



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA FÍSICA**

JULLIANA RODRIGUES MARTINS

**A AÇÃO ESTACIONÁRIA COMO EIXO UNIFICADOR DO ENSINO DE FÍSICA
NO ENSINO MÉDIO**

FORTALEZA

2025

JULLIANA RODRIGUES MARTINS

A AÇÃO ESTACIONÁRIA COMO EIXO UNIFICADOR DO ENSINO DE FÍSICA NO
ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Saulo Davi Soares e Reis

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M343a Martins, Julliana Rodrigues.
A Ação Estacionária como Eixo Unificador do Ensino de Física no Ensino Médio / Julliana Rodrigues Martins. – 2025.
60 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Curso de Física, Fortaleza, 2025.
Orientação: Prof. Dr. Saulo Davi Soares e Reis.

1. Princípio de Ação Estacionária. 2. Visão Unificada. 3. Ensino Médio. I. Título.

CDD 530

JULLIANA RODRIGUES MARTINS

A AÇÃO ESTACIONÁRIA COMO EIXO UNIFICADOR DO ENSINO DE FÍSICA NO
ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao
Curso de Graduação em Física do Centro de
Ciências da Universidade Federal do Ceará, como
requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado
em Física.

Aprovada em: 25/07/2025

Prof. Dr. Saulo Davi Soares e Reis (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Carlos William de Araujo Paschoal
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Edson Araújo Soares
Universidade Federal do Ceará (UFC)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos os meus amigos pela companhia e companheirismo durante essa jornada: Taynara, Emanuel, Evan, Breno Henrique, Carlos Breno, Wallace e tantos outros, obrigada.

Também estendo meus agradecimentos a meus amigos mais distantes: Leticia, Diego, Ian e Michael.

Agradeço a todos os professores com que tive a oportunidade de aprender um pouco mais a cada dia. Em especial à Saulo Davi pela paciência e orientações.

Por fim, agradeço a minha querida irmã Elloisa, por tudo.

“I recognize the lion by its claw”

Para Newton, de Bernoulli.

RESUMO

Esse trabalho tem como objetivo definir uma abordagem para o uso do princípio de ação estacionária no ensino médio. A metodologia proposta tanto é capaz de introduzir, quanto consolidar conceitos a depender do nível da turma em que se aplica, ao mesmo tempo em que cria uma visão unificada de diferentes áreas da física. Seguindo o extenso desenvolvimento histórico acerca do princípio de ação estacionária, esse trabalho guia o leitor durante cada desdobramento que ocasionou ao princípio como se conhece hoje. Também se explora o princípio de ação estacionária de forma quantitativa, analisando e desenvolvendo todos os cálculos necessários para a melhor compreensão de cada passo. A metodologia adotada na sequência didática consiste em aulas práticas, tendo, em todas as etapas, experimentos e simulações com objetivos e instruções claras que garantem a fluidez da aplicação da sequência didática proposta. A sequência didática possui linguagem simples e não se utiliza de qualquer tipo de cálculo que alunos de primeiro ano de ensino médio não teriam familiaridade.

Palavras-chave: princípio de ação estacionária; visão unificada; ensino médio.

ABSTRACT

This work aims to define an approach for the use of the principle of stationary action in high school education. The proposed methodology is capable of both introducing and consolidating concepts, depending on the level of the class in which it is applied, while also creating a unified view of different areas of physics. This work follows the extensive historical development of the principle of stationary action, guiding the reader through each unfolding that led to the principle as it is known today. It also explores the principle in a quantitative way, analyzing and developing all the necessary calculations to enhance understanding of each step. The methodology adopted in the didactic sequence consists of practical lessons, including experiments and simulations in all stages, with clear objectives and instructions that ensure the smooth implementation of the proposed teaching sequence. The didactic sequence uses simple language and does not involve any type of calculation unfamiliar to first-year high school students.

Keywords: principle of stationary action; unified view; high school education.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	ANTECEDENTES E HISTÓRIA: O PRINCÍPIO DE MÍNIMA AÇÃO	12
2.1	Rainha Dido e o problema isoperimétrico	12
2.2	Heron de Alexandria e a lei da reflexão	14
2.3	Galileo e a curva de descida mais rápida	15
2.4	A curvatura dos raios de luz e o princípio da minimização de Fermat	20
2.4.1	<i>Método de máximos e mínimos de Fermat</i>	23
2.5	O desafio de Bernoulli	28
2.6	O princípio de mínima ação de Maupertuis	29
2.7	Euler e o método de máximos e mínimos	31
2.7.1	<i>Derivação de Euler das órbitas de Kepler a partir do princípio da menor ação</i>	34
3	A EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE	38
3.1	Hamilton e o princípio de ação estacionária	42
4	METODOLOGIA	46
4.1	Etapa 1: O experimento da curva de descida mais rápida	46
4.2	Etapa 2: Energia cinética, energia potencial e conservação de energia	47
4.3	Etapa 3: Ação de forma qualitativa	52
4.4	Etapa 4: O princípio de Fermat	53
4.5	Etapa 5: Órbitas planetárias	55
4.6	Etapa 6: Conclusão	56
5	CONCLUSÃO	57
	REFERÊNCIAS	58

1 INTRODUÇÃO

Gostaria de começar o estudo da mecânica newtoniana usando NENHUM vetor e NENHUM $F = ma$? Que tal começar a mecânica quântica sem NENHUM número complexo e NENHUMA equação de Schrödinger? Você e seus alunos gostariam de explorar a relatividade geral de forma profunda e ampla sem NENHUM tensor e NENHUMA equação de campo? (Taylor, 2003).

É assim que Edwin Taylor inicia seu editorial de convidado “A Call to Action” na *American Journal of Physics* publicado em 2003. Na publicação, Taylor incita a uma abordagem diferente do tradicional quanto ao ensino de física, onde o princípio de mínima ação seria ensinado de forma introdutória, antes mesmo da mecânica newtoniana. Taylor argumenta que os movimentos das partículas descritos pela mecânica newtoniana, mecânica quântica e relatividade geral podem ser unificados em “três breves comandos da Natureza que acabam sendo variações do mesmo comando” (Taylor, 2003). Em seguida ele apresenta os três comandos, que devem ser verdadeiros da pedra ao elétron:

Para a pedra que se move com velocidade não relativística em uma região de pequena curvatura do espaço-tempo, a Natureza grita: **Siga o caminho de menor ação!**

Para a pedra que se move com qualquer velocidade possível em uma região de qualquer curvatura finita do espaço-tempo, a Natureza grita: **Siga o caminho do envelhecimento máximo!**

Para o elétron, a Natureza grita: **Explore todos os caminhos** (Taylor, 2003).

A partir de então ele passa a examinar cada comando individualmente, citando nomes como Feynman, Max Jammer, Thomas A. Moore, Freeman J. Dyson e William Rowan Hamilton. Ele então conclui questionando o quanto o princípio de mínima ação poderia ser mais explorado entre o primeiro e segundo ano do curso de graduação. Ele cita alguns livros didáticos que já continham abordagens semelhantes ao que estava propondo e argumenta: “Esses tratamentos fornecem provas de existência para nos guiar enquanto desenvolvemos nossa própria narrativa para o primeiro ano da graduação em física”.

Taylor finaliza seu editorial dizendo: “O Princípio da Mínima Ação é simples, potente e fundamental. Ele abrange a física clássica e contemporânea e introduz conceitos profundos e centrais para a pesquisa atual. Agora é a hora de agir!”.

Lachlan P. McGinness e Craig M. Savage na Universidade Nacional da Austrália aplicaram o modelo sugerido por Taylor. No artigo *Action Physics* publicado em 2016 os autores mostram os resultados obtidos da implementação desse método. O curso “Action

Physics” (física da ação, em português) foi denominado dessa forma por ser uma unificação do ensino da física quântica, clássica e relativística em torno do princípio da ação estacionária.

Na Universidade Nacional da Austrália o curso foi implementado pela primeira vez em 2006 e 2007 junto da disciplina de Física 2, tendo sido ensinado novamente em 2013 como disciplina optativa para uma turma reduzida (27 alunos). E em 2014 para uma turma de 110 alunos, que a turma proveniente aos resultados mostrados no artigo. Dos 110 alunos da turma de 2014, 93 responderam a um formulário de pesquisa de opinião ao final do curso, cujo principal objetivo era avaliar a percepção dos estudantes em relação a dificuldade, necessidade e aproveitamento pessoal deste novo módulo. Em suma, a pesquisa apontou que 96% dos estudantes concordam que o módulo deveria ser incluído na disciplina de Física 2 nos anos seguintes, e 69% dos estudantes responderam positivamente quando perguntado se estudar a física da ação melhorou sua compreensão sobre física.

Em seu editorial, Taylor também menciona a relevância da ‘teoria quântica de soma sobre caminhos’ de Feynman no desenvolvimento do seu modelo de ensino (Taylor, 2003). Taylor chegou a publicar alguns anos antes, em 1997, o artigo “Teaching Feynman’s sum-over-paths quantum theory” (“Ensinando a teoria quântica da soma de caminhos de Feynman”, em português). Nessa mesma linha de ensino, em 2017, Massimiliano Malgieri publica “Test on the effectiveness of the sum over paths approach in favoring the construction of an integrated knowledge of quantum physics in high school”¹, onde num extenso e metodológico artigo ele compartilha os resultados e desafios ao implementar uma introdução física quântica introdutória, baseada na abordagem de soma de caminhos de Feynman, numa escola de ensino médio na Itália. Recomendo fortemente a leitura completa do artigo, mas em intuito de não me estender demais no assunto, posso dizer de forma resumida que apesar dos desafios, o resultado geral da pesquisa de Malgieri foi extremamente positiva.

E é com base nos artigos e estudos acima que questiono: e se pudemos desenvolver o Princípio de Ação Estacionária no ensino médio? Até onde conseguiríamos expandir ou introduzir a partir do princípio? Quais seriam os desafios, e quais seriam as vantagens? Bem, para tanto, antes de tudo, eu gostaria de percorrer toda a história acerca do princípio de ação estacionária, como séculos e mais séculos de pesquisas e brilhantes cientistas transformam fagulhas em fogueiras pelas mãos de Maupertuis e depois, pelas mãos de Euler e Lagrange. E é isso que faremos nos próximos capítulos.

¹ Tradução: teste sobre a eficácia da abordagem da soma de caminhos em favorecer a construção de um conhecimento integrado de física quântica no ensino médio

2 ANTECEDENTES E HISTÓRIA: O PRINCÍPIO DE MÍNIMA AÇÃO

Em grandes descobertas científicas há sempre um rastro do raciocínio que levou aquele resultado, há uma trilha que aquele autor seguiu que o guiou até aquele. Às vezes, além disso, conseguimos determinar quais outros trabalhos e cientistas influenciaram de alguma forma em determinada culminância. No caso do princípio de ação estacionária podemos navegar por séculos e mais séculos de pesquisas e cientistas que exploraram um pouco a pouco os tópicos que nos levariam a visão que temos hoje.

Muito antes de nos referirmos a esse princípio como "princípio de *ação estacionária*" esse princípio era referido como "princípio de *mínima ação*" e tudo começou a partir de questionamentos sobre máximos e mínimos e como eles se comportam ou não na natureza.

2.1 Rainha Dido e o problema isoperimétrico

Eles navegaram até o local onde hoje você verá
muros de pedra cada vez mais altos e a cidadela
de Cartago, a nova cidade. Compraram a terra,
chamada Drumskin, com o acordo feito
um terreno que puderam cercar com a pele de um touro.

O poeta romano Virgílio traz na sutileza de seu poema 'A Eneida' (Virgílio, 19 a.C.), um problema. Considere um laço de linha qualquer, como se pode distorcer esse laço de forma a envolver o máximo de área possível?

Os versos citados acima contam a lenda da Rainha Dido e como ela precisou fugir de casa após seu irmão Pigmalião matar seu marido e tramar contra ela. Na história, ela consegue chegar a salvo na costa norte da África, supostamente em Birsá, onde é bem recebida e é permitida a governar qualquer área, desde que conseguisse cercá-la usando somente a pele de um touro. Ela então aceita o desafio e começa o maciço trabalho de cortar o couro nas tiras mais finas que suas mãos permitissem, sempre atando uma fita a outra. Sua estratégia foi sábia, e ela conseguiu com o que tinha e podia cercar a maior área que era possível, formando um semicírculo com seu laço.

A lenda da Rainha Dido torna-se então a partir desse ponto o emblema do problema isoperimétrico: dado um perímetro fixo, determine a forma da curva fechada e plana que envolva o máximo de área possível. A resposta desse problema é simples: um círculo.

Aristóteles em seu livro *De Caelo* intuitivamente explora esse assunto (Aristóteles, 350 a.C./1922, Livro II):

Novamente, se o movimento dos céus é a medida de todo movimento... e o movimento mínimo é o mais rápido, então, claramente, o movimento dos céus deve ser o mais rápido de todos os movimentos. Ora, das linhas que retornam sobre si mesmas, a linha que delimita o círculo é a mais curta; e o movimento mais rápido é aquele que segue a linha mais curta.

Porém, se supunha até então que a área de uma figura era determinada inteiramente por seu perímetro (Gandz, 1940). Tucídides que era um grande historiador estimou o tamanho da Sicília a partir do tempo de sua circunavegação, proporcional ao perímetro (Tucídides, 431 a.C., Livro VI):

Pois a viagem ao redor da Sicília em um navio mercante não dura muito menos que oito dias; e, ainda assim, por maior que seja a ilha, há apenas duas milhas de mar para impedi-la de ser continente.

Ao que Galileu, muito tempo depois, respondeu à confusão afirmando (Galilei, 1638/1974, p. 61):

Pessoas que não têm conhecimento de geometria... cometem o erro de falar de superfícies; pois ao determinar o tamanho de diferentes cidades, muitas vezes imaginam que tudo é conhecido quando os comprimentos [quantitã] dos limites da cidade são dados, sem saber que um limite pode ser igual ao outro, enquanto a área contida em um pode ser muito maior do que a do outro.

O problema isoperimétrico foi resolvido pelo matemático grego Zenodoro (ca. 200 a.C.– ca. 140 a.C.). Embora seu trabalho tenha sido perdido, conhecemos sua demonstração por meio de Pappus e Teão de Alexandria (Pappus, 1888; Heath, 1921). Zenodoro começa moldando o laço da Rainha Dido em linhas retas de diferentes comprimentos para formar um polígono irregular arbitrário. E então ele mostra que se pode aumentar a área delimitada por esse polígono alterando os comprimentos dos lados – sem alterar seu perímetro ou o número de lados – até que todos sejam iguais.

Em outras palavras, ele mostra que, de todos os polígonos de um dado perímetro e um dado número de lados, o polígono equilátero encerra a maior área. No entanto, mesmo se fixarmos o perímetro e o número de lados, ainda há um número infinito de polígonos equiláteros possíveis. Zenodoro mostra que, desse conjunto infinito de equiláteros, o equilátero encerra a maior área. E para a parte final da prova: se começarmos com um polígono regular e aumentarmos seu número de lados (mantendo o perímetro fixo), o novo polígono abrange uma área maior. E isso nos leva naturalmente ao círculo, que podemos considerar um polígono regular com um número infinito de lados.

O matemático grego Zenodoro (c. 200 a.C. – c. 140 a.C.) foi o responsável pela solução do problema isoperimétrico. Para fazê-lo, Zenodoro começou moldando o laço usado pela rainha de Dido em linhas retas com comprimentos diversos entre si, formando um polígono irregular arbitrário. Dessa forma ele demonstra que é possível aumentar a área obtida alterando os comprimentos dos lados desse polígono, sem que o perímetro ou o número de lados sofra qualquer alteração. Ou seja, Zenodoro demonstrou que todos os polígonos de um dado perímetro e um dado número de lados, o polígono equilátero é o que engloba a maior área. Note que mesmo fixando o perímetro e o número de lados, ainda existe uma quantidade próxima do infinito de polígonos equiláteros possíveis.

Para isso, Zenodoro mostra que desse conjunto de infinitos equiláteros, o que engloba a maior área é o equiangular. Finalmente, a partir de um polígono regular se pode gradualmente aumentar a quantidade de lados (mantendo o perímetro fixo) e esse novo polígono abrangerá então a maior área. Naturalmente, se aumentarmos a quantidade de lados o suficiente, essa forma geométrica será agora um círculo.

Embora o trabalho de Zenodoro tenha lamentavelmente sido perdido ao longo dos séculos, é possível obter menções de suas demonstrações através de Pappus e Téon de Alexandria (Pappus, 1888; Heath, 1921).

2.2 Heron de Alexandria e a lei da reflexão

Muitos anos após Zenodoro, física e princípios de minimização finalmente se encontram pela primeira vez graças a Heron de Alexandria (c. 10 d.C. – c. 70 d.C.). Em seu trabalho *Catoptrics*, Heron apresenta provas de que a lei da reflexão dos raios de luz em um espelho plano decorre da minimização do tempo de percurso (Heronis, 1976). Em suas palavras:

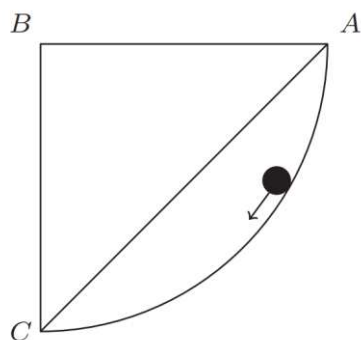
O que se move com velocidade constante segue uma linha reta. Um exemplo é uma flecha que vemos disparada do arco. Pois, devido à força de movimento para a frente, o corpo em movimento se esforça para seguir o caminho mais curto, visto que não pode se dar ao luxo de um movimento mais lento, ou seja, um caminho mais longo. A força em movimento não permite tal atraso. Assim, o corpo tenta seguir o caminho mais curto devido à sua velocidade, mas entre os mesmos pontos finais a mais curta de todas as linhas é a reta.²

Muitos gregos antes de Heron já tinham sólido domínio das leis da reflexão. Euclides, por exemplo, em sua publicação *Óptica*, afirma que a luz se propaga em linhas retas e que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. O que destaca Heron entre seus pares é que Heron foi o primeiro a derivar a lei da reflexão a partir de um princípio de

² Traduzido originalmente para inglês por Pedersen (1993).

Galileu afirma que, para partículas caindo entre dois pontos em um plano vertical, "o movimento mais rápido de todos, de um ponto a outro, não é através da linha mais curta de todas, que seria a reta AC. Mas através do arco circular " (Figura 2.2), (Galilei, 1638/1974, p. 212). O clássico ‘problema da braquistócrona’ é descendente da preposição 36 de Galileu. A braquistócrona é uma cicloide, diferente do arco de um círculo estudado por Galileu e é considerada a curva de descida mais rápida entre todas as curvas possíveis conectando dois pontos. Em estudos, Galileu compara o tempo de queda entre a reta AC (Figura 2.2) e a curva do arco de um círculo, seus estudos não abrangem todas as curvas possíveis e não há intenção de fazê-lo (em *Duas Novas Ciências*), (ROJO; BLOCH, 2018.). Galileu encontra essa curva por meio de uma sequência de lemas oriundos da geometria euclidiana e seu postulado da aceleração uniforme. Galileu justifica seu postulado no que seria o princípio da minimização num estágio ainda especulatório.

Figura 2.2 - A descida de uma partícula de A a C é mais rápida através do arco do círculo do que através da linha reta.



Fonte: Rojo; Bloch, 2018.

Galileu apresenta também ser em seu *Duas Novas Ciências* uma ideia sobre os corpos com aceleração uniforme. Claro, já se sabia antes de Galileu que "a natureza emprega um certo tipo de aceleração para fazer objetos pesados descerem" (Galileu, 1638/1974, p. 197), mas não se tinha clareza em relação a qual tipo de aceleração isso se relacionava. Galileu diz então que através de experimentos conclui-se que "a intensificação da velocidade se faz em função da extensão do tempo", e que a distância percorrida aumenta com o quadrado do tempo. Galileu não se utiliza do termo “uniforme”, ao invés disso ele fala sobre aceleração “natural” e justifica sua escolha através da metafísica:

Fomos levados pela mão à investigação do movimento naturalmente acelerado pela consideração do costume e procedimento da própria Natureza em todas as suas outras obras, na execução das quais ela habitualmente emprega os

primeiros, mais simples e mais fáceis meios. Assim, quando considero que uma pedra, caindo do repouso a alguma altura, adquire sucessivamente novos incrementos de velocidade, por que não deveria acreditar que essas adições são feitas pela regra mais simples e mais evidente? (Galileu, 1638/1974, pp. 153–154).

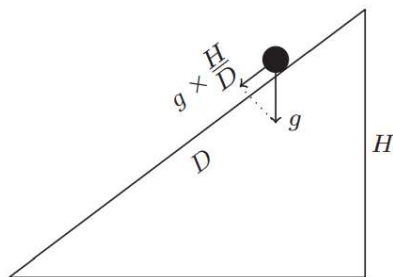
Em seus estudos sobre aceleração uniforme em planos inclinados, Galileu em um de seus primeiros postulados diz que "os graus de velocidade adquiridos pelo mesmo móvel sobre diferentes inclinações de planos são iguais sempre que as alturas desses planos forem iguais". Ou seja, a velocidade adquirida ao deslizar sob o plano inclinado varia com o ângulo de inclinação deste plano. Galileu ainda acrescenta uma seção expansão a este postulado, escrito durante os anos 1633 e 1635, e publicado em 1638, quando Galileu já estava cego e em prisão domiciliar desde 1633 devido a Inquisição. Nesta seção Galileu acrescenta o que hoje chamamos de elemento de aceleração ao longo de um plano. Galileu não aborda o assunto em termos algébricos, mas podemos fazê-lo, e dessa forma a distância d percorrida ao longo de um plano inclinado é

$$d = \frac{1}{2} \left(g \times \frac{H}{D} \right) t^2 \quad (2.1)$$

Onde $g \times (H/D)$ é a componente de aceleração ao longo do plano (ver Figura 2.3).

A única alteração “moderna” feita aqui ao trabalho de Galileu é a adição do termo g e o fator $\frac{1}{2}$. Galileu diz que $d \propto t^2$ e esta constante de proporcionalidade é também proporcional a H/D .

Figura 2.3 - A velocidade final de uma partícula caindo do repouso em um plano inclinado é proporcional a D/\sqrt{H}



Fonte: Rojo; Bloch, 2018.

O tempo necessário para percorrer a o plano inclinado é

$$t_{total} = \sqrt{\frac{2}{g}} \times \frac{D}{\sqrt{H}} \quad (2.2)$$

Sendo assim, a velocidade final $v_{final} = gt_{total}$ é

$$v_{final} = \left(g \times \frac{H}{D}\right) \times t_{total}$$

$$v_{final} = \sqrt{2gH} \quad (2.3)$$

Nota-se que v_{final} é completamente independente de D .

A equação 2.3 sumariza o segundo postulado de Galileu sobre o movimento acelerado. Na Proposição I, Teorema I, Galileu afirma que o tempo t preciso para percorrer uma dada distância D em movimento uniformemente acelerado é igual ao tempo preciso para percorrer a mesma distância, mas mantendo uma velocidade constante tal qual a velocidade média obtida entre a velocidade inicial v_i e a final v_f . Para demonstrar isso Galileu o faz geometricamente, partindo do repouso ($v_i = 0$), no entanto, mesmo que a velocidade inicial não fosse igual a zero o resultado se manteria:

$$t = \frac{D}{v_{av}} \quad (2.4)$$

onde $v_{med} = (v_i + v_f)/2$.

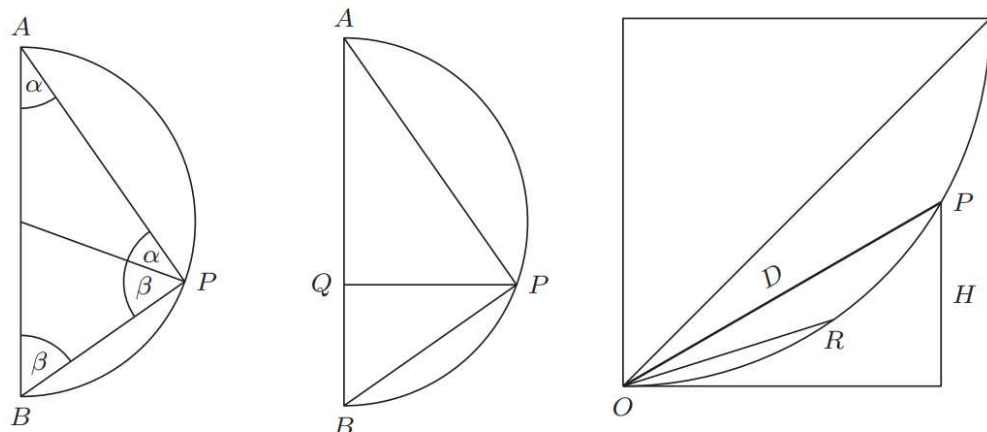
Voltando agora a equação 2.2, a relação geométrica $D/\sqrt{H} = constante$ aparece novamente em cordas de círculos (Figura 2.4) o que guia Galileu à sua “leis das cordas”: para um arco de círculo “os tempos de descida através de todas as cordas dos terminais P e R” (ver o arranjo a direita da Figura 2.4) “são iguais”.

A partir disso Galileu então compara diferentes trajetórias: uma sendo um caminho direto e um caminho sofrendo uma interrupção. Uma partícula saindo do ponto D em repouso irá levar o mesmo tempo para atingir o ponto F ou B (pela lei das cordas). Agora, a partícula em B move-se mais rápido que a partícula em F (pela equação 2.3). A velocidade final em C é a mesma para ambos os caminhos ³, mas a velocidade média para o caminho BC é maior do

³ Galileu demonstra isso estendendo a trajetória CB até C A. Partículas partindo de D e A em repouso chegam a B com a mesma velocidade (elas caem da mesma altura). A velocidade em C a partir das trajetórias DBC e AC é, portanto, a mesma. E como os planos AC e DC caem da mesma altura, as velocidades finais em C são independentes das trajetórias percorridas.

que a velocidade média para o caminho FC. Além disso⁴, o tempo de viagem necessário para percorrer o trajeto FC é maior do que para BC. Ou seja, ao comparar as diferenças entre os caminhos, sendo um caminho direto e outro caminho "interrompido", o caminho interrompido é o mais rápido.

Figura 2.4 - 2 Lei das cordas de Galileu. Esquerda: Teorema de Tales: Se A , B e P são pontos em um círculo, e AB seu diâmetro, o ângulo APB (igual a $\alpha + \beta$) é um ângulo reto. Centro: Por semelhança dos triângulos ABP e PBQ , $PB/BQ = AB/PB$: $(PB)^2/BQ$ é constante para um círculo, e igual ao diâmetro AB . Esta relação geométrica é a mesma que aparece no tempo de queda em um plano inclinado: Equação 2.3. Direita: Lei das cordas de Galileu: Para todos os pontos no arco do círculo, D/\sqrt{H} é constante, e o tempo de descida a partir do repouso é o mesmo para todos os planos inclinados.

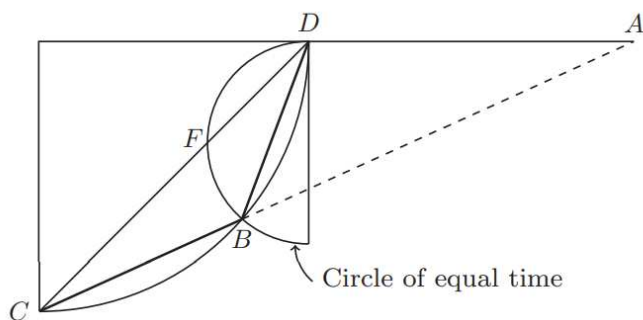


Fonte: Rojo; Bloch, 2018.

A partir dos resultados anteriores, Galileu considera então a queda de uma partícula ao longo de um caminho poligonal de cinco lados e considera adicionar ainda mais lados deste polígono. E assim Galileu se aproxima do arco de um círculo que fará o tempo de descida diminuir em relação aos outros caminhos. Curiosamente, Galileu foi provavelmente inspirado pelo problema isoperimétrico, em certas passagens do Primeiro Dia De Duas Novas Ciências ele debate à prova de Zenodoro e teria visto “a prova disso com particular satisfação” (Galilei, 1638/1974, p. 62). Apesar disso, Galileu não mostra nenhuma prova de que uma trajetória poligonal com mais lados resulta em uma trajetória mais rápida do que o arco de um círculo “parece que se pode deduzir que o movimento mais rápido é [...] ao longo do arco circular”.

⁴ Galileu mostra essa desigualdade com um argumento detalhado no [Terceiro] Lema da Proposição 35. Galileu não numerou os lemas, mas seguimos a ordem de Drake.

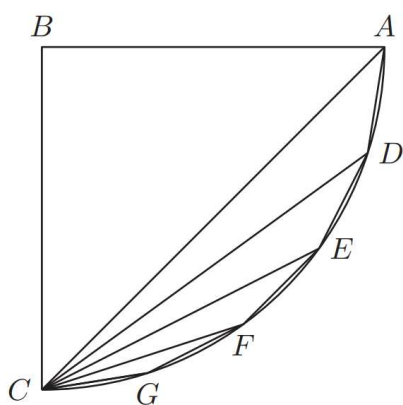
Figura 2.5 - Adaptada de "Duas Novas Ciências" de Galileu. O ponto B está no arco de círculo CBD . Uma partícula partindo de D em repouso cai mais rápido pela trajetória interrompida $DB + BC$ do que pela trajetória direta e mais curta DC .



Fonte: Rojo; Bloch, 2018.

É então adicionado mais planos, como mostra a Figura 2.5, e argumenta usando a lei das cordas para decompor o plano DC na trajetória mais rápida $DE + EC$. Porém a partícula não parte do repouso em D (já que ela viria do ponto A , saindo de lá em repouso) logo, a lei das cordas não se aplica (Erlichson, 1998). Para provar de forma completa e precisa esse problema Galileu necessitaria de técnicas que estavam além das ferramentas matemáticas disponíveis a seu dispor, mas que foram aperfeiçoadas nas décadas seguintes.

Figura 2.6 - Descida em um círculo, das Duas Novas Ciências de Galileu.



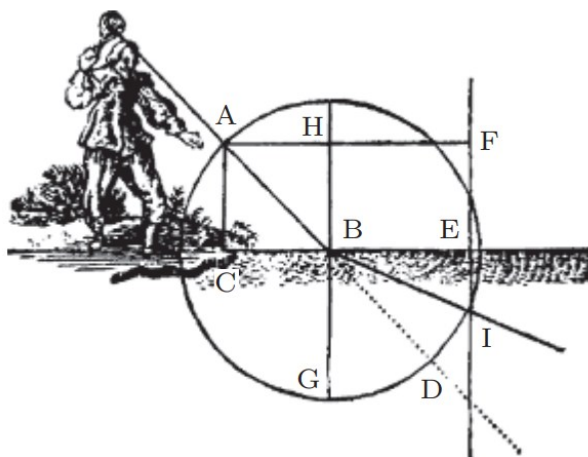
Fonte: Rojo; Bloch, 2018.

2.4 A curvatura dos raios de luz e o princípio da minimização de Fermat

Existem algumas formas diferentes de um raio de luz se distorcer em relação a uma linha reta perfeita. Sabemos que a reflexão em um espelho faz um raio de luz curvar-se, mas, ao entrar em um meio como água ou vidro, o caminho desse raio de luz também se curva. A

refração da luz foi estudada também pelos gregos antigos. O astrônomo Ptolomeu (c. 100 d.C. – c. 170 d.C.), por exemplo, dizia que os raios de luz visíveis “podem ser alterados de duas maneiras: (1) por reflexão, ou seja, o rebote de objetos, chamados espelhos, que não permitem a penetração, e (2) por curvatura no caso de meios que permitem a penetração” (Cohen, 1965). Ptolomeu incluiu em seu trabalho tabelas da mudança de ângulo de um raio de luz passando de um meio a outro, como do ar para o vidro e do ar para a água (Mark Smith, 1982), entretanto, Ptolomeu partia da pressuposição errônea de que o ângulo de refração era proporcional ao ângulo de incidência. Somente no século XVII, com as publicações de Willebrord Snell em 1621 e por Descartes (1637) em seu *Dioptrique*, que a lei da refração foi corrigida para sua verdadeira forma.

Figura 2.7 - Derivação da lei da refração de Descartes.



Fonte: Reproduzido de Descartes (1637).

Não são os ângulos de refração e incidência que são iguais, mas sim os senos desses ângulos medidos em relação a normal ao plano de incidência que são proporcionais. Descartes mostra que é a partir de um modelo mecânico, tratando a luz como uma partícula que muda de velocidade ao tramitar de um meio a outro, que surgiu essa lei. Ele usa como analogia a inflexão de uma bola de tênis ao entrar na água (Figura 2.7). A partir de um modelo de partículas o problema da refração se torna algo como o salto de uma bola sob uma superfície: a parede inverte a direção da velocidade perpendicular em relação a parede enquanto que a componente paralela permanece igual. Descartes então assume que o mesmo aconteceria para refração, na sua analogia com a bola de tênis, conforme a bola penetra a superfície, a componente da velocidade paralela ao plano da água não muda. Imagine que a bola de tênis muda sua velocidade de v_{ar} para $v_{água}$ à medida que ela muda de um meio para outro, ultrapassando o

plano BE (Figura 2.7). Os planos BI e AB possuem o mesmo comprimento então o tempo dos percursos t_{ar} e $t_{\acute{a}gua}$ para esses percursos são diferentes e devem satisfazer a equação:

$$v_{\acute{a}gua} \times t_{\acute{a}gua} = BI = v_{ar} \times t_{ar} = AB \quad (2.5)$$

Se a projeção das velocidades paralelas à superfície da água, $v_{paralela}$, for constante, temos

$$AH = v_{paralela} \times t_{ar} \quad (2.6a)$$

$$HF = v_{paralela} \times t_{\acute{a}gua} \quad (2.6b)$$

Assim, Descartes obtém a lei “correta”:

$$\frac{AH}{HF} = \frac{\sin \angle ABH}{\sin \angle GBI} = \frac{t_{ar}}{t_{\acute{a}gua}} = \frac{v_{\acute{a}gua}}{v_{ar}} \quad (2.7)$$

que é equivalente a:

$$v_{\acute{a}gua} \sin \theta_{\acute{a}gua} = v_{ar} \sin \theta_{ar} \quad (2.8)$$

Descartes chega a definição correta da lei da refração a partir de que a razão entre os senos dos ângulos é constante. Porém, experimentos mostram que ao ir de um meio a outro os raios de luz curvam-se em direção a normal, não para longe dela como a Figura 2.7 sugere, a reta AH deve ser *maior* que a reta HF. Da forma como está, o exemplo sugere que a partícula estudada na Figura 2.7 *ganha* velocidade ao atravessar o plano BE. Para estar em conformidade com os experimentos realizados, Descartes precisa então assumir que assim como o som, a luz se propagaria mais rápido na água (ou qualquer outro meio denso), o que não leva em consideração o comportamento da luz em diferentes densidades do meio de propagação.

Indo numa direção completamente oposta a de Descartes, Pierre de Fermat se opõe ao argumento de Descartes de que a luz viajaria mais rápido em meios densos. Enquanto Descartes tratava ótica como um problema mecânico, Fermat tinha outras visões, que se assemelhavam às soluções de Heron de Alexandria e tinham a filosofia de Aristóteles de que a natureza não faz nada em vão.

Sete anos após a morte de Descartes, em 1657, Fermat recebe em seu correio matinal a tese *La lumière* de Marín Cureau de la Chambre (que hoje é conhecido por sua atuação na medicina). Marín discute a leis da refração e logo após diz: “Vemos, portanto, por todo esse raciocínio que a igualdade dos ângulos na reflexão se faz ao longo das linhas mais curtas, e que

isso não é algo particular da Luz, visto que a natureza observa a mesma ordem em todos os movimentos que ela causa” (De la Chambre, 1662). Não muito depois ele ainda acrescenta: “se a natureza faz seus movimentos pelas linhas mais curtas, seria necessário que eles também fossem feitos em refração”. A isso, Fermat concorda dizendo “O princípio da física é que a Natureza realiza seus movimentos pelos caminhos mais simples” (Fermat, 1657/1894). Alguns anos depois, em 1662 Fermat acrescenta:

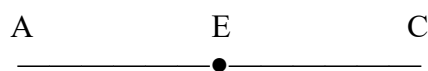
Não há nada tão provável ou aparente quanto a suposição de que a Natureza sempre age pelos meios mais fáceis, ou seja, ao longo das linhas mais curtas quando o tempo não é uma consideração, ou em qualquer caso, no menor tempo possível.

Em sua publicação de 1970, Roshdi Rashed aponta que o astrônomo Ibn al-Haytham já utilizava o princípio da “maneira mais simples” para explicar a refração (Rashed, 1970). Ibn al-Haytham imaginava a luz como pequenas esferas rígidas que se movem em linha reta e se propagam em diferentes meios de acordo com sua densidade. Quanto mais denso o meio, maior a resistência à penetração da luz (Mark Smith, 2009). Dito isso, há evidências de que La Chambre conhecia o Livro de Óptica de Ibn al-Haytham na edição Risner ou na versão Witelos (ROJO; BLOCH, 2018).

Fermat então deduz a lei da refração minimizando o tempo de viagem do raio de luz desde seu ponto inicial ao final. E ele faz isso usando suas próprias recém criadas ferramentas matemáticas, o “pré cálculo”, ou *método de máximos e mínimos*.

1.4.1 Método de máximos e mínimos de Fermat

Em seus estudos sobre máximos e mínimos, Fermat explica seu método usando um exemplo simples: dada uma reta AC, encontre um E tal que AE x EC seja um máximo.



Analogamente, Fermat está resolvendo o “problema da isoperimétrico” para um retângulo com metade do perímetro AC. Denotando $AC = b$ e $AE = a$, onde o ponto a é o ponto a ser encontrado. O produto entre os dois segmentos de reta é $a(b - a) = ab - a^2$. Nesse ponto, Fermat altera o ponto a em uma pequena quantidade e fazendo com que o primeiro segmento seja agora $a + e$, e o segundo $b - a - e$. O produto desses dois novos segmentos fica: $b - a^2 + eb - 2ae - e^2$. A partir desse ponto Fermat introduz um conceito que ele emprestou

de Diophantus de Alexandria, cuja interpretação do mesmo foi tópico de questionamentos (Breger, 1994; Giusti, 2009).

Fermat iguala aproximadamente, ou torna adequado, os dois produtos:

$$eb - 2ae - e^2 \sim 0 \quad (2.9)$$

e agora isso é dividido por e

$$b - 2ae - e \sim 0 \quad (2.10)$$

Agora ele assume que variação e é tão pequena que se pode tomar como zero

$$a = \frac{b}{2}, \text{ ou } AE = EC \quad (2.11)$$

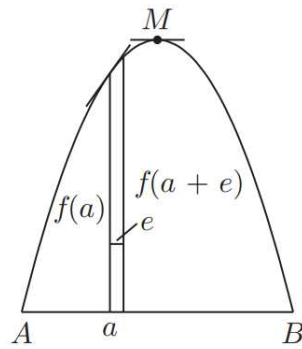
esse resultado expõe que o retângulo com a maior área por dado perímetro, é um quadrado.

O método de Fermat para encontrar o máximo de uma função $f(a)$ consiste em encontrar a tangente de uma função e identificar o ponto a , onde essa tangente se iguala a zero (veja Figura 2.8). O método criado por Fermat é muito próximo ao desenvolvido posteriormente por Newton e Leibniz. Inclusive, em correspondências enviadas por Newton, ele reconhece ter tomado como inspiração para seu próprio método “do modo como Fermat desenhava tangentes” e que ele apenas generalizou os resultados. Em termos mais contemporâneos de matemática, o método de Fermat se torna:

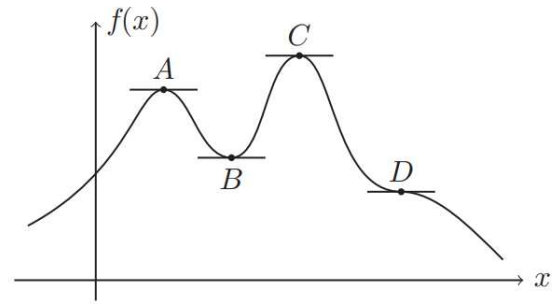
$$\frac{f(a + e) - f(a)}{e} \quad (2.12)$$

Sobre e tornar-se o termo constante: Fermat primeiro determina $f'(a)$ e depois iguala isso a zero para determinar o extremo da função. Embora Fermat nunca tenha falado diretamente como e sendo algo infinitesimal, ele conhecia esse conceito a partir de Galileo (Galilei, 1638/1974, p. 54), mas acreditasse que houvesse questões políticas e religiosas envolvendo a ausência de ditos termos (ROJO; BLOCH, 2018, p. 22).

Figura 2.8 - Método das tangentes de Fermat. Esquerda: A tangente a uma curva, ou a inclinação da curva, é dada por $[f(a + e) - f(a)]/e$ quando e é definido como zero. Em um máximo M , a tangente é zero. Direita: A tangente a uma curva é zero para pontos "estacionários": máximos como A ou C , mínimos como B , ou pontos como D que não são máximos nem mínimos.



Fonte: Rojo; Bloch, 2018.



Vários exemplos são exibidos por Fermat para demonstrar seu método, um destes inclui funções com raízes quadradas. Vamos agora aplicar o método de tangentes de Fermat para uma função $f(a) = \sqrt{a}$. Começando com o seguimento $\sqrt{a+e} - \sqrt{a}$, multiplicamos e dividimos por $\sqrt{a+e} - \sqrt{a}$ para obter:

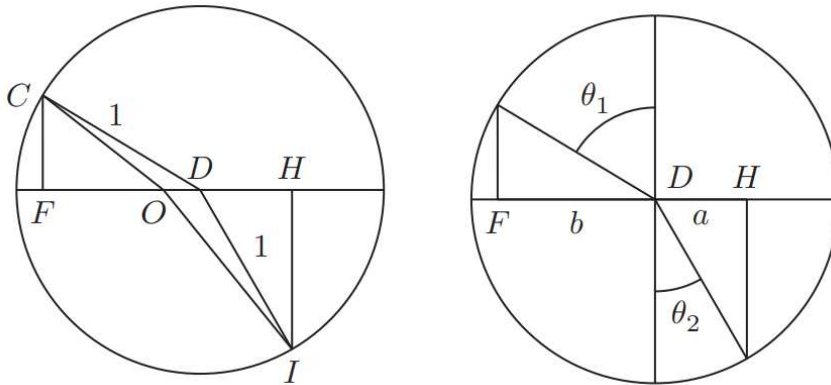
$$\begin{aligned} \sqrt{a+e} - \sqrt{a} &= (\sqrt{a+e} - \sqrt{a}) \times \frac{\sqrt{a+e} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+e} - \sqrt{a}} \\ &= \frac{e}{\sqrt{a+e} - \sqrt{a}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Novamente dividindo por e em seguida fazendo $e = 0$, temos uma tangente igual a $1/2 \sqrt{a}$ ou uma curva \sqrt{a} .

Em trocas de cartas entre Fermat e Cureau de la Chambre durante 1662, Fermat diz que sua derivação da lei da refração seria “longa e tediosa” e “envolve quatro retas por suas raízes quadradas” (ROJO; BLOCH, 2018, p. 22). Em sua publicação *Analyse pour les réfractons* Fermat indica de onde surgem tais raízes quadradas. Ele usa para isto uma figura muito semelhante a da analogia da bola de tênis de Descartes (Figura 2.7). Fermat coloca seus pontos inicial C e final I num círculo (Figura 2.9). E assim como na derivação de Descartes, o menor caminho passa pelo centro D do círculo, e que se desconhece é a relação entre os segmentos DH e FD . Para simplificação podemos tomar o raio do círculo $CD = DI = 1$, e usamos a notação de Fermat para $DH = a$, $DF = b$. Podemos denotar v_1 e v_2 como as velocidades nos meios acima e abaixo do plano FD , assim, o tempo gasto no menor percurso é

$$T_{min} = \frac{CD}{v_1} + \frac{DI}{v_2} \equiv \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \quad (2.14)$$

Figura 2.9 – De *Analyse pour les réfractions* de Fermat (à esquerda). À direita, indicamos os ângulos de incidência (θ_1) e refração (θ_2).



Fonte: Rojo; Bloch, 2018.

Fermat então considera a partir daqui algo que sumariamente faltou no trabalho de Descartes, a resistência em cada meio de propagação. Fermat faz isso de forma simples, ele inverte as velocidades para $1/v_1$ e $1/v_2$. Em termos atuais, o que Fermat considera como resistência, seria o que definimos como ‘índice de refração de cada meio’. Para aplicar seu método de máximos e mínimos, Fermat considera um caminho qualquer próximo ao verdadeiro COI , onde $OD = e$. O tempo de viagem desse outro percurso é

$$\begin{aligned}
 T_e &= \frac{CO}{v_1} + \frac{OI}{v_2} \\
 &= \frac{\sqrt{1 - 2eb + e^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{1 - 2eb + e^2}}{v_2}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Aqui se segue com a aplicação usual do método: igualamos $T_{min} = T_e$, dividimos por e , fazemos $e = 0$. Lamentavelmente, Fermat talvez realmente acreditasse que esse trabalho fosse tedioso, já que não disponibilizou nenhum de seus próprios cálculos em detalhes. Porém, graças a relativa simplicidade necessária, é possível tomar certas conclusões quanto a que caminho Fermat deve ter tomado.

A diferença entre os tempos de viagem é:

$$T_e - T_{min} = \frac{\sqrt{1 - 2eb + e^2} - 1}{v_1} + \frac{\sqrt{1 - 2eb + e^2} - 1}{v_2} \tag{2.16}$$

o que é equivalente a

$$T_e - T_{min} = \frac{1}{v_1} \frac{-2eb + e^2}{\sqrt{1 - 2eb + e^2} + 1} + \frac{1}{v_2} \frac{2eb + e^2}{\sqrt{1 + 2eb + e^2} + 1} \quad (2.17)$$

novamente, dividindo por e podemos depois fazer $e = 0$ e obter

$$\frac{T_e - T_{min}}{e} \sim -\frac{b}{v_1} + \frac{a}{v_2} = 0 \quad (2.18)$$

pela Figura 2.9: $b/a = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}$. Assim, temos:

$$\frac{1}{v_1} \sin \theta_1 = \frac{1}{v_2} \sin \theta_2 \quad (2.19)$$

A Equação 2.18 traz a mesma forma e a mesma dependência dos ângulos de incidência e refração que o resultado obtido por Descartes, mas no resultado de Fermat as velocidades se invertem. Se o método de Fermat for correto, implica que a velocidade da luz deve diminuir ao percorrer meios mais densos.

A metodologia de Fermat foi duramente criticada por Claude Clerselier, que era expert em ótica e inclusive editava os trabalhos de Descartes. Para Clerselier, o princípio que guiou Fermat “é meramente moral, e não física, que não é nem pode ser a causa de qualquer efeito natural” (Fermat, 1657/1894, p. 465). As objeções feitas por ele até eram plausíveis, não se tinha como saber em detalhes como ou por que a natureza escolheria um único caminho dentre infinitos outros entre um ponto inicial e final. E por que ela escolheria o tempo a ser minimizado dentre tantas outras variáveis? Clerselier defendia seu ponto de vista, assim como Descartes, mecanicista e cartesiano: a partir de uma direção inicial, um raio de luz continuaria se movendo em linha reta até que atinja uma superfície refratária, e aí, mudaria de direção. Para todas as calorosas críticas que recebeu, Fermat escreve uma carta um tanto zombeteira em 21 de maio de 1662 para Clerselier, em suas palavras (Sabra, 1981, p. 154):

Não pretendo, nem jamais pretendi, estar na confiança íntima da Natureza. Ela tem caminhos obscuros e ocultos que nunca me propus a penetrar. Eu apenas lhe teria oferecido um pouco de auxílio geométrico sobre o tema da refração, caso ela precisasse. Mas, já que o senhor me assegura, senhor, que ela pode administrar seus negócios sem isso e que se contenta em seguir o caminho que lhe foi prescrito pelo Sr. Descartes, entrego-lhe de bom grado minha suposta conquista da física; e estou satisfeito que o senhor me permita manter meu problema geométrico – puro e in abstracto, por meio do qual se pode encontrar o caminho de uma coisa se movendo através de dois meios diferentes e buscando completar seu movimento o mais rápido possível.

2.5 O desafio de Bernoulli

Dentre tantos questionamentos e estudos acerca de máximos e mínimos, uma conversa entre dois amigos que se tornou um desafio ganhou grande notoriedade ao final do século XVII. Em uma carta enviada a Gottfried Leibniz em junho de 1696, seu amigo John Bernoulli o provoca com o seguinte problema: “Dados dois pontos A e B em um plano vertical, encontre o caminho AMB pelo qual um ponto móvel M deve, em virtude de seu peso, cair de A para B no menor tempo possível” (Leibniz, 1962; Orio, 2009). Ao que Leibniz responde, cerca de uma semana depois, meio contrariado, meio fascinado. A solução enviada a Bernoulli é feita em forma de uma equação diferencial e de imediato propõe nomeá-la tachystoptota (curva de descida mais rápida). De forma nada surpreendente, Bernoulli responde a Leibniz que sua solução corresponde, na verdade, à cicloide, e propõe nomeá-la braquistócrona. Como vimos na seção 2.3 deste capítulo, a cicloide também foi objeto de estudos de Galileu que a via “como uma curva muito graciosa para ser adaptada aos arcos de uma ponte” (Drake, 1978, p. 406), e logo mais em 1673 foi provada por Huygens como correspondente ao pêndulo isócrona (Huygens, 1673).

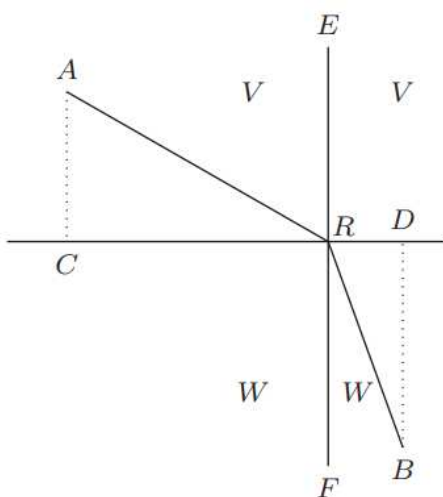
Não bastando a aprovação de somente Leibniz, Bernoulli envia seu desafio a Rudolf Christian von Bodenhausen, para seu próprio irmão Jacob Bernoulli e Pierre Varignon. Ainda em suas respostas a Leibniz, John Bernoulli menciona duas soluções para esse problema. A primeira delas sendo similar a resposta de Leibniz. A segunda utiliza um mapeamento do caminho mais rápido para o problema de determinar a trajetória de um raio de luz propagando-se com um índice de refração continuamente variável em meio. Esse mesmo mapeamento foi usado em XIX por William Rowan Hamilton, e no século XX por Louis de Broglie e Erwin Schrödinger na formulação da mecânica ondulatória.

Bernoulli leva seu desafio um passo mais além e o publica na *Acta Eruditorum* na edição de dezembro de 1696, acrescido de que publicaria sua própria solução em junho do ano seguinte. Na edição de maio de 1697 da *Acta Eruditorum* havia sido publicado um artigo com a introdução histórica sobre a braquistócrona escrita por Leibniz. Leibniz omite sua própria solução porque, segundo ele, ela era semelhante às outras soluções. Ao todo, cinco soluções foram enviadas por John, Jacob Bernoulli, o Marquês de l'Hospital, Ehrenfried Walther von Tschirnhaus e Isaac Newton. Newton não assinou sua resposta, talvez não queria ser identificado, mas isso não impediu que Bernoulli reconhecesse o autor daquela resposta. Bernoulli teria dito “eu reconheço o leão por sua garra”.

2.6 O princípio de mínima ação de Maupertuis

Cerca de 77 anos após o desafio de Bernoulli ser publicado, um de seus promissores alunos e o primeiro francês a ser adepto às ideias de Newton, Maupertuis propõe algo que ele considerava ser de aplicação universal: o princípio de mínima ação. Sua proposta trazia pontos de vista metafísicos e religiosos (Jourdain, 1912), mas também continha as mesmas noções que guiaram Fermat e Galileu: “A natureza, na produção de seus efeitos, o faz sempre pelos meios mais simples” (Maupertuis, 1744). De forma mais específica, ele acrescenta: “Na Natureza, a quantidade de ação (la quantité d’action) necessária para a mudança é a menor possível. Ação é o produto da massa de um corpo pela sua velocidade multiplicada pela distância que ele percorre.” (Maupertuis, 1746).

Figura 2.10 - Derivação da lei da refração usando um processo de minimização de Maupertuis.



Fonte: Reprodução de Maupertuis (1744).

Em seu artigo publicado em 1744, Maupertuis deriva a lei da refração a partir do uso de um processo de minimização. Ele o faz usando cálculo, tal qual Fermat fez. Porém, ao contrário de minimizar o tempo como Fermat, Maupertuis escolhe minimizar a ação $V \times AR + W \times RB$ (Figura 2.10), onde V e W são as velocidades da luz nos diferentes meios. Maupertuis minimiza a ação tratando o seguimento CR como uma variável, assim como Leibniz o fez. Desta forma, seus resultados são basicamente a lei de Snell, mas numa versão de Descartes onde a razão entre os senos dos ângulos é igual ao inverso da razão das velocidades:

$$\frac{\sin \angle ARE}{\sin \angle FRB} = \frac{W}{V} \quad (2.20)$$

Embora com o que sabemos hoje o resultado não seja verdadeiro para a luz, Maupertuis utilizou uma abordagem baseada na ideia de que a luz é composta por partículas, e dentro desse modelo, os resultados dele faziam sentido e estavam coerentes. Assim como vimos na seção 2.4, a conservação do momento paralela ao plano da Equação 2.19 a reformulação:

$$V \sin \angle ARE = W \sin \angle FRB \quad (2.21)$$

assim como o resultado de Descartes na Equação 2.8.

O que Maupertuis traz de novo é demonstrar que, para o caso de uma única interface, a curvatura da trajetória de uma partícula pode ser obtida a partir de um princípio de minimização, apesar de a premissa usada por ele estar errada. Em seu artigo publicado 2 anos depois intitulado “Derivação das leis do movimento e do equilíbrio a partir de um princípio metafísico” (Maupertuis, 1746), Maupertuis aplica seu princípio de mínima ação a dois problemas simples: colisão de corpos num plano e o equilíbrio de dois corpos numa alavanca.

Para o problema de dois corpos presos a uma alavanca, ele determina o ponto de equilíbrio fazendo com que, para pequenos movimentos da alavanca, a ação seja a menor possível. Sendo L o comprimento da alavanca, m_1 e m_2 as massas desses corpos, onde cada uma está em uma extremidade, e z a distância da massa m_1 até o ponto de equilíbrio. Se a alavanca rotacionar levemente, por um ângulo δ em torno do ponto de equilíbrio, as massas 1 e 2 terão seus comprimentos descritos por $z\delta$ e $(L - z)\delta$, respectivamente. Segundo Maupertuis, esses arcos serão proporcionais a velocidade de cada partícula, e quantidade de ação proporcional a $(m_1 z^2 + m_2 (L - z)^2)\delta$. Minimizando a ação em relação a z resulta em $z = m_2 L / (m_1 + m_2)$, a condição de equilíbrio correta.

Em seu artigo Maupertuis mostra que seu princípio se aplicava a corpos em repouso e a luz. Seu artigo era fundamento em metafísica e ele acreditava com toda certeza que seu princípio era universal. Religioso como era, Maupertuis acreditava que seu princípio demonstrava a atuação de Deus na própria construção do universo, na visão dele, Deus agia de forma “a gastar a menor quantidade possível do misterioso combustível mv^2 ” (Ekeland, 2006).

As ideias de Maupertuis estavam longe de ser aceitas e bem recebidas por seus colegas na época. Ele foi duramente criticado, ridicularizado e até acusado de plágio. As críticas vinham das falhas que seus artigos apresentavam e da falta de explicações claras em certos

pontos. A ridicularização veio de ex-colegas cuja motivação era mais causar um certo tipo de linchamento público do que sobre ao trabalho em si de Maupertuis.

Felizmente para Maupertuis, nem tudo estava perdido. Leonhard Euler foi um grande apoiador de suas ideias, tendo estudado e ampliado o princípio de mínima ação de Maupertuis, em termos de requisitos e rigor matemático.

2.7 Euler e o método de máximos e mínimos

Em 1744, Leonhard Euler publica um livro intitulado ‘*Um Método Para Encontrar Linhas Curvas Com Algumas Propriedades De Máximo E Mínimo [...]*’. Nesse livro Euler estabelece um método generalista para encontrar curvas que maximizam ou minimizam uma dada quantidade. Ao fim desse livro, na seção *Additamentum II* ele deriva os caminhos que minimizam a ação de Maupertuis.

Começando pelo método de máximos e mínimos de Euler, ele mostra a curva AZ da Figura 2.11, chamando-a de $y(x)$. Vamos dizer que se queira encontrar a curva com a descida mais rápida de a à z (ou z à a , tanto faz). O método de Euler é dissecar o eixo horizontal em pequenos segmentos iguais ($HI = IJ = JK = \dots = QR = RS = dx$), e avaliar $y(x)$ em pontos isolados (H, I, J, \dots). Dessa forma, a curva AZ agora é uma sequência de pequenos segmentos retangulares. Agora podemos convenientemente enumerar os pontos de forma que $L = x_{j-1}, M = x_j, N = x_{j+1}$, e assim por diante. Seguindo a mesma lógica, $Ll = y_{j-1}, Mm = y_j, Nn = y_{j+1}$, e assim por diante também. Agora Euler supõe que a velocidade $v(y)$ é constante em cada segmento discriminado nesta curva. Sendo assim, o tempo de viagem de um ponto a outro, de m à n , por exemplo, será $mn/v(y_j)$, de n à o será $no/v(y_{j+1})$, e assim por diante. Usando o teorema de Pitágoras, temos:

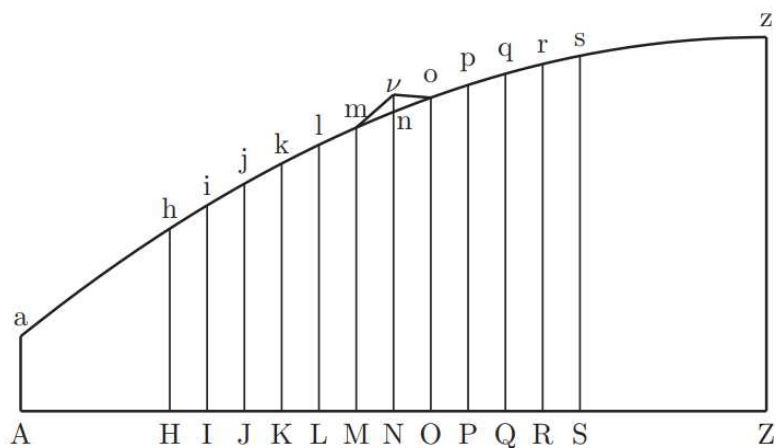
$$mn = \sqrt{(dx)^2 + (y_j - y_{j-1})^2} \quad (2.22a)$$

$$no = \sqrt{(dx)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2} \quad (2.22b)$$

E para todos os outros segmentos, o resultado será semelhante. O tempo de viagem total passa a ser a soma de todos os tempos individuais de viagem:

$$T = \dots n(y_j) \sqrt{(dx)^2 + (y_j - y_{j-1})^2} + n(y_{j-1}) \sqrt{(dx)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2} + \dots, \quad (2.23)$$

Figura 2.11 - Para determinar a curva $y = y(x)$, com $A \leq x \leq Z$, que minimiza (ou maximiza) a integral definida $\int_A^Z F(x, y, y') dx$, Euler divide o intervalo AZ em muitos pequenos subintervalos, cada um de largura Δx . Ele então substitui a integral por uma soma $\sum_i F(x_i, y_i, y'_i) \Delta x$. Em cada termo dessa soma, ele aproxima a derivada y'_i pela inclinação da reta entre os pontos inicial e final do subintervalo. Ele então pega a variação em um único ponto (N na figura), mudando y de n para v , e pergunta se a variação na integral (a soma na versão discretizada) é zero.



Fonte: Reprodução de Leonhard Euler, Um Método Para Encontrar Linhas Curvas Com Algumas Propriedades De Máximo E Mínimo

Onde podemos, para simplificar, chamar $n(y) = 1/v(y)$. Euler designa p_j como a inclinação, ou derivada da curva, como:

$$p_j = \frac{y_j - y_{j-1}}{dx} \quad (2.24)$$

assim o tempo de viagem se torna:

$$T = \left\{ \dots n(y_j) \sqrt{1 + p_j^2} + n(y_{j+1}) \sqrt{1 + p_{j+1}^2} + \dots \right\} dx \quad (2.25)$$

Agora sim começa o processo de minimização. O tempo de viagem T é uma função de uma grande quantidade de variáveis y_j . A minimização (ou maximização) deve ser um extremo em relação às variáveis de y_j individualmente. Euler representa essas mudanças como nv na Figura 2.11:

$$\frac{dT}{dy_j} = 0 \quad (2.26)$$

A variável y_j aparece duas vezes, tanto em p_j como em p_{j+1} . Assim a derivada de T em relação a y_j envolverá três termos. Como, $dp_j/dy_j = 1/dx$, e $dp_{j+1}/dy_j = -1/dx$:

$$\frac{dT}{dy_j} = \frac{dn(y_j)}{dy_j} \sqrt{1 + p_j^2} + \frac{1}{dx} \left\{ n(y_j) \frac{p_j}{\sqrt{1 + p_j^2}} - n(y_{j+1}) \frac{p_{j+1}}{\sqrt{1 + p_{j+1}^2}} \right\} \quad (2.27)$$

observe que o segundo termo da equação 2.27, no limite onde dx é infinitesimal, torna-se

$$\frac{1}{dx} \left\{ n(y_j) \frac{p_j}{\sqrt{1 + p_j^2}} - n(y_{j+1}) \frac{p_{j+1}}{\sqrt{1 + p_{j+1}^2}} \right\} \approx \frac{d}{dx} \left\{ n(y) \frac{d}{dp} \sqrt{1 + p^2} \right\} \quad (2.28)$$

usando finalmente derivadas parciais, encontramos a equação diferencial para a partícula mais rápida movendo-se com uma velocidade inversa a $n(y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ n(y) \sqrt{1 + p^2} \right\} - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ n(y) \sqrt{1 + p^2} \right\} = 0 \quad (2.29)$$

seguindo os mesmos passos de Euler, repetimos o mesmo procedimento de discretização para uma integral geral com a forma:

$$\int Z(y(x), p(x)) dx \quad (2.30)$$

Dessa forma somos guiados a seguinte equação diferencial, aquela de fato tornará a integral acima num extremo:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial Z}{\partial p} = 0 \quad (2.31)$$

Com esse método de minimização em mãos, Euler o aplica a vários exemplos. Veremos agora como Euler deriva as órbitas de Kepler do princípio de mínima ação de Maupertuis.

2.7.1 Derivação de Euler das órbitas de Kepler a partir do princípio da menor ação

Como já mencionei há pouco, na seção *Additamentum II* (Adendo II, traduzindo do latim) de seu livro, Euler aplica seu método de máximos e mínimos a uma partícula movendo-se sob efeito de uma força central descrevendo uma órbita plana. Uma das formas que ele o fez, foi usando coordenadas polares. Euler mostra que sua equação diferencial (Equação 2.31) é a mesma obtida a partir do “método direto”. Primeiro precisamos começar com coordenadas cartesianas. Um movimento que acontece em duas dimensões pode ser decomposto para cada eixo. Euler determina com X e Y as decomposições da força desse movimento nas componentes x e y , respectivamente. De acordo com as Leis de Newton, sendo v_x e v_y as componentes da velocidade, temos:

$$X = m \frac{dv_x}{dt} \tag{2.32}$$

$$Y = m \frac{dv_y}{dt}$$

então Euler considera:

$$Xdx + Ydy = m(v_x dv_x + v_y dv_y) = \frac{m}{2} d(v_x^2 + v_y^2) \equiv d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \tag{2.33}$$

Para uma atração gravitacional direta no ponto $(x, y) = (0, 0)$, os componentes da força F são:

$$X = F(r) \cos \theta = -\frac{GmM}{x^2 + y^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \frac{GmM}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{2.34a}$$

$$Y = F(r) \sin \theta = -\frac{GmM}{x^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \equiv \frac{\partial}{\partial y} \frac{GmM}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{2.34b}$$

onde θ é o ângulo polar. Substituindo as Equações 2.34 na Equação 2.33, temos

$$d\left(\frac{GmM}{r}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \tag{2.35}$$

que é equivalente a

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{r} = \text{constante} \quad (2.36)$$

Como sabemos, E é a energia total do sistema, $mv^2/2$ é a energia cinética e GmM/r é a energia potencial. Euler apesar de estar lidando com a ideia de energia potencial, não a chama assim (Yurkina, 1985). O termo energia potencial só foi ser usado ao final do século XIX por Rankine (Lanczos, 1962).

Além de a energia total E ser constante, há outra constante que se associa a áreas iguais percorridas em tempos iguais (o momento angular, em linguagem contemporânea). Em coordenadas polares, as componentes da velocidade são v_r na direção radial e v_θ na direção tangencial. As áreas serem iguais em tempos iguais implica:

$$mrv_\theta \equiv mr^2 \frac{d\theta}{dt} = L = \text{constante} \quad (2.37a)$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{L}{mr^2} \quad (2.37b)$$

Podemos substituir as Equações 2.37 na Equação 2.36 para obter a equação diferencial para a trajetória $r = r(\theta)$, que é independente do tempo:

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \frac{L^2}{2mr^4} - \frac{GmM}{r} \quad (2.38)$$

na notação de Euler:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{C}} \sqrt{r^2 (A + V(r)) - C} \quad (2.39)$$

onde, $V(r) = GmM/r$, $C = L^2/2m$ e $A = E$. E assim Euler mostra que essa equação diferencial é resultado do princípio de mínima ação de Maupertuis,

$$\int mvd\mathbf{l} \quad (2.40)$$

em coordenadas polares, $d\mathbf{l}$ é dado por:

$$d\mathbf{l} = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} \quad (2.41)$$

Podemos usar a Equação 2.36 para escrever

$$v(r) = \sqrt{\frac{2}{m} \sqrt{A + V(r)}} \quad (2.42)$$

assim obtendo:

$$mvd\ell = \left\{ \sqrt{2m} \sqrt{A + V(r)} \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2} \right\} dr \quad (2.43)$$

Euler denomina x como coordenada radial. A função $y(x)$ que deveríamos encontrar se torna então a $\theta(r)$, para Euler $p = d\theta/dr$. Ou seja, a função Z é dada por

$$Z(y(x), p(x)) = \sqrt{2m} \sqrt{A + V(x)} \sqrt{1 + x^2 p^2} \quad (2.44)$$

e como Z na Equação 2.44 não está em função de y , a Equação 2.31 de Euler resultará em $dZ/dy = 0$, ou, de forma equivalente

$$\frac{dZ}{dp} = \text{constante} \rightarrow \sqrt{A + V(x)} \frac{px^2}{\sqrt{1 + x^2 p^2}} = \sqrt{C} \quad (2.45)$$

onde mantemos a constante como \sqrt{C} para aproximarmos da notação de Euler. A Equação 2.45 pode ser reescrita com um jogo simples de álgebra, da seguinte forma:

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{d\theta} = \frac{x}{\sqrt{C}} \sqrt{x^2 (A + V(x)) - C} \quad (2.46)$$

que o exato mesmo resulta que o da Equação 2.39, obtida pelo método direto.

Euler explica que seus cálculos são apenas válidos desde que não haja forma alguma de resistência ao movimento (ele usa o termo no sentido de atrito ou outras forças não-conservativas). Ou seja, é necessário que a energia total E seja conservada e a mesma para *qualquer caminho* considerado. Tais restrições, não foram mencionadas por Maupertuis em sua formulação do princípio de mínima ação, mas são requisitos obrigatórios.

Euler ainda saiu em defesa de Maupertuis mais uma vez em 1751, quando ele publicou um artigo intitulado “Dissertação sobre o princípio de mínima ação, com análise das objeções feitas pelo Professor König” (Euler, 1751), Professor König que acusou duramente Maupertuis de plágio e outras coisas (König, 1751). Nesse artigo, Euler enaltece Maupertuis pela descoberta do princípio de mínima ação, também citando à Aristóteles: “a natureza não faz nada em vão”.

Euler mostra em seus estudos, que órbitas em potencial central são extremos do princípio de Maupertuis, não necessariamente mínimos. No entanto, não é possível que as trajetórias sejam máximas, uma vez que ao adicionar novas pequenas modificações ao caminho aumentaria a energia cinética da trajetória, fazendo com que a energia total desse novo caminho aumente também, o que vai contra as novas restrições estabelecidas por Euler. Euler ainda em seu artigo de 1751 comenta que "não descobriu esta bela propriedade *a priori*, mas *a posteriori*, deduzindo após muitas tentativas a fórmula que deve se tornar um mínimo" (Euler, 1751). As ideias e cálculos de Euler foram bem recebidos dentre a comunidade acadêmica. Ernst Mach em seu livro de 1960 elogia a modéstia e as realizações de Euler e acrescenta: "Euler magnanimamente deixou o princípio como seu nome, Maupertuis com a glória da invenção, e o converteu em algo novo e realmente útil" (Mach, 1960, p. 550).

Euler consegue com sucesso elevar o rigor matemático necessário para o princípio de mínima ação de Maupertuis, incluindo duas novas restrições: a energia total E deve ser conservada e a mesma para qualquer caminho considerado. E como vimos, ele demonstra um exemplo claro de como o princípio de mínima ação funciona. No entanto, Euler ainda não estava próximo de uma prova geral do princípio, isso ficou a cargo de outro brilhante matemático, Joseph-Louis Lagrange. Lagrange, assim como Euler, era grande aliado da teoria do princípio de mínima ação de Maupertuis. Lagrange estudou o método de máximos e mínimos de Euler, e em 1755 o enviou uma carta contendo o novo método que havia desenvolvido, a sua própria maneira de lidar com máximos e mínimos a partir do método de Euler. Euler então responde cheio de entusiasmo que Lagrange "exaltou a teoria ao mais alto ápice da perfeição" (Sylvia Serfaty, 2014).

Em uma carta enviada à Euler em 1760, Lagrange desenvolve uma solução geral para o problema isoperimétrico, incluindo o princípio de mínima ação. Tais resultados só foram publicados dois anos depois, no primeiro volume da *Miscellanea Taurinensi* sob o título de "Essai sur le Problème des Isopérimètres" (Sylvia Serfaty, 2014). Infelizmente, Maupertuis nunca chegou a ver a prova geral de Lagrange, tendo falecido em 1759.

3 A EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

Resolver problemas a partir da Segunda Lei de Newton quando suas coordenadas são não-cartesianas pode ser realmente um desafio extra. De coordenadas cilíndricas em problemas com simetria axial à coordenadas esféricas em problemas com simetria esférica, determinar corretamente os componentes da aceleração nesses casos pode ser bem complicado. Faz-se necessário então uma abordagem alternativa, tão eficiente quanto a Segunda Lei de Newton, porém mais maleável em termos de aplicabilidade em diferentes sistemas de coordenadas, e é aí que entram as equações de Lagrange.

É em seu livro *Mécanique Analytique* (Mecânica Analítica) publicado em 1788, que Joseph-Louis Lagrange determina seu método generalizado para solução de todos problemas de mecânica. A vasta amplitude das equações de Lagrange pode ser demonstrada através do princípio variacional. Princípio esse que usamos de forma consistente na formulação de diferentes problemas em diversas áreas da física, como mecânica clássica, mecânica quântica, ótica e eletromagnetismo.

O objetivo do cálculo das variações consiste na determinação de máximos e mínimos de uma função expressa como uma integral. Determinemos uma função $f(y(x), y'(x), x)$ definida por uma trajetória $y = y(x)$ que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) como mostra a Figura 3.1, onde $y'(x)$ é a derivada de y em relação a x . Queremos encontrar o caminho $y(x)$ que faça com que a integral S em Equação (3.1) seja um extremo, ou seja, um máximo ou mínimo.

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx \quad (3.1)$$

A função f que definimos como $f(y(x), y'(x), x)$ é uma função de três variáveis $f = f(y, y', x)$, porém, a integral S se dá em função apenas da variável x , visto que a integral segue o caminho $y = y(x)$.

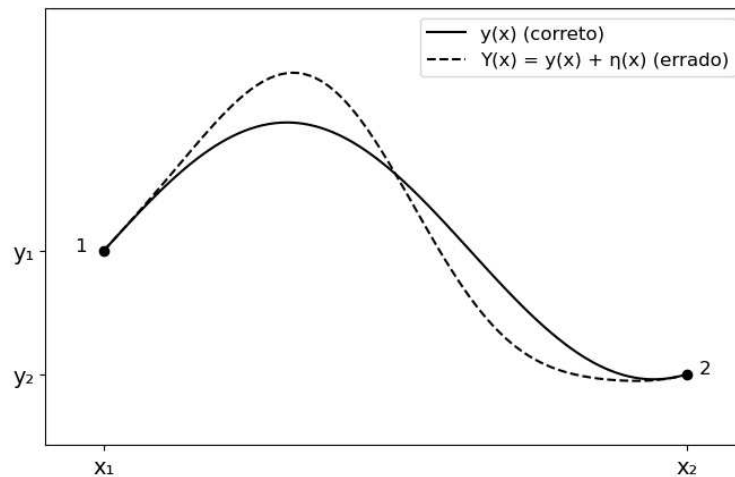
Podemos definir que o caminho $y = y(x)$ é o caminho correto para minimizar a integral S , e que qualquer outro caminho vizinho, independentemente do quão próximo seja do caminho correto $y = y(x)$, fará S aumentar, mesmo que infinitesimalmente.

Os caminhos vizinhos a y podem ser representados por $y(x, \alpha)$, de modo que, quando $\alpha = 0$, $y = y(x, 0) = y(x)$ que é o caminho correto. Assim, podemos formular o caminho errado como

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x), \quad (3.2)$$

onde $\eta(x)$ é uma função contínua de x com primeira e segunda derivada contínua e $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Agora, S na Equação 3.1, também se torna em função de α :

Figura 3.1 – Diferentes caminhos entre dois pontos 1 e 2, onde apenas um é considerado “certo”



Fonte: Elaborado pela autora

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x) dx, \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', x) dx. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Para que a integral em Equação 3.3 tenha um valor extremo, ou, *valor estacionário*, é necessário que S seja independente de α em primeira ordem ao longo de todo o caminho que resultaria em seu extremo ($\alpha = 0$). Ou seja,

$$\left(\frac{dS}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = 0. \quad (3.4)$$

Agora, para derivarmos a Equação 3.3 em relação a α , precisamos determinar $\partial f / \partial \alpha$. Utilizando a regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial f(y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', x)}{\partial \alpha} = \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

Como $dS/d\alpha$ deve ser igual a zero:

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = 0, \quad (3.5)$$

essa condição é verdadeira para qualquer escolha do caminho “errado” na função $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$, satisfazendo a condição $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$.

A partir da integração por partes conseguimos escrever o segundo termo na Equação (3.5) como:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial y'} dx = \left[\eta'(x) \frac{\partial f}{\partial y'} \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx. \quad (3.6)$$

Como estabelecemos que $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, o primeiro termo a direita é zero, logo

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial y'} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx. \quad (3.7)$$

Substituindo a Equação (3.7) na Equação (3.5), temos

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = 0. \quad (3.8)$$

Agora a integral na Equação 3.8 parece ser independente de α , porém, as funções y e y' onde as derivadas de f são tomadas ainda são funções de α . Já sabemos que $(dS/d\alpha)_{\alpha=0} = 0$ para um valor extremo e $\eta(x)$ é uma função arbitrária que se sujeita às condições que impusemos a ela. Portanto a integral em 3.8 desaparece para $\alpha = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \quad (3.9)$$

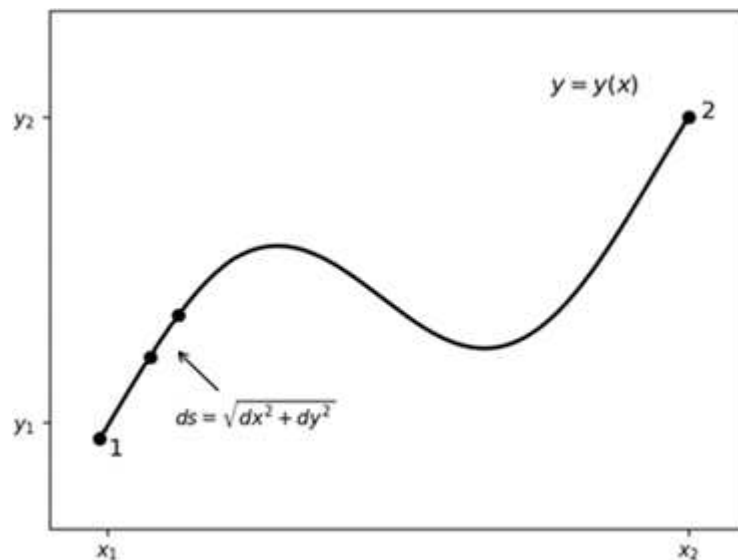
onde y e y' são as nossas funções originais que não dependem de α . A Equação 3.9 conhecemos como **equação de Euler-Lagrange**⁵.

Um exemplo: o menor caminho entre dois pontos

⁵ Derivada primeiro por Euler em 1744. Quando aplicada a sistemas mecânicos, é conhecida como *equação de Euler-Lagrange*.

Trago agora um exemplo simples já muito visto e discutido de forma elementar: dados dois pontos num plano, qual é o menor caminho entre eles? A resposta para esse problema, igualmente simples, é que é uma reta. Mas *por que* é uma reta, talvez seja o verdadeiro questionamento aqui. Vamos ilustrar o problema a partir da Figura 3.2, nela vemos dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) e um caminho que liga eles $y = y(x)$. Vamos então determinar qual caminho $y(x)$ é o menor em comprimento e mostrar que este é a reta.

Figura 3.2 Um caminho conectando os dois pontos 1 e 2. O comprimento de um pequeno segmento é $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ o comprimento total do caminho é $L = \int_1^2 ds$.



Fonte: Elaborado pela autora

Uma pequena seção do caminho é $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ sendo que dy pode ser escrito como $dy = \frac{dy}{dx} dx \equiv y'(x) dx$. Podemos reescrever ds como:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx. \quad (3.10)$$

Sendo assim, o comprimento total do caminho entre os pontos 1 e 2 pode ser calculado a partir da integral:

$$L = \int_1^2 ds = \int_1^2 \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \quad (3.11)$$

A Equação 3.11 mostra que a incógnita é a própria função $y = y(x)$, que é a função que define qual caminho está sendo tomado entre os pontos 1 e 2, e nosso trabalho é justamente definir qual função $y(x)$ que faça a integral 3.11 seja mínima.

A integral 3.11 segue a forma a forma padrão que vimos na Equação 3.1, onde a função f é dada por $f(y, y', x) = (1 + y'^2)^{1/2}$. Para usarmos a Equação 3.9 precisamos agora calcular as devidas derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{(1 + y'^2)^{1/2}} \quad (3.13)$$

o que torna a Equação 3.9:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

Ou seja, a derivada parcial $\partial f / \partial y'$ deve ser constante, C , ao longo de todo percurso do ponto 1 ao 3. Sabendo disso, podemos voltar a Equação 3.13 e reescreve-la como $y'^2 = C^2(1 + y'^2)$. Reorganizando e isolando y'^2 conseguimos ver que y'^2 resulta em uma constante, logo, $y'(x)$ também é uma constante, que chamaremos de c .

Ao integral a equação $y'(x) = c$ temos como resultado:

$$y(x) = cx + b$$

Que nada mais é que a equação de uma reta. E assim, a partir da Equação de Euler vimos o *porquê* de o menor caminho entre dois pontos é uma reta. A próxima pergunta a se fazer agora é: o menor caminho entre dois pontos, poderia também ser o mais rápido?

3.1 Hamilton e o princípio de ação estacionária

O princípio da ação estacionária, comumente denotada como Princípio de Hamilton na literatura atual, é uma ideia que se levou, como vimos no Capítulo 2, bons séculos para seu aperfeiçoamento na forma como se vê hoje. A ideia principal era a de que a natureza sempre seguiria caminhos otimizados, mínimos, ao decorrer de um processo físico.

A primeira descrição clara de princípio de mínima ação veio quando, após um desafio lançado por Bernoulli, Maupertuis respondeu, afirmando que a dinâmica do movimento ocorre com a mínima ação. A abordagem proposta por Maupertuis trazia ao mesmo tempo ousadia e incerteza. Era uma teoria “nova” e diferente do que se especulava na época, mas não era robusta ou elegante o suficiente para convencer a comunidade científica da época. Por sorte ou destino, em 1760, Lagrange deu uma nova percepção às ideias de Maupertuis, trazendo-lhe pontos chaves que lhe faltavam até então. Com um fundamento matemático muito mais rigoroso e sólido, Lagrange elevou a teoria de Maupertuis a sua própria excelência.

William Rowan Hamilton aprofundou a ideia de ação proposta por seus predecessores e reformulou a mecânica clássica a partir de uma perspectiva ainda mais geral e ambiciosa. Observando que a ação podia ser usada para descrever completamente a evolução de um sistema físico, Hamilton introduziu uma nova função, a Hamiltoniana, que em muitos casos representa a energia total do sistema, sendo a soma da energia cinética e potencial. A partir disso, foi proposto uma nova abordagem para descrever a dinâmica como se via. Diferente das equações de segunda ordem da mecânica Lagrangeana, Hamilton formulou um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem que governam a evolução temporal dessas variáveis.

Em 1834 e 1835, Hamilton publica dois artigos anunciando o princípio dinâmico sobre qual ele é a possível base para toda a mecânica e, além disso, para toda a física clássica. O Princípio de Hamilton pode ser declarado como segue:

Para todas as possíveis trajetórias ao longo das quais o sistema dinâmico pode se mover de um ponto para outro dentro de um intervalo de tempo específico (compatível com algum vínculo), a real trajetória seguida é a que minimiza a integral de tempo da diferença entre as energias cinética e potencial.

Traduzindo para o cálculo de variações, o Princípio de Hamilton se torna (T e U representam energia cinética e energia potencial, respectivamente)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (3.14)$$

Esse cálculo se baseia apenas em que a integral $T - U$ seja um extremo, não necessariamente um mínimo.

A energia cinética de uma partícula é função somente de \dot{x}_i e se assumirmos que essa partícula se move num campo de forças conservativas, a energia potencial será função x_i , ou seja,

$$T = T(\dot{x}_i),$$

$$U = U(x_i).$$

E a diferença destas quantidades se torna

$$L \equiv T - U = L(x_i, \dot{x}_i) \quad (3.15)$$

Consequentemente, a Equação 3.14

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, \dot{x}_i) dt = 0, \quad (3.16)$$

A função L possui a mesma forma da função f da integral do princípio variacional, como na Equação 3.1:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} f\{y_i(x), y_i'(x); x\} dx$$

Agora, precisamos fazer algumas transformações para melhor adequação, e temos:

$$x \rightarrow t;$$

$$y_i(x) \rightarrow x_i(t);$$

$$y_i'(x) \rightarrow \dot{x}_i(t);$$

$$f\{y_i(x), y_i'(x); x\} \rightarrow L\{x_i, \dot{x}_i\}.$$

A relação entre a equação de Euler-Lagrange e a Equação 3.16 é

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (3.17)$$

Essas são as **equações de movimento de Lagrange** para uma partícula, e L é o que chamamos de função de Lagrange, ou, **Lagrangeana**.

Que tal um exemplo agora? Vamos obter a equação de Lagrange do movimento para o oscilador harmônico unidimensional. Escrevendo nossas expressões para energia cinética e potencial temos:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

As derivadas parciais são:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}$$

Substituindo esses resultados na Equação 3.17

$$m\ddot{x} + k = 0$$

Esse resultado é idêntico a equação de encontraríamos se buscássemos as equações do movimento através da mecânica newtoniana. Vamos então um passo além e repetir esse processo, mas agora para um pêndulo plano. As equações para T e U são:

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2,$$

$$U = mgl(1 - \cos \theta).$$

A Lagrangeana é

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta). \quad (3.18)$$

Trataremos θ como se fosse uma coordenada retangular e seguir normalmente com as derivadas parciais:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mgl \sin \theta ; \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2 \dot{\theta}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= ml^2 \ddot{\theta}.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Substituindo na Equação 3.17, temos

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

Que novamente é um resultado idêntico ao que teríamos a partir da mecânica newtoniana: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$. Chegamos nesse resultado calculando as energias cinética e potencial em relação θ ao invés de x e a partir da aplicação de operações para serem usadas em coordenadas retangulares ao contrário de coordenadas angulares. Vemos aqui então que além de resultados notáveis, as equações de Lagrange podem ser bem mais gerais do que se mostraram a princípio. Outro ponto a ser ressaltado é que em ambos os exemplos vistos, em momento algum precisamos escrever qualquer equação relativa à força atuante nessas partículas. O princípio de Hamilton nos permite determinar todas as equações do movimento de forma completa, e, sem precisarmos em momento algum recorrer a mecânica newtoniana.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo, minha pretensão é formar uma sequência didática lúdica e eficaz para o ensino de ação estacionária, evitando o uso de cálculos e conceitos avançados. Para isto, irei usar de experimentos laboratoriais e simulações em software apropriado, partindo do pressuposto da ampla disponibilidade das ferramentas em escola.

Irei dividir minha metodologia em etapas, ao contrário de divisões em aulas, visto que a carga horária da disciplina de física varia de acordo com o modelo de ensino adotado na escola (regular, integral e técnico). Recomendo também fortemente que a abordagem histórica vista no Capítulo 2 deste trabalho seja desenvolvida junto às etapas que se seguem.

4.1 Etapa 1: o experimento da curva de descida mais rápida

Para a execução do experimento da curva de descida mais rápida, há duas formas de se fazer. A primeira é confeccionando curvas a partir de MDF (ou outro material equivalente) e bolinhas de gude. A segunda, caso a confecção não seja possível, o professor pode usar simulações em plataformas como o GeoGebra, como o modelo desenvolvido SORIA (2018), mas de forma adaptada à não entregar todas as respostas de uma vez. O experimento sendo feito de forma manual trará mais engajamento, dinâmica e lucidez.

O objetivo desse experimento é que os alunos investiguem as diferentes curvas fornecidas para determinar qual fará que o tempo de descida entre o ponto A e B seja o mais rápido. O professor deve fornecer obrigatoriamente uma reta e a cicloide, as outras curvas podem ser hipérbolas e parábolas quaisquer. Faz-se necessário que as curvas sejam apoiadas lado a lado, e que haja um mecanismo para que as bolinhas de gude larguem do ponto inicial ao mesmo tempo. Um ótimo exemplo desse experimento na prática e modelo do aparato experimental podem ser vistos no canal do YouTube Manual do Mundo, vídeo ‘O caminho mais rápido não é o que parece!’ (DO MUNDO, [s.d.]).

O professor deve iniciar a prática questionando “qual é o caminho mais rápido para irmos de um ponto a outro?”, incitando que os alunos participem e discutam suas opiniões. Em seguida, com o aparato montado instruir os alunos a investigarem as diferentes possibilidades, cronometrando e anotando os tempos de descida para cada curva (nesse momento a turma pode ser dividida em grupos caso haja mais de um aparato disponível, ou que haja tempo para que cada equipe tire as próprias medidas). Ao final da coleta de dados é interessante que os alunos discutam em conjunto os resultados obtidos. Dadas as diversas possibilidades, o professor deve

questionar os alunos então, sobre qual seria a curva “mais rápida de todas”, a *braquistócrona*, e introduzir a resposta de Galileu, o arco de uma circunferência. Mostrar então aos alunos o experimento sendo feito em diferentes arcos de circunferência, e ressaltar que os resultados variam de acordo com o diâmetro de cada circunferência. A partir do resultado inconclusivo de Galileu, o professor deve introduzir a *cicloide*, vista que esta é de fato a resposta definitiva a este problema (a definição de cicloide pode ser mostrada por DACO e ALARCÓN (2020)). Agora, o professor deve demonstrar o experimento mais uma vez, comparando as outras curvas à cicloide.

É imprescindível que durante toda a execução desse experimento, o professor aborde as relações de aceleração e velocidade relacionadas a cada curva, visto que é a partir destas demonstrações que poderemos desenvolver os conceitos de energia cinética e energia potencial em breve.

Para finalizar esta aula prática, o professor ainda pode demonstrar outra propriedade da cicloide. A cicloide além de ser a curva que otimiza o tempo de viagem de um ponto a outro, essa curva também permite que se consiga chegar ao ponto mais baixo dela levando o mesmo tempo independentemente de qual altura a bolinha de gude seja largada. Para demonstrar isso o professor pode colocar várias cicloides lado a lado, com bolinhas de gude sendo largadas de diferentes alturas, e mostrar aos alunos que todas as bolinhas chegam ao mesmo tempo no ponto mais baixo da curva. Ou seja, ao mesmo tempo em que a cicloide é a braquistócrona (do grego: brakhisto = menor e chronos = tempo) ela também é denominada tautócrona (do grego: tauto = mesmo e chronos = tempo).

4.2 Etapa 2: Energia cinética, energia potencial e conservação de energia

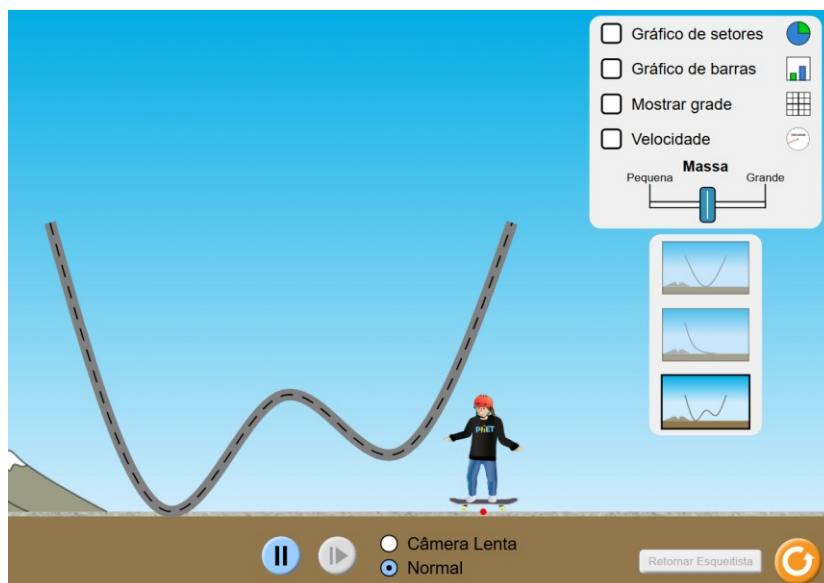
Para essa etapa, é importante que os alunos já tenham familiaridade com os conceitos de velocidade e aceleração a partir do experimento da etapa anterior. Será necessário o uso do laboratório de informática, os alunos podem ser separados em trios ou duplas.

Usaremos a plataforma PhET (“PhET Interactive Simulations”, [s.d.]), mais especificamente a simulação “Parque de Skate Energético” (“Energy Skate Park”, [s.d.]), que originalmente está em inglês, mas a plataforma fornece suporte de tradução. Essa simulação possui quatro interfaces distintas, usarei apenas duas, mas se o professor sentir a necessidade pode ampliar a aplicação.

O objetivo deste experimento é demonstrar aos alunos a relação entre as energias cinética e potencial, como também a conservação de energia. Na primeira interface, a

‘introdução’, o professor deve introduzir o experimento e incentivar os alunos a explorar as opções de configuração que a plataforma fornece (Figura 4.1, canto superior direito).

Figura 4.1 – Interface de Parque de Skate Energético



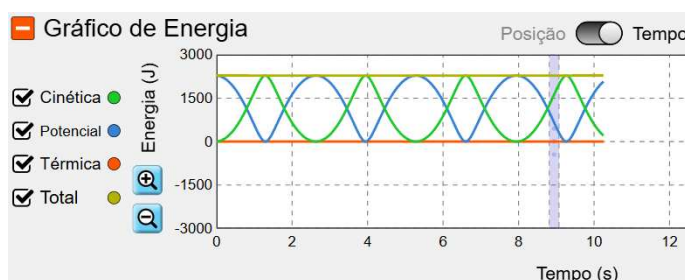
Fonte: Reprodução de “Energy Skate Park”, [s.d.]

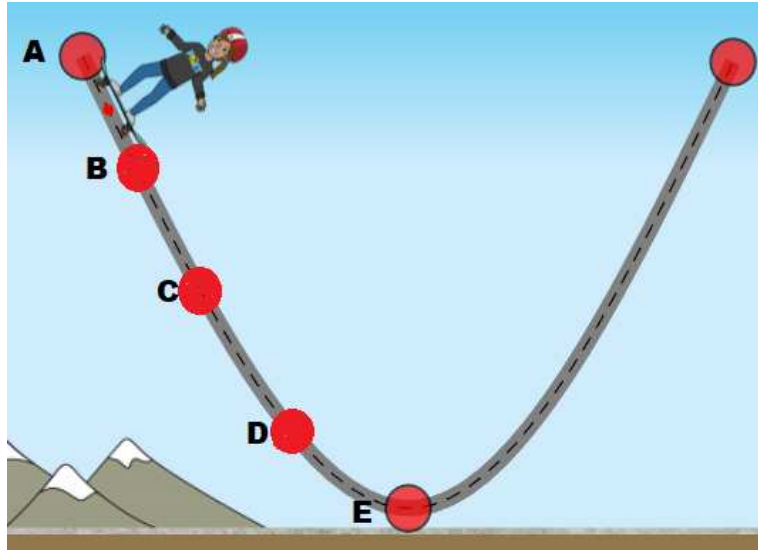
O professor deve então instruir aos alunos que mantenham as visualizações dos gráficos de setores e barras ativos, e explorem o que acontece com cada energia em diferentes pontos, em que momento a energia cinética e potencial se tornam máximas ou nulas, e se em algum momento a energia total muda. Os alunos devem anotar seus resultados no caderno. Com isso, os alunos devem ser capazes de, com um pouco de orientação, visualizar como a energia cinética se relaciona com a velocidade e a energia potencial com a altura.

O professor pode então, com auxílio de um projetor para ser visível a todos, exibir algumas situações e fazer questionamentos à turma. Como por exemplo (este questionário foi inspirado e adaptado de LOEBLEIN (2024)):

1ª pergunta: A parte pontilhada do gráfico abaixo mostra a energia da skatista. Onde ela poderia estar na pista?

Figura 4.2 – Imagem de apoio ao questionário.



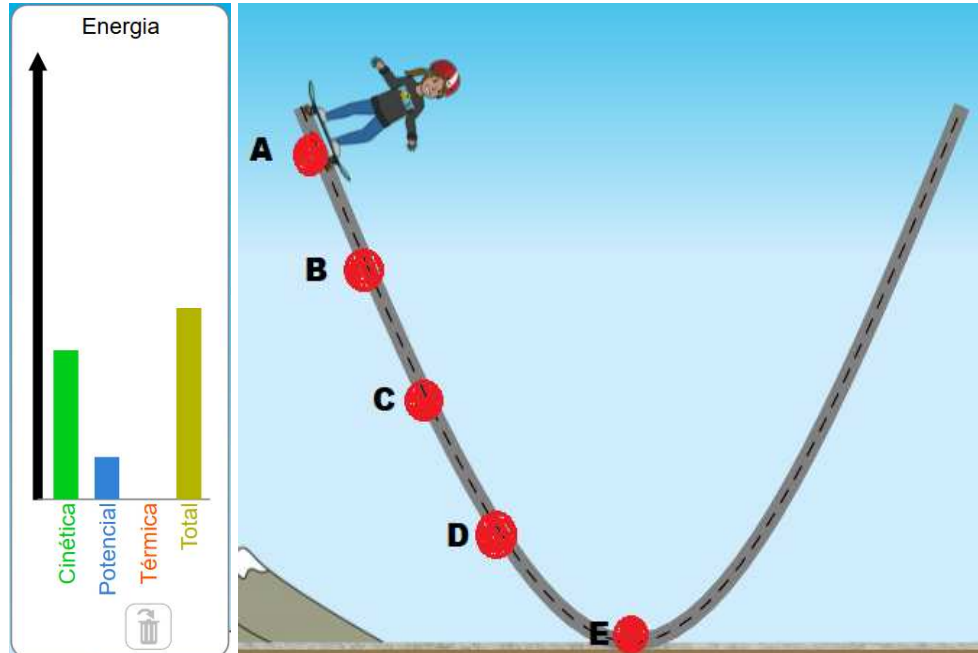


Fonte: Reprodução de “Energy Skate Park”, [s.d.]

Resposta correta: C

2ª pergunta: O gráfico de barras mostra a energia da skatista. Onde ela poderia estar na pista?

Figura 4.3 – Imagem de apoio ao questionário.

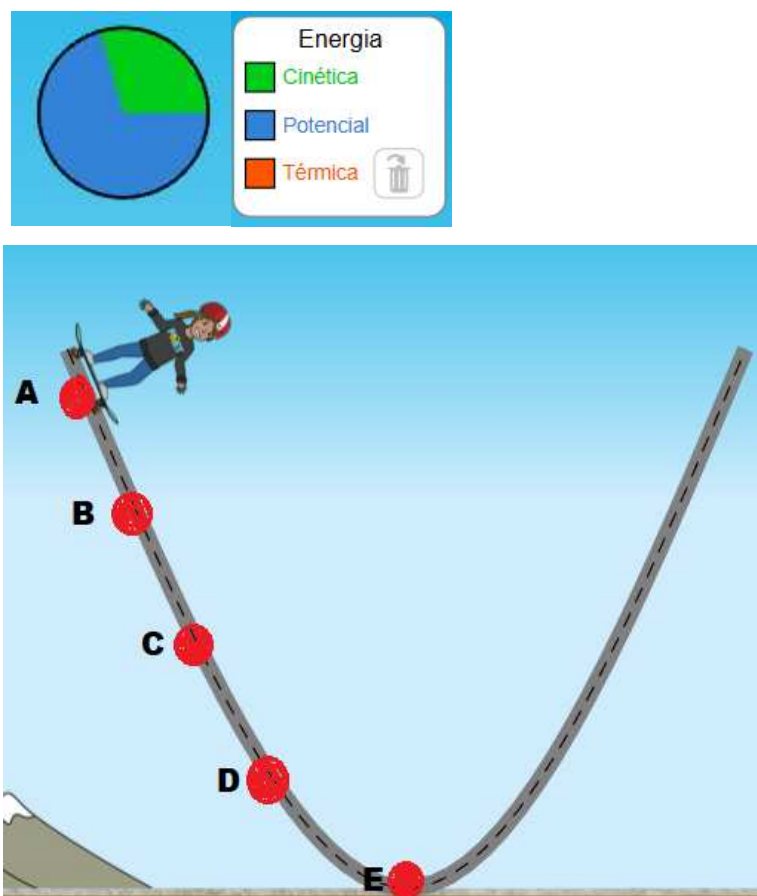


Fonte: Reprodução de “Energy Skate Park”, [s.d.]

Resposta correta: D

3ª pergunta: O gráfico de setores mostra a energia da skatista. Onde ela poderia estar na pista?

Figura 4.4 – Imagem de apoio ao questionário.

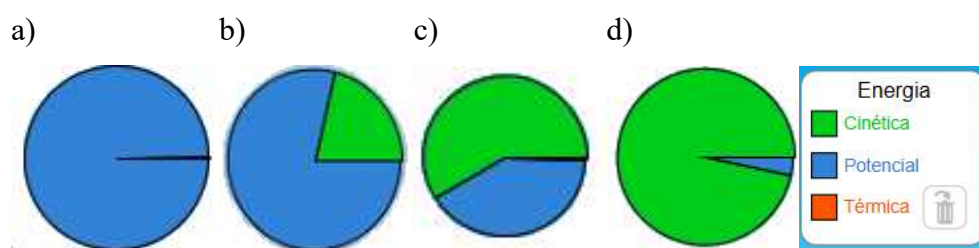


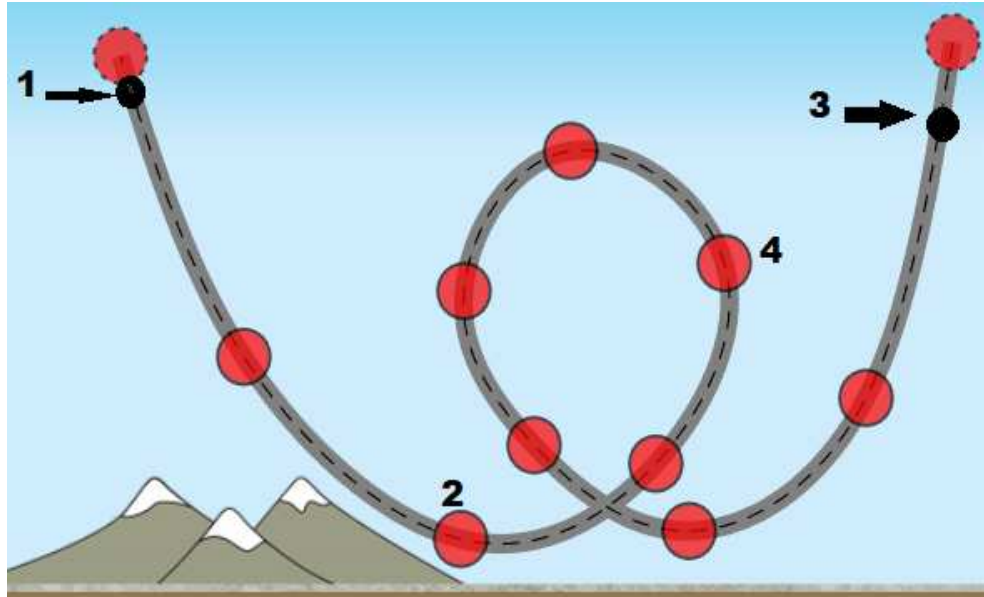
Fonte: Reprodução de “Energy Skate Park”, [s.d.]

Resposta correta: B

4ª pergunta: Se skatista estiver no ponto 4, qual gráfico de setores pode corresponder a sua energia?

Figura 4.5 – Imagem de apoio ao questionário.



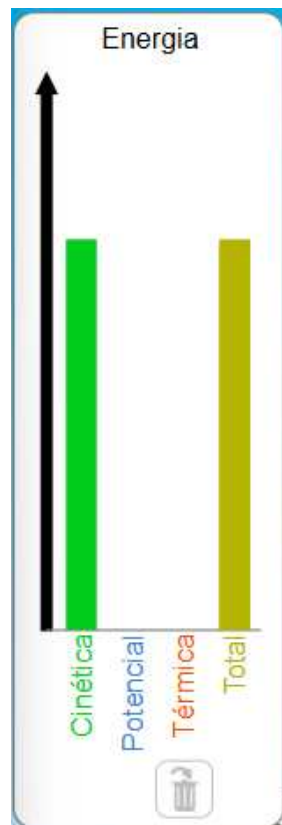


Fonte: Reprodução de “Energy Skate Park”, [s.d.]

Resposta correta: C

5ª pergunta: O gráfico de barras da energia da skatista está assim:

Figura 4.6 – Imagem de apoio ao questionário.



Como você descreveria a velocidade da skatista?

- a) está em alta velocidade
- b) está indo devagar
- c) está parada
- d) está a uma velocidade mediana

Fonte: Reprodução de “Energy Skate Park”, [s.d.]

Resposta correta: A

Com a conclusão dessa etapa, os alunos devem ter sido capazes de compreender as relações entre a energia cinética, energia potencial, conservação de energia e as relações de velocidade e aceleração.

4.3 Etapa 3: Ação de forma qualitativa

O objetivo desta etapa é que os alunos sejam introduzidos ao conceito de ação como uma medida da diferença entre energia cinética e energia potencial em relação ao tempo, de forma qualitativa. Para isso, iremos utilizar novamente a simulação “Parque de Skate Energético” (“Energy Skate Park”, [s.d.]), na interface de gráficos, essa interface não possui suporte de tradução para português.

O professor deve iniciar a aula introduzindo a ação através de analogias simples, que os alunos compreendam. Por exemplo: questionar aos alunos sobre o caminho que eles fazem de suas casas até a escola, ou qual caminho eles fariam se precisassem sair da escola e ir até um dado ponto de referência (próximo da escola). O objetivo é que eles discutam entre si sobre qual seria o melhor caminho, qual seria o rápido ou qual seria o mais curto. Desta forma ressaltamos o conceito de otimização com os alunos, facilitando que eles compreendam a ideia de minimização da ação.

Na interface gráfica do Parque de Skate o professor deve instruir os alunos a analisarem as relações de energia ao longo do tempo para diferentes trajetórias. A interface permite no máximo três pontos móveis ao longo da trajetória, mantendo sempre os pontos inicial e final fixos.

Os alunos devem definir três trajetórias diferentes, variando os pontos A, B e C, e anotar as coordenadas de cada um dos pontos (Tabela 1). Em seguida, com o gráfico mostrando a energia em relação ao tempo, os alunos devem analisar e anotar os valores estimados de cada energia, a “quantidade de ação” $L = EC - EP$ (Tabela 2), e o tempo total gasto para ir do ponto inicial ao final para cada trajetória.

Tabela 1 – Exemplo de tabela para registrar as coordenadas nos pontos móveis dos pontos A, B e C.

	x	y
A		
B		
C		

Fonte: Desenvolvido pela autora

Tabela 2 – Exemplo de tabela para registrar as variações de energia com o tempo, t_1 e t_5 referem-se aos pontos inicial e final, respectivamente.

Tempo (s)	EC (J)	EP (J)	$L = EC - EP$
t_1			
t_2			
t_3			
t_4			
t_5			

Fonte: Desenvolvido pela autora

Após a finalização do experimento e coleta de dados, os alunos devem fazer a soma total da quantidade L , para cada trajetória. O professor então os questiona qual trajeto teve a menor soma de L , qual teve o menor tempo de percurso e por que eles acham que essas diferenças aconteceram.

O professor pode então encerrar a aula explicando aos alunos, que, assim como eles provavelmente escolhem o caminho que minimiza o tempo de trajeto ou a distância até a escola, a natureza otimiza a *ação*, daí vem o princípio de ação estacionária.

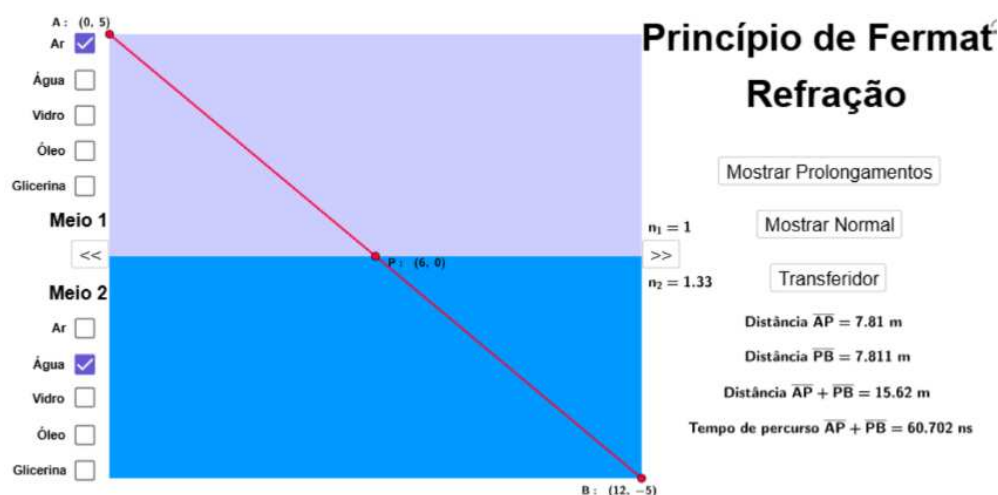
4.4 Etapa 4: O princípio de Fermat

Agora, para dar continuidade ao entendimento do princípio de ação estacionária, os alunos devem ser introduzidos ao princípio de Fermat. O objetivo dessa etapa é que os alunos vejam o princípio de ação estacionária sendo aplicado em outras áreas da física.

Para esta etapa o professor inicia a aula explicando brevemente o princípio de Fermat e sua definição: na refração da luz o caminho percorrido pela luz entre dois pontos situados em meios diferentes será aquele para o qual o tempo de percurso é mínimo.

O experimento dessa etapa será feito em duas plataformas diferentes. A primeira é de autoria da Doutora Giselle dos Santos Castro e do Prof. Dr. Nildo Loiola Dias, e está disponível no Laboratório Virtual de Física da UFC (“Princípio de Fermat: Refração”, [s.d.]). A segunda plataforma é novamente o PhET (“Bending Light”, [s.d.]).

Figura 4.7 – Simulador “Princípio de Fermat: Refração”



Fonte: Reproduzido de “Princípio de Fermat: Refração”, [s.d.]

Na simulação “Princípio de Fermat: Refração” no Laboratório Virtual de Física da UFC os alunos irão verificar o tempo de percurso da luz ao se propagar entre meios diferentes, de um ponto A ao B. Para isso, os alunos devem selecionar quais serão os meios que usarão (ar e água, por exemplo), posicionar os pontos A e B em qualquer lugar em seus respectivos meios e encontrar o ponto P na interface dos dois meios que minimize o tempo de percurso. No painel à direita do simulador (Figura 4.7), é possível verificar o comprimento dos segmentos AP e PB, a distância AP + PB, tempo de percursos e os índices de refração de cada meio, bem como ferramentas adicionais, como os prolongamentos das retas, a normal e um transferidor. Para melhor ajuste de precisão ao mover o ponto P, o simulador também conta com setas a direita e esquerda que movem o ponto P alterando o tempo de percurso com precisão de $1 \times 10^{-3} \text{ ms}$.

Encontrado o ponto P que torna o tempo de percurso o menos possível entre os dois pontos A e B, os alunos devem usar o transferidor disponibilizado no simulador para determinar os ângulos de incidência e refração. Com esses ângulos em mãos, os alunos passam agora para o simulador do PhET (“Bending Light”, [s.d.]). O objeto deste simulador é demonstrar como a

luz se curva em diferentes casos. No PhET, na interface de “mais ferramentas”, os alunos devem ajustar o laser com auxílio do transferidor para que o ângulo de incidência seja o mesmo obtido na simulação anterior. Dessa forma, os alunos irão verificar que a luz está refletindo exatamente como previram no simulador anterior, ou seja, a luz de fato escolhe o caminho que minimiza o tempo de viagem.

Ainda há duas considerações que podem ser feitas com o auxílio do simulador da Dra Giselle Castro. O professor pode incentivar que os alunos determinem qual seria a distância em linha reta entre os dois pontos ($d = \sqrt{AP^2 + PB^2}$), verificando que o trajeto que a luz faz é *maior* que a distância em linha reta, porém claro, mais rápido. Também é possível verificar que uma vez que o tempo de percurso mínimo tenha sido determinado, pequenas variações na posição do ponto P *não alteram* o tempo de percurso. Trata-se de um cálculo que devido a sua complexidade não foi incluso em detalhes nesse plano didático, mas sabemos que essas pequenas variações em relação à função original, é o que chamamos de η (Figura 3.1), e como vimos ao longo dos Capítulos 2 e 3 deste trabalho, essas pequenas variações $\eta(x)$, em primeira ordem, não são suficientes para alterar a função original $y(x)$. Sendo $y(x)$ o trajeto que minimiza a ação, pequenas variações nesta função também não alteram a ação. No caso dos raios de luz o que está sendo minimizado é o tempo, e como vemos na simulação, pequenas variações η de fato não alteram o tempo de viagem.

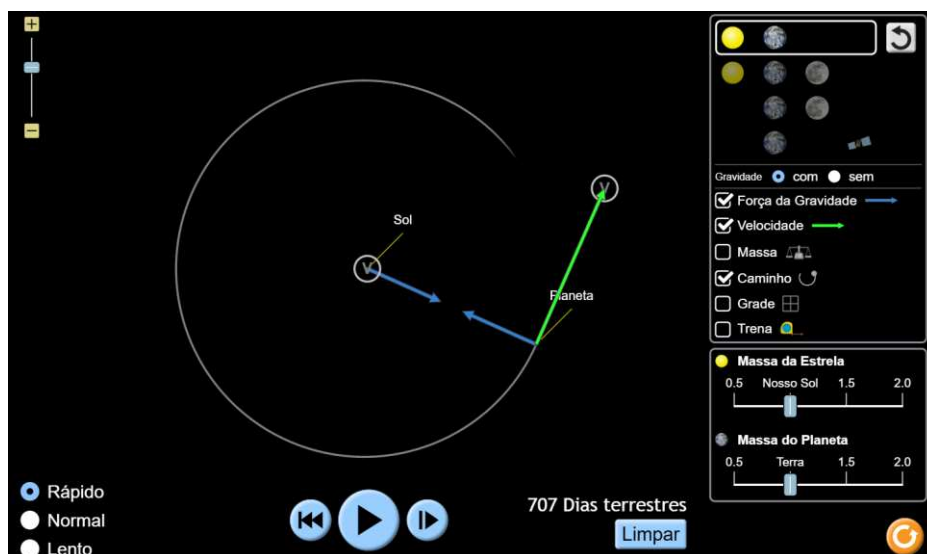
4.5 Etapa 5: Órbitas planetárias

Utilizando o simulador “Gravity and Orbits” no PhET (“Gravity and Orbits”, [s.d.]), o professor pode mostrar aos alunos a órbita da Terra ao redor do Sol em escala. A simulação permite que diversas alterações sejam feitas ao conjunto, como aumentar a velocidade inicial, aproximar ou afastar os corpos celestes (Figura 4.8). Dessa forma, o professor pode desafiar os alunos a encontrar outras órbitas possíveis para a Terra, e determinar o que acontece quando se tem energia cinética ou energia potencial demais ou de menos. O objetivo é que os alunos percebam que para que haja uma possível órbita, é necessário que haja um equilíbrio entre as energias cinética e potencial.

O professor deve incentivar que os alunos busquem agora diferentes órbitas para a Terra, mas desta vez que ela continue dando uma volta completa ao redor do Sol em 365 dias. Com essas “novas órbitas” encontradas a turma deve discutir as relações de energia entre elas: qual órbita tem maior e menor energia cinética? e potencial? E o mais importante, qual órbita balanceia a troca de energia da forma mais suave? Então o professor explica para a turma que

apesar de nesse caso não estarmos minimizando nem distancia, nem tempo, a órbita celeste escolhida pela Natureza é aquela onde o balanço entre energia cinética e energia potencial se dá da maneira mais suave e harmônica possível, o que torna a ação *estacionária*.

Figura 4.8 – Simulador “Gravity and Orbits”.



Fonte: “Gravity and Orbits”, [s.d.].

4.6 Etapa 6: Conclusão

O objetivo dessa sequência didática é que através de experimentos e simulações o aluno compreenda o princípio de ação estacionária, mesmo que de forma qualitativa, e que possa perceber que esse princípio é capaz de trazer uma visão unificada a diversas áreas da física. Também tive a intensão, de que, com essa sequência, os conceitos de energia cinética, energia potencial, conservação e variação de energia pudessem se tornar mais palpáveis no imaginário do aluno de ensino médio.

Espero que esse trabalho guie o professor a atingir tais objetivos com êxito, e que alunos possam aprender um pouco mais a cada aula.

“Quando eu estava no ensino médio, meu professor de física — cujo nome era Sr. Bader — me chamou um dia depois da aula de física e disse: "Você parece entediado; quero te contar uma coisa interessante". Então ele me disse algo que achei absolutamente fascinante e, desde então, sempre achei. Toda vez que o assunto surge, eu trabalho nele. Aliás, quando comecei a preparar esta palestra, me vi fazendo mais análises sobre o assunto. Em vez de me preocupar com a palestra, me envolvi em um novo problema. O assunto é este: o princípio da menor ação.” (“The Feynman lectures on physics vol. II ch. 19: The principle of least action”, [s.d.]

5 CONCLUSÃO

O objetivo desse trabalho era formular uma metodologia acessível e coesa para a abordagem do princípio de ação estacionária no ensino médio e, a partir dele, construir gradualmente uma visão unificada de conceitos físicos. O maior desafio a ser enfrentado era em como construir essa metodologia de forma que não incluísse o rebuscado cálculo que envolve as deduções desse princípio. A solução encontrada foi através de experimentos e simulações, que por si só já são ferramentas que tornam o ensino mais acessível, didático e dinâmico. Esse trabalho também conta com um extenso e detalhado acompanhamento do desenvolvimento histórico do princípio de ação estacionária.

Como a abordagem proposta por Taylor em *A Call to Action*, a metodologia proposta neste trabalho pode ser aplicada antes mesmo que os alunos tenham qualquer contato com a mecânica newtoniana (Taylor, 2003). Vemos também que uma abordagem por meio do princípio de mínima ação permite conectar diferentes áreas da física, facilitando a compreensão e unificação de conceitos que de início não parecem ter qualquer conexão entre si. Tornando a metodologia proposta muito próxima aos objetos de Taylor em seu editorial.

A metodologia desenvolvida por este trabalho, além de tudo, também é de fácil aplicação e desenvolvimento. Sendo o único requerimento que a escola possua laboratório de informática, para aplicação das simulações, que já é um espaço muito comum nas escolas públicas de ensino médio. As simulações utilizadas ao longo das etapas da sequência didática foram todas desenvolvidas tendo como público alvo justamente alunos de ensino médio, sendo assim, as interfaces são bem intuitivas e de fácil compreensão, tornando o processo de aplicação dessas simulações um momento dinâmico e cativante.

A partir do princípio de ação estacionária, foi possível abordar problemas de diferentes áreas da física e conectá-las a partir de um único princípio, a sequência didática proposta aborda áreas como mecânica clássica, ótica e mecânica celeste, mas ainda é possível expandir muito mais esse assunto caso o professor deseje. Dessa forma, conseguimos satisfazer os objetivos iniciais e superar os desafios enfrentados neste trabalho. Conseguimos reimaginar a forma como introduzimos conceitos físicos no ensino médio de forma a favorecer uma metodologia significativa e mais integrada.

REFERÊNCIAS

- ARISTOTLE. **De caelo**. Oxford, England: Clarendon Press, 1922. Disponível em: <https://archive.org/details/decaeloleofric00arisuoft> . Acesso em: 30 jul. 2025
- BENDING Light. Disponível em: <https://phet.colorado.edu/en/simulations/bending-light>. Acesso em: 17 jul. 2025.
- BREGER, H. **The mysteries of adaequare**: a vindication of Fermat. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 46, n. 3, p. 193–219, 1994.
- COHEN, M.; DRABKIN, I. E. *Physics In*: COHEN, M.; DRABKIN, I. E. **A Source Book in Greek Science**. Cambridge: Harvard University Press, 1965. p. 271–272.
- DACO, P. B.; ALARCÓN, B. **Cicloide**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/znqxnqvf>. Acesso em: 15 jul. 2025.
- DE LA CHAMBRE, M. C. **La Lumière**. 1662. p. 313–314.
- DESCARTES, R. **Discours de la méthode**: pour bien conduire sa raison, et chercher a verdate dans les sciences plus la dioptrique, les météores et la géométrie qui sont des essais de cette méthode. Leyde: Maire, 1637. p. 73.
- DO MUNDO, M. **O Caminho Mais rápido não é o Que parece!** Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=alzphVrX3dU>. Acesso em: 15 jul. 2025.
- ENERGY Skate Park. Disponível em: <https://phet.colorado.edu/en/simulations/energy-skate-park/about>. Acesso em: 15 jul. 2025.
- EULER, L. **Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti**. Lausanne e Geneva, 1744. Também em: EULER, L. *Opera Omnia I*. Vol. XXIV. CARATHÉODORY, C. (Ed.). Bern, 1952.
- FEYNMAN, R. P. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. **Reviews of Modern Physics**, v. 20, n. 2, p. 367–387, 1948. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/revmodphys.20.367>. Acesso em: 15 jul. 2025.
- FERMAT, P. DE. **Oeuvres de Fermat**. Paris, France: Gauthier-Villars et, 1891.
- GALILEI, G. **Discourses and Mathematical Demonstrations Concerning Two New Sciences**. Tradução de DRAKE, Stillman. Madison: University of Wisconsin Press, 1974. (Original de 1638).
- GANDZ, S. Studies in Babylonian Mathematics III: isoperimetric problems and the origin of the quadratic equations. **Isis**, v. 32, p. 103–115, 1940.
- GEOGEBRA - the world's favorite, free math tools used by over 100 million students and teachers. Disponível em: <https://www.geogebra.org>. Acesso em: 15 jul. 2025.

GIUSTI, E. Les méthodes des maxima et minima de Fermat. **Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Mathématiques**, v. 18, n. 6 (Fascicule Spécial), p. 59–85, 2009.

GRAVITY and Orbits. Disponível em: <https://phet.colorado.edu/en/simulations/gravity-and-orbits>. Acesso em: 18 jul. 2025.

HEATH, T. Vol. 2 *In*: **A History of Greek Mathematics**. Oxford: Oxford University Press, 1921. p. 206–213.

HERONIS Alexandrini. **Opera quae supersunt omnia**. Vol. 2. Teubner, 1976. Disponível em: <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k25187r>. Acesso em: 14 jul. 2025.

JOURDAIN, P. E. B. Maupertuis and the Principle of Least Action. **The Monist**, v. 22, p. 414–459, 1912.

KÖNIG, S. De universali principio aequilibrii et motus. **Nova Acta Eruditorum**, p. 162–176, 1751. Disponível em: <http://gallica.bnf.fr>. Acesso em: 14 jul. 2025.

LANCZOS, C. **The Variational Principles of Mechanics**. 2. ed. Toronto: University of Toronto Press, 1962.

LEIBNIZ, G. W. Vol. 3/1 *In*: GERHARDT, G. I. (ed.). **Mathematische Schriften**. Hildesheim: Georg Olms Verlagbuchhandlung, 1962.

LOEBLEIN, T. **Conservation of Energy 1**: introduction (qualitative approach). Disponível em: <https://phet.colorado.edu/en/activities/2856>. Acesso em: 15 jul. 2025.

MACH, E. **The Science of Mechanics**: a critical and historical account of its development. 6. ed. Tradução de Thomas J. McCormack. La Salle: Open Court Publishing Company, 1960.

MARK SMITH, A. **Ptolemy's Search for a Law of Refraction**: a case-study in the classical methodology of 'saving the appearances' and its limitations. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 26, n. 3, p. 221–240, 1982.

MAUPERTUIS, P. L. M. de. Accord de différentes loix de la nature, qui avoient jusqu'ici paru incompatibles. **Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles Lettres**, França, 1744. p. 417–426.

MAUPERTUIS, P. L. M. de. Les loix du mouvement et du repos duites d'un principe metaphysique. **Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles Lettres**, Paris, 1746. p. 267–294.

McGINNESS, L. P.; SAVAGE, C. M. Action physics. **American Journal of Physics**, v. 84, n. 9, p. 704–708, 2016. <https://doi.org/10.1119/1.4955145>.

MOORE, T. A. Getting the most action out of least action: a proposal. **American Journal of Physics**, v. 72, n. 4, p. 522–527, 2004. <https://doi.org/10.1119/1.1646133>.

PAPPUS of Alexandria. **Pappi Alexandrini Collectionis**: quae supersunt. Vol. 2, p. 1189–1211, 1888.

PEDERSEN, O. **Early Physics and Astronomy**: a historical introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. p. 115.

PHET Interactive Simulations. Disponível em: <https://phet.colorado.edu>. Acesso em: 15 jul. 2025.

PRINCÍPIO de Fermat: refração. Disponível em: <https://www.laboratoriovirtual.fisica.ufc.br/princ%C3%ADpio-de-fermat-refracao>. Acesso em: 17 jul. 2025.

PRINCIPLE of Least Action. Eftaylor.com. Disponível em: <https://www.eftaylor.com/leastaction.html> . Acesso: 15 jul. 2025.

RASHED, R. **Optique géométrique et doctrine optique chez Ibn al-Haytham**. Archive for History of Exact Sciences, v. 6, p. 271–298, 1970.

SABRA, A. I. **Theories of Light from Descartes to Newton**. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

SERFATY, S. Lagrange and the calculus of variations. **Lettera Matematica**, v. 2, n. 1–2, p. 39–46, 2014. <https://doi.org/10.1007/s40329-014-0049-x>.

SORIA, A. O. **Braquistócrona**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/dk4yepdy>. Acesso em: 15 jul. 2025.

TAYLOR, E. F. Guest editorial: a call to action. **American Journal of Physics**, p. 423–425, 5 maio 2003.

TAYLOR, E. F.; VOKOS, S.; O'MEARA, J. M.; THORNBUR, N. S. Teaching Feynman's sum-over-paths quantum theory. **Computers in Physics**, v. 12, n. 2, p. 190–199, 1998. <https://doi.org/10.1063/1.168652>.

THE FEYNMAN lectures on physics vol. II ch. 19: the principle of least action. Disponível em: https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_19.html. Acesso em: 18 jul. 2025.

THUCYDIDES. **The History of the Peloponnesian War**. 431 a.C. Disponível em: <http://classics.mit.edu/Thucydides/pelopwar.html>. Acesso em: 14 jul. 2025.

VIRGÍLIO. **Eneida**. Tradução de Manuel Odorico Mendes. Brasil: eBookLibris, 2018.

YURKINA, M. I. Sur l'histoire de la notion du potentiel. **Journal of Geodesy**, v. 59, n. 2, p. 150–166, 1985.