UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

SAMUEL BELO SOBREIRA NETTO

SÓLITONS DE RICCI GRADIENTE SHRINKING DE DIMENSÃO QUATRO

FORTALEZA

2022

SAMUEL BELO SOBREIRA NETTO

SÓLITONS DE RICCI GRADIENTE SHRINKING DE DIMENSÃO QUATRO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S659s Sobreira Netto, Samuel Belo.
Sólitons de Ricci gradiente shrinking de dimensão quatro / Samuel Belo Sobreira Netto. – 2022.
47 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2022.
Orientação: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior.

1. Sólitons de Ricci. 2. Fluxo de Ricci. 3. Variedades Einstein. I. Título.

CDD 510

SAMUEL BELO SOBREIRA NETTO

SÓLITONS DE RICCI GRADIENTE SHRINKING
DE DIMENSÃO QUATRO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Geometria.

Aprovada em: 03/08/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior.
(Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diogenes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

À todos que um dia precisem das informações contidas nesse trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais Simone e Romildo, ao meu avô Samuel, a minha tia Aparecida e aos meus primos Nathanael e Nathaniel e todos da minha família que me apoiaram e insentivaram ao longo da minha jornada.

Ao professor Ernani Ribeiro que esteve sempre presente me ajudando e me orientando durante meu mestrado.

Ao professor Abdênago Barros, que me ensinou muito durante as disciplinas na faculdade e por ter aceitado o convite de participar da minha banca de mestrado.

Ao professor Rafael Diogenes pelas dicas e por ter aceitado participar da minha banca.

Mesmo após a conclusão da graduação, gostaria de expressar minha gratidão ao professor Marcos Melo pela ajuda e paciência ao responder meus e-mails no final daquele período.

Também quero agradecer a todos os outros professores da UFC que compartilharam comigo seus ensinamentos.

Gostaria também de agradecer à Andréa Costa, a secretária mais atenciosa da UFC, por sempre ser atenciosa tirando minhas dúvidas e me ajudando muito durante meu mestrado.

À minha namorada, Giovana, que foi um grande pilar para me manter forte, principalmente durante esse momento difícil que o mundo vem passando, sua companhia foi essencial.

Aos meus amigos que estiveram comigo ao longo dessa caminhada, a amizade de vocês, junto com aquele cafezinho da tarde, foi fundamental para me manter firme nessa caminhada.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

"Se eu pude ver mais longe, foi porque estava sobre ombros de gigantes."

(Isaac Newton)

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar a prova de um resultado de classificação para sólitons de Ricci de dimensão quatro obtido por H.-D. Cao, E. Ribeiro e D. Zhou em 2021. O resultado afirma que, sob uma condição pontual envolvendo a parte self-dual do tensor de Weyl, todo sóliton de Ricci gradiente shrinking de dimensão quatro é Einstein, ou o quociente finito de $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Palavras-chave: sólitons de Ricci; fluxo de Ricci; variedades de Einstein.

ABSTRACT

The aim of this work is to present a proof of a classification result for four-dimensional Ricci solitons obtained by H.-D. Cao, E. Ribeiro and D.Zhou in 2021. The result asserts that, under a pointwise condition envolving the self-dual part of the Weyl tensor, every four-dimentional gradient shrinking Ricci soliton is either Einstein, or the finite quotient of $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ or $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Keywords: Ricci solitons; Ricci flow; Einstein manifolds.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos muitos matemáticos têm estudado os sólitons de Ricci gradiente, eles são objetos muito importantes no entendimento do fluxo de Ricci de Hamilton [18]. Uma variedade M^n munida de uma métrica Riemanniana completa g é chamada sóliton de Ricci gradiente se existe uma função potencial $f : M^n \to \mathbb{R}$ tal que a seguinte equação é satisfeita

$$Ric + \mathrm{Hess} f = \lambda g,$$

onde λ é uma constante real. No caso em que $\lambda > 0$, o sóliton de Ricci gradiente é chamado de shrinking. Os sólitons de Ricci gradiente são generalizações naturais das variedades Einstein. Além disso, os sólitons de Ricci possuem um papel fundamental na teoria do fluxo de Ricci, que foi introduzido por Hamilton em 1982 e que foi utilizado para solucionar diversos problemas importantes na geometria Riemanniana, em particular, Grigori Perelman utilizou o fluxo de Ricci para provar a conjectura de Thurston e, como consequência, provar um dos 7 problemas do milênio, a conjectura de Poincaré.

O fluxo de Ricci é um sistema de equações dada por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric(g(t)), \\ g(0) = g_0, \end{cases}$$

onde $g(t)$ é uma família de métrica em uma dada variedade. A ideia do fluxo é variar a métrica inicial ao longo do tempo em busca de obter uma nova métrica com curvatura constante na variedade fixada.

Partindo disso, uma das motivações para se estudar os sólitons de Ricci é que eles são soluções auto-similares do fluxo de Ricci (confira o Teorema 3.1) e além disso os sólitons de Ricci muitas vezes surgem como modelos de singularidades do fluxo de Ricci.

Nas últimas duas décadas, muitos trabalhos foram sendo desenvolvidos na tentativa de classificar os solitons de Ricci gradiente shrinking. Em dimensão $n = 2$, Hamilton mostrou que qualquer sóliton de Ricci gradiente shrinking é isométrico ao plano $\mathbb{R}^2$ ou ao quociente finito da esfera $\mathbb{S}^2$. Para $n = 3$, pelos trabalho de Ivey [19], Perelman [27], Naber [25], Ni-Wallach [26] e Cao-Chen-Zhu [3], qualquer sóliton de Ricci gradiente shrinking completo de dimensão 3 é o quociente finito da esfera canônica $\mathbb{S}^3$, ou o sóliton

Gaussiano shrinking $\mathbb{R}^3$, ou o cilindro $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$. Nos últimos anos houve muito progresso no intuito de entender os sólitons de Ricci de dimensões maiores, em particular os de dimensão quatro.

Os sóliton de Ricci gradiente shrinking de dimensão quatro, até a data desse trabalho, ainda não foram totalmente classificados, porém já existem vários resultados que classificam sólitons de dimensão 4 sob condições especiais. Por exemplo, pelos trabalhos de [26, 16, 24, 28, 7, 32], sabemos que sólitons de Ricci gradiente shrinking de dimensão 4 com tensor de Weyl nulo são isométricos ao quociente finito de $\mathbb{R}^4$, ou $\mathbb{S}^4$ ou $\mathbb{S}^3\times\mathbb{R}$. Chen e Wang [13] provaram que sólitons de Ricci gradiente shrinking *half-conformally flat* são isométricos ao quociente finito de $\mathbb{S}^4$, ou $\mathbb{CP}^2$, ou $\mathbb{R}^4$, ou $\mathbb{S}^3\times\mathbb{R}$. Cao e Chen [6] provaram que sólitons de Ricci gradiente shrinking de dimensão quatro do tipo Bach-flat são Einstein ou o quociente finito de $\mathbb{R}^4$ ou $\mathbb{S}^3\times\mathbb{R}$. Fernández-Lópes e García-Río [23] junto com Munteanu-Sesum [24] mostraram que todo sóliton de Ricci gradiente Shrinking com tensor de Weyl harmônico (ou seja, $\delta W=0$) são Einstein ou o quociente finito de $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{S}^3\times\mathbb{R}$. Um resultado mais recente, por Wu-Wu-Wylie [31], afirma que a mesma condição é satisfeita sobre a condição mais fraca com tensor de Weyl self-dual harmonico (ou seja, $\delta W^+=0$).

Catino em [11] provou que todo sóliton de Ricci gradiente shrinking completo de dimensão quatro com curvatura de Ricci não negativa e satisfazendo

$$|W|R\leq\sqrt{3}\left(|\mathring{Ric}|-\frac{1}{2\sqrt{3}R}\right)^2 \tag{1.1}$$

é o quociente finito de $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{S}^3\times\mathbb{R}$, ou $\mathbb{S}^4$. Depois, Wu, Wu e Wylie [31] mostraram que a curvatura de Ricci não negativa na hipótese do resultado de Catino pode ser removida. Recentemente, Zhang [33] mostrou que todo sóliton de Ricci gradiente shrinking completo de dimensão quatro e curvatura de Ricci não negativa e limitada $0\leq Ric\leq K$ satisfazendo a estimativa

$$|W|\leq c_0\left||\mathring{Ric}|-\frac{1}{2\sqrt{3}}R\right| \tag{1.2}$$

para alguma constante $c_0\leq 1+\sqrt{3}$, é flat ou tem curvatura de Ricci 2-positivo. No entanto, as condições (1.1) e (1.2) não recuperam o sóliton de Ricci gradiente shrinking completo em $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}^2$.

Partindo da ideia de classificar sólitons, o objetivo desse trabalho é demonstrar o seguinte teorema, que foi provado por por H.-D. Cao, E. Ribeiro Jr. e D. Zhou no artigo [5].

Teorema 1.1 *Seja* (M^4, g, f) *um sóliton de Ricci gradiente shrinking de dimensão quatro satisfazendo*

$$|W^+|^2 - \sqrt{6}|W^+|^3 \geq \frac{1}{2}\langle(\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})^+, W^+\rangle,$$

ou

$$|W^-|^2 - \sqrt{6}|W^-|^3 \geq \frac{1}{2}\langle(\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})^-, W^-\rangle.$$

Então (M^4, g, f) *é ou*

i) Einstein, ou

ii) o quociente finito do sóliton Gaussiano $\mathbb{R}^4$*, ou* $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$*, ou* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Observação 1.1 *Nesse teorema, nenhuma limitação para a curvatura de Ricci foi assumida. Além disso, a igualdade para* W^+ *é satisfeita para o sóliton* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$*,* ***considerado como um sóliton de Ricci-Kahler gradiente*** *com respeito a orientação natural da estrutura complexa* $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}$*. Portanto, o Teorema (1.1) pode ser considerado como um* ***teorema gap*** *para* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Observação 1.2 *No Teorema 1 o seguinte termo aparece no lado direito da estimativa*

$$\langle(\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})^+, W^+\rangle,$$

porém, seria interessante estimar esse valor de modo a se obter uma nova condição dependendo da norma do $\mathring{Ric}$ *em vez do produto Kulkarni-Nomizu. De fato, podemos provar que*

$$\langle(\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric}), W^+\rangle \leq \sqrt{6}|\mathring{Ric}|^2|W^+|,$$

como consequência da Proposição (3.3). Porém, a igualdade acima não é satisfeita para $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$*, mostraremos no Exemplo (4) que*

$$\langle(\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric}), W^+\rangle = \frac{\sqrt{6}}{3}|\mathring{Ric}|^2|W^+|,$$

para o caso do $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e alguns teoremas básicos que serão utilizados ao longo deste trabalho. Faremos uma revisão superficial de algumas definições e resultados básicos de geometrica Riemanniana, para mais detalhes veja ([10, 18]).

2.1 Conexões

Ao longo do trabalho, indicaremos como $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciais em uma variedade diferenciável M^n de dimensão n e por $C^\infty(M)$ o anel das funções reais diferenciáveis, confira [10] para mais detalhes.

Definição 2.1 *Uma conexão afim em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

que denotamos por $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;

ii) $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f,g \in C^\infty(M)$.

A proposição a seguir estabelece uma noção de derivada de campos vetoriais ao longo de curvas em uma variedade diferenciável, confira [10].

Proposição 2.1 *Seja M^n uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $\phi : I \to M$ um outro campo vetorial $\dfrac{DV}{dt}$ ao longo de ϕ, denominado derivada covariante de V ao longo de ϕ, tal que:*

i) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$;

ii) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, *onde f é uma função diferenciável em I;*

iii) Se V é induzido por um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$, ou seja, $V(t) = X(\phi(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\phi}{dt}} X$.

As próximas definições dizem respeito a paralelismo de campos vetoriais ao longo de uma curva em uma variedade.

Definição 2.2 *Seja M^n uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial X ao longo de uma curva $\phi : I \to M$ é chamado paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.*

A compatibilidade da métrica é estabelecida pela seguinte definição.

Definição 2.3 *Seja M^n uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana g. A conexão é dita compatível com a métrica g, quando para toda curva diferenciável ϕ e quaisquer pares de campos de vetores paralelos X e X' ao longo de ϕ, tivermos $g(X,X') = c$, onde c é uma constante.*

A definição anterior fica melhor entendida com a próxima proposição, que nos dá uma equivalência entre a compatibilidade de uma conexão ∇ com a métrica e a derivada da métrica.

Proposição 2.2 *Seja M^n uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M^n é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva $\phi : I \to M$ tem-se*

$$\frac{d}{dt}g(V,W) = g\left(\frac{DV}{dt},W\right) + g\left(V,\frac{DW}{dt}\right)$$

para todo $t \in I$.

Como consequência, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.1 *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M^n é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

para todo $X,Y,Z \in \mathbb{X}(M)$.

Definição 2.4 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M^n é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$$

para todo $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Com isso, podemos enunciar o seguinte teorema, também conhecido como teorema fundamental da geometria Riemanniana, ele será de grande importância e estará presente ao longo de todo o trabalho.

Teorema 2.3 (Levi-Civita) *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana, então existe uma única conexão* ∇ *em* M^n *satisfazendo as seguintes condições:*

i) ∇ *é simétrica;*

ii) ∇ *é compatível com a métrica Riemanniana.*

Durante todo o restante do trabalho, (M, g) será uma variedade Riemanniana com métrica g e conexão de Levi-Civita.

2.2 Tensores

Seja V um espaço vetorial real de dimensão n, o espaço dual de V, denotado por V^*, é o espaço de aplicações lineares de V para $\mathbb{R}$ e também é um espaço vetorial. Os elementos do espaço dual são chamados de covetores.

Dado um espaço vetorial V de dimensão finita, um l-tensor covariante em V é uma aplicação multilinear

$$F : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{l\text{-vezes}} \to \mathbb{R}.$$

Analogamente, um k-tensor contravariante em V^* é uma aplicação multilinear

$$F : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{k\text{-vezes}} \to \mathbb{R}.$$

Já um tensor da forma

$$F : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{k\text{-vezes}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{l\text{-vezes}} \to \mathbb{R}$$

é chamado de k-contravariante e l-covariante tensor, e denotamos por (k, l)-tensor. O lema a seguir nos mostra uma maneira de relacionar um tensor e o espaço de aplicações multilineares.

Lema 2.1 *Seja* V *um espaço vetorial de dimensão finita. Existe um isomorfismo entre o* $(k+1, l)$*-tensor* $T^{(k+1,l)}(V)$ *e o espaço das aplicações multilineares*

$$F : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{k\text{-vezes}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{l\text{-vezes}} \to V.$$

Dada uma variedade Riemanniana (M^n, g), podemos fazer a mesma construção para qualquer espaço vetorial em cada espaço tangente T_pM, produzindo tensores em p. A união disjunta de espaços vetoriais em todos os pontos da variedade produz um fibrado vetorial, chamado fibrado tensorial. Definimos o fibrado de (k,l)-tensores por

$$T^{(k,l)}TM = \coprod_{p \in M} T^{(k,l)}(T_pM).$$

Em particular, existem identificações naturais, dada por

$$\begin{aligned} T^{(1,0)}TM &= TM = \mathfrak{X}(M) \\ T^{(0,1)}TM &= T^*M = \mathcal{T}(M) \\ T^{(0,0)}TM &= C^\infty(M). \end{aligned}$$

Definição 2.5 *Um (k,l)-tensor em M^n é uma aplicação contínua $F : M \to T^{(k,l)}TM$ tal que $F(p) \in T_pM$ para todo $p \in M$.*

O próximo lema mostra que toda aplicação que é multilinear sobre $C^\infty(M)$ define um campo tensorial.

Lema 2.2 (Caracterização de tensores) *Uma aplicação*

$$\mathcal{F} : \underbrace{\mathcal{T}(M) \times \cdots \times \mathcal{T}(M)}_{k\text{-vezes}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{l\text{-vezes}} \to C^\infty(M)$$

é induzida por um (k,l)-tensor suave como acima se, e somente se, é multilinear sobre $C^\infty(M)$. Analogamente, uma aplicação

$$\mathcal{F} : \underbrace{\mathcal{T}(M) \times \cdots \times \mathcal{T}(M)}_{k\text{-vezes}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{l\text{-vezes}} \to \mathfrak{X}(M)$$

é induzido por um $(k+1,l)$-tensor suave como no Lema 2.1 se, e somente se, é uma aplicação multilinear sobre $C^\infty(M)$.

É possível levar a noção de derivada covariante aos tensores. A próxima definição mostrará o que é a derivada covariante de um tensor.

Definição 2.6 *Seja T um $(1,k)$-tensor. A derivada covariante de T é o $(1,k+1)$-tensor $\nabla T : \mathfrak{X}(M)^{k+1} \to \mathfrak{X}(M)$ dado por*

$$\begin{aligned} \nabla T(X, Y_1, \ldots, Y_k) &= (\nabla_X T)(Y_1, \ldots, Y_k) \\ &= \nabla_X (T(Y_1, \ldots, Y_k)) - \sum_{i=1}^{k} T(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_i, \ldots, Y_k). \end{aligned}$$

Temos ainda o seguinte caso particular.

Definição 2.7 *Dizemos que um tensor T é paralelo quando $\nabla T = 0$.*

Não é difícil mostrar que a métrica Riemanniana g é um 2-tensor paralelo.

2.3 Operadores diferenciais

Nessa seção apresentaremos alguns operadores diferenciais importantes; para mais detalhes, veja [21].

Definição 2.8 *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em uma variedade Riemanniana (M^n, g), o gradiente de f é o campo vetorial $\mathrm{grad}(f) = \nabla f \in \mathfrak{X}(M)$, onde para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ vale*

$$Xf = \nabla_X f = \langle \nabla f, X \rangle_g.$$

O operador gradiente também satisfaz algumas propriedades dadas nas seguintes proposições.

Proposição 2.4 *Sejam $f, g \in C^\infty(M)$, então*

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$,
2. $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

Proposição 2.5 *Sejam $f : M^n \to \mathbb{R}$, $p \in M^n$ e $v \in T_pM$. Se $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M^n$ é uma curva em M^n tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, então*

$$\langle \nabla f, v \rangle_g(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)|_{t=0}.$$

Em particular, se p for um ponto de máximo ou de mínimo local de f, então $\nabla f(p) = 0$.

Temos então o seguinte corolário.

Corolário 2.2 *Sobre as condições da proposição anterior, se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então*

$$\nabla(\varphi \circ f) = \varphi'(f) \nabla f.$$

Definição 2.9 *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, se $p \in M^n$ é tal que $\nabla f(p) = 0$, então dizemos que p é um ponto crítico de f. Em particular, todo ponto de máximo ou mínimo local de f é um ponto crítico.*

O próximo corolário diz quando uma função $f \in C^\infty(M)$ é constante.

Corolário 2.3 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana conexa e $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\nabla f = 0$, então f é constante em M^n.*

A próxima proposição nos garante, em coordenadas locais, uma expressão do gradiente de uma função $f \in C^\infty(M)$.

Proposição 2.6 *Se $f \in C^\infty(M)$ e U é uma vizinhança coordenada, com campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}$ em U, então o gradiente de f é dado por*

$$\nabla f = g_{kl} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Definição 2.10 *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. O divergente de X é uma função* $\mathrm{div}(X) : M \to \mathbb{R}$ *definida, para cada $p \in M$, por*

$$\mathrm{div} X(p) = \mathrm{tr}\{v \mapsto \nabla_v X(p)\},$$

onde $v \in T_pM$.

Analogamente, podemos definir o divergente de um um tensor.

Definição 2.11 *Seja T um $(1,l)$-tensor. O divergente de T é o $(0,l)$-tensor definido por*

$$\begin{aligned} (\mathrm{div}\ T)(v_1, \cdots v_l) &= \mathrm{tr}\{w \mapsto (\nabla_w T)(v_1 \cdots v_l)\} \\ &= g((\nabla_{X_i} T)(v_1 \cdots v_l), X_i), \end{aligned}$$

onde $\{X_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal de T_pM e p um ponto fixo em M.

Seguimos agora para a definição do operador laplaciano.

Definição 2.12 *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Chamamos de laplaciano de f a função $\Delta f : M^n \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f).$$

O próximo operador que iremos apresentar será o operador Hessiana de uma função diferenciável.

Definição 2.13 *Seja* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável e* $p \in M^n$*. Chamamos de Hessiana de* f *o campo de operadores lineares* $(\mathrm{Hess} f)_p : T_pM \to T_pM$ *definido por*

$$(\mathrm{Hess} f)_p(v) = \nabla_v \nabla f,$$

onde $v \in T_pM$*.*

Note que se $v \in T_pM$ e X é qualquer extensão de v a uma vizinhança de p de M, então

$$(\mathrm{Hess} f)_p(X) = \nabla_X \nabla f.$$

Proposição 2.7 *Seja* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável e* $p \in M^n$*. Então* $(\mathrm{Hess} f)_p : T_pM \to T_pM$ *é um operador linear auto-adjunto.*

Agora uma proposição que relaciona a hessiana e o laplaciano de uma função diferenciável.

Proposição 2.8 *Seja* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável, então*

$$\Delta f = \mathrm{tr}(\mathrm{Hess} f).$$

Observe que podemos definir a Hessiana como uma $(1,1)$-tensor $\nabla(\nabla f) = \nabla^2 f$ dado por

$$\nabla^2 f(X) = \nabla_X \nabla f,$$

onde $X \in \mathfrak{X}(M)$. Além disso, ele também pode ser visto como um $(0,2)$-tensor, que é simétrico, definido por

$$\mathrm{Hess} f(X,Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y).$$

2.4 Curvaturas

Nesta seção apresentaremos os conceitos de curvatura Riemanniana em alguma variedade e algumas propriedades envolvendo essa curvatura, confira [30, 21, 10].

Definição 2.14 *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana. A curvatura Riemanniana* $\bar{R}$ *de* M *é o* $(1,3)$*-tensor* $\bar{R} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ *definido por*

$$\bar{R}(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Definimos o tensor curvatura Riemanniana, obtido a partir do $(1,3)$-tensor $\bar{R}$, para ser o $(0,4)$-tensor $Rm : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ definido por

$$Rm(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W \rangle_g.$$

Em termos de coordenadas locais, com respeito a qualquer base, podemos escrever

$$Rm(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = R_{ijkl}.$$

A próxima proposição trata das simetrias que o tensor curvatura possui em uma variedade Riemanniana.

Proposição 2.9 *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana. Dados* $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, *o* $(0,4)$*-tensor curvatura possui as seguintes propriedades*

i) $Rm(W,X,Y,Z) = -Rm(X,W,Y,Z)$;

ii) $Rm(W,X,Y,Z) = -Rm(W,X,Z,Y)$;

iii) $Rm(W,X,Y,Z) = -Rm(Y,Z,W,X)$;

iv) $Rm(W,X,Y,Z) + Rm(X,Y,W,Z) + Rm(Y,W,X,Z) = 0$.

Em coordenadas locais, temos

a) $R_{ijkl} = -R_{jikl}$;

b) $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$;

c) $R_{ijkl} = R_{klij}$;

d) $R_{ijkl} + R_{kijl} + R_{jkil} = 0$.

A identidade do item *iv)* é conhecida como a primeira identidade de Bianchi. Existe mais uma identidade que é satisfeita a partir da derivada covariante do tensor curvatura, ela é conhecida como a segunda identidade de Bianchi (ou a identidade de Bianchi diferencial). Temos então a seguinte proposição.

Proposição 2.10 (Segunda identidade de Bianchi) *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana, então vale a seguinte identidade*

$$\nabla_W Rm(Z,V,X,Y) + \nabla_Z Rm(V,W,X,Y) + \nabla_V Rm(W,Z,X,Y) = 0.$$

Em coordenadas, temos

$$\nabla_k R_{lmij} + \nabla_l R_{mkij} + \nabla_m R_{klij} = 0.$$

O próximo teorema nos dá uma identidade que é obtida a partir da segunda derivada covariante de um campo.

Teorema 2.11 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Em coordenadas, valem as seguintes identidades:*

i) Se Z é um campo, então

$$\nabla_i \nabla_j Z_k - \nabla_j \nabla_i Z_k = R_{ijkm} Z_m.$$

ii) Se B é um $(0,l)$-tensor, então

$$\nabla_p \nabla_q B_{i_1,\ldots,i_l} - \nabla_q \nabla_p B_{i_1,\ldots,i_l} = \sum_{j=1}^{l} R_{pqi_jk} B_{i_1,\ldots,i_j,\ldots,i_l}.$$

Muitas vezes é útil construir tensores mais simples relacionados ao tensor curvatura. Um desses tensores, e talvez o mais importante, é o tensor de Ricci ou a curvatura de Ricci.

Definição 2.15 *O tensor de Ricci é um $(0,2)$-tensor simétrico definido como o traço da curvatura Riemanniana, ou seja, dados dois campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ então*

$$Ric(X,Y) = \mathrm{tr}(Z \mapsto R(Z,X)Y).$$

Geralmente denotamos o tensor de Ricci em coordenadas como R_{ij}, onde

$$R_{ij} = R_{ikjk} = g_{km} R_{ikjm}.$$

Agora se aplicarmos o traço no tensor de Ricci, obtemos a função curvatura escalar R de M^n, ou seja,

$$R = R_{ii} = g_{ij} R_{ij}.$$

Definimos o tensor de Ricci sem traço como o $(0,2)$-tensor simétrico

$$\overset{\circ}{Ric} = Ric - \frac{1}{n} Rg.$$

Em particular, se $\overset{\circ}{Ric} = 0$, então (M^n, g) é uma variedade Einstein. Mais precisamente, uma variedade Riemanniana (M^n, g) é dita ser uma variedade Einstein (ou métrica Einstein) se o tensor de Ricci é um múltiplo da métrica, ou seja,

$$Ric = \lambda g$$

para alguma constante λ.

Proposição 2.12 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. A derivada covariante do tensor de Ricci e da curvatura escalar satisfaz a seguinte igualdade*

$$\mathrm{tr}(\nabla Ric) = \frac{1}{2} \nabla R,$$

onde em coordenadas temos

$$\nabla_i R_{il} = \frac{1}{2} \nabla_l R.$$

O próximo tensor que será definido é o tensor de Weyl, mas antes precisamos definir o produto de Kulkarni-Nomizu.

Definição 2.16 *Sejam α e β $(0,2)$-tensores simétricos. Definimos o $(0,4)$-tensor $\alpha \odot \beta$ por*

$$\begin{aligned} \alpha(X,Y) \odot \beta(Z,W) &= \alpha(X,Z)\beta(Y,W) + \alpha(Y,W)\beta(X,Z) \\ &\quad - \alpha(X,W)\beta(Y,Z) - \alpha(Y,Z)\beta(X,W). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Definimos o tensor de Schouten P como o $(0,2)$-tensor simétrico

$$P = \frac{1}{n-2}\left(Ric - \frac{R}{2(n-1)} g \right).$$

O tensor curvatura de Weyl [21] é o $(0,4)$-tensor dado por

$$\begin{aligned} W &= Rm - P \odot g \\ &= Rm - \frac{1}{n-2} Ric \odot g + \frac{R}{2(n-1)(n-2)} g \odot g. \end{aligned}$$

A seguir, definiremos o operador estrela de hodge, que tem grande importância, principalmente, em variedades de dimensão 4, pois produz uma decomposição no fibrado das 2-formas correspondendo ao ± 1-auto-espaço do operador.

Definição 2.17 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n. O operador estrela de Hodge $\star$ é um operador sobre a álgebra exterior de M^n, onde $\star : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{n-k}(M)$, com $0 \leq k \leq n$, satisfazendo*

$$\alpha \wedge (\star\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle dV,$$

onde $\alpha, \beta \in \Lambda^k(M)$ e $dV = \sqrt{|g|}dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Partindo da definição acima, vamos considerar (M^4, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 4 e $k = 2$. Segue que o espaço das 2-formas se decompõe como

$$\Lambda^2(M) = \Lambda^2_+(M) \oplus \Lambda^2_-(M),$$

onde $\Lambda^2_+(M)$ e $\Lambda^2_-(M)$ são os autoespaços dos autovalores $+1$ e -1, respectivamente (veja [30]). Note que $\dim(\Lambda^2) = 6$ e $\dim(\Lambda^2_\pm) = 3$. Os elementos de Λ^2_+ são chamados de espaço das 2-formas self-dual e Λ^2_- é o espaço das 2-formas anti-self-dual.

Fixando uma base ortonormal orientada $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ onde denotaremos por $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$ a base dual, considere

$$\begin{aligned} \omega_1^\pm &= e^1 \wedge e^2 \pm e^3 \wedge e^4, \\ \omega_2^\pm &= e^1 \wedge e^3 \pm e^4 \wedge e^2, \\ \omega_3^\pm &= e^1 \wedge e^4 \pm e^2 \wedge e^3, \end{aligned}$$

onde $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\omega_i^\pm$ é uma base ortonormal de $\Lambda^2_\pm$.

Em dimensão 4 existe uma relação interessante onde o operador curvatura age no espaço das 2-formas. Podemos ver o tensor curvatura como um operador no espaço das 2-formas do seguinte modo

$$\mathcal{R} : \Lambda^2(T^*M) \to \Lambda^2(T^*M),$$

onde dada uma base ortonormal orientada $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ com a base dual $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$, temos

$$\mathcal{R}(e^i \wedge e^j) = \frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl} e^k \wedge e^l,$$

além disso, o tensor curvatura pode ser visto como

$$R_{ijkl} = \langle \mathcal{R}(e^i \wedge e^j), (e^k \wedge e^l) \rangle.$$

Considere

$$\begin{aligned}
\omega_1^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1\wedge e^2 + e^3\wedge e^4), \quad \omega_1^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1\wedge e^2 - e^3\wedge e^4),\\
\omega_2^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1\wedge e^3 + e^4\wedge e^2), \quad \omega_2^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1\wedge e^3 - e^4\wedge e^2),\\
\omega_3^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1\wedge e^4 + e^2\wedge e^3), \quad \omega_3^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1\wedge e^4 - e^2\wedge e^3),
\end{aligned} \tag{2.2}$$

onde $\{\omega_1^+,\omega_2^+,\omega_3^+\}$ é base ortonormal de Λ_+^2 e $\{\omega_1^-,\omega_2^-,\omega_3^-\}$ é base ortonormal de Λ_-^2. Podemos então decompor o tensor curvatura em uma matriz 6×6 dividida em blocos da seguinte forma

$$Rm = \left(\begin{array}{c|c} W^+ + \frac{S}{12}Id & \overset{\circ}{Ric} \\ \hline \overset{\circ}{Ric}{}^* & W^- + \frac{S}{12}Id \end{array}\right). \tag{2.3}$$

Observação 2.1 *Se P é um $(0,4)$-tensor satisfazendo*

$$\begin{aligned}
P(x,y,z,t) &= -P(y,x,z,t) = -P(x,y,t,z),\\
P(x,y,z,t) &= P(z,t,x,y),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

podemos vê-lo como uma aplicação simétrica $\mathcal{P}:\Lambda^2(T^*M)\to\Lambda^2(T^*M)$ definido por

$$\mathcal{P}(\omega) = \frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l} R_{ijkl}\omega_{kl}e^i\wedge e^j,$$

onde

$$\omega = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\omega_{ij}e^i\wedge e^j$$

é uma 2-forma. Tomando a base (2.2), a matriz de P pode ser escreita da seguinte forma

$$P = \left(\begin{array}{c|c} \langle\mathcal{P}(\omega_i^+),\omega_j^+\rangle & \langle\mathcal{P}(\omega_i^+),\omega_j^-\rangle \\ \hline \langle\mathcal{P}(\omega_i^-),\omega_j^+\rangle & \langle\mathcal{P}(\omega_i^-),\omega_j^-\rangle \end{array}\right). \tag{2.5}$$

Para mais detalhes, confira [30].

3 FLUXO E SÓLITONS DE RICCI

Este capítulo será dedicado a apresentar o principal objeto de estudo desse trabalho, os sólitons de Ricci gradiente. Além disso, mostraremos como eles se relacionam com o fluxo de Ricci, para mais detalhes veja, por exemplo, [2, 18].

3.1 Sólitons de Ricci gradiente

Definição 3.1 *Dizemos que uma tripla (M^n, g, f), onde M^n é uma variedade, g é uma métrica Riemanniana em M^n e $f : M^n \to \mathbb{R}$ é uma função potencial, é um sóliton de Ricci gradiente se satisfaz*

$$Ric + Hess f = \lambda g, \tag{3.1}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. A depender do valor de λ, os sólitons de Ricci se diferenciam por 3 tipos:

- *expanding se $\lambda < 0$;*
- *steady se $\lambda = 0$;*
- *shrinking se $\lambda > 0$.*

Observação 3.1 *Seja (M^n, g) uma variedade Einstein, ou seja,*

$$Ric = \lambda g,$$

então a equação do sóliton é sempre satisfeita quando tomamos $f(x) = c$ uma função constante, pois $\mathrm{Hess} f = 0$. Então podemos dizer que os sólitons de Ricci gradiente são generalizações das métricas Einstein. Esses são chamados de sólitons triviais.

Seja (M^n, g, f) um sóliton de Ricci gradiente, se $\bar{g} = \lambda g$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$Ric(g) = Ric(\bar{g}).$$

Então, a menos de *scaling* da métrica, ainda obtemos a equação (3.1). Assim, ao longo do trabalho vamos sempre fazer o scaling da métrica g de tal forma que obteremos $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 0$ ou $\lambda = -\frac{1}{2}$.

3.2 Fluxo de Ricci

O fluxo de Ricci é um objeto de pesquisa muito importante no estudo das variedades. Ele pode ser descrito como um processo de uniformização da métrica em uma variedade. Os sólitons de Ricci são soluções auto-similares do fluxo de Ricci e também modelos de singularidades do fluxo, como veremos nessa seção.

Definição 3.2 *Dada uma família a 1-parâmetro de métricas Riemannianas $g(t)$ em uma variedade suave M^n, definida em uma intervalo $I \subset \mathbb{R}$ o fluxo de Ricci é dado pela equação*

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric(g(t)) \tag{3.2}$$

com uma condição inicial dada $g(0) = g_0$, para mais detalher, veja [14, 27, 18].

O próximo resultado mostra a relação direta dos sólitons de Ricci com o fluxo de Ricci. Mostraremos que eles são soluções auto-similares do fluxo de Ricci (veja [18]).

Teorema 3.1 *Se (M^n, g, f, λ), é um soliton de Ricci gradiente completo, então existe uma solução $g(t)$ do fluxo de Ricci com $g(0) = g_0$, difeomorfismos $\varphi(t)$ com $\phi(0) = \mathrm{id}_{M^n}$, funções $f(t)$ com $f(0) = f_0$ definido para todo t com*

$$\tau(t) = \lambda t + 1 > 0,$$

tal que:

- *$\varphi(x) : M^n \to M^n$ é uma família a um parâmetro de difeomorfismos gerados pelos campos $X(t) = \frac{1}{\tau(t)}(\nabla^{g_0} f_0)(\varphi(t)(x))$, ou seja,*
$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t)(x) = \frac{1}{\tau(t)}(\nabla^{g_0} f_0)(\varphi(t)(x));$$
- *$g(t)$ é o pull back por $\varphi(t)$ de g_0 sobre $\tau(t)$,*
$$g(t) = \tau(t) \cdot \varphi(t)^* g_0;$$
- *$f(t)$ é o pull back por $\varphi(t)$ de f_0*
$$f(t) = f_0 \circ \varphi(t) = \varphi(t)^*(f_0);$$
- *além disso,*
$$Ric(g(t)) + \nabla^{g(t)}\nabla^{g(t)} + \frac{\lambda}{2\tau(t)} g(t) = 0.$$

Demonstracão: Defina $\tau(t) = \lambda t + 1$. Como $\nabla^{g_0} f_0$ é completo, existe uma família a 1-parâmetro de difeomorfismos $\varphi(t) : M \to M$ gerados pelos campos $\frac{1}{\tau(t)}\nabla^{g_0} f_0$ definido para todo $\tau(t) > 0$. Defina $f(t) = f_0 \circ \varphi(t)$ e $g(t) = \tau(t) \cdot \varphi(t)^* g_0$. Daí,

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t}|_{t=t_0} = \frac{\lambda}{\tau(t_0)} g(t_0) + \tau(t_0)\frac{\partial(\varphi(t)^* g_0)}{\partial t}|_{t=t_0}.$$

Usando a Observação 1.22 em [18], deduzimos

$$\begin{aligned}\tau(t_0)\frac{\partial}{\partial t}(\varphi(t)^* g_0)|_{t=t_0} &= \tau(t_0)\mathcal{L}_{(\varphi(t_0)^{-1})_* \frac{\partial}{\partial t}|_{t=t_0}\varphi(t)}\varphi(t_0)^* g_0 \\ &= \mathcal{L}_{(\mathrm{grad}_{g(t_0)} f(t_0))} g(t_0).\end{aligned}$$

Já que

$$\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}|_{t=t_0} = \frac{1}{\tau(t_0)}\nabla^{g_0} f_0 = \varphi(t)_*(\nabla^{g(t_0)} f(t_0),$$

obtemos

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\tau(t)} g(t) + \mathcal{L}_{\nabla^{g(t)} f(t)} g(t).$$

Note agora que

$$\begin{aligned}-2Ric(g(t)) &= -2Ric(\tau(t)\phi(t)^* g_0) \\ &= -2Ric(\varphi(t)^* g_0) \\ &= -2\varphi(t)^* Ric(g_0) \\ &= \varphi(t)^*(-2Ric(g_0)) \\ &= \varphi(t)^*(\lambda g_0 + \mathcal{L}_{\nabla^{g_0} f_0} g_0) \\ &= \frac{\lambda}{\tau(t)} g(t) + \mathcal{L}_{\varphi(t)^*(\nabla^{g_0} f_0)}\varphi(t)^* g_0) \\ &= \frac{\lambda}{\tau(t)} g(t) + \mathcal{L}_{(\nabla^{g(t)} f(t))} g_0)\end{aligned}$$

isto é,

$$Ric(g(t)) + \nabla^{g(t)}\nabla^{g(t)} f(t) + \frac{\lambda}{2\tau(t)} g(t) = 0.$$

Isto conclui a demonstração do teorema.

□

3.3 Exemplos de sólitons gradiente shrinking

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos importantes de sólitons de Ricci.

Exemplo 1 *Considere a variedade Riemanniana* $(\mathbb{R}^n, g)$ *onde* $g = \delta_{ij}$ *é a métrica canônica de* $\mathbb{R}^n$. *Dado* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e a função potencial* $f(x) = \lambda\frac{|x|^2}{2}$, *observe que*

$$\nabla f = \lambda x$$

e portanto,

$$\text{Hess} f = \lambda \delta_{ij}. \tag{3.3}$$

Observação 3.2 *Como $Ric(g) = 0$, então $(\mathbb{R}^n, g)$ é uma variedade Einstein. Porém, por (3.3), $(\mathbb{R}^n, g)$ satisfaz a equação do soliton e não é trivial, ou seja, esse exemplo mostra que existem variedades Einstein que não são sólitons de Ricci triviais. Este sóliton é conhecido como sóliton Gaussiano.*

Exemplo 2 *Para $n > 1$ considere o cilindro generalizado $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^m$ e defina, para $t \in (0, \infty)$ a família de métricas*

$$g = 2(n-1)tg + \delta,$$

onde g_o é a métrica padrão de $\mathbb{S}^n$ e δ a métrica canônica do $\mathbb{R}^m$. Agora considere a função

$$f_t(\theta, x) = \frac{|x|^2}{4t},$$

onde $\theta \in \mathbb{S}, x \in \mathbb{R}, t > 0$. O tensor de Ricci é dado por

$$Ric_{g_t} = Ric(2(n-1)tg_o) + Ric_{\mathbb{R}^k} = (n-1)g_o.$$

Segue que

$$Ric_{g_t} = \frac{1}{2t} g_t - \frac{1}{2t} \delta$$

Temos então que

$$Ric_{g_t} + \text{Hess} f(t) = \frac{1}{2t} g_t.$$

Portanto $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^m, g_t, f(t))$ é um sóliton de Ricci gradiente shrinking. Em particular, solitons cilindricos $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}, g_t, f(t))$ são exemplos importante de sólitons de Ricci gradiente shrinking, pois modelam singularidades do tipo "pescoço" no fluxo de Ricci.

Exemplo 3 *O sóliton charuto é a variedade Riemanniana completa $(\mathbb{R}^2, g_\Sigma, f)$, onde*

$$g_\Sigma = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2}$$

é a métrica e $f(x, y) = -\log(1 + x^2 + y^2)$ é a função potencial. Segue daí que

$$Ric(g_\Sigma) + \text{Hess} f = 0$$

e portanto o sóliton charuto é um sóliton do tipo steady.

Outros exemplos de sólitons de Ricci gradiente shrinking podem ser encontrados em [18, 3]

3.4 Sólitons de dimensão 4

Nesta seção serão apresentadas algumas propriedades importantes que utilizaremos na demonstração do teorema principal. Além disso será apresentado os detalhes referentes ao exemplo do sóliton de Ricci em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Antes de apresentarmos os resultados, vamos esclarecer algumas características do tensor de Weyl. Utilizando a decomposição $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$, podemos decompor o tensor de Weyl como

$$W = W^+ \oplus W^-,$$

onde $W^+ : \Lambda_+(M) \to \Lambda_-(M)$ é a chamada a parte self-dual e $W^- : \Lambda_-(M) \to \Lambda_+(M)$ é chamada a parte anti-self-dual do tensor de Weyl. Assim, podemos fixar um ponto $p \in M^4$ e diagonalizar $W^\pm$ tal que $w_i^\pm$, $i = 1,2,3$, são seus respectivos autovalores. Esses autovalores satisfazem, confira [8],

$$w_1^\pm \leq w_2^\pm \leq w_3^\pm \quad \text{e} \quad w_1^\pm + w_2^\pm + w_3^\pm = 0.$$

Com isso em mãos, podemos provar a seguinte proposição.

Proposição 3.2 *Seja (M^4, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 4. Então valem as seguintes estimativas:*

i) $\frac{3}{2}(w_3^+)^2 \leq |W^+|^2$;

ii) $\det W^+ \leq \frac{1}{6}(w_3^+)|W^+|^2 \leq \frac{\sqrt{6}}{18}|W^+|^3$.

Além disso, a igualdade é satisfeita em qualquer um dos casos se, e somente se, $w_1^+ = w_2^+$.

Demonstracão: Primeiro, como W^+ foi diagonalizado com auto-valores w_1^+, w_2^+, w_3^+ tais que $w_1^+ + w_2^+ + w_3^+ = 0$, temos que

$$\begin{aligned} |W^+|^2 &= (w_1^+)^2 + (w_2^+)^2 + (w_3^+)^2 \\ &= (w_1^+)^2 + (w_2^+)^2 + w_1^+ w_2^+ - w_1^+ w_2^+ + (w_3^+)^2 \\ &= \frac{1}{2}(w_1^+ + w_2^+)^2 + \frac{1}{2}(w_1^+ - w_2^+)^2 + (w_3^+)^2 \\ &\geq \frac{1}{2}(-w_3^+)^2 + (w_3^+)^2 = \frac{3}{2}(w_3^+)^2. \end{aligned}$$

Na desigualdade acima utilizamos o fato de que $(w_1^+ - w_2^+)^2 \geq 0$. Além disso, a igualdade é satisfeita se, e somente se, $w_1^+ = w_2^+$.

Para *ii*), note que

$$\begin{aligned}
(w_3^+)|W^+|^2 - 6\det W^+ &= w_3^+\left[(w_1^+)^2 + (w_2^+)^2 + (w_3^+)^2\right] - 6w_1^+w_2^+w_3^+ \\
&= w_3^+\left[(w_2^+ + w_3^+)^2 + (w_2^+)^2 + (w_3^+)^2\right] - 6w_1^+w_2^+w_3^+ \\
&= 2w_3^+\left[(w_2^+)^2 + (w_3^+)^2 + w_2^+w_3^+\right] - 6w_1^+w_2^+w_3^+ \\
&= 2w_3^+\left[(w_3^+)^2 + (w_2^+ + w_3^+)w_2^+\right] - 6w_1^+w_2^+w_3^+,
\end{aligned}$$

usando novamente que $w_1^+ + w_2^+ + w_3^+ = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
(w_3^+)|W^+|^2 - 6\det W^+ &= 2w_3^+\left[(w_3^+)^2 - w_1^+w_2^+\right] - 6w_1^+w_2^+w_3^+ \\
&= 2(w_3^+)^3 - 8w_1^+w_2^+w_3^+ \\
&= 2w_3^+\left[(w_3^+)^2 - 4w_1^+w_2^+\right] \\
&= 2w_3^+\left[(w_1^+)^2 + 2w_1^+w_2^+ + (w_2^+)^2 - 4w_1^+w_2^+\right].
\end{aligned}$$

Agora, como $w_1^+ = -w_2^+ - w_3^+$, tem-se que

$$\begin{aligned}
(w_3^+)|W^+|^2 - 6\det W^+ &= 2w_3^+\left[(w_1^+)^2 - 2w_1^+w_2^+ + (w_2^+)^2\right] \\
&= 2(w_3^+)(w_1^+ - w_2^+)^2. \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Daí,

$$0 \leq (w_3^+)|W^+|^2 - 6\det W^+,$$

e portanto,

$$\det W^+ \leq \frac{1}{6}(w_3^+)|W^+|^2. \tag{3.4}$$

Agora, de *i*), obtemos

$$\frac{1}{6}(w_3^+)|W^+|^2 \leq \frac{\sqrt{6}}{18}|W^+|^3. \tag{3.5}$$

Então de (3.4) e (3.5) deduzimos

$$\det W^+ \leq \frac{1}{6}(w_3^+)|W^+|^2 \leq \frac{\sqrt{6}}{18}|W^+|^3,$$

o que prova *ii*). É fácil ver que a igualdade segue se, e somente se, $w_1^+ = w_2^+$. Isto finaliza a prova da Proposição 3.2.

$\square$

O próximo teorema nos garante uma estimativa para $(\overset{\circ}{Ric} \odot \overset{\circ}{Ric})^+$ em uma variedade Riemanniana de dimensão quatro orientada.

Proposição 3.3 *Seja (M^4, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 4 orientada. Então vale as seguintes estimativas:*

i) $|(\overset{\circ}{Ric} \odot \overset{\circ}{Ric})|^2 \leq 6|\overset{\circ}{Ric}|^4$. *Além disso, a igualdade é satisfeita se, e somente se,* $4|\overset{\circ}{Ric}{}^2|^2 = |\overset{\circ}{Ric}|^4$, *onde* $(\overset{\circ}{Ric}_{ik})^2 = \overset{\circ}{Ric}_{ip}\overset{\circ}{Ric}_{kp}$;

ii) $|(\overset{\circ}{Ric} \odot \overset{\circ}{Ric})^+|^2 \leq 6|\overset{\circ}{Ric}|^4$. *Além disso, a igualdade é satisfeita se, e somente se,* $|(\overset{\circ}{Ric} \odot \overset{\circ}{Ric})^-| = 0$.

Demonstracão: Pelo produto de Kulkarni-Nomizu, obtemos

$$\begin{aligned}(\overset{\circ}{Ric} \odot \overset{\circ}{Ric})_{ijkl} &= \overset{\circ}{Ric}_{ik}\overset{\circ}{Ric}_{jl} + \overset{\circ}{Ric}_{jl}\overset{\circ}{Ric}_{ik} - \overset{\circ}{Ric}_{il}\overset{\circ}{Ric}_{jk} - \overset{\circ}{Ric}_{jk}\overset{\circ}{Ric}_{il} \\ &= 2(\overset{\circ}{Ric}_{ik}\overset{\circ}{Ric}_{jl} - \overset{\circ}{Ric}_{il}\overset{\circ}{Ric}_{jk}).\end{aligned}$$

Diagonalizando $\overset{\circ}{Ric}$ podemos supor $\overset{\circ}{Ric}_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$, então, para cada $i \neq j$,

$$\begin{aligned}(\overset{\circ}{Ric} \odot \overset{\circ}{Ric})_{ijkl} &= 2(\lambda_i\delta_{ik}\lambda_j\delta_{jl} - \lambda_i\delta_{il}\lambda_j\delta_{jk}) \\ &= 2\lambda_i\lambda_j(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}).\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}|(\overset{\circ}{Ric} \odot \overset{\circ}{Ric})|^2 &= \sum_{ijkl} 4\lambda_i^2\lambda_j^2(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})^2 \\ &= \sum_{ijkl} 4\lambda_i^2\lambda_j^2\left[(\delta_{ik}\delta_{jl})^2 - 2\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{il}\delta_{jk} + (\delta_{il}\delta_{jk})^2\right] \\ &= \sum_{ijkl} 4\lambda_i^2\lambda_j^2\left[(\delta_{ik}\delta_{ki})(\delta_{jl}\delta_{lj}) - 2\delta_{ik}\delta_{kj}\delta_{il}\delta_{lj} + (\delta_{il}\delta_{li})(\delta_{jk}\delta_{kj})\right] \\ &= \sum_{ij} 4\lambda_i^2\lambda_j^2\left[(\delta_{ii})(\delta_{jj}) - 2\delta_{ij}\delta_{ij} + (\delta_{ii})(\delta_{jj})\right] \\ &= \sum_{i\neq j} 8\lambda_i^2\lambda_j^2.\end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} |(\overset{\circ}{Ric} \odot \overset{\circ}{Ric})|^2 &= 8\sum_{i\neq j}\lambda_i^2\lambda_j^2 \\ &= 8\sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j\neq i}\lambda_i^2\lambda_j^2\right) \\ &= 8\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^2\left[\left(\sum_{j=1}^{4}\lambda_j^2\right)-\lambda_i^2\right] \\ &= 8\left[\left(\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^2\right)^2-\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^4\right] \end{aligned}$$

Agora, como

$$\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^2\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{4}\lambda_i^4,$$

temos que

$$\begin{aligned} |(\overset{\circ}{Ric} \odot \overset{\circ}{Ric})|^2 &\leq 8\left[\left(\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^2\right)^2-\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^2\right)^2\right] \\ &= 6\left(\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^2\right)^2 \\ &= 6\left(|\overset{\circ}{Ric}|^2\right)^2 = 6|\overset{\circ}{Ric}|^4, \end{aligned}$$

o que prova i). Logo, a estimativa em i) se torna uma igualdade se, e somente se,

$$|\overset{\circ}{Ric}|^4 = \left(\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^2\right)^2 = 4\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^4,$$

mas note que

$$\begin{aligned} (\overset{\circ}{Ric}{}^2)_{ik} &= (\overset{\circ}{Ric})_{ip}(\overset{\circ}{Ric})_{kp} \\ &= \lambda_i\delta_{ip}\lambda_k\delta_{kp} \\ &= \lambda_i\lambda_k\delta_{ik}, \end{aligned}$$

segue daí que

$$\begin{aligned}|\mathring{Ric}^2|^2 &= \sum_{ik}\lambda_i^2\lambda_k^2\delta_{ik}^2\\ &= \sum_i^4 \lambda_i^4.\end{aligned}$$

Portanto, a igualdade em $i)$ é satisfeita se, e somente se,

$$|\mathring{Ric}|^4 = 4|\mathring{Ric}^2|^2.$$

Para provar $ii)$, tomando a decomposição

$$\mathring{Ric}\odot\mathring{Ric} = (\mathring{Ric}\odot\mathring{Ric})^+ \oplus (\mathring{Ric}\odot\mathring{Ric})^-,$$

obtemos que

$$|(\mathring{Ric}\odot\mathring{Ric})^+|^2 \leq |\mathring{Ric}\odot\mathring{Ric}|^2 \leq 6|\mathring{Ric}|^4,$$

ou seja,

$$|(\mathring{Ric}\odot\mathring{Ric})^+| \leq \sqrt{6}|\mathring{Ric}|^2,$$

como queríamos demonstrar.

□

Na sequência, apresentaremos os detalhes ao exemplo do sóliton cilíndrico $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}^2$ (*Bubble Sheet*).

Exemplo 4 *Seja* $(\mathbb{S}^2(\sqrt{2})\times\mathbb{R}^2, g, f)$ *o sóliton de Ricci gradiente shrinking, o cilindro* $\mathbb{S}^2(\sqrt{2})\times\mathbb{R}^2$*, com a métrica produto* g *e a função potencial dada por* $f(x,y) = \dfrac{|y|^2}{4}+1$*, para* $(x,y)\in\mathbb{S}^2(\sqrt{2})\times\mathbb{R}^2$*. Escolhendo a base* $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ *tal que* $\{e_1,e_2\}$ *seja tangente a* $\mathbb{S}^2(\sqrt{2})$ *e* $\{e_3,e_4\}$ *seja tangente a* $\mathbb{R}^2$ *temos que a matriz do Ric é dada por*

$$Ric = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Daí, a curvatura escalar é dada por

$$R = g^{ij}R_{ij} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1,$$

e a curvatura de Ricci sem traço(traço nulo) é

$$\overset{\circ}{Ric} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Usando a decomposição $\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$, *podemos então definir, como visto no Capítulo 1, o operador curvatura* $\mathcal{R} : \Lambda^2(M) \to \Lambda^2(M)$ *por*

$$\mathcal{R}(e^i \wedge e^j) = \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl} e^k \wedge e^l.$$

Então a matriz do tensor curvatura fica

$$Rm = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Segue de (2.5) que

$$W^{\pm} + \frac{R}{12} Id = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$W^{\pm} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{12} \end{bmatrix},$$

ou seja, $W^{\pm}$ *possui dois autovalores distintos. Mostraremos agora que* $\mathbb{S}(\sqrt{2}) \times \mathbb{R}^2$ *satisfaz*

$$\langle (\overset{\circ}{Ric} \odot \overset{\circ}{Ric})^+, W^+ \rangle = \frac{1}{24}.$$

Já vimos que para, $\mathring{Ric}_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$, *temos*

$$\begin{aligned}(\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})_{ijkl} &= \mathring{Ric}_{ik}\mathring{Ric}_{jl} + \mathring{Ric}_{jl}\mathring{Ric}_{ik} - \mathring{Ric}_{il}\mathring{Ric}_{jk} - \mathring{Ric}_{jk}\mathring{Ric}_{il} \\ &= 2(\mathring{Ric}_{ik}\mathring{Ric}_{jl} - \mathring{Ric}_{il}\mathring{Ric}_{jk}) \\ &= 2(\lambda_i\delta_{ik}\lambda_j\delta_{jl} - \lambda_i\delta_{il}\lambda_j\delta_{jk}) \\ &= 2\lambda_i\lambda_j(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Como o produto Kulkarni-Nomizu é um 4-tensor satisfazendo (2.4), podemos definir o operador curvatura de tal forma que $(\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})^+$ *é dado pela submatriz*

$$\begin{bmatrix} \langle(\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})(\omega_1)^+, \omega_1^+\rangle & \langle(\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})(\omega_1)^+, \omega_2^+\rangle & \langle(\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})(\omega_1)^+, \omega_3^+\rangle \\ \langle(\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})(\omega_2)^+, \omega_1^+\rangle & \langle(\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})(\omega_2)^+, \omega_2^+\rangle & \langle(\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})(\omega_2)^+, \omega_3^+\rangle \\ \langle(\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})(\omega_3)^+, \omega_1^+\rangle & \langle(\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})(\omega_3)^+, \omega_2^+\rangle & \langle(\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})(\omega_3)^+, \omega_3^+\rangle \end{bmatrix},$$

da matriz de $(\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})$. *Segue de (3.6) que*

$$\begin{aligned}\langle(\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})(\omega_1)^+, \omega_1^+\rangle &= \frac{1}{2}((\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})_{1212} + (\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})_{1234} \\ &\quad + (\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})_{3412} + (\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})_{3434}) \\ &= \frac{1}{8},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle(\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})(\omega_2)^+, \omega_2^+\rangle &= \frac{1}{2}((\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})_{1313} + (\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})_{1342} \\ &\quad + (\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})_{4213} + (\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})_{4242}) \\ &= -\frac{1}{8},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle(\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})(\omega_3)^+, \omega_3^+\rangle &= \frac{1}{2}((\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})_{1414} + (\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})_{1423} \\ &\quad + (\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})_{2314} + (\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})_{2323}). \\ &= -\frac{1}{8}\end{aligned}$$

As outras entradas da matriz são todas iguais a 0, tem-se então que a matriz é dada por

$$(\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix},$$

Portanto, $\langle(\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})^+, W^+\rangle = \dfrac{1}{24}$.

O seguinte lema apresenta alguns resultados clássicos sobre sólitons de Ricci gradinete shrinking de dimensão quatro (veja [18]).

Lema 3.1 *Seja (M^4, g, f) um sóliton de Ricci gradiente shrinking de dimensão 4. Então vale:*

i) $R + \Delta f = 2$;

ii) $\frac{1}{2}\nabla R = Ric(\nabla f)$;

iii) $\nabla_l R_{ijkl} = \nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} = R_{ijkl}\nabla_l f$.

iv) $\Delta_f R = R - 2|Ric|^2$;

v) $R + |\nabla f|^2 - f = 0 \quad$ *(com f normalizado);*

vi) $\Delta_f R_{ij} = R_{ij} - 2R_{ikjl}R_{kl}$;

vii) $\Delta_f Rm = Rm + Rm * Rm$.

Demonstracão: i) Tome o traço da equação do sóliton de Ricci gradiente Shrinking

$$Ric + \text{Hess} f = \frac{1}{2}g,$$

ou seja, escrevendo em coordenadas, $R_{ij} + \nabla_i\nabla_j f = \frac{1}{2}g_{ij}$, temos

$$g_{ij}\left(R_{ij} + \nabla_i\nabla_j f = \frac{1}{2}g_{ij}\right),$$

portanto,

$$R + \Delta f = 2.$$

ii) Considere a segunda identidade de Bianchi contraída duas vezes

$$\nabla_i R = 2\nabla_j R_{ji},$$

segue que

$$\begin{aligned} \nabla_i R &= 2\nabla_j(R_{ij}) \\ &= 2\nabla_j\left(\frac{1}{2}g_{ij} - \nabla_i\nabla_j f\right) \\ &= -2\nabla_j(\nabla_i\nabla_j f) \\ &= -2\nabla_j\nabla_i\nabla_j f, \end{aligned}$$

agora, usando a identidade de Ricci, obtemos

$$\begin{aligned}\nabla_i R &= -2\nabla_j\nabla_i\nabla_j f\\ &= -2(\nabla_i\nabla_j\nabla_j f + R_{is}\nabla_s f)\\ &= -2\nabla_i\nabla_j\nabla_j f - 2R_{is}\nabla_s f\\ &= 2\nabla_i R - 2R_{is}\nabla_s f,\end{aligned}$$

onde usamos a equação $i)$ na última igualdade. Tem-se então que

$$2Ric(\nabla f) = \nabla R.$$

$iii)$ Consideremos a equação $R_{ij} + \nabla_i\nabla_j f = \frac{1}{2}g_{ij}$, ou seja, $R_{ij} = \frac{1}{2}g_{ij} - \nabla_i\nabla_j f$. Daí

$$\begin{aligned}\nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} &= \nabla_j\left(\frac{1}{2}g_{ik} - \nabla_i\nabla_k f\right) - \nabla_i\left(\frac{1}{2}g_{jk} - \nabla_j\nabla_k f\right)\\ &= -\nabla_j\nabla_i\nabla_k f + \nabla_i\nabla_j\nabla_k f\\ &= R_{ijkl}\nabla_l f.\end{aligned}$$

Agora, tomando o traço na segunda identidade de Bianchi, obtemos

$$\begin{aligned}0 &= g_{ml}(\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_i R_{jmkl} + \nabla_j R_{mikl})\\ &= \nabla_l R_{ijkl} + \nabla_i R_{jlkl} + \nabla_j R_{likl}\\ &= \nabla_l R_{ijkl} + \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla_l R_{ijkl} = \nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk}.$$

Portanto,

$$\nabla_l R_{ijkl} = \nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} = R_{ijkl}\nabla_l f.$$

$iv)$ Primeiramente, note que

$$\Delta R = g_{jk}\nabla_k\nabla_j R = g_{jk}\nabla_k(2R_{ij}\nabla_i f).$$

Agora observe que

$$\begin{aligned}\Delta R = g_{jk}\nabla_k(2R_{ij}\nabla_i f) &= 2g_{jk}[(\nabla_k R_{ij})\nabla_i f + R_{jk}\nabla_k\nabla_i f]\\ &= 2g_{jk}(\nabla_k R_{ij})\nabla_i f + 2g_{jk}R_{ij}(\nabla_k\nabla_i f)\\ &= 2\nabla_j R_{ij}\nabla_i f + 2R_{ij}(\nabla_j\nabla_i f).\end{aligned}$$

Usando a equação fundamental dos sólitons de Ricci e o item ii), obtemos

$$\begin{aligned}\Delta R &= 2(\frac{1}{2}\nabla_i R\nabla_i f)+2R_{ij}(-R_{ij}+\frac{1}{2}g_{ij})\\ &= \langle\nabla R,\nabla f\rangle+R-2|Ric|^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta_f R = R-2|Ric|^2.$$

v) Basta mostrar que $\nabla(R+|\nabla f|^2-f)=0$. Então

$$\begin{aligned}\nabla_i(R+|\nabla f|^2-f) &= \nabla_i R+\nabla_i|\nabla f|^2-\nabla_i f\\ &= 2R_{ji}(\nabla_i f)+\nabla_i|\nabla f|^2-\nabla_i f.\end{aligned}$$

Agora observe que, dado $X\in\mathfrak{X}(M)$ arbitrário, vale

$$X|\nabla f|^2=\langle X,\nabla|\nabla f|^2\rangle=\nabla|\nabla f|^2(X),$$

e também

$$\begin{aligned}X|\nabla f|^2 &= 2\langle\nabla_X\nabla f,\nabla f\rangle\\ &= 2\mathrm{Hess}f(X,\nabla f)\\ &= 2\mathrm{Hess}f(\nabla f,X)\\ &= 2\langle\nabla_{\nabla f}\nabla f,X\rangle\\ &= 2\mathrm{Hess}f(\nabla f)X.\end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de X, deduzimos que

$$\nabla|\nabla f|^2=2\mathrm{Hess}f(\nabla f).$$

Daí,

$$\begin{aligned}\nabla_i(R+|\nabla f|^2-f) &= 2R_{ji}(\nabla_i f)+\nabla|\nabla f|^2-\nabla f\\ &= 2R_{ji}(\nabla_i f)+2\mathrm{Hess}f(\nabla_i f)-\nabla_i f\\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto $R+|\nabla f|^2-f=C$. Em particular, normalizando a função f, obtemos

$$R+|\nabla f|^2-f=0.$$

$vi)$ Pela segunda identidade de Bianchi

$$\Delta R_{ik} = \nabla_j \nabla_j R_{ik} = \nabla_j \nabla_i R_{jk} + \nabla_j (R_{ijkl} \nabla_l f).$$

Logo,

$$\Delta R_{ik} = \nabla_j \nabla_i R_{jk} + \nabla_j R_{ijkl} \nabla_l f + R_{ijkl} \nabla_j \nabla_l f.$$

Pela identidade de Ricci e pela identidade de Bianchi, obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta R_{ik} &= \nabla_i \nabla_j R_{jk} + R_{jikl} R_{jl} + R_{jijl} R_{lk} - (\nabla_l R_{jkij} + \nabla_k R_{ljij}) \nabla_l f + R_{ijkl} \nabla_j \nabla_l f \\
&= \nabla_i \nabla_j R_{jk} + R_{jikl} R_{jl} + R_{il} R_{lk} + (\nabla_l R_{ki} - \nabla_k R_{li}) \nabla_l f + R_{ijkl} \nabla_j \nabla_l f.
\end{aligned}$$

Da relação fundamental e utilizando o item $iii)$, a equação acima fica

$$\begin{aligned}
\Delta R_{ik} &= \nabla_i \left(\frac{1}{2} \nabla_k R \right) + R_{jikl} R_{jl} + R_{il} R_{lk} + (\nabla_l R_{ki} - \nabla_k R_{li}) \nabla_l f + R_{ijkl} \left(\frac{1}{2} g_{jl} - R_{jl} \right) \\
&= \langle \nabla R_{ki}, \nabla f \rangle + \frac{1}{2} R_{ik} + R_{il} R_{lk} + \frac{1}{2} \nabla_k \nabla_i R - \nabla_k R_{li} \nabla_l f - 2 R_{ijkl} R_{jl}. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Na última igualdade fizemos uma mudança nos índices. Pelo item $ii)$ temos então

$$\nabla_k \left(\frac{1}{2} \nabla_i R \right) = \nabla_k (2 R_{il} \nabla_l f),$$

e portanto,

$$\frac{1}{2} \nabla_k \nabla_i R - \nabla_k R_{il} \nabla_l f = R_{il} \nabla_k \nabla_l f.$$

Substituindo em (3.7), ficamos com

$$\Delta R_{ik} = \langle \nabla R_{ik}, \nabla f \rangle + \frac{1}{2} R_{ik} + R_{il} R_{lk} + R_{il} \nabla_k \nabla_l f - 2 R_{ijkl} R_{jl}.$$

Usando mais uma vez a equação fundamental dos sólitons, obtemos que

$$\begin{aligned}
\Delta R_{ik} &= \langle \nabla R_{ik}, \nabla f \rangle + \frac{1}{2} R_{ik} + R_{il} R_{lk} + R_{il} \left(\frac{1}{2} g_{kl} - R_{kl} \right) - 2 R_{ijkl} R_{jl} \\
&= \langle \nabla R_{ik}, \nabla f \rangle + \frac{1}{2} R_{ik} + R_{il} R_{lk} + \frac{1}{2} R_{ik} - R_{il} R_{kl} - 2 R_{ijkl} R_{jl} \\
&= \langle \nabla R_{ik}, \nabla f \rangle + R_{ik} - 2 R_{ijkl} R_{jl}.
\end{aligned}$$

Trocando o índice k por j, concluímos que

$$\Delta_f R_{ij} = R_{ij} - 2 R_{ikjl} R_{kl}.$$

Como queríamos demonstrar.

vii) Pela segunda identidade de Bianchi temos

$$\Delta R_{ijkl} = \nabla_p \nabla_p R_{ijkl} = -\nabla_p \nabla_i R_{jpkl} - \nabla_p \nabla_j R_{pikl}.$$

Agora, usando a identidade de Ricci nessa expressão, concluímos que

$$\begin{aligned} \Delta R_{ijkl} &= -\nabla_i \nabla_p R_{jpkl} - R_{pijm} R_{mpkl} - R_{pipm} R_{jmkl} - R_{pikm} R_{jpml} - R_{pilm} R_{jpkm} \\ &\quad -\nabla_j \nabla_p R_{pikl} - R_{pjpm} R_{mikl} - R_{pjim} R_{pmkl} - R_{pjkm} R_{piml} - R_{pjlm} R_{pikm}. \end{aligned}$$

Denotemos

$$\begin{aligned} (Rm * Rm)_1 &= -R_{pijm} R_{mpkl} - R_{pipm} R_{jmkl} - R_{pikm} R_{jpml} - R_{pilm} R_{jpkm} \\ &\quad -R_{pjpm} R_{mikl} - R_{pjim} R_{pmkl} - R_{pjkm} R_{piml} - R_{pjlm} R_{pikm}. \end{aligned}$$

Com essa notação, obtemos

$$\Delta R_{ijkl} = -\nabla_i \nabla_p R_{jpkl} - \nabla_j \nabla_p R_{pikl} + (Rm * Rm)_1.$$

Usando mais uma vez a identidade de Bianchi

$$\begin{aligned} \Delta R_{ijkl} &= \nabla_i \nabla_l R_{pkjp} + \nabla_i \nabla_k R_{lpjp} + \nabla_j \nabla_k R_{lppi} + \nabla_j \nabla_l R_{pkpi} + (Rm * Rm)_1 \\ &= -\nabla_i \nabla_l R_{kj} + \nabla_i \nabla_k R_{lj} - \nabla_j \nabla_k R_{li} + \nabla_j \nabla_l R_{ki} + (Rm * Rm)_1. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Pelo item *iii*) a expressão (3.8) fica

$$\begin{aligned} \Delta R_{ijkl} &= -\nabla_i \nabla_j R_{lk} - \nabla_i R_{jlkm} \nabla_m f - R_{jlkm} \nabla_j \nabla_m f \\ &\quad \nabla_i \nabla_j R_{kl} + \nabla_i R_{jklm} \nabla_m f + R_{jklm} \nabla_i \nabla_m f \\ &\quad -\nabla_j \nabla_i R_{kl} - \nabla_j R_{iklm} \nabla_m f - R_{iklm} \nabla_j \nabla_m f \\ &\quad \nabla_j \nabla_i R_{lk} + \nabla_j R_{ilkm} \nabla_m f + R_{ilkm} \nabla_j \nabla_m f + (Rm * Rm)_1. \end{aligned}$$

Reorganizando os termos, deduzimos que

$$\begin{aligned} \Delta R_{ijkl} &= (\nabla_i R_{jklm} - \nabla_i R_{jlkm} + \nabla_j R_{ilkm} - \nabla_j R_{iklm}) \nabla_m f \\ &\quad +(R_{jklm} - R_{jlkm}) \nabla_i \nabla_m f + (R_{ilkm} - R_{iklm}) \nabla_j \nabla_m f + (Rm * Rm)_1. \end{aligned}$$

Usando novamente a equação fundamental na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta R_{ijkl} &= (\nabla_i R_{jklm} - \nabla_i R_{jlkm} + \nabla_j R_{ilkm} - \nabla_j R_{iklm})\nabla_m f \\
&\quad +(R_{jklm} - R_{jlkm})\left(\frac{1}{2}g_{im} - R_{im}\right) + (R_{ilkm} - R_{iklm})\left(\frac{1}{2}g_{jm} - R_{jm}\right) \\
&\quad +(Rm * Rm)_1 \\
&= (\nabla_i R_{jklm} - \nabla_i R_{jlkm} + \nabla_j R_{ilkm} - \nabla_j R_{iklm})\nabla_m f \\
&\quad +R_{jkli} - R_{jlki} + (Rm * Rm)_1 + (Rm * Rm)_2, \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

onde

$$(Rm * Rm)_2 = R_{jlkm}R_{im} - R_{jklm}R_{im} - R_{ilkm}R_{jm} + R_{iklm}R_{jm}.$$

Agora, usando a primeira e segunda identidade de Bianchi, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\Delta R_{ijkl} &= (\nabla_i(R_{jklm} + R_{ljkm}) + \nabla_j(R_{ilkm} + R_{kilm}))\nabla_m f + R_{ijkl} + (Rm * Rm) \\
&= (\nabla_i R_{mjkl} + \nabla_j R_{imkl})\nabla_m f + R_{ijkl} + (Rm * Rm) \\
&= \nabla_m R_{ijkl}\nabla_m f + R_{ijkl} + (Rm * Rm) \\
&= \langle \nabla R_{ijkl}, \nabla f\rangle + R_{ijkl} + (Rm * Rm),
\end{aligned}$$

onde $(Rm * Rm) = (Rm * Rm)_1 + (Rm * Rm)_2$, isto finaliza a prova do lema.

$\square$

4 SÓLITONS DE RICCI GRADIENTE SHRINKING DE DIMENSÃO QUATRO

Neste capítulo enunciaremos mais uma vez o Teorema 1 e apresentaremos sua demonstração. Antes disso, vamos relembrar algumas características dos sólitons de Ricci gradiente shrinking.

Em [12], Chen mostrou que todo sóliton de Ricci gradiente shrinking completo tem curvatura escalar não negativa $R \geq 0$. Em relação a função potencial f, Cao e Zhou [4] provaram que

$$\frac{1}{4}(r(x)-c)^2 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}(r(x)+c)^2$$

onde $r(x) = d(x_0, x)$ é a função distância para um ponto fixo x_0 em M e c é uma constante positiva que só depende da dimensão e da geometria da bola unitária centrada em x_0. Além disso, eles mostraram que todo sóliton de Ricci gradiente shrinking completo não compacto tem, no máximo, o crescimento de volume Euclidiano (veja [4, Teorema 1.2]).

Relembremos também a fórmula de Weitzenböck obtida por Cao e Tran em [8], que será essencial na demonstração do teorema principal.

Proposição 4.1 *Seja (M^4, g, f) um sóliton de Ricci gradiente shrinking de dimensão 4. Então*

$$\Delta_f |W^{\pm}|^2 = 2|\nabla W^{\pm}|^2 + 2|W^{\pm}|^2 - 36 \det W^{\pm} - \langle (\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})^{\pm}, W^{\pm} \rangle.$$

Veja [8] para sua demonstração. Agora, enunciaremos novamente o Teorema 1.1.

Teorema 4.2 *Seja (M^4, g, f) um sóliton de Ricci gradiente shrinking de dimensão 4 satisfazendo*

$$|W^+|^2 - \sqrt{6}|W^+|^3 \geq \frac{1}{2}\langle (\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})^+, W^+ \rangle$$

ou

$$|W^-|^2 - \sqrt{6}|W^-|^3 \geq \frac{1}{2}\langle (\mathring{Ric} \odot \mathring{Ric})^-, W^- \rangle.$$

Então (M^4, g, f) é

i) Einstein, ou

ii) o quociente finito de um sóliton gaussiano shrinking $\mathbb{R}^4$, ou $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$, ou $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Demonstracão: A Proposição 4.1 garante que

$$\Delta_f|W^\pm|^2 = 2|\nabla W^\pm|^2 + 2|W^\pm|^2 - 36\det W^\pm - \langle(\mathring{Ric}\odot\mathring{Ric})^\pm, W^\pm\rangle. \tag{4.1}$$

Note que

$$\begin{aligned}\Delta_f|W^\pm|^2 &= \Delta|W^\pm|^2 - 2|W^\pm|\langle\nabla f, \nabla|W^\pm|\rangle\\ &= 2\nabla|W^\pm|\nabla|W^\pm| + 2|W^\pm|\Delta|W^\pm| - 2|W^\pm|\langle\nabla f, \nabla|W^\pm|\rangle\\ &= 2|\nabla|W^\pm||^2 + 2|W^\pm|\Delta_f|W^\pm|. \end{aligned}\tag{4.2}$$

Combinando (4.1) com (4.2) obtemos

$$2|W^\pm|\Delta_f|W^\pm| = 2|\nabla W^\pm|^2 - 2|\nabla|W^\pm||^2 + 2|W^\pm|^2 - 36\det W^\pm - \langle(\mathring{Ric}\odot\mathring{Ric})^\pm, W^\pm\rangle. \tag{4.3}$$

Pela desigualdade de Kato [20], vale

$$2|\nabla W^\pm|^2 \geq 2|\nabla|W^\pm||^2.$$

Então, de (4.3), temos que

$$\begin{aligned}2|W^\pm|\Delta_f|W^\pm| &= 2|\nabla W^\pm|^2 - 2|\nabla|W^\pm||^2 + 2|W^\pm|^2 - 36\det W^\pm - \langle(\mathring{Ric}\odot\mathring{Ric})^\pm, W^\pm\rangle\\ &\geq 2|W^\pm|^2 - 36\det W^\pm - \langle(\mathring{Ric}\odot\mathring{Ric})^\pm, W^\pm\rangle,\end{aligned}$$

segue, da Proposição 3.2 (item 2), que

$$|W^\pm|\Delta_f|W^\pm| \geq |W^\pm|^2 - \sqrt{6}|W^\pm|^3 - \frac{1}{2}\langle(\mathring{Ric}\odot\mathring{Ric})^\pm, W^\pm\rangle. \tag{4.4}$$

Por hipótese,

$$|W^+|^2 - \sqrt{6}|W^+|^3 \geq \frac{1}{2}\langle(\mathring{Ric}\odot\mathring{Ric})^+, W^+\rangle. \tag{4.5}$$

Concluímos então que $|W^+|\Delta_f|W^+| \geq 0$. Antes de prosseguirmos, precisamos mostrar que $|W^+| \in L^2(e^{-f}dV_g)$. Por (4.5), da desigualdade de Schwarz e da Proposição 3.3 temos

$$\begin{aligned}\sqrt{6}|W^+|^3 &\leq |W^+|^2 - \frac{1}{2}\langle(\mathring{Ric}\odot\mathring{Ric})^+, W^+\rangle\\ &\leq |W^+|^2 + \frac{1}{2}|(\mathring{Ric}\odot\mathring{Ric})^+||W^+|\\ &\leq |W^+|^2 + \frac{\sqrt{6}}{2}|\mathring{Ric}|^2|W^+|\\ &\leq |W^+|^2 + \frac{\sqrt{6}}{2}|Ric|^2|W^+|,\end{aligned}$$

de modo que

$$\sqrt{6}|W^+|^2 \le |W^+| + \frac{\sqrt{6}}{2}|Ric|^2 \le \frac{\sqrt{6}}{2}|W^+|^2 + \frac{1}{2\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{6}}{2}|Ric|^2.$$

Então

$$|W^+|^2 \le \frac{1}{6} + |Ric|^2.$$

Integrando sobre M obtemos

$$\int_M |W^+|^2 e^{-f} dV_g \le \frac{1}{6}\int_M e^{-f} dV_g + \int_M |Ric|^2 e^{-f} dV_g.$$

Pelo Corolário 1.1 de [4], tem-se que

$$\int_M e^{-f} dV_g < \infty,$$

ou seja, M^n tem f-volume finito. Além disso, Munteanu e Sesum provaram em [24] (Teorema 1.1) que

$$\int_M |Ric|^2 e^{-f} dV_g < \infty.$$

Segue então que $|W^+| \in L^2(e^{-f}dV_g)$.

Prosseguindo, de (4.4) e da hipótese do teorema, obtemos

$$|W^+|\Delta_f |W^+| \ge 0.$$

Defina $\varphi : M^4 \to R$ uma função cut-off tal que $\varphi = 1$ em $B_p(r)$ (uma bola geodésica de raio r e centrada em um ponto fixo $p \in M$), $\varphi = 0$ fora de $B_p(2r)$ e $|\nabla\varphi| \le \frac{c}{r}$, onde c é uma constante. Portanto, pela identidade de Green, temos que

$$\begin{aligned}
0 &\ge -\int_M \varphi^2 |W^+|\Delta_f |W^+| e^{-f} dV_g \\
&= \int_M \langle \nabla(\varphi^2|W^+|), \nabla|W^+|\rangle e^{-f} dV_g \\
&= \int_M \varphi^2 |\nabla|W^+||^2 e^{-f} dV_g + 2\int_M \varphi|W^+|\langle \nabla|W^+|, \nabla\varphi\rangle e^{-f} dV_g \\
&= \int_M |\varphi\nabla|W^+| + |W^+|\nabla\varphi|^2 e^{-f} dV_g - \int_M |W^+|^2|\nabla\varphi|^2 e^{-f} dV_g.
\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\int_M |\nabla(\varphi|W^+|)|^2 e^{-f} dV_g \le \int_M |W^+|^2 |\nabla\varphi|^2 e^{-f} dV_g.$$

Logo

$$\begin{aligned}\int_{B_p(r)} |\nabla|W^+||^2 e^{-f} dV_g &\leq \int_M |\nabla(\varphi|W^+|)|^2 e^{-f} dV_g \\ &\leq \int_{B_p(2r)\setminus B_p(r)} |W^+|^2|\nabla\varphi|^2 e^{-f} dV_g \\ &\leq \frac{c^2}{r^2}\int_{B_p(2r)\setminus B_p(r)} |W^+|^2 e^{-f} dV_g \\ &\leq \frac{c^2}{r^2}\int_M |W^+|^2 e^{-f} dV_g.\end{aligned}$$

Como $|W^+|$ é L^2_f-integrável, concluímos que o lado direito tende a 0 quando $r \to \infty$. Portanto $|W^+|$ deve ser constante em M. Temos então dois casos para serem analizados, a saber, $|W^+| = 0$ e $|W^+| \neq 0$.

Para o primeiro caso, se $|W^+| = 0$, usamos [13, Teorema 1.2] que diz que todo sóliton de Ricci gradiente shrinking de dimensão 4 com $W^+ = 0$ é o quociente finito de $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^4$ ou $\mathbb{CP}^2$. Já para o segundo caso, se $|W^+| \neq 0$, então por (4.1), assumindo

$$|W^+|^2 - \sqrt{6}|W^+|^3 \geq \frac{1}{2}\langle(\mathring{Ric}\odot\mathring{Ric})^+, W^+\rangle,$$

e pela Proposição 3.2, temos $\nabla W^+ = 0$. De fato, $\Delta_f|W^+| = 0$, então

$$\begin{aligned}0 &= 2|\nabla W^+|^2 + 2|W^+|^2 - 36\det W^+ - \langle(\mathring{Ric}\odot\mathring{Ric})^+, W^+\rangle \\ &\geq 2|\nabla W^+|^2 + 2|W^+|^2 - 36\det W^+ - 2|W^+|^2 + 2\sqrt{6}|W^+|^3 \\ &\geq 2|\nabla W^+|^2 - 36\det W^+ + 36\det W^+ \\ &= 2|\nabla W^+|^2.\end{aligned}$$

Portanto $\nabla W^+ = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned}0 &= 2|W^+|^2 - 36\det W^+ - \langle(\mathring{Ric}\odot\mathring{Ric})^+, W^+\rangle \\ &= 2|W^+|^2 - 2\sqrt{6}|W^+|^3 - \langle(\mathring{Ric}\odot\mathring{Ric})^+, W^+\rangle.\end{aligned}$$

Segue então que $36\det W^+ = 2\sqrt{6}|W^+|^3$, a igualdade da Proposição 3.2, item 2, é satisfeita. Em particular W^+ possui dois autovalores distintos. Como $\nabla W^+ = 0$, então $\delta W^+ = 0$ (half harmonic Weyl curvature). Além disso, por [15, Proposição 5], (M^4, g) é Kähler. Em qualquer caso, podemos aplicar [31, Teorema 1.1] para concluir que M é Einstein ou quociente finito de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$. Portanto obtemos a classificação desejada. O prova para o caso W^- é análoga. Isto finaliza a prova do teorema.

$\square$

REFERÊNCIAS

[1] BATISTA, R. M. **Rigidez de Sólitons Gradiente**. 2013. 70f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2013. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/7218. Acesso em: 5 ago. 2021.

[2] CAO, H.-D. Recent progress on Ricci solitons. **Recent advances in geometric analysis**. Advanced Lectures in Mathematics, United States, v. 11, p. 1-38, 2010.

[3] CAO, H.-D.; CHEN, B.-L.; ZHU, X.-P. Recent developments on the Hamilton's Ricci Flow. **Surveys in Differential Geometry**, United States, v. 12, n. 1, p. 47-112, 2007.

[4] CAO, H.-D.; ZHOU, D. On complete gradient shrinking Ricci solitons. **Journal of Differential Geometry**, United States, v. 85, n. 2, p. 175-186, 2010.

[5] CAO, H.-D.; RIBEIRO JR., E.; ZHOU, D. Four-dimensional complete gradient shrinking Ricci solitons. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Germany, v. 2021, n. 778, p. 127-144, 2021.

[6] CAO, H.-D.; CHEN, Q. On Bach-flat gradient shrinking Ricci solitons. **Duke Mathematical Journal**, United States, v. 162, n. 6, p. 1149-1169, 2013.

[7] CAO, X.; WANG, B.; ZHANG, Z. On locally conformally flat gradient shrinking Ricci solitons. **Communications in Contemporary Mathematics**, United States, v. 13, n. 2, p. 269-282, 2011.

[8] CAO, X.; TRAN, H. The Weyl tensor of gradient Ricci solitons. **Geometry & Topology**, United States, v. 20, n. 1, p. 389-436, 2016.

[9] CARLOS, E. S. S. **A geometria dos sólitons de Ricci compactos**. 2013. 57f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2013. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/7210. Acesso em: 10 out. 2021.

[10] CARMO, M. P. **Geometria Riemanniana**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. (Coleção Projeto Euclides, v. 1).

[11] CATINO, G. Complete gradient shrinking Ricci solitons with pinched curvature. **Mathematische Annalen**, Germany, v. 355, n. 2, p. 629-635, 2013.

[12] CHEN, B.-L. Strong uniqueness of the Ricci flow. **Journal of Differential Geometry**, United States, v. 82, n. 2, p. 363-382, 2009.

[13] CHEN, X.; WANG, Y. On four-dimensional anti-self-dual gradient Ricci solitons. **The Journal of Geometric Analysis**, United States, v. 25, n. 2, p. 1335-1343, 2015.

[14] CHOW, B.; LU, P.; NI, L. **Hamilton's Ricci Flow**. Graduate Studies in Mathematics, United States, v. 77, 2006.

[15] DERDZÍNSKI, A. Self-dual Kähler manifolds and Einstein manifolds of dimension four. **Compositio Mathematica**, Netherlands, v. 49, n. 3, p. 405-433, 1983.

[16] EMINENTI, M.; LAVE, G.; MANTEGAZZA, C. Ricci solitons: the equation point of view. **Manuscripta Mathematica**, Germany, v. 127, n. 3, p. 345-367, 2008.

[17] GONDIM, A. M. **Sólitons de Ricci Gradiente Shrinking**. 2020. 49f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2020. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/62542. Acesso em: 10 out. 2021.

[18] HAMILTON, R. S. Three-manifolds with positive Ricci curvature. **Journal of Differential Geometry**, United States, v. 17, n. 2, p. 255-306, 1982.

[19] IVEY, T. Ricci solitons on compact three-manifolds. **Proceedings of the American Mathematical Society**, United States, v. 122, n. 1, p. 241-245, 1994.

[20] KATO, T. Schrödinger operators with singular potentials. **Israel Journal of Mathematics**, Israel, v. 13, n. 1, p. 135-148, 1972.

[21] LEE, J. M. **Introduction to Riemannian manifolds**. 2. ed. Cham: Springer, 2018.

[22] LI, X.; NI, L.; WANG, K. Four-dimensional gradient shrinking solitons with positive isotropic curvature. **International Mathematics Research Notices**, United Kingdom, v. 2018, n. 3, p. 949-959, 2018.

[23] LÓPEZ, M. F.; GARCÍA, E. R. Rigidity of shrinking Ricci solitons. **Mathematische Zeitschrift**, Germany, v. 269, n. 1, p. 461-466, 2011.

[24] MUNTEANU, O.; SESUM, N. On gradient Ricci solitons. **Journal of Geometric Analysis**, United States, v. 23, n. 2, p. 539-561, 2013.

[25] NABER, A. Noncompact shrinking four solitons with nonnegative curvature. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Germany, v. 645, p. 125-153, 2010.

[26] NI, L.; WALLACH, N. On a classification of the gradient shrinking solitons. **Mathematical Research Letters**, United States, v. 15, n. 5, p. 941-955, 2008.

[27] PERELMAN, G. Ricci flow with surgery on three-manifolds. **arXiv.org**, 2003. Disponível em: https://arxiv.org/abs/math/0303109. Acesso em: 10 out. 2021.

[28] PETERSEN, P.; WYLIE, W. On the classification of gradient Ricci solitons. **Geometry & Topology**, United States, v. 14, n. 4, p. 2277-2300, 2010.

[29] SPIVAK, M. **O cálculo em Variedades**. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2003. (Coleção Clássicos da Matemática, v. 1).

[30] VIACLOVSKY, J. A. **Math 865, Topics in Riemannian Geometry**. 2007. Notas de Aula.

[31] WU, J.-Y.; WU, P.; WYLIE, W. Gradient shrinking Ricci solitons of half harmonic Weyl curvature. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, Germany, v. 57, n. 5, p. 1-15, 2019.

[32] ZHANG, Z.-H. Gradient shrinking solitons with vanishing Weyl tensor. **Pacific Journal of Mathematics**, United States, v. 242, n. 1, p. 189-200, 2009.

[33] ZHANG, Z. A gap theorem of four-dimensional gradient shrinking solitons. **Communications in Analysis and Geometry**, United States, v. 28, n. 3, p. 729-742, 2016.