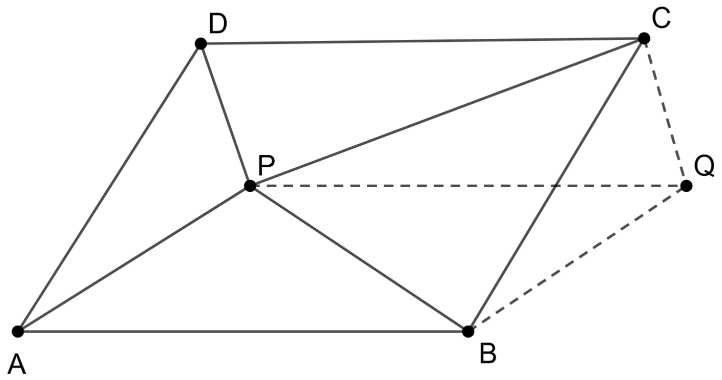
Seja P um ponto no paralelogramo ABCD. Prove que

$$PA \cdot PC + PB \cdot PD \ \geq \ AB \cdot BC$$

e indique a condição para que a igualdade ocorra.

Solução. Seja Q o ponto do plano tal que $APQB$ é um paralelogramo. Tem-se então que $DPQC$ também é um paralolograma (veja a Figura 19).

Figura 19 – Paralelogramo $ABCD$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto,

$$CQ = PD, BQ = PA, \text{ e } PQ = AB.$$

Aplicando o Teorema 2.1.1 ao quadrilátero $PBQC$:

$$BQ \cdot PC + PB \cdot CQ \ \geq \ PQ \cdot BC,$$

isto é,

$$PA \cdot PC + PB \cdot PD \ \geq \ AB \cdot BC.$$

A igualdade ocorre se e somente se P, B, Q, C estiverem em um mesmo círculo, ou seja,

$$\angle CPB + \angle CQB = \pi.$$

Como

$$\angle CQB = \angle APD,$$

concluímos que $PA \cdot PC + PB \cdot PD = AB \cdot BC$ quando

$$\angle APD + \angle CPB = \pi.$$

□

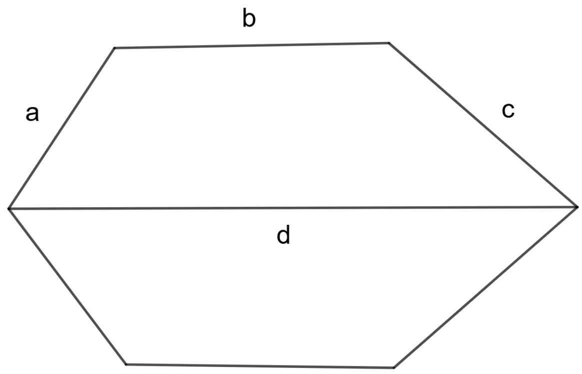
3.1.8 Problema 8 - (Leng, 2016, p. 60)

Seja Q um quadrilátero convexo com área F e quatro lados satisfazendo $a \leq b \leq c \leq d$. Mostre que

$$F \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} c^2.$$

Solução. Refletimos Q sobre o lado mais longo para formar um hexágono (veja a Figura 20). (Em alguns casos especiais, a figura formada será um pentágono ou um retângulo, mas a demonstração é similar.)

Figura 20 – Quadrilátero Q refletido



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como o perímetro desse hexágono convexo é $2(a+b+c)$, a área $2F$ do hexágono satisfaz

$$2F \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^2,$$

pelo Teorema 2.3.2.

Aplicando $a, b \leq c$, obtemos

$$F \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}c^2.$$

$\square$

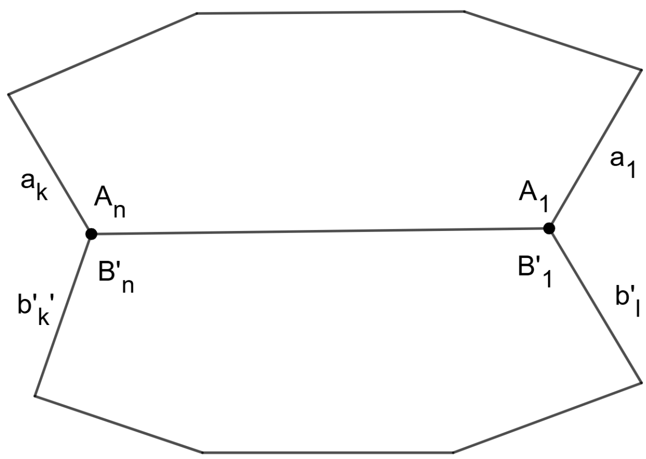
3.1.9 Problema 9 - (Leng, 2016, p. 60)

Sejam Ω_1 e Ω_2 polígonos de n lados com áreas F_1, F_2 e lados $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n$ e $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_{n-1} \leq b_n$, respectivamente. Mostre que

$$\frac{F_1}{a_n^2} + \frac{F_2}{b_n^2} < \frac{(n-1)^2}{4\pi}\left(\frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{b_{n-1}}{b_n}\right)^2.$$

Solução. Sejam $\overline{A_nA_1}$ e $\overline{B_nB_1}$ os maiores lados de Ω_1 e Ω_2, respectivamente. Construa um polígono Ω_2', homotético a Ω_1, de modo que $B_n' = A_n$, $B_1' = A_1$. Podemos supor que Ω_1 e Ω_2' estão em semiplanos distintos dentre os dois semiplanos determinados pela reta que contém $\overline{A_1A_n}$ pois, caso contrário, consideramos o polígono obtido ao refletirmos Ω_2' em relação a essa reta (veja Figura 21).

Figura 21 – Polígonos Ω_1 e Ω_2'



Fonte: Elaborada pelo autor.

Seja $\widetilde{\Omega} = \Omega_1 \cup \Omega_2'$. O perímetro de $\widetilde{\Omega}$ é

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i + \frac{a_n}{b_n}b_i\right),$$

e a sua área é

$$F_1 + \frac{a_n^2}{b_n^2}F_2.$$

Sejam $\angle A_n, \angle A_1$ e $\angle B'_n, \angle B'_1$ ângulos consecultivos de Ω_1, Ω'_2, respectivamente. Sejam os outros lados de $\angle A_n, \angle A_1$ dados por a_k, a_1, respectivamente, e os outros lados de $\angle B'_n, \angle B'_1$ dados por b'_k, b'_l, respectivamente.

Se $\angle A_n, \angle A_1$ e $\angle B'_n, \angle B'_1$ não forem ângulos suplementares, então os lados a_k, a_1 e b'_k, b'_l não estão em uma mesma linha, respectivamente. Então $\widetilde{\Omega}$ é um $2(n-1)$-ágono. Aplicando o Teorema 2.3.2, obtemos

$$\begin{aligned}
F_1 + \frac{a_n^2}{b_n^2} F_2 \ &\leq \ \frac{\left(\sum_{i=1}^n \left(a_i + \frac{a_n}{b_n} b_i\right)\right)^2}{8(n-1)} \cdot \cot \frac{\pi}{2(n-1)} \\
&\leq \frac{\left((n-1)a_{n-1} + (n-1)\frac{a_n}{b_n} b_{n-1}\right)^2}{8(n-1)} \cdot \cot \frac{\pi}{2(n-1)} \\
&= \frac{(n-1)\left(a_{n-1} + \frac{a_n}{b_n} b_{n-1}\right)^2}{8} \cdot \cot \frac{\pi}{2(n-1)},
\end{aligned}$$

A saber,

$$\frac{F_1}{a_n^2} + \frac{F_2}{b_n^2} \ \leq \ \frac{(n-1)}{8} \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{b_{n-1}}{b_n}\right)^2 \cdot \cot \frac{\pi}{2(n-1)} \tag{3.10}$$

Considere as somas $\angle A_n + \angle B'_n$ e $\angle A_1 + \angle B'_1$. Se exatamente uma delas for igual a π, então Ω' é um $(2n-3)$-ágono. Se as duas somas forem iguais a π, então Ω' é um $(2n-4)$-ágono. Fazendo uma discussão semelhante à feita acima, obtemos, aplicando o Teorema 2.3.2, os seguintes resultados:

$$\frac{F_1}{a_n^2} + \frac{F_2}{b_n^2} \ \leq \ \frac{(n-1)^2}{4(2n-3)} \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{b_{n-1}}{b_n}\right)^2 \cdot \cot \frac{\pi}{2n-3}, \tag{3.11}$$

no primeiro caso, e

$$\frac{F_1}{a_n^2} + \frac{F_2}{b_n^2} \leq \frac{(n-1)^2}{8(n-2)} \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{b_{n-1}}{b_n}\right)^2 \cdot \cot \frac{\pi}{2(n-2)}, \tag{3.12}$$

no segundo caso. Observe que para $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, temos

$$\cot x < \frac{1}{x}. \tag{3.13}$$

Agora, combinando (3.10), (3.11) e (3.12) com (3.13), obtemos

$$\frac{F_1}{a_n^2} + \frac{F_2}{b_n^2} \ < \ \frac{(n-1)^2}{4\pi} \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{b_{n-1}}{b_n}\right)^2.$$

$\square$

3.1.10 Problema 10

Seja ABC um triângulo inscrito em um círculo. Seja D o ponto de interseção entre a bissetriz interna do ângulo $\angle BAC$ e o arco BC que não contém o ponto A. Mostre que

$$AB + AC \ \leq \ 2AD.$$

Solução. Note que $BD = CD$ pois, como $\angle CAD = \angle BAD$, o triângulo BCD é isósceles, visto que $\angle BCD = \angle BAD$ e $\angle CBD = \angle CAD$ (ângulos determinados pelo mesmo arco de circunferência), ou seja, $\angle CBD = \angle BCD$. Aplicando o Teorema 2.1.1 ao quadrilátero $ABDC$, que por sua vez é cíclico, temos

$$AD \cdot BC = AB \cdot CD + AC \cdot BD.$$

Chamemos o comprimento $CD = BD$ de x. Temos

$$AB + AC = \frac{BC}{x} \cdot AD.$$

Aplicando a desigualdade triangular em BCD temos $BC \leq CD + BD$, ou seja, $BC \leq 2x$. Portanto, $AB + AC \ \leq \ 2AD$.

□

4 APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

A proposta de aplicões das desigualdades estudadas no ensino médio que apresentaremos neste trabalho está estruturada em forma de sequência didática. No contexto do ensino e aprendizagem da Matemática, uma *sequência didática* é um conjunto organizado e articulado de atividades que visa promover a construção do conhecimento de forma progressiva e significativa pelos estudantes. A elaboração desse tipo de proposta envolve planejamento intencional, seleção adequada de conteúdos e metodologias que considerem tanto os objetivos de aprendizagem quanto as necessidades dos alunos. Zabala define sequência didática como:

> um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm uma organização interna com começo, meio e fim, de forma que cada atividade seja um elo necessário para alcançar os objetivos propostos (Zabala, 1998, p. 18).

Essa abordagem permite ao professor acompanhar e avaliar o desenvolvimento da aprendizagem, favorecendo a mediação pedagógica e o redirecionamento de estratégias conforme as dificuldades e avanços observados.

4.1 Sequência Didática: Investigando a desigualdade de Ptolomeu por meio de uma animação no *GeoGebra*

As construções tradicionais com régua e compasso frequentemente limitam a compreensão de certos conceitos geométricos, enquanto o uso do GeoGebra (2025) supera essas limitações ao proporcionar uma visualização precisa e dinâmica das figuras e objetos estudados. Como destaca Amado *et al.* (2015, p. 646)

> Um dos aspectos que merece particular destaque no trabalho com o *GeoGebra* são as figuras que se obtêm em contraposição com as atividades geométricas apenas levadas a cabo com lápis e papel. Facilmente se podem adivinhar as dificuldades de compreensão que podem surgir quando os alunos tomam como referência um desenho e não uma figura. Um ambiente de geometria dinâmica permite superar definitivamente essas dificuldades. As figuras ou construções feitas em ambientes de geometria dinâmica comportam-se de acordo com as leis da geometria, isto é, refletem todas as consequências das propriedades que as definem.

Assim, nesta sequência didática, propomos uma investigação ativa da desigualdade de Ptolomeu por meio de animações interativas no *GeoGebra*, buscando facilitar a compreensão dos estudantes. Pois ainda segundo Amado *et al.* (2015, p. 646), "a partir de figuras construídas no *GeoGebra*, os alunos estruturaram ideias matemáticas e raciocínios e construíram cadeias argumentativas. [. . .] A maioria formula e explora conjeturas, procurando caminhos para a sua justificação."

4.1.1 Definições e estrutura da sequência didática

Nesta seção, apresenta-se a estrutura da sequência didática. Os planos de aula detalhados constam nas subseções seguintes.

ESCOLA: ____

ÁREA DO CONHECIMENTO: Matemática e suas Tecnologias

DISCIPLINA: Matemática

PROFESSOR(A): ____

SÉRIE: 1ª Ensino Médio (EM) **TURMA:** ____

OBJETOS DE CONHECIMENTO:

Polígonos, medidas de segmentos, *GeoGebra*, diagonais, desigualdade de Ptolomeu.

TEMA:

Investigando a desigualdade de Ptolomeu por meio de uma animação no *GeoGebra*

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES:

Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4

Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) - 9º ANO Ensino Fundamental (EF)

D4 - Identificar relação entre quadriláteros por meio de suas propriedades.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Ensinar os comandos básicos do *GeoGebra* para construção e manipulação de quadriláteros.
- Criar uma animação interativa que ilustre a desigualdade de Ptolomeu por meio da manipulação de vértices.
- Verificar experimentalmente a desigualdade em diferentes casos, comparando quadriláteros cíclicos e não-cíclicos.
- Aplicar os conhecimentos geométricos na resolução de problemas.

DURAÇÃO:

Previsto para 3 aulas de 50 minutos cada.

AVALIAÇÃO:

Realizar um teste ao final com alguns problemas contextualizados para que os estudantes apliquem os conhecimentos adquiridos, com ou sem o uso do *Geogebra*.

4.1.2 Aulas 1 e 2

OBJETOS DE CONHECIMENTO:

Polígonos, medidas de segmentos, *GeoGebra*, diagonais, desigualdade de Ptolomeu.

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES:

BNCC (BRASIL, 2018)

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4

Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

SAEB (TEIXEIRA, 2001a) - 9º ANO EF

D4 - Identificar relação entre quadriláteros por meio de suas propriedades.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Ensinar os comandos básicos do *GeoGebra* para construção e manipulação de quadriláteros.
- Criar uma animação interativa que ilustre a desigualdade de Ptolomeu por meio da manipulação de vértices.
- Verificar experimentalmente a desigualdade em diferentes casos, comparando quadriláteros cíclicos e não-cíclicos.

DURAÇÃO:

Duas aulas de 50 minutos cada.

RECURSOS UTILIZADOS:

Professor: Pincel, quadro branco, livro, materiais impressos, régua, agenda, smartphone, projetor, notebook, acessórios e laboratório de informática.

Aluno: Caderno, lápis, borracha, canetas, régua e acessórios.

METODOLOGIA:

A proposta desta aula é que os alunos criem sua própria animação no *GeoGebra* para verificar a desigualdade de Ptolomeu. O professor precisa ter um conhecimento prévio da ferramenta.

1º momento (10 minutos): O professor deve fazer uma acolhida aos estudantes, em seguida, dividir a turma em duplas. Fazer o levantamento dos conhecimentos prévios dos estudantes sobre o tema com perguntas por exemplo: O que é um quadrilátero? Cite exemplos do cotidiano de vocês. O que significa dizer que um polígono é inscritível? O que é uma diagonal? Depois de uma discussão inical sobre os conceitos, apresentar o tema e os objetivos da aula.

2º momento (8 minutos): Apresentar a desigualdade de Ptolomeu, destacando que se trata de uma generalização do teorema do mesmo matemático. Os alunos tomam nota. Segue abaixo o enunciado da desigualdade. Fazer um desenho para ilustrar e tecer comentários.

Se ABCD é um quadrilátero convexo de diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, então

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

ademais, a igualdade é válida se, e somente se, ABCD é um quadrilátero cíclico.

3º momento (1 hora): Conduzir a turma para o laboratório de informática. Observação: a aula pode ser adaptada com o uso de tablets ou smartphones. Acessar o *GeoGebra* clicando aqui. Faça uma apresentação rápida para os alunos das principais ferramentas básicas do *software*. Agora, seguir o passo a passo abaixo para fazer sua animação da desigualdade. Essa parte pode ser mostrada em um projetor para ficar mais fácil dos alunos acompanharem. Sugestão: clique nas três barras no canto superior direito, vá em "Configurações", depois em "Rotular" e selecione a opção "Apenas para os Pontos Novos".

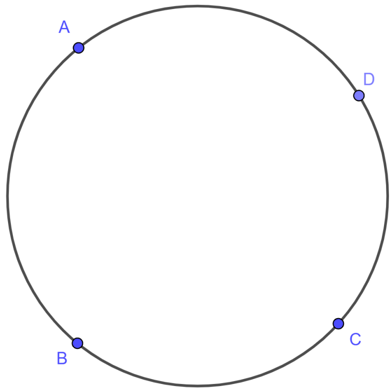
Roteiro de Investigação

1. Esconder os eixos e a malha da janela de visualização.

2. Escolha na barra de ferramentas a opção "Círculo definido por Três Pontos" e marque os pontos.

3. Em seguida, selecione "Ponto" e marque o ponto D fora da circunferência. Depois mova-o e posicione sobre o arco $\overset{\frown}{AC}$ que não contém o ponto B. Atenção: lembre-se de que, para movimentar um objeto, a ferramenta "Mover" deve estar selecionada. Observe se a posição dos pontos ficou similar aos da Figura 22.

Figura 22 – Círculo e pontos
A,B,C e D

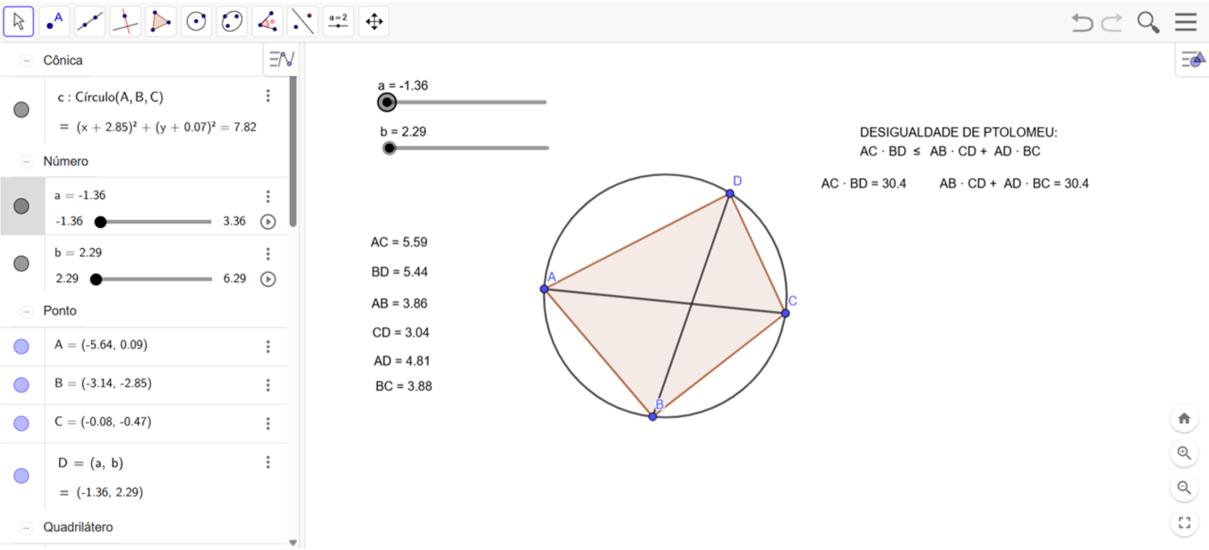


Fonte: Elaborada pelo autor.

4. Usando a ferramenta "Controle Deslizante", estabeleça o controle "a", na aba "Intervalo" coloque valor mínimo igual à abscissa x do ponto D e valor máximo igual a $x+4$. Analogamente, defina o controle "b" com valor mínimo igual à ordenada y do ponto D e máximo $y+4$.
5. Na Janela de Álgebra, clique e edite as coordenadas do ponto D para $D=(a,b)$ e tecle "Enter".
6. Com a ferramenta "Polígono", desenhe o quadrilátero $ABCD$ inscrito na circunferência.
7. A partir do ponto A trace, com a ferramenta "Segmento", a diagonal $\overline{AC}$. Analogamente, trace do vértice B a diagonal $\overline{BD}$.
8. Na barra de Entrada digite: Texto["AC = "+(AC)] e tecle enter. Da mesma forma, digite: Texto["BD = "+(BD)] e tecle enter. Digite: Texto["AB = "+(AB)] e tecle enter. Digite: Texto["CD = "+(CD)] e tecle enter. Digite: Texto["AD = "+(AD)] e tecle enter. Digite: Texto["BC = "+(BC)] e tecle enter. Ajuste as posições.
9. Agora vá na ferramenta "ABC Texto" e digite: DESIGUALDADE DE PTOLOMEU: (clique enter) $AC\cdot BD\leq AB\cdot CD+AD\cdot BC$ e clique em "OK".
10. Novamente na barra de Entrada digite: Texto["AC · BD = "+(AC*BD)] e tecle enter. Digite: Texto["AB · CD + AD · BC = "+(AB*CD + AD*BC)] e tecle enter. Posicione essas informações abaixo da desigualdade do passo anterior.
11. Para finalizar, clique com o botão direito do mouse sobre os controles deslizantes "a" e "b", escolha a opção "Animação" e observe o movimento do vértice D do quadrilátero $ABCD$, estabelecendo assim a desigualdade de Ptolomeu. Reforce que a igualdade ocorre se, e somente se, o ponto D está sobre o círculo, ou seja, se o quadrilátero $ABCD$ é cíclico. O aluno também pode mover o ponto D com o mouse. Na Janela de Álgebra, ele pode ajustar a velocidade

de animação dos controles deslizantes "a" e "b" ou pausar. A Figura 23 ilustra uma possível configuração final da animação.

Figura 23 – Animação para investigar a desigualdade de Ptolomeu



Fonte: Elaborada pelo autor.

4º momento (13 minutos): Observar se todos os estudantes conseguiram criar suas animações. Discutir sobre as impressões deles em relação ao *software* e suas funcionalidades. Explorar e imaginar aplicações em situações de otimização contextualizadas. Indagar aos alunos sobre a utilidade do recurso.

5º momento (9 minutos): Retorno para a sala de aula, verificação dos objetivos, orientações para a aula seguinte que será de aplicações da desigualdade de Ptolomeu em problemas contextualizados.

AVALIAÇÃO:

Monitoramento da participação e interação dos estudantes, feedback da aula, anotações sobre o progresso da aprendizagem, observação da necessidade de adaptações.

4.1.3 Aula 3

OBJETOS DE CONHECIMENTO:

Polígonos, medidas de segmentos, diagonais, desigualdade de Ptolomeu.

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES:

SAEB - 9º ANO EF

D4 - Identificar relação entre quadriláteros por meio de suas propriedades.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Aplicar os conhecimentos geométricos na resolução de problemas.

DURAÇÃO:

Uma aula de 50 minutos.

RECURSOS UTILIZADOS:

Professor: Pincel, quadro branco, livro, materiais impressos, régua, agenda, smartphone.

Aluno: Caderno, lápis, borracha, canetas, régua e acessórios.

METODOLOGIA:

1º momento (8 minutos): Acolhida aos estudantes, recapitulação da aula anterior, distribuição da lista de questões impressa, organização da sala em duplas. Abaixo está uma sugestão para a atividade.

Atividade

Questão 1 - Um paisagista precisa dispor 4 canteiros (A, B, C, D) em um parque circular. Faça o que se pede no caderno:

a) Construa o quadrilátero formado pelos centros dos canteiros;
b) Meça os segmentos e verifique se $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$;
c) Movimente um canteiro para fora do círculo, faça as medidas novamente e analise se a igualdade se mantém.

Questão 2 - Num condomínio com 4 casas (A, B, C, D), a prefeitura quer construir caminhos entre elas.

a) No caderno, desenhe as casas formando um quadrilátero, meça os segmentos e calcule $AC \cdot BD$;
b) Compare com a soma $AB \cdot CD + AD \cdot BC$;
c) Qual configuração minimiza o comprimento total das vias? Justifique.

Questão 3 - Ptolomeu usou sua desigualdade para calcular distâncias astronômicas:

a) Simule 4 estrelas formando um quadrilátero no seu caderno;
b) Se 3 estrelas são colineares, faça as medidas dos segmentos e calcule que valor tem $AB \cdot CD + AD \cdot BC - AC \cdot BD$?
c) Relacione com a desigualdade triangular.

2º momento (20 minutos): O professor orienta, tira dúvidas e motiva os alunos na resolução dos exercícios.

3º momento (13 minutos): Correção dos exercícios com a participação ativa dos estudantes.

4º momento (9 minutos): Comentários finais sobre a importância da desigualdade de Ptolomeu, retirada de dúvidas, dicas para a resolução das questões no *GeoGebra*, visto aos cadernos.

AVALIAÇÃO:

Verificação da participação dos alunos nas atividades propostas, anotações sobre as dificudades e avanços na aprendizagem, feedback da aula.

4.2 Sequência Didática: Uma prova visual da desigualdade de Erdös - Mordell

A proposta desta sequência didática é apresentar uma demonstração visual simples, mas rigorosa, da desigualdade de Erdös - Mordell, essa demonstração baseia-se em (Alsina; Nelsen, 2007).

Uma aprendizagem efetiva da matemática não pode se resumir a memorização de fórmulas e propriedades, devendo se alicerçar no entendimento do porquê, ou seja, na demonstração de tais propriedades e fórmulas, bem como na capacidade de desenvolver argumentos congruentes e lógicos para explicar e justificar pontos de vista e estratégias de resolução adotadas. Segundo Kline (1967, p. 302), "a demonstração, longe de ser uma formalidade seca, é um meio de descoberta e compreensão. Ela fornece insights e revela relações. Sem ela, a matemática se reduz a um saco de truques."

4.2.1 Definições e estrutura da sequência didática

Nesta seção, apresenta-se a estrutura da sequência didática. Os planos de aula detalhados constam nas subseções seguintes.

ESCOLA: ____

ÁREA DO CONHECIMENTO: Matemática e suas Tecnologias

DISCIPLINA: Matemática

PROFESSOR(A): ____

SÉRIE: 2ª Ensino Médio **TURMA:** ____

OBJETOS DE CONHECIMENTO:

Polígonos, triângulos, semelhança de triângulos, proporção, segmentos de reta perpendiculares, ângulos internos de um triângulo.

TEMA:

Uma prova visual da desigualdade de Erdös - Mordell

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES:

BNCC

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

SAEB

Descritor 1: Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Compreender as propriedades básicas dos triângulos e a noção de semelhança entre figuras planas, por meio da análise de lados correspondentes e ângulos congruentes.
- Aplicar o conceito de razão e proporcionalidade na resolução de problemas envolvendo triângulos semelhantes, especialmente em contextos geométricos que envolvem segmentos perpendiculares.
- Analisar configurações geométricas em que se verifica a semelhança de triângulos.
- Compreender e aplicar os critérios de semelhança de triângulos, com ênfase no caso Lado-Lado-Lado (LLL).
- Utilizar a semelhança de triângulos como ferramenta para realizar e interpretar uma demonstração visual da desigualdade de Erdös–Mordell.
- Desenvolver a capacidade de argumentação matemática por meio da observação, análise e validação de propriedades geométricas, com o apoio de representações dinâmicas.

DURAÇÃO:

Previsto para 4 aulas de 50 minutos cada.

AVALIAÇÃO:

Realização de um trabalho de demonstração da desigualdade estudada, com redação própria do aluno, destacando a forma como o mesmo entendeu os passos de tal demonstração e a ideia criativa de elaboração da apresentação. Pode ser um cartaz, uma figura no *GeoGebra* ou com o uso de triângulos recortados.

4.2.2 Aulas 1 e 2

OBJETOS DE CONHECIMENTO:

Polígonos, triângulos, semelhança de triângulos, proporção, segmentos de reta perpendiculares.

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES:

BNCC

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

SAEB

Descritor 1: Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Compreender as propriedades básicas dos triângulos e a noção de semelhança entre figuras planas.
- Aplicar o conceito de razão e proporcionalidade na resolução de problemas envolvendo triângulos semelhantes, especialmente em contextos geométricos que envolvem segmentos perpendiculares.
- Analisar configurações geométricas em que se verifica a semelhança de triângulos.

DURAÇÃO:

Duas aulas de 50 minutos cada.

RECURSOS UTILIZADOS:

Professor: Pincel, quadro branco, livro, materiais impressos, régua, agenda, smartphone e acessórios.

Aluno: Caderno, lápis, borracha, canetas, régua, tesoura, cola e acessórios.

METODOLOGIA:

Todos os momentos da aula podem ser conduzidos com o uso ou não de projetor e material impresso, fica a critério do professor o recurso que melhor se adequa a sua realidade.

1º momento (10 minutos): O professor deve fazer uma acolhida aos estudantes, em seguida organizar a sala em duplas e seus materiais.

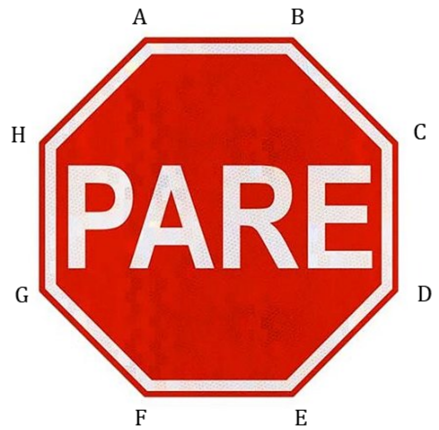
2º momento (10 minutos): Fazer o levantamento prévio do conhecimento dos alunos com algumas perguntas, por exemplo: O que é um polígono? O que é um ângulo reto? O que são segmentos perpendiculares? Quais os critérios para que dois polígonos sejam semelhantes? Onde encontramos polígonos no nosso cotidiano? Em seguida apresentar o tema e os objetivos da aula.

3º momento (35 minutos): Revisar as definições formais e objetos de conhecimento das perguntas, os estudantes tomam nota. Segue uma sugestão de revisão.

Definição: Um polígono é uma figura geométrica plana e fechada composta por uma sequência finita de segmentos de reta consecutivos, chamados lados, que só se encontram em suas extremidades, conhecidas como vértices.

Exemplo: Pedir que os alunos desenhem no caderno um polígono que represente um objeto do seu cotidiano. Identificando o polígono, o objeto e cada vértice com uma letra maiúscula, seguindo a ordem alfabética. Veja Figura 24.

Figura 24 – Placa de trânsito, octógono $ABCDEFGH$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição: Diz-se que dois segmentos de reta são perpendiculares quando, ao se prolongarem como retas, eles se interceptam em um único ponto e o ângulo formado entre eles é um ângulo reto (ou seja, de 90°). Denotando esses segmentos por $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, escrevemos $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.

Definição: Dois triângulos são ditos semelhantes quando possuem a mesma forma, ou seja, seus ângulos correspondentes são congruentes e seus lados correspondentes são proporcionais.

Formalmente, dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, tem-se

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \quad \iff \quad \begin{cases} \angle BAC = \angle B'A'C',\ \angle ABC = \angle A'B'C',\ \angle ACB = \angle A'C'B', \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'} = k, \end{cases}$$

onde k é a razão de semelhança.

Critério de semelhança Lado-Lado-Lado (LLL): Para que dois triângulos sejam semelhantes, é suficiente que as medidas de seus lados correspondentes sejam proporcionais. Em notação matemática:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Esse critério é bastante utilizado em problemas de geometria, pois permite estabelecer a semelhança sem a necessidade de analisar ângulos, apenas comparando as proporções entre os lados.

4º momento (20 minutos): Orientar a realização da atividade abaixo. Levar impressa para os alunos colarem no caderno.

Atividade:

Questão 1 - Um estudante mede a sombra de uma torre e verifica que ela mede 30 metros. No mesmo instante, uma vassoura de 1,5 metros de altura projeta uma sombra de 2 metros. Supondo que os raios solares incidem paralelamente, calcule a altura da torre.

a) Que triângulos são semelhantes nessa situação?

b) Qual é a razão de semelhança?

c) Qual é a altura da torre?

Questão 2 – Um artesão projeta um vitral em forma de triângulo equilátero. Ele deseja construir um triângulo menor internamente, semelhante ao triângulo original, unindo os pontos médios de cada lado.

a) Mostre que os triângulos são semelhantes.

b) Qual é a razão de semelhança entre o triângulo menor e o maior?

c) Se o lado do triângulo maior mede 60 cm, quanto mede a altura do triângulo menor?

Questão 3 – Para descobrir a altura real de um jogador, um aluno desenha dois triângulos: um do jogador com sua sombra e outro de uma vara de 1 metro ao lado. Sabendo que a sombra da vara mede 0,8 metro e a sombra do jogador mede 2,8 metros, responda:

a) A semelhança entre os triângulos é justificada por qual critério?

b) Qual a razão de semelhança entre o triângulo maior e o triângulo menor desenhado pelo aluno?
c) Qual é a altura real do jogador?

5º momento (15 minutos): Correção das questões da atividade e retirada de dúvidas, participação ativa dos alunos.

6º momento (10 minutos): Finalização da aula com verificação dos objetivos, direcionamento de perguntas sobre o conteúdo, orientações para a próxima aula e visto aos cadernos.

AVALIAÇÃO:

Observação da participação e interação de todos os alunos da turma, anotações sobre os comportamentos, revisão oral ao final da aula, feedback dos estudantes.

4.2.3 Aulas 3 e 4

OBJETOS DE CONHECIMENTO:

Semelhança de triângulos, ângulos, demonstração matemática, desigualdade de Erdös - Mordell.

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES:

BNCC

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

– Compreender e aplicar os critérios de semelhança de triângulos, com ênfase no caso Lado-Lado-Lado (LLL).
– Utilizar a semelhança de triângulos como ferramenta para realizar e interpretar uma demonstração visual da desigualdade de Erdös - Mordell.
– Desenvolver a capacidade de argumentação matemática por meio da observação, análise e validação de propriedades geométricas, com o apoio de representações dinâmicas.

DURAÇÃO:

Duas aulas de 50 minutos cada.

RECURSOS UTILIZADOS:

Professor: Pincel, quadro branco, livro, materiais impressos, régua, agenda, laboratório de informática, smartphone, data show, notebook, e acessórios.

Aluno: Caderno, lápis, borracha, canetas, régua, tesoura, cola e acessórios.

METODOLOGIA:

1º momento (10 minutos): Acolhida aos estudantes. Recapitulação da aula anterior.

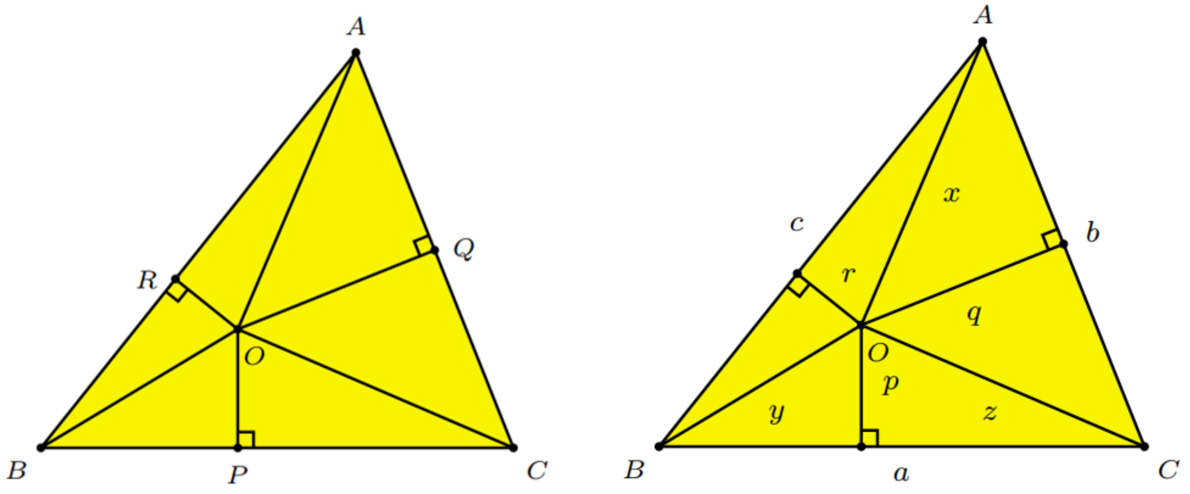
2º momento (15 minutos): Apresentação da desigualdade de Erdös - Mordell. Abaixo está está o enunciado.

A partir de um ponto O no interior de um triângulo dado ABC, traçam-se as perpendiculares $\overline{OP}, \overline{OQ}, \overline{OR}$ *aos seus lados. Prove que:*

$$OA + OB + OC \geq 2(OP + OQ + OR).$$

O professor deve levar a Figura 25 impressa, pedir aos alunos que recortem e colem no caderno, ao longo deste momento eles tomam nota.

Figura 25 – Triângulo *ABC* e medidas dos segmentos representadas por letras



(a) (b)

Fonte: (Alsina; Nelsen, 2007, p. 100)

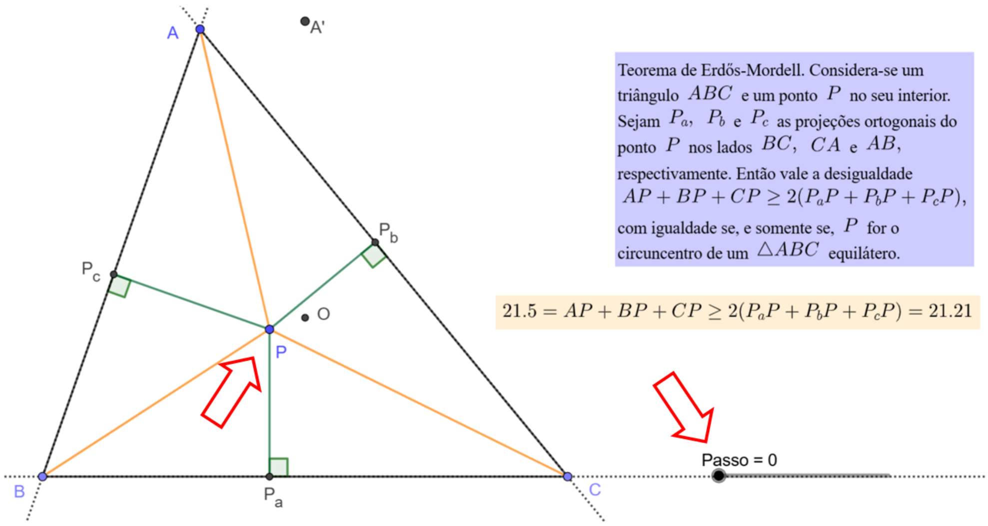
Demonstração. A prova usa nada mais sofisticado do que propriedades elementares de triângulos. Para nossa demonstração usaremos a Figura 25, na parte (a) vemos o triângulo como descrito por Erdös, em (b), denotamos os comprimentos dos segmentos de reta relevantes por letras minúsculas, cujo uso simplificará a apresentação a seguir. Em termos dessa notação, a desigualdade de Erdös - Mordell torna-se

$$x + y + z \;\geq\; 2(p + q + r).$$

3º momento (20 minutos): Os estudantes serão levados para o laboratório de informática, ou podem usar outro equipammento disponível, para verificar a desigualdade de Erdös - Mordell usando o *GeoGebra*, versão interativa aqui, criada por Linares (2023).

O professor acompanha esse momento importante, retirando as dúvidas dos alunos em relação ao uso da ferramenta. A Figura 26 ilustra a tela inicial, uma dica de como usar este recurso está abaixo.

Figura 26 – Verificação da desigualdade de Erdös - Mordell no *GeoGebra*



Fonte: Adaptado de Linares (2023), pelo autor.

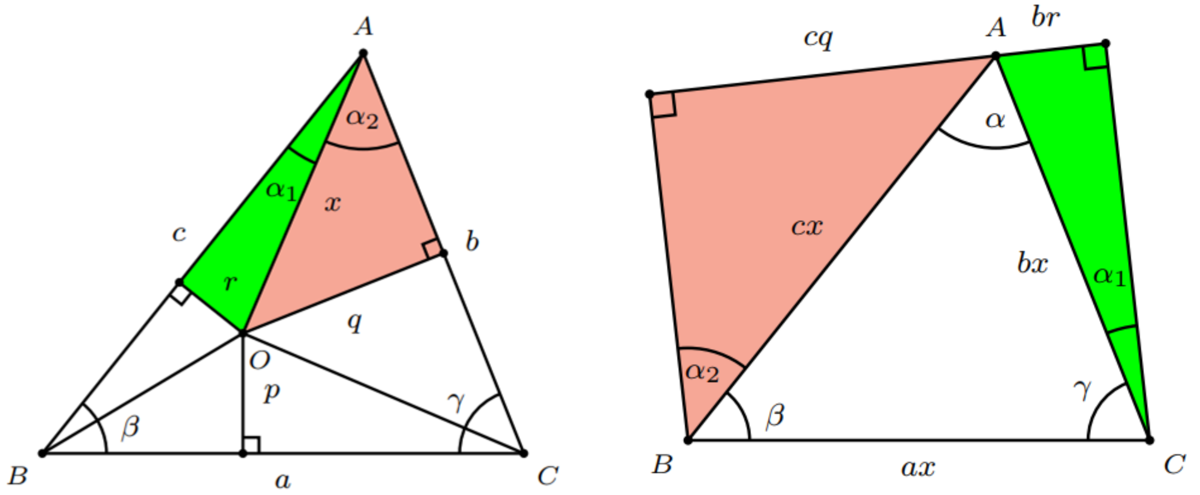
Movimentar o ponto P indicado pela seta vermelha e observar os valores da soma das distâncias de P aos vértices do triângulo ABC e a soma das distâncias de P aos lados desse triângulo se alterando, destacado em amarelo na Figura 26. Reforçar que a desigualdade continua válida para qualquer posição do ponto P dentro do triângulo. Desafiar os alunos a posicionar o ponto P para que haja a igualdade e indagar: Vocês conseguem dizer qual posição do ponto P mais aproxima o resultado das somas da igualdade? O ponto "Passo = 0", indicado pela outra seta vermelha, se movimentado, apresenta uma demonstração da desigualdade estudada, usaremos este recurso posteriormente.

4º momento (35 minutos): Os alunos retornam para a sala de aula e seguem com a explicação. O professor deve levar a Figura 27 impressa, pedir aos alunos que recortem e colem no caderno, ao longo deste momento eles tomam nota. Agora, demonstraremos o seguinte lema:

Lema 4.2.1 *Para o triângulo ABC na Figura 27(b), temos* $ax \geq br + cq$*,* $by \geq ar + cp$*, e* $cz \geq aq + bp$*.*

Demonstração. Construímos um trapézio na Figura 27(b) a partir de três triângulos - um semelhante a ABC, com razão igual a x, e os outros dois semelhantes aos dois triângulos sombreados na Figura 27(a), o verde com razão b e o salmão com razão c.

Figura 27 – Triângulos iniciais e triângulos semelhantes com razões x, b e c



(a) (b)

Fonte: (Alsina; Nelsen, 2007, p. 100)

Observe na Figura 27 uma prova visual de que $ax \geq br + cq$, que decorre do fato do trapézio construído ser retângulo. As outras duas desigualdades são estabelecidas de forma análoga. Observação: para evidenciar ainda mais estes fatos, o professor pode pedir aos estudantes que usem a régua para medir os seguimentos.

Vale observar, antes de prosseguir, que o objeto na Figura 27(b) é de fato um trapézio, pois os três ângulos no ponto onde os três triângulos se encontram medem $\frac{\pi}{2} - \alpha_2$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ e $\frac{\pi}{2} - \alpha_1$, e portanto somam π.

Agora, para finalizar a demonstração da desigualdade de Erdös - Mordell, usaremos o Lema 4.2.1, de onde temos

$$x \geq \frac{b}{a}r + \frac{c}{a}q, \quad y \geq \frac{a}{b}r + \frac{c}{b}p, \quad \text{e} \quad z \geq \frac{a}{c}q + \frac{b}{c}p.$$

Somando essas três desigualdades, obtemos

$$x + y + z \geq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)p + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)q + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)r.$$

O Lema 2.2.2 garante que os coeficientes de p, q e r são cada um, no mínimo, 2, do que decorre o resultado desejado.

5º momento (10 minutos): Observar junto aos estudantes se eles conseguiram acompanhar e compreender todos os passos da demonstração da desigualdade. Destaque para a turma que a igualdade ocorre se, e somente se, o triângulo ABC é equilátero e P é o seu centro. Não apresentaremos aqui uma justificativa para este fato, mas cabe algumas reflexões: O que acontece com o trapézio da Figura 27(b) quando temos a igualdade $ax = br + cq$? Isso se dá somente sob qual condição? Que implicação isso tem sobre o ângulo $\angle AOQ$? Incentivar que os alunos investiguem as implicações das outras igualdades $by = ar + cp$ e $cz = aq + bp$.

6º momento (10 minutos): O professor deve encerrar a aula propondo um trabalho de apresentação da versão de cada aluno sobre a demonstração, isso pode ser feito por meio do *GeoGebra*, cartazes, triângulos recortados ou outra forma criativa.

AVALIAÇÃO:

Acompanhamento da participação e percepção dos estudantes, feedback da aula, anotações sobre o progresso da aprendizagem, observação da necessidade de adaptações.

4.3 Sequência Didática: A Desigualdade Isoperimétrica e a Função Quadrática

Nesta sequência didática, exploraremos a Desigualdade Isoperimétrica articulando-a com o estudo da função quadrática. A proposta é oferecer uma experiência de aprendizado integrada, que permita aos estudantes compreender de forma significativa a relação entre variações geométricas e propriedades algébricas, especialmente o papel da função quadrática na modelagem de problemas de otimização geométrica.

Para embasar a mediação e a experimentação em sala de aula, utilizaremos o recurso dinâmico produzido pelo Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade de Campinas, disponível aqui. Ao final também usaremos o *GeoGebra* para ampliar a compreensão do tema.

4.3.1 Definições e estrutura da sequência didática

Nesta seção, apresenta-se a estrutura da sequência didática. Os planos de aula detalhados constam nas subseções seguintes.

ESCOLA: ____

ÁREA DO CONHECIMENTO: Matemática e suas Tecnologias

DISCIPLINA: Matemática

PROFESSOR(A): ____

SÉRIE: 1ª Ensino Médio **TURMA:** ____

OBJETOS DE CONHECIMENTO:

Função quadrática, área e perímetro de figuras planas, desigualdade isoperimétrica.

TEMA:

A Desigualdade Isoperimétrica e a Função Quadrática

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES:

BNCC

(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

SAEB

D12 - Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.

D25 - Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do 2º grau.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Compreender a relação entre perímetro e área em figuras planas, reconhecendo situações que envolvem a desigualdade isoperimétrica.
- Representar graficamente funções quadráticas relacionadas a problemas de maximização de área.
- Analisar a variação da área em função do perímetro, utilizando conceitos de função quadrática.
- Resolver problemas contextualizados envolvendo o cálculo de áreas e perímetros, com ou sem o uso de recursos digitais.
- Utilizar o *GeoGebra* para explorar e validar conjecturas sobre a desigualdade isoperimétrica.

DURAÇÃO:

Previsto para 3 aulas de 50 minutos cada.

AVALIAÇÃO:

Realizar uma verificação da desigualdade isoperimétrica usando o *GeoGebra*, construir polígonos diferentes com o mesmo número de lados e mesmo perímetro para avaliar e concluir qual deles possui a maior área. Fazer conclusões a respeito das observações feitas.

4.3.2 Aulas 1 e 2

OBJETOS DE CONHECIMENTO:

Função quadrática, área e perímetro de figuras planas, desigualdade isoperimétrica.

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES:

BNCC

(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

SAEB

D12 - Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Compreender a relação entre perímetro e área em figuras planas, reconhecendo situações que envolvem a desigualdade isoperimétrica.
- Representar graficamente funções quadráticas relacionadas a problemas de maximização de área.
- Analisar a variação da área em função do perímetro, utilizando conceitos de função quadrática.

DURAÇÃO:

Duas aulas de 50 minutos cada.

RECURSOS UTILIZADOS:

Professor: Pincel, quadro branco, livro, agenda, projetor, notebook, laboratório de informática, smartphone e acessórios.

Aluno: Caderno, lápis, borracha, canetas e acessórios.

METODOLOGIA:

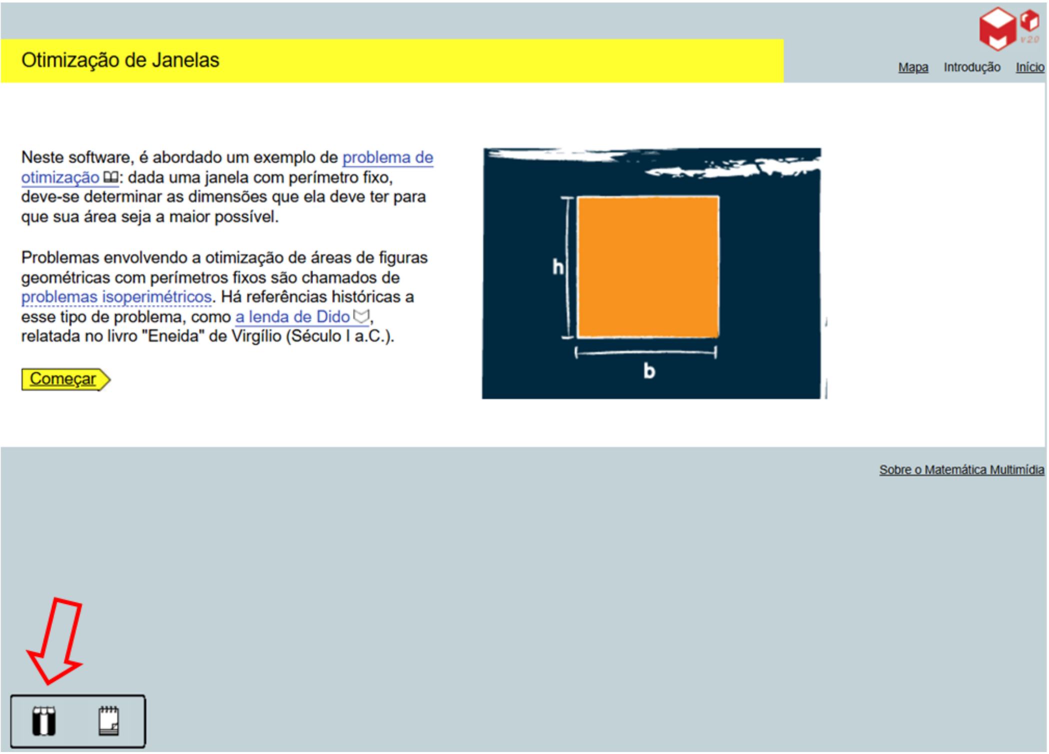
1º momento (7 minutos): Acolhida dos estudantes. A turma deve ser organizada em duplas para as atividades.

2º momento (10 minutos): Problematização inicial. Para esta aula, os alunos já devem ter estudado função quadrática. O professor fará um levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos com perguntas como: Qual a definição de perímetro de uma figura plana? Como se calcula a área de um retângulo? A função quadrática tem o gráfico no formato de qual curva? Você consegue me dizer um exemplo presente no seu cotidiano? Como calculamos o valor máximo de uma função quadrática? Em seguida, apresentar o tema e os objetivos da aula.

3º momento (1 hora e 10 minutos): Agora os alunos devem ser conduzidos ao laboratório de informática ou usar outro equipamento eletrônico disponível, acessar o link disponível aqui para uso do *software Otimização de Janelas*. O professor deve preparar alguns slides com as imagens abaixo para apresentar aos estudantes usando um projetor, como forma de orientá-los. No referido link, também está disponível o *Guia do professor*. Pedir aos alunos que leiam as informações da tela inicial e depois clicar no botão vermelho "ACESSAR O SOFTWARE". Vai abrir um novo link para iniciar o jogo. Fazer a leitura e clicar no botão amarelo "Iniciar software".

Este é um momento de bastante leitura, cada um dos trechos azuis do texto da Figura 28 é um link que traz um conceito ou história importante para introduzir os alunos ao problema, eles devem clicar e ler.

Figura 28 – Tela de contextualização do jogo

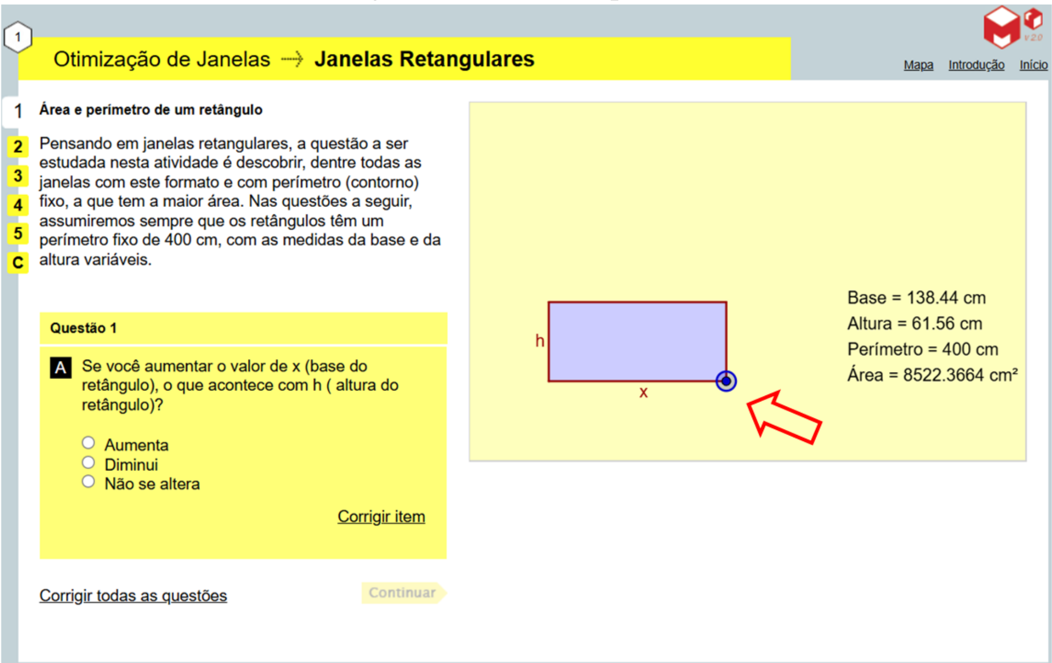


Fonte: Adaptado de Costa (2023), pelo autor.

No último trecho azul, que fala sobre *a lenda de Dido*, vai abrir uma nova página, ao finalizar a leitura eles clicam no botão amarelo "Voltar"no final da página. Eles também podem acessar partes da leitura, clicando no botão indicado pela seta vermelha. Peça que eles tomem nota das partes mais importantes da leitura. Depois, clicar no botão amarelo "Começar". Na tela seguinte, clicar no botão amarelo com o número 1.

Pronto, vamos iniciar as atividades. Ler atentamente os comandos e responder a questão 1, conforme Figura 29. O aluno pode movimentar o ponto indicado pela seta vermelha, observando a variação das grandezas. Depois de marcar, clicar em "Corrigir item". Se a resposta estiver correta, clicar no botão "Continuar". O professor já pode fazer uma introdução sobre a desigualdade isoperimétrica.

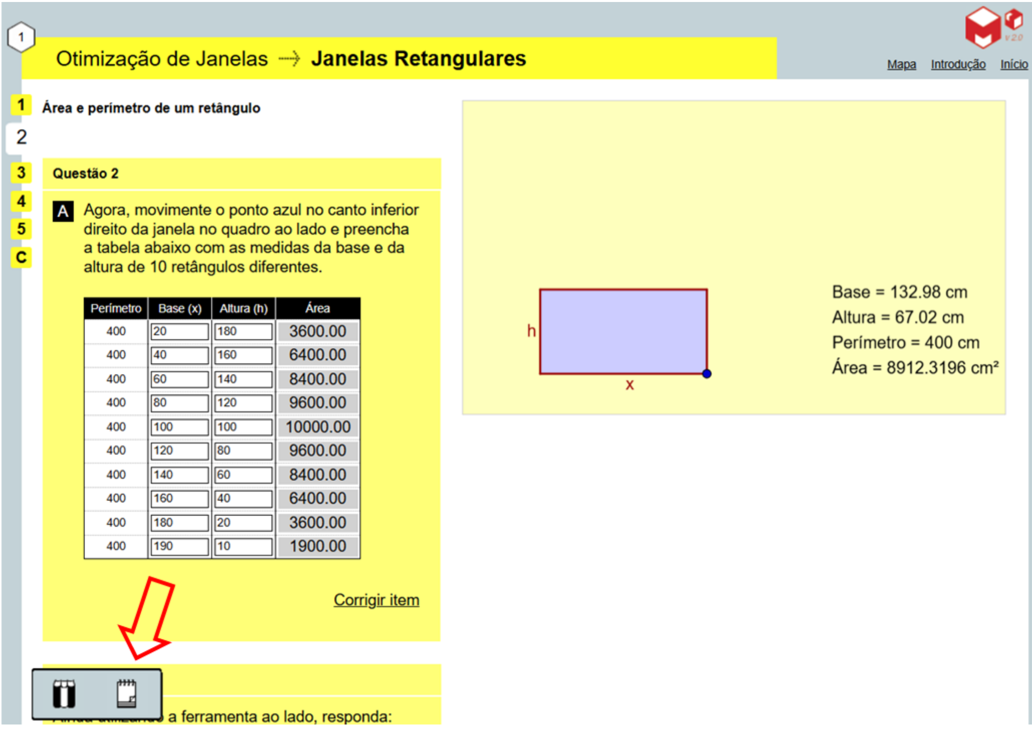
Figura 29 – Tela da questão 1



Fonte: Adaptado de Costa (2023), pelo autor.

Responda às questões 2 e 3 de acordo com os comandos. Oriente aos alunos que usem valores inteiros para preencher a tabela da questão 2, veja Figura 30, as respostas dessa questão ficam salvas no bloco de notas no canto inferior esquerdo da página, indicado pela seta. Clique em "Corrigir item" ou "Corrigir todas as questões" no final da página, depois em "Continuar".

Figura 30 – Tela das questões 2 e 3

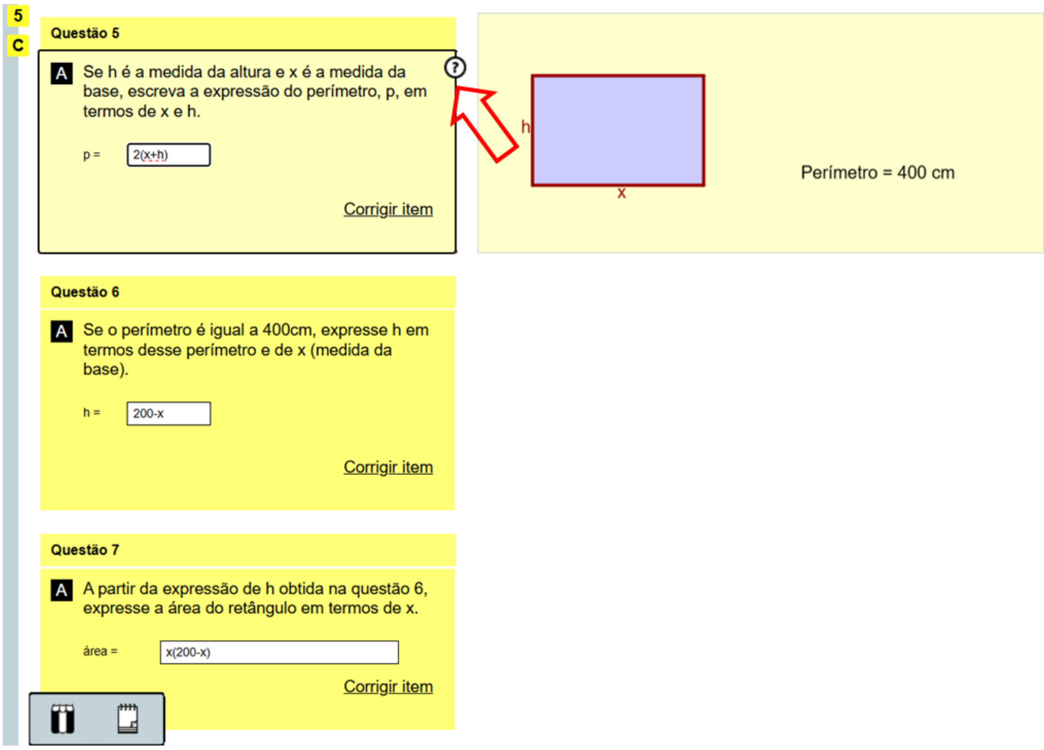


Fonte: Adaptado de Costa (2023), pelo autor.

Na tela seguinte, investigue com os alunos para responder a questão 4, até eles chegarem na resposta correta. Nessa parte, tem mais duas questões complementares que eles devem responder no caderno. Após discutirem às questões dessa parte, você pode indagar aos alunos: Será que, dentre todos os polígonos com n lados e mesmo perímetro, o regular é o que possui a maior área? E se considerarmos todos os polígonos de n lados com a mesma área, qual teria o menor perímetro? Apresentar a desigualdade isoperimétrica.

Responder agora, às questões 5, 6 e 7. Essas questões são de modelagem matemática do problema, o professor auxilia os alunos a resolverem. Um modelo de resposta está na Figura 31. Se tiver dúvidas de como preencher, clique em cima do quadro amarelo da questão e depois no botão de interrogação indicado com a seta. Corrigir itens e continuar.

Figura 31 – Tela das questões 5, 6 e 7

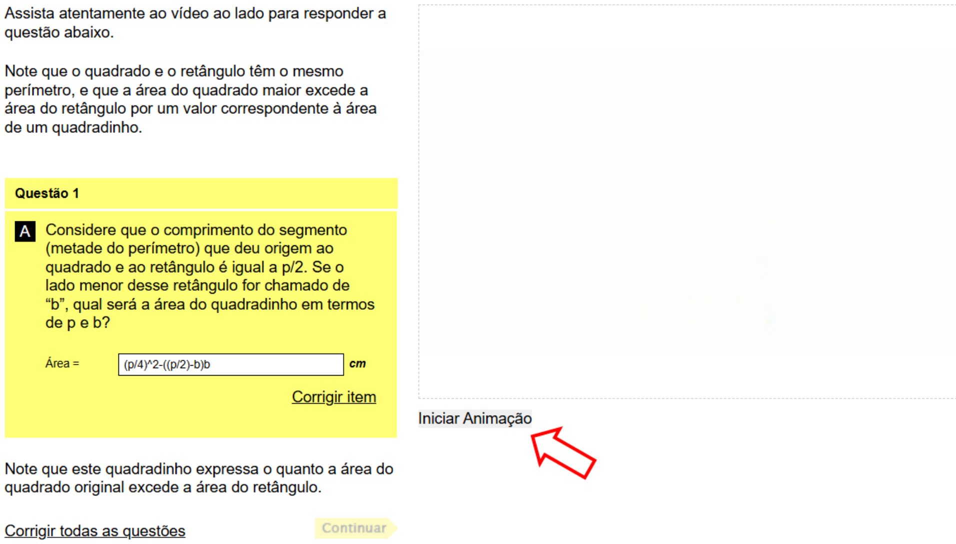


Fonte: Adaptado de Costa (2023), pelo autor.

Na próxima tela, realizar as animações pedidas. Aproveite para revisar vários conceitos de função quadrática, destacando suas conexões com a desigualdade isoperimétrica. Por fim, responder às questões 8, 9 e 10. Corrigir itens e continuar.

Na última tela, são apresentadas algumas generalizações do problema e também um desafio final para os alunos praticarem a ideia da desigualdade isoperimétrica para quadriláteros. Após clicar em "Atividade 2", abrirá a página da Figura 32, clicar no botão indicado com a seta para ver uma animação do problema. Este é um desafio um pouco mais complexo, o professor deve raciocionar junto com os alunos. A figura apresenta uma resposta. Corrigir item, clicar em continuar e acabou.

Figura 32 – Tela do último desafio



Fonte: Adaptado de Costa (2023), pelo autor.

4º momento (13 minutos): Retorno para sala de aula. O professor abre espaço para os alunos comentarem sobre o uso do *software* e como esse recurso deixou mais claro os conteúdos estudados. Revisão do que foi estudado na aula. Orientação para a aula seguinte. Visto aos cadernos.

AVALIAÇÃO:

Acompanhamento da participação e percepção dos estudantes, feedback da aula, anotações sobre o progresso da aprendizagem, observação da necessidade de adaptações.

4.3.3 Aula 3

OBJETOS DE CONHECIMENTO:

Área e perímetro de figuras planas, desigualdade isoperimétrica.

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES:

BNCC

(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

SAEB

D12 - Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Resolver problemas contextualizados envolvendo o cálculo de áreas e perímetros, com ou sem o uso de recursos digitais.
- Utilizar o *GeoGebra* para explorar e validar conjecturas sobre a desigualdade isoperimétrica.

DURAÇÃO:

Uma aula de 50 minutos.

RECURSOS UTILIZADOS:

Professor: Pincel, quadro branco, livro, agenda, projetor, notebook, laboratório de informática, smartphone e acessórios.

Aluno: Caderno, lápis, borracha, canetas e acessórios.

METODOLOGIA:

1º momento (7 minutos): Acolhida aos estudantes. Organização dos materiais. Divisão da turma em duplas.

2º momento (35 minutos): Os alunos são encaminhados para o laboratório de informática. Acessar o *GeoGebra* clicando aqui. Vamos verificar a desigualdade isoperimétrica para quadriláteros. Para isso, temos a disposição um segmento de tamanho 20. Dividiremos esse segmento em 4 pedaços e construiremos um quadrilátero com esses pedaços. Siga os passos abaixo. Essa parte deve ser mostrada em um projetor para ficar mais fácil os alunos acompanharem. Sugestão: clique nas três barras no canto superior direito, vá em "Configurações", depois em "Rotular" e selecione a opção "Menos para os Objetos Novos".

Otimizando a área.

1. Esconder os eixos e a malha da janela de visualização.

2. Escolha na barra de ferramentas a opção "Segmento com Comprimento Fixo" e crie os segmentos com tamanhos 4, 6, 7 e 3. Agora mova os segmentos pelas extremidades para formar um quadrilátero. Atenção: lembre-se de que, para movimentar um objeto, a ferramenta "Mover" deve estar selecionada.

3. Em seguida, selecione "Polígono" e una os vértices do quadrilátero formado no passo anterior.

4. Agora, selecione a ferramenta "Área"e clique sobre o polígono.

5. Repita os passos 2, 3 e 4 criando segmentos com tamanhos diferentes, mas que no total somem 20.

6. Verifique suas construções, analise e construa um quadrilátero que possua área máxima.

O professor deve dar dicas de como os alunos podem ir se aproximando do polígono que maximiza a área. Deve relembrar o que foi estudado na aula anterior, reforçando que o resultado obtido não valia só para retângulos, mas sim para todos os quadriláteros com mesmo perímetro. Incentivar os alunos a investigarem se, dentre todos os triângulos com mesmo perímetro e todos os pentágonos com mesmo perímetro, o caso do polígono regular é o que maximiza a área.

3º momento (8 minutos): Retornar para a sala de aula. Verificar se os objetivos foram alcançados. Sondar os estudantes sobre como o uso do *software* facilitou a verificação da desigualdade. Orientar a atividade de verificação para outras classes de polígonos. Pedir que eles verifiquem o seguinte: Qual é o polígono com perímetro igual a 20 que possui a maior área?

AVALIAÇÃO:

Feedback da aula, participação e interação dos alunos, monitoramento da aprendizagem, avanço e superação das dificuldades.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento desta dissertação teve como objetivo central analisar três desigualdades geométricas clássicas — Ptolomeu, Erdös-Mordell e Isoperimétrica — sob uma perspectiva que integra aspectos teóricos, aplicações em problemas e possibilidades pedagógicas para o ensino médio. Ao longo do trabalho, buscou-se não apenas apresentar as demonstrações e propriedades dessas desigualdades, mas também evidenciar como podem ser exploradas em contextos desafiadores, como olimpíadas de Matemática, e em propostas didáticas inovadoras que favoreçam a aprendizagem significativa.

A primeira contribuição deste estudo reside na sistematização dos conceitos, enunciados e demonstrações das desigualdades escolhidas. Embora tais resultados sejam conhecidos na literatura matemática, sua apresentação de forma acessível, com linguagem clara e recursos visuais, possibilita que professores e estudantes do ensino médio tenham contato com ideias avançadas da Geometria.

A segunda contribuição está relacionada à análise de problemas selecionados de competições matemáticas, que evidenciam a aplicabilidade das desigualdades em contextos que exigem raciocínio criativo e rigor lógico. Essa etapa permitiu não apenas compreender a relevância das desigualdades em provas de alto nível, mas também refletir sobre estratégias que podem ser adaptadas para atividades em sala de aula.

Por fim, destaca-se a elaboração de sequências didáticas fundamentadas em metodologias ativas e no uso de ferramentas tecnológicas, especialmente o *GeoGebra*. Essa abordagem, além de aproximar os estudantes de práticas investigativas, contribui para tornar a aprendizagem mais interativa e dinâmica, explorando simulações e construções que potencializam a compreensão conceitual. Ressalta-se que tais propostas dialogam com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), ao promover competências relacionadas ao pensamento matemático, à resolução de problemas e ao uso crítico da tecnologia.

Entre as limitações do trabalho, reconhece-se que as sequências didáticas foram planejadas, mas não aplicadas em um contexto real de sala de aula, o que restringe a avaliação de seu impacto prático na aprendizagem dos estudantes. Essa lacuna aponta para uma oportunidade de pesquisa futura, voltada à implementação das propostas e à análise de resultados qualitativos e quantitativos que permitam validar sua eficácia.

Como perspectivas para continuidade, sugerem-se estudos que ampliem o escopo para outras desigualdades geométricas ou para problemas de otimização com aplicações em diferentes áreas, bem como investigações que explorem metodologias híbridas, combinando ensino presencial e recursos digitais. Além disso, a integração dessas estratégias a programas de formação continuada para professores representa um caminho promissor para fortalecer o ensino da Matemática na educação básica.

Espera-se que esta dissertação contribua para a prática docente, oferecendo um material que alia rigor matemático, contextualização histórica e inovação pedagógica, incentivando professores e estudantes a explorar a Geometria como um campo dinâmico, criativo e essencial para o desenvolvimento do raciocínio lógico.

REFERÊNCIAS

ALSINA, C.; NELSEN, R. B. A visual proof of the Erdös–Mordell inequality. **Forum Geometricorum**, Washington, D.C., v. 7, p. 99–102, 2007.

AMADO, N.; SANCHEZ, J.; PINTO, J. A utilização do GeoGebra na demonstração matemática em sala de aula: o estudo da reta de Euler. **Bolema**, [*s.l.*], v. 29, n. 52, p. 637–657, 2015. Boletim de Educação Matemática.

ANDREESCU, T.; MUSHKAROV, O.; STOYANOV, L. **Geometric problems on maxima and minima**. Boston: Birkhäuser, 2009.

APOSTOL, T. M. Ptolemy's inequality and the chordal metric. **Mathematics Magazine**, Washington, D.C., v. 40, n. 5, p. 233–235, 1967.

BANKOFF, L. A simple proof of the Erdös–Mordell inequality. **Mathematics Magazine**, Washington, D.C., v. 31, n. 1, p. 18–20, 1958.

BERGGREN, J. L. **Mathematics in ancient Iraq**: a social history. Princeton: Princeton University Press, 2007.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 22 jul. 2025.

COSTA, S. I. R. **Otimização de janelas**: geometria e medidas. [*s.l.*]: M³ – Material Multimídia para Matemática, 2023. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1243. Acesso em: 21 jul. 2025.

COXETER, H. S. M.; GREITZER, S. L. **Geometry Revisited**. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1967. (New Mathematical Library, v.19).

ERDöS, P. Problem 3740. **The American Mathematical Monthly**, Washington, D.C., v. 42, n. 7, p. 396, 1935.

EUCLIDES. **Os elementos**. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

GEOGEBRA. **GeoGebra Classic**. [*s.l.*]: GeoGebra, 2025. Disponível em: https://www.geogebra.org/classic. Acesso em: 21 jul. 2025.

HOWARDS, H. **Soap bubbles on surfaces**. Undergraduate Thesis – Williams College, Washington, D.C., 1992.

KAZARINOFF, D. K. An elementary proof of the Erdös–Mordell inequality. **Mathematics Magazine**, [*s.l.*], v. 30, n. 3, p. 145–147, 1957.

KLINE, M. **Mathematics for the nonmathematician**. New York: Dover Publications, 1967. 302 p.

KOMORNIK, V. A short proof of the Erdös-Mordell theorem. **American Mathematical Monthly**, Los Angeles, v. 104, p. 57–68, 1997.

LENG, G. **Geometric inequalities**. Shanghai: East China Normal University Press; Singapore:World Scientific, 2016. (Mathematical Olympiad Series, v.12).

LINARES, J. L. **Desigualdade de Ptolomeu**: construção interativa. [*s.l.*]: GeoGebra, 2023. Acesso em: 18 jul. 2025. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/nzcj5rf9.

MORDELL, L. J.; BARROW, D. F. Solution to problem 3740. **The American Mathematical Monthly**, Washington, D.C., v. 44, n. 4, p. 252–254, 1937.

MOREIRA, C. G. T. A.; SALDANHA, N. C. A desigualdade isoperimétrica. **Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, v. 15, p. 13–19, 1993.

NEUGEBAUER, O. **A history of ancient mathematical astronomy**. Berlin: Springer-Verlag, 1975.

SCHOENBERG, I. J. A remark on Menger's characterization of euclidean spaces. **Proceedings of the American Mathematical Society**, Estados Unidos, v. 3, n. 6, p. 905–907, 1952.

STEWART, I. **A beleza da matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 2016.

TEIXEIRA, I. N. de Estudos e P. E. A. **Matriz de Referência de Matemática**: Sistema de Avaliação da Educação Básica – saeb. Brasília: INEP, 2001. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/matriz-de-referencia-de-matematica_2001.pdf. Acesso em: 21 jul. 2025.

TEIXEIRA, R. C. **Semana Olímpica**: inversão. Salvador: [*s.n.*], 2001. Disponível em: https://www.obm.org.br/content/uploads/2018/01/inversao.pdf. Acesso em: 23 mar. 2025.

TELICHEVESKY, M.; KLASER, P. **O problema isoperimétrico**. Rio Grande: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. (Colóquios de Matemática das Regiões – Região Sul). IV Colóquio de Matemática da Região Sul.

VIRGíLIO. **Eneida**. [*s.l.*]: eBooksBrasil. Digitalização do livro em papel, Clássicos Jackson, Vol. III, tradução de Manuel Odorico Mendes (1799-1864), 2005. Disponível em: http://www.ebooksbrasil.org/eLibris/eneida.html. Acesso em: 15 jul. 2025.

ZABALA, A. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.